

MODELOS RELATIVISTAS DE DISCOS
DELGADOS INMERSOS EN UN HALO DE
MATERIA OSCURA EN PRESENCIA DE
CONSTANTE COSMOLOGICA

EDGAR ANDRÉS ACOSTA PINZÓN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2015

MODELOS RELATIVISTAS DE DISCOS
DELGADOS INMERSOS EN UN HALO DE
MATERIA OSCURA EN PRESENCIA DE
CONSTANTE COSMOLOGICA

EDGAR ANDRÉS ACOSTA PINZÓN

Trabajo de grado para optar al título de Físico

Director

DR. GUILLERMO ALFONSO GONZÁLEZ VILLEGAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2015

Agradecimientos

En primer lugar a Dios, quien me dio la pasión por las ciencias naturales desde mi niñez. Gracias a mi Señor cumpla hoy el sueño de ser Físico; a Él sea la gloria y el honor por siempre.

En segundo lugar quiero darle gracias al profesor Guillermo por su increíble paciencia, dirección y disposición desde que comenzamos este trabajo; gracias por sus aportes, por su apoyo incondicional y por su preocupación por mi situación académica. Quiero dar gracias también a todos los profesores que desde un comienzo contribuyeron en mi formación profesional y personal; en especial a aquellos como el profesor Rafael Cabanzo, el profesor Yeinzon Rodríguez y el profesor Harold Paredez, quienes supieron en su momento comprender mi situación económica y laboral, y brindarme las facilidades para poder ver sus materias en los horarios que yo podía. Gracias también a los excelentes aportes de mis compañeros Oscar, Diego, Liliana, Cristian, y otros tantos que se me escapan en este momento, con quienes compartí no solo la experiencia de estudiar juntos, sino de participar en mis primeros congresos y escuelas a nivel nacional.

También quiero dar gracias a mi familia; a mi mamá, mi nona y mi hermana por su aliento y apoyo, no solo durante toda mi carrera sino durante toda mi vida. Gracias por la formación que como hogar me brindaron. Por último y no por esto menos importante, quiero cerrar agradeciendo a mi novia María Pía, quien con su apoyo y amor soportó mis ausencias cuando tenía que dedicarme a estudiar, y quien con sus regaños ponía mis pies sobre la tierra cuando mis sueños me llevaban mas allá de la realidad.

Tabla de Contenido

Introducción	12
1. Ecuaciones de Einstein y Soluciones Discoidales Axialmente Simétricas	14
1.1. Ecuaciones de Einstein	14
1.2. Soluciones discoidales axialmente simétricas	16
1.3. Interpretación Física de los Modelos de Discos Delgados	18
2. Versión Relativista De Los Modelos Newtonianos de Kuzmin - Toomre	24
2.1. Potencial de Kuzmin - Toomre	24
2.2. MODELO $n = 0$	26
2.3. MODELO $n = 1$	29
2.4. MODELO $n = 2$	33
3. Conclusiones	37
Bibliografía	39

Índice de figuras

- 2.1. Modelo $n = 0$. Densidad superficial del disco $\widehat{\sigma}$ (gráficos $-a-$ y $-b-$) y densidad volumétrica del halo $\widehat{\rho}$ (gráficos $-c-$ y $-d-$) en función de $\widehat{R} = R/a$. El gráfico $-a-$ muestra tres curvas para $\widehat{A}_0 = 1; 2; 3$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $k = 1$ para las 3 curvas; mientras que el gráfico $-b-$ muestra tres curvas para $k = 2; 3; 4$ comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente y dejando $\widehat{A}_0 = 1$ para las tres curvas. En los gráficos $-c-$ y $-d-$ se muestran curvas para los valores $(\widehat{A}_0, k) = (-1, 1)$ y $(2, 7)$ respectivamente. 28
- 2.2. Modelo $n = 1$. Densidad superficial del disco $\widehat{\sigma}$ en función de $\widehat{R} = R/a$. En esta figura se muestran cuatro gráficos. El gráfico $-a-$ muestra curvas para valores de $\widehat{A}_0 = 1; 2; 3$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $\widehat{A}_1 = 1$ $k = 1$; el gráfico $-b-$ muestra curvas para valores de $\widehat{A}_1 = 2; 3; 4$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $\widehat{A}_0 = 1$ $k = 1$; el gráfico $-c-$ muestra curvas para valores de $k = 2; 3; 4$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $\widehat{A}_0 = 1$ y $\widehat{A}_1 = 1$, y finalmente en el gráfico $-d-$ se hacen variar todos los parámetros $(\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, k) = (2, 2, 2); (5, 5, 5); (2, 3, 5)$ comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente. 31
- 2.3. Modelo $n = 1$. Densidad volumétrica del halo $\widehat{\rho}$ en función de $\widehat{R} = R/a$. En esta figura se muestran cuatro gráficos $-a-$, $-b-$, $-c-$ y $-d-$ para valores de $(\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, k) = (1, 1, 1); (5, 2, 7); (-1, 4, 8)$ y $(8, -1, 9)$ respectivamente. 32

- 2.4. Modelo $n = 2$. Densidad superficial del disco $\widehat{\sigma}$ en función de $\widehat{R} = R/a$. En esta figura se muestran cuatro gráficos. El gráfico $-a-$ muestra curvas para valores de $\widehat{A}_0 = 2; 3; 4$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $\widehat{A}_1 = 1$, $\widehat{A}_2 = 1$ y $k = 1$; el gráfico $-b-$ muestra curvas para valores de $\widehat{A}_1 = 1; 2; 3$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $\widehat{A}_0 = 1$, $\widehat{A}_2 = 1$ y $k = 1$; el gráfico $-c-$ muestra curvas para valores de $\widehat{A}_2 = 1; 2; 3$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $\widehat{A}_0 = 1$, $\widehat{A}_1 = 1$ y $k = 1$, y finalmente en el gráfico $-d-$ muestra curvas para valores de $k = 2; 3; 4$ dejando $\widehat{A}_0 = 1$, $\widehat{A}_1 = 1$ y $\widehat{A}_2 = 1$ 34
- 2.5. Modelo $n = 1$. Densidad volumétrica del halo $\widehat{\rho}$ en función de $\widehat{R} = R/a$. En esta figura se muestran cuatro gráficos $-a-$, $-b-$, $-c-$ y $-d-$ para valores de $(\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_2, k) = (1, 1, 1, 1); (2, 5, 4, 8); (3, -2, 5, 4)$ y $(3, -1, 3, 2)$ respectivamente. 36

Resumen

TITULO: MODELOS RELATIVISTAS DE DISCOS DELGADOS INMERSOS EN UN HALO DE MATERIA OSCURA EN PRESENCIA DE CONSTANTE COSMOLÓGICA¹.

AUTOR: Edgar Andrés Acosta Pinzón².

PALABRAS CLAVE: Teoría General de la Relatividad, Discos Relativistas, Halo, Ecuaciones de Einstein, Espacio-tiempo Conformestático, Tensor Momento-Energía, Modelo de Kuzmin- Toomre, Constante Cosmológica.

DESCRIPCIÓN

Se presenta una familia infinita de modelos relativistas de discos delgados de polvo, axialmente simétricos, inmersos en un halo de materia. Estos modelos se obtienen proponiendo soluciones de las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica, considerando un espacio-tiempo conformestático y axialmente simétrico. Dado que el espacio-tiempo es conformestático, el tensor métrico estará caracterizado por una sola función métrica, la cual presenta una discontinuidad en su primera derivada normal a través de un disco delgado. En segunda instancia, utilizando las ecuaciones de Einstein, se obtienen las componentes del tensor momentum-energía, tanto para el disco como para el halo, a partir de las cuales se determinan las densidades de energía y presiones de los fluidos que conformarán estas dos regiones. Para analizar el comportamiento físico del modelo, se imponen sobre el tensor de momentum-energía las condiciones de energía usuales, con el propósito de obtener un sistema de ecuaciones cuya solución pueda expresarse en términos de una función auxiliar, solución de la ecuación de Laplace, la cual se halla por medio de una relación con el modelo clásico de Kuzmin- Toomre, de tal manera que se obtiene una familia relativista de discos de polvo con un halo cuyos esfuerzos principales son diferentes de cero. Se logra demostrar que las masas tanto del halo como del disco en esta familia de soluciones discoidales convergen a una constante.

¹Trabajo de Grado

²Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Guillermo A. González V., Ph.D.

Abstract

TITLE:RELATIVISTIC MODELS OF THIN DISCS IMMERSSED IN A DARK MATTER HALO IN PRESENCE OF COSMOLOGICAL CONSTANT¹.

AUTHOR: Edgar Andrés Acosta Pinzón².

KEY WORDS: Theory of General Relativity, Relativistic Discs, Halo, Einstein Equations, Conformestatic Space-Time, Momentum-Energy Tensor, Kuzmin-Toomre Model, Cosmological Constant.

DESCRIPTION

An infinite family of axially symmetric relativistic models of thin disks of dust, immersed in a halo of matter is presented. These models are obtained proposing solutions of the Einstein equations with cosmological constant, considering an axially symmetric and conformestatic space - time. Since space - time is conformestatic, the metric tensor is characterized by a single metric function which presents a discontinuity in its first normal derivative through a thin disk. Secondly, using the Einstein equations, the momentum - energy tensor components are obtained, both for the disk to the halo, from which the energy densities and pressures of fluids that make up these two regions are determined . To analyze the physical behavior of the model we impose on momentum - energy tensor the usual energy conditions, in order to obtain an equations system whose solution can be expressed in terms of an auxiliary function, solution of the Laplace equation, which is found through a relationship with Kuzmin-Toomre classical model, so that a dust relativistic discs with a halo family is obtained whose main efforts are different from zero. It is demonstrated that both masses, either halo or disk in this family of discoidal solutions converge to a constant.

¹Trabajo de Grado

²Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Guillermo A. González V., Ph.D.

Introducción

Una característica importante de algunos sistemas aislados en el universo es su simetría axial, siendo ejemplos importantes de esta clase de configuraciones planetas, estrellas, galaxias, discos de acreción y agujeros negros rotantes. Por esto, se ha dedicado una gran cantidad de esfuerzo al estudio teórico del campo gravitacional generado por esta clase de fuentes aisladas, a través del tiempo, tanto en el marco de la Teoría Newtoniana de la Gravitación como en el de la Teoría de la Relatividad General.

Ahora bien, en el contexto de la Teoría de la Relatividad General, la obtención de soluciones de las ecuaciones de Einstein que describan de manera auto-consistente los campos gravitacionales y las fuentes materiales que los generan es un problema de gran dificultad. Para obtener esta clase de soluciones se deben plantear y resolver simultáneamente el problema “exterior”, un problema de contorno para las ecuaciones de Einstein en el vacío cuya solución determina el campo externo, y el problema “interior”, cuya solución determina la estructura y la dinámica de la fuente en su propio campo gravitacional. Finalmente, para que las soluciones sean físicamente aceptables, deben satisfacer condiciones adicionales tales como la finitud y positividad de la masa, la naturaleza físicamente razonable de la materia y el tamaño geométrico finito de la fuente.

