Diseño didáctico en el aula virtual de GeoGebra para promover el desarrollo del pensamiento algebraico y la inclusión en grado séptimo

Cristian Fabián Ariza Pérez

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciado en Matemáticas

Director

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Programa Académico

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

A Dios quién fue mi guía, sustento y apoyo durante este largo y maravilloso proceso.
A mis padres Luz Dary Perez y Carlos Ariza, por ser un verdadero apoyo y las personas que me enseñaron a soñar.
A mi hermano Brayam Ariza y su esposa Tatiana Veloza, porque siempre han estado junto a mí.
A mis amigos Yazmin Jaimes y Jose Alirio, quienes fueron mis acompañantes desde el inicio de esta aventura.
A todos los que aportaron a la consecución de este éxito.

Agradecimientos

A toda mi familia, quienes me apoyaron y motivaron a la construcción de este logro.

A mi director de tesis el Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal, quién con su experiencia, paciencia y dedicación, siempre estuvo dispuesto a orientarme. ¡Infinitas gracias!

A la Dra. Sandra Evely Parada Rico, por invitarme a ser parte de este maravilloso proyecto y por las orientaciones y consejos que me brindó.

A la profesora Johana Mendoza y a todos los integrantes del proyecto, que de una u otra forma aportaron a mi proceso de formación.

A Sebastián Barajas, quién fue un excelente compañero y amigo, y contribuyó de muchas maneras a la construcción de este trabajo.

A mis evaluadores, Luis Pérez y Solange Roa por sus aportes valiosos y sus correcciones constructivas.

A mis compañeros Jaiver Rey, Carlos Plata, María Galvis, Daniela Rueda y Angélica Velasco, por su disposición y colaboración.

A todas las personas que contribuyeron de manera directa o indirectamente en este trabajo.

¡Infinitas Gracias!

Al Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia – MINCIENCIAS quien está financiando el programa de investigación "Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro". Código1115-852 70767, con el proyecto "Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores". Financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología". Código70783, con recursos del Patrimonio autónomo Fondo Nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas, contrato CT 183-2021.

Al rector Hernando, la docente Helena y al señor Jairo bibliotecario del colegio Cabecera del Llano de Piedecuesta, por su colaboración, disposición y apoyo en las sesiones de toma de datos que se llevaron a cabo en dicho establecimiento.

Tabla de Contenido

Pág.

Lista de Figuras

Pág.

Resumen

Título: Diseño didáctico en el Aula Virtual de GeoGebra para promover el desarrollo del pensamiento algebraico y la inclusión en grado séptimo*

Autor: Cristian Fabián Ariza Pérez**

Palabras Clave: GeoGebra, Inclusión, Pensamiento algebraico.

Descripción:

En el presente documento se presentan los resultados de un trabajo de investigación cuyo propósito era diseñar e implementar un diseño didáctico en el Aula Virtual de GeoGebra, para promover el desarrollo del pensamiento algebraico y favorecer la inclusión en estudiantes grado séptimo.

Para el diseño de las tareas se hizo una adecuación del DUA (Diseño Universal de Aprendizaje) a los procesos matemáticos de resolución de problemas, comunicación, representación, procedimientos y razonamiento y demostración, en donde se plantearon 4 tareas con diferentes niveles de profundidad, según las capacidades matemáticas y las necesidades educativas especiales. El trabajo se fundamenta teóricamente en las ideas expuestas acerca de los procesos de generalización de Kaput (1999) y Radford (2006), asimismo en las tareas de generalización de patrones expuestas por Vergel (2014). Finalmente, los resultados muestran como los diseños mediados por la tecnología ayudan a la generalización de patrones.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. Doctor en Didáctica de las Matemáticas.

Abstract

Title: Didactic design in the GeoGebra Virtual Classroom to promote the development of algebraic thinking and inclusion in seventh grade. [*]

Author: Cristian Fabián Ariza Pérez[**]

Key Words: GeoGebra, Inclusion, Algebraic thinking.

Description: This document presents the results of a research work whose purpose was to design and implement a didactic design in the GeoGebra Virtual Classroom, to promote the development of algebraic thinking and to favor inclusion in seventh grade students.

For the design of the tasks, the SAD (Universal Design for Learning) was adapted to the mathematical processes of problem solving, communication, representation, procedures and reasoning and demonstration, where 4 tasks were proposed with different levels of depth, according to mathematical abilities and special educational needs. The work is theoretically based on the ideas presented about generalization processes by Kaput (1999) and Radford (2006), as well as on the pattern generalization tasks presented by Vergel (2014). Finally, the results show how technology-mediated designs help pattern generalization.

[*] Degree Work

[**] Faculty of Sciences. School of Mathematics. Bachelor's Degree in Mathematics. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. PhD in Mathematics Didactics.

1. Introducción

En los últimos 30 años, diferentes organizaciones mundiales han promovido leyes y estándares que impulsan el desarrollo de una educación de calidad e inclusiva, como la Declaración universal de educación para todos de la UNESCO (1990), en la cual se exhorta a satisfacer las necesidades básicas de aprendizaje, a través de una visión ampliada que vaya más allá de los recursos actuales y los sistemas tradicionales, con el fin de disponer de las mejores prácticas en uso en las aulas, así mismo, recalca en su Artículo 3 que “La educación básica debe proporcionarse a todos los niños, jóvenes y adultos” (p.9).

En el ámbito nacional, la reglamentación sobre la educación inclusiva se fundamenta en: La Constitución Política de 1991, la Ley 115 de 1994, la Ley 361 de 1997, la Ley 762 de 2002, la Ley 1145 de 2007, la Ley 1346 de 2009, la Ley Estatutaria 1618 de 2013, el Decreto 366 de 2009 y el Decreto 1421 de 2017, donde este último decreto estipula que todos los estudiantes con discapacidad “tienen el derecho de acceder a la oferta institucional existente, cercana a su lugar de residencia, con estudiantes de su edad y recibir los apoyos y ajustes razonables pertinentes para que tengan un proceso educativo exitoso” (MEN,2017, p. 2).

Por otra parte, es importante recalcar que la educación inclusiva no solo se refiere a satisfacer las necesidades de los estudiantes con discapacidad, sino que dentro de su objetivo busca asistir a todos los estudiantes que componen el aula, debido a que cada uno presenta sus propias problemáticas iguales de importantes.

Asimismo, Arnaiz (2000) afirma que “La diversidad está presente en el ser humano desde el momento que cada persona tiene sus propias características evolutivas, distintos ritmos de aprendizaje, que en interacción con su contexto se traducen en distintos intereses académicosprofesionales" (p.1). Con base en lo anterior, es imperante que los profesores en matemáticas se capaciten en las áreas de matemáticas y pedagogía de la mejor manera posible, esto con el fin de que sean capaces de identificar las necesidades y capacidades de todos los alumnos presentes en el aula de clase, para poderles brindar el mejor apoyo posible durante sus procesos de aprendizaje.

En una misma línea, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Norteamérica (NCTM) ha propuesto diferentes objetivos que deberían cumplirse en una clase de matemáticas con el propósito de satisfacer las necesidades actuales de la educación, las cuales pretenden que el estudiante sea un sujeto activo en el aprendizaje y dueño de su propio conocimiento, para esto se invita a los profesores en matemáticas a desarrollar actividades donde los alumnos "se enfrentan frecuentemente con problemas interesantes y retadores, donde lleguen a apreciar las ideas matemáticas y a desarrollar su comprensión" (NCTM, 2000, p. 215). Del mismo modo, el NCTM (2000) resalta la importancia y la necesidad de que los alumnos desarrollen destrezas con el pensamiento algebraico, como ser capaces de "comprender patrones, relaciones y funciones" (p. 226).

Desde la perspectiva nacional, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas mencionan los cinco procesos a desarrollar en una clase de matemáticas, los cuales son "formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos" (MEN,2006, p. 51). Por otra parte, el MEN describe el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, como el "reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos" (MEN,2006, p. 68). Además, destaca que, es labor del profesor diseñar actividades para promover la obtención de cada uno de los procesos matemáticos anteriormente mencionados por parte de los estudiantes en la clase de matemáticas.

Las investigaciones en educación matemática de los últimos años sobre desarrollo del pensamiento algebraico en los niños se han centrado en el proceso de transición entre la educación primaria y secundaria, donde el estudiante pasa de la aritmética básica al álgebra. En esta última etapa, el desarrollo del pensamiento matemático es más compleja, debido a que el concepto de variable, las nuevas representaciones de las operaciones matemáticas, como la multiplicación y/o la división, y la concatenación entre números y letras son un cambio brusco, en comparación con las formas en que se venían desarrollando estos conceptos y operaciones en los grados anteriores (Kieran, 1989)

Asimismo, estos obstáculos en el aprendizaje del álgebra se agudizan en estudiantes con necesidades educativas especiales (NEE), debido a la poca preparación que tiene el personal docente en los colegios colombianos, como menciona Pineda (2018) en su investigación sobre la formación de profesores entorno a la diversidad, en donde revisó los planes de estudio de 159 licenciaturas de 25 universidades del país, encontrando que el 64% de ellas no contaba con materias relacionadas con la atención a la diversidad. Esta poca preparación en el personal docente colombiano ha producido que muchos estudiantes entren en un abandono académico y no puedan desarrollar sus capacidades matemáticas, puesto que los profesores no son capaces de brindarles las atenciones necesarias; como afirma Romero et al. (2020) “el problema radica en la deficiente atención escolar a los niños con discapacidad intelectual para desarrollar un pensamiento matemático con sus propias características y medios” (p.21).

En consecuencia, y en vista de promover una educación básica secundaria que permita a los estudiantes conseguir las habilidades necesarias en álgebra, los Estándares Básicos en

Competencia en Matemáticas establecen el estudio de patrones como uno de los principales promotores del desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos, debido a que permite el "reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos"(MEN, 2006, p. 67). Igualmente, Vergel (2015) expone que la generalización de patrones es una de las formas más importantes de introducción del álgebra en los estudiantes.

En vista de los retos actuales sobre la enseñanza del álgebra, donde se tiene como objetivo la comprensión profunda de los conceptos algebraicos como variable, según el NCTM (2000) es la capacidad del estudiante para entender los diferentes significados y usos de las variables mediante la representación de cantidades en problemas diversos, subyace una problemática que se agudizó en los último dos años debido a la pandemia del Covid-19, qué es la necesidad de implementar la tecnología en el diseño de las actividades, las cuales son vistas como "una poderosa herramienta para las representaciones matemáticas. Estas apoyan a la comunicación y al razonamiento, mejoran la comprensión de los conceptos, promueven la participación individual o colectiva" (Torres et al., 2010, p.153).

Con base en las anteriores problemáticas e ideas, concretamos la siguiente pregunta: ¿Cómo promover el desarrollo del pensamiento algebraico y la inclusión en estudiantes de grado séptimo mediante el uso de patrones y la tecnología?

2. Objetivos

2.1 Objetivo General

Realizar un diseño didáctico de patrones en el aula virtual de GeoGebra para promover el desarrollo del pensamiento algebraico y la inclusión en estudiantes de grado séptimo.

2.2 Objetivos Específicos

Elaborar un diseño didáctico de patrones geométricos y numéricos en el formato libro del aula virtual de GeoGebra.

Implementar el diseño didáctico con cuatro estudiantes del grado séptimo del colegio Cabecera del Llano de Piedecuesta.

Evaluar el planteamiento del diseño didáctico para favorecer el desarrollo de los procesos de generalización.

3. Antecedentes

De acuerdo con las debidas búsquedas teóricas, en esta sección se exponen algunos trabajos que están directa e indirectamente relacionados con la problemática de investigación. Esta sección está organizada en tres partes: i) Enseñanza del álgebra, ii) Enseñanza del álgebra en personas con NEE y iii) Enseñanza del álgebra mediante el uso de la tecnología.

3.1 Enseñanza del Álgebra

En los últimos años, la investigación sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en los niños ha sido un tema de interés y discusión entre los investigadores en educación matemática, debido a la necesidad de solventar las problemáticas que han impedido el desarrollo de una capacidad matemática adecuada en esta área. Por esto, autores como Kaput (2000) han planteado introducir el álgebra en los primeros años de escolaridad mediante una enseñanza basada en resolución de problemas y el análisis de situaciones de variación.

El enfoque de *Early Álgebra* es una alternativa que busca cambiar la enseñanza tradicional del álgebra en los colegios, descrita por Kaput (2000) como la "algebrización del currículo", la cual busca generar una visión ampliada del álgebra escolar, que englobe la aritmética generalizada, el análisis y la generalización de patrones, el estudio de relaciones funcionales, la resolución de problemas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y la manipulación del simbolismo algebraico.

Asimismo, las ideas planteadas en *Early Álgebra*, se encuentra en el trabajo realizado por Ramírez, Pineda y Roa (2013), el cual analizó el desarrollo de los procesos de generalización en niños de 9-12 años, mediante el uso de patrones geométricos, numéricos y verbales. Los resultados fueron examinados a luz de los procesos de generalización descritos por Kaput (1999), los cuales son:

1.Identificar similitudes en un conjunto de casos.

2. Extender el razonamiento propio más allá del rango en el cual se originó.

3. Derivar resultados más amplios de casos particulares.

Los resultados iniciales del trabajo indicaron que los estudiantes no están familiarizados con actividades que impliquen la generalización e identificación de la variación. Los estudiantes aún después de haber hecho las actividades propuestas tenían dificultades para generalizar los patrones vistos, ya sea de forma verbal o escrita.

Por otra parte, la investigación realizada por Rojas y Vergel (2013) y publicada en el artículo titulado "Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico" inicia con un análisis de los obstáculos didácticos que posee la enseñanza del álgebra en el colegio, donde se destaca la poca comprensión de conceptos como variable y las confusiones sobre las diferentes propiedades que aparecen cuando se concatenan letras con números y los paréntesis. Otro aspecto que resaltan los autores, es la concepción que predomina en los estudiantes y profesores, que asocian el álgebra con la introducción de letras en las operaciones, de modo que esto evidencia el desconocimiento de los elementos teóricos y metodológicos por parte de los profesores, asimismo, destacan la visión de Azarquiel (1993) , el cual reconoce que el pensamiento algebraico tiene lugar a lo largo de un proceso paralelo y continuo dentro del trabajo aritmético y geométrico que se inicia en los primeros años.

Además, Rojas y Vergel (2013) enfatizan sobre las ideas de Godino & Font (2000), y proponen que algunas características del pensamiento algebraico son fáciles de adquirir por los niños. Que los maestros deben estar en la capacidad de reconocerlas, como la naturalidad de los patrones en las matemáticas, la posibilidad de descifrarlos mediante diferentes caminos, entre otras. Asimismo, los autores hacen alusión a la caracterización del pensamiento algebraico realizado por Radford (2006), donde sobresalen tres elementos interrelacionados, que son el sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica de los objetos.

En la misma línea, se encuentra la investigación realizada por Vergel (2015) y publicada en su artículo titulado “Generalización de Patrones y Formas de Pensamiento Algebraico Temprano” donde relata las formas en que surge el pensamiento algebraico, a través de las relaciones entre el cuerpo, la percepción y el uso de símbolos en actividades que involucran la generalización de patrones, además, destaca la relación que establece Radford (2011) entre la indeterminancia y la analiticidad, la cual permite a los estudiantes tratar con cualquier figura de la secuencia sin tener en cuenta su tamaño. También, Radford (2010) describe los tipos de pensamiento algebraicos, los cuales son:

El pensamiento algebraico factual: El alumno expresa la indeterminancia a través de gestos, movimientos, ritmos o palabras, pero no alcanza un nivel de enunciación, debido a que se expresa con acciones concretas.

El pensamiento algebraico contextual: La indeterminancia se vuelve explícita y es expresada mediante términos clave, que se vuelven habituales en el discurso.

El pensamiento algebraico simbólico: Las frases clave son expresadas mediante los signos alfanuméricos del álgebra.

Por último, Radford (2008) expone que la generalización algebraica de patrones tiene como estructura: primero; capturar o identificar la característica común, segundo; la aplicación de esta comunalidad a todos los términos de la secuencia y tercero; utilizar la comunalidad para deducir una expresión que permita calcular cualquier término de la secuencia. No obstante, Radford y Vergel destacan la posibilidad de encontrar producciones matemáticas que no encajen en las características de generalización de patrones mencionadas.

3.2 Enseñanza del Álgebra en Personas con Necesidades Especiales

Aunque no existe una amplia variedad de investigaciones sobre la enseñanza del álgebra en personas con necesidades especiales, encontramos las siguientes que atienden problemáticas específicas de necesidades especiales y que contribuyen a tener un punto de partida en el diseño de la secuencia didáctica que se plantea.

El trabajo realizado por Romero et al. (2020), tuvo la finalidad de promover el pensamiento relacional por medio de patrones figurales lineales en alumnos con discapacidad intelectual (DI). Inicialmente, los autores describen la discapacidad intelectual como una condición de vida caracterizada por limitaciones en el funcionamiento intelectual y en las conductas sociales, no obstante, “las habilidades de adaptación pueden estar afectadas en mayor o menor grado dependiendo de la calidad e interacción que tenga la persona con su entorno familiar, escolar y en su comunidad” (Romero et al., 2020, p. 22).

López (2013) menciona que las condiciones que poseen los niños con DI no son un obstáculo definitivo en el aprendizaje del álgebra, debido a que los procesos cognitivos de memoria de trabajo, atención y percepción están fuertemente relacionados con el esquema visual, esto permite desarrollar esquemas compensatorios que ayudan a superar las dificultades en el desarrollo del pensamiento algebraico en este grupo de personas. Adicionalmente, los autores resaltan la utilización de material concreto en el diseño de las actividades, porque este tipo de material ayuda a generar relaciones, a crear estrategias y a promover operaciones más eficientes para simplificar los procesos que lleven a cabo los alumnos con DI, como se evidencia en la propuesta de Empson et al. (2011).

Finalmente, los autores recalcan la viabilidad de la implementación de actividades sobre la identificación de relaciones y patrones, aunque los estudiantes con estas condiciones en su mayoría no llegan a generalizar, sí logran crear nociones relevantes para la construcción de su pensamiento relacional. Respecto a los resultados del trabajo, Romero et al. (2020) encontraron que “los estudiantes necesitan hacer relación con algo de su vida cotidiana, desde cosas muy simples como las edades de sus familias para dar sentido a las actividades que realizan” (p.25).

En la misma perspectiva del trabajo anterior, se encuentra la investigación realizada por López et al. (2018), la cual determinó el desempeño de jóvenes con síndrome de Down (11 a 15 años) en la solución de un problema matemático de seriación, proporción y patrones geométricos. Para el diseño de las actividades, los autores contemplaron el enfoque del triángulo epistemológico de Steinbring (2005) y destacan la definición de Abbagnano (1974) sobre el medio ambiente como una relación que condiciona, limita y determina las posibilidades del individuo.

Los resultados de la investigación demuestran que los estudiantes con síndrome de Down logran desarrollar nociones sobre seriación, proporción y patrones geométricos. Los autores destacan que algunos de los participantes del estudio, lograron sin dificultad establecer el orden y la enésima posición de los objetos en las actividades de seriación, por otra parte, en las tareas sobre patrones geométricos, identificaron que tres estudiantes captaron la unidad que se repite en el patrón, las figuras geométricas que se trabajaron, y que lograron acomodar los objetos correctamente.

No obstante, hay discapacidades que no afectan directamente la capacidad cognitiva del alumno sino uno de sus sentidos, lo cual genera necesidades especiales en su proceso de aprendizaje, dado que cada persona posee capacidades y cualidades diferentes, es importante conocer cómo apoyar la comprensión y el desarrollo de ideas matemáticas en estudiantes con discapacidad visual o auditiva.

La investigación llevada a cabo por Velasco y Montes (2013) tenía como objetivo el diseño y la evaluación de una propuesta didáctica para la enseñanza del álgebra geométrica en estudiantes con discapacidad visual. De manera inicial, los autores encontraron que los estudiantes con esta condición poseían un nivel académico bajo, pero, argumentaban que esta problemática se debía a la poca atención brindada en el aula y que todas las actividades eran diseñadas para estudiantes videntes, asimismo, los investigadores enfatizan que el proceso de resignificación de un concepto en estudiantes de estas características, requiere de adaptaciones en el diseño de las actividades, donde se procure el uso de materiales que prioricen sentidos como el tacto o la audición, además, de emplear un lenguaje verbal incluyente, definido como la utilización de descripciones detalladas y ejemplificaciones que no estén determinadas por el sentido visual.

Como se ha mostrado, para lograr una educación inclusiva integral, se le debe proporcionar a cada estudiante los medios necesarios según su necesidad, para que pueda interactuar, comprobar y comunicar sus ideas, de esta manera, cada sujeto podrá desarrollarse en su ámbito académico y social.

3.3 Enseñanza del Álgebra mediante el uso de la tecnología

En los últimos años ha surgido la necesidad de implementar herramientas computacionales en la enseñanza de conceptos matemáticos, debido a que las investigaciones han mostrado que la utilización de ellas promueve una actividad matemática centrada en crear y comprobar conjeturas, además, de proporcionar una perspectiva dinámica de los problemas que involucran variación o movimiento (Torres et al., 2010).

De acuerdo con la premisa anterior, el trabajo de Torres et al. (2010) está enfocado en resaltar los beneficios que tiene la implementación de las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC 's) en la enseñanza del álgebra escolar. Según el autor, el uso de las TIC's en la enseñanza del álgebra ayuda a la reducción de las operaciones numéricas y a la creación de un medio integrador, en el que se puede transitar entre distintas representaciones de los objetos en cuestión, permitiendo la manipulación, la consolidación y la construcción de nuevos conocimientos en los alumnos.

La implementación de la tecnología en la enseñanza del álgebra no solo ayuda al desarrollo y la consolidación de conceptos matemáticos, también promueve el uso del pensamiento computacional, descrito por Pérez y Roig-Vila (2015) como una relación entre el pensamiento matemático, lógico y crítico, en el que participan habilidades como la identificación de patrones, la abstracción y modelación, con el objetivo de proporcionar soluciones a situaciones de la vida real mediante el uso de herramientas informáticas.

La investigación realizada por Alcina y Acosta (2018), muestra cómo el pensamiento algebraico está íntimamente relacionado con el pensamiento computacional. Inicialmente, establecen cinco vínculos entre ambos constructos, como son la utilización de una metodología enfocada en la resolución de problemas, fomentar el razonamiento y la prueba de conjeturas, la comunicación de las ideas a través de diferentes medios, la búsqueda de generalizar soluciones para aplicar en distintos problemas, entre otras.

El trabajo de Alcina y Acosta (2018) también se enfocó en el diseño y la implementación de una propuesta didáctica para promover la iniciación del álgebra infantil mediante el uso de patrones y robots programables. Los resultados de las actividades demuestran que el uso de la tecnología ayudó a promover el interés de los estudiantes en la realización de estas, además, de promover la utilización de un lenguaje algebraico y computacional.

