

Análisis de sensibilidad para cinco configuraciones de electrodos en sondeos eléctricos verticales

Hugo Fernando Gómez Ochoa, Anderson Julian Becerra Bernal y Heiner Albeiro Castro Dueñez

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Director

José David Sanabria Gómez

Ph.D. Sismología

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2021

Tabla de Contenido

Introducción	12
1. Conducción eléctrica en medios continuos - Ecuaciones de Maxwell	15
1.1. Ley de Ohm	16
1.2. Potencial generado por un electrodo en medio homogéneo	18
1.3. Potencial generado por dos electrodos en medio homogéneo	22
1.4. Resistividad aparente	23
1.5. Campos de fuentes puntuales en medios heterogéneos	29
1.5.0.1. El problema de una capa sobre un semiespacio	29
1.5.0.2. Condiciones frontera y de fuente	30
1.5.1. Solución del potencial de un electrodo de corriente puntual en la superficie de una tierra de dos capas horizontales por medio de separación de variables	31
1.5.2. Solución del potencial de un electrodo de corriente puntual en la superficie de una tierra de dos capas horizontales por medio del método de imágenes	38
2. Sondeo eléctrico vertical	48
2.1. Configuraciones de electrodos	49
2.2. Penetración de las líneas de corriente	53
2.3. Profundidad de penetración de un SEV	59

FUNCIÓN DE SENSIBILIDAD PARA CONFIGURACIONES SEV	3
2.4. Curvas de resistividad aparente	61
3. Función de sensibilidad	67
3.1. Función de sensibilidad 1D	77
3.2. Función de sensibilidad 2D	81
4. Conclusiones	92
Referencias Bibliográficas	94
Apéndices	101

Lista de Figuras

Figura 1.	Campo de una toma de tierra semiesférica. Líneas: 1) de corriente, 2) equipotenciales. Tomado de: Iakubovskii and Liajov [1980]	19
Figura 2.	Explicación del calculo de dos tomas de tierra semiesféricas. Tomado de: Iakubovskii and Liajov [1980]	22
Figura 3.	Configuración general para un dispositivo de cuatro electrodos.	24
Figura 4.	Comportamiento de ρ_a para un medio homogéneo.	25
Figura 5.	Comportamiento de ρ_a para el caso en el que se encuentra un material buen conductor.	26
Figura 6.	Comportamiento de ρ_a para el caso en el que se encuentra un material mal conductor.	27
Figura 7.	Rangos de resistividad eléctrica para ciertas rocas, suelos y minerales.	28
Figura 8.	Estratificación de suelo heterogéneo en varias capas horizontales. Tomado de: Reynolds [2011].	29
Figura 9.	Electrodo puntual en una tierra de dos capas y el sistema de coordenadas cilíndrico.	30
Figura 10.	Explicación del calculo del campo de una fuente puntual de corriente situado en la superficie de la Tierra con presencia en el corte de una superficie de separación.	39

Figura 11.	Explicación del calculo del campo de una fuente puntual de corriente situado en la superficie de la Tierra con presencia en el corte de una superficie de separación.	42
Figura 12.	Explicación del cálculo del campo de una fuente puntual en un medio de dos capas. Tomado de: Iakubovskii and Liajov [1980].	43
Figura 13.	Configuración Wenner.	50
Figura 14.	Configuración Schlumberger.	51
Figura 15.	Configuración Dipolo-Dipolo.	51
Figura 16.	Configuración Polo-Dipolo.	52
Figura 17.	Configuración Polo-Polo.	52
Figura 18.	Determinación de la fracción de la corriente de entrada que fluye a través de un sección vertical situada entre las profundidades z_1 y z_2 . Tomado de: Muskat and Evinger [1941]	54
Figura 19.	Penetración de la corriente en un medio de dos capas. Tomado de: Parasnis [2012]	58
Figura 20.	Penetración de la corriente en un medio homogéneo. Tomado de: Parasnis [2012].	59
Figura 21.	Curvas maestras de resistividad aparente correspondientes a un modelo de dos capas. Tomado de: Lowrie [2007]	63
Figura 22.	Ejemplos de curvas de resistividad aparente correspondientes a un modelo de dos capas. Tomado de: Iakubovskii and Liajov [1980]	64
Figura 23.	Ejemplos de curvas de resistividad aparente correspondientes a un modelo de tres capas. Tomado de: Lowrie [2007]	65

- Figura 24. Configuración para el cálculo de la función de sensibilidad dentro de un medio homogéneo para dos electrodos. 69
- Figura 25. Configuración para el cálculo de la función de sensibilidad dentro de un medio homogéneo para cuatro electrodos. 70
- Figura 26. Configuración para el cálculo de la función de sensibilidad dentro de un medio homogéneo para cuatro electrodos (Dipolo-Dipolo). 75
- Figura 27. Configuración para el cálculo de la función de sensibilidad dentro de un medio homogéneo para tres electrodos (Polo-dipolo). 76
- Figura 28. Función de sensibilidad 1D normalizada. 80
- Figura 29. Diagrama de sensibilidad y resolución para el arreglo Wenner. Los cuatro electrodos están separados en distancias iguales. En este caso la distancia a se incrementa en pasos de na manteniendo fijo el punto medio del arreglo, para (a) $n = 1$, (b) $n = 4$, (c) $n = 12$, (d) $n = 16$, (e) $n = 20$, (f) $n = 24$, (gg) $n = 26$, (h) $n = 28$, (i) $n = 32$, (j) $n = 36$. 83
- Figura 30. Diagrama de sensibilidad y resolución para el arreglo Schlumberger. Los electrodos P_1, P_2 se mantienen fijos y C_1, C_2 se alejan del punto medio simétricamente en pasos, donde (a) $n = 1$, (b) $n = 8$, (c) $n = 10$, (d) $n = 15$, (e) $n = 17$, (f) $n = 20$, (g) $n = 23$, (h) $n = 25$, (i) $n = 27$, (j) $n = 39$. 85

Figura 31. Diagrama de sensibilidad y resolución para el arreglo Dipolo-Dipolo. La distancia a del par de dipolos C_1, C_2 y P_1, P_2 se mantiene fija. Los dipolos se mueven hacia afuera simétricamente a paso de na manteniendo el punto medio del arreglo, para (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 5$, (d) $n = 7$, (e) $n = 10$, (f) $n = 11$, (g) $n = 13$, (h) $n = 14$, (i) $n = 16$, (j) $n = 19$.

87

Figura 32. Diagrama de sensibilidad y resolución para el arreglo Polo-Dipolo. Se trata de un arreglo asimétrico, donde la distancia a del dipolo P_1, P_2 se mantiene fija, el electrodo C_2 se aleja de tal manera que no influya en la medida del potencial. El dipolo y el electrodo C_1 se mueven hacia afuera a paso de na , para (a) $n = 1$, (b) $n = 3$, (c) $n = 5$, (d) $n = 8$, (e) $n = 10$, (f) $n = 13$, (g) $n = 15$, (h) $n = 17$, (i) $n = 20$, (j) $n = 23$.

89

Figura 33. Diagrama de sensibilidad y resolución para el arreglo Polo-Polo. La distancia a entre los electrodos se aumenta a pasos de na manteniendo el punto medio de la configuración fijo, para (a) $n = 1$, (b) $n = 5$, (c) $n = 10$, (d) $n = 13$, (e) $n = 15$, (f) $n = 18$, (g) $n = 20$, (h) $n = 23$, (i) $n = 25$, (j) $n = 35$.

91

Figura 34. Rejilla bidimensional de diferencia finita usada para discretizar el problema de resistividad. Tomado de: Dey and Morrison [1979a]

107

Lista de Tablas

Tabla 1.	Sesiones del seminario de investigacion	108
----------	---	-----

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Teorema de reciprocidad	101
Apéndice B. Cálculo Función de sensibilidad 1D	103
Apéndice C. Diferencias finitas	106
Apéndice D. Sesiones del seminario de investigacion	108

Resumen

Título: Análisis de sensibilidad para cinco configuraciones de electrodos en sondeos eléctricos verticales ¹

Autor: Hugo Fernando Gómez Ochoa, Anderson Julian Becerra Bernal y Heiner Albeiro Castro Dueñez. ²

Palabras Clave: Sondeo eléctrico vertical, resistividad aparente, función de sensibilidad.

Descripción: El método sondeo eléctrico vertical (SEV) es uno de los métodos geofísicos más importantes por su simplicidad en el trabajo de campo y bajo costo de operación, por tal razón es utilizado en diversas investigaciones de interés geofísico como prospección de yacimientos minerales, cartografía geológica, investigaciones geotécnicas e hidrológicas, etc. En el presente trabajo se realizará un análisis detallado de la función de sensibilidad o derivada de Fréchet para diferentes distribuciones espaciales de electrodos comúnmente utilizadas en el método geofísico SEV. Primero, se presenta la teoría general de resistividad eléctrica, analizando la resistividad aparente para un suelo homogéneo y un suelo estratificado de dos capas junto con las principales características del método. Luego se hace una introducción de manera general al estudio de curvas maestras, el coeficiente de transmisión y penetración de la corriente. Posteriormente, se utiliza un modelo de tierra homogéneo como modelo inicial para el cual se pueden calcular analíticamente los valores de la función de sensibilidad, normalizando las curvas de sensibilidad para hacer un análisis cualitativo. Por último, se presentan los resultados y conclusiones de la función de sensibilidad 1D y 2D para las diferentes configuraciones de electrodos: Wenner, Schlumberger, Dipolo-Dipolo, Polo-Dipolo y Polo-Polo, permitiendo determinar las variaciones verticales y laterales de sensibilidad y así determinar las ventajas y desventajas de cada uno de los arreglos. Finalmente se discuten las implicaciones prácticas de los resultados obtenidos.

¹ Trabajo de grado

² Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: José David Sanabria Gómez, Ph.D.

Abstract

Title: Sensitivity Analysis for Five Electrode Configurations in Vertical Electrical Soundings ¹

Author: Hugo Fernando Gómez Ochoa, Anderson Julian Becerra Bernal y Heiner Albeiro Castro Dueñez.²

Keywords: Vertical electrical sounding, apparent resistivity, sensitivity function.

Description: The vertical electric sounding method (VES) is one of the most important geophysical methods due to its simplicity in field work and low cost of operation, for this reason it is used in various investigations of geophysical interest such as prospecting for mineral deposits, geological cartography, geotechnical and hydrological investigations, etc. In the present work, a detailed analysis of the sensitivity function or Fréchet derivative will be carried out for different spatial distributions of electrodes commonly used in the SEV geophysical method. First, the general theory of electrical resistivity is presented, analyzing the apparent resistivity for a homogeneous soil and a two-layer stratified soil together with the main characteristics of the method. Then a general introduction is made to the study of master curves, the transmission coefficient and current penetration. Subsequently, a homogeneous earth model is used as the initial model for which the values of the sensitivity function can be analytically calculated, normalizing the sensitivity curves to make a qualitative analysis. Finally, the results and conclusions of the 1D and 2D sensitivity function are presented for the different electrode configurations: Wenner, Schlumberger, Dipole-Dipole, Pole-Dipole and Pole-Pole, allowing to determine the vertical and lateral variations of sensitivity and thus determine the advantages and disadvantages of each of the arrangements. Finally, the practical implications of the results obtained are discussed.

¹ Bachelor thesis.

² Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: José David Sanabria Gómez, Ph.D.

Introducción

En el año 1932 Conrad Schlumberger y Marcel Schlumberger abrieron el camino a la exploración eléctrica y posteriormente este tipo de exploración ha sido estudiado por muchos investigadores en busca diferentes configuraciones de electrodos para obtener una respuesta más acertada de la resistividad aparente observada. El sondeo eléctrico vertical (SEV) es uno de los principales métodos geofísicos utilizados en la exploración del subsuelo. Su bajo costo y facilidad al momento de realizar el montaje de campo, lo hacen una de las técnicas más utilizadas en estudios comerciales. Sin embargo, en los últimos años también se ha vuelto importante en el ámbito científico e investigación de problemas ambientales (Lowrie [2007]). El método SEV, se caracteriza por corresponder a un método galvánico³. En este método se utiliza un arreglo de electrodos conectados a los polos de una fuente de corriente continua, los cuales son introducidos en el terreno para generar una diferencia de potencial entre ambos electrodos, provocando la presencia de un campo eléctrico en el terreno (Loke and Barker [1996]). El SEV aprovecha los contrastes de resistividades presentes en el subsuelo, puesto que las rocas de acuerdo con su composición, textura y disposición presentan propiedades eléctricas diferentes, como la resistividad ρ , la permeabilidad dieléctrica ϵ y otras más (Telford et al. [1990]). El flujo de las líneas del campo eléctrico se contorna y adapta frente a cambios de resistividad presentes en el subsuelo, por tanto, un flujo mayor de líneas de campo representa una mayor corriente, generando un aumento en el potencial registrado.

³ Método de corriente de flujo constante, sin cambios de polaridad.

En la actualidad el SEV es utilizado con diferentes propósitos como lo son: la investigación de contaminación de aguas subterráneas producto de una columna de lixiviados, investigación de las estructuras del subsuelo en Dashgil volcán de lodo, Azerbaiyán, para delinear los posibles acuíferos subterráneos en la zona de Akobo, Nigeria (Gupta et al. [1997]), entre otros. En cada uno de los trabajos anteriores se utilizaron diferentes arreglos de electrodos para medir la resistividad aparente (Hamzah et al. [2007]) en cada problema planteado, con los datos recolectados y con ayuda herramientas computacionales se realizaron modelados directos y de inversión, permitiendo generar modelos en 2D y 3D de los perfiles de resistividad del subsuelo y de acuerdo a los contrastes de resistividades presentes en cada modelo y con valores teóricos de resistividad, es posible predecir las capas geológicas, yacimientos de minerales, flujos de aguas subterráneas, objetos enterrados, entre otros.

De acuerdo a lo anterior, el SEV se puede implementar en diversas zonas geológicas y con diferentes fines investigativos, sin embargo, el modelado directo el cual es realizado para predecir la resistividad aparente del medio, es función del arreglo de electrodos utilizados en la medición de campo y de la resistividad de la zona geológica (Dahlin [1996]), debido a que la geología del subsuelo puede ser muy compleja, las variaciones de resistividad eléctrica pueden cambiar rápidamente tanto lateral como verticalmente, por lo tanto, el uso de una configuración incorrecta de electrodos puede llevar a una interpretación imprecisa, una solución incompleta o una solución incorrecta del perfil de resistividad aparente del subsuelo. Los arreglos de electrodos más comunes son: Wenner, Schlumberger, Dipolo-Dipolo, Dipolo-Polo y Polo-Polo, estos arreglos

pueden ser sensibles frente a variaciones horizontales y verticales de resistividad, por consiguiente, es importante primero caracterizar cada configuración de electrodos para conocer qué tipo de investigación de resistividad del subsuelo se puede llevar a cabo con cada uno, con el fin de obtener datos de campos asociados que puedan ser tratados con el modelado directo el cual se ajuste como una solución idónea al problema planteado.

1. Conducción eléctrica en medios continuos - Ecuaciones de Maxwell

Para medir la resistividad eléctrica del subsuelo se le aplican campos eléctricos por medio de la inyección de corrientes. El comportamiento de estos campos obedecen las leyes de Maxwell (Cheng [1997]). Estas ecuaciones constituyen la base del electromagnetismo y en su forma diferencial se escriben

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \eta,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

(1)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

donde $\mathbf{E}$ es el vector de campo eléctrico, $\mathbf{B}$ es el vector de campo magnético, $\mathbf{H}$ es el vector de intensidad de campo magnético, $\mathbf{D}$ es el vector de desplazamiento eléctrico, $\mathbf{J}$ es el vector de densidad de corriente, η es la densidad volumétrica de cargas eléctricas presentes en el medio, μ es la permeabilidad magnética y ε es la permitividad eléctrica. El desplazamiento eléctrico $\mathbf{D}$ es directamente proporcional al campo eléctrico $\mathbf{E}$ y esa constante de proporcionalidad es ε

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

Por tratarse de un régimen estacionario las derivadas con respecto al tiempo se anularán.

Entonces

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0},$$

por lo tanto, se tiene un campo eléctrico irrotacional. Es decir, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ es conservativo, consecuentemente puede escribirse como el gradiente de una función escalar V llamada potencial eléctrico

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (2)$$

1.1. Ley de Ohm

El físico alemán Georg Ohm estableció que para algunos materiales la *densidad de corriente* $\mathbf{J}$ es proporcional al *campo eléctrico* $\mathbf{E}$, y esta proporcionalidad es característica de cada sustancia (Purcell [1969]).

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}, \quad (3)$$

la constante de proporcionalidad ρ es una propiedad física intrínseca del material y se define

como la *resistividad* del conductor. La unidad de la resistividad es el $\Omega \cdot m$ y expresa la capacidad de un material para oponerse a un flujo de carga. El inverso de ρ se llama la *conductividad*, denotado por σ , su unidad es el recíproco de la resistividad $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ y expresa la capacidad de permitir un flujo de carga.

La densidad de corriente J se define como la corriente I por unidad de área transversal A del conductor, y debido a que la fuerza de Coulomb es una fuerza conservativa, se puede expresar el campo eléctrico E como la razón entre el potencial eléctrico V y la longitud del material L (suponiendo que el gradiente de potencial sea constante a lo largo de la longitud del conductor). Así, la ley de Ohm se puede denotar

$$\frac{V}{L} = \rho \frac{I}{A}, \quad (4)$$

reordenando los términos el potencial eléctrico se puede escribir

$$V = \rho \frac{L}{A} I.$$

Se define la resistencia R como

$$R = \rho L / A,$$

su unidad es el *ohm* (Ω). El inverso de la resistencia es llamado *conductancia* y su unidad es el

siemens (S). Se Puede reescribir la ley de Ohm, como

$$V = IR. \quad (5)$$

1.2. Potencial generado por un electrodo en medio homogéneo

Suponga se coloca en la superficie del terreno una toma de tierra de forma semiesférica, se determinará el campo generado por este electrodo en función de la resistividad ρ del subsuelo, de la posición del punto de interés y de la intensidad de corriente I que entra en el terreno por medio del mismo.

De la figura (1) se aprecia que la distancia entre el punto A el cual se encuentra en la mitad del electrodo semiesférico y el punto M se designa por r . La solución del problema se simplifica si la corriente que entra en el subsuelo a través del electrodo, a causa de la homogeneidad del mismo, se extiende uniformemente en todas las direcciones (Loke and Meng [2004]). Las líneas de corriente en este caso coinciden con los radios que parten del centro del electrodo, y las superficies equipotenciales que deben ser perpendiculares a las líneas de corriente, las cuales forman un sistema de semiesferas concéntricas con centro en el punto A .

Se fija un sistema de superficies equipotenciales en el que la primera pasa por el punto M , la segunda está separada de la primera una distancia Δr infinitamente pequeña en comparación con r , la tercera con una distancia de $2\Delta r$ de la primera, etc. Evidentemente, de este modo obtenemos una

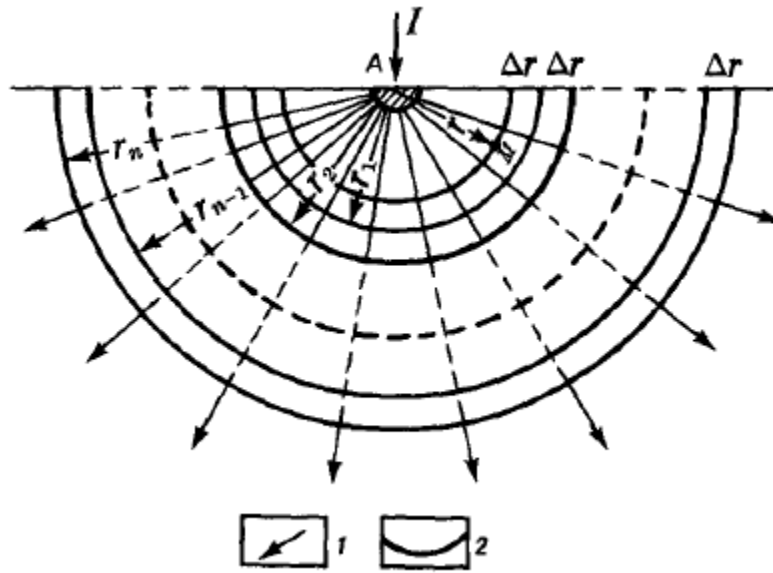


Figura 1. Campo de una toma de tierra semiesférica. Líneas: 1) de corriente, 2) equipotenciales. Tomado de: Iakubovskii and Liajov [1980]

serie de superficies semiesféricas de radios que van aumentando de modo continuo, en consecuencia los radios serán

$$r_1 = r + \Delta r, \quad r_n = r_{n-1} + \Delta r,$$

donde al potencial en la superficie de radio r_n lo designamos por V_{r_n} .

Se hallará una expresión para la diferencia de potencial ΔV entre dos superficies equipotenciales contiguas considerando la capa semiesférica incluida entre ellas como un conductor lineal (Kearey et al. [2013]). Para ello se dice que la intensidad de corriente que fluye a través de la capa

semiesférica es igual a I . Es decir, la intensidad de corriente que entra en el terreno a través de los electrodos.

Según la ley de Ohm (5), para conductores lineales $\Delta V_{rr_1} = V_{r_1} - V_r = IR$, donde R es la resistencia de la capa semiesférica. Teniendo en cuenta la definición de resistencia, para nuestro caso se tiene que l es igual a r y A igual a s , siendo esta última el valor medio del área de la sección transversal de la capa semiesférica incluida entre las superficies de radios r y Δr dada por

$$s = 2\pi \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right)^2,$$

por consiguiente

$$R = \frac{\rho (r_1 - r)}{2\pi \left(r^2 + r\Delta r + \frac{\Delta r^2}{4} \right)}.$$

Teniendo en cuenta que Δr es mucho menor que r y por consiguiente que la magnitud $\Delta r^2/4$ es pequeña en comparación con los restantes miembros que están entre paréntesis, se puede escribir

$$R \approx \frac{\rho (r_1 - r)}{2\pi r (r + \Delta r)} = \frac{\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right),$$

entonces la expresión para $\Delta V_{rr_1} = V_{r_1} - V_r$, definitivamente, tendrá la siguiente forma

$$\Delta V_{rr_1} = -\frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right).$$

La causa del signo menos se explica porque la corriente fluye de los puntos de potencial elevado a los puntos de bajo potencial, es decir al aumentar r el potencial disminuye.