A pesar de la naturaleza ideal de éste tipo de modelos, estos presentan una gran importancia Astrofísica pues a partir de estos se pueden modelar discos de acreción, galaxias en equilibrio termodinámico y la superposición de galaxias y agujeros negros. En consecuencia, se ha desarrollado un importante número de trabajos enfocados en la obtención y análisis de soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein que correspondan a este tipo de modelos. Así, los primeros modelos relativistas de discos estáticos delgados fueron obtenidos en 1968 por Bonnor y Sackfield [36] y en 1969 por Morgan y Morgan [32]. Desde entonces, varios autores han obtenido diferentes clases de soluciones exactas correspondientes a discos delgados estáticos [1, 6, 10, 15, 16, 22, 23, 26, 28] y estacionarios [8, 11, 24].

Un problema de gran importancia en Relatividad General es la obtención de soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein que describan sistemas conformados por la

superposición de objetos astrofísicos. Se puede decir que en particular son relevantes los modelos que presentan la superposición de discos delgados con agujeros negros en su centro o de discos delgados inmersos en halos esferoidales de materia debido a que la descripción actualmente mas aceptada de la composición de galaxias espirales, es que parte de su masa se encuentra concentrada en un disco delgado mientras que el resto de contribuciones provienen de un halo de materia oscura[33], una protuberancia central y en algunos casos, un agujero negro en su centro. Así entonces, el estudio del campo gravitacional generado por esta clase de fuentes compuestas es de gran importancia, no solo desde el punto de vista de la Teoría de la Relatividad misma, sino también desde el punto de vista de sus aplicaciones astrofísicas. Sin embargo la no linealidad de las ecuaciones de Einstein, hace que obtener soluciones exactas que describan el campo gravitacional de un sistema compuesto, no se reduzca a una simple superposición, como sí ocurre en la gravitación Newtoniana.

Ahora bien, otro problema de gran relevancia en astrofísica relativista, es la obtención de soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein cuando presentan un término adicional correspondiente a la constante cosmológica. El papel que inicialmente jugó la constante cosmológica cuando Albert Einstein la introdujo como una modificación a su ecuación original de campo gravitatorio, fue el de dar descripción a un universo estático, lo cual, él mismo tuvo que rechazar cuando Hubble realizó su descubrimiento de un universo en expansión, sin embargo el descubrimiento de la aceleración cosmológica afianzó el interés por el término.

En trabajos realizados por diferentes autores, donde se incluye la constante cosmológica como una pequeña perturbación en las ecuaciones de campo de Einstein, se muestra que la influencia repulsiva del término es relevante no solo a gran, sino a corta escala [37, 38, 39, 40, 41]. De acuerdo a lo anterior, el propósito del presente trabajo, es no solo encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein en presencia de constante cosmológica, sino además, proponer nuevos modelos de discos delgados y halos esferoidales finitos en los cuales se pueda observar la influencia de la constante cosmológica en escalas galácticas. Los modelos serán construidos utilizando soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein en presencia de constante cosmológica para espaciotiempos conformestáticos y axialmente simétricos, los cuales están caracterizados por una sola función métrica. Exigiendo que las soluciones obtenidas estén de acuerdo con las condiciones de energía, la función métrica se expresará en términos de una solución de la ecuación de Laplace que se anula apropiadamente en el infinito y cuya primera derivada presenta una discontinuidad finita a través del plano del disco. Una vez obtenida una solución de la ecuación de Laplace, se determinarán las soluciones de las ecuaciones de Einstein en presencia de constante cosmológica y el tensor de momentum-energía, el cual describe el contenido de materia tanto del halo esferoidal como del disco delgado.

Capítulo 1

Ecuaciones de Einstein y Soluciones Discoidales Axialmente Simétricas

1.1. Ecuaciones de Einstein

Con el fin de formular las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica para un espaciotiempo estático y axialmente simétrico con un disco delgado como fuente gravitacional, se propone la existencia de una hipersuperficie Σ definida mediante la función $\Phi(x^u) = z = 0$, con vector normal definido por $\Phi_{,\mu} = n_{,\mu} = \delta_u^z$ y donde $x^\mu = (t, r, \varphi, z)$ son las coordenadas cilíndricas. El potencial gravitacional asociado a Σ , representado para el caso relativista por el tensor métrico, debe cumplir las siguientes propiedades.

Que sea axialmente simétrico; ésto es, que las funciones del tensor métrico sean funciones simétricas de las coordenadas r y z .

$$g_{\mu\nu,\phi} = 0, \quad (1.1)$$

lo cual implica,

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r, z). \quad (1.2)$$

Que tenga simetría de reflexión; esto es, que cambiando z en $-z$, el tensor métrico sea el mismo,

$$g_{\mu\nu}(r, z) = g_{\mu\nu}(r, -z), \quad (1.3)$$

por lo tanto,

$$g_{\mu\nu,z}(r, z) = -g_{\mu\nu,z}(r, z). \quad (1.4)$$

Que sea continuo en $z = 0$,

$$[g_{\mu\nu}] = g_{\mu\nu}|_{z=0^+} - g_{\mu\nu}|_{z=0^-} = 0, \quad (1.5)$$

o bien,

$$[g_{\mu\nu}] = g_{\mu\nu}^+|_{\Sigma} - g_{\mu\nu}^-|_{\Sigma}. \quad (1.6)$$

Que la primera derivada respecto de la coordenada z sea discontinua en $z = 0$,

$$b_{\mu\nu} = [g_{\mu\nu,z}] = 2g_{\mu\nu}|_{z=0^+}. \quad (1.7)$$

Ahora, para obtener las ecuaciones de Einstein para cascarones de materia, es necesario hacer uso de las distribuciones de Heaviside $\theta(z)$ y Dirac $\delta(z)$, [2, 3, 4, 14, 34, 35] con lo cual el tensor métrico se puede expresar de la siguiente forma,

$$g_{\mu\nu} = \{g_{\mu\nu}\}^D = g_{\mu\nu}^+\theta(z) + g_{\mu\nu}^-\{1 - \theta(z)\}, \quad (1.8)$$

y el tensor de Ricci vendría dado po,

$$R_{\mu\nu} = \{R_{\mu\nu}\}^D = R_{\mu\nu}^+\theta(z) + R_{\mu\nu}^-\{1 - \theta(z)\} + H_{\mu\nu}\delta(z), \quad (1.9)$$

donde los términos $g_{\mu\nu}^\pm$ y $R_{\mu\nu}^\pm$ representan las componentes de los tensores métrico y de Ricci respectivamente, en las regiones $z > 0$ y $z < 0$; y el término $H_{\mu\nu}$ representa las componentes del tensor de Ricci en $z = 0$, y está definido en función de el vector normal n_μ , y la primer derivada del salto del tensor métrico $b_{\mu\nu}$ de la siguiente forma,

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\{b_\nu^z\eta_\mu - b_\xi^\xi\eta_\mu\eta_\nu + b_{\mu z}\eta_\nu - b_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\}, \quad (1.10)$$

con todas las cantidades evaluadas en $z = 0^+$.

Teniendo las componentes del tensor de Ricci dadas por (1.9), se calculan las componentes del tensor energía-impulso dando como resultado,

$$T_{\mu\nu} = \{T_{\mu\nu}\}^D + Q_{\mu\nu}\delta(z) = T_{\mu\nu}^+\theta(z) + T_{\mu\nu}^-\{1 - \theta(z)\} + Q_{\mu\nu}\delta(z), \quad (1.11)$$

donde análogamente, $T_{\mu\nu}^\pm$ representa las componentes del tensor energía-impulso en las regiones $Z > 0$ y $Z < 0$ y $Q_{\mu\nu}$ corresponde a las componentes del tensor perteneciente al disco, es decir en la región $Z = 0$. Las ecuaciones de Einstein, en unidades naturales ($c = 8\pi G = 1$) tienen la forma,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.12)$$

Para encontrar las componentes del tensor energía-impulso, se le adiciona a (1.12), el término correspondiente a la constante cosmológica; así (1.12) toma la siguiente forma,

$$T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

donde Λ es la constante cosmológica. Aprovechando las distribuciones tensoriales para $g_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, y $T_{\mu\nu}$, expuestas en (1.8), (1.9) y (1.11), se puede escribir (1.13) separándola en una parte para la región $Z > 0$ y $Z < 0$, y otra parte para $Z = 0$, de la siguiente manera,

$$T_{\mu\nu}^+ = R_{\mu\nu}^+ - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^+R - \Lambda g_{\mu\nu}^+, \quad (1.14)$$

$$T_{\mu\nu}^- = R_{\mu\nu}^- - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^-R - \Lambda g_{\mu\nu}^-, \quad (1.15)$$

$$Q_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}H, \quad (1.16)$$

(1.14) y (1.15) describen la naturaleza física de las regiones $Z > 0$ y $Z < 0$, es decir, por fuera de la hipersuperficie Σ ; y (1.16) se usará para hallar el tensor energía-impulso superficial perteneciente al disco, el cual viene dado por,

$$S_{\mu\nu} = \int T_{\mu\nu} ds_n = (g_{33})^{\frac{1}{2}} Q_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

donde ds_n , es el elemento de longitud en la dirección normal al plano $z = 0$, y está dado por,

$$ds_n = (g_{33})^{\frac{1}{2}} dz. \quad (1.18)$$

Nótese que (1.16) al ser la parte proporcional a la distribución de Heaviside, no tiene el término correspondiente a la constante cosmológica, lo cual simplifica el análisis a la hora de calcular cada componente.

1.2. Soluciones discoidales axialmente simétricas

Como se sabe, la curvatura del espacio-tiempo, descrita por el tensor de Riemann (2.12), da evidencia de la presencia de un campo gravitacional, que a su vez, es generado por una distribución de masa. La relación entre la fuente y la curvatura del espacio-tiempo que hemos estado considerando se describe por las ecuaciones (2.17) y (2.18). Con el objetivo de generar en la hipersuperficie Σ una distribución discoidal de materia axialmente simétrica, y teniendo en cuenta las ideas anteriores, se considera

que la geometría de nuestro espacio-tiempo está descrita por un elemento de línea estático y cuya parte espacial sea conformalmente plana.

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi}(dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2). \quad (1.19)$$

A este tipo de métrica se les llama métricas conformestáticas.

