

**CONSTRUCCIÓN DE MODELOS RELATIVISTAS DE DISCOS  
DELGADOS MEDIANTE SOLUCIONES CONFORMESTÁTICAS  
DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN-MAXWELL**

**Paolo Andrés Ospina Henao**

**Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
Bucaramanga  
2008**

**CONSTRUCCIÓN DE MODELOS RELATIVISTAS DE DISCOS  
DELGADOS MEDIANTE SOLUCIONES CONFORMESTÁTICAS  
DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN-MAXWELL**

**Paolo Andrés Ospina Henao**

**Trabajo de Investigación para optar al título de Magister en Física**

**Director**

**Guillermo A. González V., Ph. D.**

**Co-Director**

**Antonio C. Gutiérrez-Piñeres, M.Sc.**

**Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física  
Bucaramanga  
2008**

*A la memoria de mis abuelos,  
Ana Lucia e Isaias.*

*A mis queridos padres,  
Gloria y Luis Norlberto.*

*A mi hermano,  
Marcelo.*

*A Luz, Helena Henao y Oscar López.*

*A todos mis familiares.*

---

---

# Agradecimientos

---

---

El autor expresa sus agradecimientos:

**Al Dr. Guillermo Alfonso González Villegas.**

**Al Dr. José David Sanabria Gómez.**

**Al Dr. Carlos Arturo Ramírez.**

**Al Dr. Francisco Siddharta Guzmán.**

**Al Dr. Yeinzon Rodríguez García.**

**Al Dr. Norberto Granda Velásquez.**

**TÍTULO :** CONSTRUCCIÓN DE MODELOS RELATIVISTAS DE DISCOS DELGADOS MEDIANTE SOLUCIONES CONFORMESTÁTICAS DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN-MAXWELL. \*

**AUTOR :** OSPINA HENAO, Paolo Andrés \*\*.

**PALABRAS CLAVES :** Soluciones Exactas, Relatividad General, Gravitación, Astrofísica.

**DESCRIPCIÓN:** Mediante el desarrollo de la presente Tesis de Maestría se obtienen formas de construir modelos relativistas de discos delgados, mediante soluciones conformestáticas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell. Con el fin de obtener tales modelos, se consideraron soluciones conformestáticas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en las cuales la primera derivada del tensor métrico presenta una discontinuidad finita a través de un disco delgado. Dichos discos son de extensión finita e infinita.

Dada entonces una solución con las propiedades anteriores, se obtuvieron el tensor de energía-momentum superficial y la densidad de corriente superficial de la distribución de materia para soluciones conformestáticas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell con campo eléctrico, así como también se obtuvo el tensor de energía-momentum superficial y la corriente superficial de la distribución de materia para el mismo sistema de ecuaciones pero en presencia de campo magnético, en términos de distribuciones tensoriales.

Las propiedades físicas de la distribución de materia se estudian mediante un análisis del tensor de energía-momentum superficial, la densidad superficial de corriente y la corriente de la distribución. Encontramos que la inclusión de los campos eléctricos y magnéticos cambian significativamente las diferentes propiedades materiales de los discos lo cual permite, para algunos valores de parámetros, construir discos de extensión finita e infinita que satisfacen todas las condiciones de energía.

---

\*Tesis de Maestría.

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V., Ph. D. (Director). Antonio C. Gutiérrez-Piñeres., M.Sc.(Co-Director)

**TITLE :** CONSTRUCTION OF THIN DISK RELATIVISTIC MODELS BY CONFORMASTAT SOLUTIONS OF THE EINSTEIN-MAXWELL EQUATIONS \*.

**AUTOR :** OSPINA HENAO, Paolo Andrés \*\*.

**KEYWORDS :** Exact Solutions, General Relativity, Gravitation, Astrophysics.

**DESCRIPTION:** Through the development of this master thesis, models of relativistic discs thin are built, through conformastat solutions of the Einstein-Maxwell equations. To get such models, conformastat solutions of the Einstein-Maxwell equations were considered, in the which the first derivative of the metric tensor presents a discontinuity through a finite thin disk of finite radio.

Given then a solution with the properties above, the tensor energy-momentum surface and surface current density distribution area were obtained, through the formality required for the treatment of the Einstein-Maxwell equations in terms of distributions tensor.