La investigación realizada por Cortés, Hitt y Saboya (2015) tenía como objetivo la articulación entre la aritmética y el álgebra, a través de actividades enfocadas en los números triangulares y la utilización de la tecnología en un aula mexicana, trabajo fuertemente ligado al realizado por Hitt, Saboya y Cortés (2013), donde se trabajó con la misma temática, pero, con alumnos canadienses.

Los investigadores utilizaron la metodología ACODESA para el diseño de las sesiones, la cual plantea estructurar las clases en cuatro secciones, la primera, enfocada en un trabajo individual por parte del estudiante, la segunda, trabajo en equipo, la tercera, debate grupal y la cuarta, auto-reflexión. También, se diseñaron cuatro tareas específicas a desarrollar, se inicia con una explicación de qué son los números triangulares, con ejemplos numéricos y geométricos, luego, se les solicita a los estudiantes calcular algunos números triangulares usando lápiz y papel, para promover los procesos de visualización matemática y generar la construcción de reglas aritmético-geométricas; para más tarde, calcular números triangulares usando Excel y el programa Poly (Applet permite calcular y representar el número triangular deseado) y finalmente, encontrar una expresión algebraica para calcular cualquier número triangular.

Los resultados del estudio mostraron que, la realización de la primera y segunda tarea ayudó a generar representaciones funcionales en los estudiantes (ideas o hipótesis que el alumno utiliza al intentar resolver un problema), debido a que, se vieron en la necesidad de buscar relaciones visuales, geométricas y numéricas para lograr la construcción de los números triangulares. Estas tareas iniciales, son el acercamiento natural hacia el álgebra que pretendía realizar la investigación, porque "un camino natural hacia el pensamiento algebraico requiere de actividades aritmético-geométricas que permitan los procesos de visualización" (Cortez et al., 2015, p.44).

En contraste, la tercera tarea no tuvo la relevancia esperada, la tecnología jugó un papel secundario, porque los estudiantes siempre priorizaron comprobar sus teorías a través de realizar dibujos en papel. Sin embargo, la cuarta tarea se consiguió realizar de manera exitosa a través del debate grupal, al compartir ideas e hipótesis los estudiantes lograron la construcción de una fórmula algebraica para calcular cualquier término.

En conclusión, el acercamiento natural desde la aritmética hacia el álgebra permitió que los estudiantes lograran una mayor comprensión de los conceptos algebraicos, además, de disminuir los problemas que generalmente se presentan en la transición entre estas dos áreas. Las actividades también promovieron los procesos de visualización de Zimmermann y Cunningham (1991), debido a que se usaron diferentes tipos de representaciones en los números triangulares, lo cual permitió la construcción de una estructura cognitiva matemática, entendida como la construcción de conjeturas y contraejemplos.

4. Aspectos Teóricos y Conceptuales

El proyecto de investigación se comprende de una serie de conceptos teóricos relevantes para contextualizar el diseño de este trabajo. Así, se definen a continuación algunos elementos que servirán de sustento teórico para el objetivo del trabajo.

4.1 Aspectos Conceptuales

Este apartado expone los elementos conceptuales referentes al significado del pensamiento algebraico, los procesos de generalización, la definición de patrón y los tipos de patrones que se utilizarán en esta investigación.

4.1.1 Pensamiento Algebraico y Variacional

La caracterización de pensamiento variacional y algebraico a utilizar en este trabajo será entendida bajo las siguientes ideas.

El MEN (2006), cual define el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos como el "reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos" (p.66).

Por otra parte, el trabajo de Vergel (2015) establece bajo la perspectiva teórica de la objetivación, que el pensamiento algebraico es considerado como "un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente" (p. 196). Según

Radford (citado por Vergel 2015) una caracterización de este pensamiento está constituida por tres componentes:

> (a) El sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro) como aquello opuesto a la determinancia numérica; (b) la analiticidad, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos; y (c) la designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos. Consideramos estos tres componentes analíticas o vectores estrechamente relacionados (p. 196).

4.1.2 Definición y Tipos de Patrones

Dentro de este trabajo investigativo el término “patrón” toma un papel principal, donde se entenderá como “lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse” (Castro et al., 2010, p. 57). Otra visión acorde a esta investigación es la que establece Zapatera (2018), que define a los patrones como una sucesión de elementos que se construyen a partir de una determinada regla.

Siguiendo las ideas de Zapatera (2018), los patrones se pueden separar en dos grupos, de repetición o de recurrencia. En los *patrones de repetición* los elementos se presentan de forma periódica y características como el tamaño, color o posición son elementos importantes de la regla que determina el patrón; en cambio, en los *patrones de recurrencia* los términos de la sucesión aumentan o disminuyen de forma progresiva según la regla que lo determina y cada término se expresa en función de los anteriores.

Este último tipo de patrones son los que se utilizarán en esta investigación, los cuales están divididos en dos categorías: *patrones numéricos*, son listas de números que “siguen una cierta secuencia. En ellos se alcanza a determinar de cuánto en cuánto está cambiando, pero no se hace evidente lo variable y lo invariante” (Pulgarín, 2015, p.33). Los *patrones geométricos*, son “una representación gráfica de los términos de una secuencia creciente de números naturales, representación formada por objetos cuya cantidad corresponde al valor del término de la secuencia representado” (Arbona et al., 2017).

4.1.3 Procesos de Generalización

Según Kaput (1999), el proceso de generalizar dentro de la actividad matemática requiere del desarrollo de tres actividades básicas:

1. Identificar similitudes en un conjunto de casos.
2. Extender el razonamiento propio más allá del rango en el cual se originó.
3. Derivar resultados más amplios de casos particulares.

Gracias a estas tres actividades mencionadas, en este trabajo el proceso de generalizar en los estudiantes será entendido como todas las acciones que el estudiante realiza para intentar modelizar una comunalidad, ya sea de forma verbal o escrita, con el fin de encontrar un método eficaz que le permita deducir cualquier término del patrón en cuestión.

Similarmente, Radford (2006) establece que la generalización algebraica de un patrón se fundamenta “en la observación de un punto común local que luego se generaliza a todos los términos de la secuencia y que sirve de garantía para construir expresiones de elementos de la secuencia que permanecen más allá del campo perceptivo” (p.5). Además, este autor propone tres componentes que acompañan los procesos de generalización; Identificar un punto común entre los términos particulares, Crear un concepto común para todos los términos de la secuencia y establecer una regla que permita calcular cualquier término.

Con base a lo anterior, la identificación de un patrón involucra las tres componentes del pensamiento algebraico, debido a que según Radford (2011) la indeterminancia y la analiticidad están ligadas a la regla que usa el estudiante para tratar con cualquier figura del patrón y la forma en la que expresa la regla ya sea de manera oral u escrita alude a la componente de la expresión simbólica. La forma en que el estudiante demuestra cómo interactúa con ellas permitirá clasificarlo en uno de los siguientes tipos de pensamiento propuestos por Radford (2010):

- **Factual:** La indeterminancia no alcanza el nivel de enunciación por parte del estudiante, por lo que usa gestos, movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras, para expresarla.
- **Contextual:** La indeterminancia alcanza el nivel de enunciación y es explícita por parte del estudiante, los gestos y las palabras son sustituidos por frases "clave" como "la fila de arriba por 2 y al resultado le resto 1".
- **Algebraico simbólico:** Las frases clave utilizadas en el pensamiento anterior, son expresadas a través de símbolos alfanuméricos. Por ejemplo: n (n+1).

Los procesos establecidos por Kaput (1999) y Radford (2006) y (2010) serán una guía importante para establecer los objetivos básicos en cada tarea sobre generalización de patrones en la presente investigación; además, proveerá un marco de referencia para analizar los resultados que se obtengan al momento de aplicar los diseños.

4.2 Necesidades Especiales (DUA Y PIAR)

De acuerdo con el objetivo del presente trabajo es importante definir lo que se entiende por educación inclusiva, según el decreto 1421 del 2017, establece que:

> Es un proceso permanente que reconoce, valora y responde de manera pertinente a la diversidad de características, intereses, posibilidades y expectativas de los niñas, niños, adolescentes, jóvenes y adultos, cuyo objetivo es promover su desarrollo, aprendizaje y

> participación, con pares de su misma edad, en un ambiente de aprendizaje común, sin discriminación o exclusión alguna, y que garantiza, en el marco de los derechos humanos, los apoyos y los ajustes razonables requeridos en su proceso educativo, a través de prácticas, políticas y culturas que eliminan las barreras existentes en el entorno educativo. (MEN, 2017, p.5)

De igual forma, este decreto también proporciona una definición sobre lo que significa ser un estudiante con discapacidad, que es:

> Toda persona vinculada al sistema educativo en constante desarrollo y transformación, con limitaciones en los aspectos físico, mental, intelectual o sensorial que, al interactuar con diversas barreras (actitudinales, derivadas de falsas creencias, por desconocimiento, institucionales, de infraestructura, entre otras), pueden impedir su aprendizaje y participación plena y efectiva en la sociedad, atendiendo a los principios de equidad de oportunidades e igualdad de condiciones. (MEN, 2017, p.5)

Adicionalmente, este trabajo tiene como objetivo proporcionar una serie de diseños didácticos que posibiliten el aprendizaje en personas con necesidades especiales, se tendrá en cuenta para el diseño de actividades, materiales y tareas, las orientaciones expuestas en el decreto 1421 de 2017, el cual estipula el uso de dos elementos teóricos, el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) y el Plan Individual de Ajustes Razonables (PIAR).

En primer lugar, el DUA es definido por el MEN (2017) como “una propuesta pedagógica que facilita un diseño curricular en el que tengan cabida todos los estudiantes, a través de objetivos, métodos, materiales, apoyos y evaluaciones formulados partiendo de sus capacidades y realidades” (p.5). Asimismo, el DUA establece los siguientes tres principios fundamentales:

- Principio I, proporcionar múltiples formas de representación de los objetos matemáticos (el qué del aprendizaje). Establece como premisa fundamental que los estudiantes difieren en la forma que comprenden y perciben la información, por lo que es necesario diseñar materiales en el que los conceptos se presentan de múltiples formas.
- Principio II, promover múltiples formas de acción y expresión (el cómo del aprendizaje). Así como cada estudiante percibe y comprende la información de una manera diferente, también expresa sus ideas de diferentes formas, por lo que es necesario crear espacios en los que el alumno pueda compartir sus pensamientos según sus capacidades.
- Principio III, proporcionar múltiples formas de implicación en las tareas (el porqué del aprendizaje). Como cada estudiante posee una personalidad y capacidades de socializar diferentes, es necesario que el profesor identifique las mejores estrategias que permitan involucrar a cada estudiante en las actividades de la clase.

Por otra parte, el MEN (2017) establece el PIAR como una herramienta al servicio de los docentes, la cual busca garantizar los procesos de enseñanza y aprendizaje, a través de las valoraciones pedagógicas y sociales que realice cada maestro en el aula, asimismo, permite que el docente promueva los ajustes razonables necesarios al currículo o a la infraestructura con el fin de atender las necesidades que presenten los estudiantes.

Teniendo en cuenta la realidad de las instituciones de educación básica y media de Colombia; en este trabajo se intenta atender a la inclusión y a las necesidades especiales, dado que no es raro que en un aula, el profesor de matemáticas tenga que atender niños y jóvenes con limitaciones en los aspectos físico, mental, intelectual o sensorial, y de manera general, atender la diversidad de características, intereses, posibilidades y expectativas de los niños y jóvenes, con el objetivo de promover su desarrollo, aprendizaje y participación con pares de su misma edad, en un ambiente de aprendizaje común, sin discriminación o exclusión alguna. También es necesario aclarar que las actividades propuestas no abarcan todas las limitaciones físicas, mentales, intelectuales o sensoriales, pero éstas pueden ser adaptadas a otro tipo de material didáctico o a otra tecnología diferente a la tecnología digital y virtual que nos ofrece el Aula Virtual de GeoGebra.

4.3 Aspectos Didácticos

Los diseños didácticos de este trabajo buscarán satisfacer las siguientes consideraciones didácticas expuestas en investigaciones anteriores sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en personas con NEE y uso de tecnologías virtuales.

El NCTM (2000) propone la utilización de patrones lineales como eje central de las actividades que deben desarrollar los estudiantes de este grado, así mismo, los estudiantes deberían resolver problemas en los que se utilicen diferentes tipos de representaciones (tablas, gráficas, representaciones verbales, entre otras) para examinar patrones de cambio.

Por otra parte, el NCTM (2000) establece como elemento importante que apoya a los procesos de razonamiento y demostración en los estudiantes, la apertura de espacios dentro de las actividades para la discusión de hipótesis e ideas, en este espacio, el profesor tendría un papel de mediador, el cual busca que los estudiantes utilicen conceptos matemáticos para argumentar, comprobar o refutar sus razonamientos.

En el mismo enfoque se encuentra el trabajo de Fiallo y Parada (2018), debido a que establecen una metodología de resolución de problemas como el contexto en el que se debe desarrollar la clase de matemáticas, en que el profesor tiene como tarea ayudar a la comprensión profunda de las ideas y procesos matemáticos que se han desarrollado en la clase. Además, resaltan el uso de la tecnología como una herramienta que favorece la resolución de problemas "dado que genera un espacio de indagación en donde los estudiantes pueden explorar, analizar, generalizar, conjeturar, validar y comprobar sus ideas" (Fiallo y Parada, 2018, p.57).

El trabajo de Pulido (2021) resalta el uso de un diseño didáctico compuesto por actividades referentes a la generalización de patrones recurrentes, como un mecanismo que ayuda a promover habilidades del pensamiento algebraico en los estudiantes. Por otro lado, el investigador destaca que el uso de la plataforma digital Google Classroom como un escenario propicio para llevar a cabo actividades, porque es una plataforma de fácil acceso y de manipulación, permite una interacción asincrónica o sincrónica entre el docente y el estudiante, proporciona múltiples opciones para presentar la actividad (videos, guías, textos, entre otros) y de subir las respuestas y trabajos (JPEG, Mp4, Pdf, Docx, entre otros).

Finalmente, la investigación realizada por Empson et al. (2011), establece que el uso de material concreto promueve el desarrollo del pensamiento relacional en los estudiantes con NEE, debido a que ayuda a crear relaciones, estrategias y a generar operaciones más eficientes para simplificar sus procesos.

5. Metodología de la Investigación

Esta sección expone la metodología a usar en este trabajo, la cual estará en concordancia con las ideas expuestas por Díaz-Barriga, et al (1990), quienes definen al diseño curricular como la organización y estructuración sistemática del currículo. La metodología de esta investigación se compone de cuatro fases: Revisión de los documentos curriculares y las orientaciones pedagógicas; Diseño de la malla curricular; Planteamiento del diseño didáctico y finalmente, Implementación y valoración del diseño didáctico.

5.1 Estructura de los Diseños Didácticos

Esta propuesta de investigación se incrusta en el marco del desarrollo del proyecto de investigación 70783 "Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores", financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología e Innovación de Colombia y la Vicerrectoría Investigación y Extensión de la UIS, y liderado por los profesores Sandra Evely Parada Rico y Jorge Enrique Fiallo Leal de la Escuela de Matemáticas de la UIS.

El proyecto tiene como objetivo caracterizar los aprendizajes construidos por una comunidad de práctica de educadores matemáticos que reflexiona sobre la inclusión en clase de matemáticas, donde a través de una serie de diseños didácticos (herramientas didácticas), divididos en los siguientes cuatro niveles de profundidad, se haga uso de varias tecnologías que permitan la atención a los estudiantes con Necesidades Educativas Especiales (NEE).

- Nivel de profundidad 1: Las actividades están dirigidas a estudiantes con mayores dificultades, a nivel físico, intelectual o psicosocial. Estos estudiantes son muy visuales y su principal medio de comunicación es la oralidad, por lo que las actividades deben utilizar recursos visuales o concretos, además, de contar con un apoyo constante por parte del profesor y la familia.
- Nivel de profundidad 2: Las actividades están dirigidas a estudiantes con dificultades moderadas en las categorías mencionadas en el nivel anterior. Por otra parte, este grupo de estudiantes posee mejores habilidades de comunicación escrita y oral que el nivel anterior, sin embargo, las actividades deberán tener un enfoque similar en el uso de materiales y la atención prestada por el profesor.

- Nivel de profundidad 3: Las actividades están dirigidas a estudiantes con dificultades leves, por lo que se puede utilizar un lenguaje matemático más preciso y una menor guía y supervisión por parte del profesor.
- Nivel de profundidad 4: Las actividades están dirigidas a estudiantes que poseen capacidades excepcionales en matemáticas, por lo que es necesario diseñar actividades que promuevan la curiosidad, la demostración y la formulación de nuevas preguntas e ideas.

Además, cada uno de esos diseños está compuesto por cuatro momentos que servirán a los estudiantes para conceptualizar el objeto matemático de estudio, presentados a continuación:

- Momento 1: Es el inicio de la clase, aquí se desarrollan las actividades que permitirán introducir el objeto de estudio. Dentro de este momento se recomienda utilizar materiales lúdicos, notas históricas o dinámicas para la valoración y conexión con los presaberes.
- Momento 2: Es el espacio donde se posibilita la matematización del objeto de estudio. El profesor tendrá un papel de mediador donde promoverá la construcción de saberes por parte del estudiante.
- Momento 3: Es la parte de la clase donde los estudiantes ponen en práctica y afianzan los saberes construidos hasta el momento. Las actividades están enfocadas a la ejercitación, aplicación, problematización del objeto de estudio.
- Momento 4: Es el momento para valorar el desempeño de los estudiantes a través de tareas retadoras. Se proponen actividades retadoras, dinámicas, problemas que

permitan valorar los aprendizajes y determinar el proceso a seguir con cada estudiante.

5.2 Fase I: Revisión de los Documentos Curriculares y las Orientaciones Pedagógicas

Para esta primera fase se realizó una revisión de dos tipos documentos, los curriculares planteados por el MEN, como son los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas y los que poseen orientaciones sobre la atención a las NEE como el DUA y el PIAR.

5.3 Fase II: Diseño de la Malla Curricular

La malla curricular es diseñada para guiar al profesor con los propósitos y descriptores que se espera que los estudiantes logren en el transcurso de la actividad. Así mismo, la malla muestra la pregunta problematizadora que orientará la actividad para cada uno de los niveles de profundidad, anteriormente descritos.

Cada nivel tendrá un propósito que está relacionado con un componente específico del pensamiento del pensamiento matemático (MEN, 1998); los descriptores se encontrarán asociados a los procesos matemáticos definidos en el MEN (1998). La forma en cómo se presentan dichos propósitos y descriptores responderán a una coherencia horizontal progresiva, partiendo desde lo más básico en el primer nivel de profundidad hasta actividades que complejizan el razonamiento de los estudiantes en el último nivel de profundidad.

Figura 1

Malla curricular

ESTRUCTURA PARA LA INCLUSIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS PARA EL CONJUNTO DE GRADOS DE SEXTO Y SEPTIMO GRADO

Clases	Nivel profundidad 1		Nivel profundidad 2		Nivel profundidad 3		Nivel profundidad 4	
Pregunta Problematizadora	Propósito	Descriptores	Propósito	Descriptores	Propósito	Descriptores	Propósito	Descriptores

5.4 Fase III: Planteamiento del Diseño Didáctico

En esta fase se espera determinar el diseño didáctico alrededor de una pregunta problematizadora que involucra patrones para el desarrollo del pensamiento algebraico, propósitos y descriptores que se establezcan en la malla curricular, además, este diseño tendrá la estructura que se menciona en el apartado 5.1. de esta sección, con orientaciones para los profesores que decidan usar esta secuencia en estudiantes con necesidades especiales.

5.5 Fase IV: Implementación y Valoración del Diseño Didáctico.

En esta fase se espera concretar la implementación del diseño didáctico en un aula de sé grado de un colegio de la ciudad de Bucaramanga, luego, se procederá a realizar un análisis de los resultados obtenidos donde se tendrá en cuenta el objetivo trazado al inicio de este trabajo y los documentos orientadores como el DUA y el PIAR. Como resultado de esta fase, se espera contar con un diseño didáctico experimentado, evaluado y ajustado, que sirva de guía a los profesores para trabajar en el Aula Virtual de GeoGebra con estudiantes con necesidades especiales.

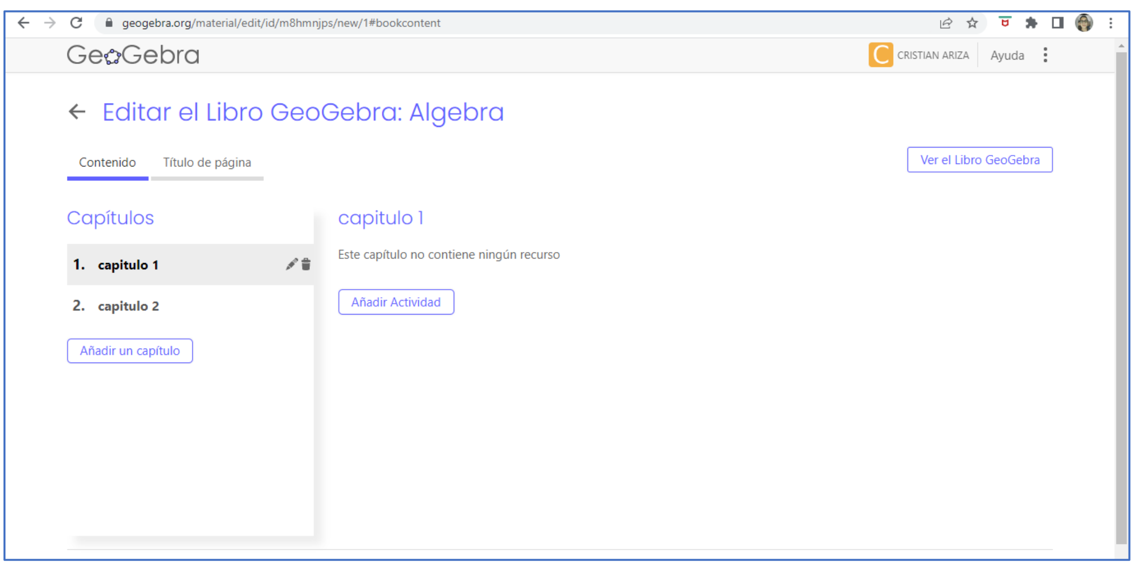
5.6 Descripción del Aula Virtual de GeoGebra

GeoGebra es un software dinámico de libre acceso que permite el diseño y estudio de actividades en múltiples áreas de las matemáticas (álgebra, geometría, probabilidad, cálculo, entre otras), además, ofrece una plataforma virtual en la que se pueden estructurar lecciones en dos formatos (libro, actividad) y compartirlas a través de GeoGebra Classroom, donde se puede monitorear el progreso de los estudiantes en tiempo real.

El formato libro de GeoGebra es una colección de materiales (actividades, aplicaciones, Applets) y hojas de trabajo, además de ser un medio ágil para crear libros interactivos para aprender y enseñar a todo nivel educativo, con textos en línea ilustrados y dinámicos. El libro se puede estructurar mediante capítulos, como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Libro en GeoGebra



En cada capítulo se puede introducir una serie de actividades que representarán una sección del capítulo.