La función ψ , al ser la única función de la cual depende la métrica, debe cumplir las condiciones expresadas para el tensor métrico en (1.1), (1.2), (1.3) y (1.4). Adicionalmente se impone que, la primera derivada de la función ψ respecto de la variable z evaluada en la hipersuperficie, sea diferente de cero; esto es,

$$\psi_{,z}|_{z=0^+} \neq 0. \quad (1.20)$$

La condición (1.20) es necesaria para para que exista materia en la hipersuperficie.

Las componentes no nulas del tensor de Einstein a partir de (1.12), considerando la métrica determinada por (1.19) son,

$$G_{00} = e^{4\psi} \{2\nabla^2\psi - \nabla\psi \cdot \nabla\psi\}, \quad (1.21)$$

$$G_{11} = \psi_{,z}^2 - \psi_{,r}^2, \quad (1.22)$$

$$G_{13} = -2\psi_{,z}\psi_{,r}, \quad (1.23)$$

$$G_{22} = r^2\nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (1.24)$$

$$G_{33} = \psi_{,r}^2 - \psi_{,z}^2. \quad (1.25)$$

Claramente (1.12) y (1.13), muestran una relación entre el tensor de Einstein y el tensor de energía impulso, que está dada por,

$$T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.26)$$

Con esto, las componentes del tensor energía impulso en presencia de constante cosmológica, toman la siguiente forma,

$$T_{00} = e^{4\psi} \{2\nabla^2\psi - \nabla\psi \cdot \nabla\psi\} + \Lambda e^{2\psi}, \quad (1.27)$$

$$T_{11} = \psi_{,z}^2 - \psi_{,r}^2 - \Lambda e^{-2\psi}, \quad (1.28)$$

$$T_{13} = -2\psi_{,z}\psi_{,r}, \quad (1.29)$$

$$T_{22} = r^2\nabla\psi \cdot \nabla\psi - \Lambda r^2 e^{-2\psi}, \quad (1.30)$$

$$T_{33} = \psi_{,r}^2 - \psi_{,z}^2 - \Lambda e^{-2\psi}. \quad (1.31)$$

Igualando a cero cada una de estas componentes, se puede demostrar, que la única solución en el vacío, es la solución trivial para $\psi = \text{constante}$, lo cual es equivalente

a la métrica de Minkowski. De acuerdo con lo anterior, no existe solución en el vacío y se deben entonces, considerar las ecuaciones de Einstein en presencia de materia, en unidades naturales, las cuales están representadas por (1.26), donde de manera natural, surge del modelo la presencia de un halo de materia oscura, cuyo tensor de energía impulso corresponde al término $T_{\mu\nu}$.

A partir de (1.16) se obtiene,

$$Q_{00} = 4e^{4\psi}\psi_{,z}, \quad (1.32)$$

$$Q_{ij} = 0. \quad (1.33)$$

Con este resultado, de (1.17) se obtienen las componentes del tensor energía-impulso superficial, para el disco,

$$S_{00} = 4e^{3\psi}\psi_{,z}, \quad (1.34)$$

$$S_{ij} = 0, \quad (1.35)$$

donde los subíndices i y j corren sobre las coordenadas espaciales.

1.3. Interpretación Física de los Modelos de Discos Delgados

Para poder analizar el contenido físico del tensor energía-impulso, primero se determinan sus componentes respecto de un marco de referencia localmente minkowskiano, definido considerando la siguiente tétrada ortonormal de vectores,

$$e_{(0)}^\mu = e^{-\psi}\delta_0^\mu, \quad (1.36)$$

$$e_{(1)}^\mu = e^\psi\delta_1^\mu, \quad (1.37)$$

$$e_{(2)}^\mu = \frac{e^\psi}{r}\delta_2^\mu, \quad (1.38)$$

$$e_{(3)}^\mu = e^\psi\delta_3^\mu. \quad (1.39)$$

Las componentes del tensor de energía-impulso superficial para el disco en la tétrada anterior toman la siguiente forma,

$$S_{(\alpha)(\beta)} = S_{\mu\nu}e_{(\alpha)}^\mu e_{(\beta)}^\nu. \quad (1.40)$$

Con (1.40), y usando el resultado expresado en (1.34), se obtiene,

$$S_{(0)(0)} = 4e^{\psi}\psi_{,z}. \quad (1.41)$$

La única componente no nula del tensor, está dada por (1.41); esto implica que el disco solo se tiene densidad de materia, y puesto que las componentes que representan el momentum lineal de las partículas que componen el fluido son nulas; el tensor de energía-impulso superficial para el disco, describe un fluido de polvo. Análogamente, las componentes del tensor energía-impulso para el halo, en la tétrada, están dadas por,

$$T_{(\alpha)(\beta)} = T_{\mu\nu}e_{(\alpha)}^{\mu}e_{(\beta)}^{\nu}. \quad (1.42)$$

Debido a que el tensor métrico expresado en la tétrada ortonormal, se convierte en el tensor métrico para un espaciotiempo minkowskiano $\eta_{\mu\nu}$; (1.26) toma la forma,

$$T_{(\alpha)(\beta)} = G_{(\alpha)(\beta)} - \Lambda\eta_{(\alpha)(\beta)} \quad (1.43)$$

Con esto, se obtienen las componentes no nulas del tensor energía-impulso para el halo expresadas en la tétrada,

$$T_{(0)(0)} = G_{(0)(0)} + \Lambda, \quad (1.44)$$

$$T_{(1)(1)} = G_{(1)(1)} - \Lambda, \quad (1.45)$$

$$T_{(1)(3)} = G_{(1)(3)}, \quad (1.46)$$

$$T_{(2)(2)} = G_{(2)(2)} - \Lambda, \quad (1.47)$$

$$T_{(3)(3)} = -G_{(1)(1)} - \Lambda. \quad (1.48)$$

Ahora con objetivo de determinar el contenido físico del tensor, este se debe diagonalizar, para esto se debe resolver el problema de autovalores,

$$T_{(\alpha)(\beta)}\xi^{\beta} = \lambda\eta_{(\alpha)(\beta)}\xi^{\beta}, \quad (1.49)$$

donde ξ es el autovector asociado a cada autovalor λ .

Al resolver la ecuación característica dada por,

$$|T_{(\alpha)(\beta)} - \lambda\eta_{(\alpha)(\beta)}| = 0, \quad (1.50)$$

finalmente se obtienen los siguientes autovalores,

$$\lambda_0 = -T_{(0)(0)}, \quad (1.51)$$

$$\lambda_1 = T_{(2)(2)}, \quad (1.52)$$

$$\lambda_2 = T_{(2)(2)}, \quad (1.53)$$

$$\lambda_3 = 2\Lambda - T_{(1)(1)}, \quad (1.54)$$

con lo que los autovectores debidamente normalizados, asociados a cada uno de estos autovalores son,

$$\xi_0 = e^{-\psi}(1, 0, 0, 0), \quad (1.55)$$

$$\xi_1 = \frac{e^\psi}{\sqrt{\Omega^2 + 1}}(0, -\Omega, 0, 1), \quad (1.56)$$

$$\xi_2 = \frac{e^\psi}{r}(0, 0, 1, 0), \quad (1.57)$$

$$\xi_3 = \frac{e^\psi}{\sqrt{\Omega^2 + 1}}(0, 1, 0, \Omega). \quad (1.58)$$

Donde $\Omega = \frac{\psi_{,z}}{\psi_{,r}}$.

Los vectores de esta nueva tétrada ortonormal, van en dirección de los ejes principales del fluido; así, las componentes para del tensor de energía-impulso del halo, expresadas en esta tétrada están dadas por medio de la ecuación,

$$T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = T_{(\mu)(\nu)}\xi_{\hat{\alpha}}^{(\mu)}\xi_{\hat{\beta}}^{(\nu)} \quad (1.59)$$

Desarrollando (1.59), se obtiene,

$$T_{\hat{0}\hat{0}} = e^{2\psi}\{2\nabla^2\psi - \nabla\psi \cdot \nabla\psi\} + \Lambda, \quad (1.60)$$

$$T_{\hat{1}\hat{1}} = e^{2\psi}\nabla\psi \cdot \nabla\psi - \Lambda, \quad (1.61)$$

$$T_{\hat{2}\hat{2}} = e^{2\psi}\nabla\psi \cdot \nabla\psi - \Lambda, \quad (1.62)$$

$$T_{\hat{3}\hat{3}} = -\Lambda - e^{2\psi}\nabla\psi \cdot \nabla\psi. \quad (1.63)$$

Donde (1.60) representa la densidad de energía del fluido, mientras que (1.61), (1.62) y (1.63), dan cuenta de los esfuerzos principales del mismo y con los cuales se define la presión como,

$$p = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3). \quad (1.64)$$

Estas componentes dan cuenta de un tensor que lo podemos descomponer en dos: un tensor que podemos llamar de materia y otro que corresponde al tensor de constante cosmológica así:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^\Lambda \quad (1.65)$$

Donde $T_{\mu\nu}^M$ tiene las siguientes componentes

$$T_{00}^M = \rho = e^{2\psi} \{2\nabla^2\psi - \nabla\psi \cdot \nabla\psi\}, \quad (1.66)$$

$$T_{11}^M = p_1 = e^{2\psi} \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (1.67)$$

$$T_{22}^M = p_2 = e^{2\psi} \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (1.68)$$

$$T_{33}^M = p_3 = -e^{2\psi} \nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (1.69)$$

y donde $T_{\mu\nu}^\Lambda$ está dado por:

$$T_{00}^\Lambda = \Lambda, \quad (1.70)$$

$$T_{11}^\Lambda = -\Lambda, \quad (1.71)$$

$$T_{22}^\Lambda = -\Lambda, \quad (1.72)$$

$$T_{33}^\Lambda = -\Lambda. \quad (1.73)$$

Las componentes del tensor de constante cosmológica representan la densidad de energía de vacío y sus presiones. La constante cosmológica introduce densidad de energía, y presión en el universo que son constantes en el espacio-tiempo, y que además conforman lo que se denomina “fluido cosmológico” el cual es totalmente invariante. Esta presión está definida en términos de Λ

$$p_\Lambda = -\frac{\Lambda}{8\pi}, \quad (1.74)$$

donde $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi}$ es llamada por los cosmólogos “energía oscura”. Esta expresión corresponde a la ecuación de estado del fluido cosmológico.

Este fluido con esta densidad y presión tiene interesantes propiedades [43] como por ejemplo:

1. Densidad de masa inercial = 0. Esta propiedad es la clave de la invarianza de la presión y la densidad.
2. Fuerza de presión = 0. Las fuerzas de presión solo actúan cuando existen gradientes de presión.
3. No contribuye a la dinámica local.
4. No ofrece resistencia a los objetos que se mueven en el vacío.
5. El vacío es vacío con o sin la presencia del fluido cosmológico, excepto por sus efectos gravitacionales.
6. Obedece las leyes de conservación de energía y momentum.