The physical properties of the distribution of matter are studied by a tensor analysis of the energy-momentum surface and the surface current density distribution. We found that the inclusion of electric and magnetic fields changes significantly different material properties of the disks which allows us to build, for some sets of parameters, disks that meet all the energy conditions.

---

\*Master Thesis

\*\*Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Guillermo A. González V., Ph. D. (Director). Antonio C. Gutiérrez-Piñeres., M.Sc.(Co-Director)

---

---

# Índice general

---

---

<b>Introducción</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Modelos Relativistas de Discos Delgados Conformestáticos con Campo Eléctrico</b>	<b>1</b>
1.1. Preliminares . . . . .	1
1.2. Ecuaciones de Einstein-Maxwell y Soluciones Conformestáticas con Campo Eléctrico . . . . .	2
1.2.1. Coordenadas Esferoidales Oblatas . . . . .	4
1.3. Tensor Energía-Momentum y Densidad de Corriente . . . . .	5
<b>2. Modelos Relativistas de Discos Delgados Conformestáticos con Campo Magnético</b>	<b>9</b>
2.1. Preliminares . . . . .	9
2.2. Ecuaciones de Einstein-Maxwell y Soluciones Conformestáticas con Campo Magnético . . . . .	10
2.3. Tensor Energía-Momentum y Corriente . . . . .	12
<b>3. Modelos Particulares de Discos Delgados Conformestáticos</b>	<b>15</b>
3.1. Preliminares . . . . .	15
3.2. Discos Tipo Kalnajs . . . . .	16
3.3. Dos Fuentes Puntuales Alineadas en el Eje $z$ . . . . .	20

---

3.4. Potencial de una Barra Finita Localizada en el Eje $z$ . . . . .	23
<b>Conclusiones</b>	<b>26</b>
<b>Apéndice A: Distribuciones Tensoriales</b>	<b>28</b>
<b>Apéndice B: Ecuaciones de Einstein-Maxwell para Cascarones de Materia</b>	<b>31</b>

---

---

## Índice de cuadros

---

---

3.1. Las constantes $C_{2n}$ para $m = 0, \dots, 6$ . . . . .	17
---	----

---



---

# Índice de figuras

---



---

1.1. Coordenadas Esferoidales Oblatas . . . . .	4
3.1. Densidad de energía adimensional $\tilde{\epsilon}_m$ como una función de $\tilde{r}$ con $\tilde{k} = -1$ para los seis primeros modelos de discos $m = 1, \dots, 6$ . . . . .	19
3.2. Densidad de energía adimensional en el centro de los discos, $\tilde{\epsilon}(0)$ , como una función de $\tilde{k}$ para los mismos seis modelos de discos previamente considerados. . . . .	19
3.3. Densidad superficial de energía adimensional $\tilde{\epsilon}_m$ como una función de $\tilde{r}$ para los seis primeros modelos de disco con $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . En cada caso, hemos graficado $\tilde{\epsilon}_m(\tilde{r})$ para $0 \leq \tilde{r} \leq 1$ con $\tilde{k} = -0,25$ para $\tilde{\epsilon}_1$ , con $\tilde{k} = -0,5$ para $\tilde{\epsilon}_2$ , con $\tilde{k} = -1$ para $\tilde{\epsilon}_3$ , con $\tilde{k} = -2$ para $\tilde{\epsilon}_4$ , con $\tilde{k} = -4$ para $\tilde{\epsilon}_5$ , y finalmente $\tilde{k} = -8$ para $\tilde{\epsilon}_6$ . . . . .	20
3.4. Método de Desplazamiento, Corte y Reflexión . . . . .	21
3.5. Densidad de energía superficial $\epsilon$ y corriente $j$ , como una función de $r$ respectivamente. Se presentan las curvas de cada propiedad física para los cuatro primeros modelos de discos con $m_1 = 2, m_2 = 0, 1, 2, 3, k = 1, z_2 = 1, b = 1$ . . . . .	22
3.6. Densidad de energía superficial $\epsilon$ y corriente $j$ , como una función de $r$ respectivamente. Se presentan las curvas de cada propiedad física para los cuatro primeros modelos de discos con $m_1 = 2, m_2 = 1, k = 1, z_2 = 1, 2, 3, 4, b = 1$ . . . . .	22
3.7. Densidad de energía superficial $\epsilon$ y corriente $j$ , como una función de $r$ respectivamente. Se presentan las curvas de cada propiedad física para los cuatro primeros modelos de discos con $m_1 = 2, m_2 = 1, k = 1, 2, 3, 4, z_2 = 1, b = 1$ . . . . .	23
3.8. Densidad de energía superficial $\epsilon$ y corriente $j$ como una función de $r$ para los siguientes parámetros $m = 1, k = -0,5, -1, -1,5, -2, b = 2$ . . . . .	24
3.9. Densidad de energía superficial $\epsilon$ y corriente $j$ como una función de $r$ para los siguientes parámetros $m = 1, k = -1, b = 2, 3, 4, 5, 6$ . . . . .	25

