

# Generalizaciones de Sistemas Iterados de Funciones

Alexánder Méndez Espinel

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMATICAS  
BUCARAMANGA

2012

# Generalizaciones de Sistemas Iterados de Funciones

Alexánder Méndez Espinel

Trabajo de grado para optar el título de:

**Magister en Matemáticas**

Directora:

PhD. Sonia Marleni Sabogal Pedraza

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMATICAS

BUCARAMANGA

2012

# TABLA DE CONTENIDOS

<b>Introducción</b>	<b>10</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>12</b>
<b>2. Algunas definiciones alternativas de la noción de contracción</b>	<b>17</b>
<b>3. Algunas Generalizaciones de Sistemas Iterados de Funciones</b>	<b>26</b>
3.1. SIF con infinitas contracciones en un espacio métrico completo. . . . .	26
3.2. SIF con infinitas contracciones en un espacio métrico compacto . . . . .	36
3.3. SIF con contracciones generalizadas . . . . .	39
3.3.1. SIF con un número finito de E-contracciones. . . . .	39
3.3.2. SIF con un número infinito de E-contracciones. . . . .	42
3.3.3. SIF con un número finito de $\varphi$ -contracciones. . . . .	47
3.3.4. SIF con un número infinito de $\varphi$ -contracciones. . . . .	51
3.4. Conclusiones. . . . .	56
<b>Bibliografía</b>	<b>58</b>

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Efecto geométrico de una contracción. . . . .	17
2.2. Interrelaciones entre diferentes tipos de contracción. . . . .	25
3.1. Efecto de las $(f_i)_{i \in I}$ sobre $X$ . . . . .	35
3.2. SIF infinito tipo Cantor. . . . .	39
3.3. Atractor de un SIF infinito tipo Sierpiński . . . . .	48

## TABLA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{H}(X)$	Subconjuntos cerrados y acotados de $X$
$\mathcal{M}_X$	Subconjuntos acotados no vacíos de $X$
$\mathcal{B}_X$	Subconjuntos cerrados y acotados no vacíos de $X$
$f^{\circ n} = f^n$	Composición de $f$ consigo mismo $n$ veces
$\varphi$	Función de comparación
$Lip(f)$	Constante de Lipschitz de la función $f$
$d(x, A)$	$\inf_{a \in A} d(x, a)$
$B(A, \epsilon)$	$\{x \in X : d(x, A) < \epsilon\}$
$B[A, \epsilon]$	$\{x \in X : d(x, A) \leq \epsilon\}$
$d(A, B)$	$\sup_{a \in A} d(a, B)$
$F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A)$	El operador para SIF con finitas contracciones
$F(A) = \overline{\bigcup_{i \in I} f_i(A)}$	El operador para SIF con infinitas contracciones
$Y^X$	Clase de todas las funciones $f : X \rightarrow Y$
$(f_n)_n$	Sucesión en $Y^X$

## RESUMEN

**Título:** Generalizaciones de sistemas iterados de funciones\*

**Autor:** Alexander Méndez Espinel\*\*

**Palabras clave:** Sistema iterado de funciones infinito, atractor, contracción generalizada.

### Resumen.

La propuesta de este trabajo es presentar resultados análogos al bien conocido caso de un sistema iterado de funciones con un número finito de contracciones pero generalizando el número de contracciones, el espacio en el que se definen y el tipo de noción de contracción. Las siguientes son las generalizaciones que se consideran: sistemas iterados de funciones con un número infinito de contracciones en un espacio métrico completo así como en un espacio métrico compacto, sistemas iterados de funciones con un número finito e infinito contracciones generalizadas: E-contracciones y  $\varphi$ -contracciones. Se muestran algunos teoremas de punto fijo y las interrelaciones que existen entre las contracciones, E-contracciones y  $\varphi$ -contracciones. Para cada sistema iterado de funciones generalizado se demuestra la existencia y la unicidad del punto fijo del operador de Hutchinson-Barnsley asociado a este. Además se prueba que los atractores de los sistemas con infinitas contracciones e infinitas contracciones generalizadas se pueden aproximar mediante los atractores de sistemas iterados de funciones finitos apropiadamente escogidos en términos de la distancia Hausdorff. Se muestran ejemplos de conjuntos que no se pueden obtener como el punto fijo de sistemas iterados de funciones con un número finito de contracciones pero si cuando se consideran sistemas con un número infinito de ellas.

---

\*Tesis de grado.

\*\*Facultad de ciencias, Escuela de matemáticas, Directora:PhD. Sonia Marleni Sabogal Pedraza

## RESUINGLES

**Title:**Generalizations iterated function systems\*

**Author:**Alexander Méndez Espinel\*\*

**Keywords:** Infinite iterated function system, attractor, generalized contraction

**Abstract:**

The proposal of this work is to present the analogous results of the well-known case of the iterate system of functions with a finite number of contractions but summarizing the number, the space which define and the kind of notion of them. The following are the considered generalizations: iterate system of functions with an infinite number of contractions in a full metric space as well as in a compact metric space, iterate system of functions with a finite and infinite number of summarized contractions: E-contractions and  $\varphi$ -contractions. It shows some theorem of setpoint and the interrelation between the contractions, E-contractions and  $\varphi$ -contractions. For each iterate system of summarized functions is demonstrated the existence and the uniqueness of the Hutchinson-Barnsley's operator setpoint related to it. Also, it will prove that the attractors of the systems with the finite and infinite summarized contractions can approach through the attractors the iterate system of finite functions chosen in the distance terms of Hausdorff. It shows samples of sets which cannot get like the setpoint of the iterate system of functions with a finite number of contractions but it does when is considered the systems with an infinite number of them

---

\*Degree Work.

\*\*Faculty of Science, Mathematics School, Director: Sonia Marleni Sabogal Pedraza.

---

## INTRODUCCIÓN

En 1981, J. E Hutchinson en su artículo “*Fractals and Self Similarity*” [2], prueba que dada una familia finita de contracciones  $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$  de un espacio métrico completo  $(X, d)$  en él mismo, la función

$$F(A) = \bigcup_{n=1}^N f_n(A),$$

tiene un único punto fijo  $K$  en el hiperespacio de los subconjuntos compactos no vacíos de  $X$ . Este resultado fué popularizado por Michael Barnsley en “*Fractals Everywhere*”, y en la literatura la función  $F$  es llamado el operador de Hutchinson-Barnsley, mientras el conjunto  $K$  es llamado fractal asociado al sistema iterado de funciones  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ .

En 1985, M. Hata [9] consideró una forma más débil de la noción de contracción y se obtuvieron resultados similares a los de Hutchinson, es decir, demostró la existencia del atractor  $K$  como solución de la ecuación  $F(K) = K$ .

En los últimos años se han realizado esfuerzos por extender el marco clásico de Hutchinson de fractales para espacios más generales y sistemas iterados de funciones infinitos. Para SIF's infinitos son notables los trabajos de H. Fernau [16], G. Gwóźdź-Lukowska y J. Jackymski [3], R. Miculescu and A. Mihail [1], G.B lewellen [8], N.A

Secelean [7] entre otros. Algunos resultados interesantes acerca de las extensiones de los espacios métricos en los que los SIF's se definen, o las contracciones se pueden encontrar por ejemplo en los trabajos de A. Bieleki [6], W.J Charatonik y A. Dilks [12], N.A Secelean [15,17].

El propósito de este trabajo es presentar de manera sistemática algunos resultados importantes sobre diferentes formas de generalizar los sistemas iterados de funciones. Para ello este trabajo lo hemos dividido en 3 capítulos.

El capítulo 1 se dedica a presentar algunas definiciones y propiedades básicas de la teoría clásica de sistemas iterados de funciones, así como algunos resultados necesarios para capítulos posteriores. En el capítulo 2 comenzamos recordando el concepto de contracción y el teorema de punto fijo de Banach para posteriormente presentar algunas definiciones alternativas de la noción de contracción: *E-contracción* y  *$\varphi$ -contracción*, así como las interrelaciones entre todas estas.

En el capítulo 3 se presentan los principales resultados sobre algunas generalizaciones de sistemas iterados de funciones. Así, en la sección (3.1) se consideran sistemas con un número infinito de contracciones de Banach sobre un espacio métrico completo, en la sección (3.2) también consideramos un número infinito de contracciones de Banach pero sobre un espacio métrico compacto, y en la sección (3.3) se estudian sistemas con E-contracciones y  $\varphi$ -contracciones, considerando también un número finito e infinito de ellas. Además se presentan algunos resultados concernientes a la aproximación del atractor de sistemas iterados de funciones infinitos mediante los atractores de sistemas iterados de funciones finitos.

# CAPÍTULO 1

## PRELIMINARES

Los conceptos y resultados de este capítulo pueden encontrarse en [4] y [5], entre otros.

**Definición 1.1.** Sea  $X$  un conjunto, y sea  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  una función que satisface

a)  $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$  y  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ .

b)  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ .

c)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$ .

Entonces decimos que  $(X, d)$  es un **espacio métrico**, y que  $d$  es una métrica sobre  $X$ .

**Nota 1.1.** Si solo se cumplen las propiedades (b) y (c) decimos que  $(X, d)$  es un **espacio pseudométrico**, y que  $d$  es una pseudométrica sobre  $X$ .

**Definición 1.2.** Un espacio topológico se dice **primero contable** (o que satisface el primer axioma de contabilidad) si y solo si cada  $x \in X$  tiene una base contable de vecindades.

**Nota 1.2.** Los discos con centro en  $x$  y radio racional forman una base contable de  $x$  en todo espacio pseudométrico. Los espacios pseudometrizablees son todos primero contable.

**Teorema 1.1.** Si  $X$  es un espacio primero contable y  $A \subset X$ , entonces  $x \in \overline{A}$  si y solo si existe una sucesión  $x_n$  en  $A$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .

**Definición 1.3.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Si para toda sucesión de Cauchy  $x_n$  existe  $x \in X$  tal que  $x_n \rightarrow x$  decimos que el espacio métrico  $(X, d)$  es **completo**.

**Definición 1.4.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $A$  un subconjunto de  $X$ . Entonces  $A$  es **relativamente compacto** si y solo si su adherencia es un compacto.

**Definición 1.5.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y sea  $A \subseteq X$ ,  $A \neq \emptyset$ . Entonces definimos el diámetro de  $A$ , como

$$\text{diámetro}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

**Definición 1.6.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y sea  $f : X \rightarrow X$  una función. Si existe  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$  tal que para todo  $x, y \in X$

$$d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y),$$

entonces  $f$  es llamada una **función de Lipschitz** y la constante  $c$  es llamada constante de Lipschitz de  $f$ . Algunas veces la más pequeña constante de Lipschitz de  $f$  es denotada por  $Lip(f)$ .

**Nota 1.3.** Si  $c \in (0, 1)$  entonces se dice que  $f$  es una **contracción**.

**Teorema 1.2.** Toda función de Lipschitz es uniformemente continua

*Demostración.* Como  $f$  es una función de Lipschitz, existe  $K > 0$  tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Sea  $\epsilon > 0$  y  $\delta = \epsilon/K$ , si  $d(x, y) < \delta$  entonces:

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) < k\delta = k(\epsilon/K) = \epsilon.$$

Luego  $f$  es uniformemente continua. □

**Lema 1.1.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  es una función de Lipschitz, entonces:

$$\text{diámetro}(f(A)) \leq Lip(f) \text{diámetro}(A), \quad \forall A \subseteq X.$$

**Proposición 1.1.** Sea  $(X, d)$  es un espacio métrico. Sea  $A \subset X$  un conjunto acotado, entonces:

$$\text{diámetro}(A) = \text{diámetro}(\overline{A}).$$

**Demostración.** Supongamos que

$$\begin{aligned} l &= \text{diámetro}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}, \\ m &= \text{diámetro}(\overline{A}) = \sup\{d(x, y) : x, y \in \overline{A}\}. \end{aligned}$$

Como  $A \subseteq \bar{A}$ , entonces  $l \leq m$ . Sean  $x, y \in \bar{A}$ , entonces existen sucesiones  $\{x_n\}, \{y_n\} \in A$  tales que  $x_n \rightarrow x$  y  $y_n \rightarrow y$ . Así  $\forall k \in \mathbb{N}$  existe  $M_k \in \mathbb{N}$  tal que

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{2k} \quad \text{y} \quad d(y_n, y) \leq \frac{1}{2k}, \quad \forall n \geq M_k$$

luego  $\forall k \in \mathbb{N}$  se tiene que

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \quad \forall n \geq M_k \\ &\leq \frac{1}{2k} + d(x_n, y_n) + \frac{1}{2k} \quad \forall n \geq M_k \\ &\leq \frac{1}{k} + l. \end{aligned}$$

es decir:

$$d(x, y) \leq l, \quad \forall x, y \in \bar{A}.$$

Luego,  $m \leq l$ . ■

**Definición 1.7.** Sea  $X \neq \emptyset$ , Notaremos  $\mathbb{H}(X)$  a la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos de  $X$ , es decir:

$$\mathbb{H}(X) := \{K \subseteq X : K \text{ es compacto, } K \neq \emptyset\}.$$

**Definición 1.8 (Métrica Hausdorff-Pompeiu\*).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $\mathbb{H}(X)$  la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos de  $X$ . La función  $h : \mathbb{H}(X) \times \mathbb{H}(X) \rightarrow [0, \infty)$  definida por

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$$

donde  $d(A, B) = \max_{b \in B} \min_{a \in A} d(a, b)$ , para todo  $A, B \in \mathbb{H}(X)$ , es una métrica, llamada la **métrica Hausdorff**.  $\mathbb{H}(X)$  es un espacio métrico completo respecto a la métrica  $h$ .