Retomando las expresiones (1.66) a (1.69) que representan las componentes de los tensores energía-impulso para los fluidos que conforman tanto el disco como el halo, se hace un análisis detallado del comportamiento físico del modelo; para esto se imponen sobre el tensor las condiciones de energía usuales con el propósito de obtener un sistema de ecuaciones cuya solución pueda expresarse en términos de una función auxiliar, solución de la ecuación de Laplace. Estas condiciones están dadas por las siguientes expresiones,

$$\rho \geq 0 \quad (1.75)$$

$$|\rho| \geq |p_i| \quad (1.76)$$

$$\rho + p_i \geq 0 \quad (1.77)$$

$$\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0 \quad (1.78)$$

Conociendo las componentes del tensor y reemplazándolas en las ecuaciones anteriores, se llega fácilmente a una sola condición a satisfacer dada por,

$$\nabla^2 \psi - \nabla \psi \cdot \nabla \psi \geq 0. \quad (1.79)$$

Una manera de satisfacer (1.69) es suponer que la función ψ es solución de

$$\nabla^2 \psi = k \nabla \psi \cdot \nabla \psi, \quad (1.80)$$

con $k \geq 1$ para satisfacer (1.69). Reemplazando (1.70) en las expresiones (1.60) a (1.63) se obtienen la densidad,

$$\rho = (2k - 1)e^{2\psi} \nabla \psi \cdot \nabla \psi, \quad (1.81)$$

y la ecuación de estado

$$p = \frac{\rho}{3(2k - 1)} \quad (1.82)$$

para los modelos considerados. En esta ecuación, la presión tiene la forma $p = \gamma \rho$, con $\gamma = \frac{1}{3(2k-1)}$, lo cual indica que el fluido puede ser de radiación para el caso en que $\gamma = \frac{1}{3}$, o de cualquier otro tipo para γ en el intervalo $(0, \frac{1}{3})$.

La ecuación (1.70) se puede reescribir equivalentemente como

$$\nabla^2(e^{-k\psi}) = 0 \quad (1.83)$$

de tal manera que se puede escribir

$$e^{-k\psi} = 1 - \Phi \quad (1.84)$$

donde Φ es una solución a la ecuación de Laplace

En la ecuación (1.74), se impone una relación entre las funciones ψ y Φ , de acuerdo a esta relación se puede obtener también una expresión para la densidad superficial del disco de polvo, que junto con las ecuaciones (1.71) y (1.72) forman un set completo de las propiedades físicas del sistema disco - halo.

$$\sigma = \frac{4}{k} \frac{\Phi_{,z}}{(1 - \Phi)^{\frac{1+k}{k}}} \quad (1.85)$$

En coordenadas esféricas, las soluciones a la ecuación de Laplace que se anulan en el infinito se pueden expresar mediante los polinomios de Legendre, de la siguiente manera:

$$\Phi = - \sum_{i=0}^n \frac{A_i P_i(\cos\theta)}{r^{i+1}}. \quad (1.86)$$

Como (1.74) se anula en el infinito, se garantiza el carácter asintóticamente plano de la métrica.

Capítulo 2

Versión Relativista De Los Modelos Newtonianos de Kuzmin - Toomre

2.1. Potencial de Kuzmin - Toomre

Una solución al problema clásico de calcular una expresión para el potencial gravitacional Φ , generado por una distribución discoidal delgada de materia Σ , fue propuesta inicialmente por Kuzmin [17] y después generalizada por Toomre en lo que se conoce como el modelo clásico de Kuzmin-Toomre [5, 25]. Para resolver la ecuación (1.74), hacemos uso del modelo clásico de Kuzmin-Toomre de orden n , el cual, propone como solución para el potencial Φ , la expresión

$$\Phi = - \sum_{i=0}^n \frac{A_i P_i(\cos\theta)}{r^{i+1}}; r \rightarrow r = \sqrt{R^2 + (|z| + a)^2}; \quad (2.1)$$

con lo cual, las soluciones quedarían en términos de las constantes A_i . La expresión anterior se obtuvo mediante el método de desplazamiento, corte y reflexión, el cual consiste en realizar una transformación sobre la coordenada z de la forma

$$z \rightarrow |z| + a; \quad (2.2)$$

con la cual se obtiene una solución para el potencial generado por una distribución discoidal de masa en el plano $z = 0$. Así, obtenemos soluciones discoidales diferentes para cada valor de n , es decir, se consigue una familia de soluciones.

Se toma esta familia de discos y se genera una versión relativista de éstos en presencia de la constante cosmológica; para esto se consideran modelos mediante los polinomios de Legendre de grados cero y uno y se analiza su comportamiento físico.

Las soluciones obtenidas para las densidades superficial (1.84) y volumétrica (1.80) describen las distribuciones de masa de un halo de materia y de un disco que está inmerso en dicho fluido; por lo tanto a partir de estas soluciones se puede obtener como resultado la masa total tanto del halo como del disco. Se demuestra que la masa de nuestro sistema converge; de manera que puede ser calculada. Para esto se hace uso del criterio de comparación del límite [41].

Para calcular las masas tanto del halo como del disco debemos resolver para cada caso la integral

$$M = \int_{\Sigma} (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T_{\mu\nu})n^{\mu}\mathcal{X}_{(t)}^{\nu}\sqrt{h}dv, \quad (2.3)$$

donde n^{μ} es el vector normal a la hipersuperficie, $\mathcal{X}_{(t)}^{\nu}$ es el vector de Killing tipo tiempo, h es el determinante de la métrica inducida, y dv es el diferencial de volumen del espacio [42] Para el caso de la densidad superficial de masa del disco se tiene $n^{\mu} = e_{(t)}^{\mu}$, $\mathcal{X}_{(t)}^{\nu} = e^{\psi}e_{(t)}^{\nu}$, $h = R^2e^{-6\psi}$, $dv = RdRd\phi$, y $T_{\mu\nu} = e^{\psi}S_{\mu\nu}\delta(z)$; por lo que la integral anterior toma la forma

$$M = \frac{8\pi}{k} \int_a^{\infty} (k\psi_{,z})Rdr; \quad (2.4)$$

y por (1.84) la integral se puede reescribir como

$$M = \frac{8\pi}{k} \int_a^{\infty} \left(\frac{k\Phi_{,z}}{1-\Phi}\right)r_0dr_0; \quad (2.5)$$

donde se realizó la sustitución $r_0^2 = R^2 + a^2$, y donde el integrando está evaluado en $z = 0^+$

Ahora se debe demostrar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = C; \quad (2.6)$$

con $C \neq 0$ y $\mu_n(r_0) = \frac{\Phi_{n,z}}{1-\Phi_n}$.

Para calcular μ_n y μ_{n+1} se usa (2.1) y su primera derivada respecto a z evaluadas en $z = 0^+$

$$\Phi_n|_{z=0^+} = - \sum_{i=0}^n \frac{A_i P_i(a/r_0)}{r^{l+1}}; \quad (2.7)$$

$$\Phi_{n,z}|_{z=0^+} = - \sum_{i=0}^n \frac{A_i (i+1) P_{i+1}(a/r_0)}{r^{l+2}}; \quad (2.8)$$

donde $r_0^2 = R^2 + a^2$. Con esto μ_n y μ_{n+1} toman la forma

$$\mu_n(r_0) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{A_i(l+1)P_{l+1}(a/r_0)}{r^{l+2}}}{1 + \sum_{i=0}^n \frac{A_i P_l(a/r_0)}{r^{l+1}}} \quad (2.9)$$

$$\mu_{n+1}(r_0) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{A_i(l+1)P_{l+1}(a/r_0)}{r^{l+2}} + \frac{A_{n+1}(n+2)P_{n+2}(a/r_0)}{r_0^{n+3}}}{1 + \sum_{i=0}^n \frac{A_i P_l(a/r_0)}{r^{l+1}} + \frac{A_{n+1} P_{n+1}(a/r_0)}{r_0^{n+2}}}. \quad (2.10)$$

De estas ecuaciones calculamos la relación

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \left[1 + \frac{\frac{A_{n+1}(n+2)P_{n+2}(a/r_0)}{r_0^{n+3}}}{\sum_{i=0}^n \frac{A_i(l+1)P_{l+1}(a/r_0)}{r^{l+2}}} \right] \left[\frac{1 + \sum_{i=0}^n \frac{A_i P_l(a/r_0)}{r^{l+1}}}{1 + \sum_{i=0}^n \frac{A_i P_l(a/r_0)}{r^{l+1}} + \frac{A_{n+1} P_{n+1}(a/r_0)}{r_0^{n+2}}} \right] \quad (2.11)$$

Al analizar el termino de la derecha de esta igualdad, se puede observar que cuando $r \rightarrow \infty$ el límite de (2.11) es 1, por lo tanto si se logra demostrar que la masa del disco para el modelo $n = 0$ converge, quedaría demostrado que para modelos con cualquier valor de n , la masa del disco también converge. Ahora para calcular la masa del halo, la integral (2.5) se escribe como

$$M_H = \frac{4\pi}{k} \int_0^\pi \int_0^\infty \left[\frac{\Phi_{,R}^2 + \Phi_{,z}^2}{(1 - \Phi)^2} \right] r \sin\theta dr d\theta. \quad (2.12)$$

Ahora siguiendo un desarrollo similar al realizado para la masa del disco, se puede demostrar que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n} = 1, \quad (2.13)$$

con $\eta_n = \frac{\Phi_{n,R}^2 + \Phi_{n,z}^2}{(1 - \Phi_n)^2}$, y habiendo demostrado que la integral converge para $n = 0$, entonces también queda demostrado que lo hace para cualquier valor de n .

Se espera que las soluciones tengan un comportamiento físico adecuado, para esto se hace variar el valor de n en (2.1), mientras mas adelante se calcularán las masas del disco y del halo para el modelo $n = 0$.

2.2. MODELO $n = 0$

Para el primer modelo, n toma el valor de cero ($n = 0$) en (2.1), reduciéndose la expresión a

$$\Phi_0(r, \theta) = -\frac{A_0}{r}. \quad (2.14)$$

Al calcular las primeras derivadas de Φ_0 respecto a R y z se obtiene

$$\Phi_{0,R} = A_0 \frac{R}{r^3}, \quad (2.15)$$

$$\Phi_{0,z} = A_0 \frac{|z| + a}{r^3} |z|_{,z}. \quad (2.16)$$

Con éstas derivadas y haciendo uso de las ecuaciones (1.81) y (1.84), se puede calcular, para éste caso, las propiedades que describen físicamente el sistema conformado por un disco inmerso en un halo. Para el caso de la densidad superficial de energía del disco, se obtiene una expresión que viene dada como

$$\hat{\sigma}(\hat{R}) = \frac{\left(\hat{A}_0 + \sqrt{\hat{R}^2 + 1}\right)^{-(1+k)/k}}{(\hat{R}^2 + 1)^{(2k-1)/2k}}, \quad (2.17)$$

donde $\hat{R} = R/a$, \hat{A}_0 y $\hat{\sigma}(\hat{R}) = \frac{ka}{4A_0} \sigma(\hat{R})$.