Análogamente el potencial para la n -ésima semicircunferencia $V_{r_{n-1}r_n} = \Delta V_{r_n} - \Delta V_{r_{n-1}}$, es

$$\Delta V_{r_{n-1}r_n} = -\frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n} \right).$$

Teniendo en cuenta el principio de superposición, la diferencia de potencial entre la n -ésima semicircunferencia y el punto de interés M es

$$\Delta V_r - \Delta V_{r_n} = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_n} \right).$$

Si el radio de la ultima circunferencia se toma como infinitamente grande, entonces la diferencia de potencial entre el punto M y un punto situado en el infinito, es el potencial en el punto M . Por lo tanto para un r_n que tienda al infinito, se llega a una expresión para el potencial creado por un electrodo semiesférico, en un medio homogéneo e isótropo

$$V_M = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r}, \quad (6)$$

así, de la formula (2) se obtiene una expresión para el campo eléctrico en el punto M

$$E_M = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r^2}. \quad (7)$$

1.3. Potencial generado por dos electrodos en medio homogéneo

Suponga que ahora se colocan en la superficie del terreno dos tomas de tierra de forma semiesférica, de tal manera que ambos electrodos se encuentren a distancias del mismo orden de magnitud del punto de observación M , por consiguiente el campo en este punto es creado por ambos electrodos y puesto que en lo que sigue nos interesaremos por un campo sobre la superficie del terreno, el punto M lo situamos en esta superficie.



Figura 2. Explicación del cálculo de dos tomas de tierra semiesféricas. Tomado de: Iakubovskii and Liajov [1980]

Se designa como x a la distancia del electrodo A al punto M , a la distancia entre electrodos como L . Y se hallará la relación entre V y x ; el potencial V_{MA} , creado por la toma de tierra A , en el punto M según la expresión (6) es

$$V_{MA} = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{|x|}. \quad (8)$$

Por consiguiente el potencial V_{MB} creado en este mismo punto por la toma de tierra B es

$$V_{M_B} = -\frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{|L-x|},$$

el signo menos de esta expresión obedece a que el electrodo B está conectado al polo negativo de la fuente de corriente (Iakubovskii and Liajov [1980]).

El potencial V_M , creado en el punto M por ambos electrodos, es igual a la suma de los potenciales V_{M_A} y V_{M_B}

$$V_M = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|L-x|} \right). \quad (9)$$

Utilizando la formula (2) se calcula la intensidad del campo eléctrico E_x en los puntos de la recta que une ambos electrodos. Para ello es necesario tomar la primera derivada del potencial respecto a la distancia con signo contrario, así el campo eléctrico es

$$E_x = -\frac{\rho I}{2\pi} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(L-x)^2} \right]. \quad (10)$$

1.4. Resistividad aparente

En el SEV el parámetro de estudio más importante es la resistividad eléctrica ρ , como anteriormente se dijo es medida en $\Omega \cdot m$ está determinada por la ley de Ohm (4), varía para cada mineral por efectos de tipo electroquímicos debido a que esta resistividad está relacionada en gran medida con la saturación del agua y los diferentes canales en los espacios porosos de la roca

(Reynolds [2011]). Así mismo el registro de los valores de la resistividad varían dependiendo de la ubicación tanto de los electrodos como de la profundidad de la investigación y la estructura del corte geoelectrico (Zhou et al. [2002]).

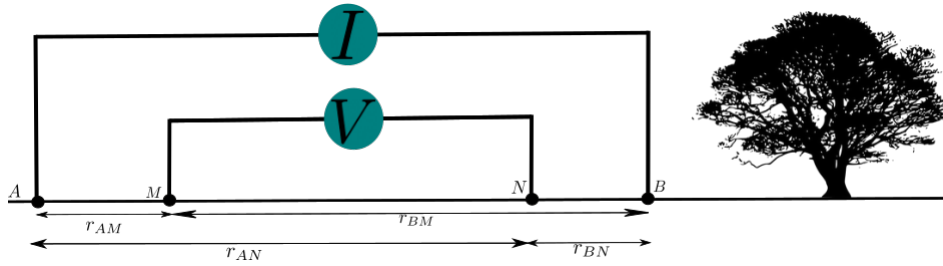


Figura 3. Configuración general para un dispositivo de cuatro electrodos.

De acuerdo con la figura (3) y partiendo de la expresión (6) se tiene que el potencial generado por cada una de los electrodos de corriente en los puntos M y N es

$$V_{M_A} = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r_{AM}}, \quad V_{M_B} = -\frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r_{BM}}, \quad V_{N_A} = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r_{AN}}, \quad V_{N_B} = -\frac{\rho I}{2\pi} \frac{1}{r_{BN}},$$

donde el potencial de M es $V_M = V_{M_A} - V_{M_B}$, y el potencial de N es $V_N = V_{N_A} - V_{N_B}$. Por lo tanto la diferencia de potencial entre los puntos M y N está dada por

$$\Delta V \equiv V_M - V_N = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} - \frac{1}{r_{AN}} + \frac{1}{r_{BN}} \right),$$

reordenando los términos se tiene que la resistividad para un medio homogéneo es

$$\rho = \frac{\Delta V}{I} 2\pi \left[\frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} - \frac{1}{r_{AN}} + \frac{1}{r_{BN}} \right]^{-1}. \quad (11)$$

Esta relación también se puede emplear para la interpretación de los resultados de medición de un terreno heterogéneo. Sin embargo, en este caso tan sólo se obtiene una magnitud arbitraria con dimensiones de resistividad, la cual se denomina *resistividad aparente*. Por consiguiente, en el caso general

$$\rho_a = K \frac{\Delta V}{I}, \quad (12)$$

donde K se denomina *coeficiente del dispositivo* o factor geométrico y está determinado por la distancia entre los electrodos. En el caso particular de un medio homogéneo, la resistividad aparente coincide con la resistividad verdadera, $\rho_a = \rho$ (Nguyen et al. [2005]).

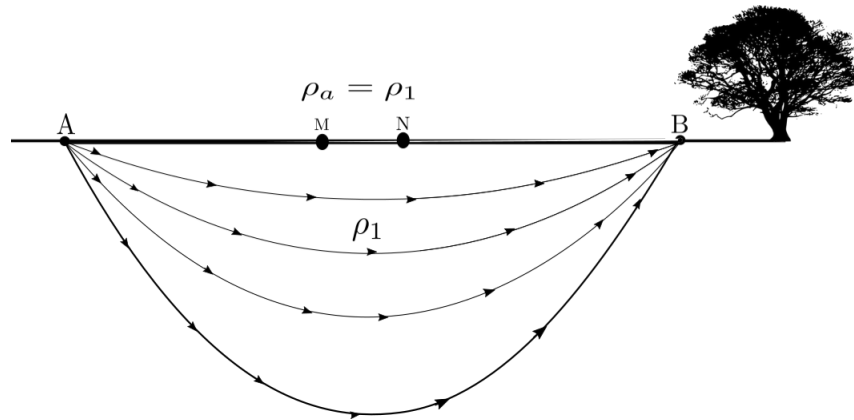


Figura 4. Comportamiento de ρ_a para un medio homogéneo.

De la fórmula (12) se deriva que la resistividad aparente no depende de I ya que al variar la

intensidad de la corriente aplicada en el terreno se tendrá una variación en la diferencia del potencial de igual proporción. Por lo tanto esto nos dice que la intensidad de la señal es inversamente proporcional a el factor geométrico del dispositivo (Loke [2000]) el cual está dado por

$$K = 2\pi \left[\frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} - \frac{1}{r_{AN}} + \frac{1}{r_{BN}} \right]^{-1}. \quad (13)$$

Para el caso de un medio con presencia de un conductor, la diferencia de potencial disminuye debido a que la corriente que pasa por el medio se concentrará en el cuerpo conductor, esto se debe a que el paso de cargas eléctricas es mayor en dicho material (figura (5)), sin embargo, cuando se tiene el caso contrario, es decir que el medio presente es un no conductor, la corriente circundante se concentra más en la zona donde está presente la toma de tierra debido a que el cuerpo tiene una resistividad alta (figura (6)).

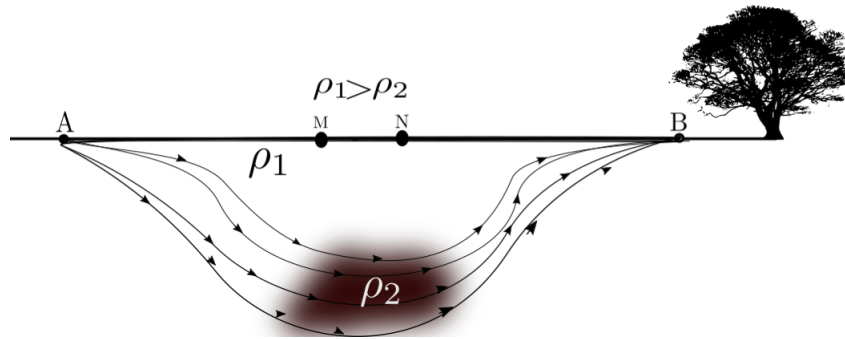


Figura 5. Comportamiento de ρ_a para el caso en el que se encuentra un material buen conductor.

Se debe tener en cuenta que la resistividad aparente no representa el valor promedio de las resistencias verdaderas de las rocas. Como ya se ha dicho, la resistividad de la roca depende de la

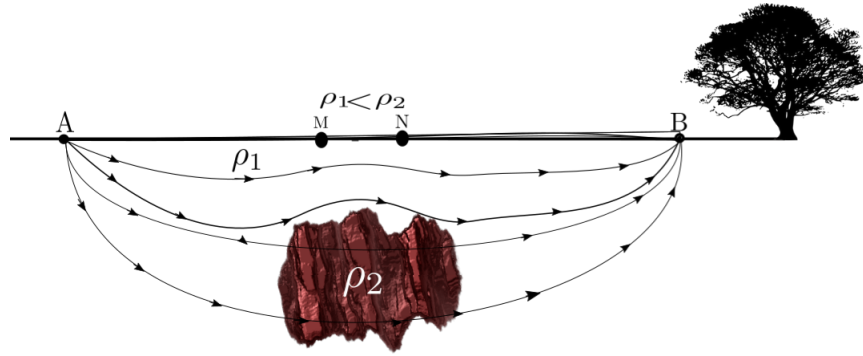


Figura 6. Comportamiento de ρ_a para el caso en el que se encuentra un material mal conductor.

porosidad y saturación de agua presente en los poros. Debido a los procesos físico-químicos presentes en las rocas su conductividad es bastante variable, debido a que depende de la concentración y tipo de sales y minerales disueltos en la roca, estas características están descritas por medio de una formula empírica llamada *ley de Archie* dada de la siguiente manera

$$\rho = \frac{a}{\Phi^m S^n} \rho_w, \quad (14)$$

siendo ϕ y S fracciones entre 0 y 1, ρ_w la resistividad del agua subterránea, y los parámetros a , m y n constantes empíricas que se determinan dependiendo del caso en estudio, aunque por lo general $0.5 \leq a \leq 2.5$, $1.3 \leq m \leq 2.5$ y $n \approx 2$. En la figura (7) podemos ver los rangos de resistividad eléctrica para algunas rocas, suelos y minerales comunes.

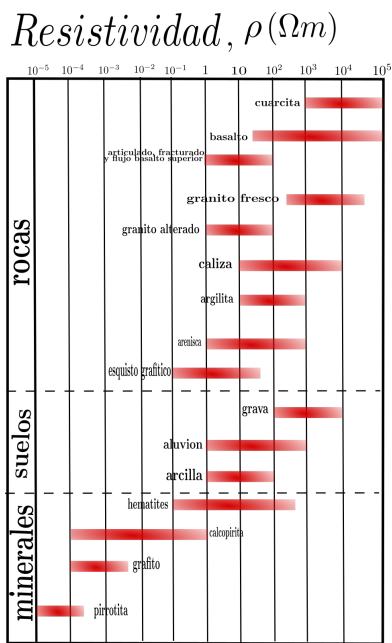


Figura 7. Rangos de resistividad eléctrica para ciertas rocas, suelos y minerales.

1.5. Campos de fuentes puntuales en medios heterogéneos

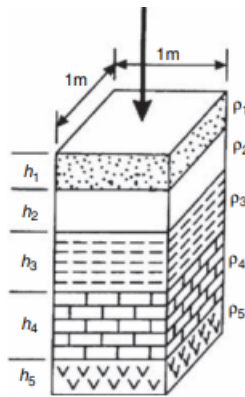


Figura 8. Estratificación de suelo heterogéneo en varias capas horizontales. Tomado de: Reynolds [2011].

En un medio eléctrico heterogéneo la desviación del campo observado, se denomina *anomalía* del campo eléctrico. Cada roca del corte geológico real que, en mayor o menor grado, es eléctricamente heterogénea, se sustituye en el corte idealizado por varias zonas constituidas por medios eléctricos homogéneos. Para solucionar el problema de la estructura del corte geoelectrico del campo observado en la superficie se exige el conocimiento de los cálculos del campo de las diversas fuentes para campos heterogéneos, sin embargo, estos cálculos son muy complejos y es necesario realizar unas simplificaciones como por ejemplo el corte geoelectrico heterogéneo sustituirlo por una serie de capas de medios homogéneos.

1.5.0.1. El problema de una capa sobre un semiespacio. El campo eléctrico generado por una fuente puntual en un medio heterogéneo, es estudiado ampliamente en el estudio de la resistividad eléctrica del subsuelo para resolver el problema fundamental de exploración eléctrica. El conocimiento del potencial de las capas idealizadas, permite obtener una idea de las propiedades

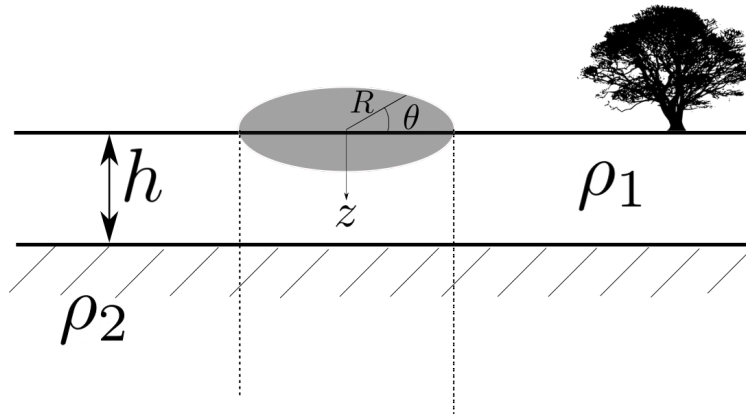


Figura 9. Electrodo puntual en una tierra de dos capas y el sistema de coordenadas cilíndrico.

eléctricas del subsuelo. Para este caso se supone un corte de dos capas horizontales donde la capa de resistividad ρ_1 y espesor h descansa sobre un semiespacio infinito de resistividad ρ_2 .

1.5.0.2. Condiciones frontera y de fuente. Para proceder con el cálculo, se debe tener en cuenta ciertas condiciones de fronteras. Primero que todo se debe garantizar que los potenciales en puntos situados infinitamente próximos a la superficie de separación de dos medios, en ambos lados de esta superficie sean iguales es decir $V_1 = V_2$.

En segundo lugar, la componente normal de la densidad de corriente debe ser continua en la interfaz de las dos superficies $J_n^1 = J_n^2$, según la ley de Ohm

$$J_n = \frac{1}{\rho} E_n = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial n},$$

donde $\partial V / \partial n$ es la derivada del potencial en la dirección normal. Entonces se tiene

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2}{\partial n}.$$

El campo en los puntos situados infinitamente próximos a la fuente, coincide con el campo en un medio homogéneo. Para el caso particular de una fuente puntual, el potencial

$$V = \frac{I\rho}{4\pi} \frac{1}{r},$$

es decir, si r tiende a cero, el potencial V tiende a infinito, como $1/r$. La condición, para un punto en el infinito el potencial de la fuente V tiende a cero, a medida que aumenta r el potencial disminuye. Estas condiciones se basa en el método de imágenes reflejadas, esto reduce el calculo de una fuente puntual en el caso de la presencia de una superficie de separación de dos medios con distinta resistividad, la influencia de perturbación de esta superficie se suple por la influencia del campo de unas fuentes puntuales ficticias situada en medio homogéneo(Iakubovskii and Liajov [1980]).

1.5.1. Solución del potencial de un electrodo de corriente puntual en la superficie de una tierra de dos capas horizontales por medio de separación de variables. Suponga que se tiene un medio heterogéneo el cual se representa con un medio de dos capas horizontales de diferente resistividad (figura 9) en el cual se inyecta una corriente de intensidad I a través de un electrodo. Para resolver este problema se recurre a utilizar las ecuaciones de Maxwell en donde se llega a la expresión

$$\nabla^2 V = 0, \tag{15}$$

esto debido a que no se tienen en cuenta efectos de polarización y la densidad de carga

volumétrica es cero, $\eta = 0$. A está expresión (15) se le conoce como ecuación de Laplace para el potencial eléctrico; como se considera que las capas son homogéneas en dirección horizontal para simplificar el calculo es valido utilizar coordenadas cilíndricas, la cual depende de (R, θ, z) donde R, θ son las coordenadas polares de la proyección de V sobre la superficie y z es la coordenada que representa la profundidad. Así, el laplaciano para el potencial V en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{\partial^2 V}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial R} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (16)$$

debido a la simetría del problema V no depende de θ . Para hallar la solución general de la ecuación (16) se hace uso del método separación de variables

$$V(R, Z) = F(R)G(z),$$

sustituyendo se tiene que

$$\frac{1}{R} \left(\frac{d^2 F}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dF}{dR} \right) + \frac{1}{G} \frac{d^2 G}{dz^2} = 0.$$

Debido a que estos dos términos son independientes entre sí, cada uno de ellos son iguales a un parámetro con signos opuestos λ^2 , siendo λ un termino independiente de Z y R . Donde se llega a la siguiente ecuación

$$\frac{d^2 G}{dz^2} - \lambda^2 G = 0,$$

la cual tiene solución de la forma

$$G = Ae^{\lambda z} + Be^{-\lambda z}, \quad (17)$$

$$\frac{d^2 F}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dF}{dR} + \lambda^2 F = 0,$$

la solución para la ecuación (17) está de la forma

$$F = J_0(\lambda R),$$

donde $J_0(\lambda R)$ la función de Bessel de primera especie y orden cero. Por lo tanto la solución general para el potencial está dada por

$$V(R, z)_j = \int_0^\infty \left(A_j(\lambda) e^{\lambda z} + B_j(\lambda) e^{-\lambda z} \right) J_0(\lambda R) d\lambda. \quad (18)$$

La solución más general para el problema, se obtiene sumando la solución particular obtenida

de la ecuación de Poisson (6)

$$V_0 = \frac{I\rho}{2\pi\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (19)$$

en términos de la función de Bessel el potencial V_0 puede expresarse de la siguiente manera

$$V_0 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda R) d\lambda, \quad (20)$$

por lo tanto el potencial para la primera capa V_1 está dado por

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty \left(e^{-\lambda z} + A_1(\lambda) e^{\lambda z} + B_1(\lambda) e^{-\lambda z} \right) J_0(\lambda R) d\lambda, \quad (21)$$

donde

$$A(\lambda R) = \frac{I\rho_1}{2\pi} A_1(\lambda R), \quad B(\lambda R) = \frac{I\rho_1}{2\pi} B_1(\lambda R).$$

El potencial en la segunda capa es

$$V_2 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty \left(C(\lambda) e^{\lambda z} + D(\lambda) e^{-\lambda z} \right) J_0(\lambda R) d\lambda. \quad (22)$$

Para determinar $A_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ y resolver el problema se debe aplicar las siguientes condiciones de frontera:

El potencial V_2 debe anularse en el infinito, por lo que

$$C(\lambda) = 0.$$

Debido a que el semiespacio superior (aire) no conduce corriente eléctrica, el campo eléctrico no puede tener componente normal a la superficie ($z = 0$). En vista de que la solución del potencial (19) ya cumple esta condición, sólo basta con imponérsela al potencial (18).

$$\left. \frac{\partial V_j}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \int_0^\infty \left(\lambda A_1(\lambda) e^{\lambda z} - \lambda B_1(\lambda) e^{-\lambda z} \right) J_0(\lambda R) d\lambda = 0.$$

Para $z=0$, donde $J_0(\lambda R) \neq 0$ se llega a la siguiente igualdad

$$\lambda A_1(\lambda) - \lambda B_1(\lambda) = 0,$$

$$A_1(\lambda) = B_1(\lambda).$$

Sustituyendo, se llega a que los potenciales V_1 y V_2 serán

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\lambda z} + A_1(\lambda) \left(e^{\lambda z} + e^{-\lambda z} \right) \right] J_0(\lambda R) d\lambda,$$

$$V_2 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty \left(D(\lambda) e^{-\lambda z} \right) J_0(\lambda R) d\lambda.$$

Se debe garantizar la continuidad del componente normal de la densidad de corriente eléctrica

J_n en el paso de un medio a otro: $J_n^1 = J_n^2$ ($z = h$). Según la ley de Ohm

$$J_n = \frac{1}{\rho} E_n = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial n}.$$

Por lo que la condición en el limite se puede expresar como

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_1}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_2}{\partial z} \Big|_{z=h},$$

operando se llega a que

$$\frac{1}{\rho_1} \left[e^{-\lambda h} + A_1(\lambda) \left(e^{-\lambda h} - e^{\lambda h} \right) \right] = \frac{1}{\rho_2} D(\lambda) e^{-\lambda h}. \quad (24)$$

Garantizando la continuidad del potencial en la superficie $z = h$

$$e^{-\lambda z} + A_1(\lambda) \left(e^{\lambda z} + e^{-\lambda z} \right) = D(\lambda) e^{-\lambda z}. \quad (25)$$

Para hallar $A_1(\lambda)$ restamos (24) de (25) con lo que se llega a que

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \left[e^{-\lambda h} + A_1(\lambda) \left(e^{-\lambda h} - e^{\lambda h} \right) \right] = e^{-\lambda z} + A_1(\lambda) \left(e^{\lambda z} + e^{-\lambda z} \right), \quad (26)$$

$$A_1(\lambda) \left[\rho_1 \left(e^{\lambda h} + e^{-\lambda h} \right) + \rho_2 \left(e^{\lambda h} - e^{-\lambda h} \right) \right] = \rho_2 e^{-\lambda h} - \rho_1 e^{-\lambda h}.$$

Por lo tanto se tiene que

$$A_1(\lambda) = \frac{(\rho_2 - \rho_1) e^{-\lambda h}}{(\rho_2 + \rho_1) e^{\lambda h} + (\rho_1 - \rho_2) e^{-\lambda h}}.$$

Multiplicando $A_1(\lambda)$ por $1/(\rho_1 + \rho_2) e^{\lambda h}$ tanto en el numerador como en el denominador

para no alterar la igualdad se obtiene

$$A_1(\lambda) = \frac{-k_{1,2}e^{-2\lambda h}}{1 + k_{1,2}e^{-2\lambda h}}, \quad k_{1,2} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Donde k corresponde al coeficiente de transmisión. Inyectando en el potencial V_1 se llega a que

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty \left[e^{-\lambda z} + \frac{-k_{1,2}e^{-2\lambda h}}{1 + k_{1,2}e^{-2\lambda h}} (e^{\lambda z} + e^{-\lambda z}) \right] J_0(\lambda R) d\lambda, \quad (27)$$

reescribiendo el potencial con (19), se tiene que

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{-k_{12}e^{-2\lambda h}}{1 + k_{12}e^{-2\lambda h}} (e^{\lambda z} + e^{-\lambda z}) J_0(\lambda R) d\lambda.$$

Por lo tanto para hallar el potencial en la superficie evaluamos $V_1(z = 0)$

$$V_1(z = 0) = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{r^2} - \int_0^\infty 2 \frac{k_{12}e^{-2\lambda h}}{1 + k_{12}e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda R) d\lambda \right].$$

Nótese que el potencial de la capa superior V_1 depende de la intensidad de la corriente I , la posición relativa del electrodo, las resistividad de la capa superior ρ_1 , la resistividad de la capa inferior ρ_2 y el espesor de la capa superior.