---

\*Deseamos nombrar esta métrica como Hausdorff-Pompeiu y no solamente Hausdorff, ya que Dimitie Pompeiu (1873–1954), un distinguido matemático rumano fué el primero en definir en 1905 en su tesis doctoral “*Sur la continuité des fonctions de variables complexes*” la distancia entre conjuntos. Desafortunadamnete la notación usada por Pompeiu no gusto mucho. En 1914 en su famoso libro “*Grundzuege der Mengenlehre*”, Hausdorff realiza un estudio sobre la distancia entre conjuntos en espacios métricos y propone una modificación en la notación. La notación usada por Hausdorff es la que usamos en la actualidad.

**Nota 1.4.** Con respecto a  $\mathbb{H}(X)$  se tienen algunos resultados importantes como por ejemplo\*:

1.  $(X, d)$  es completo  $\leftrightarrow (\mathbb{H}(X), h)$  es completo.
2.  $(X, d)$  es compacto  $\leftrightarrow (\mathbb{H}(X), h)$  es compacto.

## Sistemas iterados de funciones

**Definición 1.9.** Un *Sistema Iterado de Funciones (SIF)* es una estructura de la forma  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$  donde  $X$  es un espacio métrico completo y cada  $f_i : X \rightarrow X$  es una contracción,  $1 \leq i \leq N$ .

El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de lo que llamaremos el atractor de un SIF.

**Teorema 1.3.** Dado  $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$  un SIF, se define

$$\begin{aligned} F : \mathbb{H}(X) &\rightarrow \mathbb{H}(X) \\ K &\mapsto F(K) := \bigcup_{i=1}^N f_i(K), \end{aligned}$$

entonces existe un único  $A \in \mathbb{H}(X)$  tal que

$$F(A) = A = \bigcup_{i=1}^N f_i(A)$$

Además para cualquier  $K \in \mathbb{H}(X)$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{\circ n}(K) = A.$$

El conjunto  $A$  lo llamaremos el atractor del SIF; su existencia, unicidad y la manera de calcularlo es una consecuencia del teorema de contracción de Banach para espacios métricos completos.  $F$  es usualmente llamado el *Operador de Hutchinson-Barnsley*,

---

\*Las demostraciones de estos resultados pueden encontrarse en S. Sabogal and G. Arenas, “Una introducción a la geometría fractal”, Ediciones UIS, 2011. Página 76 y en W. Rinow, “Die innere Geometrie der metrischen Raume”, Springer-Verlag, Berlín, Göttingen, Heidelberg, 1961. Página 58

mientras que  $A$  es llamado un fractal en el sentido de Barnsley asociado al Sistema Iterado de Funciones.

**Definición 1.10.** *Diremos que un conjunto es autosemejante (o autosimilar) si es el atractor de un SIF.*

## CAPÍTULO 2

### ALGUNAS DEFINICIONES ALTERNATIVAS DE LA NOCIÓN DE CONTRACCIÓN

En primer lugar, recordemos la noción de contracción dada en el capítulo anterior.

**Definición 2.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Una función  $f : X \rightarrow X$  se dice **contracción** si existe una constante  $0 \leq \alpha < 1$  tal que para todo  $x, y \in X$

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y). \quad (2.1)$$

La constante  $\alpha$  es llamada *factor o radio de contracción*.

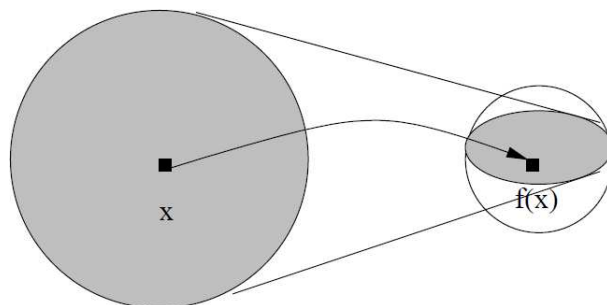


Figura 2.1: Efecto geométrico de una contracción.

**Teorema 2.1 (Teorema de punto fijo de Banach).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y sea  $f : X \rightarrow X$  una contracción con factor de contracción  $\alpha$ . Sea  $x_0 \in X$  y

## 18Capítulo 2. Algunas definiciones alternativas de la noción de contracción

definamos recursivamente vamente

$$x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1.$$

Entonces  $f$  tiene un único punto fijo, y la sucesión  $x_n$  converge al punto fijo de  $f$ .

**Demostración.** Para  $n \geq 1$ ,  $d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n)$ . Por lo tanto

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) \leq \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n d(x_0, x_1).$$

Para todo  $m > n$ , usando la desigualdad triangular varias veces tenemos:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + \dots + \alpha^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{m-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \dots) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Esto también es cierto cuando  $m = n$ . Para  $\epsilon > 0$  sea  $N > 1$  tal que  $\left(\frac{\alpha^N}{1 - \alpha}\right) d(x_0, x_1) < \epsilon$ . Entonces para todo  $m > n \geq N$ ,

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \leq \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) < \epsilon$$

Esto prueba que la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy. Como  $X$  es completo  $\{x_n\}$  converge en  $X$ , es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in X$ . Por la continuidad de  $f$ , si  $x_n \rightarrow a$  entonces  $f(x_n) \rightarrow f(a)$ . Como  $f(x_n) = x_{n+1}$ ,  $f(x_n) \rightarrow a$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Entonces  $a$  y  $f(a)$  son límites de  $\{x_n\}$ . Por la unicidad del límite,  $a = f(a)$ . Para mostrar que  $f$  tiene un único punto fijo en  $X$ , sea  $a$  y  $b$  puntos fijos de  $f$ . Entonces

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq \alpha d(a, b).$$

Si  $a \neq b$  entonces  $d(a, b) > 0$ , podemos dividir por  $d(a, b)$  y así obtener  $1 \leq \alpha$ , lo cual es falso. Así  $a = b$ . ■

Es de mucha importancia que la constante  $\alpha$  sea estrictamente menor a 1, ya que nos proporciona control sobre el radio de convergencia de  $\{f^{\circ n}(x_0)\}$  \* hacia el punto fijo. En efecto, supongamos que  $a \in X$  es punto fijo de  $f$ , entonces

$$d(a, f^n(x)) \leq \alpha d(a, f^{n-1}(x)) \leq \alpha^2 d(a, f^{n-2}(x)) \leq \dots \leq \alpha^n d(a, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

de lo cual se concluye que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a$ .

**Ejemplo 2.1.** Toda función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax + b$  con  $0 \leq |a| < 1$  es una contracción, con factor de contracción  $|a|$ .

**Ejemplo 2.2.** Toda función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = rze^{i\theta} + a + ib$ , donde  $a, b, \theta \in \mathbb{R}$  y  $r \in (-1, 1)$ , es una contracción con factor de contracción  $|r|$ .

**Definición 2.2.** (Edelstein)[10] Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Una función  $f : X \rightarrow X$  se dice **E-contracción** si para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ ,  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ .

**Nota 2.1.** Al no existir el número  $\alpha$ , perderíamos el control del factor de convergencia y por tanto el punto fijo podría no existir.

**Ejemplo 2.3.** Sea  $X = \mathbb{R}$  y  $f(x) = \ln(1 + e^x)$ . Veamos que  $f$  es una E-contracción. Consideremos la derivada,

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} < 1 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

luego

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} < 1$$

por lo tanto,  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ . Ahora veamos que  $f$  no tiene puntos fijos. Supongamos que  $f$  tiene un punto fijo, es decir:

$$\begin{aligned} f(a) &= a \\ \ln(1 + e^a) &= a \\ 1 + e^a &= e^a \\ 1 &= 0 \quad \text{contradicción.} \end{aligned}$$

---

\*En adelante  $f^n$  denotará  $f^{\circ n}$ , esto es la composición de  $f$  consigo misma  $n$  veces.

**Ejemplo 2.4.** Sea  $X = [1, \infty)$  y  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ .

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| = \left| x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \\ &= \left| x - y + \frac{y - x}{xy} \right| = \left| (x - y) \left( 1 - \frac{1}{xy} \right) \right| \\ &= |x - y| \underbrace{\left| 1 - \frac{1}{xy} \right|}_{<1} < |x - y| = d(x, y). \end{aligned}$$

luego  $f$  es una  $E$ -contracción. Ahora para todo  $x \in [1, \infty)$  se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &> x^2 \\ \frac{x^2 + 1}{x} &> x \\ f(x) &> x. \end{aligned}$$

por lo tanto  $f$  no tiene puntos fijos.

Note que en los ejemplos anteriores el espacio no era compacto.

**Teorema 2.2.** (*Edelstein*)[10].

Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Si  $f : X \rightarrow X$  satisface que  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ ,  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , entonces  $f$  tiene un único punto fijo en  $X$ .

**Demostración.** Considere la función  $\varphi : X \rightarrow [0, \infty)$  dada por  $\varphi(x) = d(x, f(x))$ . Es claro que si  $\varphi(x) = 0$  entonces  $x$  es punto fijo de  $f$ . Como  $\varphi$  es continua y  $X$  es compacto se tiene que  $\varphi$  tiene un valor mínimo; sea  $a \in X$  tal que  $\varphi(a) \leq \varphi(x)$  para todo  $x \in X$ . Supongamos que  $a \in X$  no es un punto fijo de  $f$ . Entonces

$$\varphi(f(a)) = d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a)) = \varphi(a)$$

lo cual contradice la minimalidad de  $\varphi(a)$ . Por lo tanto  $a$  es un punto fijo de  $f$ . Supongamos que  $a, a' \in X$  son dos puntos fijos de  $f$  con  $a \neq a'$ , entonces

$$d(a, a') = d(f(a), f(a')) < d(a, a') \quad \text{contradicción}$$

por lo tanto  $a = a'$ . ■

### ¿Que relación existe entre *contracción* y *E-contracción*?

Es inmediato que toda *contracción* es una *E-contracción*, pero el recíproco es falso. Consideremos la función  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}$ , definida en  $\mathbf{X} = [\mathbf{1}, \infty)$ . Se demostró ya, en el ejemplo (2.4) que es una *E-contracción*. Veamos que  $f$  no es una *contracción*. Razonemos por contradicción. Supongamos que existe  $\alpha \in [0, 1)$  tal que:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| = \left| (x - y) + \frac{y - x}{xy} \right| \\ &= \left| (x - y) \left( 1 - \frac{1}{xy} \right) \right| = d(x, y) \left| 1 - \frac{1}{xy} \right| \\ &\leq \alpha d(x, y). \end{aligned}$$

Luego

$$\left| 1 - \frac{1}{xy} \right| \leq \alpha \longrightarrow \left| 1 - \frac{1}{xy} \right| \xrightarrow{x, y \rightarrow \infty} 1 \leq \alpha \quad \forall x, y \in X.$$

#### **Definición 2.3 (Función de comparación).**

Una función  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es llamada una **función de comparación** si:

1.  $\varphi$  es monótona creciente (no necesariamente continua), es decir,  $x \leq y \rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{on}(t) = 0$ , para toda  $t > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$
3.  $\varphi(0) = 0$ .

**Ejemplo 2.5.** La función  $\varphi(t) = \alpha t$ ,  $0 \leq \alpha < 1$  y  $t \in \mathbb{R}^+$  es una función de comparación.

En efecto:

1. Si  $x \leq y$  entonces  $\alpha x \leq \alpha y$ , es decir:  $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ .
2.  $\varphi(t) = \alpha t$ ,  $\varphi^2(t) = \varphi(\varphi(t)) = \varphi(\alpha t) = \alpha(\alpha t) = \alpha^2 t, \dots$ ,  $\varphi^n(t) = \alpha^n t$ . Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n t = t \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

## 22Capítulo 2. Algunas definiciones alternativas de la noción de contracción

**Ejemplo 2.6.** La función definida por  $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}, t \in \mathbb{R}^+$ , es una función de comparación.

Veamos:

1. Si  $x \leq y$  entonces

$$x + xy \leq y + xy \rightsquigarrow x(1+y) \leq y(1+x) \rightsquigarrow \frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y} \rightsquigarrow \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

2.  $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}, \quad \varphi^2(t) = \varphi(\varphi(t)) = \varphi\left(\frac{t}{1+t}\right) = \frac{t}{1+2t}, \dots, \quad \varphi^n(t) = \frac{t}{1+nt}.$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{1+nt} = t \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+nt} = 0$$

**Proposición 2.1.** Si  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  una función de comparación entonces:

$$\varphi(t) < t, \forall t > 0. \quad (2.2)$$

**Demostración.** Razonemos por contradicción. Supongamos  $\varphi(t) \geq t$  para algún  $t > 0$ .

Entonces:  $\varphi^2(t) = \varphi(\varphi(t)) \geq \varphi(t) \geq t, \dots, \quad \varphi^{on}(t) \geq t$ . Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{on}(t) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} t \quad \text{luego} \quad t \leq 0$$

Lo cual es una contradicción, es decir,  $\varphi(t) < t$ . ■

**Definición 2.4.** ( $\varphi$ -contracción)[18].

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Una función  $f : X \rightarrow X$  es llamada una  $\varphi$ -contracción si existe una función de comparación  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  tal que para todo  $x, y \in X$  se tiene que:

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)).$$

**Ejemplo 2.7.** Consideremos la función  $f(x) = \frac{x}{1+x}$  y  $X = [0, 1]$ . Tomemos la función de comparación definida en el ejemplo (2.6). Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $x < y$ , entonces:

$$d(f(x), f(y)) = \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| = \left| \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \right| = \left| \frac{x-y}{1+x+y+xy} \right|.$$

Como  $1+y-x < 1+y+x \leq 1+x+y+xy$ , entonces  $\frac{1}{1+x+y+xy} \leq \frac{1}{1+y-x}$ .