---

---

# Introducción

---

---

La obtención de soluciones de las ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell es un problema de gran importancia en relatividad general, así, que a través de los años, se han desarrollado diversos métodos que permiten obtener soluciones de dichas ecuaciones imponiendo apropiadas condiciones de simetría. Ahora bien, soluciones de las ecuaciones de Einstein y Einstein-Maxwell correspondientes a configuraciones discoidales de materia presentan gran relevancia en diversos aspectos, tanto desde el punto de vista de la teoría de la relatividad en sí misma como en el modelamiento y entendimiento de propiedades físicas de sistemas astrofísicos.

Existen diferentes métodos para encontrar soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein y Einstein-Maxwell, o para generar nuevas soluciones exactas a partir de soluciones simples conocidas. Por lo tanto, es importante tener algunos procedimientos apropiados para obtener algunas interpretaciones de estas soluciones exactas. Así, en los últimos años se han desarrollado varios procedimientos para soluciones axialmente simétricas estáticas y estacionarias en términos de discos delgados y, recientemente, de discos gruesos.

Los discos de materia sin presión, conocidos como discos de polvo, por ejemplo, se estudian en astrofísica como modelos de ciertos tipos de galaxias o discos de acreción [1, 2, 3]. El modelo de discos relativistas también presenta gran importancia en el estudio de superposición de discos de acreción alrededor de agujeros negros, y galaxias con agujeros negros supermasivos en su núcleo; objetos puramente relativistas [4]. De igual manera, discos con presencia de campos electromagnéticos, especialmente campos magnéticos, juegan un papel importante en astrofísica en el contexto de estrellas de neutrones, binarias y enanas blancas, o en la formación y evolución de galaxias.

Soluciones estacionarias y axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein y Einstein-Maxwell las cuales son interpretadas en la construcción de modelos de discos delgados relativistas han sido extensamente estudiadas a través de los años, puesto que pueden ser usadas como modelos de ciertas estrellas, galaxias y discos de acreción. Estas soluciones pueden ser estáticas o estacionarias<sup>¶</sup> y con o sin presión radial. Dichas soluciones fueron inicialmente estudiadas por Bonnor y Sackfield [5] y Morgan y Morgan [6-7]. Posteriormente, diferentes

---

<sup>¶</sup>En la estática los coeficientes métricos solo dependen de las coordenadas, mientras en la estacionaria es invariante bajo inversión simultánea de las coordenadas  $\varphi$  y  $t$ , lo cual significa físicamente que las fuentes de campo gravitacional poseen movimientos que son puramente rotacionales alrededor del eje de simetría

autores han obtenido varios tipos de soluciones exactas correspondientes a discos delgados estáticos [8-16] y estacionarios [17-21]. Se ha considerado, de igual manera, la superposición de un disco estático o estacionario con un agujero negro [22-30], discos de fluido perfecto con halo [34], así como también se ha investigado la estabilidad de discos delgados que implican el uso de una perturbación de primer orden en el tensor de energía-momentum [31]. Fuentes discoidales para espaciotiempos estacionarios axialmente simétricos con campos magnéticos han sido estudiados como fuentes para campos de Kerr-Newman [32], campos magnetostáticos axialmente simétricos [33], mientras que discos de fluidos perfectos cargados fueron estudiados por Vogt y Letelier [34], y discos de fluido perfecto cargado como fuentes de espaciotiempos tipo Taub-NUT por García-Reyes y González [35-36].