1.5.2. Solución del potencial de un electrodo de corriente puntual en la superficie de una tierra de dos capas horizontales por medio del método de imágenes. Se supone un medio separado por una línea horizontal la cual divide el medio en dos partes de resistividades

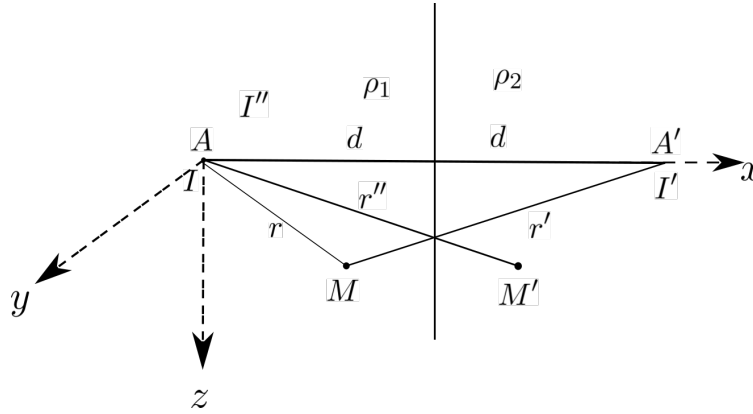


Figura 10. Explicación del calculo del campo de una fuente puntual de corriente situado en la superficie de la Tierra con presencia en el corte de una superficie de separación.

diferentes, el lado derecho de resistividad ρ_1 y el lado izquierdo de resistividad ρ_2 , en la parte derecha en un punto A se inyecta una corriente constante I , se toma un punto M ubicado a una distancia r, r' , respectivamente de las fuentes I, I' , ubicadas en los puntos A y A' , donde I' es la fuente imaginaria, en un medio de resistividad ρ_1 , por lo cual el potencial en el punto M vendrá dado por

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{4\pi r} + \frac{I'\rho_1}{4\pi r'}. \quad (28)$$

Ahora, si se considera que el medio es homogéneo y de resistividad ρ_2 y se toma un punto M' ubicado a una distancia r'' de la fuente de corriente ubicada en el punto A , la cual se llamará I'' luego el potencial V_2 será

$$V_2 = \frac{I''\rho_2}{4\pi r''}, \quad (29)$$

teniendo en cuenta que

$$r = r' = r'' = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Debido a que el eje x coincide con la normal por sistema referencia se obtiene la siguiente expresión

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{I\rho}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = -\frac{I\rho}{4\pi} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = -\frac{\rho I}{4\pi} \frac{d}{r^3},$$

teniendo en cuenta que $x = d$, se procede a aplicar las condiciones de frontera explicadas anteriormente, por lo tanto, se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$I\rho_1 + I'\rho_1 = I''\rho_2$$

$$C_2 + I' = I''$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se llega a el valor para la corriente I' y I'' está dado de la siguiente manera

$$I' = I \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}, \quad I'' = I \frac{2\rho_1}{\rho_2 + \rho_1}.$$

Teniendo en cuenta que el coeficiente de transmisión se define como $k_{1,2} = \rho_2 - \rho_1 / \rho_2 + \rho_1$, las corrientes de la fuente A y A' serán

$$I' = Ik_{1,2},$$

(30)

$$I'' = \frac{2I\rho_1}{\rho_2 + \rho_1}.$$

Sustituyendo las corrientes I' y I'' en las fórmulas (28) y (29) para los potenciales

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{k_{1,2}}{r'} \right),$$

(31)

$$V_2 = \frac{I\rho_2}{4\pi} \left(\frac{1 - k_{1,2}}{r''} \right).$$

Las expresiones (31) para los potenciales V_1 y V_2 se simplifican si el perfil de observación del potencial se hace pasar por el punto de ubicación de la fuente A , perpendicular a la línea de contacto de los dos medios como se puede ver en la figura (11). Usando la intensidad de corriente como $I = 2I$ y reemplazando los valores de r , r' y r'' en los potenciales (31), la fórmula para los potenciales V_1 y V_2 serán

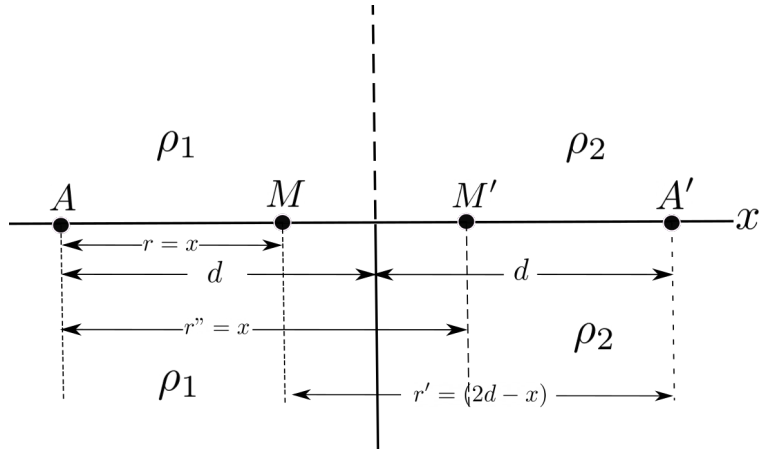


Figura 11. Explicación del calculo del campo de una fuente puntual de corriente situado en la superficie de la Tierra con presencia en el corte de una superficie de separación.

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{k_{1,2}}{2d-x} \right), \quad (32)$$

$$V_2 = \frac{I\rho_2}{2\pi} \left(\frac{1-k_{1,2}}{x} \right),$$

por lo tanto las expresiones para los campos eléctricos están dados de la siguiente manera

$$E_1 = -\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{k_{1,2}}{(2d-x)^2} \right), \quad (33)$$

$$E_2 = -\frac{\partial V_2}{\partial x} = \frac{I\rho_2}{2\pi} \left(\frac{1-k_{1,2}}{x^2} \right).$$

Ahora, se supone un modelo de dos capas con dos medios de resistividad ρ_1 y ρ_2 y un

espesor h_1 de la primera capa (figura 12).

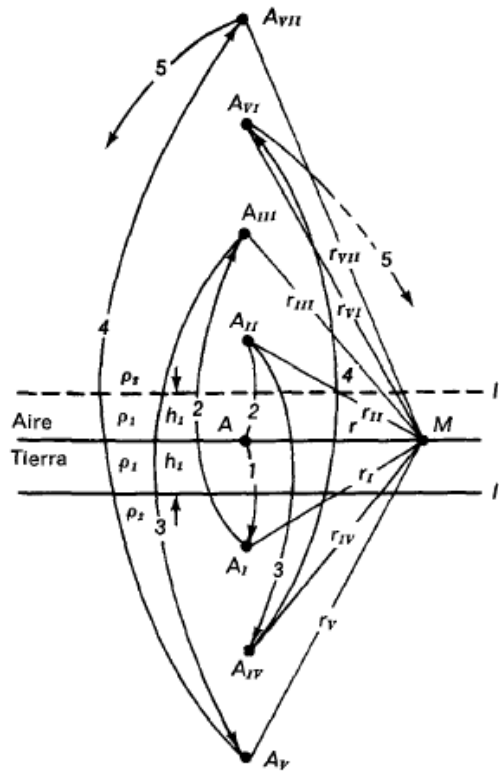


Figura 12. Explicación del cálculo del campo de una fuente puntual en un medio de dos capas. Tomado de: Iakubovskii and Liajov [1980].

La intensidad de corriente es de $2I$, el potencial V_1 en el punto M será creado por la fuente puntual A y por la fuente ficticia A_1 que es la imagen de la fuente A en el límite 1, según las fórmulas (30) para las corrientes

$$I_1 = 2Ik_{1,2}, \quad (34)$$

tomando las condiciones de frontera del problema

$$V_1 = \frac{2I\rho_1}{4\pi r} + \frac{I'\rho_1}{4\pi},$$

como $r' = r_1$, utilizando el teorema de Pitágoras en la figura anterior se tiene que $r_1 = \sqrt{r^2 + (2h_1)^2}$

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi r} + \frac{Ik_{1,2}\rho_1}{2\pi\sqrt{r^2 + (2h_1)^2}}.$$

Estas son las condiciones observadas en el limite 1, sin embargo, es necesario obtener también las condiciones en el limite 2. Para esto hay que reflejar no solo la fuente A , sino también la A_1 . La fuente A_1 en su reflexión crea la fuente ficticia A_2 a una distancia r_2 del punto M y a la distancia $2h_1$ de la superficie. En el punto reflejado de la fuente ficticia A_1 se tiene otra fuente ficticia A_3 a la distancia r_3 del punto M y $4h_1$ del punto A . Por lo tanto

$$I_2 = 2Ik_{1,2}, \tag{35}$$

$$I_3 = I_4k_{1,2} = (2Ik_{1,2})k_{1,2} = 2I(k_{1,2})^2.$$

Las fuentes A_2 y A_3 perturban las condiciones en el limite 1, para conservarlas, se vuelve a reflejar A_2 y A_3 en el limite 1. Se obtienen otras dos fuentes ficticias A_4 y A_5 a distancias del punto M y de la superficie: $r_4, 4h_1, r_5$ y $6h_1$ respectivamente, de modo que las corrientes A_4 y A_5 son

$$I_4 = I_2 k_{1,2} = (2Ik_{1,2})k_{1,2} = 2Ik_{1,2}^2,$$

(36)

$$I_5 = I_3 k_{1,2} = (2Ik_{1,2})k_{1,2} = 2Ik_{1,2}^3.$$

Estas operaciones se pueden alargar hasta el infinito, es decir una suma infinita de potenciales creados por la fuente real A y las fuentes ficticias

$$\begin{aligned} V_1 = & \frac{I\rho_1}{2\pi r} + \frac{Ik_{1,2}\rho_1}{2\pi\sqrt{r^2 + 2h_1^2}} + \frac{Ik_{1,2}\rho_1}{2\pi\sqrt{r^2 + 2h_1^2}} + \frac{Ik_{1,2}\rho_1}{2\pi\sqrt{r^2 + 2h_1^2}} + \frac{Ik_{1,2}\rho_1}{2\pi\sqrt{r^2 + 4h_1^2}} \\ & + \frac{Ik_{1,2}\rho_1}{2\pi\sqrt{r^2 + 4h_1^2}} + \frac{Ik_{1,2}\rho_1}{2\pi\sqrt{r^2 + 6h_1^2}} + \dots \end{aligned}$$

En consecuencia el Potencial V_1 se puede expresar de la siguiente manera

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{1,2}^n}{\sqrt{r^2 + (2nh_1)^2}} \right]. \quad (37)$$

Para calcular el campo eléctrico E , se deriva la expresión (37) respecto r

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{r^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_{1,2}^n r}{\sqrt{(r^2 + (2nh_1)^2)^3}} \right]. \quad (38)$$

Para hallar la expresión de la curva que correspondiente a un corte con un cierto número de capas,

se utiliza la expresión de intensidad de campo de una fuente puntual

$$E = -\frac{dU}{dr} = \frac{I\rho}{2\pi r^2},$$

despejando la resistividad

$$\rho = \frac{2\pi r^2 E}{I}. \quad (39)$$

Recordando que en el SEV se usan dos fuentes, eso implica que la intensidad del campo se duplica, por lo que la expresión para el potencial viene dada de la siguiente manera

$$E = \frac{I\rho}{\pi r^2},$$

$$\rho = \frac{\pi r^2 E}{I}.$$

Teniendo en cuenta que se trata de un campo heterogéneo, es necesario utilizar la resistividad aparente del medio

$$\rho_a = \frac{E\pi r^2}{I}, \quad (40)$$

sustituyendo la expresión obtenida para el campo eléctrico (38) en (40) se obtiene

$$\rho_a = \frac{I\rho_1}{2\pi} \frac{\pi}{I} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{1,2}^n r^3}{\sqrt{(r^2 + (2nh_1)^2)^3}} \right),$$

simplificando la expresión y dando un valor de $r = L/2$ se llega a la siguiente expresión para la

resistividad aparente (Iakubovskii and Liajov [1980])

$$\rho_a = \frac{\rho_1}{2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{1,2}^n (L/2)^3}{[(L/2)^2 + (2nh_1)^2]^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (41)$$

La presencia de la superficie de separación de los dos medios de diferente resistividad, determina la variación de la magnitud del potencial V_1 en el punto M . Esto se debe a que el medio de resistividad ρ_2 influye en la densidad de corriente en la distribución del punto M . Si $\rho_2 > \rho_1$, entonces la densidad de corriente aumenta (Ward [1990]). Si $\rho_2 < \rho_1$, la densidad de corriente disminuye debido a que las líneas de corriente tienden a circular más por el medio de resistividad ρ_2 debido a que es un medio más conductivo. Un análisis análogo se puede hacer sobre el potencial V_2 en un punto M' que se encuentra en el medio de resistividad ρ_2 .

Por tanto, la influencia de la superficie de separación se expresa en la variación de la densidad de corriente en su entorno y con ello la variación de los valores del potencial en comparación con un medio homogéneo (Maillet [1947]). El cálculo del campo eléctrico en medios heterogéneos se deduce cuantitativamente de la influencia de la superficie de separación teniendo en cuenta las denominadas condiciones límite, es decir, las condiciones en el entorno de la fuente del campo y en el infinito, que determinan la variación del potencial en el entorno de la superficie de separación de los medios con diferente resistividad y también en las proximidades y a gran distancia de las fuentes.

2. Sondeo eléctrico vertical

El sondeo eléctrico vertical es uno de los métodos geoelectricos más utilizados en el estudio del subsuelo, especialmente en la exploración de aguas subterráneas, la gran ventaja del método es su bajo costo y facilidad de operación, por lo tanto, los levantamiento geofísicos son más rápidos y baratos, además de ser un método no destructivo para obtener información del subsuelo (Golekar et al. [2014]). Este método consiste en inyectar corriente a través de un par de electrodos y medir la diferencia de potencial entre otro par de electrodos, con el fin de poder determinar la distribución de la resistividad eléctrica en el subsuelo, debido a que la estructura del corte geológico presenta diferentes tipos de propiedades eléctricas. De la separación de los electrodos va a depender la profundidad de penetración de las líneas de campo; a mayor separación entre los electrodos, mayor penetración(Sharma and Rajamani [2000]). La toma de datos de la resistividad aparente se registran en función de la separación de los electrodos.

Conrad Schlumberger comprendió la importancia de entender el problema de propagación eléctrica en el subsuelo, fruto de este trabajo se desarrollaron investigaciones que han aportado trabajos importantes para el desarrollo del SEV. Se han desarrollado investigaciones para yacimientos arqueológicos de periodos históricos (Edad de Hierro, Romano, Medieval) que fueron centrados en un contexto ambiental y geológico (Panissod et al. [1998]). En la zona histórica La Vieja Panamá, en Panamá se realizaron estudios de geoelectricos en varios puntos de interés con el fin de determinar las características resistivas de la zona respecto al sedimento circundante,

obteniéndose resultados satisfactorios para la localización de la traza de una calle (Pastor et al. [2001]). Debido a la importancia que tiene el método SEV el estudio de aguas subterráneas, en Pakistán se hicieron investigaciones con el fin de determinar la calidad de estas aguas, se realizaron técnicas de resistividad eléctrica para evaluar el potencial de la capa de agua dulce que se encuentra sobre el agua subterránea salina, demostrando que el SEV es un método no destructivo y útil para detectar la profundidad y el espesor de varias formaciones geológicas del subsuelo y la calidad del agua subterránea (Sikandar et al. [2010]). En Boyacá Colombia se realizaron estudios geoelectricos para localizar los niveles permeables saturados con el fin de ubicar pozos profundos de agua que generen suministro de agua (Vargas et al. [2016]).

2.1. Configuraciones de electrodos

En el método SEV existen varios tipos de configuraciones de acuerdo con de las posiciones relativas entre los electrodos inyección de corriente (A y B) y medidores de potencial (M y N), dependiendo de las distancias relativas entre los electrodos el registro de la resistividad aparente cambia en función de cada configuración. Según la disposición espacial de los electrodos, se pueden encontrar arreglos colineales tetraelectródicos simétricos $AMNB$, trielectródicos AMN tomando B al infinito, bielectródicos AM tomando N y B en el infinito y dipolares $ABMN$. El potencial en la superficie viene dado por la fórmula (11) donde la expresión (13) corresponde al factor geométrico, al reemplazar las distancias entre los electrodos en el factor geométrico se obtiene una resistividad aparente particular para cada arreglo, además de que el factor geométrico de cada arreglo da una idea de la intensidad en la señal que se tiene para cada distribución espacial de electrodos.

En la configuración Wenner (figura 13) los cuatro electrodos son colineales y la distancia a entre electrodos adyacentes son iguales. Al sustituir este valor equidistante en el factor geométrico se obtiene el valor de la resistividad aparente

$$\rho_a = 2\pi a \frac{V}{I}. \quad (42)$$

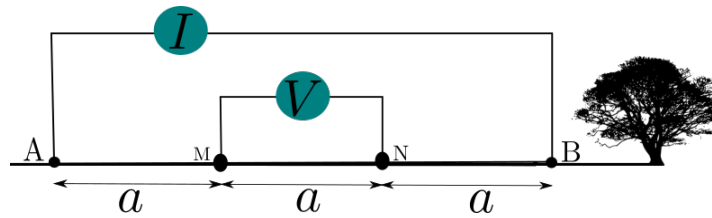


Figura 13. Configuración Wenner.

En el arreglo Schlumberger (figura 14) los electrodos M y N están a una distancia a entre sí, ubicados simétricamente en la mitad del arreglo, los electrodos de corriente A y B se encuentran a una distancia de $2L$. Sustituyendo esta información en el factor geométrico se encuentra la resistividad aparente de esta configuración

$$\rho_a = \frac{\pi V L^2}{4 I a}. \quad (43)$$

En la configuración Dipolo-Dipolo (figura 15), los electrodos A y B están separados una distancia a , del mismo modo, la separación entre los electrodos M y N se encuentran a una distancia a y la separación entre los dipolos A, B y M, N están separados a una distancia na es decir, $L = na$.

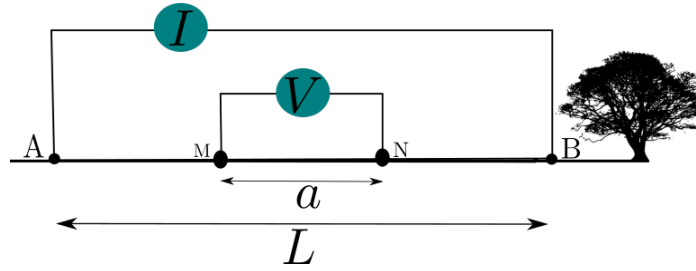


Figura 14. Configuración Schlumberger.

Sustituyendo estos datos en la expresión de factor geométrico, se encuentra que la resistividad aparente de esta configuración, viene dado por

$$\rho_a = \pi \frac{V}{I} \frac{L(L^2 - a^2)}{a^2}. \quad (44)$$

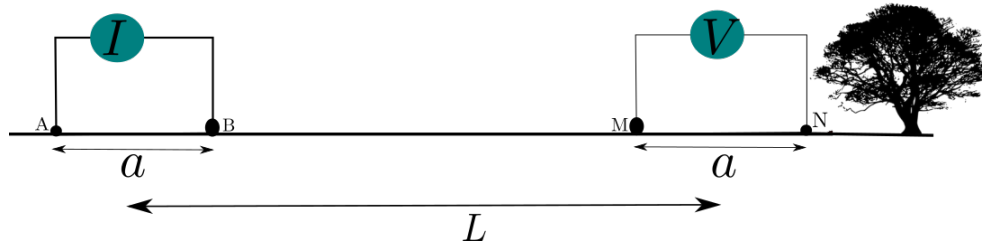


Figura 15. Configuración Dipolo-Dipolo.