En los gráficos $-a-$ y $-b-$ de figura 2.1 es evidente la existencia de una región en donde hay una mayor concentración de masa, la cual crece cuando $\hat{R} \rightarrow 0$. En cambio, cuando \hat{R} se hace muy grande; es decir, cuando nos alejamos del centro del disco, la densidad de masa se hace muy cercana a cero. Este comportamiento es típico de un disco galáctico, ya que existe una región central o bulbo donde se encuentra concentrada la mayor cantidad de masa del disco, y a medida que nos alejamos en dirección radial del centro galáctico, la densidad de materia tiende a cero.

Ahora, es interesante volver a señalar que el disco que se ha obtenido está inmerso en un halo o fluido ya que se obtiene una densidad volumétrica de energía diferente de cero; es importante por lo tanto, analizar el comportamiento de dicha densidad que de acuerdo a la ecuación (1.84) tiene la forma

$$\hat{\rho}(\hat{R}, \hat{z}) = \frac{\left(\hat{A}_0 + \sqrt{\hat{R}^2 + (|\hat{z}| + 1)^2}\right)^{-2(k+1)/k}}{\left(\hat{R}^2 + (|\hat{z}| + 1)^2\right)^{(k-1)/k}}; \quad (2.18)$$

con $\hat{z} = z/a$, $\hat{\rho}(\hat{R}, \hat{z}) = \frac{k^2 a^2}{A_0^2 (2k+1)} \rho(\hat{R}, \hat{z})$.

En los gráficos $-c-$ y $-d-$ de la figura 2.1 se analiza el comportamiento de la solución (2.18). En ella se observan dos gráficas que describen el comportamiento de

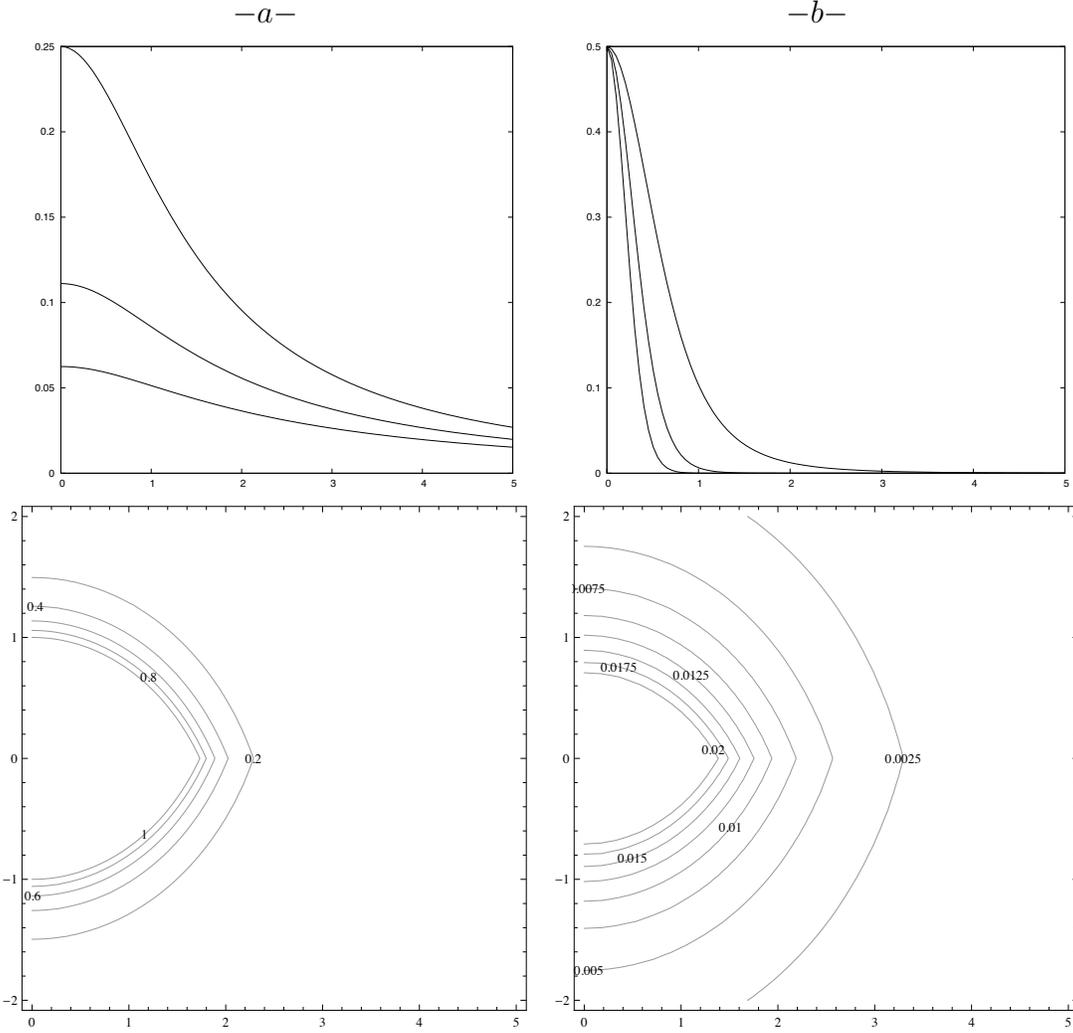


Figura 2.1: Modelo $n = 0$. Densidad superficial del disco $\hat{\sigma}$ (gráficos $-a-$ y $-b-$) y densidad volumétrica del halo $\hat{\rho}$ (gráficos $-c-$ y $-d-$) en función de $\hat{R} = R/a$. El gráfico $-a-$ muestra tres curvas para $\hat{A}_0 = 1; 2; 3$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $k = 1$ para las 3 curvas; mientras que el gráfico $-b-$ muestra tres curvas para $k = 2; 3; 4$ comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente y dejando $\hat{A}_0 = 1$ para las tres curvas. En los gráficos $-c-$ y $-d-$ se muestran curvas para los valores $(\hat{A}_0, k) = (-1, 1)$ y $(2, 7)$ respectivamente.

la densidad de energía del halo. A medida que nos acercamos al centro del halo, el cual coincide con el centro del disco; es decir, para $\widehat{R} \rightarrow 0$ y $\widehat{z} \rightarrow 0$, la densidad volumétrica de energía se hace máxima, pero cuando nos alejamos del centro del halo; es decir, cuando $\widehat{R} \rightarrow \infty$, o $\widehat{z} \rightarrow \infty$, o ambos casos a la vez, la densidad de energía se hace cero. Cabe resaltar que la densidad volumétrica tiene un comportamiento muy similar a la densidad superficial del disco, lo cual indica que la energía para el sistema conformado por un disco inmerso en un halo, está concentrada en la región central, y tiene a cero cuando nos alejamos de ésta.

Ahora al resolver las integrales (2.5) y (2.12) para disco y del halo respectivamente se obtienen las expresiones

$$M_{D_0} = \frac{8\pi a}{k} \ln \left(1 + \frac{A_0}{a} \right) \quad (2.19)$$

$$M_{H_0} = \frac{8\pi a}{k} \left[\ln \left(1 + \frac{A_0}{a} \right) + \frac{A_0}{a} \right], \quad (2.20)$$

que son soluciones para la masa total contenida en el disco (2.19) y en el halo (2.20). Es claro, al observar las expresiones para la masa del disco M_{D_0} y la masa del halo M_{H_0} , que para el modelo $n = 0$, existe una relación de tipo lineal entre ambas de la forma

$$M_{H_0} = M_{D_0} + \frac{8\pi A_0}{k}. \quad (2.21)$$

Retomando la discusión sobre la convergencia de la masa total del disco (2.5) y la masa del halo (3.12), se debe recordar que probar la convergencia sobre las masas del modelo $n = 0$ implica que todas las demás masas también van a converger. Como las masas del disco y del halo convergen para este primer modelo, entonces se puede asegurar que las demás masas también lo harán. Este resultado es importante pues se obtiene de la familia de discos inmersos en halos una cantidad (masa) que en principio es medible por la observación ya sea directa o indirecta.

2.3. MODELO $n = 1$

Para este caso, la expresión para Φ toma la forma

$$\Phi_1(R, z) = - \left(\frac{A_0}{r} + \frac{A_1}{r^2} \cos\theta \right). \quad (2.22)$$

Al calcular las primeras derivadas respecto a R y z , se obtiene

$$\Phi_{1,R}(R, z) = \frac{R}{r^3} \left(A_0 + \frac{3A_1}{r^2}(|z| + a) \right) \quad (2.23)$$

$$\Phi_{1,z}(R, z) = \frac{|z|,z}{r^3} \left[(|z| + a) \left(A_0 + \frac{3A_1}{r^2}(|z| + a) \right) - A_1 \right]. \quad (2.24)$$

Al realizar el procedimiento descrito para el modelo $n = 0$, podemos calcular la densidad superficial de energía del disco para el nuevo valor de n ; la cual viene descrita por la expresión

$$\hat{\sigma}(\hat{R}) = \frac{\left[\hat{A}_0(1 + \hat{R}^2) + \hat{A}_1(2 - \hat{R}^2) \right] \left[1 - \hat{R}^2 \right]^{(3-2k)/2k}}{\left[(1 + \hat{R}^2)^{3/2} + \hat{A}_0(1 + \hat{R}^2) + \hat{A}_1 \right]^{(1+k/k)}}, \quad (2.25)$$

donde $\hat{A}_0 = A_0/a$, $\hat{A}_1 = A_1/a^2$, $\hat{R} = R/a$, $\hat{z} = z/a$ y $\hat{\sigma}(\hat{R}, \hat{z}) = (ka/4)\sigma(\hat{R}, \hat{z})$.