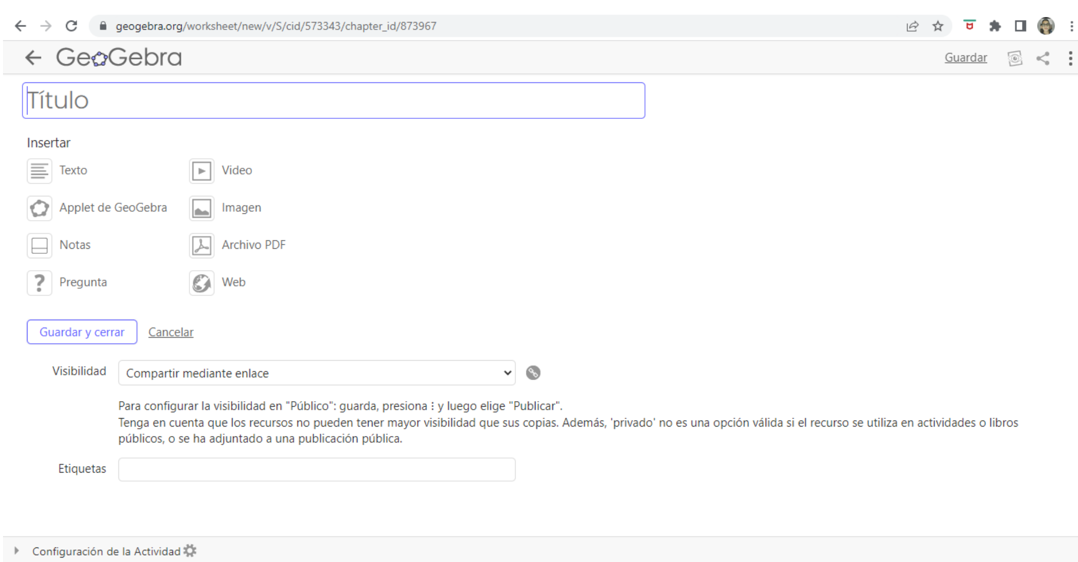
Figura 3

Ejemplo de un libro en Aula Virtual de GeoGebra

Para el diseño de las actividades se puede recurrir a material ya existente en la plataforma o se puede crear según las necesidades y objetivos que tenga una persona. Este formato ofrece la posibilidad de introducir videos, imágenes, Applets, sonidos, entre otros (ver Figura 4).

Figura 4

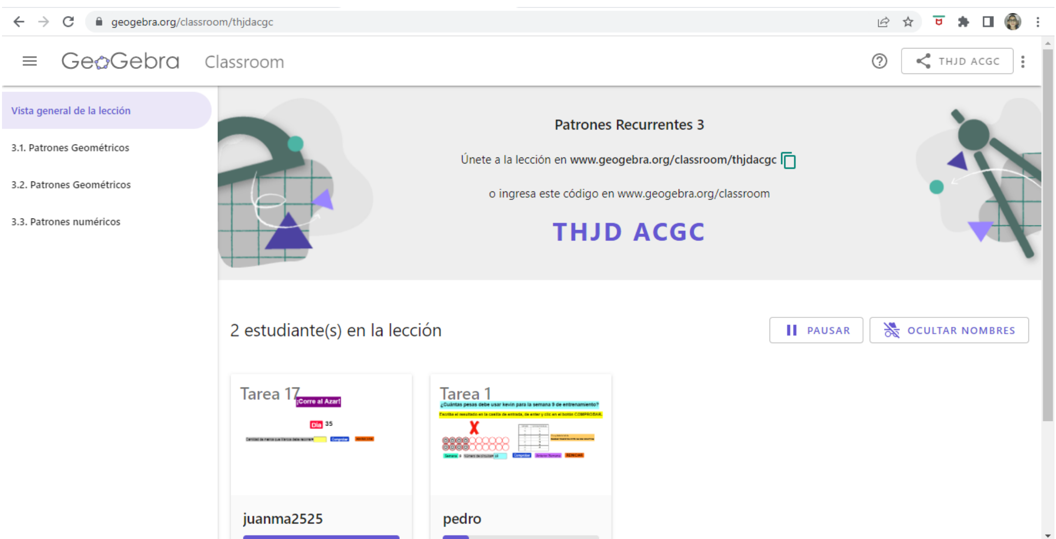
Diseños de actividades



Las actividades diseñadas toman el nombre de lección y estas se comparten mediante la plataforma GeoGebra Classroom que hace parte del Aula Virtual, que es de fácil acceso y solo se necesita crear una cuenta en GeoGebra para acceder a lección. Los estudiantes acceden a la lección mediante el código que les proporcione el profesor y a él le queda el registro de todo lo realizado por el estudiante (ver Figura 5).

Figura 5

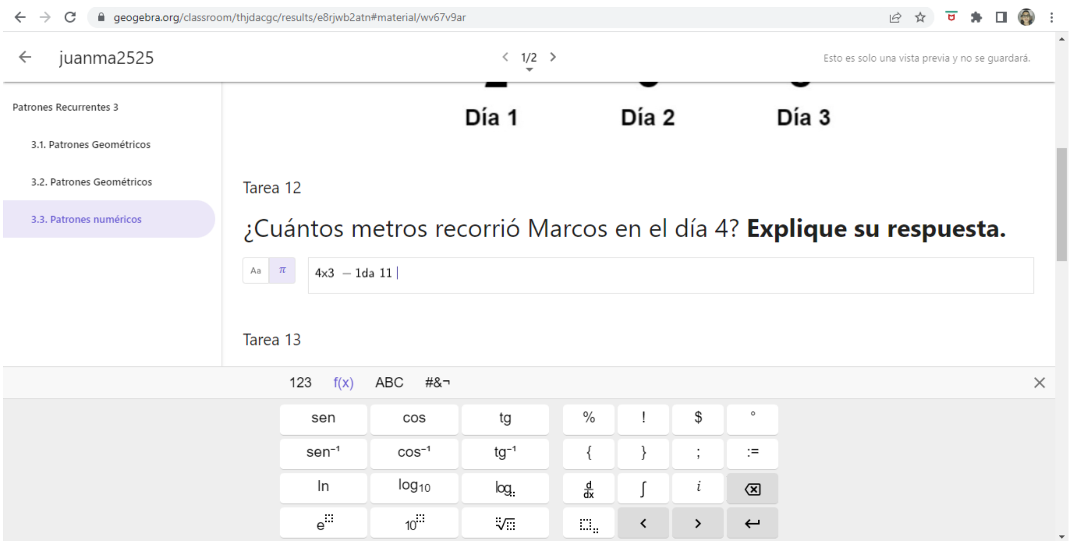
Ejemplo de lección



Por último, se resalta las posibilidades que tienen los estudiantes para responder las preguntas presentes en las actividades, debido a que la plataforma cuenta con un editor de ecuaciones y permite subir fotos, videos, entre otros (ver Figura 6).

Figura 6

Opciones de respuesta para los estudiantes



5.7 Descripción de la Población

Para está investigación se decidió solo trabajar con cuatro estudiantes, uno por cada nivel de profundidad. Para realizar la categorización de los estudiantes, primeramente, se le explicó a la docente titular del área de matemáticas de séptimo grado las condiciones de los estudiantes que se esperaba y que realizará una descripción de cada uno de ellos, para que el investigador confirmará si el estudiante pertenecía a ese nivel o no.

Se realizaron un total de dos sesiones, la primera duró 3 horas y la segunda 2 horas. En la primera sesión, la primera hora se destinó para hacer el registro en el aula virtual de GeoGebra y las otras dos horas para los primeros momentos de la actividad, además, en esta sección se trabajó con los 4 estudiantes al tiempo. En la segunda sesión, se trabajó solamente con los estudiantes del segundo y tercer nivel, en la discusión de resultados se explicará el motivo de esta decisión.

A continuación, se presenta una descripción sobre los estudiantes participantes en la investigación.

5.7.1 Estudiante del Primer Nivel de Profundidad

Es un adolescente de 14 años, sexo masculino, diagnosticado con Trastorno por déficit de atención e hiperactividad, déficit cognitivo leve, trastorno opositor desafiante, psicosis de origen orgánico y trastorno de ansiedad.

Descripción por parte del docente:

Se ha evidenciado falta de atención a corto y largo plazo. Hay que repetir las instrucciones varias veces, se le dificulta comprender enunciados, poca capacidad de respuesta a las instrucciones inmediatas, sigue instrucciones escritas. Le gusta realizar actividades de pensamiento espacial (construcción de sólidos). Se esmera por presentar las actividades y le gusta trabajar en equipo y guiado por un par.

Descripción por parte del investigador: El estudiante presenta un bajo nivel de lectura y escritura, confunde y lee mal algunas palabras. En la parte matemática, solo reconocía los números hasta el 50 y presenta un bajo nivel de razonamiento en matemáticas.

5.7.2 Estudiante del Segundo Nivel de Profundidad

Es un adolescente de 12 años, sexo masculino, fue diagnosticado con Trastorno por déficit de atención.

Descripción del estudiante por parte del docente: se ha evidenciado falta de atención a corto y largo plazo. Hay que repetir las instrucciones varias veces. Se le dificulta comprender enunciados y procesos matemáticos. Sigue instrucciones escritas. Le gusta leer y realizar actividades de pensamiento espacial (construcción de sólidos) y colorear. Se esmera por presentar las actividades. A veces se le dificulta el trabajo en equipo.

Descripción por parte del investigador: El estudiante tiene dificultades para expresar sus ideas ya sea de forma oral o escrita, además, se le dificulta el manejo de las operaciones básicas.

5.7.3 Estudiante del Tercer Nivel de Profundidad

Es un adolescente de 15 años, sexo masculino y no cuenta con ninguna discapacidad. Descripción del estudiante por parte del docente: Tiene buena memoria a largo y corto plazo, comprende enunciados e indicaciones. Tiene buena atención a corto plazo, además, de buen cálculo matemático. A veces se le dificultan algoritmos matemáticos largos y se ha evidenciado dificultad en el proceso de escritura. No se han hecho ajustes al currículo.

Descripción por parte del investigador: El estudiante posee una capacidad matemática buena, además, de un cálculo mental notorio, pero, tiende a escribir mal, le quita letras a las palabras y la ortografía es muy deficiente.

5.7.4 Estudiante del Cuarto Nivel de Profundidad

Es un adolescente de 14 años, sexo masculino y tampoco posee alguna discapacidad. Descripción del estudiante por parte del docente: Buena memoria a corto y largo plazo. Comprende consignas y enunciados. Tiene buena capacidad de respuesta y comprensión. Buena comunicación verbal y escrita. Tiene cálculo mental rápido. A veces presenta dificultad en algoritmos matemáticos.

Descripción por parte del investigador: El estudiante posee una capacidad matemática notable, un nivel de escritura bueno y una buena memoria matemática.

6. Planteamiento del Diseño Didáctico

En esta sección se presentarán las actividades propuestas para los cuatro niveles de profundidad y la valoración de la rúbrica de evaluación junto con sus respectivas modificaciones establecidas por el proyecto.

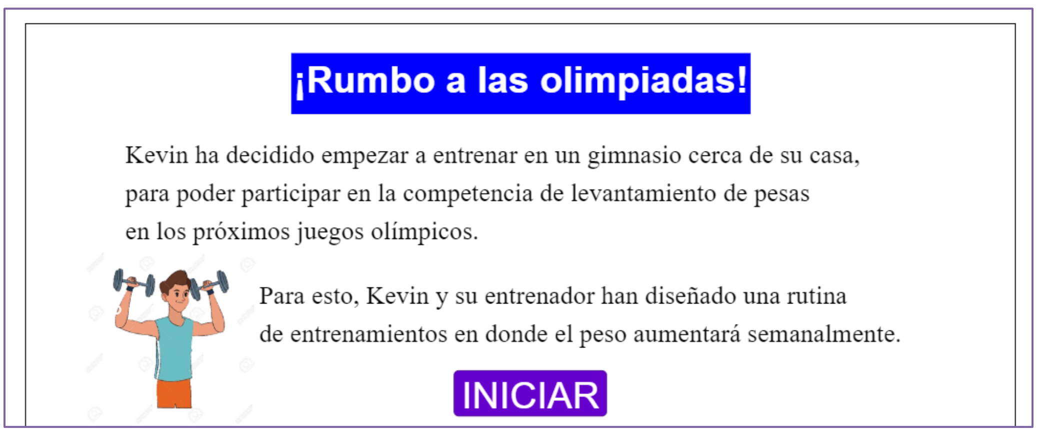
6.1 Planteamiento del Diseño Didáctico

Con el desarrollo de estas actividades se busca generar en los estudiantes la construcción de nuevo conocimiento a través de la discusión, además se espera que discutan y analicen el objeto matemático alrededor de cada una de las actividades para así fortalecer progresivamente su pensamiento algebraico.

El primer momento de la actividad tiene como objetivo proporcionar un espacio en que el estudiante tenga su primer acercamiento con el contexto del problema (ver Figura 7) y que conozca cómo funciona el Applet y establezca las primeras relaciones entre los términos del patrón.

Figura 7

Situación problema



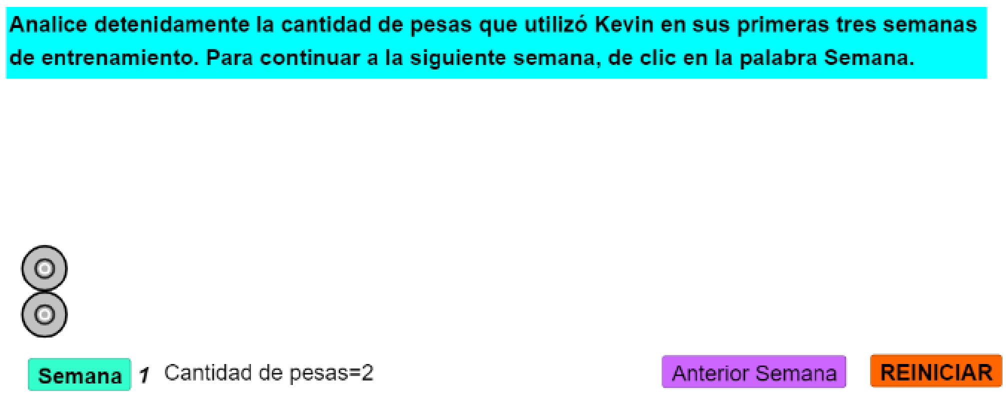
Nota. Enlace para acceder a la actividad del nivel de profundidad 1: https://www.geogebra.org/classroom/uhhnfec6

La situación presentada (en el primer momento) es la misma para cada uno de los cuatro niveles de profundidad, simplemente se ajustan patrones diferentes para cada una, para así diferenciar cada uno de los niveles según su grado de complejidad. Para los dos primeros niveles el patrón establecido a trabajar es $2n, n \in N$; para los niveles posteriores se trabaja con el patrón $2n + 2, n \in N$.

Es importante resaltar, que es muy probable que los estudiantes calculen los términos del patrón a través de una regla de sumas sucesivas, entendida como el proceso en el que se suma una cantidad constante hasta llegar al término deseado.

Figura 8

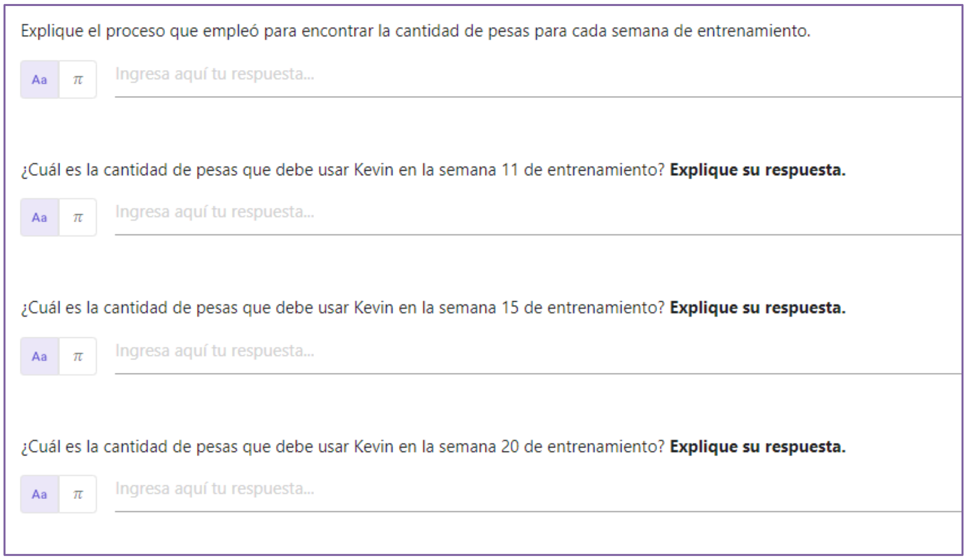
Applet del nivel de profundidad 1



Luego, de que el estudiante interactúa con el Applet y encuentra la cantidad de pesas de las diez semanas de entrenamiento presentadas, responderá las preguntas del segundo momento. La primera pregunta de la Figura 9 pretende conocer si el estudiante ha encontrado la característica común entre los términos del patrón (Kaput lo denomina identificar similitudes en un conjunto de casos) y motivar el proceso de comunicación; las dos preguntas siguientes de la Figura 9, tienen como objetivo conocer si el estudiante es capaz de extender la característica común a términos cercanos como la semana 11 y 15. La última pregunta busca que el estudiante abandone la regla de sumas sucesivas y busque una estrategia que involucre la construcción de relaciones entre la figura y el número de la semana.

Figura 9

Preguntas del segundo momento


Explique el proceso que empleó para encontrar la cantidad de pesas para cada semana de entrenamiento.

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

¿Cuál es la cantidad de pesas que debe usar Kevin en la semana 11 de entrenamiento? **Explique su respuesta.**

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

¿Cuál es la cantidad de pesas que debe usar Kevin en la semana 15 de entrenamiento? **Explique su respuesta.**

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

¿Cuál es la cantidad de pesas que debe usar Kevin en la semana 20 de entrenamiento? **Explique su respuesta.**

Aa π Ingresa aquí tu respuesta...

Nota. Enlace para acceder a la actividad del nivel de profundidad 2: https://www.geogebra.org/classroom/eedtuh95

Para finalizar este momento, el docente puede abrir un espacio en el que se discuta con el estudiante sobre la regla que utilizó para hallar cada término y las relaciones que encontró entre los términos del patrón.

En el tercer momento, se le presenta al estudiante una nueva situación problema, la cual busca que se fortalezcan las habilidades de identificar y modelar patrones. Al igual que en el primer momento, el estudiante trabajará con un Applet en el que se le presentan 10 semanas de entrenamiento (ver Figura 10).

Figura 10

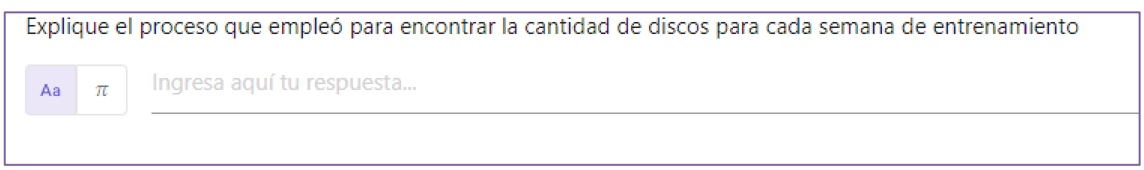
Situación problema del tercer momento

Nota. Enlace para acceder a la actividad del nivel de profundidad 3: https://www.geogebra.org/classroom/thjdacgc

Luego de que el estudiante interactúe con el Applet se le pedirá que explique el proceso que empleó para encontrar la cantidad de discos en cada semana y conocer la característica común que identificó entre los términos del patrón (ver Figura 11). Nuevamente, es probable que el estudiante use la regla de sumas sucesivas en el Applet.

Figura 11

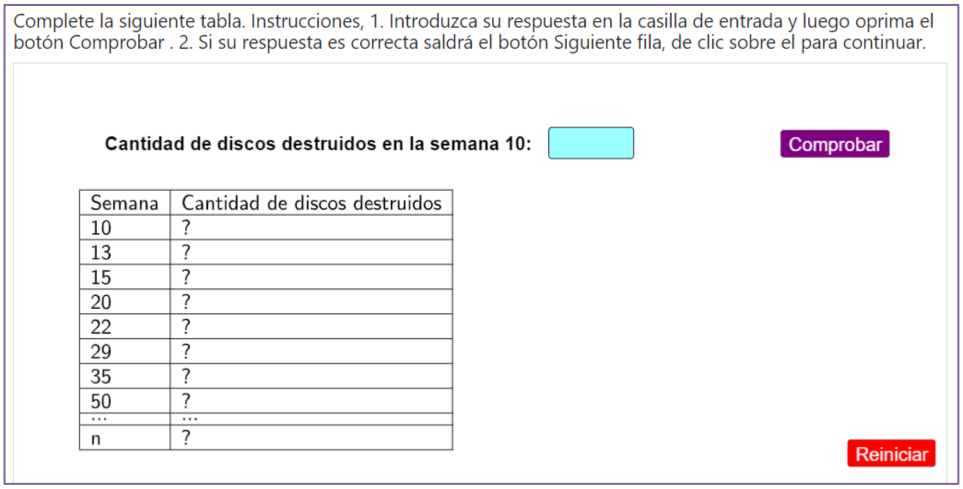
Pregunta del tercer momento



Seguidamente, el estudiante interactúa con el Applet de la tabla (ver Figura 12), el cual le proporciona una diferente representación del objeto matemático, como lo establece el primer principió del DUA. También, esta tarea busca que el estudiante extienda la característica común identificada en las semanas presentadas y establezca una regla más práctica para hallar los términos.

Figura 12

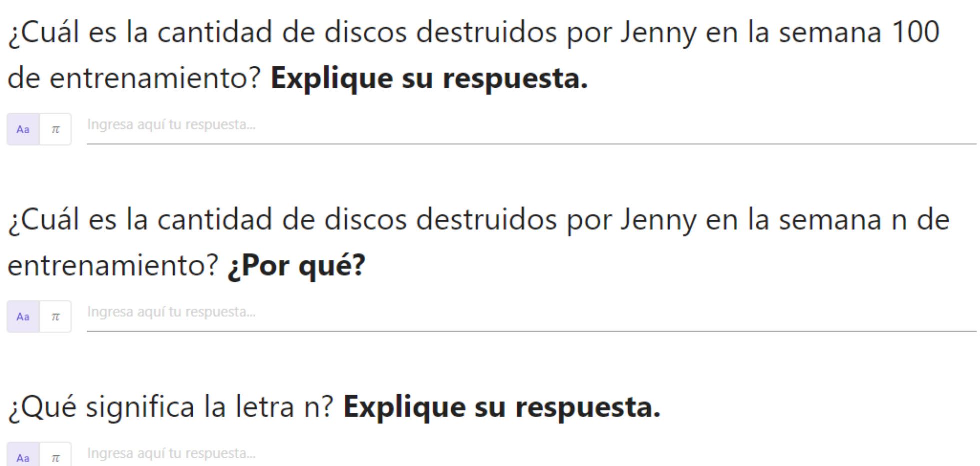
Applet de la tabla



El Applet de la tabla será un apoyo para responder las preguntas de la Figura 13, las cuales buscan generar discusión acerca de la regla que se encuentre, el significado de la letra n de la última fila de la columna semana y la fórmula para encontrar la cantidad de discos en la semana n. Además, dentro de la discusión se espera fortalecer en los estudiantes las diferentes habilidades de los procesos de razonamiento y demostración.