En los casos anteriores, los discos se obtienen mediante un método tipo “problema inverso”, llamado por Sygne el “*método - g*”[44]. Para discos sin campo electromagnético el método se puede describir de la siguiente manera: se toma una solución de las ecuaciones de Einstein, de modo que exista una discontinuidad en las derivadas del tensor métrico en la superficie del disco <sup>§</sup>, posteriormente se obtiene el tensor energía-momentum a partir de las ecuaciones de Einstein. Finalmente, se estudian las propiedades físicas de la distribución de materia mediante un análisis del tensor energía-momentum así obtenido. El método se puede extender al caso en que los discos en consideración presenten campo electromagnético. En este caso, se toma una solución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío y las condiciones exigidas sobre el tensor métrico en la superficie del disco son las mismas que para el caso anterior. Los discos también se pueden estudiar de manera “directa”, llamado por Sygne el “*método - T*”[44]: se da el tensor energía-momentum de la fuente y luego se resuelven las ecuaciones de Einstein en la región material. La solución interna es luego usada para obtener condiciones de frontera sobre las ecuaciones de campo en el vacío en la región exterior.

Mediante el desarrollo de la presente Tesis de Maestría se obtienen soluciones conformestáticas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell que permiten la construcción ciertos de modelos relativistas de discos delgados finitos e infinitos. Con el fin de obtener tal modelamiento, se consideraron inicialmente soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en las cuales la primera derivada del tensor métrico presente una discontinuidad finita a través de un disco delgado de radio finito e infinito. Dada entonces una solución con las propiedades anteriores, se obtienen el tensor de momentum-energía superficial, la densidad de corriente y la corriente superficial de la distribución de materia, por medio del formalismo necesario para el tratamiento de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en términos de distribuciones tensoriales. Las propiedades físicas de la distribución de materia se estudia entonces mediante un análisis detallado del tensor de energía-momentum superficial.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el Capítulo 1, se estudian las ecuaciones de Einstein-Maxwell correspondientes a espacio-tiempos conformestáticos con campo eléctrico y sus soluciones mediante un sencillo método de dependencias funcionales. Dichas soluciones pueden ser usadas para la construcción de modelos delgados de discos en relatividad

---

<sup>§</sup>El tensor métrico nos dice como es el espacio-tiempo geoméricamente, la discontinuidad en la derivada nos da la información de que allí se encuentra la distribución de materia

dad general. Se obtiene la expresión general para el tensor de energía-momentum superficial del disco y de la densidad de corriente del disco. Dichos modelos de discos serán tipo polvo, axialmente simétricos y de extensión finita.

En el Capítulo 2, se estudiarán soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para un elemento de línea conformestático con campo magnético, las cuales permiten construir fuentes de modelos de discos de extensión infinita, los cuales serán construidos usando el método de “*Desplazamiento, Corte y Reflexión*”. Dichas fuentes discoidales son de polvo y magnetizadas. Se encontraron las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell y sus soluciones mediante el método de dependencias funcionales entre el coeficiente métrico  $\lambda$ , el potencial electromagnético  $A_a$  y una función  $U$ , que representa una solución de la ecuación de Laplace. Finalmente, obtenemos la expresión general para el tensor de energía-momentum superficial del disco y de la corriente del disco.

En el Capítulo 3, presentamos varios ejemplos de algunos modelos simples de discos. Tales discos se caracterizan por ser delgados, tipo polvo, axialmente simétricos, de extensiones finitas e infinitas y por cumplir todas las condiciones de energía. Se obtienen considerando soluciones simples de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para espacio-tiempos conformestáticos en presencia de campos eléctricos y magnéticos respectivamente, que permiten obtener expresiones de las cantidades físicas y se estudiará su comportamiento gráficamente. Finalmente, se presentan los resultados principales de la investigación.