En la configuración Polo-Dipolo (figura 16) el par de electrodos potenciales están conectados a tierra con una separación a entre si y se encuentran separados una distancia na del electrodo de corriente, el segundo electrodo de corriente está tan alejado de los demás electrodos que tiene un efecto despreciable en las mediciones del potencial. Al tener en cuenta estas condiciones y

distancias en el factor geométrico, se tiene que la resistividad aparente será

$$\rho_a = 2\pi n(n+1)a \frac{V}{I}. \quad (45)$$

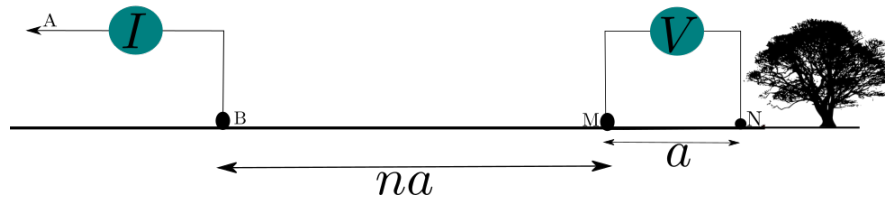


Figura 16. Configuración Polo-Dipolo.

En el arreglo polo-polo (figura 17), se utiliza un electrodo de corriente y un electrodo potencial, separados una distancia a entre sí. Los otros electrodos; el de corriente y potencial se extienden de tal modo que tengan un efecto despreciable en las mediciones. Al sustituir las distancias entre los electrodos en el factor geométrico, se obtiene la resistividad aparente correspondiente a la configuración Polo-Polo

$$\rho_a = 2\pi a \frac{V}{I}. \quad (46)$$

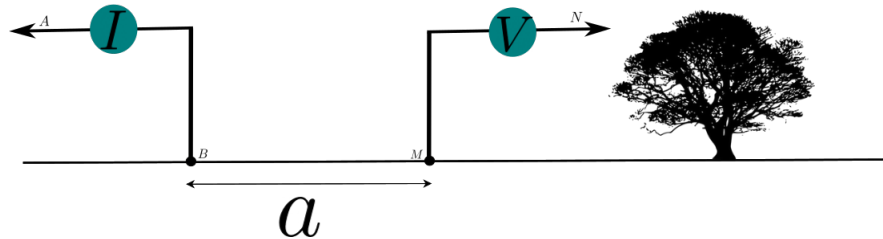


Figura 17. Configuración Polo-Polo.

2.2. Penetración de las líneas de corriente

Existen métodos desarrollados para calcular el potencial alrededor de un electrodo en la superficie de un terreno estratificado, en estos métodos se calculan las fracciones de la corriente total debida a dos electrodos de corriente que circulan en una capa dada y a través del plano vertical a medio camino entre los electrodos (Roy and Dhar [1971]). El método utilizado es aplicable en principio a cualquier número de capas, y se dan valores numéricos para terrenos de dos y tres capas. Se generan curvas "maestras" que muestran la variación de estas fracciones de corriente con la separación de los electrodos para los diferentes valores de resistividad (figura(21)) según los tipos de estratificación.

Como un principio en la prospección geofísica se conoce que cuanto mayor sea la separación entre los puntos de inyección de corriente sobre el terreno, mayores serán las profundidades del subsuelo que afecten a los valores relativos de los datos en la superficie (Koefoed [1972]). Es demostrable que la distribución del potencial alrededor de cualquier electrodo individual se aproxima asintóticamente a la apropiada para la resistividad de las capas más profundas a medida que la distancia entre el electrodo de corriente y el de potencial se incrementa indefinidamente. Se han calculado muchas curvas teóricas con el fin de proporcionar curvas de resistividad ideales correspondientes a tipos específicos de estratificación del subsuelo (Guerreiro [1983]). Mediante la comparación de los datos observados con las curvas calculadas se pueden hacer inferencias sobre la probable estratificación real de la resistividad en la región estudiada.

Supóngase que dos electrodos de corriente están situados simétricamente a lo largo del eje x a una distancia a del origen como se indica en la figura (18). Ahora se determina la fracción de corriente de entrada que fluye a través de una sección vertical situada entre las profundidades z_1 y z_2 .

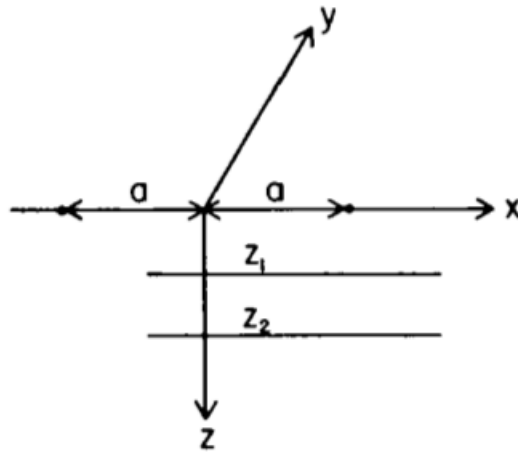


Figura 18. Determinación de la fracción de la corriente de entrada que fluye a través de un sección vertical situada entre las profundidades z_1 y z_2 . Tomado de: Muskat and Evinger [1941]

Si $\Phi(x, y, z)$ es la distribución del potencial en el estrato de interés, la densidad de corriente a través del plano y, z es

$$i = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0},$$

donde σ es la conductividad en este estrato. Así la corriente total que atraviesa el estrato será

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{-\infty}^{+\infty} i \, dz dy = -\sigma \int_{z_1}^{z_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} \, dz dy.$$

Si se divide por la corriente total introducida por el electrodo de entrada, la cual se denotara como $\mathbf{I}$, se obtendrá la fracción de la corriente total que pasa por el estrato de interés. Denotando esta fracción de corriente como $\mathbf{f}$ se tiene finalmente

$$f = -\frac{\sigma}{\mathbf{I}} \int_{z_1}^{z_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=0} dz dy. \quad (47)$$

Debido al principio de superposición, el potencial resultante Φ puede expresarse como la suma de los potenciales debidos al electrodo de entrada en $x = -a$ y al electrodo de salida en $x = +a$. De hecho, estas distribuciones de potencial pueden expresarse en la forma

$$\Phi = - \int_0^\infty J_0 \left(\alpha \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right) F(\alpha, z) d\alpha, \quad (48)$$

donde F es una función que depende de la estratificación del subsuelo y de la distribución de la conductividad, y además posee la propiedad de que la integral resultante tiene un polo simple en el electrodo, es decir, en $x = -a, y = z = 0$. Para el sistema compuesto en el que tenemos el electrodo de entrada en $x = -a$ y el electrodo de salida en $x = +a$, tendremos por tanto como resultante la distribución de potencial

$$\Phi = - \int_0^\infty F(\alpha, z) \left[J_0 \left(\alpha \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right) - J_0 \left(\alpha \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \right) \right] d\alpha.$$

La densidad de corriente en el plano medio, $x = 0$, tendrá por tanto la forma

$$i = 2a\sigma \int_0^\infty \frac{\alpha J_1 \left(\alpha \sqrt{a^2 + y^2} \right) F(\alpha, z)}{\sqrt{a^2 + y^2}} d\alpha,$$

introduciendo este valor en la expresión (47), evaluando la integral con respecto a y , y dividiendo por la corriente total de entrada I , se obtiene así la fracción de la corriente que pasa entre el plano z_1 y z_2 :

$$f = \frac{4\sigma}{I} \int_0^\infty \sin(\alpha a) d\alpha \int_{z_1}^{z_2} F(\alpha, z) dz. \quad (49)$$

Aunque no se puede escribir de antemano la expresión general de la integral con respecto a z , porque $F(\alpha, z)$ no tiene forma universal, siempre será sencillo evaluar la integral en cualquier caso especial, ya que los términos de F que dependen de z siempre serán de carácter exponencial. Además, estos términos exponenciales asegurarán siempre la convergencia de las integrales resultantes con respecto a α , excepto en los casos específicos en los que uno de los estratos tenga una conductividad nula. Estos últimos, sin embargo, pueden tratarse por separado sin dificultad, como se verá más adelante.

Antes de aplicar la expresión (49) a algunos casos especiales, es interesante observar que si en lugar de la expresión (48) se utiliza la representación de la imagen para la distribución de potencial, el valor resultante para f puede escribirse formalmente de forma explícita. Así, suponiendo que el sistema de imágenes apropiado para el tipo particular de estratificación considerado consiste en imágenes de fuerza q_n a distancias b_n a lo largo del eje z , la distribución potencial resultante será

$$\Phi = \sum q_n \left[\frac{I}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + (z-b_n)^2}} - \frac{I}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + (z-b_n)^2}} \right] + \frac{I}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{I}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}},$$

esto dará una densidad de corriente en $x = 0$ de

$$i = 2\sigma a \left[\frac{I}{(a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \sum \frac{q_n}{(a^2 + y^2 + (z-b_n)^2)^{3/2}} \right].$$

Observando que la entrada de corriente total correspondiente a Φ es $2\pi\sigma_0$ donde σ_0 es la conductividad de la superficie, obtenemos directamente para la fracción que pasa entre z_1 y z_2

$$f = \frac{2\sigma}{\pi\sigma_0} \left[\tan^{-1} \frac{z_2}{a} - \tan^{-1} \frac{z_1}{a} + \sum q_n \left(\tan^{-1} \frac{z_2 - b_n}{a} - \tan^{-1} \frac{z_1 - b_n}{a} \right) \right]. \quad (50)$$

Una interpretación sencilla de la expresión (50) se desprende de la observación de que las diferencias de los pares de términos arctangentes no son en realidad más que los ángulos en el plano x, z , con vértices en las imágenes. subtendidos por la sección $z_1 z_2$. Denotando estos ángulos por θ_n , se puede reescribir como

$$f = \frac{2\sigma}{\pi\sigma_0} \sum q_n \theta_n, \quad (51)$$

donde el efecto directo de las fuentes originales se incluye aquí también en la suma. Así,

cada par de fuentes -real o virtual-(Muskat and Evinger [1941]) contribuye a la fracción de corriente a través de cualquier sección una cantidad igual a $2\sigma/\pi\sigma_0$ veces el producto de su fuerza y el ángulo plano subtendido por la sección con cualquiera de las fuentes como vértice. La expresión (51) es interesante desde el punto de vista físico, ya que separa las contribuciones debidas a las imágenes individuales, la localización de sus posiciones, b_n , y en particular de sus fuerzas q_n .

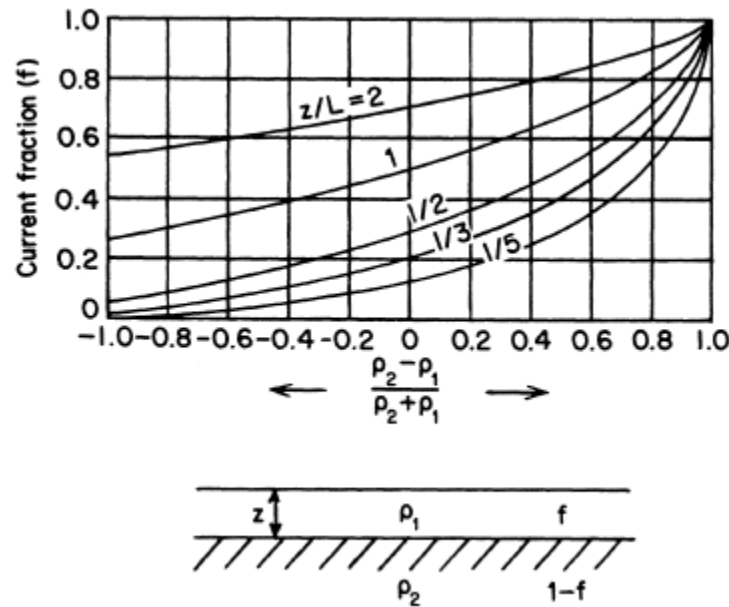


Figura 19. Penetración de la corriente en un medio de dos capas. Tomado de: Parasnis [2012]

En la figura (19) se ve un problema de dos capas, donde se muestran las fracciones totales de corriente que pasan por la capa superior o la capa inferior, su suma será necesariamente la unidad y esta fracción de corriente depende en mayor medida de las relaciones entre las resistividades del subsuelo. Para el caso en el que la capa inferior es un aislante, es decir, que ρ_2 sea muy grande en comparación a ρ_1 se ve que la fracción de corriente fluyen por la capa superior. En el caso contrario, donde la se tenga ρ_1 mayor que ρ_2 la corriente tiende a fluir en mayor proporción por la capa

inferior. Para el caso particular en el que hay pequeños contrastes de resistividad, es decir, si ρ_1 y ρ_2 no difieren mucho y se tiene una separación $L = z$, la fracción de corriente que está presente en la capa superior es la misma fracción de corriente que pasa por la capa inferior.

2.3. Profundidad de penetración de un SEV

Para un modelo de capas horizontales, el potencial eléctrico en la superficie del suelo puede representarse como la suma de los potenciales debidos a las fuentes primarias y los potenciales debidos a infinitos conjuntos de fuentes de imágenes. En el sondeo de resistividad la profundidad de la investigación se ha considerado sinónimo de la profundidad de penetración de la corriente, el alcance de investigación es la profundidad a la que una delgada capa horizontal de suelo aporta la cantidad máxima a la señal total medida en la superficie del suelo (Evjen [1938]).

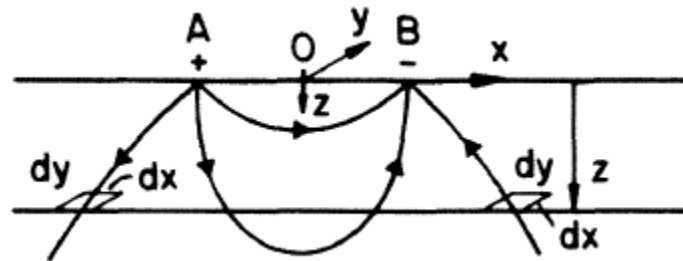


Figura 20. Penetración de la corriente en un medio homogéneo. Tomado de: Parasnis [2012].

Se considera un sistema de dos electrodos puntuales separados por una distancia $2L$, al inyectar una corriente I en la superficie horizontal en un semiespacio homogéneo e isotrópico con

resistividad ρ (figura (20)), el potencial en cualquier punto está dado por

$$V(x, y, z) = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{\left[(L+x)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[(L-x)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (52)$$

La densidad de corriente J en la línea vertical que pasa por el punto medio entre los electrodos, se puede obtener a partir de la ley de Ohm

$$J_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$J_z = \frac{Iz}{\pi} \left(\frac{1}{\left[(L+x)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[(L-x)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right).$$

La corriente total que penetra debajo de z se obtiene integrando $J_z dx dy$. Integrando x de menos infinito a cero y y de menos infinito a infinito

$$\frac{Iz}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \left(\frac{dx dy}{\left[(L+x)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{dx dy}{\left[(L-x)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (53)$$

Al resolver este par de integrales, para la primera integral se obtiene

$$\frac{I}{\pi} \left[\pi - \arctan \left(\frac{z}{L} \right) \right],$$

y para la segunda integral se tiene que

$$\frac{I}{\pi} \arctan\left(\frac{z}{L}\right).$$

Al restar estos dos resultados, se obtiene la fracción de corriente total que penetra por debajo de la profundidad z . Por otro lado, la fracción de corriente total $\Delta I/I$ que fluye dentro de una profundidad z desde la superficie del suelo y el plano horizontal z viene dada por (Roy and Apparao [1971])

$$\Delta I/I = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{z}{L}\right). \quad (54)$$

Por lo tanto el alcance en profundidad depende básicamente de la distancia entre los electrodos de corriente y potencial, este alcance en profundidad también tiene una dependencia de las características de la capa subterránea en cuanto a su resistividad y grosor de la capa. Otro factor que influye en la profundidad de la investigación es la mensurabilidad de la señal por parte del equipo de medición. La capacidad del equipo para detectar la amplitud de la señal y del ruido existente, la especificación de potencia del equipo y su capacidad para filtrar el ruido afectan la profundidad de la investigación (Okpoli [2013]). La profundidad de la investigación también depende de la capa subterránea; una capa superficial de baja resistividad reduce la profundidad de la investigación.

2.4. Curvas de resistividad aparente

La obtención de fórmulas rigurosas para el cálculo de las curvas de resistividad aparente fue sin duda uno de los avances más importantes en los sondeos de resistividad eléctrica. Antes de la invención de las computadoras, se construyó una serie de catálogos de curvas para cortes de dos

capas y tres capas, estas curvas teóricas calculadas para un arreglo de cuatro electrodos tiene en cuenta el cambio en la penetración de profundidad cuando las líneas actuales cruzan el límite a una capa con diferente resistividad (Lucendo [1984]).

La forma de la curva de resistividad aparente *vs* el espaciado de electrodos depende del contraste de resistividad entre las dos capas, una familia de curvas características se calculan para diferentes relaciones de ρ_1/ρ_2 . La disponibilidad de los catálogos de curvas permitieron hacer una interpretación de los estudios en campo, que consistía en comparar las curvas obtenidas en campo con las del catálogo de curvas teóricas, si las curvas registradas en campo coincidían con las curvas teóricas se tenía una solución al problema (Choudhury et al. [2001]).

En la figura (21) las curvas para valores de k cercanos a 1 suben más rápido, por consiguiente los niveles conductores se reflejan en las curvas más intensamente que los niveles de resistencia alta. En el caso en que $k = 0$ se tiene una línea recta horizontal debido a que se tiene un medio de una sola capa pues $\rho_1 = \rho_2$. Si se cuenta con un corte de dos capas caracterizado por $k = 1$, las líneas de corriente eléctrica se propaga solamente a través de la capa conductora superior, en el caso contrario, cuando $k = -1$ la corriente se desplaza por la capa conductora inferior.

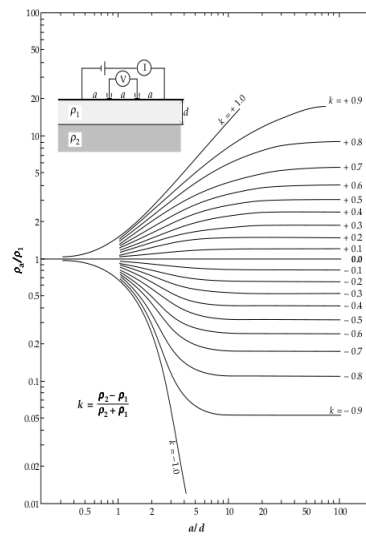


Figura 21. Curvas maestras de resistividad aparente correspondientes a un modelo de dos capas. Tomado de: Lowrie [2007]

El factor geométrico oscila entre los valores de $[-1,1]$ dependiendo del contraste entre las resistividades. En la figura (22) se presenta un ejemplo del comportamiento de la curva de resistividad aparente para un medio de dos capas, en la figura 22 (a) cuando k es positivo y figura 22 (b) si k es negativo.

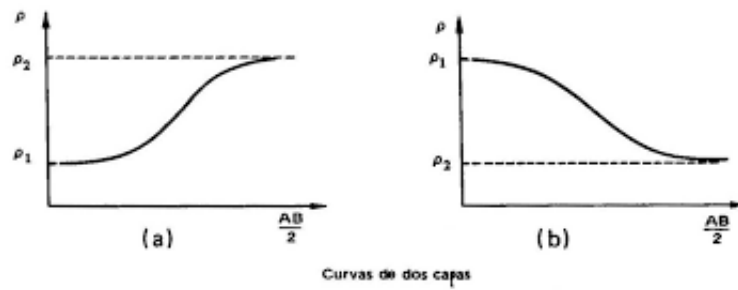


Figura 22. Ejemplos de curvas de resistividad aparente correspondientes a un modelo de dos capas. Tomado de: Iakubovskii and Liajov [1980]

Claramente en la naturaleza se encuentran sistemas de muchas capas para las cuales también se realizan curvas de resistividad. En la figura (23) se presentan algunos ejemplos de curvas para un modelo de tres capas.

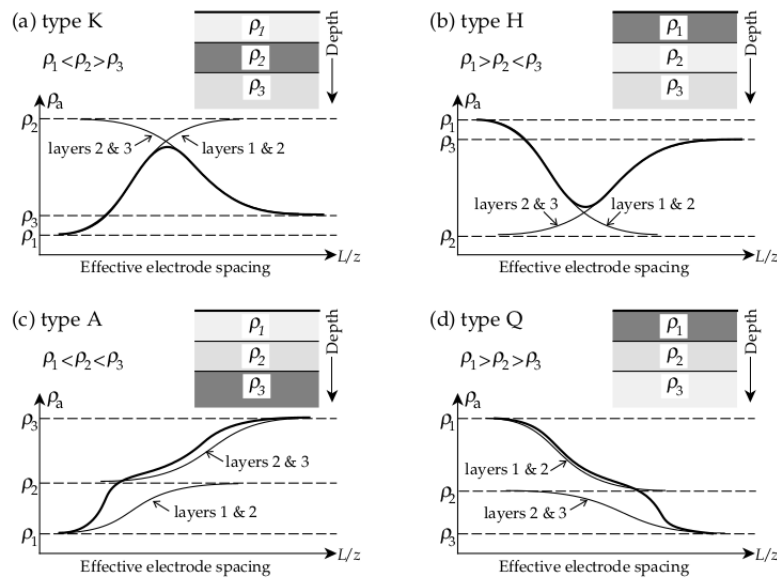


Figura 23. Ejemplos de curvas de resistividad aparente correspondientes a un modelo de tres capas. Tomado de: Lowrie [2007]

La forma de las curvas en los sondeos de resistividad depende básicamente del número de capas y la relación entre sus resistividades y el espesor de las capas. La variación de los parámetros de resistividad y espesor de las capas se traduce en subidas o corrimientos verticales u horizontal de las curvas dependiendo el caso. Las curvas de tres capas pueden ser de cuatro tipos. Las curvas de tipo *K*, donde corresponden a los cortes en las cuales la capa de resistividad ρ_2 es la capa con mayor resistividad, es decir, $\rho_1 < \rho_2 > \rho_3$. Las curvas de tipo *H*, donde la capa de resistividad ρ_2 es la capa con más baja resistividad, es decir, $\rho_1 > \rho_2 < \rho_3$. Las curvas de tipo *A*, que corresponden a estructuras donde a medida que aumenta la profundidad de la capa aumenta su resistividad, por lo tanto $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Por último las capas de tipo *Q*, que describe estructuras en las cuales la capa de

mayor resistividad es la capa superior y la capa con menor resistividad en la capa inferior, es decir,

$$\rho_1 > \rho_2 > \rho_3.$$

3. Función de sensibilidad

Al emplear el método SEV para un estudio de campo, es importante saber cual arreglo de electrodos es el más adecuado al momento de hacer una toma de datos. Para la elección del ”*mejor*” arreglo a utilizar se debe tener en cuenta la profundidad de investigación, la sensibilidad del arreglo a cambios verticales y horizontales en la resistividad del subsuelo y la fuerza de la señal total. Estas características se pueden determinar gracias a la función de sensibilidad representada matemáticamente por la derivada de Fréchet (McGillivray and Oldenburg [1990]). Esta función describe el grado en el que un pequeño cambio en la resistividad de una sección del subsuelo puede influir en el potencial medido por una configuración de electrodos particular. Al tener un valor de la función de sensibilidad alto, garantizará una mayor influencia en los cambios de resistividad de la región del subsuelo sobre las medidas (Dahlin and Zhou [2004]).