Se calcula ahora la expresión para la densidad volumétrica del fluido que conforma el halo, reemplazando (2.23) y (2.24) en (1.80) para obtener

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\hat{R}, \hat{z}) = & \frac{\left[(|\hat{z}| + 1) \left(\hat{A}_0(\hat{R}^2 + (|\hat{z}| + 1)^2) + 3\hat{A}_1(|\hat{z}| + 1) \right) - \hat{A}_1(\hat{R}^2 + (|\hat{z}| + 1)^2) \right]^2}{\left(\left[(\hat{R}^2 + (|\hat{z}| + 1)^2)^{3/2} \right] + \left[(\hat{R}^2 + (|\hat{z}| + 1)^2)\hat{A}_0 + \hat{A}_1(|\hat{z}| + 1) \right] \right)^{2(k+1)/k}} \\ & + \frac{\hat{R}^2 \left[\hat{A}_0(\hat{R}^2 + (|\hat{z}| + 1)^2) + 3\hat{A}_1(|\hat{z}| + 1) \right]^2}{\left[\hat{R}^2 + (|\hat{z}| + 1)^2 \right]^{(2k-3)/k}}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para este modelo particular, el comportamiento de la densidad superficial de energía es similar al modelo anterior, es decir, la densidad decae con el radio tanto para el disco como para el halo, y muestra un máximo en $r = z = 0$ para diferentes valores de k , \hat{A}_0 y \hat{A}_1 (Figuras 2.2 y 2.3). Debido a que se exige un comportamiento físico adecuado, se establecen ciertas restricciones sobre los valores numéricos de las constantes, lo cual trae como resultado, evitar singularidades en las soluciones o densidades de energía negativas.

con $\hat{A}_0 = A_0/a$, $\hat{A}_1 = A_1/a^2$ y $\hat{\rho}(\hat{R}, \hat{z}) = \frac{k^2 a^2}{2k-1} \rho(\hat{R}, \hat{z})$.

En las

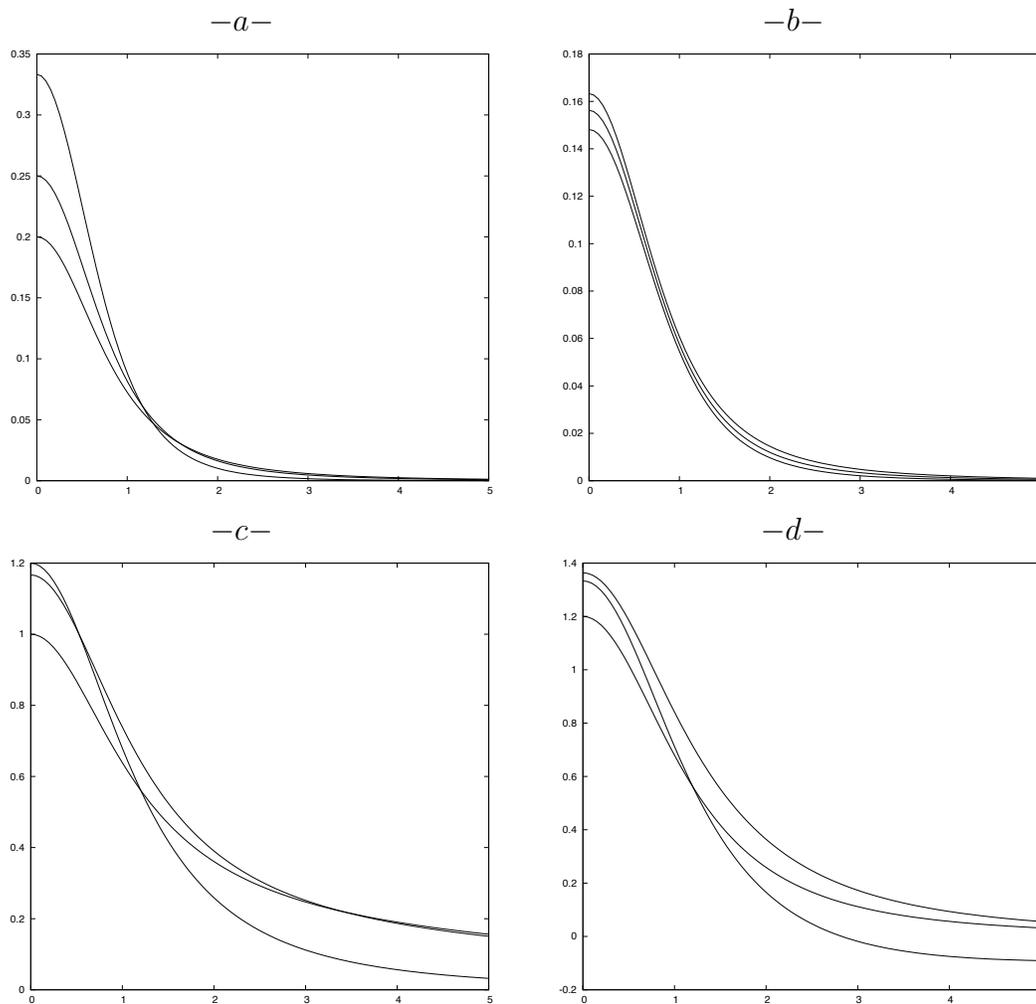


Figura 2.2: Modelo $n = 1$. Densidad superficial del disco $\hat{\sigma}$ en función de $\hat{R} = R/a$. En esta figura se muestran cuatro gráficos. El gráfico *-a-* muestra curvas para valores de $\hat{A}_0 = 1; 2; 3$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $\hat{A}_1 = 1$ $k = 1$; el gráfico *-b-* muestra curvas para valores de $\hat{A}_1 = 2; 3; 4$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $\hat{A}_0 = 1$ $k = 1$; el gráfico *-c-* muestra curvas para valores de $k = 2; 3; 4$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $\hat{A}_0 = 1$ y $\hat{A}_1 = 1$, y finalmente en el gráfico *-d-* se hacen variar todos los parámetros $(\hat{A}_0, \hat{A}_1, k) = (2, 2, 2); (5, 5, 5); (2, 3, 5)$ comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente.

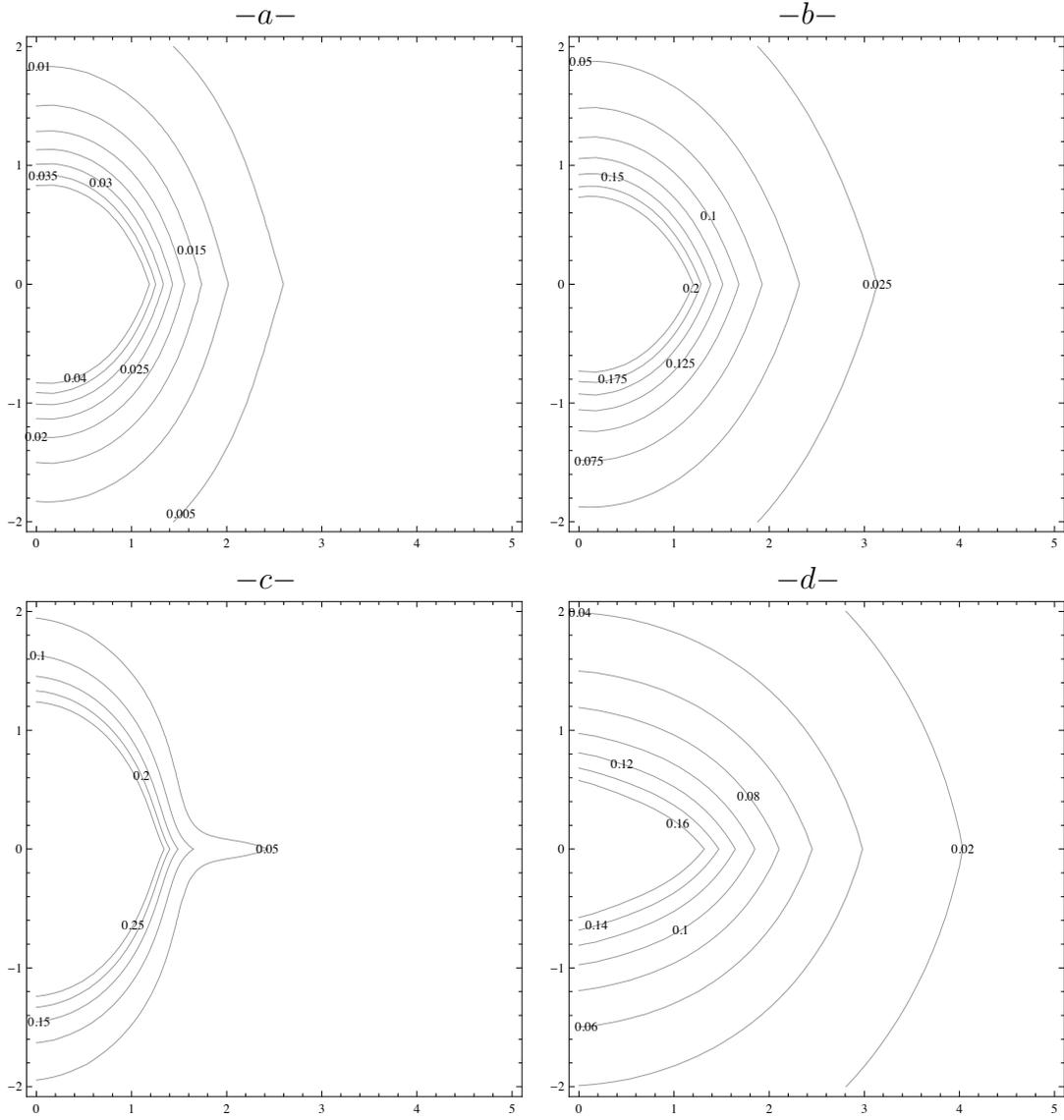


Figura 2.3: Modelo $n = 1$. Densidad volumétrica del halo $\hat{\rho}$ en función de $\hat{R} = R/a$. En esta figura se muestran cuatro gráficos *a*-, *b*-, *c*- y *d*- para valores de $(\hat{A}_0, \hat{A}_1, k) = (1, 1, 1)$; $(5, 2, 7)$; $(-1, 4, 8)$ y $(8, -1, 9)$ respectivamente.