Luego:

$$\begin{aligned}
 d(f(x), f(y)) &= |x - y| \left| \frac{1}{1 + x + y + xy} \right| \leq |x - y| \left| \frac{1}{1 + y - x} \right| \\
 &= \left| \frac{x - y}{1 + (y - x)} \right| = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \\
 &= \varphi(d(x, y)).
 \end{aligned}$$

### ¿Que relación existe entre *contracción* y $\varphi$ -*contracción*?

**Toda contracción es una  $\varphi$ -contracción.**

Si  $f : X \rightarrow X$  es una contracción entonces  $\exists \alpha \in (0, 1)$  tal que para  $\forall x, y \in X$  se tiene que:

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

Tomando la función de comparación definida en el ejemplo (2.5), claramente se tiene que

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)).$$

**No toda  $\varphi$ -contracción es una contracción.**

Tomemos la función definida en el ejemplo (2.7), veamos que no es una contracción. Razonemos por contradicción. Supongamos que  $\exists \alpha \in [0, 1)$  tal que para  $\forall x, y \in X$  se tiene que:

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 d(f(x), f(y)) &= |x - y| \left| \frac{1}{1 + x + y + xy} \right| \\
 &= d(x, y) \left| \frac{1}{1 + x + y + xy} \right| \\
 \text{luego } \frac{1}{1 + x + y + xy} &\leq \alpha \quad \forall x, y \in [0, 1].
 \end{aligned}$$

Tomando  $x, y \rightarrow 0$ , tenemos que  $1 \leq \alpha$  (Contradicción).

¿Que relación existe entre *E-contracción* y *φ-contracción*?

Toda *φ-contracción* es una *E-contracción*.

Si  $f$  es una *φ-contracción* entonces existe una función de comparación  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  tal que  $\forall x, y \in X$  :

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)).$$

Si  $x \neq y, d(x, y) > 0$  y por la proposición (2.1), se tiene que:

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Es decir,  $f$  es también una *E-contracción*.

Antes de mostrar el teorema que garantiza que las *φ-contracciones* tienen un único punto fijo, ununciaremos una proposición cuya demostración puede encontrarse en [18].

**Proposición 2.2.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $f : X \rightarrow X$  una función. suponga que se tiene la siguiente condición:*

*“Para  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta(\epsilon)$ , tal que si  $d(x, f(x)) < \delta(\epsilon)$ , entonces  $f(B(x, \epsilon)) \subseteq B(x, \epsilon)$ .”*  
*Si para algún  $u \in X$  tenemos que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^{n+1}(x)) = 0,$$

*entonces la sucesión  $\{f^n(u)\}$  converge al punto fijo de  $f$ .*

**Teorema 2.3.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $f : X \rightarrow X$  una *φ-contracción* entonces  $f$  tiene un único punto fijo.*

**Demostración.** Como  $f$  es una *φ-contracción*, se tiene que:

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq \varphi^n(d(x, f(x))), \forall x \in X,$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^{n+1}(x)) = 0, \forall x \in X.$$

Sea  $\epsilon > 0$  y tome  $\delta(\epsilon) = \epsilon - \varphi(\epsilon)$ . Si  $d(x, f(x)) < \delta(\epsilon)$ , entonces para cada

$z \in B(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$  tenemos:

$$\begin{aligned} d(f(z), x) &\leq d(f(z), f(x)) + d(f(x), x) \leq \varphi(d(z, x)) + d(f(x), x) \\ &< \varphi(d(z, x)) + \delta(\epsilon) \leq \varphi(\epsilon) + (\epsilon - \varphi(\epsilon)) = \epsilon, \end{aligned}$$

luego  $f(z) \in B(x, \epsilon)$ . Por la proposición anterior,  $f$  tiene un punto fijo  $u$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = u$  para todo  $x \in X$ .

**Unicidad:** Suponemos que existe  $z \in X$  con  $z = f(z)$  y  $d(x, z) > 0$ . Entonces,

$$d(x, z) = d(f(x), f(z)) \leq \varphi(d(x, z)) < d(x, z).$$

Lo cual es una contradicción, por tanto  $d(x, z) = 0$ , es decir,  $x = z$ . ■

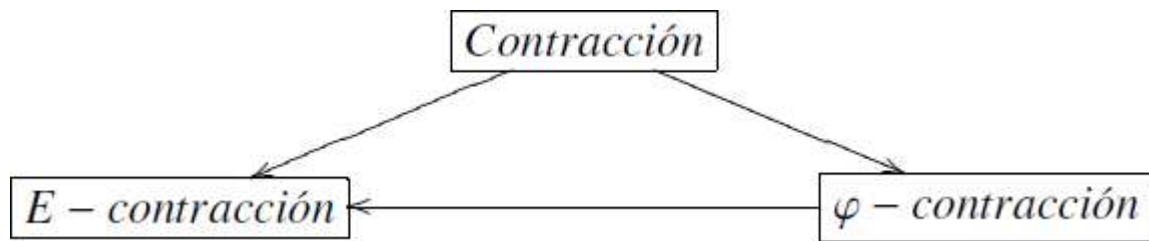


Figura 2.2: Interrelaciones entre diferentes tipos de contracción.

## CAPÍTULO 3

# ALGUNAS GENERALIZACIONES DE SISTEMAS ITERADOS DE FUNCIONES

En este capítulo abordaremos diferentes formas de generalizar la noción clásica de Sistemas Iterados de Funciones ya sea considerando espacios más generales o un número infinito de contracciones o considerando contracciones generalizadas ( $\varphi$ -contracciones o E-contracciones). Por supuesto en cada caso nos interesa particularmente la existencia y unicidad del atractor del SIF correspondiente.

---

### 3.1. SIF con infinitas contracciones en un espacio métrico completo.

---

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo Si  $\mathcal{M}_X = \{N \subseteq X : N \text{ es no vacío y acotado}\}$ , para todo  $x \in X, \epsilon > 0$  y  $A, B \in \mathcal{M}_X$ , consideramos:

$$\begin{aligned}d(x, A) &\stackrel{def}{=} \inf_{a \in A} d(x, a), \\B(A, \epsilon) &\stackrel{def}{=} \{x \in X : d(x, A) < \epsilon\}, \\B[A, \epsilon] &\stackrel{def}{=} \{x \in X : d(x, A) \leq \epsilon\}, \\d(A, B) &\stackrel{def}{=} \sup_{a \in A} d(a, B).\end{aligned}$$

**Proposición 3.1.** La función  $h^*(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$ , para todo  $A, B \in \mathcal{M}_X$  satisface las siguientes propiedades:

- a)  $h^*(A, B) = h^*(B, A)$ , para todo  $A, B \in \mathcal{M}_X$ ,
- b)  $h^*(A, B) \leq h^*(A, C) + h^*(C, B)$ , para todo  $A, B, C \in \mathcal{M}_X$ .

**Demostración.** La propiedad (a) es inmediata. Para probar la desigualdad triangular, sea  $a_1 \in A$  y  $c_1 \in C$ , entonces:

$$\begin{aligned} d(a_1, B) = \inf_{b \in B} d(a_1, b) &\leq d(a_1, c_1) + \inf_{b \in B} d(c_1, b) = d(a_1, c_1) + d(c_1, B) \\ &\leq d(a_1, c_1) + \sup_{c \in C} d(c, B) = d(a_1, c_1) + d(C, B) \\ &\rightarrow d(a_1, B) - d(C, B) \leq d(a_1, c_1), \end{aligned}$$

Entonces  $d(a_1, B) - d(C, B)$  es una cota inferior de  $d(a_1, c_1) \quad \forall c_1 \in C$ , por lo tanto

$$d(a_1, B) - d(C, B) \leq \inf_{c \in C} d(a_1, c) = d(a_1, C),$$

luego si  $a \in A$  esto implica que

$$d(a, B) \leq d(a, C) + d(C, B) \leq d(A, C) + d(C, B),$$

y por lo tanto  $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ . Similarmente  $d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$ .

Luego:

$$\begin{aligned} h^*(A, B) &= \max\{d(A, B), d(B, A)\} \leq \max\{d(A, C) + d(C, B), d(B, C) + d(C, A)\} \\ &\leq \max\{d(A, C), d(C, A)\} + \max\{d(C, B), d(B, C)\} \\ &= h^*(A, C) + h^*(C, B). \end{aligned}$$

■

Entonces  $h^*$  es una pseudométrica en  $\mathcal{M}_X$ , la cual es llamada la **Pseudométrica Hausdorff-Pompeiu**.

**Nota 3.1.**  $h^*$  no es una métrica ya que  $h^*((0, 1], [0, 1]) = 0$ , pero  $(0, 1] \neq [0, 1]$ .

## 28 Capítulo 3. Algunas Generalizaciones de Sistemas Iterados de Funciones

**Proposición 3.2.** Para todo  $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_X$  las siguientes propiedades son válidas:

(a) Para  $\epsilon > 0$ ,  $h^*(A_1, A_2) \leq \epsilon$  si y solo si  $A_1 \subseteq B[A_2, \epsilon]$  y  $A_2 \subseteq B[A_1, \epsilon]$

(b)  $h^*(A_1, A_2) = \inf\{r > 0 : A_1 \subseteq B(A_2, r) \text{ y } A_2 \subseteq B(A_1, r)\}$ .

(c)  $h^*(A_1, A_2) = h^*(\overline{A_1}, \overline{A_2})$ .

(d)  $h^*(A_1, A_2) = 0$  si y solo si  $\overline{A_1} = \overline{A_2}$

(e) Si  $f : X \rightarrow X$  es una función de Lipschitz, entonces

$$h^*(f(A_1), f(A_2)) \leq \text{Lip}(f)h^*(A_1, A_2).$$

(f) Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  y  $\{B_i\}_{i \in I}$  son dos familias de elementos de  $\mathcal{M}_X$  tal que  $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \in \mathcal{M}_X$  y  $\overline{\bigcup_{i \in I} B_i} \in \mathcal{M}_X$ , entonces

$$h^*\left(\overline{\bigcup_{i \in I} A_i}, \overline{\bigcup_{i \in I} B_i}\right) = h^*\left(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i\right) \leq \sup_{i \in I} h^*(A_i, B_i).$$

**Demostración.** (a) ( $\rightarrow$ ) Si  $h^*(A_1, A_2) \leq \epsilon$  entonces  $d(A_2, A_1) \leq \epsilon$  y  $d(A_1, A_2) \leq \epsilon$ , luego para  $a_1 \in A_1$  tenemos que

$$d(a_1, A_2) \leq \sup_{a \in A_1} d(a, A_2) = d(A_1, A_2) \leq \epsilon,$$

luego  $a_1 \in B[A_2, \epsilon]$ , es decir,  $A_1 \subseteq B[A_2, \epsilon]$ . Un argumento similar muestra que  $A_2 \subseteq B[A_1, \epsilon]$ .

( $\leftarrow$ ) Supongamos que  $A_2 \subseteq B[A_1, \epsilon]$ . Si  $a_2 \in A_2$  entonces  $a_2 \in B[A_1, \epsilon] = \{x \in X : d(x, A_1) \leq \epsilon\}$  entonces  $d(a_2, A_1) \leq \epsilon \quad \forall a_2 \in A_2$ , luego  $\sup_{a \in A_2} d(a, A_1) \leq \epsilon$ , es decir,  $d(A_2, A_1) \leq \epsilon$ . Análogamente si  $A_1 \subseteq B[A_2, \epsilon]$  se tiene que  $d(A_1, A_2) \leq \epsilon$ . Entonces:

$$h^*(A, B) = \max\{d(A_1, A_2), d(A_2, A_1)\} \leq \epsilon.$$

(b) Por la propiedad (a), tenemos que:

$$h^*(A_1, A_2) \leq \inf\{r > 0 : A_1 \subseteq B(A_2, r) \text{ y } A_2 \subseteq B(A_1, r)\}.$$

La otra desigualdad se tiene ya que para todo valor  $h^*(A_1, A_2) + \delta$  con  $\delta > 0$  podemos escoger  $r > 0$  tal que  $h^*(A_1, A_2) \leq r < h^*(A_1, A_2) + \delta$  aplicando la propiedad (a)

tenemos que  $A_1 \subseteq B[A_2, r]$  y  $A_2 \subseteq B[A_1, r]$  por lo cual se tiene que

$$\inf\{r > 0 : A_1 \subseteq B(A_2, r) \text{ y } A_2 \subseteq B(A_1, r)\} < h^*(A_1, A_2) + \delta$$

es decir,

$$\inf\{r > 0 : A_1 \subseteq B(A_2, r) \text{ y } A_2 \subseteq B(A_1, r)\} \leq h^*(A_1, A_2).$$