Al hacer un modelo de tierra homogénea con resistividad ρ , la ecuación de Poisson está dada de la siguiente manera

$$\nabla^2 \Phi = \rho I \delta(x), \quad (55)$$

donde Φ es el potencial resultante debido a una fuente de corriente I ubicada en la posición x .

Al hacer un análisis de perturbaciones de la ecuación anterior, donde se supone que el cambio en la resistividad tiene un valor constante en el volumen se llega a que el cambio del potencial resultante

$\delta\Phi$ de un cambio en la resistividad $\delta\rho$ del subsuelo está dado por (Apparao et al. [1992])

$$\delta\Phi(x,y,z) = \int_{\tau} \delta\rho(\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}') d\tau. \quad (56)$$

La sensibilidad del potencial en el receptor a un cambio de resistividad en profundidad está dado por el producto interno de la densidad de corriente $\mathbf{J}$ de una fuente puntual en el electrodo de corriente y una densidad de corriente $\mathbf{J}'$ de una fuente puntual en el electrodo de potencial integrando sobre el volumen perturbado (Park and Van [1991]).

Recordando la ley de Ohm: $J = 1/\rho \cdot E$ y teniendo en cuenta que $E = -\nabla\Phi$. Sustituyendo las anteriores expresiones en la expresión (56) se obtiene la razón de cambio entre el potencial y la resistividad

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\rho} = \frac{1}{\rho^2} \int_{\tau} \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi' d\tau. \quad (57)$$

Al considerar la configuración más sencilla, el arreglo Polo-Polo, que consta de un electrodo de potencial y un electrodo de corriente sobre la superficie (figura 24), siendo el cambio de resistividad constante en un elemento de volumen $d\tau$ y cero en los otros lugares (Boerner and West [1989]), donde Φ' es el potencial resultante de una fuente de corriente "ficticia" ubicado en el electrodo de potencial y Φ es el potencial causado por una fuente de corriente ubicado en el electrodo de corriente (Loke et al. [2013]).

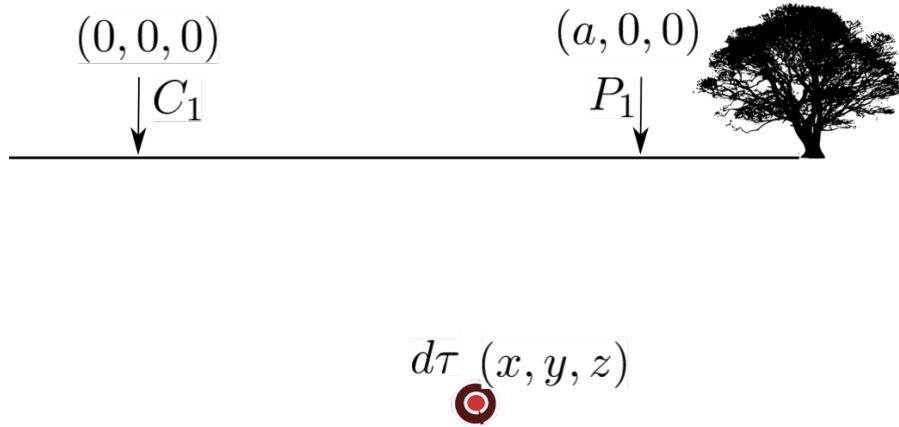


Figura 24. Configuración para el cálculo de la función de sensibilidad dentro de un medio homogéneo para dos electrodos.

La figura (24) representa la configuración Polo-Polo donde el electrodo de corriente C_1 está ubicado en la posición $(0,0,0)$ y el electrodo de potencial P_1 en $(a,0,0)$, los potenciales están dados de la siguiente manera

$$\Phi = \frac{\rho I}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \nabla\Phi = \frac{\rho I}{2\pi} \cdot \frac{x+y+z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Phi' = \frac{\rho}{2\pi((x-a)^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \nabla\Phi' = \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{(x-a)+y+z}{((x-a)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Reemplazando las expresiones anteriores en la expresión (57) se obtiene

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\rho} = \frac{I}{4\pi^2} \int_v \frac{x(x-a)+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}((x-a)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx.dy.dz. \quad (58)$$

La función de sensibilidad 3D para el arreglo Polo-polo está dada por

$$F_{3D}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{x(x-a) + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (59)$$

Para el caso en el que se tienen dos electrodos de inyección de corriente y dos electrodos de potencial, donde el electrodo de corriente C_1 está ubicado en $(0,0,0)$, el electrodo de potencial P_1 está ubicado en $(a,0,0)$, el otro electrodo de potencial P_2 ubicado en $(a+b,0,0)$ y por último el electrodo de corriente C_2 ubicado en $(a+b+c,0,0)$.

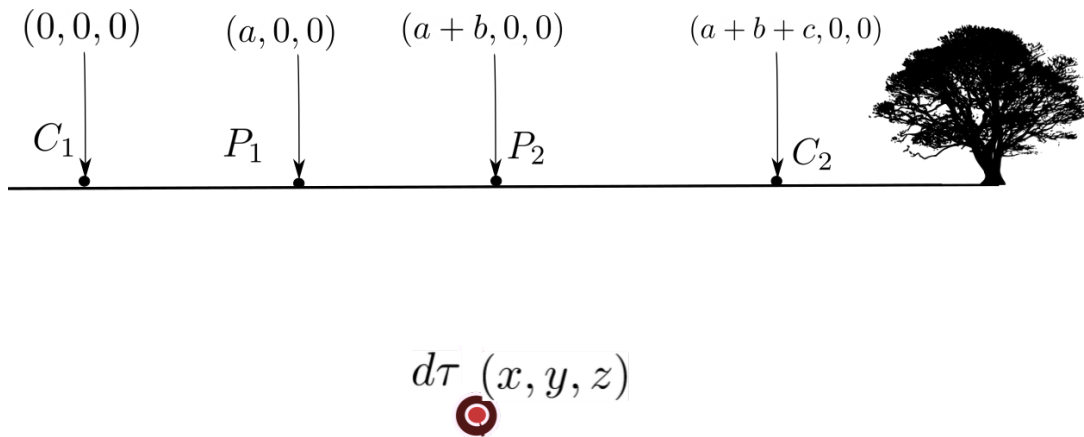


Figura 25. Configuración para el cálculo de la función de sensibilidad dentro de un medio homogéneo para cuatro electrodos.

Debido a que se está trabajando en un régimen lineal podemos aplicar el principio de superposición, por lo tanto es posible analizar la interacción entre los electrodos de corriente con cada uno de los electrodos de potencial. Como los a diferentes arreglos presentan un cierto tipo de simetría se puede aprovechar el teorema de reciprocidad (Anexo 1) y con esto reducir el número

de cálculos. La sensibilidad del potencial está dado por la suma del producto interno entre la la densidad de corriente de los electrodos de corriente y la densidad de corriente de los electrodos de potencial, debido a que se está trabajando en un régimen lineal (Hennig et al. [2008]), según la expresión (57) se tiene

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\rho} = \frac{1}{\rho^2} \int_{\tau} [\nabla\Phi_{C_1} \cdot \nabla\Phi_{P_1} + \nabla\Phi_{C_1} \cdot \nabla\Phi_{P_2} + \nabla\Phi_{C_2} \cdot \nabla\Phi_{P_1} + \nabla\Phi_{C_2} \cdot \nabla\Phi_{P_2}] d\tau. \quad (60)$$

De la figura (25) los potenciales para cada electrodo serán:

$$\Phi_{C_1} = \frac{\rho I}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \nabla\Phi_{C_1} = \frac{\rho I}{2\pi} \cdot \frac{x+y+z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Phi_{P_1} = \frac{\rho}{2\pi((x-a)^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \nabla\Phi_{P_1} = \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{(x-a)+y+z}{((x-a)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Phi_{C_2} = -\frac{\rho I}{2\pi((x-a-b)^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \nabla\Phi_{C_2} = \frac{\rho I}{2\pi} \cdot \frac{(x-a-b)+y+z}{((x-a-b)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Phi_{P_2} = -\frac{\rho}{2\pi((x-a-b-c)^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \nabla\Phi_{P_2} = \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{(x-a-b-c)+y+z}{((x-a-b-c)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Reemplazando las expresiones en (60) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta\Phi}{\delta\rho} = \frac{I}{4\pi^2} \int_v & \left[\frac{x(x-a) + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x(x-a-b) + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a-b)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
 & - \frac{(x-a-b-c)(x-a) + y^2 + z^2}{((x-a-b-c)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 & \left. + \frac{(x-a-b-c)(x-a-b) + y^2 + z^2}{((x-a-b-c)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a-b)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dx.dy.dz.
 \end{aligned} \tag{61}$$

La función de sensibilidad 3D para un arreglo espacial de cuatro electrodos está dada por

$$\begin{aligned}
 F_{3D}(x,y,z) = \frac{I}{4\pi^2} & \left[\frac{x(x-a) + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x(x-a-b) + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a-b)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
 & - \frac{(x-a-b-c)(x-a) + y^2 + z^2}{((x-a-b-c)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 & \left. + \frac{(x-a-b-c)(x-a-b) + y^2 + z^2}{((x-a-b-c)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a-b)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right].
 \end{aligned}$$

Para obtener la función de sensibilidad 1D se integra la expresión (61) sobre el plano xy ,

integrando tanto x como y de menos infinito hasta más infinito

$$\begin{aligned}
 F_{1D}(z) = & \frac{I}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{x(x-a) + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \right. \\
 & \frac{x(x-a-b) + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a-b)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \\
 & \frac{(x-a-b-c)(x-a) + y^2 + z^2}{((x-a-b-c)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
 & \left. \frac{(x-a-b-c)(x-a-b) + y^2 + z^2}{((x-a-b-c)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a-b)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dx.dy. \quad (62)
 \end{aligned}$$

La integral (62) tiene solución analítica, esta solución se puede ver en el anexo (2). Para obtener la solución se utilizarán tres pares de transformadas de Fourier (Apparao [1991]). En el caso en el que se tiene una configuración como se ve en la figura (26), analizando los potenciales basándonos en la expresión (60), los potenciales están dados de la siguiente manera:

$$\Phi_{C_1} = -\frac{\rho I}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \nabla\Phi_{C_1} = -\frac{\rho I}{2\pi} \cdot \frac{x+y+z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Phi_{C_2} = \frac{\rho}{2\pi((x-a)^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \nabla\Phi_{C_2} = \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{(x-a)+y+z}{((x-a)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Phi_{P_1} = -\frac{\rho I}{2\pi((x-a-b)^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \nabla\Phi_{P_1} = \frac{\rho I}{2\pi} \cdot \frac{(x-a-b)+y+z}{((x-a-b)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Phi_{P_2} = -\frac{\rho}{2\pi((x-a-b-c)^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \nabla\Phi_{P_2} = -\frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{(x-a-b-c)+y+z}{((x-a-b-c)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Al analizar las interacciones de los cuatro punto de electrodos de corriente con los electrodos de potencial, la derivada de Fréchet será

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Phi}{\delta\rho} = \frac{I}{4\pi^2} \int_v & \left[\frac{-x(x-a-b)+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}((x-a-b)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\ & \frac{x(x-a-b-c)+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}((x-a-b-c)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & \frac{(x-a-b)(x-a)+y^2+z^2}{((x-a-b)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}((x-a)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \\ & \left. \frac{(x-a-b-c)(x-a)+y^2+z^2}{((x-a-b-c)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}((x-a)^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dx.dy.dz. \end{aligned}$$

Por lo tanto la función de sensibilidad para una fuente de corriente unitaria será

$$F_{1D} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{z}{[(a+b+c)^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{z}{[(a+b)^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{z}{[b^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{z}{[(b+c)^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (63)$$

Para en caso específico donde se tiene un arreglo Dipolo-Dipolo, se toma $a = c$ de modo que la función de sensibilidad para este tipo de configuración espacial es

$$F_{1D} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{z}{[(2a+b)^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2z}{[(a+b)^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{z}{[b^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (64)$$

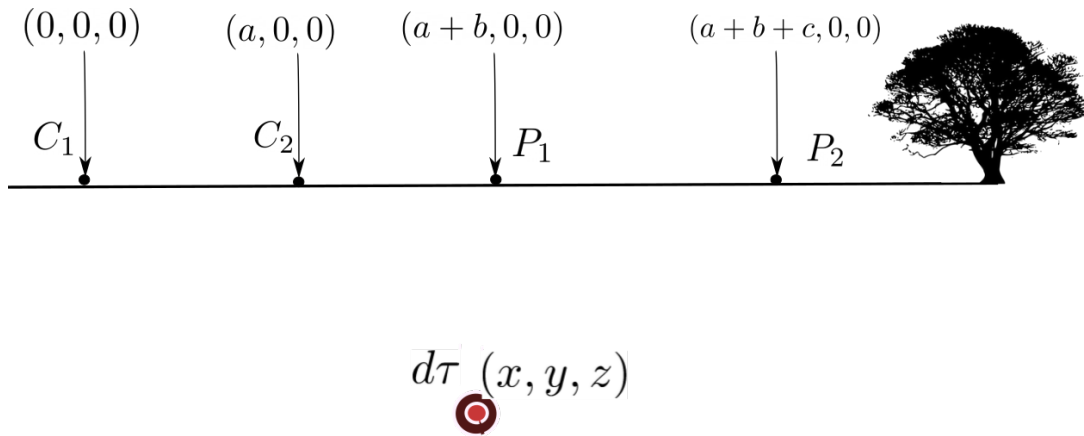


Figura 26. Configuración para el cálculo de la función de sensibilidad dentro de un medio homogéneo para cuatro electrodos (Dipolo-Dipolo).

Para analizar la función de sensibilidad de un arreglo de tres electrodos, se lleva un electrodo de corriente al infinito (figura 27). Realizando el mismo razonamiento anterior el primer y segundo término de la expresión (63) desaparecen, por lo que la función de sensibilidad para un arreglo tipo

Polo-Dipolo es

$$F_{1D} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{z}{[b^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2z}{[(b+c)^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (65)$$

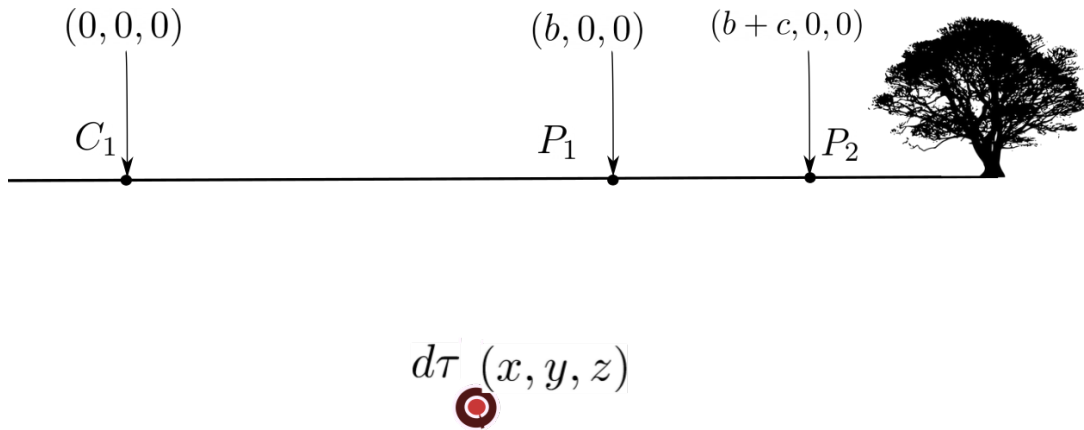


Figura 27. Configuración para el cálculo de la función de sensibilidad dentro de un medio homogéneo para tres electrodos (Polo-dipolo).

Para hacer un análisis más adecuado de la sensibilidad de los arreglos y realizar estudios de exploraciones 2D se requiere abordar la función de sensibilidad en dos dimensiones. Para este caso en particular se suman las contribuciones de todas las ubicaciones en (x, z) que se tienen en el semiespacio homogéneo, integrando y desde menos infinito hasta más infinito. Por lo tanto tomando el caso más simple, el arreglo Polo-Polo la función de sensibilidad 2D está dada por la siguiente expresión

$$F_{2D}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(x-a) + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dy, \quad (66)$$

la integral puede determinarse analíticamente. Los diversos pasos involucrados en esta

integración se discuten en Loke and Barker [1995]. Al solucionar la integral para la función de sensibilidad 2D (66), la solución está dada en términos de integrales elípticas, donde $K(k)$ y $E(k)$ son las integrales elípticas completas del primer y segundo tipo, respectivamente

$$F_{2D}(x, z) = \frac{2}{\alpha\beta^2} \left[\frac{\alpha^2 E(k) - \beta^2 K(k)}{(\alpha^2 - \beta^2)} - \frac{\gamma [(\alpha^2 + \beta^2) E(k) - 2\beta^2 K(k)]}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} \right], \quad (67)$$

donde

$$\alpha^2 = x^2 + z^2, \quad \beta^2 = (x - a)^2 + z^2,$$

siendo

$$k = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha}, \quad \text{con} \quad \alpha > \beta > 0.$$

Para el caso en el que $x = 0.5$, se tiene que la expresión para la función de sensibilidad

$$F_{2D}(x, z) = \pi \left[\frac{1}{2\alpha^3} - \frac{3a^2}{16\alpha^5} \right]. \quad (68)$$

En la figura (29) se muestran los contornos de sensibilidad para el arreglo Wenner a medida que se alejan los electrodos.

3.1. Función de sensibilidad 1D

Para hacer una comparación más detallada de la función de sensibilidad de cada arreglo, se hace una elección que facilitan los análisis tanto en lo teóricos como prácticos, permitiendo diferenciar cada derivada de Fréchet de los diferentes arreglos. En vista que a medida que se aumenta

la separación entre electrodos las líneas de corriente eléctrica penetran más profundo en el subsuelo, por lo tanto cada arreglo de electrodos detecta resistividades de capas más profundas del subsuelo. Por lo tanto se expresan las diferentes funciones de sensibilidad por medio de un parámetro en común L , que representa la separación entre los electrodos más extremos de cada configuración de electrodos y se normaliza cada función por un factor de normalización.