# CAPÍTULO 1

---

---

## Modelos Relativistas de Discos Delgados Conformestáticos con Campo Eléctrico

---

---

### ***1.1 Preliminares***

La construcción de modelos de discos delgados en relatividad general se puede llevar a cabo a partir de soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein y Einstein-Maxwell en el vacío e introduciendo posteriormente una discontinuidad finita en las primeras derivadas del tensor métrico a través del plano  $z = 0$ . Dicha discontinuidad puede obtenerse reflejando la solución dada a través del plano. La discontinuidad en las primeras derivadas del tensor métrico puede representarse por una función de Heaviside de tal forma que, dado que el tensor de curvatura es lineal en las segundas derivadas del tensor métrico y cuadrático en las primeras derivadas, el tensor de curvatura contendrá términos proporcionales a la distribución delta de Dirac con soporte en el plano  $z = 0$ .

Este Capítulo se conforma de la siguiente manera. El estudio del sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell correspondiente a un espacio-tiempo conformestático con campo eléctrico y su solución, se presenta brevemente en la sección 1.2. En la sección 1.3 dicha solución nos permite construir modelos de discos delgados, finitos, axialmente simétricos y calcular las expresiones generales para las propiedades físicas tales como el tensor energía-momentum y la densidad de corriente del disco.

## 1.2 Ecuaciones de Einstein-Maxwell y Soluciones Conformestáticas con Campo Eléctrico

Con el fin de obtener soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell las cuales permiten la construcción de modelos de discos delgados, estáticos, axialmente simétricos con campo eléctrico, se debe escoger un elemento de línea que permita obtener soluciones exactas simples, de tal manera que se puedan analizar las propiedades físicas de los modelos de discos obtenidos. Cuando se considera la presencia de campos electromagnéticos, existe una clase de elementos de línea para los cuales es posible obtener soluciones exactas simples, las cuales se pueden expresar en términos de soluciones de la ecuación de Laplace. Dicho elemento de línea se puede escribir, en coordenadas cilíndricas  $x^a = (t, \varphi, r, z)$ , en la forma [43-44]

$$ds^2 = - e^{2\lambda} dt^2 + e^{-2\lambda}(r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2), \quad (1.1)$$

donde  $\lambda$  es función de las coordenadas  $r, \varphi$  y  $z$  únicamente. Este elemento de línea es estático y la parte espacial es conformalmente plana, pues está multiplicada por el factor  $e^{-2\lambda}$ . De acuerdo con esto, esta clase de métricas se conocen en la literatura como métricas conformestáticas [44-45].

El sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío, en unidades geométricas tales que  $c = G = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$ , está dado por

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (1.2a)$$

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left[ F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right], \quad (1.2b)$$

$$F^{ab}{}_{;b} = 0, \quad (1.2c)$$

$$F_{ab} = A_{b,a} - A_{a,b}, \quad (1.2d)$$

donde todos los símbolos tienen el sentido usual. Para la métrica (1.1), y tomando el potencial electromagnético como  $A_a = (-\phi, 0, 0, 0)$ , el sistema anterior se puede escribir explícitamente como

$$\lambda_{;i} \lambda_{;j} = e^{-2\lambda} \phi_{;i} \phi_{;j}, \quad (1.3)$$

$$2e^{2\lambda} \nabla^2 \lambda = \nabla \phi \cdot \nabla \phi, \quad (1.4)$$

$$\nabla^2 \phi = 2\nabla \lambda \cdot \nabla \phi, \quad (1.5)$$

donde  $i, j = 1, 2, 3$  y  $\nabla$  es el operador diferencial usual en coordenadas cilíndricas.

Ahora bien, para resolver el anterior sistema de ecuaciones, consideraremos soluciones en las que existe una dependencia funcional entre  $\phi$  y  $\lambda$ ; esto es, supondremos que  $\phi = \phi(\lambda)$ . De acuerdo con lo anterior, la ecuación (1.3) implica que

$$[\phi'(\lambda)]^2 = e^{2\lambda}, \quad (1.6)$$

cuya solución está dada por

$$\phi = \pm e^\lambda + k_1, \quad (1.7)$$

donde  $k_1$  es una constante de integración arbitraria.