(c) Note que  $B[A_1, r]$  y  $B[A_2, r]$  son conjuntos cerrados, por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} A_1 \subseteq B[A_2, r] &\iff \overline{A_1} \subseteq \overline{B[A_2, r]} \\ A_2 \subseteq B[A_1, r] &\iff \overline{A_2} \subseteq \overline{B[A_1, r]} \end{aligned}$$

luego por la propiedad (b), tenemos:

$$\begin{aligned} h^*(\overline{A_1}, \overline{A_2}) &= \inf\{r > 0 : \overline{A_1} \subseteq \overline{B[A_2, r]} \text{ y } \overline{A_2} \subseteq \overline{B[A_1, r]}\} \\ &= \inf\{r > 0 : A_1 \subseteq B[A_2, r] \text{ y } A_2 \subseteq B[A_1, r]\} \\ &= h^*(A_1, A_2) \end{aligned}$$

(d) Usando la propiedad (c) tenemos que  $h^*(A_1, A_2) = h^*(\overline{A_1}, \overline{A_2})$ , luego:

$$\begin{aligned} h^*(\overline{A_1}, \overline{A_2}) = 0 &\iff d(\overline{A_1}, \overline{A_2}) = 0 = d(\overline{A_2}, \overline{A_1}) \\ &\iff d(a_1, \overline{A_2}) = 0 = d(a_2, \overline{A_1}) \quad (a_1 \in \overline{A_1}, a_2 \in \overline{A_2}) \\ &\iff a_1 \in \overline{A_2} \text{ y } a_2 \in \overline{A_1} \quad (a_1 \in \overline{A_1}, a_2 \in \overline{A_2}) \\ &\iff \overline{A_1} = \overline{A_2}. \end{aligned}$$

(e) Si  $f : X \rightarrow X$  es una función de Lipschitz entonces:

$$d(f(x), f(y)) \leq Lip(f) d(x, y) \quad \forall x, y \in X,$$

por lo tanto,

### 30 Capítulo 3. Algunas Generalizaciones de Sistemas Iterados de Funciones

$$\begin{aligned}
 d(f(A_1), f(A_2)) &= \sup_{x \in f(A_1)} \inf_{y \in f(A_2)} d(x, y) \\
 &= \sup_{a \in A_1} \inf_{b \in A_2} d(f(a), f(b)) \\
 &\leq \sup_{a \in A_1} \inf_{b \in A_2} Lip(f) d(a, b) \\
 &= Lip(f) \sup_{a \in A_1} \inf_{b \in A_2} d(a, b) \\
 &= Lip(f) d(A_1, A_2)
 \end{aligned}$$

Por un argumento de simetría se tiene que  $d(f(A_2), f(A_1)) \leq Lip(f) d(A_2, A_1)$ .

Entonces:

$$\begin{aligned}
 h^*(f(A_1), f(A_2)) &= \max\{d(f(A_1), f(A_2)), d(f(A_2), f(A_1))\} \\
 &\leq \max\{Lip(f) d(A_1, A_2), Lip(f) d(A_2, A_1)\} \\
 &= Lip(f) \max\{d(A_1, A_2), d(A_2, A_1)\} \\
 &= Lip(f) h^*(A_1, A_2)
 \end{aligned}$$

(f) La igualdad se tiene por la propiedad (c). Para ver la desigualdad, note que

$$\begin{aligned}
 h^*(A_i, B_i) &= \max\{d(A_i, B_i), d(B_i, A_i)\} \\
 h^*\left(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i\right) &= \max\left\{d\left(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i\right), d\left(\bigcup_{i \in I} B_i, \bigcup_{i \in I} A_i\right)\right\}
 \end{aligned}$$

Consideremos  $d\left(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i\right) = \sup_{a \in \bigcup_{i \in I} A_i} d(a, \bigcup_{i \in I} B_i)$ : Para cada  $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$  existe  $i$  tal que  $a \in A_i$ . Entonces:

$$d(a, \bigcup_{i \in I} B_i) = \inf_{b \in \bigcup_{i \in I} B_i} d(a, b) \leq \inf_{b \in B_i} d(a, b) = d(a, B_i) \leq \sup_{i \in I} d(A_i, B_i). \quad (3.1)$$

Por (3.1), para todo  $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$  tenemos que  $d(a, \bigcup_{i \in I} B_i) \leq \sup_{i \in I} d(A_i, B_i)$ , lo cual muestra que  $d\left(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i\right) \leq \sup_{i \in I} d(A_i, B_i)$ . De manera análoga se prueba que

$d(\cup_{i \in I} B_i, \cup_{i \in I} A_i) \leq \sup_{i \in I} d(B_i, A_i)$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} h^* \left( \bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i \right) &= \max \left\{ d \left( \bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i \right), d \left( \bigcup_{i \in I} B_i, \bigcup_{i \in I} A_i \right) \right\} \\ &\leq \max \{ \sup_{i \in I} d(A_i, B_i), \sup_{i \in I} d(B_i, A_i) \} \\ &= \sup_{i \in I} \max \{ d(A_i, B_i), d(B_i, A_i) \} \\ &= \sup_{i \in I} h^*(A_i, B_i) \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.3.**  $h^* : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathcal{B}_X$  donde  $\mathcal{B}_X = \{N \subseteq X : N \text{ es no vacío, cerrado y acotado}\}$  es una métrica.

**Demostración.** Solo falta mostrar que  $h^*(A, B) = 0 \leftrightarrow A = B$  y que  $h^*(A, B) \geq 0 \forall A, B \in \mathcal{B}_X$ , ya que las otras dos propiedades ya se demostraron en la proposición (3.1). Como  $A$  y  $B$  son cerrados, se tiene que  $A = \overline{A}$  y que  $B = \overline{B}$ , aplicando el item (d) de la proposición (3.2) obtenemos  $h^*(A, B) = 0 \leftrightarrow A = B$ . Además  $h^*(A, B) = \max \{ d(A, B), d(B, A) \} \geq 0$  pues  $d(A, B) \geq 0$  y  $d(B, A) \geq 0$ . ■

**Teorema 3.1.** ([1], Lema 3.3) El espacio métrico  $(\mathcal{B}_X, h)$  es completo.

**Proposición 3.4.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $(f_i)_{i \in I}$  una familia de contracciones tal que  $\bigcup_{i \in I} f_i(A) \in \mathcal{M}_X$  para cada  $A \in \mathcal{M}_X$ , donde  $f_i : X \rightarrow X$  y sea  $F : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathcal{B}_X$  definida por:

$$F(A) = \overline{\bigcup_{i \in I} f_i(A)} \quad \forall A \in \mathcal{B}_X,$$

entonces  $F$  es una contracción.

**Demostración.** Sea  $\alpha = \sup_{i \in I} Lip(f_i) < 1$ . Sean  $A, B \in \mathcal{B}_X$ , usando (e) y (f) de la proposición (3.2) tenemos:

$$\begin{aligned} h(F(A), F(B)) &= h \left( \overline{\bigcup_{i \in I} f_i(A)}, \overline{\bigcup_{i \in I} f_i(B)} \right) \\ &= h \left( \bigcup_{i \in I} f_i(A), \bigcup_{i \in I} f_i(B) \right) \leq \sup_{i \in I} h(f_i(A), f_i(B)) \\ &\leq \sup_{i \in I} Lip(f_i) h(A, B) = \alpha h(A, B) \end{aligned}$$

■

El siguiente teorema establece condiciones bajo las cuales existe y es único, lo que llamaríamos el atractor de un SIF con finitas o infinitas contracciones sobre un espacio métrico completo.

**Teorema 3.2.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo, sea  $(f_i)_{i \in I}$  una familia de contracciones, donde  $f_i : X \rightarrow X$ . Si la familia  $(f_i)_{i \in I}$  es acotada (es decir,  $\cup_{i \in I} f_i(A)$  es acotada para cada subconjunto acotado  $A$  de  $X$ ), entonces existe un único subconjunto cerrado y acotado  $M$  de  $X$  tal que  $M = \overline{\cup_{i \in I} f_i(M)}$ .*

**Demostración.** Como  $(\mathcal{B}_X, h)$  es un espacio métrico completo (ver teorema (3.1)) y  $F : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathcal{B}_X$  es una contracción (ver proposición (3.4)), por el teorema de punto fijo de Banach existe un único  $M \in \mathcal{B}_X$  tal que  $F(M) = M$ , es decir:

$$M = \overline{\cup_{i \in I} f_i(M)}.$$

■

Obsérvese que en los resultados anteriores el hiperespacio  $\mathcal{B}_X$  (subconjuntos cerrados, acotados, no vacíos) es más general que el hiperespacio  $\mathbb{H}(X)$  (subconjuntos compactos, no vacíos).

**Ejemplo 3.1.** *Sea  $X = [0, 1]$  y  $f_i(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2^i}$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .*

$$d(f_i(x), f_i(y)) = \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right| = \frac{1}{2} |x - y| = \frac{1}{2} d(x, y) \leq \alpha \cdot d(x, y) \quad \forall \alpha \in (1/2, 1)$$

luego,  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una familia de contracciones.

$$\cup_{i \in \mathbb{N}} f_i(X) = \cup_{i \in \mathbb{N}} \left[ \frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2} \right] = (0, 1]$$

entonces,  $\cup_{i \in \mathbb{N}} f_i(X) \in \mathcal{B}_X$ . Por el teorema (3.2) el SIF  $(X, (f_i)_{i \in \mathbb{N}})$  tiene un único punto fijo. En efecto,

$$[0, 1] = \overline{\cup_{i \in \mathbb{N}} f_i((0, 1])} = \overline{\cup_{i \in \mathbb{N}} f_i(X)} = \overline{(0, 1]} = [0, 1].$$

**Ejemplo 3.2.** Sea un  $X$  espacio vectorial normado y completo,  $A \subseteq X, A \neq \emptyset$  compacto, convexo y  $|A| \geq 2$ . Considere el SIF  $\{A; (f_a)_{a \in A}\}$  donde:

$$f_a(x) = \frac{x+a}{2} = \frac{x}{2} + \frac{a}{2},$$

entonces  $A$  es atractor del SIF.

En efecto, debemos probar que  $A = \bigcup_{a \in A} f_a(A)$ . Sea  $x \in A$ , entonces

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = f_x(x) \in f_x(A) \subseteq \bigcup_{a \in A} f_a(A).$$

Recíprocamente, sea  $x \in \bigcup_{a \in A} f_a(A)$ , entonces  $x \in f_a(A)$  para algún  $a \in A$ , luego existe  $b \in A$  tal que  $x = f_a(b)$ , es decir:  $x = \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \in \overline{ab} \subseteq A$ , por lo tanto  $x \in A$ .

**Ejemplo 3.3.** Sea  $X$  la región cuadrada en  $\mathbb{R}^2$  con vértices  $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ , y el conjunto de índices  $I = \{0, 2\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ . Definimos  $f_0, f_2$  y  $f_{1/n}$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ f_{1/n} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1/2) \cos \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) & (-1/2) \sin \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} - \frac{\pi}{2} \right) \\ (1/2) \sin \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) & (1/2) \cos \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} - \frac{\pi}{2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2}/2 \\ 1 - \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$f_{1/n}(x, y)$ , es una contracción con factor  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . En efecto, se tiene que:

a)  $\sin \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} \right)$

b)  $\cos \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} \right) \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left( \frac{\pi}{2^{n+1}} \right)$

c) Desigualdad de Cauchy-Schwarz,  $\forall p, q, r, s \in \mathbb{R}$  :

$$(pq + rs)^2 \leq (p^2 + r^2)(q^2 + s^2)$$

### 34 Capítulo 3. Algunas Generalizaciones de Sistemas Iterados de Funciones

Tomando  $p = r = 1$ , entonces:

$$\sqrt{(q+s)^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{q^2+s^2} \quad (3.2)$$

Ahora:

$$\begin{aligned} d\left(f_{1/n}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right), f_{1/n}\left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right)\right) &= \left\| f_{1/n}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) - f_{1/n}\left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right) \right\| \\ &= \left\| \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}x \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2}y \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\ \frac{1}{2}x \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2}y \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \end{matrix} \right) - \left( \begin{matrix} \frac{1}{2}a \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2}b \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \\ \frac{1}{2}a \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2}b \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \end{matrix} \right) \right\| \\ &= \left\| \left( \begin{matrix} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) (x+y-a-b) \\ \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) (x+y-a-b) \end{matrix} \right) \right\| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) (x+y-a-b)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) (x+y-a-b)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{((x-a) + (y-b))^2} \end{aligned}$$

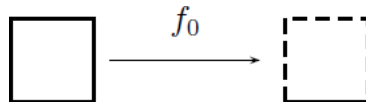
Usando la desigualdad (3.2) tenemos que:

$$d\left(f_{1/n}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right), f_{1/n}\left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right)\right) \leq \frac{1}{2} \left( \sqrt{2} \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} d\left(\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right), \left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right)\right)$$

Analicemos el efecto de cada transformación sobre  $X$ .

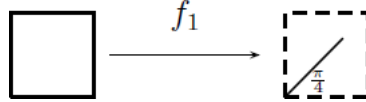
$$f_0\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir:



$$f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/2) \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) & (-1/2) \sin \left( \frac{-\pi}{4} \right) \\ (1/2) \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) & (1/2) \cos \left( \frac{-\pi}{4} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

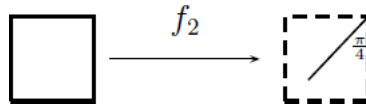
es decir:



En general, para  $n \geq 2$ ,  $f_{1/n}(X)$  es un radio del círculo unitario con un ángulo de  $\pi/2^{n+1}$  radianes;  $f_{1/(n+1)}(X)$  está a la mitad del ángulo de  $f_{1/n}(X)$ .

$$f_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2}/2 \\ 1 - \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

es decir:



Por lo tanto el conjunto  $\overline{\bigcup_{i \in I} f_i(X)}$  es el abanico que se muestra en la siguiente figura.