Para el arreglo Wenner donde $a = b = c = L/3$, multiplicando la función de sensibilidad por $2\pi L/3\rho$ el cual es el factor de normalización, se tiene que la función de sensibilidad normalizada para este arreglo es

$$F_{1D_{Wenner}} = \frac{8Lz}{3} \left[\frac{1}{[L^2/9 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[4L^2/9 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (69)$$

Para un arreglo que electrodos Schlumberger se toma $a = c = 0.45L$ y $b = 0.1L$, multiplicando la función de sensibilidad con un factor de normalización $2.47\pi L$, por lo tanto la función de sensibilidad para el arreglo Schlumberger será

$$F_{1D_{Schlumberger}} = 9.88Lz \left[\frac{1}{[(0.45L)^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[(0.55)^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (70)$$

En el caso de la configuración Dipolo-Dipolo donde se toma $a = c = 0.1L$ y $b = 0.1L$ un factor de normalización $70\pi L$, con esto la función de sensibilidad normalizada para la configuración

Dipolo-Dipolo es

$$F_{1D_{Dipolo-Dipolo}} = 140Lz \left[\frac{1}{[L^2/9 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{[(0.9L)^2/9 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[(0.8L)^2/9 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (71)$$

La función de sensibilidad normalizada para el arreglo Polo-Dipolo se obtiene tomando $b = 0.9L$, $c = 0.1L$ y $25\pi L$ como factor de normalización, por lo tanto la función de sensibilidad normalizada para el arreglo Polo-Dipolo está dada de la siguiente manera

$$F_{1D_{Polo-Dipolo}} = 25Lz \left[\frac{1}{[(0.9L)^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[L^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}} \right]. \quad (72)$$

Por último para el caso del arreglo Polo-Polo se toma la distancia de los dos electrodos $a = L$, con un factor de normalización de $2\pi L$, por lo tanto la función de sensibilidad normalizada para el arreglo Polo-Polo viene dada por

$$F_{1D_{Polo-Polo}} = \frac{4Lz}{[L^2 + 4z^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (73)$$

Al normalizar la función de sensibilidad de cada uno de los arreglos, se tiene un método cuantitativo para analizar la sensibilidad vertical y con esto tener una noción sobre la profundidad de investigación de cada configuración. Como se puede ver en la figura (28) las curvas de sensibilidad tienen un máximo y luego decaen a cero a grandes profundidades, donde para la configuración más sencilla de electrodos Polo-Polo se tiene mayor influencia de la señal total en

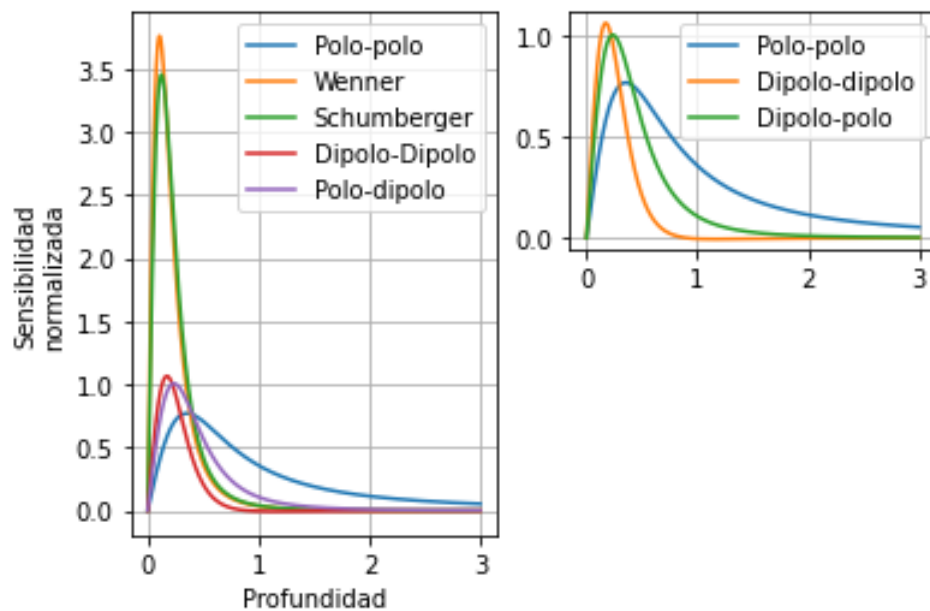


Figura 28. Función de sensibilidad 1D normalizada.

capas más profundas, dicho de otro modo este arreglo tiene mayor profundidad de investigación mayor que las demás configuraciones de electrodos, debido a que las curvas de sensibilidad de los demás arreglos tienen una caída de sensibilidad bastante pronunciada y por lo tanto tienen una sensibilidad que es mucho menor a grandes profundidades. Esto quiere decir, que si se quiere obtener la misma información con los arreglos Wenner, Schlumberger y Polo-Polo, basta con extender los dos electrodos de la configuración Polo-Polo al rededor de un tercio aproximadamente a los del Wenner y Schlumberger. Se debe tener en cuenta que la campana de la configuración Polo-Polo es más ancha que la campana para de las demás configuraciones, lo que quiere decir que la configuración Polo-Polo es la que tiene menor resolución vertical que las otras configuraciones. Por lo que, la ganancia de sensibilidad del Polo-Polo a profundidades altas se ve compensada por la baja resolución en la señal, donde los arreglos con la mejor resolución es el Wenner y el Schlumberger,

las cuales son configuraciones óptimas para estudios más someros, donde se tiene una resolución significativamente buena a bajas profundidades en comparación a los demás arreglos. En el caso del arreglo Polo-Dipolo se tiene una sensibilidad más alta a mayor profundidad en comparación a los arreglos Wenner y Schlumberger, pero menor sensibilidad en grandes profundidades que el arreglo Polo-Polo. La intensidad de la señal del arreglo Polo-dipolo es menor en comparación con los arreglos Wenner y Wenner-Schlumberger, pero mayor que los arreglos Dipolo-Dipolo y el arreglo Polo-Polo.

3.2. Función de sensibilidad 2D

Los diagramas de sensibilidad y resolución 2D para los diferentes arreglos se desarrollaron con el programa RE2DMOD, el cual es un programa gratuito desarrollado por la compañía Geotomo Software Sdn Bhd, la dirección de descarga se encuentra en <https://bit.ly/3sCK3lm>. Este programa utiliza un modelado directo 2D, basándose en el método de diferencias finitas donde divide el subsuelo en varios bloques utilizando una malla rectangular (Anexo 3) que calcula la pseudosección de resistividad aparente para un modelo de subsuelo 2D definido por el usuario (Barker and Loke [2000]). Cada arreglo tiene sus ventajas y desventajas, por lo que un aspecto muy importante a tener en cuenta es la característica de sensibilidad y así elegir la "*mejor*" configuración de electrodos para un área de estudio en particular, equilibrando el costo de la operación, la profundidad de investigación, la resolución y la practicidad del arreglo.

En el gráfico de la función de sensibilidad se muestran los patrones de contorno del de los diferentes arreglos, donde las diferencias de estos patrones ayudan a comprender la influencia en la

medición de la resistividad aparente observando las áreas del subsuelo que generan el mayor aporte. Los Diagramas muestran contornos de sensibilidad con un factor de escala de 100. En esta escala de sensibilidad se muestra contornos de sensibilidad tanto positivos como negativos. La expresión (56) muestra cómo cambia el potencial si en una determinada zona del espacio se cambia la resistividad, es decir, la función de sensibilidad mide el cambio de potencial en función del cambio de resistividad ($\delta\Phi/\delta\rho$), por consiguiente, en el caso que los contornos de sensibilidad son positivo, si Φ aumenta ρ cambia positivamente, para el caso contrario donde los contornos de sensibilidad son negativos; si $\delta\Phi/\delta\rho$ es negativo, cuando Φ aumenta ρ disminuye. Esto significa que si un objeto con una resistividad más alta que el medio se coloca en las zonas de sensibilidad negativa, el valor de la resistividad aparente medida disminuirá, este fenómeno se conoce como *anomalía inversa*. Cuando el objeto se coloca en las zonas de sensibilidad positiva la resistividad aparente medida aumentará.

El arreglo Wenner presenta contornos casi horizontales debajo de los electrodos, debido a esta cualidad este arreglo es sensible a cambios verticales de resistividad, pero no es una opción para resolver cambios horizontales de resistividad. La figura (29) muestra como cambia la sensibilidad de arreglo Wenner a medida que se alejan los electrodos. Para el caso en el que los electrodos están cerca el arreglo tiene una sensibilidad alta en la parte somera, disminuyendo la sensibilidad según aumenta la profundidad del medio. A medida que se alejan los electrodos, los lóbulos de sensibilidad se dividen en tres lóbulos principales, donde se muestra valores grandes de sensibilidad negativa entre los electrodos C_1, P_1 y C_2, P_2 , dicho de otro modo la configuración Wenner presenta anomalías de inversión entre los electrodos C_1, P_1 y C_2, P_2 y grandes valores de sensibilidad positiva

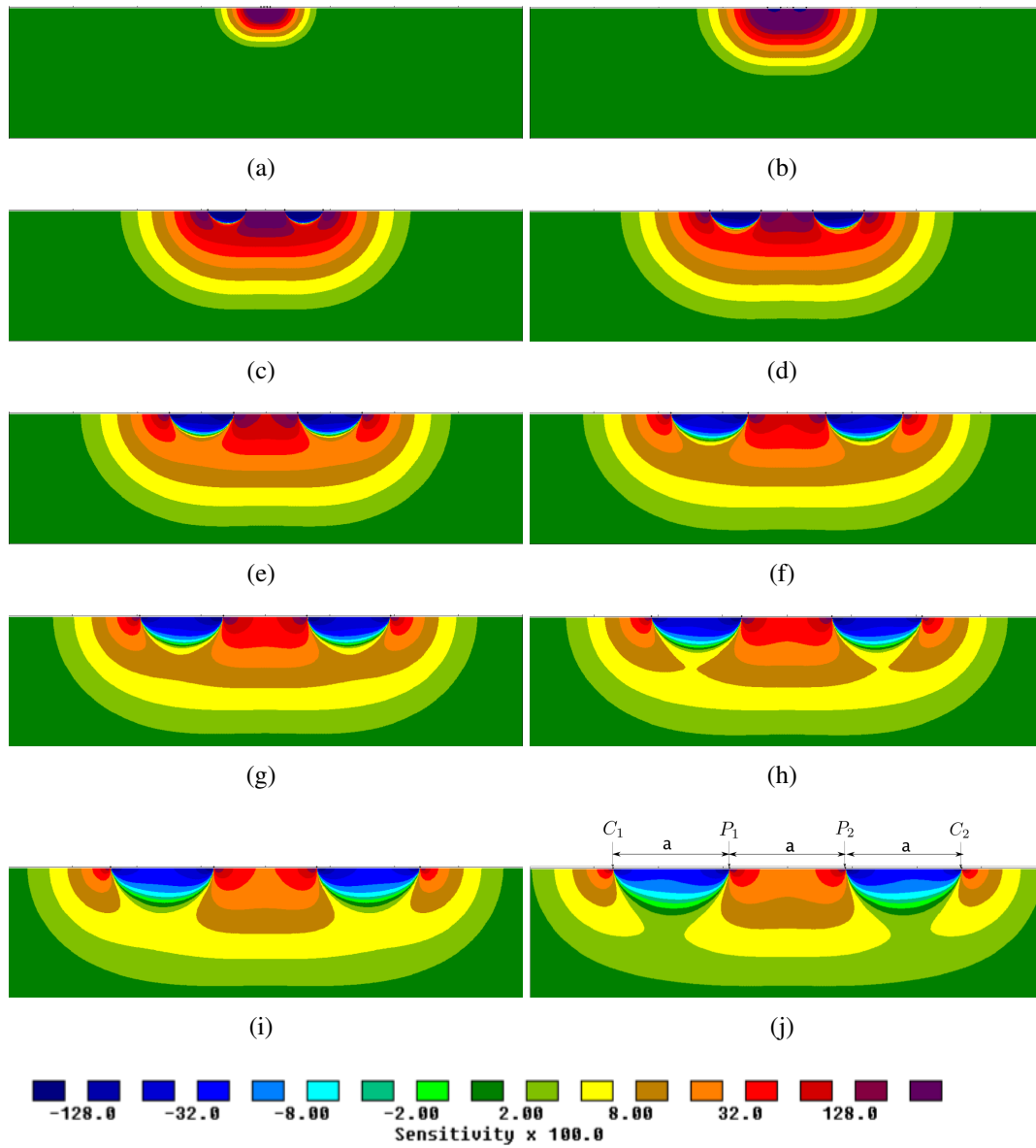


Figura 29. Diagrama de sensibilidad y resolución para el arreglo Wenner. Los cuatro electrodos están separados en distancias iguales. En este caso la distancia a se incrementa en pasos de na manteniendo fijo el punto medio del arreglo, para (a) $n = 1$, (b) $n = 4$, (c) $n = 12$, (d) $n = 16$, (e) $n = 20$, (f) $n = 24$, (g) $n = 26$, (h) $n = 28$, (i) $n = 32$, (j) $n = 36$.

entre los electrodos P_1 y P_2 . Cuando se alejan los electrodos, los contornos de sensibilidad pierden su geometría horizontal manteniendo alta sensibilidad entre el par de electrodos de potencial P_1 y P_2 ,

debajo de esta zona el arreglo mantiene la sensibilidad a cambios positivos de resistividad verticales. Cuando la distancia a aumenta el arreglo Wenner tiende a aumentar un poco la sensibilidad a cambios horizontales de resistividad, en esas zonas los contornos de sensibilidad son muy bajos. En general el arreglo Wenner es bueno en el caso que se desee resolver estructuras verticales estrechas como por ejemplo un área que tenga una estratificación de capas horizontales. Debido a que este arreglo posee la intensidad de señal más fuerte es un factor muy importante al momento de llevar un estudio de campo donde la zona posea mucho ruido de fondo, por esta razón es una de las configuraciones más comunes en los sondeos de resistividad. La desventaja del Arreglo Wenner es la poca capacidad de resolver estructuras verticales debido a que según la geometría de los contornos de sensibilidad, el arreglo Wenner es malo para resolver cambios horizontales de resistividad.

.

En la figura (30) se puede observar el cambio de sensibilidad a medida que se alejan los electrodos de corriente C_1 y C_2 . El área que presenta una mayor sensibilidad positiva es debajo del centro de los electrodos de potencial P_1 y P_2 , esta zona del arreglo es altamente sensible a cambios verticales de resistividad. Al igual que el arreglo Wenner la configuración Schlumberger presenta valores grandes de sensibilidad negativa entre los electrodos C_2, P_1 y C_2, P_2 . Para valores bajos de n la configuración Schlumberger es moderadamente sensible a cambios verticales de resistividad. A medida que se alejan los electrodos de corriente los lóbulos de los electrodos de potencial se separan de los lóbulos de los electrodos de corriente, por lo tanto el arreglo presenta mayor sensibilidad a cambios verticales de resistividad.

La ventaja que tiene la configuración Schlumberger respecto al arreglo Wenner sería que el arreglo

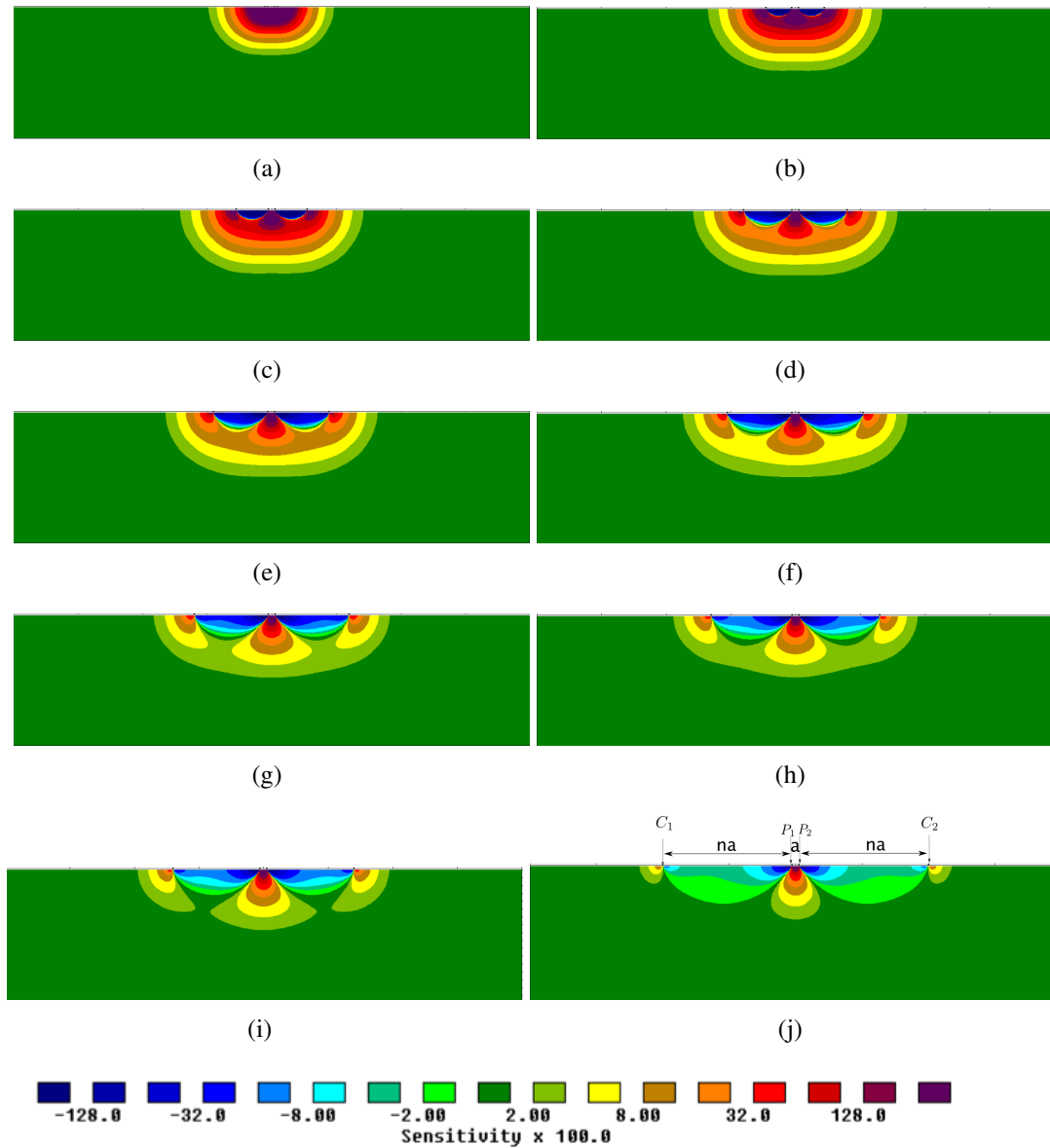


Figura 30. Diagrama de sensibilidad y resolución para el arreglo Schlumberger. Los electrodos P_1 , P_2 se mantienen fijos y C_1 , C_2 se alejan del punto medio simétricamente en pasos, donde (a) $n = 1$, (b) $n = 8$, (c) $n = 10$, (d) $n = 15$, (e) $n = 17$, (f) $n = 20$, (g) $n = 23$, (h) $n = 25$, (i) $n = 27$, (j) $n = 39$.

Schlumberger podría ser una buena opción en áreas donde la estructura geológica esté compuesta por tipo de estructuras horizontales y verticales. En cuanto a la intensidad de la señal el arreglo Schlumberger

es más débil que la intensidad de la señal Wenner pero más alta que los arreglos Dipolo-Dipolo y Polo-Dipolo.

Los cambios de sensibilidad del arreglo Dipolo-Dipolo se muestran en en la figura (31). Para este tipo de arreglos se mantiene fijo la distancia entre los dipolos, si se desea aumentar el alcance en profundidad se incrementa la separación de los dipolos C_1 , C_2 y P_1 , P_2 . A medida que se aumenta la separación entre los dipolos la configuración Dipolo-Dipolo presentan valores grandes de sensibilidad positiva debajo de los dipolos C_1 , C_2 y P_1 , P_2 y el patrón de sensibilidad se tornan cada vez más vertical. Cuando se tiene una distancia entre dipolos de $n = 1$, el arreglo presenta alta sensibilidad positiva en el centro de la configuración y alta sensibilidad negativa en el extremo del arreglo para la parte más somera. Para valores menores que $n = 7$ entre los dipolos el arreglo presenta contornos de sensibilidad negativa en la parte más somera y contornos similares de sensibilidad positiva en la parte más profunda. Cuando se alejan los dipolos los lóbulos en medio del arreglo se desprenden, dejando valores de alta sensibilidad positiva entre los dipolos. Por lo tanto para valores mayores que $n = 7$ el arreglo Dipolo-Dipolo es más sensible a cambios de sensibilidad vertical debajo de los dipolos C_1 , C_2 y P_1 , P_2 . La sensibilidad en el punto medio del arreglo disminuye considerablemente, por lo tanto para valores grandes de n la sensibilidad entre los dipolos del arreglo es muy baja hasta en punto que llega a ser nula. Este tipo de arreglo posee buena sensibilidad a cambios horizontales de resistividad pero presenta relativamente poca sensibilidad a los cambios horizontales de la resistividad.

El arreglo Dipolo-Dipolo es buena opción para trabajar en áreas con estructuras verticales, pero

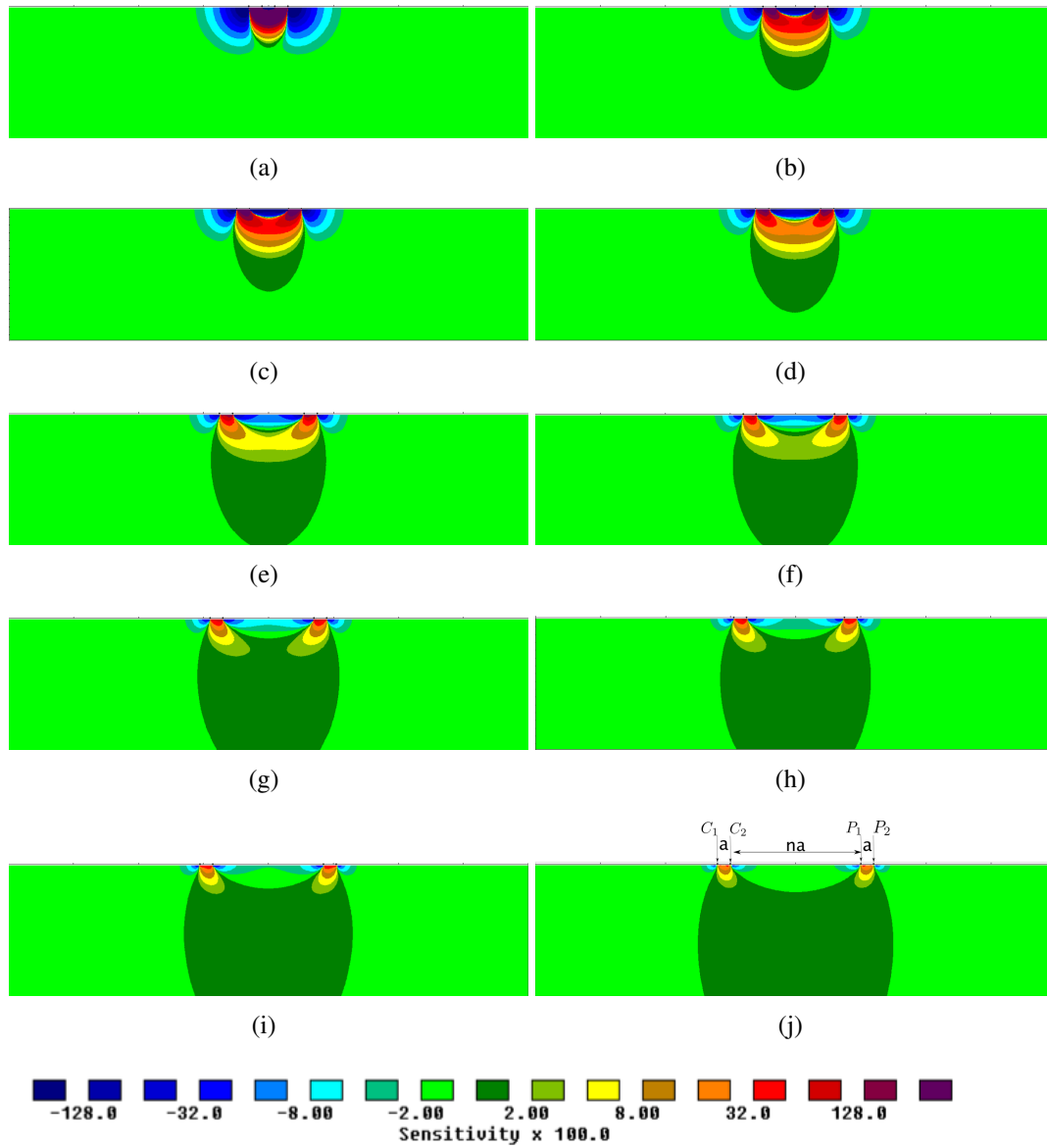


Figura 31. Diagrama de sensibilidad y resolución para el arreglo Dipolo-Dipolo. La distancia a del par de dipolos C_1 , C_2 y P_1 , P_2 se mantiene fija. Los dipolos se mueven hacia afuera simétricamente a paso de na manteniendo el punto medio del arreglo, para (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, (c) $n = 5$, (d) $n = 7$, (e) $n = 10$, (f) $n = 11$, (g) $n = 13$, (h) $n = 14$, (i) $n = 16$, (j) $n = 19$.

no es recomendable trabajar si el área en estudio presenta estructuras horizontales. Una notable desventaja que presenta el Dipolo-Dipolo es que al aumentar el espaciamiento entre dipolo la

intensidad de la señal disminuye considerablemente, para valores grandes de n la intensidad de la señal es muy baja. Una de las formas de controlar este problema es aumentar la distancia a entre los dipolos y así disminuir la caída en el potencial.