Utilizando entonces la solución anterior es fácil ver que el sistema de ecuaciones (1.4)-(1.5) se reduce a

$$\nabla^2 \lambda = \nabla \lambda \cdot \nabla \lambda, \quad (1.8)$$

una ecuación diferencial parcial, no-línea en la función  $\lambda$ . Para resolver la anterior ecuación, supondremos que la función métrica  $\lambda$  se puede expresar en la forma  $\lambda = \lambda(U)$ , donde  $U$  es una función que representa una solución de la ecuación de Laplace. Introduciendo la anterior suposición en la ecuación (1.8), se obtiene la ecuación

$$\lambda''(U) = [\lambda'(U)]^2, \quad (1.9)$$

cuya solución está dada por

$$e^\lambda = \frac{k_3}{U + k_2}, \quad (1.10)$$

donde  $k_2$  y  $k_3$  son constantes de integración arbitrarias.

De otra parte, para obtener un comportamiento apropiado en el infinito, vamos a imponer algunas condiciones de contorno a las anteriores soluciones. Así, para tener un espacio asintóticamente plano, se debe cumplir que  $e^\lambda = 1$  en el infinito. También podemos exigir la condición sobre el potencial eléctrico, tal que,  $\phi = 0$  en el infinito, ya que estamos considerando sólo fuentes de extensión finita. En consecuencia, vamos a considerar para la función  $U$  sólo aquellas soluciones de la ecuación de Laplace que se comportan como  $U = 0$  en el infinito, de tal manera que mediante la adopción de las constantes  $k_2 = k_3$  obtenemos el comportamiento deseado para la función métrica  $\lambda$ . Por último, para el potencial eléctrico  $\phi$ , hay que exigir el valor para la constante  $k_1 = \mp 1$  y la ecuación (1.7) puede ser reescrita como

$$\phi = \pm \left[ \frac{k}{U + k} - 1 \right], \quad (1.11)$$

donde las constantes han sido renombradas como  $k_2 = k_3 = k$ .

Como podemos ver, las ecuaciones (1.10) y (1.11), son las soluciones del sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell (1.3)-(1.5), las cuales se expresan en términos de  $U$ , una solución de la ecuación de Laplace. Así entonces, debemos hacer una elección apropiada de la función  $U$ , la cual va a representar el potencial gravitacional newtoniano de una fuente discoidal delgada,

axialmente simétrica y de extensión finita. La forma de generar estos discos es mediante el método “problema inverso”, para el cual se introduce el sistema de coordenadas esferoidales oblatas, las cuales se adaptan de forma natural a la fuente de campo gravitacional y contiene implícitamente las singularidades del problema, y se resuelve el problema de contorno correspondiente.

### 1.2.1. Coordenadas Esferoidales Oblatas

Debido que la métrica (1.1) está expresada en coordenadas cilíndricas, la transformación entre las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esferoidales oblatas, está dada por

$$r^2 = a^2(1 + \xi^2)(1 - \eta^2), \quad (1.12a)$$

$$z = a\xi\eta, \quad (1.12b)$$

donde  $0 \leq \xi < \infty$  y  $-1 \leq \eta < 1$ .