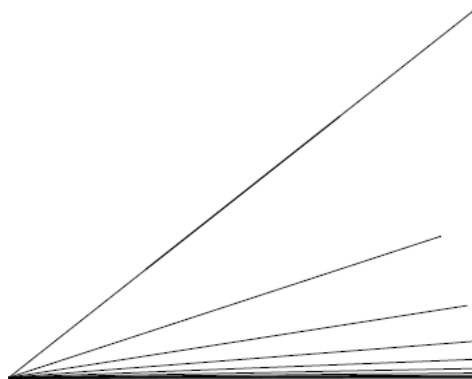


Figura 3.1: Efecto de las  $(f_i)_{i \in I}$  sobre  $X$ .

### 36 Capítulo 3. Algunas Generalizaciones de Sistemas Iterados de Funciones

---

Definimos el conjunto  $K$  como la unión de todos estos radios y la diagonal, entonces  $K$  es autosemejante bajo  $\{f_i : i \in I\}$ . Vale la pena comentar aquí, que este conjunto  $K$  no se puede obtener como el atractor de un SIF con un número finito de contracciones inyectivas ya que no es topológicamente autosemejante\*, pero si es posible obtenerlo como el atractor de un SIF con un número infinito contable de contracciones inyectivas.

---

## 3.2. SIF con infinitas contracciones en un espacio métrico compacto

---

**Teorema 3.3.** *Si  $f : X \rightarrow X$  es una contracción y  $(X, d)$  un espacio métrico compacto, entonces  $f$  tiene un único punto fijo.*

**Demostración.** Es inmediata, ya que todo espacio métrico compacto es completo así que basta con aplicar el teorema de punto fijo de Banach. ■

**Teorema 3.4.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y sea  $I$  un conjunto de índices cualquiera. Para todo  $i \in I$  sea  $f_i : X \rightarrow X$  una contracción y asumimos que todas las  $f_i$  tienen factor de contracción común  $\alpha < 1$ . Sea:*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{H}(X) &\rightarrow \mathbb{H}(X) \\ A &\longmapsto F(A) = \overline{\bigcup_{i \in I} f_i(A)}. \end{aligned}$$

*Entonces  $F$  es una contracción con factor de contracción  $\alpha$ .*

**Demostración.** Sean  $A, B \in \mathbb{H}(X)$ . Debemos mostrar que:

$$h(F(A), F(B)) \leq \alpha h(A, B).$$

Para esto es suficiente mostrar que  $F(B) \subseteq B(F(A), \alpha h(A, B) + \epsilon)$  para todo  $\epsilon > 0$ .\*\*  
Sea  $x \in F(B) = \overline{\bigcup_{i \in I} f_i(B)}$ , entonces existe una sucesión  $x_k \in \bigcup_{i \in I} f_i(B)$  tal que

---

\*ver corolario 3.2 en S. Sabogal, "Sobre autosemejanza topológica, Parte I", Revista Integración. Vol 17, N° 1, pag 27-47, 1999.

\*\*ver proposición (3.2) página 14

$x_k \rightarrow x$ . Sea  $i_k \in I$  el elemento de  $I$  tal que  $x_k \in f_{i_k}(B)$  y observe que como  $f_{i_k}$  es una contracción tenemos que:

$$h(f_{i_k}(A), f_{i_k}(B)) \leq \alpha h(A, B) + \frac{\epsilon}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned} f_{i_k}(B) &\subseteq B\left(f_{i_k}(A), \alpha h(A, B) + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &\subseteq B\left(\overline{\bigcup_{i \in I} f_i(A)}, \alpha h(A, B) + \epsilon\right) = B(F(A), \alpha h(A, B) + \epsilon) \end{aligned}$$

$x_k \in B(F(A), \alpha h(A, B) + \epsilon)$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ , se tiene que  $x \in B(F(A), \alpha h(A, B) + \epsilon)$

■

**Teorema 3.5.** Si  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y  $\{f_i : i \in I\}$  un conjunto de contracciones con factor de contracción común  $\alpha < 1$  entonces la función  $F : 2^X \rightarrow 2^X$  definida por

$$F(A) = \overline{\bigcup_{i \in I} f_i(A)}$$

tiene un único conjunto invariante.

**Demostración.** Tenemos que  $X$  es compacto por lo tanto  $\mathbb{H}(X)$  es compacto, además por el teorema (3.4)  $F$  es una contracción. Aplicando el teorema (3.3) existe un único  $A \in 2^X$  tal que  $F(A) = A$ , es decir,  $F$  tiene un único conjunto invariante. ■

**Ejemplo 3.4.** Sea  $X = [-2, 2]$  con la métrica usual. Considere la familia de contracciones,

$$w_n(x) = \frac{1}{2}x + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n \geq 1.$$

Por el teorema anterior, existe un único  $A \in 2^X$ , tal que  $F(A) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} w_n(A)} = A$ . Veamos que  $A = [-2, 2]$ . En efecto, como  $w_1([-2, 2]) = [0, 2]$ ,  $w_2([-2, 2]) = [-1, 1]$  y  $w_3([-2, 2]) = [-2, 0]$ , se tiene que,

$$F([-2, 2]) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} w_n([-2, 2])} = \overline{[-2, 2] \bigcup_{n \geq 4} w_n([-2, 2])} = [-2, 2].$$

### 38 Capítulo 3. Algunas Generalizaciones de Sistemas Iterados de Funciones

**Ejemplo 3.5.** Considere el espacio métrico compacto  $X = [0, 1]$  con la métrica usual. Sea  $q \in (0, 1/2]$ . Definimos para cada  $n \in \mathbb{N}$  la sucesión de funciones  $w_n(x) : X \rightarrow X$ ,

$$w_n(x) = q^n x + \alpha_n,$$

$$\text{donde } \alpha_1 = 0 \text{ y } \alpha_n = q^{n-1} + \left(\frac{1-2q}{2-3q}\right)^{n-1} + \alpha_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

$(w_n)_n \geq 1$  es una familia infinita de contracciones. En efecto,

$$d(w_n(x), w_n(y)) = |q^n x + \alpha_n - q^n y - \alpha_n| = q^n |x - y| = q^n d(x, y), \quad \forall x, y \in X, \forall n \geq 1.$$

Analicemos el caso particular cuando  $q = 1/2$ . Entonces:

$$w_n(x) = \frac{1}{2^n} x + \alpha_n,$$

con  $\alpha_1 = 0$  y  $\alpha_n = \frac{1}{2^{n-1}} + \alpha_{n-1}, n \geq 2$ . Veamos que  $[0, 1]$  es invariante bajo el operador de Hutchinson-Barsley  $F$ .

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{1}{2}x &\longrightarrow w_1([0, 1]) &= [0, 1/2] \\ w_2(x) &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} &\longrightarrow w_2([0, 1]) &= [1/2, 3/4] \\ w_3(x) &= \frac{1}{8}x + \frac{3}{4} &\longrightarrow w_3([0, 1]) &= [3/4, 7/8] \\ w_4(x) &= \frac{1}{16}x + \frac{7}{8} &\longrightarrow w_3([0, 1]) &= [7/8, 15/16] \\ & &\longrightarrow w_n([0, 1]) &= \left[ \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n} + \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} \right] \end{aligned}$$

$$F([0, 1]) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} w_n([0, 1])} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \left[ \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n} + \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} \right]} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \left[ 0, \frac{2^n - 1}{2^n} \right]} = \overline{[0, 1)} = [0, 1].$$

En la figura (3.2) se muestra el efecto de  $F$  sobre  $[0, 1]$ , tomando  $q = 1/3$ .



Figura 3.2: SIF infinito tipo Cantor.

### 3.3. SIF con contracciones generalizadas

En esta sección el espacio  $X$  se mantiene compacto y se consideran inicialmente E-contracciones y posteriormente  $\varphi$ -contracciones que son dos clases de contracciones generalizadas, las cuales se definieron en el capítulo 2.

#### 3.3.1. SIF con un número finito de E-contracciones.

**Teorema 3.6.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y  $f : X \rightarrow X$  una E-contracción, entonces:*

- a) *Existe un único punto fijo  $x_0 \in X$  tal que  $f(x_0) = x_0$ ,*
- b)  *$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{on}(x) = x_0$ , para todo  $x \in X$ .*

**Demostración.** Demostraremos la parte (b), ya que la demostración de la parte (a) ya se hizo en el Teorema (2.2). Fijemos un punto  $x \in X$  y denotemos la órbita de  $x$  por  $\mathcal{O}(x)$ , es decir:

$$\mathcal{O}(x) := \{f^{on}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Sea  $A = \overline{\mathcal{O}(x)}$ , como  $X$  es compacto,  $A$  es también compacto y  $f(A) \subset A$  ya que  $A = \overline{\mathcal{O}(x)}$ . Por (a), existe un único  $x_0 \in A$  tal que  $f(x_0) = x_0$ . Supongamos que  $\{f^{on}(x)\}$  no converge a  $x_0$ . Como  $f$  es una E-contracción entonces

$$d(f^{o(n+1)}(x), f(x_0) = x_0) < d(f^{on}(x), x_0), \forall n \in \mathbb{N}.$$

### 40 Capítulo 3. Algunas Generalizaciones de Sistemas Iterados de Funciones

Entonces, existe  $r > 0$  tal que  $B(x_0, r) \cap \mathcal{O}(x) = \emptyset$ , luego  $B(x_0, r) \cap A = \emptyset$ , lo cual es una contradicción ya que  $x_0 \in A$ . ■

**Proposición 3.5.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f \in X^X$ . Si  $f$  es una E-contracción, entonces para todo  $A, B \in \mathbb{H}(X)$  con  $A \neq B$ ,*

$$h(f(A), f(B)) < h(A, B).$$

**Demostración.** Probaremos que  $d(f(A), f(B)) < d(A, B)$ , para todo  $A, B \in \mathbb{H}(X)$ . Considere la función  $w : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w(x, y) = d(x, y) - d(f(x), f(y))$  para todo  $(x, y) \in A \times B$ . Como  $f$  es una E-contracción entonces  $w > 0$ . Por la compacidad de  $A \times B$  y la continuidad de  $w$ , existe  $x_0 \in A, y_0 \in B$  tal que

$$\epsilon = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} w(x, y) = w(x_0, y_0) > 0 \longrightarrow \epsilon \leq d(x, y) - d(f(x), f(y)).$$

Entonces

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) - \epsilon, \forall x \in A, \forall y \in B.$$

Por lo tanto,

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(f(x), f(y)) \leq \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) - \epsilon < \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Es decir,

$$d(f(A), f(B)) < d(A, B).$$

De manera análoga se demuestra que  $d(f(B), f(A)) < d(B, A)$ . Luego,

$$\begin{aligned} h(f(A), f(B)) &= \max\{d(f(A), f(B)), d(f(B), f(A))\} \\ &< \max\{d(A, B), d(B, A)\} = h(A, B). \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.6.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y sea  $\{f_n : X \rightarrow X, n \in$*

$\{1, 2, \dots, N\}$  una familia finita de  $E$ -contracciones. Definimos  $F : \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$  por

$$F(B) = \bigcup_{n=1}^N f_n(B), \quad \forall B \in \mathbb{H}(X).$$

Entonces  $F$  es una  $E$ -contracción.

**Demostración.** La demostración se realizará tomando  $N = 2$ . Con un argumento inductivo se completa la demostración. Sean  $B, C \in \mathbb{H}(X)$ ,  $B \neq C$ , tenemos:

$$h(F(B), F(C)) = h(f_1(B) \cup f_2(B), f_1(C) \cup f_2(C))$$

usando una propiedad de la métrica Hausdorff\* obtenemos:

$$\begin{aligned} h(f_1(B) \cup f_2(B), f_1(C) \cup f_2(C)) &\leq \max\{h(f_1(B), f_1(C)), h(f_2(B), f_2(C))\} \\ &< \max\{h(B, C), h(B, C)\} = h(B, C). \end{aligned}$$

La última desigualdad se tiene por la proposición anterior ■

El siguiente es el teorema central para el caso que estamos considerando, esto es, un SIF con un número finito de  $E$ -contracciones.\*\*

**Teorema 3.7.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y sea  $\{f_n : X \rightarrow X, n \in \{1, 2, \dots, N\}\}$  una familia finita de  $E$ -contracciones. Entonces la función  $F : \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$  definida por

$$F(B) = \bigcup_{n=1}^N f_n(B), \quad \forall B \in \mathbb{H}(X),$$

tiene un único punto fijo  $A \in \mathbb{H}(X)$ , tal que  $F(A) = A = \bigcup_{n=1}^N f_n(A)$ , el cual está dado por

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{\circ n}(B), \quad \forall B \in \mathbb{H}(X).$$

**Demostración.** La proposición (3.6) implica que  $F$  es una  $E$ -contracción. Además como se menciona en el capítulo 1,  $(\mathbb{H}(X), h)$  es un espacio métrico compacto ya que

\*  $h(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{h(A, C), h(B, D)\}$ .