Figura 13

Preguntas finales del tercer momento



Es importante aclarar, que las preguntas que invitan a la discusión del objeto matemático, además de promover el desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de comunicación, razonamiento y demostración; también satisfacen los principios II y III del DUA, debido a que generan espacios donde el estudiante pueda expresarse según sus capacidades y tener un rol importante en la construcción de ideas por parte del grupo.

En el cuarto momento, tiene como objetivo evaluar las capacidades del estudiante para identificar y modelar patrones, con base a este objetivo se decidió presentar la situación problema de la manera tradicional, como se muestra en la Figura 14.

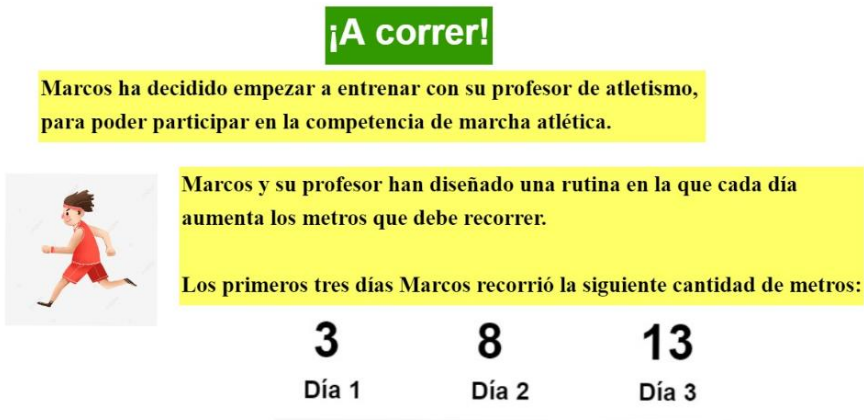
Figura 14

Situación problema del cuarto momento

En los últimos dos niveles, se decide trabajar con un patrón numérico (ver Figura 15), para promover la búsqueda de relaciones netamente entre los números, asimismo, se le disminuye la cantidad de representaciones del objeto matemático, por ende, es una actividad con mayor dificultad.

Figura 15

Situación problema del cuarto momento de los niveles de profundidad 3 y 4



Nota. Enlace para acceder a la actividad del nivel de profundidad 4: https://www.geogebra.org/classroom/y9fhugu9

Durante este espacio, el docente deberá estar preparado con sugerencias o preguntas que ayuden al estudiante a comprender y realizar la actividad, debido a que es probable que algunos no sean capaces de establecer ninguna relación o que no entiendan lo que deben hacer.

Las tres preguntas iniciales de la Figura 16 pretenden conocer si el estudiante ha captado la característica común y la pueda extender en las semanas pedidas. La pregunta sobre la semana 100 de entrenamiento tiene como único objetivo obligar al estudiante a encontrar relaciones entre los términos del patrón, para hallar una regla eficiente y diferente a la de sumas sucesivas, debido a que la regla aritmética que encuentre será la base de la respuesta de la última pregunta de la Figura 16.

Figura 16

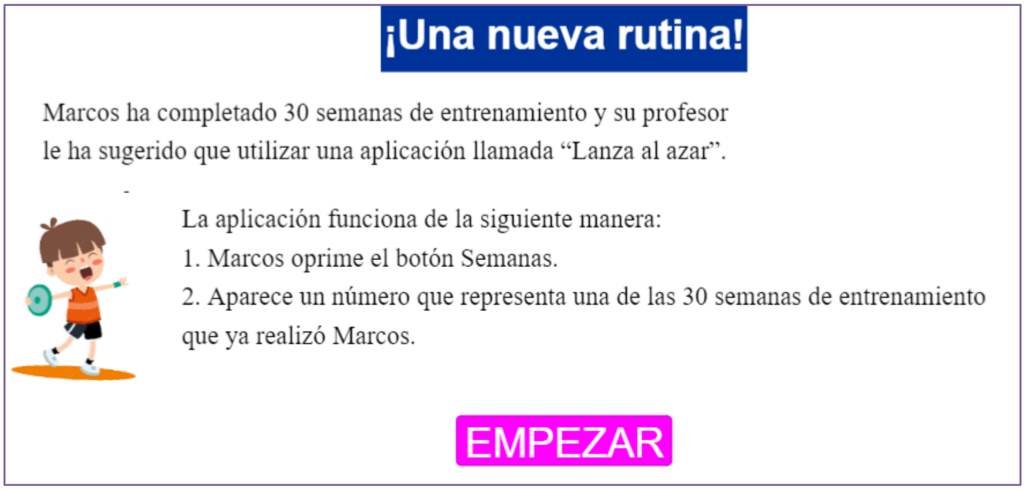
Preguntas del cuarto momento

Cómo sucedido en momentos anteriores, este espacio se puede aprovechar para realizar discusiones sobre las respuestas y relaciones que establezca el estudiante.

Finalmente, al estudiante se le presenta un Applet que genera números aleatorios en la cantidad de semanas/ días (ver Figura 17), este tiene como objetivo llevar al estudiante a mencionar la indeterminancia en la regla que identificó previamente: “el número de la semana por 2 y le sumo 3” “2(número de semana) +3” “$2n + 3$”.

Figura 17

Applet que genera números aleatorios



6.2 Planteamiento de la Malla Curricular

El diseño de la malla curricular se enmarca en los cuatro niveles de profundidad citados anteriormente, donde en cada uno de ellos se plantea un propósito y algunos descriptores referentes a los procesos de comunicación, razonamiento y representación. Además, tanto los propósitos y descriptores muestran un crecimiento en sus objetivos entre los niveles (coherencia horizontal). A continuación, se presenta la malla en mención.

Clases	Nivel profundidad 1		Nivel profundidad 2		Nivel profundidad 3		Nivel profundidad 4	
Preguntas Problematizadoras	Propósito	Descriptores	Propósito	Descriptores	Propósito	Descriptores	Propósito	Descriptores
5 **¿Qué relaciones existen entre los números y las figuras?**	**Pensamiento Variacional** Identificar patrones de variación en secuencias numéricas y geométricas.	**Comunicación** Interpreta las relaciones que existen entre las figuras y los términos de la secuencia **Representación** Reconoce el patrón a través de palabras, gestos o dibujos. **Razonamiento** Explica la existencia de una característica común entre los términos de la secuencia.	**Pensamiento Variacional** Describir patrones de variación en secuencias numéricas y geométricas.	**Comunicación** Explicar las relaciones que existen entre las figuras y los términos de la secuencia **Representación** Interpreta el patrón a través de palabras claves o tablas. **Razonamiento** Justifica la característica común entre los términos de la secuencia y la utiliza para deducir otros términos.	**Pensamiento Variacional** Interpretar y generalizar patrones de variación en secuencias numéricas y geométricas.	**Comunicación** Justificar las relaciones que existen entre las figuras y los términos de la secuencia **Representación** Representa el patrón a través de frases claves y símbolos alfanuméricos. **Razonamiento** Plantea un patrón entre los términos de la secuencia y usa argumentos empíricos para su validación.	**Pensamiento Variacional** Analizar y generalizar patrones de variación en secuencias numéricas y geométricas.	**Comunicación** Argumentar relaciones que existen entre las figuras y los términos de la secuencia **Representación** Representa el patrón a través de una expresión algebraica. **Razonamiento** Plantea un patrón entre los términos de la secuencia y usa argumentos teóricos para su validación.

6.3 Valoración de los Diseños Didácticos

Antes de la implementación, se valoró los diseños didácticos de acuerdo con la rúbrica de evaluación establecida en el marco del proyecto 707983 antes citado. En esta valoración no interviene de ninguna manera el autor de los diseños. Para esta tarea, se tiene designada a una experta en Educación Matemática. La rúbrica en mayor medida valora el ajuste del diseño a los principios y pautas del DUA, mencionadas en la sección 4.2, la coherencia vertical de acuerdo con los momentos de actividad matemática, y la coherencia horizontal de acuerdo con los niveles de profundidad.

En la rúbrica de valoración, se estima de manera cuantitativa, donde 1 representa que no se alcanzó de manera satisfactoria el indicador planteado y 5 representa que se consiguió de manera satisfactoria. Los resultados obtenidos se presentan a continuación:

VALORACIÓN DISEÑOS DIDÁCTICO 6° a 7°

1. **Valoración de las tablas con propósitos y desempeños**

I1. Coherencia horizontal (Por diseño)

Según los propósitos (pensamientos)

P6. ¿Qué relaciones existen entre los números y las figuras?	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
Los propósitos están ajustados al nivel de conceptualización, según cada nivel de profundidad.				X		
Los propósitos están vinculados estrechamente con la pregunta problematizadora y con el contexto				X		No hay un contexto extra-matemático propuesto. En todo caso, se parte de representaciones gráficas para desarrollar el pensamiento variacional
El propósito se relaciona con estándares específicos para el grupo de grados					X	
El propósito, en cada nivel, comprende el mismo objeto matemático					X	

Según los descriptores (procesos)
¿Los descriptores están *ajustados* a las habilidades de proceso, en cada nivel de profundidad?

P6. ¿Qué relaciones existen entre los números y las figuras?		Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
¿Los descriptores están *ajustados* a las habilidades de proceso, en cada nivel de profundidad?	Comunicación					X	
	Modelación					X	
	Razonamiento					X	
	Elaboración, comparación y ejecución de procedimientos						No se plantea este proceso y cuando el estudiante está planteando el patrón pudieran aparecer transformaciones de tipo gráfico y aritmético que lleven a equivalencias.
Es progresiva la evolución del descriptor, en todos los niveles, según las habilidades						X	

Para facilitar la interpretación de la rúbrica en las siguientes tablas, el lector solo debe fijarse en la última columna de la tabla, donde se encuentra la abreviatura P6 (pregunta 6).

3. Valoración de la hoja de trabajo del estudiante

III1. **Coherencia horizontal (Por diseño)**
¿Se observa un desarrollo progresivo en las actividades de cada momento, de cada nivel de profundidad?

Indicador	P1					P2					P3					P4					P5					P6				
	1	2	3	1	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Se ajusta cada actividad a los momentos de cada diseño, según el nivel de profundidad.																													X	

III2.Coherencia vertical
¿Se observa conexión en el desarrollo de los procesos en cada diseño, en cada tarea, según los descriptores propuestos?

Indicador	P1					P2					P3					P4					P5					P6				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Conexión entre los descriptores ajustados al desarrollo de los procesos en cada diseño, en cada tarea.																														X

I1. Coherencia vertical

A nivel de cada pregunta

Los descriptores, para cada proceso se ajustan o articulan verticalmente	P1					P2					P3					P4					P6				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Comunicación																									X
Razonamiento																									X
Elaboración, comparación y ejecución de procedimientos																									X
Modelación																									X

A nivel global
¿Se observa progreso en los objetos matemáticos de estudio a medida que se avanza en cada pregunta problematizadora?

Indicadores	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
Conexión entre las preguntas problematizadoras ajustadas al desarrollo de los pensamientos						
Se abordan todos los pensamientos con los contextos seleccionados						
Se cubre un 70% de los estándares del grupo de grados						

En general

Indicador	P1					P2					P3					P4					P5					P6				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Las actividades propuestas responden a lo indicado en la tabla de propósitos y descriptores																														
Se observa el desarrollo del objeto matemático desde lo didáctico*																														X
Las instrucciones, dentro del diseño, están acordes con el nivel de profundidad y el grupo de grados**																													X	

Comentario general

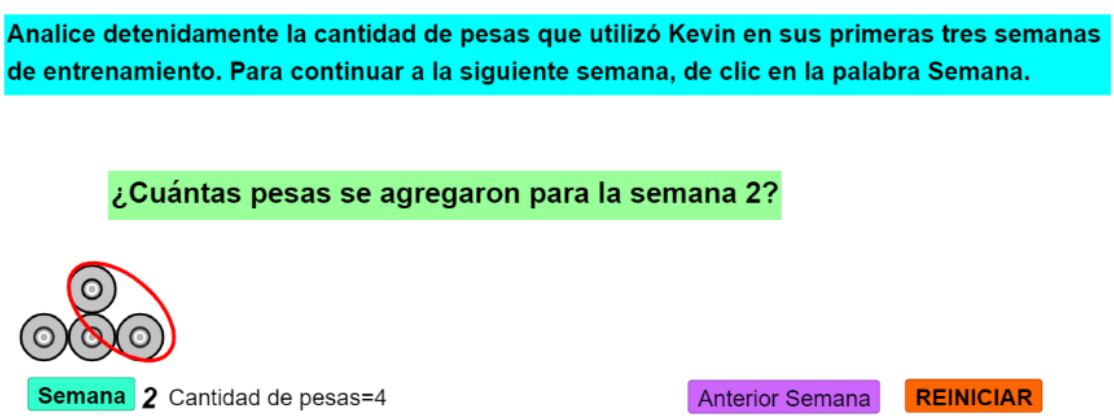
- Se sugiere ofrecer más apoyo a los estudiantes de los dos primeros niveles para hallar el patrón, en tanto que solo aparecen gráficamente las cuatro primeras posiciones y ya después no es posible observarlas. Además, se asume que el estudiante visualiza cómo construye cada una de las piezas, se le podría indicar cómo y dónde se agregaron las nuevas piezas en cada etapa (colocarlas en un color diferente); ya le corresponde a él hacer el conteo y buscar expresar el patrón desde lo numérico.
- No se observan diferencias significativas entre los primeros niveles; y en todo caso, en los últimos se visualiza un patrón con un mayor nivel de dificultad. Valdría la pena proponer opciones para la identificación de patrón, como la propuesta en el párrafo anterior, dadas las posibles dificultades de los estudiantes en estos niveles.

6.4 Ajustes Realizados a Partir de la Rúbrica de Evaluación

Con base a los comentarios generales de la rúbrica, se decidió agregar un apoyo en el Applet del primer momento en los niveles de profundidad 1 y 2, denominado "el círculo rojo", para indicarle al estudiante las pesas que se agregarían para la semana en cuestión.

Figura 18

Cambios realizados en Applet del primer momento



No se realizaron más modificaciones en los Applets, debido a que se determinó que las 7 ayudas que se presentan a lo largo de las diez semanas del Applet son suficientes, además, se ofrece la posibilidad de repetir el proceso la cantidad de veces que sea necesario.

7. Discusión de Resultados

Primero, se presentan los análisis de las respuestas obtenidas a lo largo de la implementación del diseño didáctico, divididas según el nivel de profundidad y en el momento en el que se obtuvo; para finalizar con una evaluación general del diseño didáctico con base a los objetivos propuestos.

7.1 Estudiante del Nivel de Profundidad 1

A continuación, se exponen los resultados obtenidos de la aplicación de la actividad con el estudiante de este nivel, donde se destaca que no pudo completar las tareas de manera satisfactoria.

7.1.1 Momento 1

Al iniciar la actividad, se le dijo al estudiante que comenzara con la lectura de las instrucciones, pero no pudo realizar esta tarea, porque, según manifestó, no entendía el texto. Ante esto, el investigador decide realizar la lectura con él y le indica que el objetivo de la actividad era analizar la rutina de entrenamiento de Kevin. Después, se le permitió al estudiante interactuar con el Applet para reconocer las funciones de cada botón.

El estudiante interactúa con el Applet durante algunos minutos, pero sus acciones demostraban que no estaba entendiendo la actividad. El investigador interviene nuevamente e intenta guiar al estudiante en el análisis de la rutina de entrenamiento, como se muestra en el siguiente diálogo: (Investigador (I), estudiante (E))

I: ¿Cuántas pesas levantó en la segunda semana?

E: 4.

I: Lea la siguiente pregunta…

E: (se queda pensando).

I: (El investigador le ayuda a leer la pregunta) ¿Cuántas pesas se agregaron para la semana 2? (le señala el círculo rojo)

E: 2.

I: ¿Cuántas pesas cargó, en total, Kevin en la semana 3? (le señala al estudiante que debe contar las pesas).

E: 6.

I: ¿Cuántas pesas cargó de más en la semana 3 en comparación a la semana 2?

E: ¿2?

I: (Dé clic en "anterior semana") ¿Cuántas pesas cargó en la semana 2, en total?

E: 2.

I: ¿En total?

E: 4.

I: Y ¿en la semana 3, en total?

E: 6.

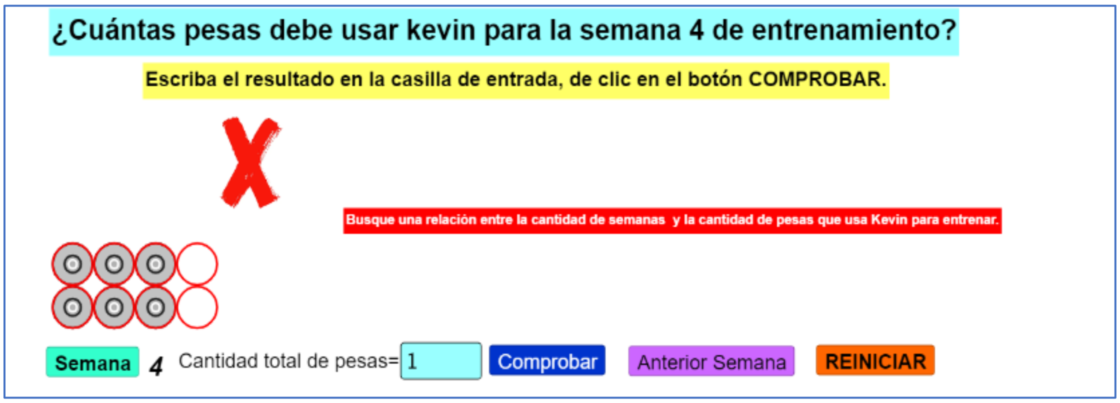
I: Bien, ¿entonces en cuanto ha ido aumentando?

En las primeras nueve líneas del diálogo se evidencia que la pista del círculo rojo ayudó al estudiante a identificar la cantidad de pesas que aumentó en la semana 2 y 3 de entrenamiento, además de generar la idea que entre cada semana aumentaba en 2 la cantidad de pesas. El estudiante vuelve a interactuar con el Applet a la espera de que este le ayudara concretar la hipótesis generada.

Al cabo de unos minutos, el investigador percibe que el estudiante encontró correctamente la cantidad de pesas en las primeras diez semanas de entrenamiento, pero, al preguntarle al estudiante por el método usado responde que solo debe colocar un número cualquiera de respuesta, para que salgan los círculos rojos (ver Figura 19) y poder contarlos con los dedos.

Figura 19

Retroacción de los círculos rojos



La respuesta del estudiante demuestra que ha identificado un patrón diferente al deseado, debido a que nota una regularidad en el funcionamiento del Applet, cuando dice que el primero debe colocar una respuesta cualquiera, dar clic en el botón comprobar y le saldrán los círculos rojos, los cuales él podrá contar con los dedos y así encontrar la respuesta.

7.1.2 Momento 2

Para este momento, el investigador le pidió a la profesora de apoyo que trabajara con el estudiante, debido a que por sí solo no era capaz de leer o entender las preguntas que aparecían. Inicialmente, la profesora lee las preguntas y le explica lo que debe hacer, pero el estudiante manifiesta no saber, a causa de esto, la profesora regresa al Applet e intenta que el estudiante identifique la cantidad de pesas que se agregaba en cada semana de entrenamiento, partiendo de la semana 1; además, recalca la diferencia entre el total de pesas entre la semana y la anterior a ella. Lastimosamente no hubo ninguna respuesta positiva por parte del estudiante

Finalmente, el investigador decide que la profesora le ayude al estudiante realizando el conteo, recalcando que debía sumar 2 por cada semana de entrenamiento. Durante este proceso, se percibió que el estudiante tenía grandes dificultades para sumar.

7.1.3 Momento 3

El patrón planteado en este momento también presentaba un aumento de dos discos por cada semana de entrenamiento, se esperaba que se afianzaran las ideas intuitivas generadas en el momento 1 y 2, pero, el estudiante vuelve a usar la estrategia mencionada al final del primer momento. Luego, el estudiante pasa a resolver la tarea de la tabla, donde la profesora interviene para ayudarle con el conteo nuevamente, debido a que estaba respondiendo números al azar.

Cuando el estudiante completó la tabla con la ayuda de la docente, el investigador decide intervenir y le realiza una serie de preguntas buscando que el estudiante explicara por qué se debía sumar dos discos por cada semana de entrenamiento, pero no se consiguió ninguna explicación razonable. Finalmente, se le permitió al estudiante completar el resto de las tareas con la ayuda de la profesora.

7.2 Estudiante del Nivel de Profundidad 2

A continuación, se exponen los resultados obtenidos en la aplicación de la actividad con el estudiante de este nivel, donde se destaca que pudo completar la mayoría de las tareas de manera satisfactoria.

7.2.1 Momento 1

Al iniciar la actividad, se le dijo al estudiante que comenzara con la lectura de las instrucciones. Al cabo de unos minutos, el investigador decide explicarle cómo funciona el Applet y de lo que debía analizar en cada semana, como se muestra en el siguiente diálogo:

I: ¿Cuántas pesas cargó en la semana 1?

E: Eh, 2.

I: Listo, ahora dale clic en “semana”.

I: ¿Cuántas pesas cargó en la semana 2, en total? Cuéntalas.

E: 5.

I: 5, ¿seguro?

E: Ah… no, 4

I: ¿Y cuántas se agregaron para la semana 2?

E: 2.

I: En la semana 3, ¿cuántas pesas cargó en total?

E: Eh, 6.

I: ¿Y cuántas se agregaron para esa semana?

E: 2.

I: O sea, ¿en cuánto ha ido aumentando?

E: En 2.

El estudiante percibe que hay un cambio en la cantidad de pesas a medida que transcurre el número de semanas y que este aumento es de 2. Teniendo en cuenta los procesos de generalización de Kaput, el estudiante está en el primer proceso.

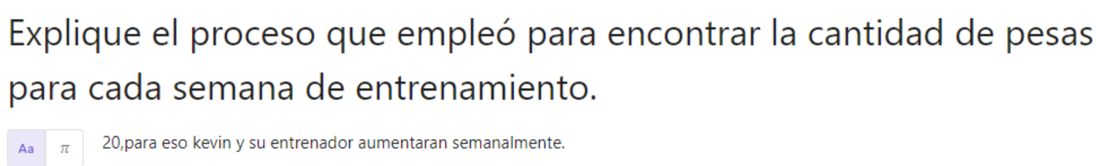
El estudiante tuvo dos dificultades recurrentes para encontrar la cantidad total de pesas en cada semana de entrenamiento, ya que tendía a sumar mal o se le olvidaba la cantidad de pesas de la semana anterior. A causa de esto, la ayuda de los círculos rojos y el botón “anterior semana”, fueron elementos que guiaron al estudiante a encontrar la respuesta correcta, la primera le permitió realizar el conteo de la figura y la segunda recordar lo que necesitaba.