2.4. MODELO $n = 2$

Para este caso, la expresión para Φ toma la forma

$$\Phi_2(R, z) = - \left(\frac{A_0}{r} + \frac{A_1}{r^2} \cos\theta + \frac{A_2}{r^3} (3\cos^2\theta - 1) \right). \quad (2.27)$$

El procedimiento a seguir es el mismo que se siguió con los modelos anteriores $n = 0$ y $n = 1$. Se calculan entonces las primeras derivadas de (2.27) respecto a R y z y se obtiene

$$\Phi_{2,R} = A_0 \frac{R}{r^3} + 3A_1 \frac{R(|z|+a)}{r^5} + \frac{5A_2 R [3(|z|+a)^2 - r^2]}{2r^7} + A_2 \frac{R}{r^5} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{2,z} = & A_0 \frac{|z|+a}{r^3} |z|_{,z} + 3A_1 \frac{R(|z|+a)^2}{r^5} |z|_{,z} - A_1 \frac{|z|_{,z}}{r^3} \\ & + \frac{5A_2 [3(|z|+a)^2 - r^2] (|z|+a)}{2r^7} |z|_{,z} - 3A_2 \frac{|z|+a}{r^5} |z|_{,z} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Al reemplazar (2.28) y (2.29) en (1.80) se obtiene la expresión para la densidad superficial del disco para $n = 2$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\hat{R}) = & \frac{2(\hat{A}_0 - \hat{A}_1)(\hat{R}^2 + 1)^2(\hat{R}^2 + 1)^{(5-2k)/k}}{\left[2(\hat{R}^2 + 1)^{5/2} + 2\hat{A}_0(\hat{R}^2 + 1)^2 + 2\hat{A}_1(\hat{R}^2 + 1) + \hat{A}_2(2 - \hat{R}^2) \right]^{(k+1)/k}} \\ & + \frac{6(\hat{A}_1 - \hat{A}_2)(\hat{R}^2 + 1)(\hat{R}^2 + 1)^{(5-2k)/k}}{\left[2(\hat{R}^2 + 1)^{5/2} + 2\hat{A}_0(\hat{R}^2 + 1)^2 + 2\hat{A}_1(\hat{R}^2 + 1) + \hat{A}_2(2 - \hat{R}^2) \right]^{(k+1)/k}} \\ & + \frac{5\hat{A}_2(2 - \hat{R}^2)(\hat{R}^2 + 1)^{(5-2k)/k}}{\left[2(\hat{R}^2 + 1)^{5/2} + 2\hat{A}_0(\hat{R}^2 + 1)^2 + 2\hat{A}_1(\hat{R}^2 + 1) + \hat{A}_2(2 - \hat{R}^2) \right]^{(k+1)/k}}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde $\hat{A}_0 = A_0/a$, $\hat{A}_1 = A_1/a^2$, $\hat{A}_2 = A_2/a^3$, $\hat{R} = R/a$ y $\hat{\sigma}(\hat{R}) = (ka/2)\sigma(\hat{R})$.

Finalmente para la densidad volumétrica del fluido que conforma el halo, y siguiendo el mismo procedimiento en los modelos anteriores $n = 0$ y $n = 1$ se obtiene la expresión:

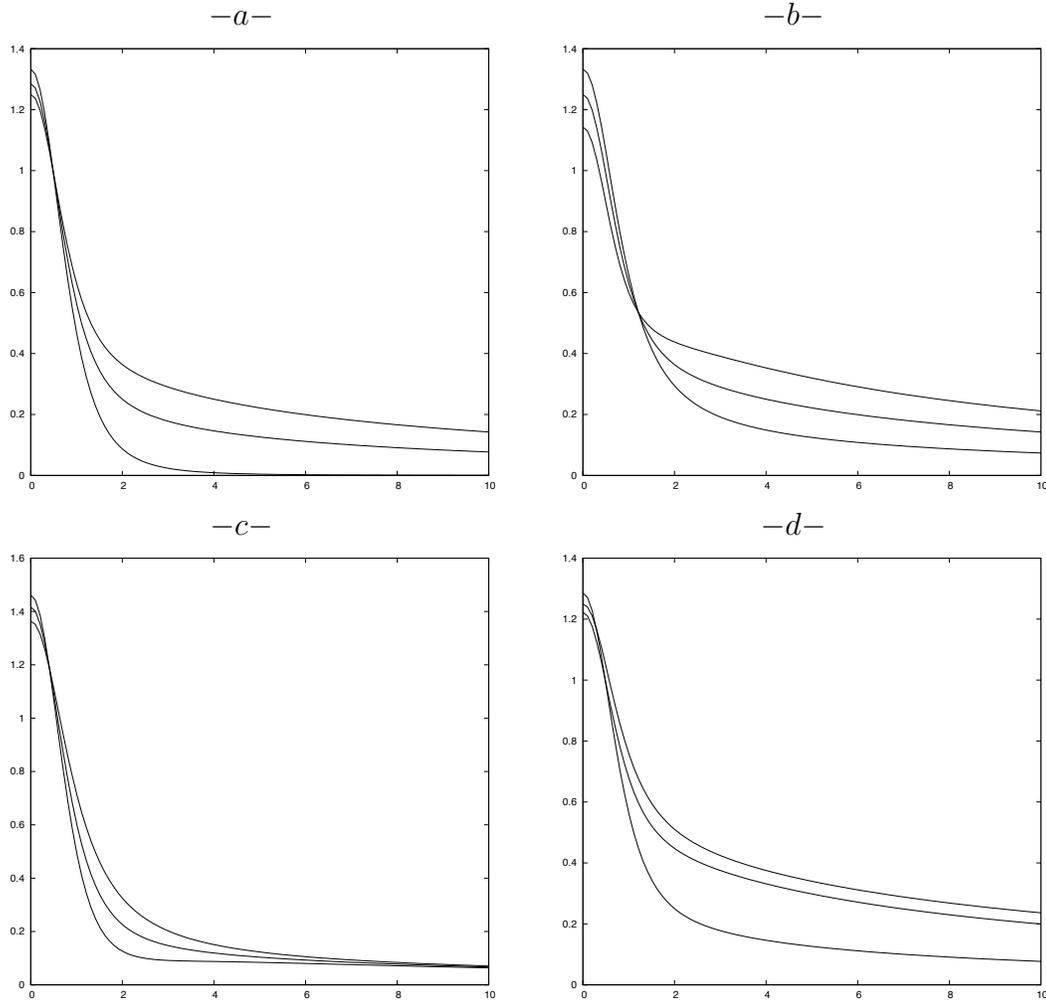


Figura 2.4: Modelo $n = 2$. Densidad superficial del disco $\hat{\sigma}$ en función de $\hat{R} = R/a$. En esta figura se muestran cuatro gráficos. El gráfico -a- muestra curvas para valores de $\hat{A}_0 = 2; 3; 4$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $\hat{A}_1 = 1$, $\hat{A}_2 = 1$ y $k = 1$; el gráfico -b- muestra curvas para valores de $\hat{A}_1 = 1; 2; 3$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $\hat{A}_0 = 1$, $\hat{A}_2 = 1$ y $k = 1$; el gráfico -c- muestra curvas para valores de $\hat{A}_2 = 1; 2; 3$, comenzando con la curva superior hacia abajo respectivamente, y dejando $\hat{A}_0 = 1$, $\hat{A}_1 = 1$ y $k = 1$, y finalmente en el gráfico -d- muestra curvas para valores de $k = 2; 3; 4$ dejando $\hat{A}_0 = 1$, $\hat{A}_1 = 1$ y $\hat{A}_2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}(\widehat{R}, \widehat{z}) = & \frac{\left[\widehat{A}_0 \widehat{R} \widehat{r}^4 + (3\widehat{A}_1 \widehat{Z} + \widehat{A}_2) \widehat{R} \widehat{r}^2 + \frac{5\widehat{A}_2}{2} (2\widehat{Z}^2 - \widehat{R}^2) \right]^2}{\left[\widehat{r}^5 + \widehat{A}_0 \widehat{r}^4 + \widehat{A}_1 \widehat{r}^2 \widehat{Z} + \frac{\widehat{A}_2}{2} (\widehat{Z}^2 - \widehat{R}^2) \right]^{2(k+1)/k}} \widehat{r}^{(10-4k)/k} \\
& + \frac{\left[(\widehat{A}_0 \widehat{Z} - \widehat{A}_1) \widehat{r}^4 + 3\widehat{Z} (\widehat{A}_1 \widehat{Z} - \widehat{A}_2) \widehat{r}^2 + \frac{5\widehat{A}_2}{2} (2\widehat{Z}^2 - \widehat{R}^2) \right]^2}{\left[\widehat{r}^5 + \widehat{A}_0 \widehat{r}^4 + \widehat{A}_1 \widehat{r}^2 \widehat{Z} + \frac{\widehat{A}_2}{2} (\widehat{Z}^2 - \widehat{R}^2) \right]^{2(k+1)/k}} \widehat{r}^{(10-4k)/k}, \quad (2.31)
\end{aligned}$$

En las figuras 2.4 y 2.5, correspondientes al modelo $n = 2$, así como en las anteriores figuras correspondientes a los modelos $n = 0$ y $n = 1$, se observa que al cambiar los valores para los parámetros \widehat{A}_0 , \widehat{A}_1 , \widehat{A}_2 y k , cambian los máximos de densidad de energía, que para todos los casos físicamente aceptables se presenta en $\widehat{R} = 0$. También cambian las tasas de decaimiento de $\widehat{\sigma}$ y de $\widehat{\rho}$, lo cual es de interés cuando se aplican estos modelos para la descripción de objetos astrofísicos particulares.