\*\* Las definiciones, los teoremas y sus respectivas demostraciones en esta sección pueden encontrarse en [6]

$(X, d)$  es un espacio métrico compacto. Por el teorema (3.6) el resultado se obtiene de manera inmediata. ■

### 3.3.2. SIF con un número infinito de E-contracciones.

Primero enunciaremos un resultado sobre la convergencia en el espacio  $(\mathbb{H}(X), h)^*$ .

**Lema 3.1.** ([14], Teorema 1) Sea  $(A_n)_n$  una sucesión de subconjuntos compactos no vacíos de  $X$ . Entonces:

(a) Si  $A_n \subset A_{n+1}$ , para todo  $n \geq 1$  y el conjunto  $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$  es relativamente compacto, entonces  $\overline{A} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ .

(b) Si  $A_{n+1} \subset A_n$ , para todo  $n \geq 1$ . Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} A_n$ .

Veamos ahora algunos resultados sobre convergencia en espacios topológicos. Consideremos un espacio topológico  $X$  y un espacio métrico  $(Y, d)$ . Por  $Y^X$  entenderemos la clase de todas las funciones  $f : X \rightarrow Y$ . Sea  $(f_n)_n \subset Y^X$  una sucesión.

**Definición 3.1.** Decimos que  $(f_n)_n$  **converge uniformemente** a  $f \in Y^X$  sobre todo subconjunto compacto si, para cada conjunto compacto no vacío  $K \subset X$  y para cada  $\epsilon > 0$ , existe un entero  $N_{K, \epsilon}$  tal que  $d(f(x), f_n(x)) < \epsilon$  para todo  $n \geq N_{K, \epsilon}$  y todo  $x \in K$ .

Decimos que,  $(f_n)_n$  **converge continuamente** a  $f \in Y^X$ , si  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$  para cada  $x \in X$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .

**Nota 3.2.** Si  $X$  satisface el primer axioma de contabilidad, entonces la convergencia continua en  $Y^X$  es equivalente a la convergencia uniforme sobre todo subconjunto compacto.\*\*

**Teorema 3.8.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $(Y, d)$  un espacio métrico. Asumimos que la sucesión de funciones continuas  $(f_n)_n \in Y^X$  es convergente punto a punto a la función continua  $f \in Y^X$  y que se cumple la siguiente relación:

$$d(f(x), f_{n+1}(x)) \leq d(f(x), f_n(x)), \forall x \in X, n = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Entonces  $(f_n)_n$  converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto no vacío de  $X$ .

---

\*Muchas de las definiciones y los teoremas con sus respectivas demostraciones en esta sección y la dos últimas pueden encontrarse en [7]

\*\*J. Dugundji, A. Granas, Fixed Point Theory, Berlin: Springer Verlag, 1993

**Demostración.** Sea  $K \in \mathbb{H}(X)$  y  $\epsilon > 0$ . Para todo  $n \geq 1$ , sea  $D_n = \{x \in X : d(f(x), f_n(x)) < \epsilon\}$ . Consideremos las funciones  $h_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_n(x) = d(f(x), f_n(x))$ , las cuales, claramente, son continuas. Entonces  $D_n = h_n^{-1}((-\infty, \epsilon))$  es un conjunto abierto para  $n \geq 1$ . Por (3.3), se deduce que  $D_n \subset D_{n+1}$ , y por la convergencia punto a punto de  $(f_n)_n$ , se sigue que  $K \subset \bigcup_{n \geq 1} D_n$ . Entonces, como  $K$  es compacto, existe  $n_\epsilon \geq 1$  tal que  $K \subset \bigcup_{n=1}^{n_\epsilon} D_n = D_{n_\epsilon}$ . Así, para todo  $x \in K$ , se tiene que  $d(f(x), f_{n_\epsilon}(x)) < \epsilon$ . Usando otra vez (3.3), obtenemos:

$$d(f(x), f_n(x)) < \epsilon, \forall x \in K, \forall n \geq n_\epsilon.$$

■

**Teorema 3.9.** *Sea  $X$  un espacio topológico,  $(Y, d)$  un espacio métrico y  $(f_n)_n \subset Y^X$  una sucesión convergente uniformemente a  $f \in Y^X$  sobre todo  $K \in \mathbb{H}(X)$ . Asumimos que existe  $x_0 \in X$  tal que  $f$  es continua en  $x_0$ . Entonces, para cada sucesión  $(x_n)_n \subset X$ , tal que  $x_n \rightarrow x_0$ , se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x_0)$ .*

**Demostración.** Consideremos  $(x_n)_n \subset X$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ , y denotemos

$$K = \{x_n : n = 1, 2, \dots\} \cup \{x_0\}.$$

Entonces  $K$  es compacto, y de acuerdo con la hipótesis  $(f_n|_K)_n$  converge uniformemente a  $f|_K$ . Por la continuidad de  $f$  en  $x_0$ , deducimos que, para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $n_\epsilon$ , tal que

$$d(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad d(f(x_n), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo  $n \geq n_\epsilon$  y cualquier  $x \in K$ . Por lo tanto,

$$d(f_n(x_n), f(x_0)) \leq d(f_n(x_n), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

■

**Corolario 3.1.** *Bajo las condiciones del teorema anterior cuando  $Y = X$ , suponiendo que,  $\forall n \geq 1$ ,  $f_n$  tiene un punto fijo  $e_n$  y  $(e_n)_n$  converge a algún  $e \in X$ , si  $f$  es continua en  $e$ , entonces  $e$  es un punto fijo para  $f$ .*

## 44 Capítulo 3. Algunas Generalizaciones de Sistemas Iterados de Funciones

En lo siguiente consideramos el SIF  $\{X; (f_n)_n\}$  sobre un espacio métrico  $(X, d)$ . Para todo  $N = 1, 2, \dots$ , las funciones  $F_N(B) = \bigcup_{n=1}^N f_n(B)$  y  $F(B) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n(B)}$ , para todo  $B \in \mathbb{H}(X)$ .

**Teorema 3.10.** *Asumimos que  $F(X)$  es compacto, y  $F, F_N (N \geq 1)$  son funciones continuas. Suponga además que, para todo  $N \geq 1$ , existe un conjunto invariante  $A_N \in \mathbb{H}(X)$  de  $F_N$  y un conjunto  $A \in \mathbb{H}(X)$  tal que  $A_N \rightarrow A$ . Entonces  $A$  es un conjunto invariante para  $F$ .*

**Demostración.** La sucesión  $(F_N(B))_N$  es una sucesión creciente y  $F(B) = \overline{\bigcup_{N \geq 1} F_N(B)}$ , en vista del lema (3.1) deducimos que  $(F_N(B))_N$  converge a  $F(B)$  para todo  $B \in \mathbb{H}(X)$ . Por lo tanto,  $F_N \rightarrow F$  cuando  $N \rightarrow \infty$ . Ahora, como  $F_N(B) \subset F_{N+1}(B) \subset F(B)$  para todo  $B \in \mathbb{H}(X)$  y todo  $N \geq 1$ , entonces:

$$h(F_{N+1}(B), F(B)) \leq h(F_N(B), F(B)).$$

Esto significa que la condición (3.3) se satisface. Entonces  $(F_N)_N$  converge uniformemente para todo  $A \in \mathbb{H}(X)$  y  $F$  es continua en  $A$ , por el teorema (3.9) se tiene que

$$F(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(A_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N = A.$$

■

**Teorema 3.11.** *Supongamos que toda  $(f_n)_{n \geq 1}$  es una  $E$ -contracción. Si el espacio  $(X, d)$  es compacto, entonces el SIF  $\{X; (f_n)_{n \geq 1}\}$  tiene un conjunto invariante.*

**Demostración.** Como  $X$  es compacto entonces  $\mathbb{H}(X)$  es compacto. Además  $F_N(B) = \overline{\bigcup_{n=1}^N f_n(B)}$  es una  $E$ -contracción. Por la parte (a) del teorema (3.6) existe  $A_N \in \mathbb{H}(X)$  tal que  $F_N(A_N) = A_N$ . Podemos encontrar una subsucesión convergente  $(A_{N_k})_k$  de  $(A_N)_N$ . Sea  $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{N_k}$ . Primero mostraremos que  $F$  es continua. Usando la proposición (3.2) ítem (f) y la proposición (3.5) se tiene que

$$\begin{aligned} h(F(B), F(B')) &= h\left(\overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n(B)}, \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n(B')}\right) = h\left(\bigcup_{n \geq 1} f_n(B), \bigcup_{n \geq 1} f_n(B')\right) \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} h(f_n(B), f_n(B')) < h(B, B'). \end{aligned}$$

Claramente la sucesión  $(F_{N_k})_k$  es creciente y  $F(B) = \overline{\bigcup_{k \geq 1} F_{n_k}(B)}$ , por el teorema (3.1) se tiene que  $(F_{N_k})_k$  converge a  $F(B)$  para todo  $B \in \mathbb{H}(X)$ , es decir,  $F_{N_k} \rightarrow F$  punto a punto cuando  $k \rightarrow \infty$ . Como,  $F_{N_k}(B) \subset F_{N_{k+1}}(B) \subset F(B)$  para todo  $B \in \mathbb{H}(X)$  y todo  $K \geq 1$ , lo cual implica que la condición (3.3) se satisface. Por el teorema (3.8),  $(F_{N_k})_k$  converge uniformemente sobre todo conjunto compacto no vacío de  $X$ . Aplicando el corolario (3.1) se tiene que

$$F(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{N_k}(A_{N_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{N_k} = A.$$

■

El resultado anterior establece solo la existencia de conjuntos invariantes para el SIF considerado. Se presenta un resultado que establece condiciones suficientes para garantizar la unicidad del conjunto invariante, es decir, la existencia del atractor del respectivo SIF.

**Teorema 3.12.** *Supongamos que  $(X, d)$  es un espacio métrico compacto y que*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} d(f_n(x), f_n(y)) < d(x, y), \forall x, y \in X, x \neq y.$$

*Entonces  $F : \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$  es una E-contracción. Además el SIF  $\{X; (f_n)_n\}$  tiene atractor el cual puede ser sucesivamente aproximado por  $(F^{\circ p}(B))_p, \forall B \in \mathbb{H}(X)$ .*

**Demostración.** Para probar que  $F$  es una E-contracción, sean  $A, B \in \mathbb{H}(X)$  y considere la función  $w : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$w(x, y) = d(x, y) - \sup_{n \in \mathbb{N}} d(f_n(x), f_n(y)), \forall (x, y) \in A \times B. \quad (3.4)$$

Por hipótesis,  $w(x, y) > 0$ . La función  $w$  es continua. En efecto, para todo  $(x, y), (x', y') \in A \times B$ , se tiene que

$$d(f_n(x), f_n(y)) - d(f_n(x'), f_n(y')) < d(x, y) - d(x', y') \leq d(x, x') + \cancel{d(x', y')} + d(y', y) - \cancel{d(x', y')}$$

### 46 Capítulo 3. Algunas Generalizaciones de Sistemas Iterados de Funciones

es decir,

$$d(f_n(x), f_n(y)) < d(f_n(x'), f_n(y')) + d(x, x') + d(y, y'), \forall n \geq 1.$$

Entonces,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} d(f_n(x), f_n(y)) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \{d(f_n(x'), f_n(y'))\} + d(x, x') + d(y, y').$$

Por lo tanto,

$$\left| \sup_{n \in \mathbb{N}} d(f_n(x), f_n(y)) - \sup_{n \in \mathbb{N}} d(f_n(x'), f_n(y')) \right| \leq d(x, x') + d(y, y'),$$

la cual implica la continuidad deseada, ya que

$$\begin{aligned} |w(x, y) - w(x', y')| &= \left| d(x, y) - \sup_{n \in \mathbb{N}} d(f_n(x), f_n(y)) - d(x', y') + \sup_{n \in \mathbb{N}} d(f_n(x'), f_n(y')) \right| \\ &\leq \left| \sup_{n \in \mathbb{N}} d(f_n(x'), f_n(y')) - \sup_{n \in \mathbb{N}} d(f_n(x), f_n(y)) \right| + |d(x, y) - d(x', y')| \\ &\leq d(x, x') + d(y, y') + |d(x, y) - d(x', y')| \\ &\leq d(x, x') + d(y, y') + d(x, x') + d(y, y') \leq 2(d(x, x') + d(y, y')) \\ &\leq 2d((x, y), (x', y')). \end{aligned}$$

Como  $w$  es continua, de acuerdo al teorema de Weierstrass, existe  $x_0 \in A, y_0 \in B$  tal que  $\epsilon = \inf w(x, y) = w(x_0, y_0) > 0$ . Por (3.4), se tiene que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} d(f_n(x), f_n(y)) \leq d(x, y) - \epsilon, \forall (x, y) \in A \times B.$$

Por lo tanto,

$$d(f_n(A), f_n(B)) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(f_n(x), f_n(y)) \leq \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) - \epsilon = d(A, B) - \epsilon.$$

Así,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} d(f_n(A), f_n(B)) \leq d(A, B) - \epsilon < d(A, B).$$

Análogamente se demuestra que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} d(f_n(B), f_n(A)) < d(B, A)$ . Entonces,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} h(f_n(A), f_n(B)) < h(B, A).$$

Aplicando la proposición (3.2) ítem (f) y la proposición (3.5) se obtiene

$$\begin{aligned} h(F(A), F(B)) &= h\left(\overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n(A)}, \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n(B)}\right) = h\left(\bigcup_{n \geq 1} f_n(A), \bigcup_{n \geq 1} f_n(B)\right) \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} d(f_n(A), f_n(B)) < h(A, B). \end{aligned}$$

La segunda parte se obtiene aplicando la parte (b) del teorema (3.6). ■

**Ejemplo 3.6.** Denotemos  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$  la superficie del plano del triángulo cerrado con vértices en  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, 0)$ . Sea  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ , y considere las funciones

$$w_{ij}(x, y) = \left( \frac{1}{p^i}x + \frac{1}{p^i}(j-1), \frac{1}{p^i}y + \frac{1}{p^i} \left( \frac{p^i-1}{p-1} - j \right) \right)$$

con  $i = 1, 2, \dots$  y  $j = 1, 2, \dots, \frac{p^i-1}{p-1}$ .