7.2.2 Momento 2

Las preguntas planteadas en este momento mostraron las dificultades del estudiante para comprender, responder y explicar enunciados, como se evidencia en la Figura 20.

Figura 20

Respuesta del estudiante

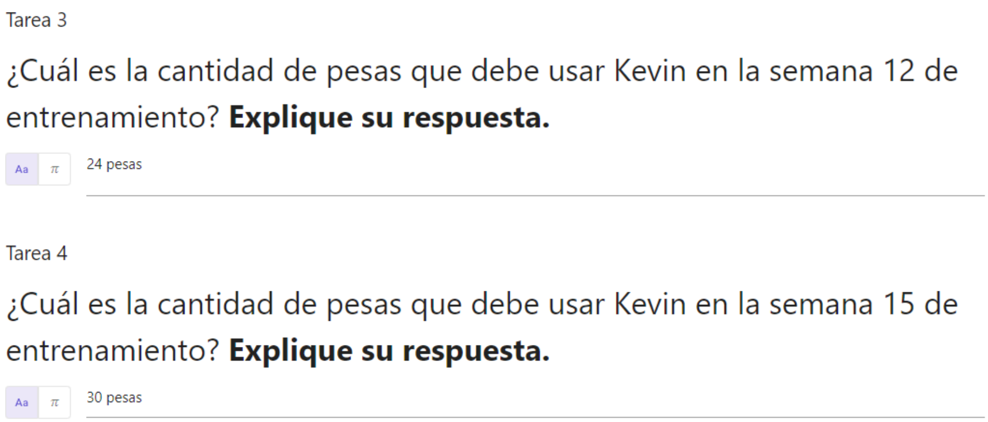


Ante esta respuesta, el investigador le pide al estudiante que explique, a lo que él menciona qué es la cantidad de pesas de la última semana (la semana 10 del Applet), debido a esto, el investigador hace que el estudiante vuelva al Applet y conteste nuevamente la cantidad de pesas de la semana 4,5 y 6, tarea que logró sin mayores problemas, luego, le pregunta cómo encontró tal cantidad, aquí el estudiante comienza a ponerse muy nervioso y no se le entendía lo que decía, por lo que el investigador decide dejar que continúe con la actividad y se tranquilice.

Las respuestas de las tareas 3 y 4 (ver Figura 21), demuestran que el estudiante ha logrado llegar al segundo proceso de generalización (Extender el razonamiento propio más allá del rango en el cual se originó) al contestar correctamente la cantidad de pesas de la semana 12 y 15.

Figura 21

Respuestas del estudiante



Aunque el estudiante contesta correctamente, un objetivo importante de la actividad es que explique sus ideas de manera escrita, pero, como se evidencia en la Figura 21 esto no se consiguió. A causa de esto, el investigador intenta establecer un diálogo con el estudiante y consigue la siguiente explicación:

I: ¿Por qué Kevin debe levantar 30 pesas en la semana 15?

E: Porque en la 12 hay 24 pesas, en la 13, 26 pesas, [y en la] 14, 28 pesas.

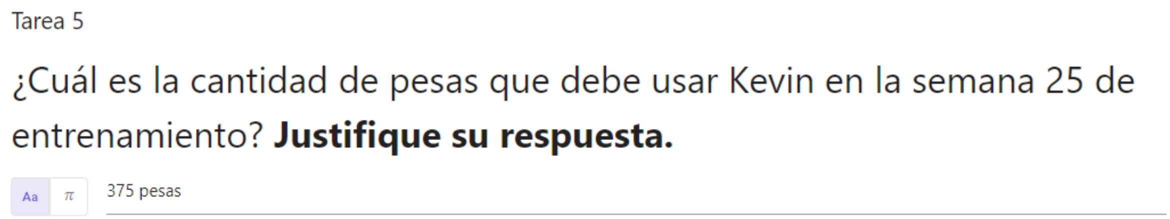
I: ¿O sea le sumaste 3 semanas más?

E: Sí.

Del razonamiento expuesto por el estudiante se puede identificar el método que estaba usando para calcular los términos del patrón, que es el de sumas sucesivas, asimismo, se percibe la característica común que estableció entre los términos. Lo tedioso de este método usado por el estudiante se vería reflejado en la respuesta de la Figura 22, en la que se le presentó la semana 25 de entrenamiento que estaba a una distancia considerable de la semana 15; como se esperaba, el estudiante no fue capaz de realizar la sumas hasta ahí y termina respondiendo un número al azar, debido a que sus capacidades aritméticas eran muy limitadas. El investigador decide intervenir y le sugiere que busque relaciones entre las figuras y el número de la semana, pero las acciones del estudiante demostraban que no había entendido qué debía hacer.

Figura 22

Respuesta del estudiante



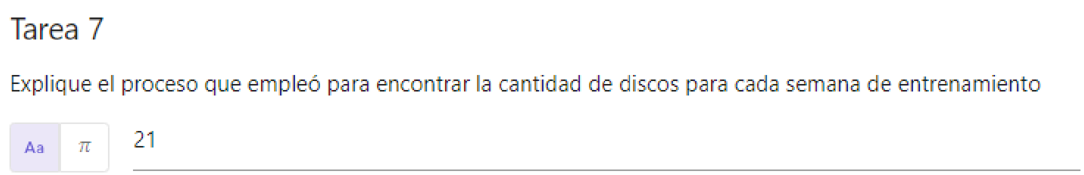
Aunque el estudiante no encontró una regla práctica para calcular los términos del patrón, se decidió dejarlo continuar con los otros momentos, porque estas actividades eran introductorias y en el siguiente momento se esperaba afirmar las ideas generadas.

7.2.3 Momento 3

En este momento, se presentaba un patrón similar al trabajado en él primer momento, esto ayudó al estudiante a afianzar sus ideas y a captar la característica común con mayor facilidad, porque ya tenía un conocimiento previo sobre lo que debía buscar. No obstante, la respuesta obtenida en la tarea 7 (ver Figura 23), muestra que el estudiante sigue manteniendo sus dificultades para comprender los objetivos de las preguntas aun cuando ya se le había explicado.

Figura 23

Respuesta del estudiante en el tercer momento



Al igual que los momentos anteriores el investigador busca una explicación verbal del método usado por el estudiante para calcular los términos del patrón, como se evidencia en el siguiente diálogo:

I: ¿Cómo hallaste la cantidad de discos de la semana 4?

E: (Sube al Applet, se ubica en la semana 4 y escribe 9) Porque le voy agregando los discos.

I: ¿Cuántos le agregas?

E: 2.

El razonamiento del estudiante demuestra que ha encontrado la característica común y nuevamente utilizó la regla de sumas sucesivas para calcular los términos del patrón. Respecto a los procesos de Kaput, el estudiante ha logrado extender su razonamiento más allá de las tres semanas dadas. Luego de responder la tarea 7, el estudiante procede a trabajar con el Applet de la tabla donde comienza a tener problemas en el conteo, además, de presentar signos de cansancio y estrés, por ende, el investigador decide terminar la sesión.

Para la segunda sesión, el investigador decide que el estudiante comience otra vez interactuando con el primer Applet de este momento, para que recordara lo trabajado en la sesión anterior. El estudiante se mostraba más tranquilo y confiado trabajando en el Applet, en el que rápidamente encuentra la cantidad de discos de las 10 semanas y continuó con este ritmo hasta la semana 22 del Applet de la tabla, donde pierde la cuenta de las sumas que llevaba. Debido a esto, el investigador decide ayudar al estudiante en la búsqueda de relaciones que le permitieran encontrar una regla para calcular la cantidad de discos de una forma más rápida.

El estudiante se ubica en la semana 1 del Applet.

I: Vas a mirar cuántos círculos hay en la parte de arriba.

E: 3.

I: Solo en la parte de arriba.

E: 1.

I: ¿Y en la fila de abajo?

E: 2.

I: ¿Qué relación tiene este número (el número de la semana) con la cantidad de círculos de la fila de arriba?

E: Que son 1.

I: Listo, ahora dale clic en “semana”.

I: ¿Cuántos círculos hay en la fila de arriba?

E: 2.

I: ¿Cuántos en la fila de abajo?

E: 3.

I: ¿Qué relación tiene este número (el número de la semana) con la cantidad de círculos de la fila de arriba?

E: Son iguales.

(Se repite el proceso con la semana 3)

I: Ahora vas a dibujar la figura 4 en el cuaderno.

I: ¿Cuántos círculos habrá en la parte de arriba en la figura 4?

E: 3 (estaba mirando el Applet)

I: Pero ¿cuántos debería haber?

E: 4.

I: ¿Y la parte de abajo?

E: 5.

I: Entonces ¿cuánto te da 4 más 5?

E: 9.

(procede a colocar la respuesta en el Applet y comprueba que esta correcta, además continúa haciendo el proceso con el resto de las semanas).

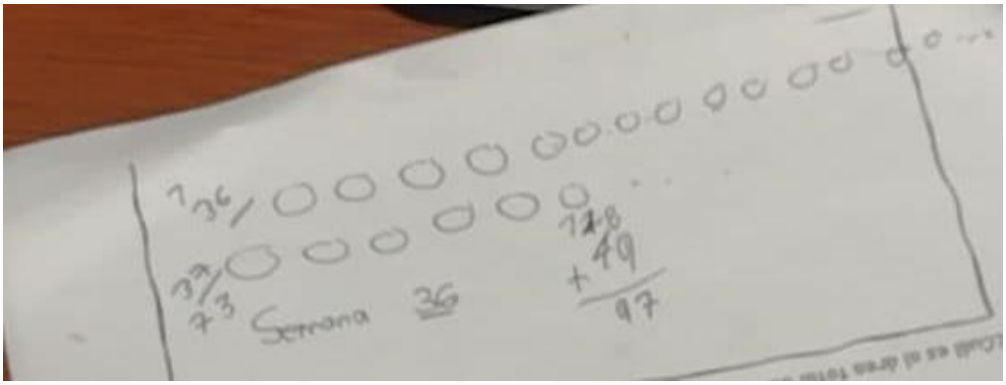
El investigador aprovechó las múltiples representaciones del objeto matemático (el patrón) para guiar al estudiante a construir una relación entre las filas de la figura y el número de la semana, así mismo, se evidencia que el estudiante va asimilando la idea y el Applet comienza a ser determinante para confirmar que el número obtenido es correcto.

El estudiante utiliza este nuevo método para hallar las semanas pedidas en el Applet de la tabla, donde no tiene problema para encontrar la cantidad de discos de las primeras tres filas, pero, en la cuarta fila el estudiante comienza a mostrar nuevamente sus limitaciones en el cálculo, así que el investigador procede a ayudarle a rectificar los procesos aritméticos y le permite usar la calculadora para facilitar la actividad.

Cabe destacar, que el uso del papel y lápiz también fue un elemento útil e importante en la identificación del patrón por parte del estudiante, debido a que le permitió hacer dibujos que le ayudaron a llevar un control de las operaciones que debía realizar (ver Figura 24).

Figura 24

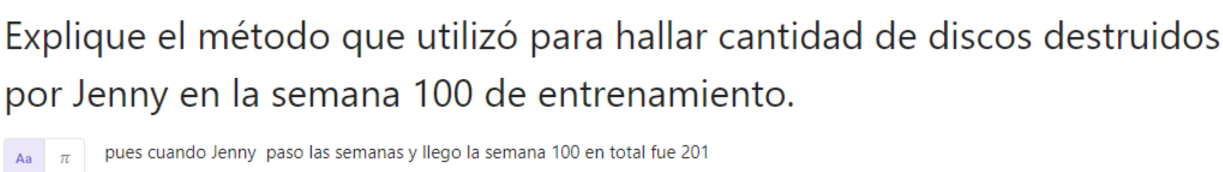
Operaciones del estudiante



Luego de completar la tabla, se esperaba que el estudiante explicará el método de manera escrita, pero el vuelve a dar una explicación muy superficial del por qué en la semana 100 de entrenamiento Jenny destruía 201 discos, como se muestra en la Figura 25.

Figura 25

Respuesta del estudiante



Explique el método que utilizó para hallar cantidad de discos destruidos por Jenny en la semana 100 de entrenamiento.

Aa π pues cuando Jenny paso las semanas y llego la semana 100 en total fue 201

De manera muy similar el estudiante responde las preguntas sobre el n-ésimo término, donde expresa que la n es la decimocuarta letra del alfabeto. A causa de ello, el investigador intenta orientar al estudiante a pensar en la columna de la tabla donde se encuentra la letra y construir una definición, como se muestra en la siguiente conversación:

I: ¿n en qué columna está?

E: En la semana.

I: O sea n es una sema…

E: Una semana

I: Una semana del entrenamiento de Jenny, ¿cuál semana?

E: mmm.

I: ¿Sabes qué número es n?

E: mmm, no.

I: Exacto, sabemos que n es una semana de entrenamiento, pero no sabemos cuál es.

I: Listo, pensemos sobre ¿cuál fue el método que usaste para hallar la cantidad de discos de las semanas de entrenamiento?

E: Viendo el número de la semana de entrenamiento.

I: Me lo puedes explicar con la semana 10 de entrenamiento.

E: Pues a 10 le sumo 11.

I: Entonces, coges el número de la semana y le sumas 1, ¿cierto?

E: Sí.

I: Entonces si n es el número de la semana, ¿cuánto deberíamos sumarle?

E: ¿mmm, n?

I: (le repite el ejemplo de la semana 10, al 10 se le suma 1)

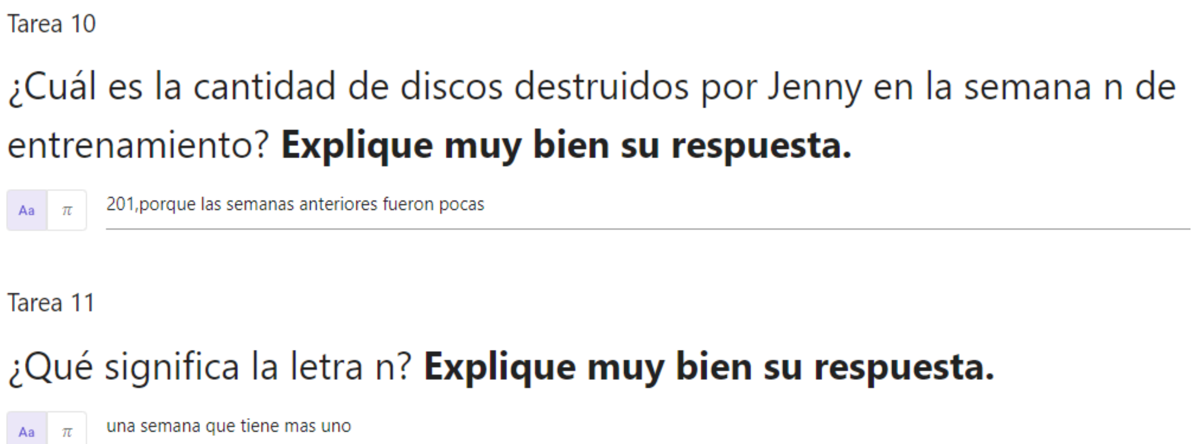
I: ¿Entonces cuánto deberíamos sumarle a n?

E: 1.

El investigador intenta que el estudiante asimile a la letra n como un número y que cumple las mismas condiciones de los casos específicos como el de la semana 10. Sin embargo, las respuestas de la Figura 26, evidencian que la conversación orientada por el investigador no logró que el estudiante comprendiera.

Figura 26

Respuestas de las preguntas del n-ésimo término



Respecto a los procesos de generalización, podemos decir que el estudiante se mantiene en el segundo proceso de generalización (Extender el razonamiento propio más allá del rango en el cual se originó), aunque haya encontrado una regla para calcular la cantidad de discos de cualquier semana, percibe esta regla de manera específica y no general, para él es necesario tener un número para poder realizar los cálculos.

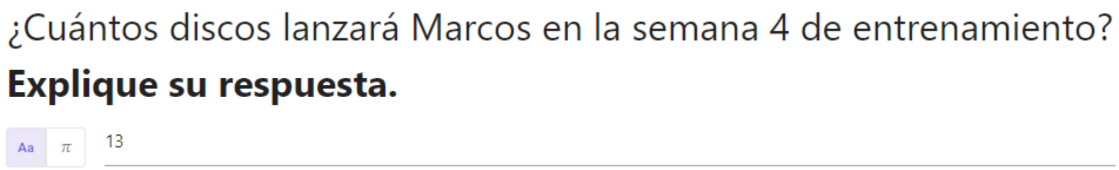
7.2.4 Momento 4

Este momento tenía como objetivo que el estudiante pusiera a prueba los conocimientos obtenidos hasta el momento. El educando mostró mayor soltura al realizar la actividad y sabía que debía buscar relaciones entre las figuras, sin embargo, no pudo responder ninguna pregunta correctamente, debido a que piensa que este patrón también aumentaba en dos discos.

El investigador le realiza una serie de preguntas, que invitaron al estudiante a analizar la diferencia entre la cantidad de discos entre una semana y la anterior, de esta manera el estudiante percibe que el aumentó era 3 y logra contestar correctamente la pregunta de la Figura 27. Sin embargo, el estudiante no pudo sumar sucesivamente hasta encontrar la cantidad de discos de la semana 8 (segunda pregunta de este momento), porque sus habilidades aritméticas eran limitadas.

Figura 27

Respuesta del estudiante en el cuarto momento

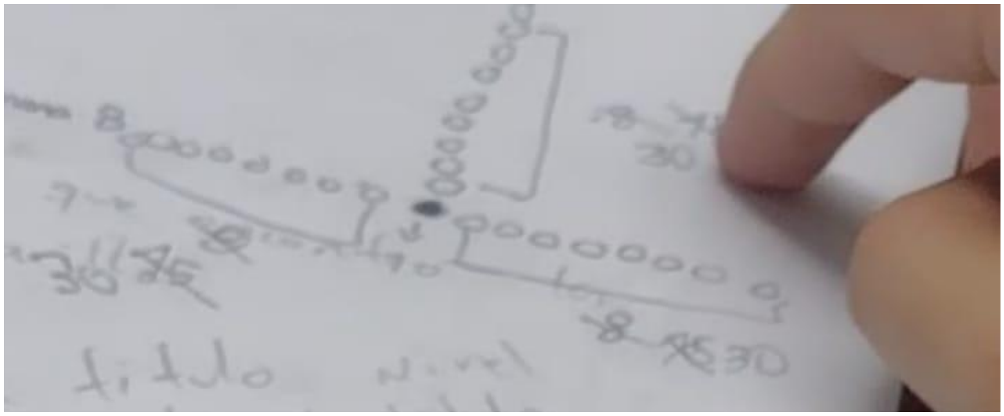


Por el nivel de profundidad, el investigador abre un espacio para analizar el patrón junto al estudiante, primero tapa con el dedo índice el círculo del medio de la semana 1 de entrenamiento y le pide al estudiante que cuente la cantidad de discos arriba, a la derecha y a la izquierda; así él pudo apreciar que era la misma cantidad que el número de la semana. Luego, le indica que debe sumar los discos de cada lado y con el resultado obtenido encuentre cuánto le falta para llegar a la cantidad de discos que se le presentaba. El estudiante nota que solo le falta un disco y repite el proceso con las semanas 2 y 3.

Para afianzar estas ideas en el estudiante, el investigador le sugirió que hiciera dibujos de cada figura hasta la semana 8 y mencionara siempre la cantidad de discos de cada lado. En la pregunta sobre la semana 15, el investigador le impide al estudiante seguir haciendo dibujos y le pide que lo haga con números. Al quitarle el camino que estaba siguiendo, el estudiante opta por tachar los números y escribir debajo de ellos los números correspondientes a la semana que buscaba hallar (ver Figura 28).

Figura 28

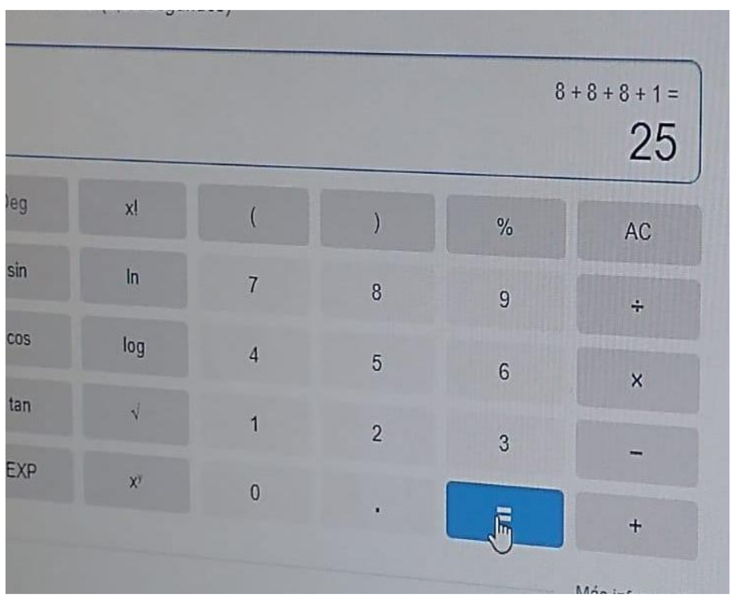
Procedimiento del estudiante



Es importante destacar el uso de la calculadora, debido a que permitió al estudiante centrarse en la identificación de la regla y no en los cálculos operatorios que conllevaba el nuevo método (ver Figura 29).

Figura 29

Proceso del estudiante en la calculadora

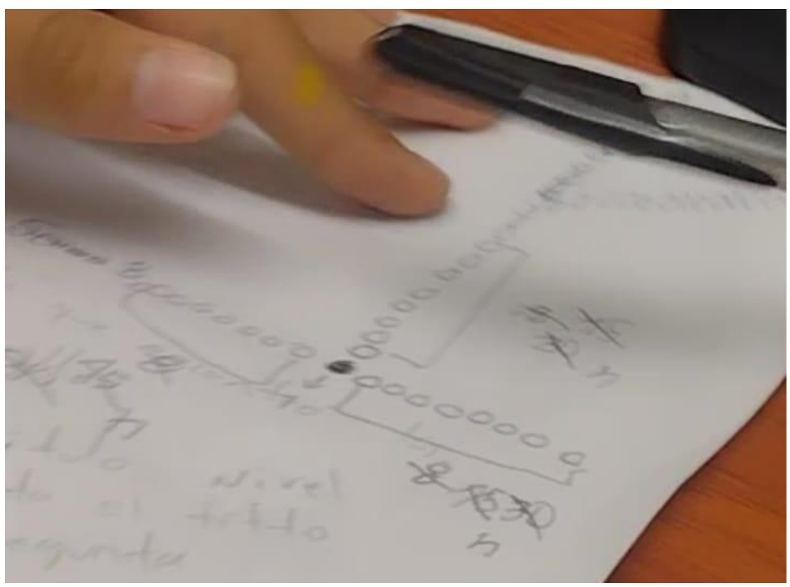


Los procesos realizados por el estudiante en las Figuras 28 y 29, muestran que el estudiante ha identificado dos características comunes nuevas entre los términos del patrón, la primera es que, al quitarle el círculo del centro, todos los lados quedan con una misma cantidad de círculos y la segunda es que está cantidad es igual al número de la semana.