La configuración Polo-Dipolo es una configuración asimétrica debido uno de los electrodos de corriente (C_2) debe colocarse lo suficientemente lejos de tal forma que no influya en la medición del potencial, la distancia a entre los electrodos de potencial P_1 y P_2 permanece constante y el electrodo de corriente C_1 se aleja en pasos de na . En la figura (32) se puede observar el diagrama de sensibilidad y resolución del arreglo Polo-Dipolo, debido a su geometría asimétrica los contornos de sensibilidad del arreglo también son asimétricos. Para valores bajos de n , el Polo-Dipolo presenta valores altos de sensibilidad positiva a la izquierda del electrodo de potencial P_2 y valores altos de sensibilidad negativa en la parte derecha del arreglo, debajo del electrodo P_2 . A medida que se aumenta la distancia entre el electrodo C_2 y el dipolo, la sensibilidad en la parte izquierda del arreglo cambia notablemente. El lóbulo izquierdo de sensibilidad positiva se va dividiendo en dos lóbulos y en medio de los electrodos C_1 y P_1 surge una sensibilidad negativa que al igual que el lóbulo de sensibilidad positiva se va fragmentando en dos lóbulos. Cada vez que el valor de n aumenta los lóbulos se tornan cada vez más verticales. Por lo tanto el arreglo Polo-Dipolo presenta relativamente buena sensibilidad a cambios verticales de resistividad, donde la zona con mayor sensibilidad se encuentran debajo del par de electrodos de potencial P_1 y P_2 , otra característica importante que presente la configuración Polo-Dipolo es que posee una cobertura horizontal relativamente buena. Debido a la asimetría que presenta la configuración Polo-Dipolo, se utiliza este tipo de arreglos en

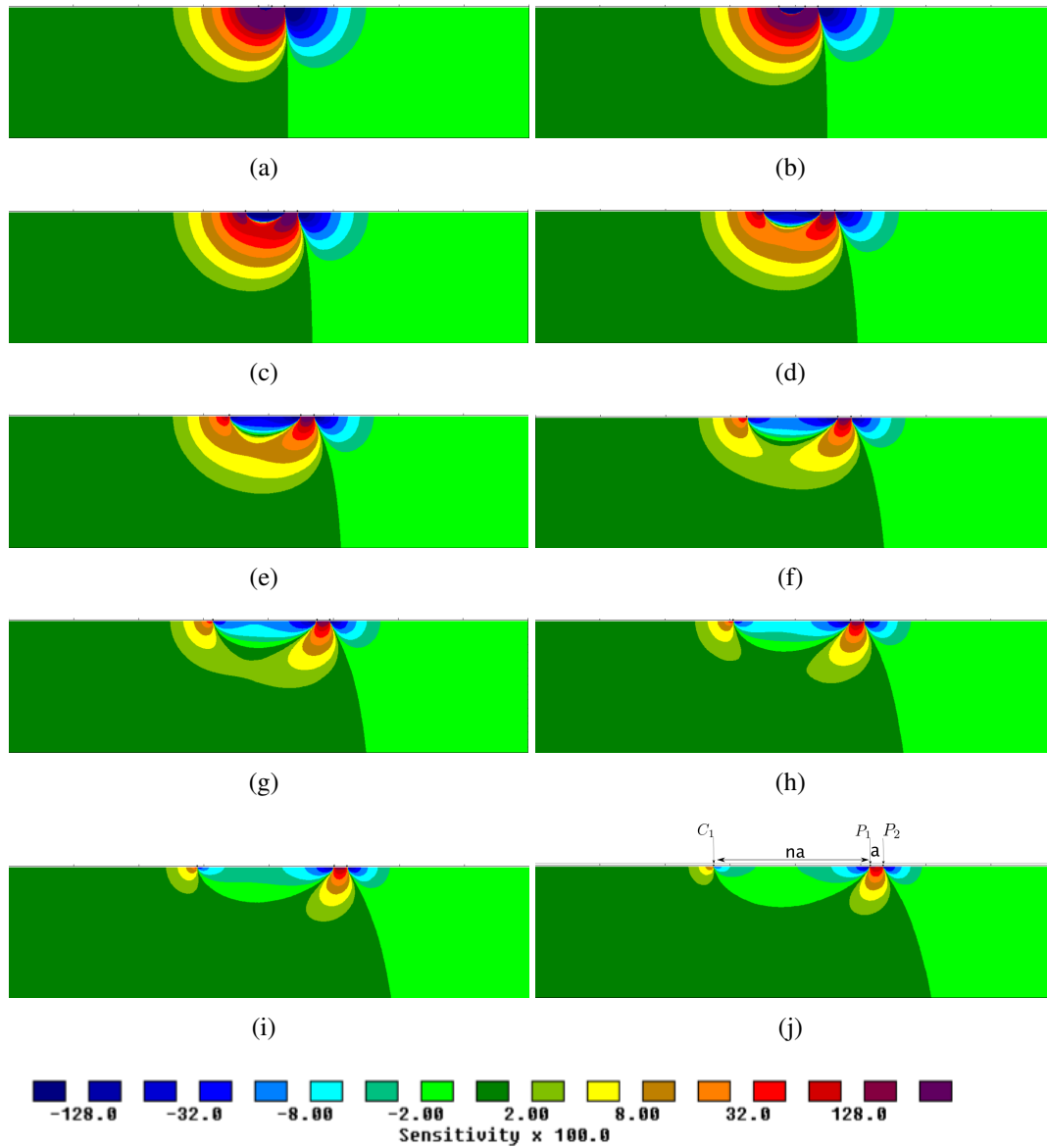


Figura 32. Diagrama de sensibilidad y resolución para el arreglo Polo-Dipolo. Se trata de un arreglo asimétrico, donde la distancia a del dipolo P_1, P_2 se mantiene fija, el electrodo C_2 se aleja de tal manera que no influya en la medida del potencial. El dipolo y el electrodo C_1 se mueven hacia afuera a paso de na , para (a) $n = 1$, (b) $n = 3$, (c) $n = 5$, (d) $n = 8$, (e) $n = 10$, (f) $n = 13$, (g) $n = 15$, (h) $n = 17$, (i) $n = 20$, (j) $n = 23$.

campo sobre anomalías simétricas, las aparentes anomalías en la pseudosección son asimétricas, esto representa una desventaja en el uso del Polo-Dipolo ya que para corregir este efecto eliminar la asimetría, se deben repetir las mediciones invirtiendo los electrodos, es decir, que el electrodo de corriente se coloca en la parte derecha de la configuración y el par de electrodos de potencial se sitúan en la parte izquierda de la configuración, lo que conlleva a más tomas de datos y con esto más tiempo de trabajo. El arreglo Polo-Dipolo posee una intensidad de señal más baja que los arreglos Wenner y Schlumberger pero más alta que el arreglo Dipolo-Dipolo. Si se quiere aumentar la profundidad de investigación no es recomendable aumentar el valor de n ya que al aumentar este valor la intensidad de la señal disminuye notablemente, al igual que el arreglo Dipolo-dipolo para aumentar esta profundidad se debe aumentar la distancia entre los electrodos P_1 y P_2 para incrementar la la fuerza de la señal.

La configuración Polo-Polo con un sólo electrodo de corriente C_1 y uno de potencial P_1 no existe. Al momento de hacer un estudio en campo con este arreglo los electrodos C_2 y P_2 se deben colocar a una distancia de tal manera que no influyan en la medición del potencial aproximadamente veinte veces la separación entre los electrodos C_1 y P_1 . El diagrama de sensibilidad de la configuración Polo-Polo se muestra en la figura (33). El arreglo Polo-Polo presentan buena sensibilidad vertical debajo de los electrodos para valores pequeños de n como se ve en (a) y una sensibilidad relativamente buena a cambios horizontales de resistividad. Al aumentar la distancia entre los electrodos los contornos de sensibilidad se separan, presentando entre los electrodos valores de sensibilidad negativos en la zona más somera y valores de sensibilidad positivos en la

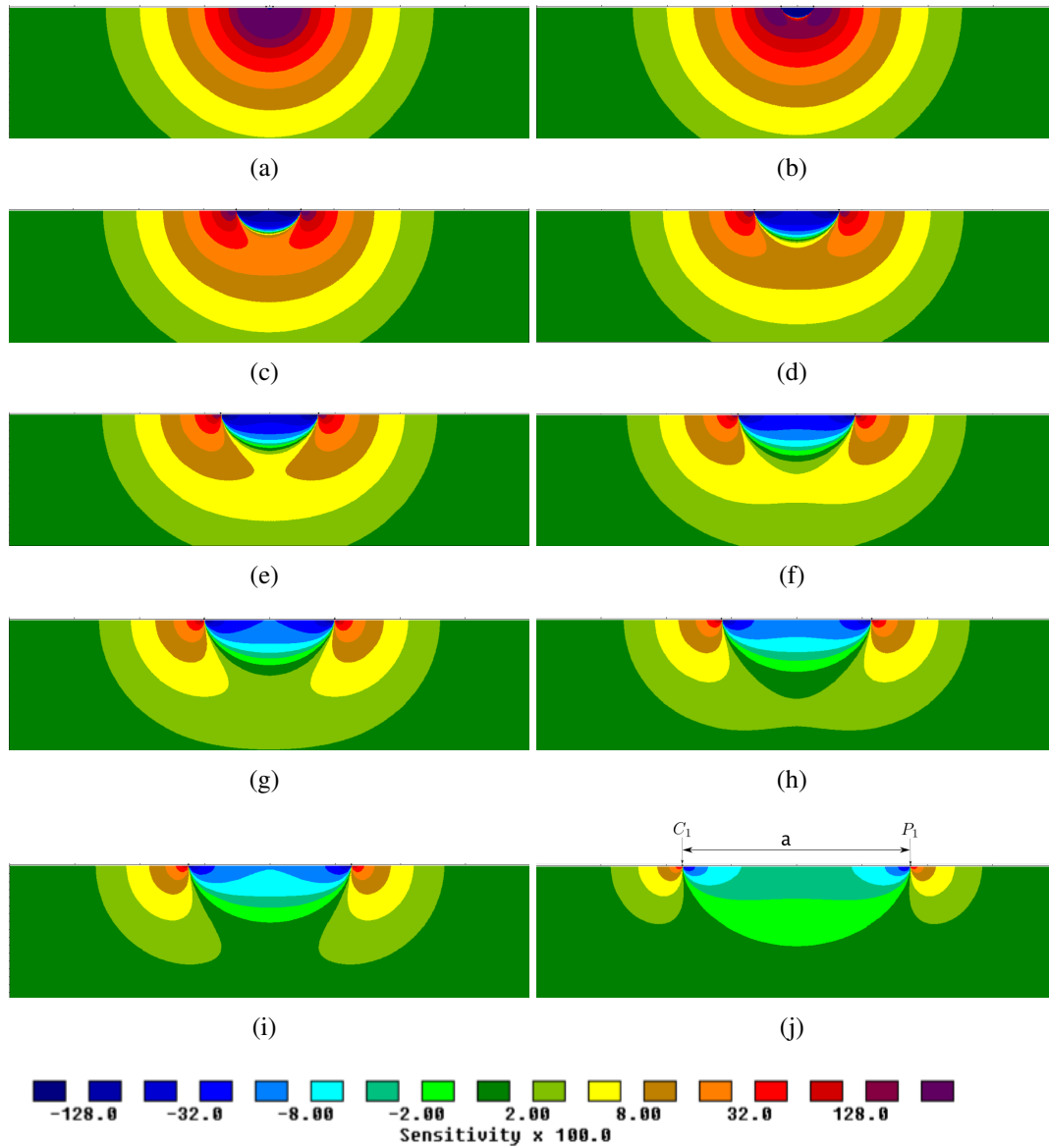


Figura 33. Diagrama de sensibilidad y resolución para el arreglo Polo-Polo. La distancia a entre los electrodos se aumenta a pasos de na manteniendo el punto medio de la configuración fijo, para (a) $n = 1$, (b) $n = 5$, (c) $n = 10$, (d) $n = 13$, (e) $n = 15$, (f) $n = 18$, (g) $n = 20$, (h) $n = 23$, (i) $n = 25$, (j) $n = 35$.

parte más profunda. Cuando se aumenta el valor de n entre los electrodos la sensibilidad del arreglo es negativa y hay presencia de lóbulos con sensibilidad positiva en la parte extrema del arreglo.

La característica más importante de la configuración Polo-Polo es que posee la profundidad de investigación más alta y es el arreglo con la cobertura horizontal más amplia. La gran desventaja de tipo de arreglo es que posee la resolución más baja, por otro lado debido a que los electrodos C_2 y P_2 se deben colocar a gran distancia se pueden presentar problemas prácticos en campo para encontrar la ubicación óptima de este par de electrodos. Además, los datos tomados con este tipo de arreglo pueden tener una calidad baja, debido a que se coloca el electrodo P_2 muy lejos del electrodo P_1 y se puede registrar demasiado ruido telúrico. Por lo tanto el arreglo Polo-Polo no es muy popular como los arreglos Wenner, Schlumberger y Dipolo-Dipolo. El Polo-Polo se utiliza principalmente en estudios donde el espaciamiento entre los electrodos C_1 y P_1 sea relativamente pequeño.

4. Conclusiones

En el desarrollo del seminario de investigación (Anexo 4), se estudió el comportamiento del potencial eléctrico para un medio homogéneo, lineal e isótropo y un medio de dos capas. Fue posible realizar un estudio en el cual se pudo determinar el potencial eléctrico de un electrodo para un medio homogéneo y el potencial para un medio de dos capas, logrando hacer un análisis de la función de sensibilidad o derivada de Fréchet para los casos 1D y 2D. Además, se estudió el comportamiento del potencial eléctrico y resistividad para los arreglo de electrodos Wenner, Schlumberger, Dipolo-Dipolo, Polo-Dipolo y Polo-Polo.

Se calculó analíticamente la función de sensibilidad 1D y se caracterizó la sensibilidad de cada uno de los arreglos. Se determinó que las contribuciones al potencial registrado provienen de todas las profundidades pero la mayor contribución al potencial o señal observada se obtiene de la

llamada profundidad de investigación. Los resultados obtenidos para la función de sensibilidad 1D sirven de guía al momento de escoger el mejor arreglo y su espaciamiento.

Posteriormente, haciendo uso del programa RES2MOD se generaron los diagramas de sensibilidad y resolución 2D, y se caracterizaron las variaciones tanto verticales como horizontales de resistividad eléctrica en función de las variaciones de la resistividad para las configuraciones Wenner, Schlumberger, Dipolo-Dipolo, Polo-Dipolo y Polo-Polo, mostrando contornos de sensibilidad positivos y negativos. Se obtuvo lo siguiente:

1. Los arreglos Wenner y Schlumberger son relativamente sensibles a cambios verticales de resistividad, principalmente en el punto medio del arreglo pero son arreglos que presentan una sensibilidad muy pobre a cambios horizontales de resistividad. Son arreglos óptimos al momento de tener estructuras sedimentarias o de capas horizontales. Estas dos configuraciones poseen la intensidad de la señal más fuerte.
2. El arreglo Dipolo-Dipolo presenta la mayor sensibilidad debajo de los dipolos, es un arreglo que presentan buena sensibilidad a variaciones horizontales de resistividad, debido a esto es el arreglo preferido para estudios en estructuras verticales. Esta configuración presenta una disminución considerable en la intensidad de la señal al aumentar la distancia entre dipolos.
3. El arreglo Polo-Dipolo es un arreglo asimétrico, esta característica influye en la anomalías de resistividad las cuales son asimétricas. Para resolver esta asimetría se debe hacer la repetición de la toma de datos con los electrodos colocados de forma inversa lo que aumenta el número de tomas de datos y por lo tanto el tiempo de adquisición en la exploración. La intensidad

de la señal es menor a la de las configuraciones Wenner y Schlumberger pero mayor a la del Dipolo-Dipolo y es menos sensible a ruidos telúricos en comparación con el arreglo Polo-Polo, este arreglo es sensible a estructuras verticales.

4. La configuración Polo-Polo es la de mayor alcance en profundidad pero esta ventaja es compensada con una muy baja resolución en la señal. Debido a que dos electrodos deben estar a una distancia " infinita", en la práctica ajustar la distancia adecuada para los dos electrodos resulta difícil. Además, el arreglo Polo-Polo es muy sensible a ruido telúrico y por lo tanto la calidad de lo datos es baja. Este tipo de arreglo se utiliza en áreas donde el espaciado entre polos sea pequeños, como estudios arqueológicos donde el espaciamiento es de unos pocos metros.

A pesar de que se hicieron análisis para modelos de tierras homogéneas, son resultados muy prácticos al momento de elegir la mejor configuración de electrodos a utilizar y realizar un buen estudio de campo.

Referencias Bibliográficas

IV Iakubovskii and LL Liajov. *Exploración eléctrica*. Reverté, 1980.

JM Reynolds. *An introduction to applied and environmental geophysics*. John Wiley & Sons, 2011.

M Muskat and HH Evinger. Current penetration in direct current prospecting. *Geophysics*, 6(4): 397–427, 1941.

DS Parasnis. *Principles of applied geophysics*. Springer Science & Business Media, 2012.

W Lowrie. Fundamentals of geophysics, cambridge university press. *New York, USA*, 2007.

Abhijit Dey and HF Morrison. Resistivity modelling for arbitrarily shaped two-dimensional structures. *Geophysical Prospecting*, 27(1):106–136, 1979a.

MH Loke and RD Barker. Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudosections by a quasi-newton method 1. *Geophysical prospecting*, 44(1):131–152, 1996.

WM Telford, LP Geldart, RE Sheriff, and E Robert. *Applied geophysics*. Cambridge university press, 1990.

PK Gupta, S Niwas, and VK Gaur. Straightforward inversion of vertical electrical sounding data. *Geophysics*, 62(3):775–785, 1997.

U Hamzah, AR Samsudin, and EP Malim. Groundwater investigation in kuala selangor using vertical electrical sounding (ves) surveys. *Environmental geology*, 51(8):1349–1359, 2007.

Torleif Dahlin. 2d resistivity surveying for environmental and engineering applications. *First break*, 14(7), 1996.

DK Cheng. *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*. Pearson Educación, 1997.

EM Purcell. Electricidad y magnetismo Berkeley physics course—vol. 2. *Editorial Reverté, Barcelona*, 1969.

MH Loke and H Meng. Tutorial: 2-d and 3-d electrical imaging surveys, 2004.

P Kearey, M Brooks, and I Hill. *An introduction to geophysical exploration*. John Wiley & Sons, 2013.

W Zhou, BF Beck, and AL Adams. Effective electrode array in mapping karst hazards in electrical resistivity tomography. *Environmental geology*, 42(8):922–928, 2002.

F Nguyen, S Garambois, D Jongmans, E Pirard, and MH Loke. Image processing of 2d resistivity data for imaging faults. *Journal of Applied Geophysics*, 57(4):260–277, 2005.

MH Loke. Electrical imaging surveys for environmental and engineering studies: A practical guide to 2-d and 3-d surveys. *Electronic version available from <http://www.terra-plus.com>*, 2000.

SH Ward. *Geotechnical and Environmental Geophysics: Volume I, Review and Tutorial: Volume I: Review and Tutorial*. Society of Exploration Geophysicists, 1990.

R Maillet. The fundamental equations of electrical prospecting. *Geophysics*, 12(4):529–556, 1947.

- RB Golekar, MV Baride, and SN Patil. 1d resistivity sounding geophysical survey by using schlumberger electrode configuration method for groundwater explorations in catchment area of anjani and jhiri river, northern maharashtra (india). *Journal of Spatial Hydrology*, 12(1), 2014.
- A Sharma and V Rajamani. Weathering of gneissic rocks in the upper reaches of cauvery river, south india: implications to neotectonics of the region. *Chemical Geology*, 166(3-4):203–223, 2000.
- C Panissod, M Dabas, N Florsch, A Hesse, A Jolivet, A Tabbagh, and J Tabbagh. Archaeological prospecting using electric and electrostatic mobile arrays. *Archaeological Prospection*, 5(4): 239–251, 1998.
- L Pastor, R Vanhoeserlande, N Florsch, I Florsch, J Toral, J González, M Lezcano, and A Mojica. Prospección arqueogeofísica en panamá la vieja: presentación de casos. *Arqueología de Panamá La Vieja, Avances de investigación, época colonial*, 1:43–61, 2001.
- P Sikandar, A Bakhsh, T Ali, and M Arshad. Vertical electrical sounding (ves) resistivity survey technique to explore low salinity groundwater for tubewell installation in chaj doab. *Journal of Agricultural Research (03681157)*, 48(4), 2010.
- R Vargas, A Martínez, W Pérez, and R Santo. *Estudio geológico para EMPODUITAMA S,A E.S.P-Boyacá*. Empoduitama, Colombia, 2016.
- A Roy and RL Dhar. Radius of investigation in dc resistivity well logging. *Geophysics*, 36(4): 754–760, 1971.