Veamos que  $w_{ij}$  es una E-contracción para todo  $i, j$ .

$$\begin{aligned} d(w_{ij}(x, y), w_{ij}(x', y')) &= \frac{1}{p^i}|x - x'| + \frac{1}{p^i}|y - y'| = \frac{1}{p^i}d((x, y), (x', y')) \\ &< d((x, y), (x', y')). \end{aligned}$$

Por el teorema (3.11), existe un único  $A \in \mathbb{H}(X)$  tal que  $F(A) = \overline{\bigcup_{ij} w_{ij}(A)} = A$ . En la figura (3.3) se muestra el atractor del SIF considerado tomando  $p = 2$ .\*

### 3.3.3. SIF con un número finito de $\varphi$ -contracciones.

Probaremos primero algunos resultados sobre  $\varphi$ -contracciones.

**Proposición 3.7.** Si  $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p}$  son  $\varphi$ -contracciones, entonces  $f_{i_1 \dots i_p} = f_{i_1} \circ f_{i_2} \circ \dots \circ f_{i_p}$  es una  $\varphi$ -contracción.

---

\*El ejemplo y la figura pueden encontrarse en [17]

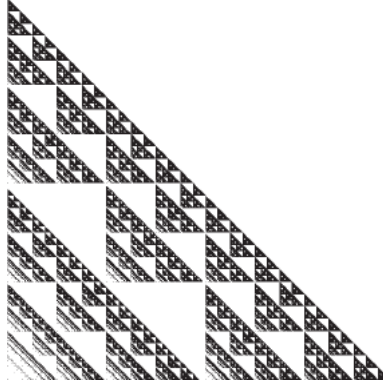


Figura 3.3: Atractor de un SIF infinito tipo Sierpiński

**Demostración.**

$$\begin{aligned}
 d(f_{i_1 \dots i_p}(x), f_{i_1 \dots i_p}(y)) &= d(f_{i_1}(f_{i_2 \dots i_p}(x)), f_{i_1} f_{i_2 \dots i_p}(y)) \\
 &\leq \varphi(d(f_{i_2 \dots i_p}(x), f_{i_2 \dots i_p}(y))) \\
 &< d(f_{i_2 \dots i_p}(x), f_{i_2 \dots i_p}(y)) = d(f_{i_2}(f_{i_3 \dots i_p}(x)), f_{i_2} f_{i_3 \dots i_p}(y)) \\
 &\leq \varphi(d(f_{i_3 \dots i_p}(x), f_{i_3 \dots i_p}(y))) \\
 &< d(f_{i_3 \dots i_p}(x), f_{i_3 \dots i_p}(y)) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Continuando con este proceso  $p$ -veces tenemos que:

$$d(f_{i_1 \dots i_p}(x), f_{i_1 \dots i_p}(y)) \leq \varphi(d(x, y)).$$

Luego  $f_{i_1 \dots i_p}$  es una  $\varphi$ -contracción. ■

**Proposición 3.8.** Si  $(\varphi_n)_{n=1}^N$  es una familia de funciones de comparación, entonces

$$\varphi(t) = \max_{1 \leq n \leq N} \varphi_n(t), \quad \forall t > 0$$

es también una función de comparación.

**Demostración.** El resultado se obtiene de manera inmediata. ■

**Proposición 3.9.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$  una  $\varphi$ -contracción,

entonces:

$$h(f(A), f(B)) \leq \varphi(h(A, B)), \quad \forall A, B \in \mathbb{H}(X).$$

**Demostración.** Primero probaremos que  $d(f(A), f(B)) \leq \varphi(d(A, B))$ . Sea  $x_0 \in A$ . Por la continuidad de la función  $d(x_0, \cdot)$  sobre el conjunto compacto  $B$ , existe  $y_0 \in B$  tal que:

$$d(x_0, y_0) = \inf_{y \in B} d(x_0, y) \quad \rightarrow \quad \inf_{y \in B} d(x_0, y) \leq d(x_0, y_0)$$

como  $\varphi$  es creciente, entonces:

$$\inf_{y \in B} \varphi(d(x_0, y)) \leq \varphi(d(x_0, y_0)) = \varphi(\inf_{y \in B} d(x_0, y)) \leq \varphi(\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)).$$

Por lo tanto,

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \varphi(d(x, y)) \leq \varphi(\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)) = \varphi(d(A, B)).$$

luego:

$$d(f(A), f(B)) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(A, B)).$$

Intercambiando  $A$  con  $B$ , en el proceso anterior tenemos que

$$d(f(B), f(A)) = \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(f(y), f(x)) \leq \varphi(d(B, A)).$$

Luego:

$$\begin{aligned} h(f(A), f(B)) &= \max\{d(f(A), f(B)), d(f(B), f(A))\} \\ &\leq \max\{\varphi(d(A, B)), \varphi(d(B, A))\} \\ &\leq \varphi(\max\{d(A, B), d(B, A)\}) \\ &= \varphi(h(A, B)). \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.13.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo,  $(f_n)_{n=1}^N$  una familia de  $\varphi$ -contracciones y el operador de Hutchinson  $F : \mathbb{H}(X) \rightarrow \mathbb{H}(X)$  definido por  $F(K) = \overline{\bigcup_{n=1}^N f_n(K)}$  entonces existe un único  $A_N \in \mathbb{H}(X)$  tal que  $F(A_N) = A_N$ . Además  $A_N$  es

## 50 Capítulo 3. Algunas Generalizaciones de Sistemas Iterados de Funciones

la adherencia del conjunto  $\{e_{i_1 \dots i_p}; i_1, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, N\}, p \geq 1\}$ , donde  $e_{i_1 \dots i_p}$  es el único punto fijo de  $f_{i_1 \dots i_p}$ .

**Demostración.** Por la proposición (3.8),  $\max_{1 \leq n \leq N} \varphi_n$  es una función de comparación. Por la proposición (3.2) numeral (f) y la proposición (3.9) tenemos que:

$$\begin{aligned} h(F(A), F(B)) &= h\left(\overline{\bigcup_{n=1}^N f_n(A)}, \overline{\bigcup_{n=1}^N f_n(B)}\right) \leq \max_{1 \leq n \leq N} h(f_n(A), f_n(B)) \\ &\leq \max_{1 \leq n \leq N} \varphi_n(h(A, B)) = \varphi(h(A, B)) \end{aligned}$$

luego  $F$  es una  $\varphi$ -contracción sobre  $\mathbb{H}(X)$ . Por el teorema (2.3), existe un único  $A_N \in \mathbb{H}(X)$  tal que  $F(A_N) = A_N$ .

La demostración de la segunda parte se realizará en cuatro etapas.

**Etapá I.**  $e_n \in A_N$ , donde  $e_n$  es el punto fijo de  $f_n$ , para  $n = 1, 2, \dots, N$

Por definición  $A_N = F(A_N) = \bigcup_{n=1}^N f_n(A_N)$ , es decir,  $f_n(A_N) \subset A_N$  para todo  $n = 1, 2, \dots, N$ . Tenemos que  $f_n^p(a) \in A_N$ ,  $\forall a \in A_N$  y  $\forall p \geq 1$ . Además  $f_n^p(a) \rightarrow e_n$  cuando  $p \rightarrow \infty$  para cualquier  $a \in A_N$ . Ahora, como  $A_N$  es cerrado,  $A_N = \overline{A_N}$ , por lo tanto  $e_n \in A_N$  para  $n = 1, 2, \dots, N$ .

**Etapá II.**  $f_{i_1 i_2 \dots i_p}(A_N) \subseteq A_N$  con  $p \geq 1$  y  $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_p \leq N$

Hagamos inducción sobre  $p$ . Para  $p = 1$ , tenemos que  $f_{i_1}(A_N) \subseteq A_N$ , por la etapa I. Suponemos cierto para  $p = k$ , es decir,  $f_{i_1 \dots i_k}(A_N) \subseteq A_N$ . Veamos que se cumple para  $p = k + 1$ ,

$$f_{i_1 \dots i_k i_{k+1}}(A_N) = f_{i_1 \dots i_k}(f_{i_{k+1}}(A_N)) \subseteq f_{i_1 \dots i_k}(A_N) \subseteq A_N.$$

**Etapá III.**  $A_N \supset f_{i_1}(A_N) \supseteq \dots \supset f_{i_1 \dots i_p}(A_N) \supset \dots$  y  $\bigcap_{p=1}^{\infty} f_{i_1 \dots i_p}(A_N) = \{a_{i_1 i_2 \dots}\}$

La inclusión  $f_{i_1 \dots i_{p+1}}(A_N) \subset f_{i_1 \dots i_p}(A_N)$  para todo  $p \geq 1$ , se sigue por la etapa II. Para todo  $p \geq 1$  y  $a, b \in A_N$ , por la proposición (3.7)\* se tiene que:

$$d(f_{i_1 \dots i_p}(a), f_{i_1 \dots i_p}(b)) \leq \varphi_{i_1 \dots i_p}(d(a, b)) \leq \varphi^p(d(a, b)),$$

---

\*La función  $\varphi_{i_1 i_2 \dots i_p}$  se considera una  $\varphi^p$ -contracción.

donde  $\varphi_{i_1 \dots i_p} = \varphi_{i_1} \circ \varphi_{i_2} \circ \dots \circ \varphi_{i_p}$ . Luego:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(f_{i_1 \dots i_p}(a), f_{i_1 \dots i_p}(b)) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \varphi^p(d(a, b)) = 0.$$

Entonces,  $\text{diámetro}(f_{i_1 \dots i_{p+1}}(A_N)) \rightarrow 0$ . Por el teorema de Cantor  $\bigcap_{p=1}^{\infty} f_{i_1 \dots i_p}(A_N)$  es un solo punto, es decir:

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} f_{i_1 \dots i_p}(A_N) = \{a_{i_1 i_2 \dots}\}.$$

Además se tiene que,

$$a_{i_1 i_2 \dots} = \lim_{p \rightarrow \infty} e_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Es decir:

$$\overline{\{e_{i_1 \dots i_p}; i_1, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, N\}, p \leq 1\}} \subseteq A_N.$$

**Eta IV.**  $A_N \subseteq \overline{\{e_{i_1 \dots i_p}; i_1, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, N\}, p \leq 1\}}$

Sea  $a \in A_N$ , entonces existe  $1 \leq i_1 \leq N$  tal que  $a \in f_{i_1}(A_N)$ . Como  $f_{i_1}(A_N) = f_{i_1}(\bigcup_{n=1}^N (f_{i_n}(A_N)))$ , resulta que  $a \in f_{i_1 i_2}(A_N)$ , donde  $1 \leq i_2 \leq N$ . Usando un argumento inductivo, obtenemos que para todo  $p \geq 1$ , existen  $i_1, i_2, \dots, i_p$  tal que  $a \in f_{i_1 i_2 \dots i_p}(A_N)$ , por lo tanto

$$a = a_{i_1 i_2 \dots i_p} = \lim_{p \rightarrow \infty} e_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

entonces  $a \in \overline{\{e_{i_1 \dots i_p}; i_1, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, N\}, p \leq 1\}}$  ■

### 3.3.4. SIF con un número infinito de $\varphi$ -contracciones.

En esta sección en vez de considerar espacios métricos y contracciones, se consideran más generalmente espacios topológicos y funciones continuas.

**Definición 3.2.** *Un conjunto finito de funciones continuas de un espacio topológico Hausdorff  $X$  en él mismo es llamado un SIF sobre  $X$ .*

Consideremos el SIF  $\{X; (f_n)_{n=1}^N\}$  y definamos el operador de Hutchinson asociado

## 52 Capítulo 3. Algunas Generalizaciones de Sistemas Iterados de Funciones

$F_N : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  dado por

$$F_N(B) = \bigcup_{n=1}^N f_n(B), \quad \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

Un conjunto  $A \in \mathcal{P}(X)$  se dice punto fijo, o conjunto invariante bajo el SIF, si  $F_N(A) = A$ . Si existe un único punto fijo  $A \in \mathbb{H}(X)$  para  $F_N$ , entonces  $A$  es llamado el atractor del respectivo SIF.

**Ejemplo 3.7.** Sea  $X$  un espacio topológico que contiene al menos dos elementos  $a \neq b$ . Si consideramos  $N$  funciones continuas  $f_n : X \rightarrow X$  que satisfacen que  $f_n(a) = a$  y  $f_n(b) = b$ , entonces  $\{a\}$ ,  $\{b\}$  y  $\{a, b\}$  son tres puntos fijos para  $F_N$ .

**Definición 3.3.** Una sucesión de funciones continuas  $(f_n)_{n \geq 1}$  de un espacio topológico  $X$  en él mismo es llamado un SIF infinito sobre  $X$ .