Esta regla aritmética jugó un papel fundamental en la discusión que dirigió el investigador acerca de la cantidad de discos de la semana n. Inicialmente, el estudiante manifiesta no saber, pero al recalcar que n es un número como cualquier otro él procede a tachar los números de la hoja y escribe la letra n, como se observa en la figura 30.

Figura 30

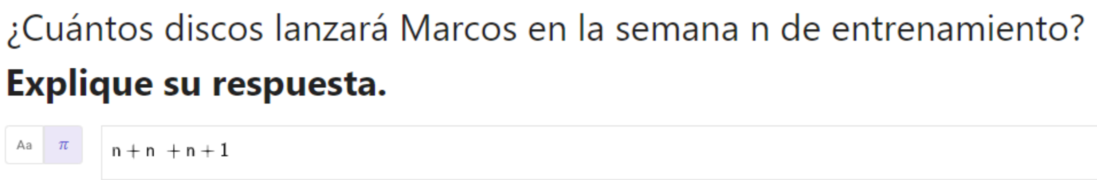
Método del estudiante



Seguidamente intenta escribir en la calculadora la fórmula que se aprecia en la Figura 31, a la espera de que esta le entregara un resultado, pero, en esta calculadora no se podían introducir letras, lo que causó un momento de confusión en el estudiante, ya que sentía que le faltaba terminar el proceso. El investigador le indica que ya había encontrado la respuesta y que la podía escribir en la plataforma.

Figura 31

Respuesta sobre la semana n-ésima de entrenamiento



Aunque el estudiante no tenga una concepción perfecta sobre el concepto de variable, reconoció que la regla aritmética que usaba con las semanas de casos específicos funcionaba con la de casos especiales. Además, de manera inductiva logró construir una fórmula en signos alfanuméricos.

En la última tarea de este momento, el estudiante halló correctamente la cantidad de discos que le iban saliendo al azar, el investigador le permite que encuentre la cantidad de discos de 5 semanas y luego le plantea la siguiente situación para ayudarle a responder la última pregunta:

I: Imagina que solo me va a salir la aplicación, no conozco nada del patrón, ni cómo hallar la cantidad de discos, ¿explícame cómo hallar la cantidad de discos de las semanas que salgan en la aplicación?

E: Suma las semanas y al resultado le sumas 1.

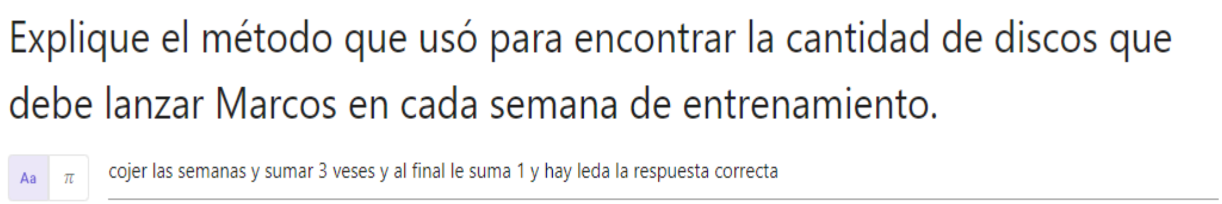
I: ¿Cuántas veces debo sumar el número de la semana?

E: 3.

Con la respuesta de esta tarea (ver Figura 32), el estudiante logra llegar al tercer proceso de generalización descrito por Kaput, debido a que logra expresar de manera verbal y escrita que no importa la semana que salga, el proceso para calcularlo será el mismo.

Figura 32

Fórmula encontrada por el estudiante



Finalmente, con todas las tareas completadas y en base a los resultados obtenidos, se puede afirmar que el estudiante está en un pensamiento contextual, debido a que la indeterminancia es un objeto explícito del discurso del estudiante y reconoce su carácter operatorio.

7.3 Estudiante del Nivel de Profundidad 3

A continuación, se exponen los resultados obtenidos de la aplicación de la actividad con el estudiante de este nivel, donde se destaca la forma en que el estudiante identificó los patrones.

7.3.1 Momento 1

Al iniciar la actividad, se le dijo al estudiante que comenzara con la lectura de las instrucciones. Luego, recibió una explicación por parte del investigador sobre cómo utilizar el Applet y del objetivo de la actividad. El estudiante comprendió rápidamente el funcionamiento del Applet y encontró la característica común entre los términos del patrón, al igual que sus compañeros, identificó que la cantidad de pesas aumentaba en 2.

7.3.2 Momento 2

En la primera pregunta de este momento, el estudiante demostró algunas dificultades para comprender y explicar enunciados, debido a que respondió la pregunta poniendo la cantidad de pesas de la semana 10 de entrenamiento. El investigador aprovechó este momento para explicarle el objetivo de la pregunta y conocer el método que había usado, como se muestra en el siguiente diálogo:

I: ¿Cómo hallaste la cantidad de pesas en cada semana?

E: Sumar 8.

I: 8, ¿por qué 8?

E: Porque, hay 8 y después sumo más 2 y ahí da 10 y a 10 le sumo otro 2 y da 12.

I: ¿Qué semana estás hallando?

E: La 4 y después la 5.

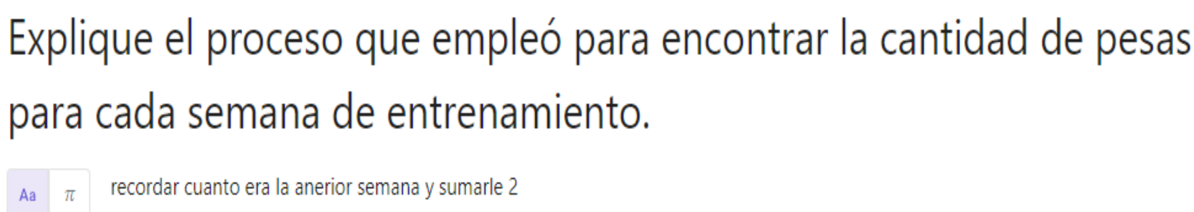
I: Está bien, pero ¿Cuál es el proceso para hallar la cantidad de pesas en cualquier semana?

E: Llevar la cuenta de la anterior semana para sumarle 2.

Las respuestas obtenidas en la discusión son muy positivas, debido a que el estudiante demuestra que ha identificado una similitud entre los términos del patrón y extiende su razonamiento para cualquier término cuando responde la última pregunta del investigador. Además, el estudiante plasma este razonamiento de forma escrita como se aprecia en la Figura 33.

Figura 33

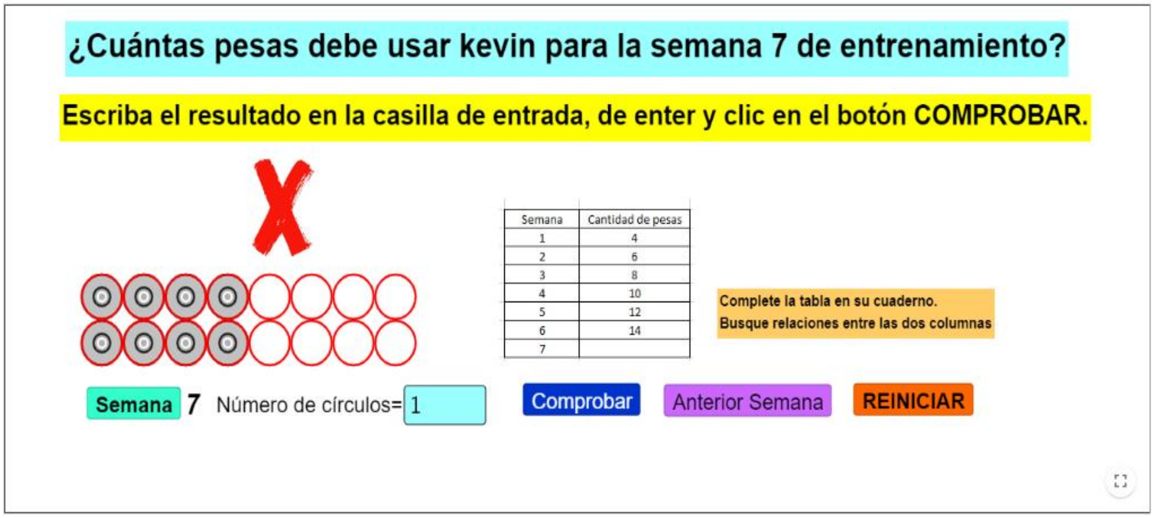
Respuesta el estudiante



En las siguientes preguntas de este momento, se le cuestionaba por la cantidad de pesas de las semanas 13 y 20 de entrenamiento, en las que no tiene mayores complicaciones para sumar sucesivamente, pero, para la semana 80 el estudiante manifestó su preocupación al investigador por la gran cantidad de sumas que debía realizar, como era una acción que se había presupuestado, se le propuso al estudiante buscar relaciones entre las dos columnas de la tabla que salía como ayuda en la semana 7 del Applet. (ver Figura 34)

Figura 34

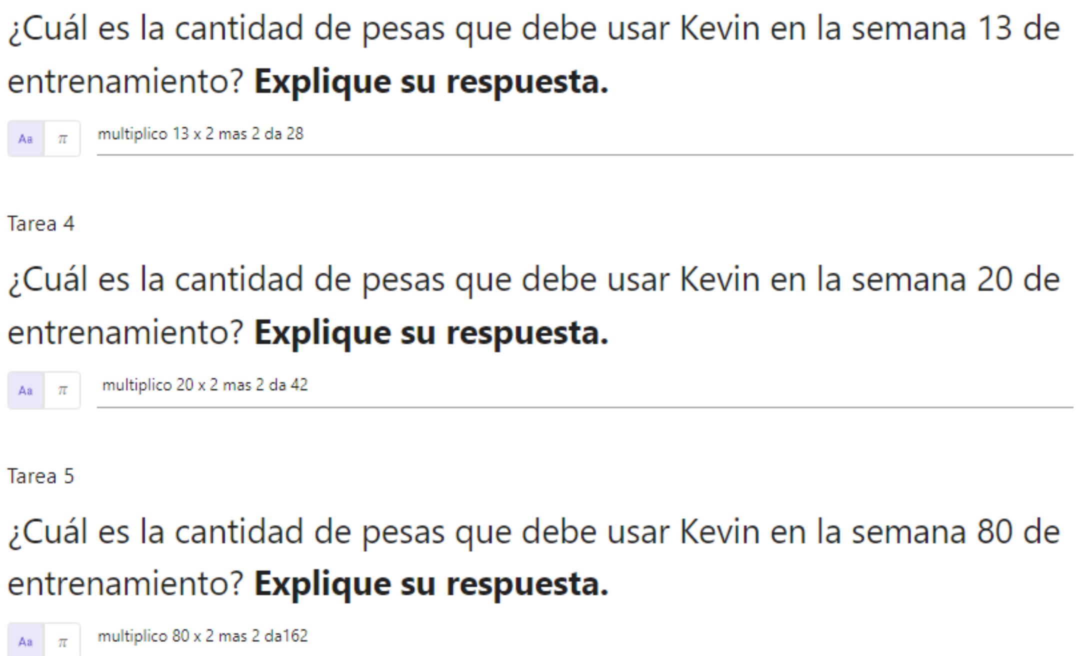
Retroacción del Applet del primer momento



Con base a la sugerencia hecha por el investigador, el estudiante comienza a multiplicar el número de la semana por diferentes cantidades y descubre que al multiplicar el número de la semana por 2 y sumarle 2 iba obtener la cantidad de pesas de las semanas que ya conocía. El estudiante utiliza la nueva regla para explicar cómo halló la cantidad de pesas de la semana 13,20 y 80, como se muestra en la Figura 35.

Figura 35

Respuestas del estudiante en el segundo momento



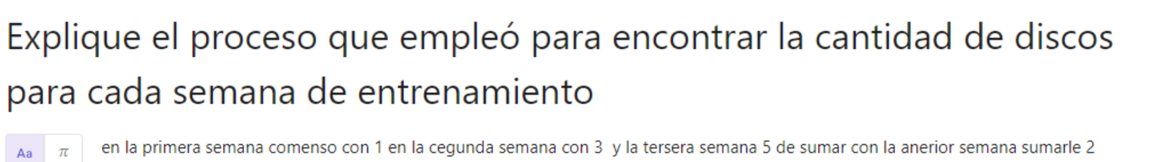
Es importante resaltar que las múltiples representaciones del patrón expuestas en el Applet permitieron generar espacios para discutir y razonar de una forma diferente.

7.3.3 Momento 3

Las tareas presentadas en este momento ayudaron al estudiante a afianzar las ideas que había generado, además, las respuestas obtenidas en la Figura 36 muestra que ha mejorado la capacidad de comprender enunciados y de responderlos.

Figura 36

Respuesta del estudiante



La respuesta del estudiante demuestra que encontró la característica común entre los términos y que el método utilizado para hallar la cantidad de discos de cada semana de entrenamiento del Applet es mediante suma sucesivas.

Seguidamente, el estudiante interactúa con el Applet de la tabla, en que un problema de programación durante el diseño de las actividades produjo un cambio en el patrón. En el Applet, el patrón era “$2n - 1$” y en la tabla el patrón que utilizaba el programa para corregir la respuesta era “$2n + 1$”.

Aunque los Applets contaban con patrones diferentes, esto no fue un problema grave, debido a que los dos patrones aumentan en 2 por cada término y como el método que usaba el estudiante para hallar la cantidad de discos era mediante sumas sucesivas, lo más probable es que haya sumado 2 a la cantidad de discos de la semana diez del Applet, que era (19), para obtener el número 21 correspondiente a la cantidad de discos de la semana 10 de la tabla.

Cuando el estudiante iba en la tercera fila de la tabla, el investigador decidió abrir un espacio para discutir los procesos y relaciones que había establecido el estudiante, como se muestra en el siguiente diálogo:

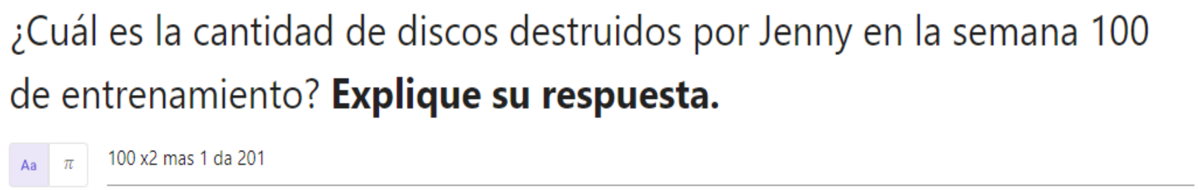
I: ¿Cómo calculaste la cantidad de discos destruidos en la semana 22?

E: Resté el 15 con el 22, luego, al resultado obtenido lo multipliqué por 2 y le sumé 31 (cantidad de discos de la semana 15).

El razonamiento expuesto por el estudiante permite observar la forma en que utiliza la característica común para hallar la cantidad de discos, como en cada semana se aumenta la misma cantidad, solo necesita conocer la diferencia entre los números de las semanas para multiplicarlo por 2 y sumárselo a la cantidad de discos de la semana que ya conoce. Además, estas relaciones lo guían a identificar la regla definitiva como se evidencia en la Figura 37

Figura 37

Regla identificada por el estudiante



Es importante destacar que el estudiante utilizó la tabla como un medio para comprobar las reglas aritméticas que estaba generando, ya que intentaba hallar la cantidad de discos de las últimas filas con estas reglas.

En las preguntas sobre el n-ésimo término, el estudiante manifestó que no comprendía el enunciado, por lo que, el investigador inició la siguiente discusión:

I: Sube a la tabla, por favor.

I: ¿Qué significará la n?

E: ¿Es dónde termina los números de la tabla?

I: No necesariamente, ¿qué otro significado puede tener? Mira en qué columna está la *n*.

E: En la semana.

I: Entonces, ¿*n* debe ser una sema…?

E: ¡Ya entiendo! Es como un número, pero no está ahí.

I: ¿Entonces cómo hallarías la cantidad de discos de ese número que no está ahí?

E: No sé.

I: ¿Cumpliría la misma regla que identificaste en las semanas anteriores?

E: Si.

I: ¿Cómo hallaste la cantidad de discos de la semana 100?

E: Multipliqué 100*2+1.

I: Y, ¿qué representa el 100?

E: ¿El 100 representaría a la n?

I: No exactamente, miremos en qué columna está de la tabla está el 100.

E: En semana

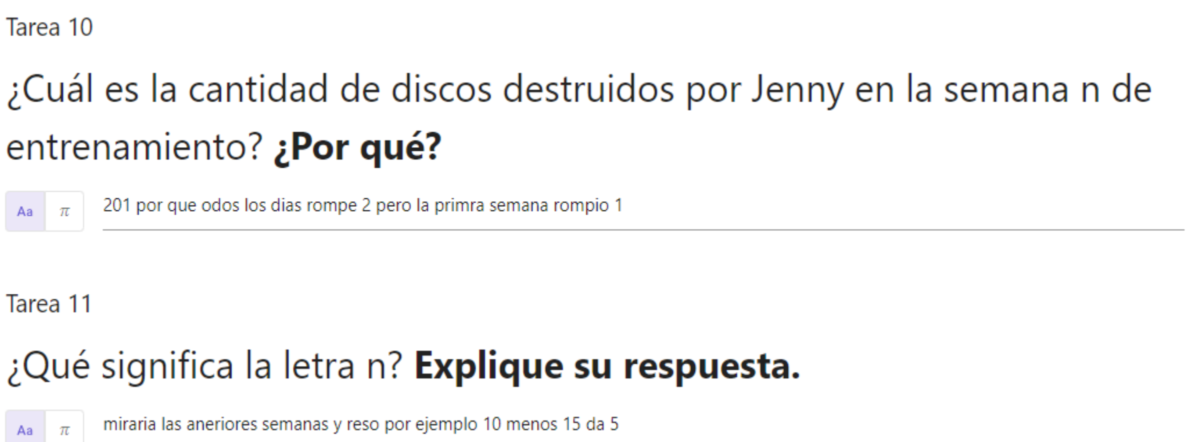
I: O sea que es la semana 100, si n es una semana, ¿cómo hallarías la cantidad de discos?

E: Pues, en cada semana miraría los números, para restarlos.

Las ideas expresadas por el estudiante en el diálogo se reflejan en las respuestas de la Figura 38, como la pregunta consulta por una cantidad él entiende que debe hallar un número, entonces toma a n como la última semana de entrenamiento de la tabla (la semana 100). En la segunda pregunta, expresa que para calcular la semana n él usaría el método del antepenúltimo diálogo.

Figura 38

Respuesta de las preguntas sobre el n-ésimo término



El estudiante terminó este momento en el segundo proceso de Kaput, debido a que solo pudo extender su razonamiento en casos específicos.

7.3.4 Momento 4

En este momento, se le presentó al estudiante un patrón numérico; se esperaba que esta actividad fuera retadora. El estudiante rápidamente identificó que cada día de entrenamiento Marcos recorre 3 metros de más y establece su primera regla aritmética, como se muestra en el diálogo:

I: ¿Cómo hallaste la cantidad de metros en la semana 4?

E: Multipliqué 4*3+2.

I: ¿Cuánto te da 4*3?

E: Sería mmm.

I: Porque, tienes escrito que 4*3 da 11, seguro, ¿qué da eso?

E: No, me equivoqué.

El estudiante encontró la respuesta correcta usando un cálculo incorrecto, como no contaba con ningún Applet para comprobar sus ideas, solo se dio cuenta del error cuando el investigador cuestionó sus cálculos. Luego de la discusión, el estudiante modificó la regla y estableció la siguiente, 10*3+2 para hallar la cantidad de metros en el día 10; el investigador cuestionó la efectividad de la regla y le sugirió probar con los días que ya conocía. Con esta actividad se terminó la primera sesión, debido a que el estudiante mostraba signos de cansancio.

Para la segunda sesión, el estudiante al llegar manifiesta que estuvo pensando en el problema y que ya tenía una solución, como se muestra en el diálogo:

E: Para encontrar la cantidad de metros del día 4, toca multiplicar 4*3-1.

I: ¿Por qué?

E: Porque, cada día se va sumando de a 3.

I: Y, ¿por qué crees que tu método si funciona?

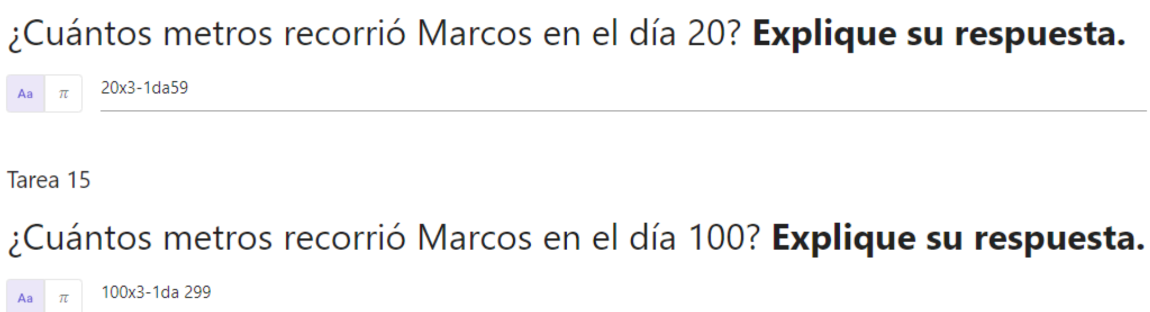
E: Porque, estoy multiplicando todos los días. (Señala los tres primeros días del patrón)

En este diálogo, se observa la primera demostración explícita por parte del estudiante, al manifestar que su regla aritmética funciona porque con ella encontró la cantidad de metros de los días que conocía. Esto es muy importante, ya que uno de los objetivos del diseño era que los estudiantes lograran argumentar y validar sus ideas por sí mismos.

Con la regla aritmética identificada, el estudiante encontró rápidamente las respuestas de la Figura 39.

Figura 39

Respuesta del estudiante en el cuarto momento



Por otra parte, el estudiante manifestó que la respuesta de la pregunta del día n de entrenamiento es 101, porque si el último día fue 100, entonces n es el siguiente. El investigador aprovechó este momento para entablar una discusión, como se muestra en el siguiente diálogo:

I: ¿Qué es n?

E: Un día de entrenamiento.

I: ¿Sabes qué día exacto es?

E: No.

I: Está bien, pero ¿cómo lo hallaste la cantidad de metros en el día 100?

E: Pues, con el método que ya le expliqué.

I: Entre esta fórmula y la otra, ¿qué cambiaste? (señala la formula del día 20 y la del día 100)

E: Cambié el 20 por el 100.

I: O sea, solo cambiaste el día, si aquí es el día n, ¿quién debería ir en el puesto del 100?

E: ¿El siguiente?