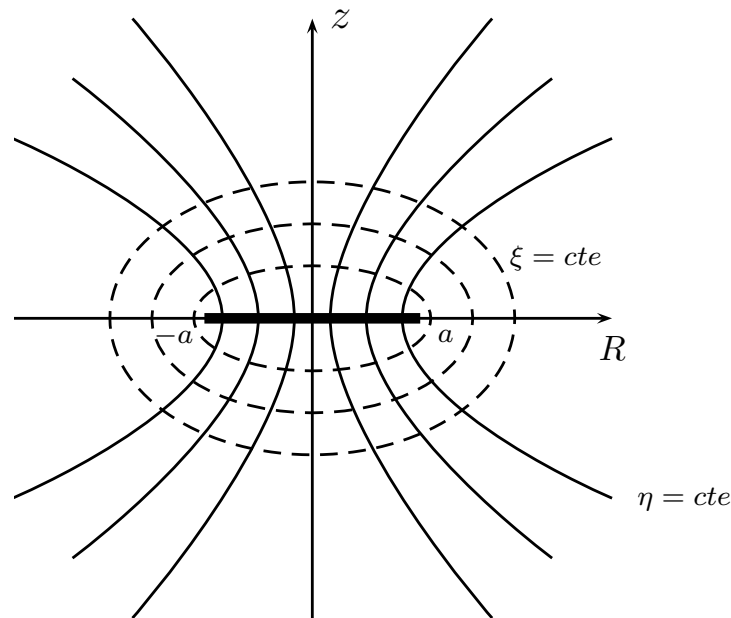


Figura 1.1: Coordenadas Esferoidales Oblatas

El disco tiene las coordenadas  $\xi = 0$ ,  $0 \leq \eta^2 < 1$ . Al atravesar el disco,  $\eta$  cambia de signo pero no cambia en valor absoluto. Este comportamiento singular de la coordenada  $\eta$  implica que una función par de  $\eta$  es siempre continua pero su primera derivada con respecto a  $\eta$  es discontinua en el disco. Resolviendo la ecuación de Laplace en dicho sistema coordenado por medio del método de separación de variables y sometiendo su solución a las condiciones de

contorno apropiadas, el potencial gravitacional adopta la siguiente forma

$$U(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^m C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (1.13)$$

donde los  $q_{2n}(\xi) = i^{2n+1} Q_{2n}(i\xi)$  son funciones de Legendre de segundo orden, los  $P_{2n}(\eta)$  son los polinomios de Legendre de segundo orden y  $C_{2n}$  es una constante de normalización. Más adelante, en la sección 3.2, presentamos una elección particular de estas constantes  $C_{2n}$  correspondiente a una familia infinita de discos de longitud finita, los bien llamados discos de Kalnajs, los cuales presentan una densidad superficial de masa bien comportada. Dicho comportamiento se estudia gráficamente así como también el de la densidad superficial de corriente.

### 1.3 Tensor Energía-Momentum y Densidad de Corriente

Para el caso de un disco delgado axialmente simétrico, introducimos el elemento de línea conformestático en coordenadas cilíndricas  $x^a = (t, \varphi, r, z)$ , el cual está dado por

$$ds^2 = - e^{2\lambda} dt^2 + e^{-2\lambda} (r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2), \quad (1.14)$$

donde  $\lambda$  es función de  $r, \varphi$  y  $z$  únicamente y se considera la hipersuperficie  $\Sigma$  definida por la función  $\phi(x^a) = z$ , con vector normal  $n_a = \phi_{,a} = \delta_a^z$ . Dada entonces una solución de la forma (1.10) - (1.11) para las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío, el tensor métrico  $g_{ab}$  satisface la relación

$$g_{ab}(r, z) = g_{ab}(r, -z), \quad (1.15)$$

de tal forma que  $[g_{ab}] = 0$ . Las relaciones anteriores implican que, cuando  $z \neq 0$ ,

$$g_{ab,z}(r, z) = - g_{ab,z}(r, -z), \quad (1.16)$$

y así las discontinuidades en las primeras derivadas del tensor métrico se pueden escribir como

$$b_{ab} = [g_{ab,z}] = 2 g_{ab,z}|_{z=0^+}. \quad (1.17)$$

Ahora, usando el formalismo de las distribuciones tensoriales [38, 39, 40], las ecuaciones de Einstein-Maxwell y el tensor energía-momentum se pueden expresar en la forma

$$T^{ab} = T_+^{ab} \theta(z) + T_-^{ab} [1 - \theta(z)] + Q^{ab} \delta(z), \quad (1.18)$$

y la densidad de corriente como

$$J^a = I^a \delta(z), \quad (1.19)$$

donde,  $\theta(z)$  y  $\delta(z)$  son distribuciones de Heaveside y de Dirac evaluadas en  $z = 0$ , respectivamente. Aquí  $T_{\pm}^{ab}$  es el tensor energía-momentum electromagnético el cual está definido por (1.2b) para las regiones  $z \geq 0$  y  $z \leq 0$ , respectivamente, mientras que

$$16\pi Q_b^a = b^{az} \delta_b^z - b^{zz} \delta_b^a + g^{az} b_b^z - g^{zz} b_b^a + b_c^c (g^{zz} \delta_b^a - g^{az} \delta_b^z), \quad (1.20)$$

da la parte al tensor energía-momentum correspondiente a una fuente discoidal y

$$4\pi I^a = [F^{az}], \quad (1.21)$$

es la contribución de la distribución de corriente a la fuente discoidal.