O Koefoed. On: 'depth of investigation in direct current methods,' by a. roy and a. apparao (geophysics, october 1971, p. 943–959). *Geophysics*, 37(4):703–704, 1972.

SC Guerreiro. Comment on 'a theorem for direct current regimes and some of its consequences' by a. roy and some related papers and comments. *Geophysical Prospecting*, 31(1):192–195, 1983.

HM Evjen. Depth factors and resolving power of electrical measurements. *Geophysics*, 3(2):78–95, 1938.

A Roy and A Apparao. Depth of investigation in direct current methods. *Geophysics*, 36(5): 943–959, 1971.

CC Okpoli. Sensitivity and resolution capacity of electrode configurations. *International Journal of Geophysics*, 2013, 2013.

MC Lucendo. *Interpretación automática de sondeos eléctricos verticales*. Universidad Complutense de Madrid, Departamento de Física del Aire y Geofísica, 1984.

K Choudhury, DK Saha, and P Chakraborty. Geophysical study for saline water intrusion in a coastal alluvial terrain. *Journal of applied geophysics*, 46(3):189–200, 2001.

PR McGillvray and DW Oldenburg. Methods for calculating Fréchet derivatives and sensitivities for the non-linear inverse problem: A comparative study 1. *Geophysical prospecting*, 38(5):499–524, 1990.

T Dahlin and B Zhou. A numerical comparison of 2d resistivity imaging with 10 electrode arrays.

Geophysical prospecting, 52(5):379–398, 2004.

A Apparao, TG Rao, RS Sastry, and VS Sarma. Depth of detection of buried conductive targets with different electrode arrays in resistivity prospecting1. *Geophysical Prospecting*, 40(7):749–760, 1992.

SK Park and GP Van. Inversion of pole-pole data for 3-d resistivity structure beneath arrays of electrodes. *Geophysics*, 56(7):951–960, 1991.

DE Boerner and GF West. Fréchet derivatives and single scattering theory. *Geophysical Journal International*, 98(2):385–390, 1989.

MH Loke, JE Chambers, DF Rucker, O Kuras, and PB Wilkinson. Recent developments in the direct-current geoelectrical imaging method. *Journal of applied geophysics*, 95:135–156, 2013.

T Hennig, A Weller, and M Möller. Object orientated focussing of geoelectrical multielectrode measurements. *Journal of Applied Geophysics*, 65(2):57–64, 2008.

A Apparao. Geoelectric profiling. *Geoexploration*, 27(3-4):351–389, 1991.

MH Loke and RD Barker. Least-squares deconvolution of apparent resistivity pseudosections. *Geophysics*, 60(6):1682–1690, 1995.

RD Barker and MH Loke. Rapid 2d resistivity and i.p. forward modeling using the finite-difference and finite-element methods. [urlhttps://www.geotomosoft.com/index.php](https://www.geotomosoft.com/index.php), 2000.

A Dey and HF Morrison. Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures.

Geophysics, 44(4):753–780, 1979b.

PR McGillivray. *Forward modeling and inversion of DC resistivity and MMR data*. PhD thesis,

University of British Columbia, 1992.

C Rücker, T Günther, and FM Wagner. pygimli: An open-source library for modelling and inversion

in geophysics. *Computers & Geosciences*, 109:106–123, 2017.

Apéndices

Apéndice A. Teorema de reciprocidad

Dos dispositivos tetraelectródicos los cuales se diferencian entre sí debido a que las tomas de emisión y recepción están intercambiadas. Estos dispositivos están colocados en la superficie plana de un medio homogéneo de resistividad ρ .

Los coeficientes K_1 y K_2 del primero y segundo dispositivo están dados

$$K_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{r_{AM}} + \frac{1}{r_{BN}} - \frac{1}{r_{AN}} - \frac{1}{r_{BM}}}, \quad K_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{r_{MA}} + \frac{1}{r_{NB}} - \frac{1}{r_{NA}} - \frac{1}{r_{MB}}}.$$

Considerando que $r_{AM} = r_{MA}$ y $r_{AN} = r_{NA}$, se concluye de que $K_1 = K_2$.

La diferencia de potencial entre los electrodos de recepción en un medio homogéneo se puede calcular por las expresiones

$$\Delta V_1 = \rho I_1 / K_1, \quad \Delta V_2 = \rho I_2 / K_2.$$

Teniendo en cuenta que la corriente que pasa por ambos electrodos es igual ($I_1 = I_2$), entonces también es igual la diferencia de potenciales ΔV_1 y ΔV_2 . Es decir, que para el cambio de lugar de las tomas de tierra de emisión y recepción, la diferencia de potencial no varia si permanece invariable la intensidad de la corriente en el circuito de los electrodos de emisión.

Esta condición la cual se puede demostrar que se cumple para medios heterogéneos y anisótropos. Ahora fíjese como están relacionados entre sí la resistividad aparente y los dispositivos de medición en los que se han sustituido recíprocamente las tomas de tierra de emisión y recepción.

Para el arreglo **AMNB**

$$\rho_{a_1} = K_1 \Delta V_1 / I_1,$$

para el dispositivo **MABN**

$$\rho_{a_2} = K_2 \Delta V_2 / I_2.$$

Debido a que $K_1 = K_2$, entonces para la condición de igualdad de las corrientes I_1 y I_2 , se obtiene la igualdad $\Delta V_1 = \Delta V_2$, y por tanto $\rho_{a_1} = \rho_{a_2}$.

Por consiguiente la permutación en la ubicación de los electrodos de tierra **AB** y **MN** no influye en la magnitud de la ρ_a medida. Ahora, conociendo que la resistividad aparente no depende de la intensidad de la corriente en el circuito de las tomas de tierra de emisión del dispositivo de medición, la última igualdad será exacta también para el caso de $I_1 \neq I_2$.

Apéndice B. Cálculo Función de sensibilidad 1D

La integral general que permite encontrar la función de sensibilidad de cada arreglo de electrodos está dada de la siguiente manera

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(x-a) + y(y-b) + z(z-c)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} ((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy. \quad (74)$$

Esta integral tiene solución analítica, se procede a tomar tres pares de transformadas de Fourier

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} &\leftrightarrow 2\pi \frac{e^{-|z|\sqrt{u^2 + v^2}}}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \\ -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} &\leftrightarrow 2\pi(i.v) \frac{e^{-|z|\sqrt{u^2 + v^2}}}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \frac{|z|}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} &\leftrightarrow 2\pi e^{-|z|\sqrt{u^2 + v^2}}. \end{aligned}$$

Separando la integral (74) en tres partes : $I = I_1 + I_2 + I_3$, y tomando los tres pares de transformadas

de Fourier en cada una de ellas se tiene :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha e^{iu\alpha} e^{iv\beta} d\alpha d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + (z-c)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iux} e^{ivy} dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
 &= -2\pi(i.v) \frac{e^{-|z-c|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot -2\pi(i.v) \frac{e^{-|z|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} = 4\pi^2 u^2 \frac{e^{-|2z-c|\sqrt{u^2+v^2}}}{u^2+v^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta e^{iu\alpha} e^{iv\beta} d\alpha d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + (z-c)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y e^{iux} e^{ivy} dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
 &= 2\pi(i.v) \frac{e^{-|z-c|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} \cdot 2\pi(i.v) \frac{e^{-|z|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} = 4\pi^2 u^2 \frac{e^{-|2z-c|\sqrt{u^2+v^2}}}{u^2+v^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-c) e^{iu\alpha} e^{iv\beta} d\alpha d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + (z-c)^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z e^{iux} e^{ivy} dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
 &= 2\pi e^{-(z-c)\sqrt{u^2+v^2}} \cdot 2\pi e^{-(z)\sqrt{u^2+v^2}} = 4\pi^2 e^{-(2z-c)\sqrt{u^2+v^2}}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que la integral (74) tiene como solución

$$I(u, v, c, z) = I_1 + I_2 + I_3 = 8\pi^2 e^{-(2z-c)\sqrt{v^2+u^2}}. \quad (75)$$

Seguidamente se le aplica la transformada de Fourier inversa a la expresión (75) obteniendo

$$I(a, b, c, z) = \frac{4\pi(2z - c)}{(a^2 + b^2 + (2z - c)^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (76)$$

Reemplazando la distancia entre los electrodos (a, b, c) . Con la expresión (76) se obtiene la función de sensibilidad 1D para todas las configuraciones de electrodos.

Apéndice C. Diferencias finitas

El método de las diferencias finitas es utilizado para calcular de manera numérica las soluciones de ecuaciones diferenciales, la solución del problema se obtiene derivando las ecuaciones de diferencia de la ecuación diferencial gobernante del espacio discreto (x, y, z) en una malla prismática rectangular no uniforme sobre el cual se resolverá el problema. (Dey and Morrison [1979b]). Dado un modelo de tierra 2D, primero se superpone una cuadrícula rectangular sobre el modelo y se asignan valores de conductividad a cada elemento de la cuadrícula (McGillivray [1992]), para cada nodo de la celda se desarrolla la ecuación diferencial gobernante con las condiciones de fronteras correspondientes, la solución del modelo se construye a partir de la suma de todas las soluciones de cada celda individual (Dey and Morrison [1979b]). El método de diferencias finitas básicamente determina el potencial en los nodos de la malla rectangular que consta de L nodos en la dirección horizontal y M nodos en la dirección vertical. se debe tener en cuenta que el modelo de cuadrícula tiene columnas $L-1$ y filas $M-1$ de bloques rectangulares. Los bloques pueden tener diferentes valores de resistividad. Utilizando una malla suficientemente fina, se pueden modelar estructuras geológicas complejas.

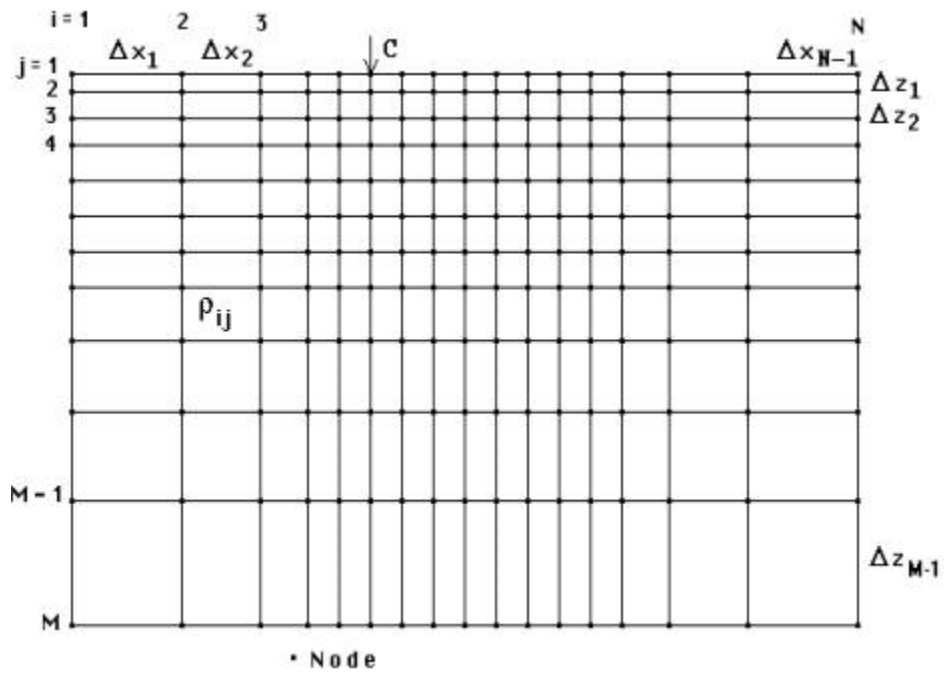


Figura 34. Rejilla bidimensional de diferencia finita usada para discretizar el problema de resistividad. Tomado de: Dey and Morrison [1979a]

Apéndice D. Sesiones del seminario de investigacion

Tabla 1

Sesiones del seminario de investigacion

S	Encargado	Actividad	Relator
1	José David Sanabria	Para la primera sesión del seminario de investigación el director realizo una introducción general del seminario, presentando la bibliografía a trabajar para el desarrollo de las sesiones. Seguidamente se realizo una introducción referente al método de sondeo eléctrico vertical, las configuraciones de electrodos más usadas de este método, aspectos generales de como llevar una bitacora de campo y realizar el trabajo seguro al momento de realizar estudios en campo, los programas computacionales tanto de licencia libre como programas pagos entre otros aspectos importantes al momento de realizar una exploración en campo.	Hugo Fernando Gomez

S	Encargado	Actividad	Relator
2	José David Sanabria	Se realizó una discusión general sobre el método de sondeo eléctrico vertical abordando temas como el potencial generado por un electrodo, la existencia de diferentes configuraciones del método, la relación que tiene el potencial, la resistividad aparente y el factor geométrico propio de cada configuración. Basándonos en la idea: "Si tenemos información del potencial de la superficie generado por electrodos es posible describir el potencial en puntos más profundos del suelo, estratificando el subsuelo en capas horizontales" Se llevó a cabo el análisis del modelo matemático aplicando la ecuación de Laplace para obtener el potencial en la n-esima capa. Una vez obtenido el potencial para la capa mas profunda se procedio a relacionar este resultado con el factor geométrico de cada arreglo y así, obtener la resistividad aparente en función del modelo matemático para las diferentes configuraciones del método, particularmente se presento el resultado para Schlumberger dejando como tarea para la siguiente sesión resolverlo para la configuración Wenner. Adicionalmente se presentó la grafica del resultado obtenido para la configuración Schlumberger (curva para configuración Schlumberger) dando espacio para discutir de la validez del uso de las curvas maestras como recurso gráfico para obtener información de el subsuelo.	Anderson Bece- rra

S	Encargado	Actividad	Relator
3	José David Sanabria	A partir de un análisis sísmico se dejó en claro el teorema de reciprocidad, mencionando las ventajas y usos que presenta dicho teorema en el método de exploración eléctrica. Se discutieron los cálculos correspondientes para hallar el potencial en la superficie basándonos en un corte geológico de dos capas horizontales, procedimiento que se puede extender para el caso general de n capas horizontales. Adicionalmente, a partir de la configuración espacial para el arreglo Wenner se realizaron los cálculos correspondientes para hallar la resistividad aparente, extendiendo este análisis para las demás configuraciones de electrodos. Finalmente se discutió la importancia de los anteriores resultados para el análisis de las curvas maestras, dejando como tarea realizar los cálculos para el mismo modelo de capas horizontales con el método de las imágenes reflejadas.	Hugo Fernando Gómez

S	Encargado	Actividad	Relator
4	José David Sana- bria	Se analizó que la relación entre la resistividad y la distancia entre las tomas de tierra de emisión, para los diversos cortes geoelectricos es muy compleja. Debido a que este cálculo teórico de esta relación está basado en el cálculo del campo de una fuente puntual de corriente en un medio heterogéneo y se ha desarrollado especialmente para cortes de capas horizontales. También se observó que la forma de las curvas de sondeo eléctrico vertical dependen del número de capas horizontales que existen en el corte, la relación entre sus resistividades y espesores así como también de la semi-distancia de los electrodos de emisión.	Heiner Castro

S	Encargado	Actividad	Relator
5	Hugo Fernando Gómez y José David Sanabria	En esta reunión semanal se abordaron temas importantes para el avance del seminario, uno de ellos fue el alcance de profundidad que tiene la corriente constante inyectada al subsuelo a través de los electrodos, partiendo del potencial para una capa homogénea, se desarrolló la expresión que relaciona la corriente, la profundidad y la separación entre los electrodos, análogamente se presentó la fórmula de alcance de profundidad de las líneas de corriente para un medio heterogéneo de dos capas con diferentes resistividades; Por otra parte se realizó el análisis gráfico de dicho resultado permitiendo así, observar que porcentaje de corriente llega a una distancia determinada en función del coeficiente de transmisión y distanciamiento de los electrodos, dando espacio para discutir la importancia de dicho porcentaje para realizar un adecuado mapeo del subsuelo. Adicionalmente se dejó como tarea para la siguiente sesión buscar, analizar, comprender y solucionar por algún método numérico la función de sensibilidad.	Anderson Bece-rra

S	Encargado	Actividad	Relator
6	José David Sanabria	Se realizó la discusión de la función de sensibilidad 1D, comparando los cálculos realizados para llegar a la derivada de Fréchet para los arreglos Polo-polo, Wenner, Schlumberger, Dipolo-Dipolo, Polo-Dipolo. Seguidamente se normalizaron las diferentes funciones de sensibilidad para realizar una comparación más detallada de esta. Por último se analizaron las ventajas y desventajas de cada uno de estos arreglos en cuanto la sensibilidad en profundidad, cuestionándolos cuál arreglo es el más adecuado para realizar la exploraciones someras o exploraciones en las que se necesite llegar más profundo y obtener datos confiables al momento de llevar todo esto a campo.	Hugo Fernando Gómez
7	José David Sanabria	Esta semana, el seminario abordó la discusión sobre los resultados de la función de sensibilidad 1D procediendo así a realizar las primeras conclusiones sobre esta parte de la investigación. Seguidamente se presentó un código en Python para resolver el problema de la función de sensibilidad 2D	Heiner Castro

S	Encargado	Actividad	Relator
8	José David Sana- bria	El director de seminario presenta una biblioteca orientada a objetos de código abierto para modelado e inversión en geofísica pyGIMLi. Esta biblioteca proporciona administración para mallas estructuradas y no estructuradas en 2D y 3D, con solucionadores de elementos finitos y volúmenes finitos entre otros métodos numéricos Rücker et al. [2017]. Para esta reunión de estudio la parte de la librería dirigida a los métodos eléctricos, analizando los códigos disponibles. Finalmente como trabajo se dejó analizar el código relacionado con la función de sensibilidad para las diferentes configuraciones de electrodos, disponible en la biblioteca de pyGIMLi.	Anderson Bece- rra

S	Encargado	Actividad	Relator
9	Anderson Bece- rra y José David Sanabria	Primero que todo se revisaron los códigos de resistividad, eléctrica disponibles en la sección de ejemplos de la biblioteca de pyGIMLi(2D ERT modeling and inversion, Four-point sensitivities) que por facilidad, se encuentran en la dirección http://bit.ly/pyGIMLi. Seguidamente, se trabajó con el código correspondiente a la sensibilidad para cuatro electrodos en un medio homogéneo, donde se editó el código para graficar la función de sensibilidad en el caso de tener un arreglo que constan de dos y tres electrodos. Una vez obtenidas las funciones de sensibilidad 2D de los diferentes arreglos, se fue variando de posición los electrodos para ver el comportamiento de la función de sensibilidad al cambiar de distancia los electrodos. A demás, se edito la escala de colores del código, con el fin de ver con más claridad los contornos de sensibilidad de los arreglos y con esto realizar de forma más clara el analisis de la varición de sensibilidad de cada uno de los arreglos.	Hugo Fernando Gómez

S	Encargado	Actividad	Relator
10	Anderson Bece- rra y Hugo Fer- nando Gómez	En esta reunión semanal, se abordó una discusión sobre los inconvenientes a la hora de aplicar el resultado gráfico de la función de sensibilidad 2D sobre un modelo con anomalía y en compañía del profesor se realizó una revisión de dichos inconvenientes en el código de pyGIMLI generado para el modelo, concluyendo que hace falta hacer una revisión más profunda del programa para poder realizar dicho objetivo. Op- cionalmente se presentó un software geofísico de descarga libre (RES2DMOD) en el cual fue posible visualizar resultados más específicos de la función de sensibilidad dejando como tarea, hacer un estudio más profundo de el código de python y del software RES2DMOD para cumplir con el objetivo.	Anderson Bece- rra

S	Encargado	Actividad	Relator
11	José David Sanabria, Anderson Becerra, Heiner Castro y Hugo Fernando Gómez	Para esta sesión del seminario, se discutieron las función de sensibilidad 2D de los arreglos Wenner, Schlumberger, Dipolo-Dipolo, Polo-Dipolo y Polo-Polo, obtenidas con el programa RES2DMOD. Seguidamente se estudiaron las variaciones de sensibilidad al aumentar la distancia entre electrodos para cada uno de los arreglos trabajados, analizando la zonas de alta y baja sensibilidad. Por último se analizo cada una de las gráficas obtenidas con el programa trabajado, realizando una comparación entre cuál de los diferentes arreglos tiene mayor sensibilidad horizontal y/o vertical y de esta manera entrando en la discusión de las ventajas y desventajas que tiene cada uno de ellos.	Hugo Fernando Gómez
12	José David Sanabria, Anderson Becerra, Heiner Castro y Hugo Fernando Gómez	En esta semana la reunión del seminario realizo una comparación entre las gráficas obtenidas y algunas gráficas visualizadas en la revisión bibliográfica, permitiendo así hablar de la efectividad del programa RES2DMOD a la hora de resolver nuestro modelo,también se abordó una pequena comparación entre las gráficas obtenidas para cada configuración.	Heiner Castro

S	Encargado	Actividad	Relator
13	Hugo Fernando Gómez, Anderson Becerra y Heiner Castro.	En esta sesión del seminario se continuó la discusión sobre la comparación de la función de sensibilidad de las configuraciones del método SEV, basados en los resultados obtenidos, llegando así a sacar unas primeras conclusiones y dejando como tarea para la siguiente sesión hacer análisis y conclusiones individualmente para finalmente llegar a conclusiones generales del seminario.	Anderson Becerra
14	Hugo Fernando Gómez, Heiner Castro y Anderson Becerra	En esta sesión del seminario se recalcaron los fundamentos principales de la función de sensibilidad y así se generó una discusión más completa sobre las conclusiones obtenidas individualmente, llegando así a recopilar los resultados del seminario.	Anderson Becerra
15	Jose David Sanabria, Anderson Julian Becerra Bernal, Hugo Fernando Gómez	Finalmente, para las últimas dos sesiones el grupo de seminario realizó la redacción y corrección del documento donde se registró la información, el análisis y las conclusiones obtenidas en el trabajo de investigación, además, se realizó una	Hugo Fernando Gómez
16	Ochoa, Heiner Albeiro Castro Duenez	lectura de cada una de las sesiones realizadas durante el proceso de investigación.	