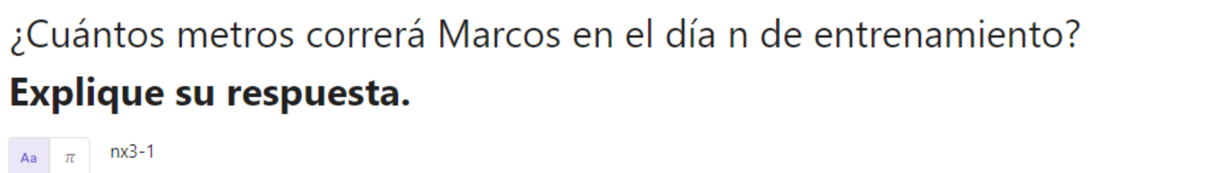
I: mmm no.

E: Entonces el n.

Después de esta discusión, el estudiante responde la pregunta de la Figura 40, donde encuentra la fórmula correcta. No obstante, el razonamiento expuesto por el estudiante en el diálogo demuestra que él no tiene una comprensión clara de la fórmula obtenida.

Figura 40

Fórmula del n-ésimo término

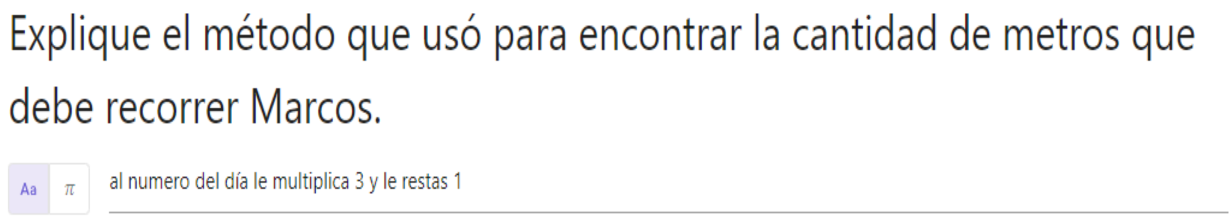


Para la última tarea, el estudiante trabajó inicialmente con el Applet y luego, se le hizo la misma sugerencia que al estudiante de nivel 2, que debía diseñar una fórmula para que una persona que desconociera el patrón pudiera calcular la cantidad de metros sin ningún problema.

La respuesta obtenida en la Figura 41 es muy importante, debido a que el estudiante mencionó la indeterminancia de manera explícita y la operó como cualquier número natural (Radford le denomina el carácter analítico). Estas acciones constituyen procesos y razonamientos propios del pensamiento algebraico.

Figura 41

Fórmula del estudiante para calcular la cantidad de metros



Finalmente, el investigador hizo una comparación entre las fórmulas de la Figura 40 y 41, para que el estudiante entendiera que las dos fórmulas aluden a un mismo objeto matemático.

7.4 Estudiante del Nivel de Profundidad 4

A continuación, se exponen los resultados obtenidos de la aplicación de la actividad con el estudiante de este nivel, donde resalta la concepción introducida en el estudiante al respecto de las semanas indeterminadas del patrón.

7.4.1 Momento 1

Al iniciar la actividad, se le dijo al estudiante que comenzara con la lectura de las instrucciones. Luego, recibió una explicación por parte del investigador sobre cómo utilizar el Applet y del objetivo de la actividad. El estudiante comprendió rápidamente el funcionamiento de la plataforma e identificó que la cantidad de pesas aumentaba en 2 por cada semana de entrenamiento.

7.4.2 Momento 2

En la primera pregunta de este momento, el estudiante proporciona una respuesta acorde al objetivo, debido a que plasma su razonamiento de manera clara. Al igual que los niveles anteriores, él encuentra la cantidad de pesas sumando sucesivamente, como se evidencia en la Figura 42.

Figura 42

Respuesta del estudiante en el segundo momento

Tarea 2

Explique el proceso que empleó para encontrar la cantidad de pesas para cada semana de entrenamiento.

cada semana el numero de pesas que utiliza cambia la diferencia cada semana es de 2 entonces cada semana se le suman 2 pesas

Tarea 3

¿Cuál es la cantidad de pesas que debe usar Kevin en la semana 13 de entrenamiento? **Explique su respuesta.**

debe usar 28 por que se le suma la cantidad de 3 dias que es 6 pesas 22+6=28

En la tercera pregunta, el estudiante buscó establecer relaciones entre los números de las semanas para calcular la cantidad de pesas rápidamente, como se muestra en el siguiente diálogo:

I: En la semana 20 se usan 44 pesas, ¿por qué?

E: 22+22.

I: Explícame, ¿por qué sumas 22+22?

E: En la semana 10 levantó 22 y como 10+10=20, basta sumar 22+22.

A pesar de que su razonamiento tiene sentido, el investigador hacer caer en la cuenta al estudiante de que su estrategia era incorrecta, para ello, utilizó la semana 4 y 8 del Applet, como 8=4+4, bajo el procedimiento que usó el estudiante el número de pesas de la semana 8 debería ser 10+10=20, pero al introducir esta respuesta en el Applet aparece que es incorrecta.

Luego de la discusión, el estudiante comienza a buscar otros métodos para calcular la cantidad de discos de forma rápida, pero, sin tener éxito alguno. Ante esto, el investigador decide proponer una nueva forma de analizar el patrón.

I: Vas a buscar una relación entre el número de la semana y las filas de la figura.

E: ¿Es como una pirámide?

I: mmm no.

I: ¿Qué relación tiene una de las filas de la figura con el número de la semana?

E: No le veo ninguna.

I: En la semana 1, ¿cuántas pesas hay en la fila de arriba?

E: 1.

I: ¿En la semana 2?

E: 2.

I: Y, ¿qué dice el número de la semana?

E: 2.

I: Y, ¿en la semana 3?

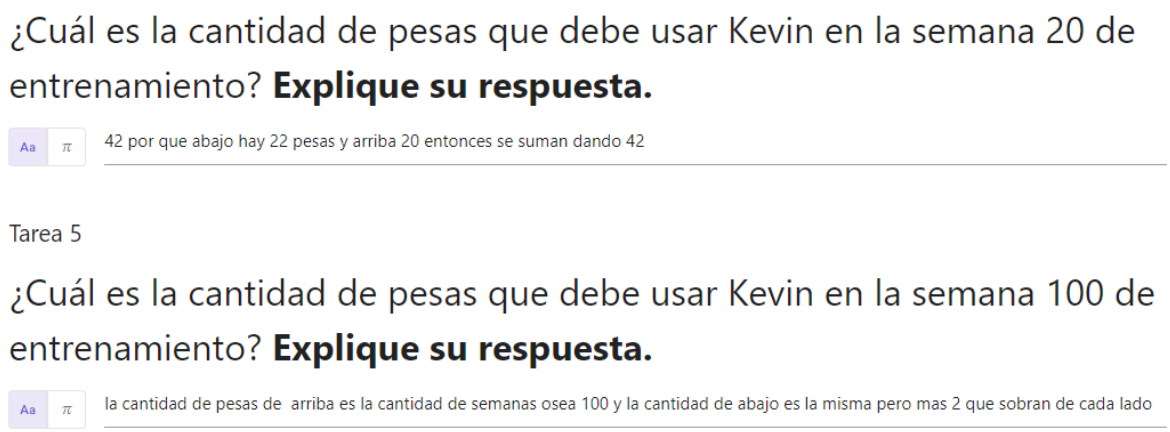
E: 3.

I: Ahora, revisa las filas de abajo.

El investigador aprovechó las múltiples representaciones del objeto matemático para ayudar a la construcción de un análisis nuevo en el estudiante, el cual se ve reflejado en la respuesta de las dos últimas preguntas de la Figura 43.

Figura 43

Respuestas de las últimas preguntas del segundo momento



Respecto a los procesos de Kaput, el estudiante logró captar dos características comunes (primer proceso), una por su cuenta y la otra sugerida por el investigador, además, pudo extender este razonamiento más allá de los términos dados (segundo proceso).

7.4.3 Momento 3

El patrón de este momento era complejo, debido a que el aumento entre una semana y otra no era constante. Como se había presupuestado, la actividad se le complicó bastante al estudiante, porque no encontraba ni la cantidad de discos correcta para las semanas presentadas en el Applet.

El investigador aprovechó este momento para conocer cómo estaba razonando el estudiante y discutir un método para encontrar la cantidad de discos, como se evidencia en el siguiente diálogo:

I: ¿Cómo estás hallando la cantidad de discos en la semana 10?

E: La cantidad de semanas es la que está arriba que son 10 y hacia el lado es la cantidad de semanas menos 1, entonces 10*90 pero no es correcto.

I: Y, si cuentas desde aquí (señala círculo de la esquina inferior izquierda del cuadrado de la Figura 45)

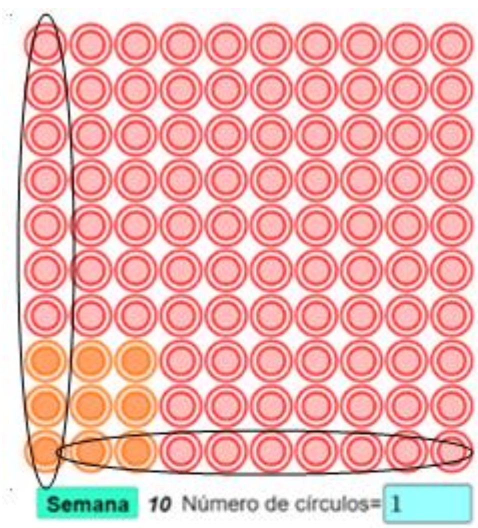
E: ¿Este de acá cuenta? (señala el círculo mencionado en la línea anterior)

I: Tómalo en el conteo, a ver si funciona.

El diálogo evidencia que el estudiante estaba buscando una estrategia similar a la aprendida en el momento anterior, donde estableció relaciones entre el número de la semana y la figura. Sin embargo, él estaba dividiendo la figura de manera incorrecta, como se aprecia en la Figura 44.

Figura 44

Método de conteo empleado por el estudiante



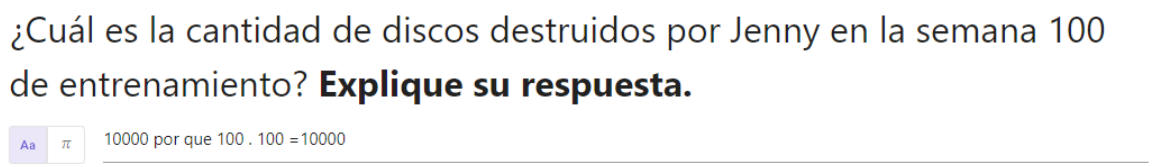
Luego de la discusión, el estudiante reestructura rápidamente la fórmula que tenía y la prueba en el Applet, de esta manera se da cuenta que ya encontró la regla correcta.

El Applet de la tabla fue una tarea bastante fácil para el educando por dos razones, primero, ya poseía un método práctico para calcular la cantidad de discos, segundo, sus habilidades aritméticas eran buenas, por ende, realizar las multiplicaciones no era un problema para él.

La respuesta de la pregunta de la Figura 45 es aceptable, pero, por las capacidades del estudiante, se pudo exigir una mejor explicación, en la que utilizara más elementos de las relaciones que había establecido.

Figura 45

Regla utilizada por el estudiante



En las preguntas sobre el n-ésimo término es el estudiante el que inicia la discusión con el investigador, ya que buscaba afirmar las ideas que tenía, como se muestra a continuación:

E: La semana n, ¿es la suma de toda la cantidad de discos destruidos o qué cantidad será la semana n?

I: ¿Qué piensas que es la n?

E: Las letras se usan para representar un número desconocido.

I: Está bien, si se usan para representar un número desconocido. Entonces, ¿cómo hallamos la cantidad de discos de una semana que no sabemos?

E: Despejando la x, pero no hay x.

I: Efectivamente no hay x, pero ¿cómo hallaste la cantidad de discos en la semana 100?

E: Multipliqué 100*100

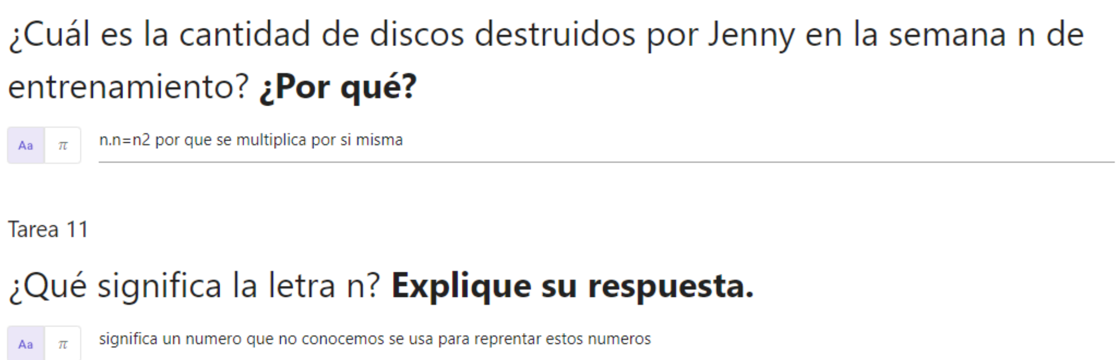
I: Entonces, si n es una semana de entrenamiento, ¿cómo hallarías la cantidad de discos?

E: $n * n$

Las respuestas de la Figura 46 reflejan varias de las ideas expresadas por el estudiante durante el diálogo. Se destaca, que logró construir una fórmula en signos alfanuméricos y establecer una relación sobre lo visto en el colegio y el nuevo conocimiento, cuando recuerda que al multiplicar $x * x$ se obtenía x^2, entonces $n * n = n^2$.

Figura 46

Fórmula del n-ésimo término



Otro punto que resaltar es la utilización de la n rompió con el esquema tradicional en el que los estudiantes trabajan solo con la x, además, de que siempre que aparezca una letra no es necesario despejar. Por otra parte, el estudiante llega al tercer proceso de Kaput, debido a que comprende que n representa un número desconocido y halla la fórmula para esta semana.

7.4.4 Momento 4

En este momento, se le presentó al estudiante un patrón numérico; se esperaba que esta actividad fuera retadora. Como fue habitual en todos los niveles, el educando inició con la estrategia de sumas sucesivas para encontrar la cantidad de metros en el día 4 de entrenamiento.

El estudiante continuó sumando sucesivamente hasta el día 10, pero, no argumentó sus resultados mencionando la cantidad de días que sumó, sino, con base a la nueva característica común que identificó, como se muestra en la Figura 47.

Figura 47

Característica común identificada por el estudiante

El investigador aprovechó este momento para generar un espacio de discusión acerca de las relaciones que había encontrado y sugerirle que buscara una relación entre las tablas de multiplicar, el número del día y la cantidad de metros.

La característica común mencionada en la Figura 47 fue un elemento importante en la identificación de la regla para calcular los términos del patrón, debido a que el estudiante la usó para validar si la cantidad arrojada por las reglas que estaba creando era correcta o no. Al cabo de unos minutos, el educando encontró la regla correcta (ver Figura 48).

Figura 48

Regla utilizada por el estudiante en momento cuatro

En la pregunta sobre el n-ésimo término, fue el estudiante el que inició la discusión, como se muestra a continuación:

E: La fórmula sería n por otro número.

I: ¿n por cuál número?

E: n por otro número.

I: mmm, está bien, pero ¿Cómo lo hiciste en el día 100?

E: Multipliqué 5*100-2=498

I: Y, ¿por qué con n no es igual?

E: Como tal nos dan el día n, pero, no la cantidad de metros.

I: ¿n qué representa en el problema?

E: El día.

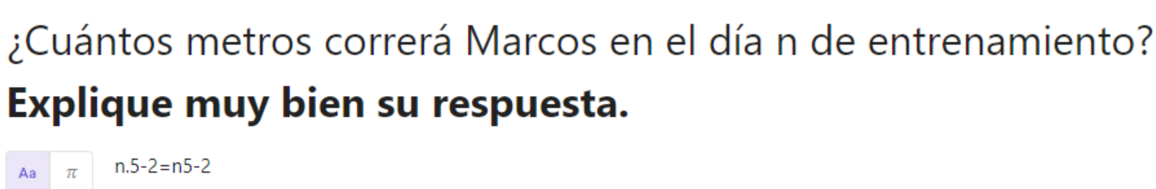
I: ¿Cómo hallas la cantidad de metros en un día?

E: Multiplicando la cantidad de días por 5 y restándole 2 al resultado.

(El estudiante vuelve a leer la pregunta y cae en la cuenta de lo que debía hacer, luego, escribe la fórmula que se aprecia en la Figura 49)

Figura 49

Fórmula del n-ésimo término



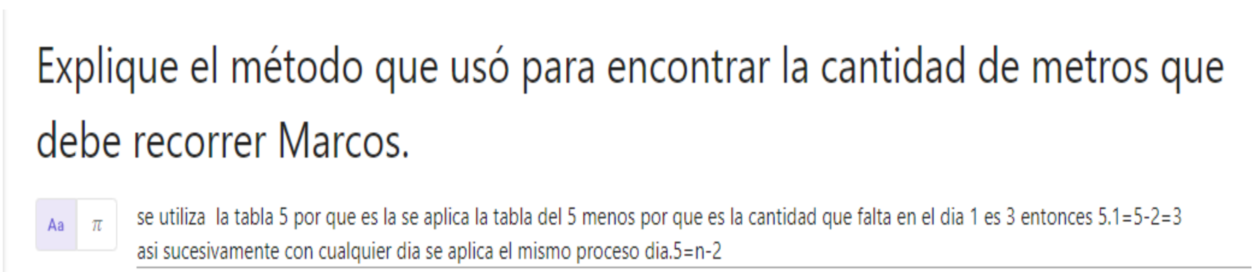
El estudiante tuvo problemas para contestar la pregunta de la Figura 49, debido a que él percibía las letras como incógnitas y no como variables, esto se evidencia cuando él manifiesta que multiplicaba a n por cualquier número porque no tenía la cantidad de metros.

Aunque, el educando encontró la fórmula correcta (ver Figura 49), él siente inconforme de que no pueda manipular a las letras como hace en las ecuaciones, por eso, él pone el igual y reescribe lo mismo; esto indica que el concepto de variable no es algo concreto en su pensamiento.

Para la última actividad, el investigador utiliza la misma sugerencia de los niveles anteriores, que intente explicarle a una persona que desconoce el patrón como podría hallarlo. Como se aprecia en Figura 50, el estudiante parte de un ejemplo específico y luego, plantea la fórmula de la pregunta anterior, aunque la escribe mal, debido a que el estudiante estaba afanado en el proceso de escritura y ya estaba algo cansado.

Figura 50

Fórmula diseñada por el estudiante



La forma en la que el estudiante manipula la indeterminancia en esta pregunta nos da indicios de que el posee un pensamiento algebraico simbólico "primitivo", debido a que, de manera inicial, la menciona a través de las palabras clave, "Tabla del 5 menos 2" (expresiones propias del pensamiento contextual) y luego, la expresa en signos alfanuméricos (lenguaje propio del pensamiento algebraico simbólico).

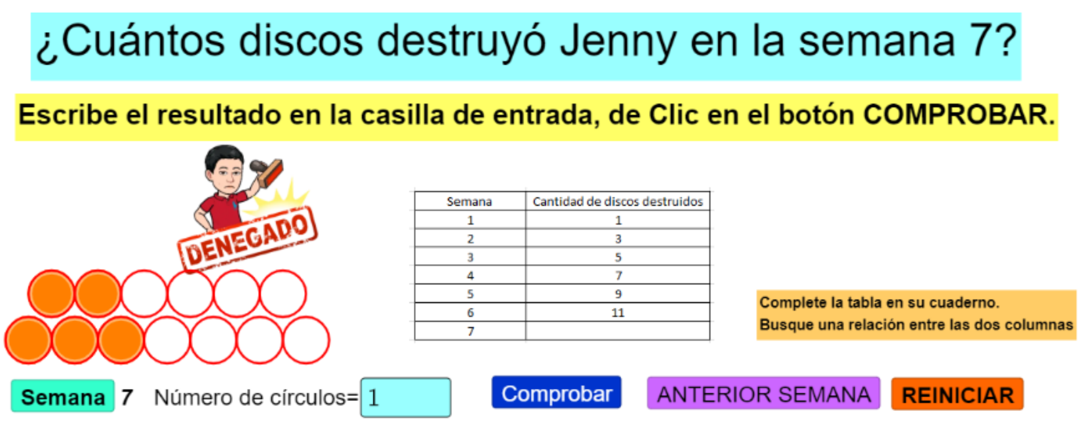
7.5 Evaluación de los Diseños Didácticos

Para realizar esta evaluación, solo se tomará los resultados obtenidos de los estudiantes de los niveles de profundidad 2,3 y 4, debido a que el estudiante del primer nivel no contaba con las habilidades necesarias para el desarrollo de la actividad. Se analizará la consecución de los objetivos planteados en la sección 6.1, con los propósitos establecidos en la malla curricular y la incidencia del entorno virtual en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

El primer momento de la actividad fue un espacio que le permitió a los estudiantes conocer el uso de plataforma y desarrollar el primer proceso de Kaput como se había planteado. Para ello, se contó una variedad de ayudas presentes en el Applet, de las que se destacan la de los círculos rojos y las tablas (ver Figura 51); la primera permitió que los estudiantes realizaran el conteo de las figuras y la segunda proporcionó otro medio de representación del patrón. Las ayudas restantes que invitaban al analizar y establecer relaciones no tuvieron la incidencia esperada en el razonamiento de los estudiantes, ya que los estudiantes no están acostumbrados a buscar relaciones entre objetos.

Figura 51

Ayudas del Applet



La primera pregunta del segundo momento pretendía promover los procesos de comunicación y razonamiento en los estudiantes (ver Figura 9), pero, de manera inicial ningún estudiante logró responder correctamente, porque solo ponían la cantidad de discos/pesas de la semana 10 de entrenamiento. Esto no se debía a una mala redacción de la pregunta, sino a un problema en la comprensión del objetivo de ella. Después de que el investigador explica la pregunta los estudiantes pudieron responder correctamente sin mayores dificultades.

Las preguntas restantes de la Figura 9 obligaron a los estudiantes a cambiar el método de sumas sucesivas para calcular los términos del patrón, debido a que tuvieron que establecer relaciones entre las figuras y el número de la semana, la cuales conllevaron a la construcción de reglas aritméticas. Además, fue un espacio donde se propiciaron los procesos de razonamiento, demostración y comunicación.

Las primeras dos tareas del tercer momento fueron el espacio para afianzar ideas como se esperaba, los estudiantes se sintieron más cómodos con el manejo del Applet y poseían ideas sobre cuáles relaciones debían buscar entre los términos del patrón; también, tenían claridad de las respuestas que se esperaban en preguntas como de la Figura 9.

El Applet de la tabla (ver Figura 11) cumplió con los objetivos planteados, fue otro medio de representación del objeto matemático que ayudó positivamente a la creación y demostración de reglas para calcular los términos del patrón en cuestión, además de ser un medio para establecer conjeturas y discusiones acerca del significado de la letra n en la última fila de la tabla.