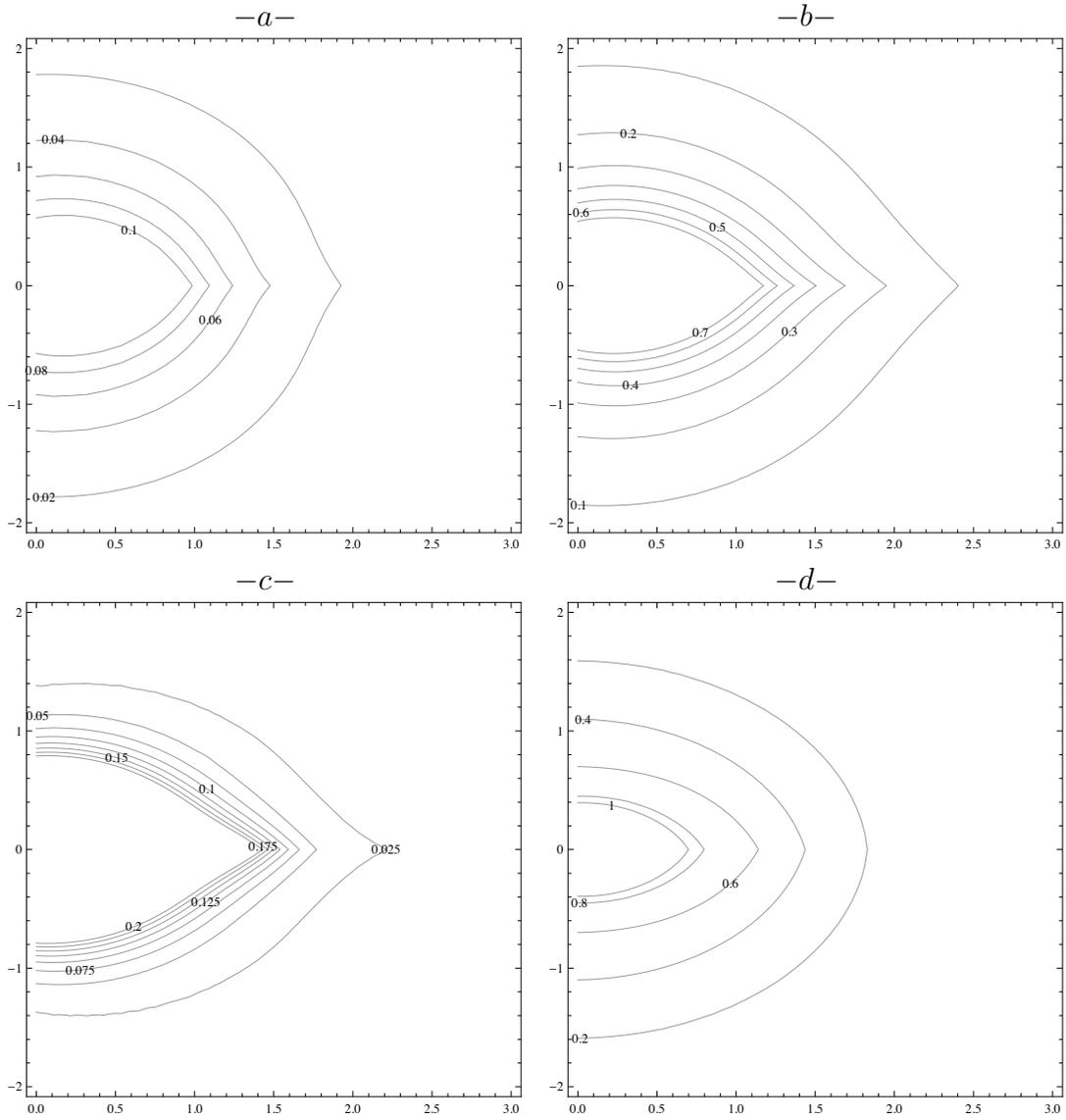


Figura 2.5: Modelo $n = 1$. Densidad volumétrica del halo $\hat{\rho}$ en función de $\hat{R} = R/a$. En esta figura se muestran cuatro gráficos *a*–, *b*–, *c*– y *d*– para valores de $(\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, k) = (1, 1, 1, 1); (2, 5, 4, 8); (3, -2, 5, 4)$ y $(3, -1, 3, 2)$ respectivamente.

Capítulo 3

Conclusiones

Se han obtenido una familia de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo estático axialmente simétrico a partir de la métrica conformestática. Estas soluciones describen las propiedades físicas para un sistema formado por un disco de polvo que está inmerso en un halo, para el cual se ha obtenido una ecuación de estado (1.72) que indica que el halo está constituido por un fluido que puede ser de radiación o de cualquier otro tipo.

Se obtuvieron soluciones discoidales que cumplen con condiciones de energía que garantizan fluidos físicamente bien comportados, mediante una comparación sencilla con el modelo newtoniano de Kuzmin-Toomre. Estas soluciones introducen de manera natural la existencia de un halo ya que para las regiones por encima y por debajo de la hipersuperficie Σ la solución de vacío no existe. Además, se garantizó que el espacio-tiempo fuera asintóticamente plano.

Las soluciones muestran para el halo, un fluido cuyos esfuerzos principales son diferentes de cero ($p_1 = p_2 = -p_3 \neq 0$) y están orientados en dirección de los ejes principales. Las soluciones obtenidas para el disco describen un fluido de polvo estático. Una característica importante de las soluciones es que de acuerdo a las expresiones analíticas de las densidades de energía y presiones, aunque los modelos obtenidos son infinitos, las propiedades físicas en el disco caen rápidamente a cero, mientras que en el halo caen rápidamente al valor que corresponde a la constante cosmológica Λ ; permitiendo de esta manera observar una región central bien definida en la cual hay una mayor concentración de masa.

Se analizó el comportamiento físico de dichas soluciones, las cuales reproducen en gran parte las distribuciones de energía y presiones de los fluidos que conforman una gran mayoría de objetos astrofísicos reales como son las galaxias, ya que en ellas, la

masa se distribuye de tal manera que en la región central tanto del disco galáctico como del halo, existe una mayor densidad de materia, la cual se hace cero a medida que nos alejamos de dicha región; sin embargo, los modelos obtenidos son infinitos; es decir, no introducen de manera natural un radio de corte en el cual la masa sea cero, como se observa en los objetos astrofísicos.

Como resultado de este trabajo se realizaron 3 ponencias orales en eventos nacionales especializados: *XXIV Congreso Nacional de Física, Bogotá (2011)*; *III Congreso Colombiano de Astronomía y Astrofísica, Bucaramanga (2012)*; *VI Escuela Colombiana de Astronomía, Bogotá (2014)*

Bibliografía

- [1] A. Chamorro, R. Gregory y J. M. Stewart. Static axisymmetric discs and gravitational collapse. *Proc. R. Soc. London A*413, 251, 1987.
- [2] A. H. Taub. Space-times with distribution valued curvature tensors. *J. Math. Phys.*, 21:1423, 1980.
- [3] A. Lichnerowicz. Sur les ondes de choc gravitationnelles. *C.R. Acad. Sci.*, 273:528, 1971.
- [4] A. Papapetrou y A. Hamouni. Couches simples de matière en relativité générale. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 9:179, 1968.
- [5] A. Toomre. On the distribution of matter within highly flattened galaxies. *Apj*, 138, 385, 1963.
- [6] B. H. Voorhees. Relativistic disks i. background models. *Phys. Rev. D*, 5:2413, 1972.
- [7] C. Klein y O. Richter. Exact relativistic gravitational field of a stationary counterrotating dust disk. *Phys. Rev. Lett.*, 83:2884, 1999. (1987)
- [8] C. Pichon y D. Lynden-Bell. New sources for kerr and other metrics: Rotating relativistic disc with pressure support. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 280:1007, 1996.
- [9] Christian Klein. Exact relativistic treatment of stationary counter rotating dust disks. 2. axis, disk and limiting cases. *Theor.Math.Phys.*127:767-778, *Theor.Mat.Fiz.*127:418- 431, 2001.
- [10] D. Lynden-Bell y S. Pineault. Relativistic disks i. counter-rotating disks. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 185:679,, 1978.
- [11] D. Lynden-Bell y S. Pineault. Relativistic disks ii. self-similar disks in rotation. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 185:695, 1978.

- [12] D. Vogt y P. S. Letelier. Exact general relativistic perfect fluid disks with halos. *Phys. Rev. D*, 68:084010, 2003.
- [13] D. Vogt y P. S. Letelier. Exact relativistic static charged perfect fluid disks. *Phys. Rev. D*, 70:064003, 2004.
- [14] E. Poisson. A relativists toolkit: The mathematics of black-hole mechanics. *Cambridge University Press*, 2004.
- [15] G. A. González y O. A. Espitia. Relativistic static thin disks: The counterrotating model. *Phys. Rev. D*, 68:104028, 2003.
- [16] G. A. González y P. S. Letelier. Relativistic static thin discs with radial stress support. *Class. Quantum Grav.*, 16:479, 1999.
- [17] G. G. Kuzmin. *AZh*, 33, 1956.
- [18] G. García-R y G. A. González. Charged perfect fluid disks as sources of taubnut-type spacetimes. *Phys. Rev. D*, 70:104005, 2004.
- [19] G. García-R y G. A. González. Electrovacuum static counterrotating relativistic dust disks. *Phys. Rev. D*, 69:124002, 2004.
- [20] G. Neugebauer y R. Meinel. General relativistic gravitational field of a rigidly rotating disk of dust: Solution in terms of ultraelliptic functions. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3046, 1995.
- [21] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers y E. Herlt. Exact solutions of einstein's field equations. *Cambridge University Press*, 2003.
- [22] J. Bičák, D. Lynden-Bell y C. Pichon. Relativistic discs and flat galaxy models. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 265:126, 1993.
- [23] J. Bičák, D. Lynden-Bell y J. Katz. Relativistic disk as sources of static vacuum spacetimes. *Phys. Rev. D*, 47:4334, 1993.
- [24] J. Bičák y T. Ledvinka. Relativistic disks as sources of the kerr metric. *Phys. Rev. Lett.*, 71, 1669, 1993.
- [25] J. Binney y S. Tremaine. Galactic dynamics. *Princeton Series in Astrophysics*, 2008.
- [26] J. P. S. Lemos. Self-similar relativistic discs with pressure. *Class. Quantum Grav.*, 6:1219, 1989.

- [27] M. Ujevic y P. S. Letelier. Stability of general relativistic geometric thin disks. *Phys. Rev. D*, 70:084015, 2004.
- [28] P. S. Letelier y S. R. Oliveira. Exact self-gravitating disks and rings: A solitonic approach. *J. Math. Phys.*, 28:165, 1987.
- [29] S. W. Hawking. The large scale structure of space-time. *Cambridge University Press*, 1973.
- [30] T. Ledvinka, J. Bičák y M. Zofka. Relativistic disks as sources of kerr-newman fields. In edited by T. Piran, editor, in *Proceeding of 8th Marcel Grossmann Meeting in General Relativity, Singapore, 1999*.
- [31] T. Morgan y L. Morgan. The gravitational field of a disk. *Phys. Rev.*, 183:1097, 1969.
- [32] Vera C. Rubin y W.Kent Ford. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *Astrophys.J.*159:379-403, 1970.
- [33] W. Israel. Singular hypresurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cimento*, 44B:1, 1966.
- [34] W. Israel y Erratum-ibid. Erratum-ibid. nuovo cim. 44b, 1, 1966. *Nuovo Cimento*, 44b:463, 1967.
- [35] W.A.Bonnor y A.Sackfield. The interpretation of some spheroidal metrics. *Comm. Math. Phys.*, 8:338, 1968.
- [36] Alexis Larrañaga and Alejandro Cárdenas, *Geometric Thermodynamics of Schwarzschild-AdS black hole with a Cosmological Constant as State Variable* arXiv:1108.2205 [gr-qc] (2011)
- [37] L. Herrera, A. Di Prisco and J. Ibáñez, *Role of electric charge and cosmological constant in structure scalars*, Physical Review D 84, 107501 (2011)
- [38] Farbod Kamiab and Niayesh Afshordi, *Neutron stars and the cosmological constant problem*, Physical Review D 84, 063011 (2011)
- [39] John D. Barrow and Douglas J. Shaw, *The value of the cosmological constant*, Gen Relativ Gravit (2011) 43:25552560 DOI 10.1007/s10714-011-1199-1
- [40] Zdeněk Stuchlík and Jan Schee, *Influence of the cosmological constant on the motion of Magellanic Clouds in the gravitational field of Milky Way*, JCAP 09 (2011) 018

- [41] T. M. Apostol. Calculus. Reverté S.A., *1965*.
- [42] E. Poisson. A relativist's toolkit: The mathematics of black-hole mechanics. Cambridge University Press, *2004*.
- [43] A. Liddle. An Introduction to Modern Cosmology. WILEY, *2003*.