El operador de Hutchinson asociado  $F : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  esta definido por

$$F(B) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n(B)}, \quad \forall B \in \mathcal{P}(X)$$

**Ejemplo 3.8.** Considere las funciones continuas  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , dadas por

$$f_n(x) = \frac{1 - \cos(2^{n+1}\pi x)}{2^{n+1}} + s_{n-1}$$

donde  $s_k = 1 - \frac{1}{2^k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Entonces  $[0, 1]$  es un punto fijo para el SIF infinito. En efecto,  $f_n([0, 1]) = [s_{n-1}, s_n]$  para  $n \geq 1$ , entonces

$$F([0, 1]) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} [s_{n-1}, s_n]} = \overline{[0, 1]} = [0, 1].$$

Los siguientes dos lemas describen algunos resultados importantes en topología \*

**Lema 3.2.** Si  $(E_i)_{i \in \mathcal{F}}$  es una familia de subconjuntos de un espacio topológico, entonces:

$$\overline{\bigcup_{i \in \mathcal{F}} E_i} = \bigcup_{i \in \mathcal{F}} \overline{E_i}.$$

---

\*Se pueden encontrar en [15]

**Lema 3.3.** *Si  $X, Y$  son espacios topológicos y la función  $f : X \rightarrow Y$  es continua, entonces  $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$ .*

**Proposición 3.10.** *Sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  un SIF sobre  $X$  y asumimos que  $(A_i)_{i \in \mathcal{F}} \subset \mathcal{P}(X)$  es una familia de conjuntos invariantes para el SIF. Entonces  $\overline{\bigcup_{i \in \mathcal{F}} A_i}$  es un conjunto invariante para el SIF.*

**Demostración.** Usando los lemas (3.2) y (3.3) tenemos:

$$F\left(\overline{\bigcup_{i \in \mathcal{F}} A_i}\right) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n\left(\overline{\bigcup_{i \in \mathcal{F}} A_i}\right)} \subset \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n\left(\bigcup_{i \in \mathcal{F}} A_i\right)} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n\left(\bigcup_{i \in \mathcal{F}} A_i\right)}$$

Además:

$$\overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n\left(\bigcup_{i \in \mathcal{F}} A_i\right)} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{i \in \mathcal{F}} f_n(A_i)} = \overline{\bigcup_{i \in \mathcal{F}} \bigcup_{n \geq 1} f_n A_i} = \overline{\bigcup_{i \in \mathcal{F}} A_i}.$$

Luego,

$$F\left(\overline{\bigcup_{i \in \mathcal{F}} A_i}\right) = \overline{\bigcup_{i \in \mathcal{F}} A_i}.$$

■

En el siguiente resultado estudiaremos la existencia de un compacto que es invariante bajo el operador de Hutchinson-Barnsley  $F$ .

**Teorema 3.14.** *Sea  $(f_n)_{n \geq 1}$  un SIF sobre un espacio topológico  $X$  y asumimos que para todo  $N = 1, 2, \dots$ , el SIF parcial  $(f_n)_{n=1}^N$  tiene un conjunto invariante  $A_N \in \mathcal{P}(X)$  y además,  $A_N \subset A_{N+1}$  para todo  $N \geq 1$ . Entonces  $A = \overline{\bigcup_{N \geq 1} A_N}$  es un conjunto invariante para el SIF.*

**Demostración.** Tenemos que

$$\begin{aligned} F(A_N) &= \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n(A_N)} = \overline{\bigcup_{n=1}^N f_n(A_N)} \cup \overline{\bigcup_{n \geq N+1} f_n(A_N)} \\ &= \overline{A_N} \cup \overline{\bigcup_{n \geq N+1} f_n(A_N)}, \quad N = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 \overline{\bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} f_n(A_N)} &= \overline{\bigcup_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} f_n(A_N)} = \overline{\bigcup_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} f_n(A_N)} = \overline{\bigcup_{N \geq 1} F(A_N)} \\
 &= \overline{\bigcup_{N \geq 1} \left( \overline{A_N} \cup \bigcup_{n \geq N+1} \overline{f_n(A_N)} \right)} \\
 &= \overline{\bigcup_{N \geq 1} A_N} \cup \overline{\bigcup_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N+1} f_n(A_N)} \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Sea  $x \in \bigcup_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N+1} f_n(A_N)$ , entonces existe  $N \geq 1$  y  $n \geq N+1$  tal que  $x \in f_n(A_N)$ . Por hipótesis ( $A_N \subset A_{N+1}$ ) se tiene que  $A_N \subset A_n$ , luego  $f_n(A_N) \subset f_n(A_n) \subset A_n$ , entonces  $x \in A_n$  y por lo tanto  $x \in \bigcup_{N \geq 1} A_N$ . Tenemos que:

$$\bigcup_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N+1} f_n(A_N) \subset \bigcup_{N \geq 1} A_N \implies \overline{\bigcup_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N+1} f_n(A_N)} \subset \overline{\bigcup_{N \geq 1} A_N}. \tag{3.6}$$

Usando (3.5) y (3.6), obtenemos que:

$$\overline{\bigcup_{N \geq 1} A_N} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} f_n(A_N)}. \tag{3.7}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 F\left(\overline{\bigcup_{N \geq 1} A_N}\right) &= \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n\left(\overline{\bigcup_{N \geq 1} A_N}\right)} \subset \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n\left(\bigcup_{N \geq 1} A_N\right)} \\
 &= \overline{\bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} f_n(A_N)} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n\left(\bigcup_{N \geq 1} A_N\right)} \\
 &\subset \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n\left(\overline{\bigcup_{N \geq 1} A_N}\right)} = F\left(\overline{\bigcup_{N \geq 1} A_N}\right).
 \end{aligned}$$

Para la primera inclusión, usamos el hecho de que las  $f_n$  son continuas para todo  $n \geq 1$ .

Se sigue que:

$$F\left(\overline{\bigcup_{N \geq 1} A_N}\right) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} f_n(A_N)}. \tag{3.8}$$

Por (3.7) y (3.8) deducimos que:

$$F\left(\overline{\bigcup_{N \geq 1} A_N}\right) = \overline{\bigcup_{N \geq 1} A_N}.$$

■

**Nota 3.3.** Si, en el teorema anterior, asumimos que  $X$  es un espacio Hausdorff y  $F(X)$  es un conjunto compacto, entonces  $A$  es compacto también.

**Teorema 3.15.** Supongamos que  $(X, d)$  es un espacio métrico compacto y toda  $(f_n)_{n \geq 1}$  es una  $\varphi$ -contracción. Entonces  $A_N \subset A_{N+1}$  y el SIF  $\{X; (f_n)_{n \geq 1}\}$  tiene un conjunto invariante  $A = \overline{\bigcup_{N \geq 1} A_N}$ .

**Demostración.** La relación  $A_N \subset A_{N+1}$  para todo  $n \geq 1$  se tiene de la etapa IV del teorema (3.13). Aplicando el teorema (3.14) obtenemos el resultado deseado. ■

El resultado anterior estableció solo la existencia de un conjunto invariante bajo el SIF considerado. El siguiente resultado ofrece condiciones suficientes para garantizar la unicidad del conjunto invariante, es decir, la existencia del atractor del respectivo SIF.

**Teorema 3.16.** Asumimos que  $(X, d)$  es un espacio métrico compacto y  $\forall n \geq 1$ ,  $f_n$  es una  $\varphi$ -contracción. Si  $\sup_{n \geq 1} \varphi_n(t) < t$ , para todo  $t > 0$ , entonces el SIF  $\{X; (f_n)_{n \geq 1}\}$  tiene atractor  $A$  el cual es sucesivamente aproximado por  $(F^{op}(B))_p$ , para todo  $B \in \mathbb{H}(X)$ . Más aún,  $A = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N$ , tomando el límite en el espacio  $(\mathbb{H}(X), h)$ .

**Demostración.** El teorema (3.15) establece que existe un conjunto compacto no vacío  $A \in \mathbb{H}(X)$ , el cual es invariante bajo  $F$  y que  $A = \lim_N A_N = \overline{\bigcup_{N \geq 1} A_N}$ . Por las proposiciones (3.2) ítem (f) y (3.9), tenemos que

$$h(F(A), F(B)) \leq \sup_n h(f_n(A), f_n(B)) \leq \sup_n \varphi_n(h(A, B)) < h(A, B),$$

para todo  $B \in \mathbb{H}(X)$ ,  $A \neq B$ , esto es  $F$  es una E-contracción. La unicidad se tiene por el teorema (2.2). Aplicando el teorema (3.12), obtenemos el resultado. ■

**Ejemplo 3.9.** Considere la familia de funciones definida por  $f_n(x) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} x$  para  $n \geq 1$  y  $x \in [0, 1]$  con la métrica usual.

Definamos  $\varphi_n(t) = \frac{t}{2^n}$ . Veamos que es una función de comparación.

$$x \leq y \longrightarrow \frac{x}{2^n} \leq \frac{y}{2^n}, \quad \forall n \geq 1 \longrightarrow \varphi_n(x) \leq \varphi_n(y),$$

es decir, es monotonamente creciente. Además,

$$\varphi_n^p(t) = \frac{t}{2^{np}} = \frac{t}{(2^n)^p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f_n(y)) &= \left| 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}x - 1 + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}y \right| = \frac{1}{2^n} |x - y| = \frac{d(x, y)}{2^n} \\ &= \varphi_n(d(x, y)), \quad \forall n \geq 1, \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia infinita de  $\varphi$ -contracciones. Veamos que  $[0, 1]$  es punto fijo.

$$F([0, 1]) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n([0, 1])} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \left[ 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} \right]} = \overline{[0, 1]} = [0, 1].$$

Finalizamos el trabajo exhibiendo algunas conclusiones y preguntas abiertas.

---

### 3.4. Conclusiones.

---

- El comportamiento de las contracciones, E-contracciones y  $\varphi$ -contracciones se preserva cuando pasamos al hiperespacio  $\mathbb{H}(X)$ , es decir, el operador de Hutchinson-Barnley  $F$ , asume el mismo comportamiento de las funciones  $f_i$  que lo componen.
- Existen conjuntos que no se pueden obtener como el atractor de un SIF finito pero sí como el de un SIF infinito.
- Para garantizar la existencia del atractor de un SIF con contracciones generalizadas es necesario pedir que el espacio  $X$  sea compacto y no solamente completo.

- Se obtiene la existencia y unicidad del atractor del SIF, en todas las generalizaciones consideradas.

---

**Preguntas Abiertas.**

---

- ¿Hasta que punto la teoría de los SIF's clásicos se puede extender a la de los SIF's generalizados?
- ¿Será posible definir SIF's con otro tipo de contracciones generalizadas? ¿Cuáles?
- ¿Cómo se puede definir el espacio de códigos asociado a un SIF con contracciones generalizadas (E-contracciones y  $\varphi$ -contracciones)?

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. Miculescu and A. Mihail, “*Lipscomb’s space  $\omega^A$  is the attractor of an infinite IFS containing affine transformations of  $l^2(A)$* ”
- [2] J.E Hutchinson, “*Fractals and Self similarity*”, Indiana University. Math. J. 30(1981), 713-747.
- [3] G. Gwóźdź-Lukowska, J. Jackymski, “*The Hutchinson-Barnsley theory for infinite iterated function systems*”, Bull. Aust. Math. Soc. 72 (2005), No.3, 441- 454.
- [4] M.F. Barnsley, “*Fractals Everywhere*”, Academic Press Inc, 1988.
- [5] S. Sabogal and G. Arenas, “*Una introducción a la geometría fractal*”, Ediciones UIS, 2011.
- [6] A. Bielecki, “*Iterated function system analogues on compact metric spaces and their attractors*”, Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica, fasciculus XXXII, 1995.
- [7] N.A. Secelean, “*The Existence of the Attractor of Countable Iterated Function Systems*”, Mediterranean Journal of Mathematics. 6(2010), 139-150.
- [8] G.B. Lewellen, “*Self-similarity*”. Rocky Mountain Journal of Mathematics. Vol 23, Number 3, Summer 1993.

- 
- [9] M. Hata, “*On the structure of Self-similar sets*”. Japan J. Appl. Math, 2(1985), 381-414.
- [10] M. Edelstein, “*On Fixed and Periodic points under contractive mappings*”, Pacific J. Math. 37 (1962) 74-79.
- [11] K.J. Falconer, “*Fractal Geometry: Mathematical Foundations and applications*”. Second edition, Wiley Editorial, England, 2003.
- [12] W.J. Charatonik and A. Dilks, “*On Self-homeomorphic spaces*”. Top. and its Appl., 55(1994), 215-238.
- [13] J.R. Morales, “*Fixed Point’s Theorems for  $\omega - \varphi$ -Contractions*”, Notas de Matemática Serie: Pre-Print No. 230, Mérida - Venezuela. 2004.
- [14] N.A. Secelean, “*Some convergence properties in the Hausdorff-Pompeiu metric*”. General Mathematics. Volumen 8,(2000).
- [15] N.A. Secelean, “*Countable Iterated Function Systems*”. Far East J. Dyn. Syst., Pushpa Publishing House, vol. 3(2) (2001), 149-167.
- [16] H. Fernau, “*Infinite Iterated Function Systems*”. Math. Nachr. 170 (1994), 79-91.
- [17] N.A. Secelean, “*Generalized Countable Iterated Function System*”, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Serbia. Filomat 25:1 (2011), 21-36.
- [18] R. Agarwal, M. Meehan, and D. O’regan, “*Fixed point theory and Applications*”. Cambridge University Press. 2001, 4-6.