Las preguntas sobre el n-ésimo término no tuvieron los resultados esperados, porque, se pretendía que los estudiantes asociaran de manera inductiva que la regla utilizada con las semanas con números específicos (semana 10, 13, 36…100) era la misma para la semana n, objetivo que no se cumplió, ya que los estudiantes terminan asociando la letra n como el último número de la tabla. Además, los pocos estudiantes que construyeron la fórmula correcta intentaron manipularla como si fuera una ecuación, debido a que habían visto temas referentes a ecuaciones lineales y tenían la concepción de que al final siempre debían hallar un número. Por lo que, se debe reconsiderar la pertinencia de las preguntas sobre el n-ésimo término y la forma en que se propusieron.

El cuarto momento tenía como objetivo evaluar los aprendizajes construidos por los estudiantes a través de un patrón que se presentaba de forma tradicional, en el que se muestran tres términos al mismo tiempo. Sin embargo, la forma en que se presentó el patrón en los niveles 1 y 2 no fue favorable, debido a que no se mostraba la cantidad de discos de manera numérica; al no contar con este tipo de representación los estudiantes tendieron a perderse en los cálculos, porque en general su memoria a corto plazo no es tan buena. Otro problema respecto a la presentación del patrón es que no contaba con algún tipo de ayuda (colores, señales, entre otras) que invitara a los estudiantes a analizar regularidades entre los términos.

En el tercer y cuarto nivel, cambiar los patrones geométricos por uno numérico fue una decisión acertada, porque supuso un nuevo reto para los estudiantes que ya habían captado la forma en la que debían analizar los patrones geométricos, además, de impulsar relaciones en la que la regla que se encontrara sería de la manera esperada ($2n + 1$, $3n - 2$, entre otras). Las preguntas planteadas en la Figura 16 permitieron evidenciar la forma en la que el estudiante había captado el patrón y el proceso de generalización de Kaput al cual había llegado.

El Applet de la Figura 17 cumplió a cabalidad con el objetivo planteado, debido a que generó un espacio donde el estudiante pudo apreciar la aleatoriedad en que se generaban los números, que cumplían la misma regla que había identificado e impulsó la creación de una fórmula en la que el estudiante mencionó la indeterminancia de manera explícita y estaba consciente de ella.

En general, las tareas planteadas a lo largo de los cuatro momentos lograron una articulación entre los procesos aritméticos y algebraicos, porque el estudiante partía de tareas que lo invitaron a analizar casos específicos para luego, encontrar reglas aritméticas, las cuales en las tareas finales se convirtieron en reglas algebraicas.

Otro aspecto importante para evaluar es la plataforma en que se presentó las actividades, porque se buscaba que fuera de fácil acceso y manejo, ya que el objetivo de la actividad no era que el estudiante aprendiera a usar GeoGebra sino desarrollara su pensamiento algebraico. Ante esto, las tareas de registro, uso de los Applets y manejo del teclado, fue un proceso sencillo para los alumnos.

Finalmente, las diferentes acciones realizadas por los estudiantes a lo largo del proceso de implementación, como el análisis que hizo el estudiante de cuarto nivel en el patrón del cuarto momento, las relaciones entre las tablas de multiplicar y los patrones expuestos por el estudiante de tercer nivel, son prueba de que la mayoría de los propósitos planteados en la malla curricular fueron acordes.

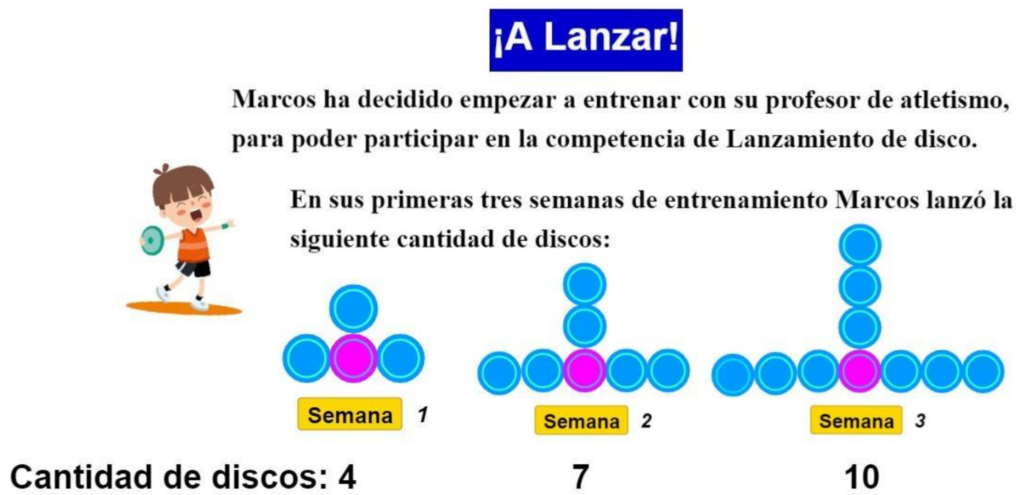
7.6 Ajustes Realizados al Diseño Didáctico

Es importante resaltar, que, aunque los resultados obtenidos en la implementación del diseño didáctico son muy positivos, eso no significa que todo haya salido a la perfección, porque, siempre hay la posibilidad de mejorar. En esta área del conocimiento, es indispensable que los profesores e investigadores estén en un proceso constante de reflexión, en el cual se procure identificar lo bueno y malo de cada actividad, método o estrategia que se use en las aulas de clase. Con base a los resultados y conclusiones de la evaluación de la sección anterior, realizamos las siguientes modificaciones al diseño didáctico.

En todos los patrones presentados a lo largo de los cuatro momentos, se agregaron colores en las figuras, para que los estudiantes puedan tener una guía que les ayude a establecer relaciones, como se muestra en la Figura 52.

Figura 52

Situación problema del momento 4 del nivel de profundidad 2



Asimismo, la Figura 52, evidencia otras modificaciones realizadas a los patrones del momento 4 de los niveles de profundidad 1 y 2, donde se agregó la representación numérica de la cantidad de discos de cada semana.

En el patrón presentado en el cuarto momento de los niveles profundidad 3 y 4 (ver Figura 16), se cambió la unidad de medida usada en el problema, debido a que no es muy realista que una persona salga a correr distancias tan pequeñas, por ello, se decidió usar kilómetros, que es una medida más realista de acuerdo con el contexto.

Por otra parte, como se expuso en este trabajo, el estudiante del nivel de profundidad 1, no pudo realizar la actividad, ante ello y conociendo de antemano que en el aula de clase posiblemente habrá más estudiantes con estas mismas condiciones, se decidió crear una actividad adicional, la cual representaría como el nivel de profundidad 0.

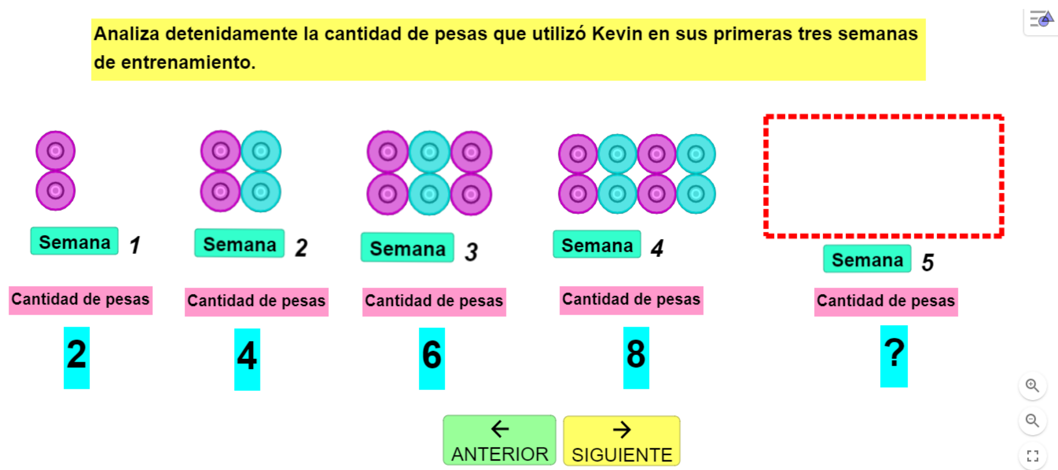
En general, la estructura de este nuevo nivel será la misma, se mantendrán los cuatro momentos y las preguntas planteadas en ellos. Los principales cambios se verán reflejados en los

Applets que el estudiante utilizará en el primer y tercer momento, además, de la incorporación de un Applet en el cuarto momento.

En los Applets mencionados, se le presenta al estudiante la misma situación problema y cuatro términos del patrón al mismo tiempo, como se muestra en la Figura 53. Al igual que en los otros niveles, el objetivo es que analice la rutina de entrenamiento.

Figura 53

Primer Applet del momento 1 del nivel de profundidad 0

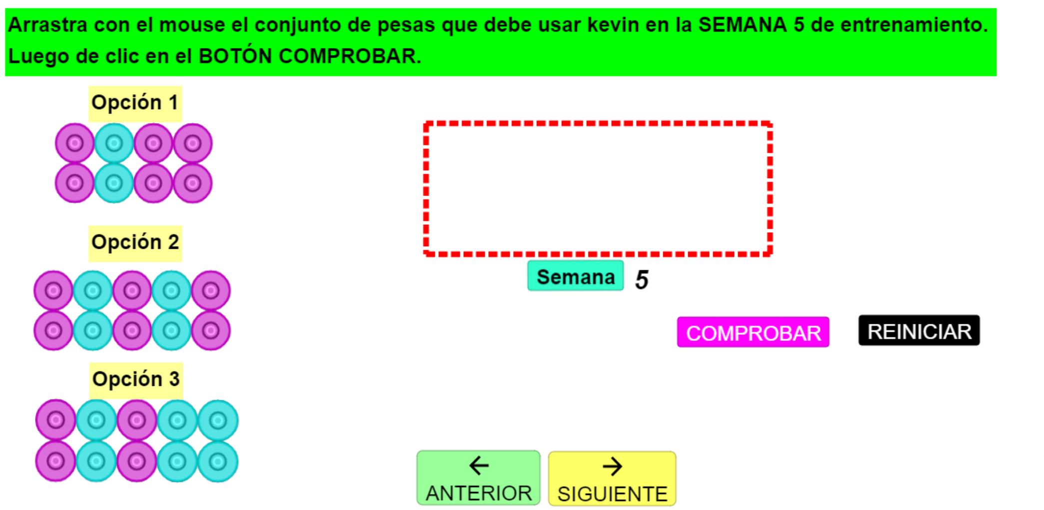


Nota. Enlace para acceder a la actividad del nivel de profundidad 0: https://www.geogebra.org/classroom/k8djsftr

La primera relación que se espera que el estudiante reconozca, es la forma en que se intercalan los colores en las figuras y para comprobar si él pudo captar esta característica común, se le consulta cuál será el término 5 del patrón, como se muestra en la Figura 54.

Figura 54

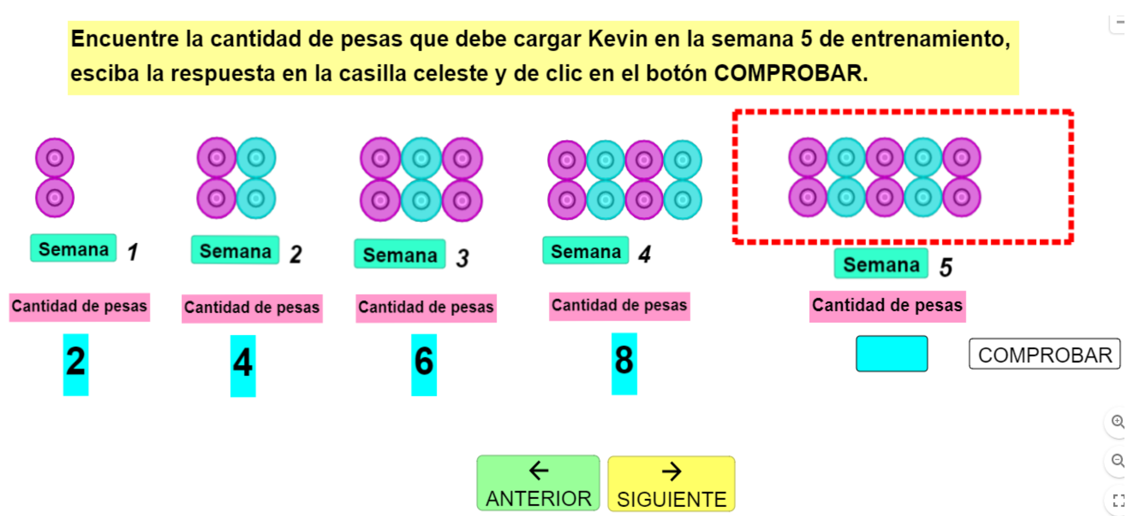
Preguntas del Applet



Luego, se le consultará por la cantidad de pesas que debe levantar Kevin en la semana 5 de entrenamiento (ver Figura 55), aquí se espera que el estudiante analice la cantidad de pesas de cada semana e identifique en cuánto ha ido aumentando.

Figura 55

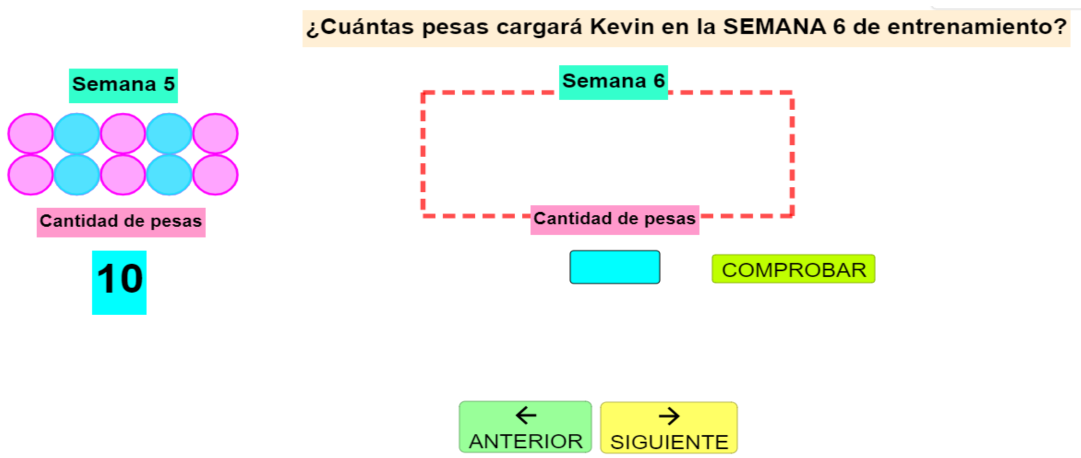
Preguntas del Applet



Finalmente, el estudiante deberá encontrar la cantidad de pesas hasta la semana 10 de entrenamiento (ver Figura 56).

Figura 56

Preguntas Finales del Applet



Como uno de los objetivos es que el estudiante desarrolle sus habilidades de comunicación, razonamiento y demostración, se decidió mantener las preguntas que acompañaban a los Applets en los diferentes momentos.

8. Conclusiones

La pregunta que nos planteamos al inició del trabajo fue la siguiente: ¿Cómo promover el desarrollo del pensamiento algebraico y la inclusión en estudiantes de grado séptimo mediante el uso de patrones y la tecnología?

Las tareas propuestas a la largo de los cuatro momentos lograron la articulación entre la aritmética y álgebra de la manera esperada. Los estudiantes iniciaron analizando casos específicos y cercanos a los términos dados (momento 1), establecieron sus primeras reglas aritméticas (momento 2), luego, reforzaron sus ideas en el tercer momento al interactuar con un patrón similar y se enfrentaron a la búsqueda de una forma general por primera vez, la cual conseguirían en el cuarto momento.

Respecto a las tareas que impulsaron acciones y razonamiento propios del pensamiento algebraico, se destaca la última tarea del momento 4, debido a que invitó a los estudiantes a pensar la indeterminancia de forma analítica, ya que se vieron forzados a proporcionarle un nombre y operar como si fuera un número cualquiera. Asimismo, esta tarea ayudó a la evolución del pensamiento factual al contextual en los estudiantes, debido a que antes de ella, las expresiones eran basadas en casos específicos, por ejemplo, $100 * 2 + 1$, en cambio, en la tarea en mención, se obtuvieron producciones como “coger las semanas y sumarlas tres veces y al final le sumo 1” “al número del día lo multiplicó por 3 y le restas 1”.

El uso de los Applets jugó un rol fundamental en la inclusión de los estudiantes con discapacidades en la actividad, debido a que generó un espacio en el que pudieron comprender, resolver y discutir el objeto matemático con base a su ritmo de aprendizaje. Los resultados del momento 4 del estudiante de nivel 2, son prueba de que, sin la ayuda del Applet, no tenía la capacidad matemática suficiente para extender su razonamiento en un rango de 10 términos.

Por otra parte, tecnologías tradicionales como el lápiz, el papel y las calculadoras fueron elementos importantes que apoyaron la identificación del patrón, porque, permitieron tener una representación del objeto matemático, llevar un orden de las operaciones y obtener respuestas rápidamente. De esta manera, se evitó que la actividad fuera tediosa y estresante para los estudiantes con habilidades aritméticas limitadas.

Las habilidades de comunicación y demostración fueron promovidas en los espacios de discusión con el investigador, quien siempre cuestionaba por la efectividad del método y la forma en lo había encontrado. Asimismo, las frases “por qué” “explique su respuesta” y “justifique su respuesta" en las preguntas de cada momento son tareas que los estudiantes ignoran, porque para ellos no es habitual explicar las respuestas en matemáticas.

El conocimiento construido por los estudiantes respecto a la identificación de patrones, la modelización de fenómenos y la forma de expresarlos es importante y valioso, pero no es complemento, ideas como variable y el carácter operatorio de la mismas todavía están de manera muy general, por lo que es necesario continuar con actividades que permitan a los estudiantes fortalecer los aprendizajes adquiridos y complementarlos con nuevos.

El estudiante de nivel 1 de profundidad es un claro ejemplo, de que la inclusión forzada no funciona, debido a que él no tenía las capacidades y conocimientos matemáticos para resolver la actividad, aunque contó con la ayuda de la tecnología, del investigador y de una profesora dedicada solo a él, no pudo realizarla. Con esto, se espera, que se reflexione si en verdad lo más idóneo y beneficioso para estudiantes con estas condiciones es introducirlos de cualquier forma en las actividades, o realizar procesos serios, adecuados y donde se discutan cuáles son los contenidos y conceptos que estos estudiantes deben aprender.

Finalmente, de los análisis realizados a las respuestas escritas y orales proporcionadas por los estudiantes, se puede afirmar que las actividades diseñadas en el aula virtual de GeoGebra fueron un medio que permitió el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes y los procesos matemáticos, como se planteó en la sección 6.1.

Referencias Bibliográficas

Alsina, Á. & Acosta, Y. (2018). Iniciación al álgebra en Educación Infantil a través del pensamiento computacional: una experiencia sobre patrones con robots educativos programables. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 52, 218-235. http://funes.uniandes.edu.co/17184/

Arbona, E., Beltrán, M. J., Jaime, A. & Gutiérrez, Á. (2017). Aprendizaje del álgebra a través de problemas de patrones geométricos. *Suma*, 86, 39–46.

Arnaiz, P. (2000). Educar en y para la diversidad. En Soto, F. y López, J. (Coords.): *Nuevas Tecnologías, Viejas Esperanzas: Las Nuevas Tecnologías en el Ámbito de las Necesidades Especiales y la Discapacidad: Actas* (pp. 18-29). Murcia: Consejería de Educación y Universidades.

Azarquiel, Grupo. (1993). I*deas y actividades para enseñar álgebra*. Síntesis.

Castro, E., Cañadas, M. C. & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, 54, 55-67. http://funes.uniandes.edu.co/1557/

Cortés, J., Hitt, F. & Saboya, M. (2014). De la aritmética al álgebra: números triangulares, tecnología y ACODESA. *REDIMAT*, 3(3), 220-252. http://funes.uniandes.edu.co/16189/

Decreto 1421 de 2017 [Ministerio de Educación Nacional]. Por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. Agosto 29 de 2017.

Díaz-Barriga, F., Lule, M., Rojas, S. y Saad, S. (1990). *Metodología de diseño curricular para educación superior*. Trillas. México D.F.

Empson, S., Levi, L. & Carpenter, T. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. In Early algebraization. *Springer*. 409-428. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-17735-4_22

Fiallo, J. & Parada, S. (2018). Estudio del cambio y la variación Curso de precálculo mediado por GeoGebra. Ediciones Uis.

Godino, J. & Font, V. (2000). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Kaput, J. (1999). *Teaching and learning a new algebra*. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), Mathematics classroom that promote understanding, 133-155.

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran. Research agenda for mathematics education: Vol 4. *Research issues in the learning and teaching of algebra*, 33-56.

López, J. Marcos; Aceves, Lucero; Ramírez, José (2018). Caracterización del desempeño de jóvenes con síndrome de Down ante problemas matemáticos. *Premisa*, 20 (77), 22-32. http://funes.uniandes.edu.co/22902/.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias matemáticas.* Imprenta Nacional de Colombia.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author

Pastor, C., Sánchez, J., y Zubillaga, A. (2014). Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) Pautas para su introducción en el currículo.

Pérez, H., y Roig-Vila, R. (2015). Entornos de programación no mediados simbólicamente para el desarrollo del pensamiento computacional. Una experiencia en la formación de profesores de Informática de la Universidad Central del Ecuador. *RED Revista de Educación a Distancia*, *46*, 1-22. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6022698

Pineda, S. (2018). *Formación inicial de profesores de matemáticas alrededor de la atención a la diversidad.* (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Pulgarín, J. (2015). *Generalización de patrones geométricos. Proyecto de aula para desarrollar pensamiento variacional en estudiantes de 9 – 12 años* (tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia.

Pulido, E. (2021). Una introducción a la generalización de patrones geométricos a partir de una secuencia de enseñanza online en estudiantes de sexto grado (tesis de Maestría). Universidad del norte. Colombia.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2011). Grade 2 Students´ Non-Symbolic Algebraic Thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. 303-322. Berlin: Springer-Verlag.

Ramírez, M., Pineda, M., & Roa, S. (2013). Patrones geométricos, numéricos y verbales como iniciadores del proceso de generalización en la educación básica primaria. *Revista Científica*, 345-348. http://funes.uniandes.edu.co/6653/

Rojas, P, & Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista Científica*. 688-694.

Romero, P., Carillo, C. & López, J. (2020). Alumnos con discapacidad intelectual y la noción de patrones lineales. *Investigación Científica*, 14(2), 20-27. https://revistas.uaz.edu.mx/index.php/investigacioncientifica/article/view/962

Torres, J.& Gibert, R. (2010). Empleo de la tecnología en la enseñanza del Álgebra. En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1153-1159). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

UNESCO. (1990). *Declaración Mundial Sobre la Educación para todos.* https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000127583_spa.

Velasco, I. & Montes, E. (2013). Propuesta para la enseñanza del álgebra geométrica a estudiantes con discapacidad visual, a través de la adaptación de material inclusivo. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). Tesis doctoral. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números Revista de Didáctica de las matemáticas*, 97, 51–67. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/97/Articulos_04.pdf