Para la métrica (1.14), las componentes no nulas del tensor  $b_{ab}$  son

$$b_{tt} = -\frac{e^{2\lambda}\lambda_{,z}}{2\pi}, \quad (1.22a)$$

$$b_{\varphi\varphi} = -\frac{e^{-2\lambda}r^2\lambda_{,z}}{2\pi}, \quad (1.22b)$$

$$b_{rr} = b_{zz} = -\frac{e^{-2\lambda}\lambda_{,z}}{2\pi}, \quad (1.22c)$$

de tal manera que la única componente no nula del tensor de energía-momentum del disco es

$$Q_t^t = -\frac{e^{2\lambda}\lambda_{,z}}{2\pi}, \quad (1.23)$$

donde, tanto en ésta como en las expresiones anteriores, todas las cantidades se evalúan en la hipersuperficie  $z = 0^+$ .

De igual manera, el potencial electromagnético  $A_a$  satisface la relación

$$A_a(r, z) = A_a(r, -z), \quad (1.24)$$

de modo que

$$A_{a,z}(r, z) = -A_{a,z}(r, -z), \quad (1.25)$$

y así las discontinuidades en sus primeras derivadas están dadas por

$$[A_{a,z}] = 2 A_{a,z}|_{z=0^+}. \quad (1.26)$$

De acuerdo con esto, la única componente no nula de la densidad de corriente superficial está dada por

$$I^t = -\frac{\phi_{,z}}{2\pi}, \quad (1.27)$$

donde, como en el caso del tensor de energía-momentum, todas las cantidades se evalúan en la hipersuperficie  $z = 0^+$ .

El “verdadero” tensor de energía-momentum superficial del disco,  $S_{ab}$ , y la verdadera densidad de corriente superficial,  $j_a$ , se pueden obtener a través de las relaciones

$$S_{ab} = \int Q_{ab} \delta(z) ds_n = e^{-\lambda} Q_{ab}, \quad (1.28a)$$

$$j^a = \int I^a \delta(z) ds_n = e^{-\lambda} I^a, \quad (1.28b)$$

donde,  $ds_n = \sqrt{g_{zz}} dz$ , es la medida física de longitud en la dirección normal al disco. Así, la única componente no nula de  $S_b^a$  viene dada por

$$S_t^t = -\frac{e^\lambda \lambda_{,z}}{2\pi}, \quad (1.29)$$

mientras que la única componente no nula de la densidad de corriente es

$$j^t = -\frac{e^{-\lambda} \phi_{,z}}{2\pi}, \quad (1.30)$$

donde, todas las cantidades se evalúan en la hipersuperficie  $z = 0^+$ . Las ecuaciones anteriores representan físicamente, las componentes temporales de los tensores energía-momentum y de la corriente, respectivamente. Esto nos representa en cada tensor, la densidad de energía y la densidad de corriente en la distribución del disco.

Definiendo una tetraada ortonormal  $V^a, X^a, Y^a, Z^a$ , donde

$$V^a = e^{-\lambda} (1, 0, 0, 0), \quad (1.31a)$$

$$X^a = \frac{e^\lambda}{r} (0, 1, 0, 0), \quad (1.31b)$$

$$Y^a = e^\lambda (0, 0, 1, 0), \quad (1.31c)$$

$$Z^a = e^\lambda (0, 0, 0, 1), \quad (1.31d)$$

el tensor de energía-momentum superficial del disco y la densidad de carga superficial del disco se pueden escribir en la forma

$$S^{ab} = \epsilon V^a V^b, \quad (1.32)$$

$$j^a = \sigma V^a. \quad (1.33)$$

Así entonces, la densidad de energía y la densidad de carga de la distribución de materia están dadas por las siguientes expresiones

$$\epsilon = \frac{e^\lambda \lambda_{,z}}{2\pi} = -\frac{kU_{,z}}{2\pi(U+k)^2}, \quad (1.34)$$

$$\sigma = -\frac{\phi_{,z}}{2\pi} = \frac{kU_{,z}}{2\pi(U+k)^2}, \quad (1.35)$$

respectivamente.

Teniendo en cuenta la ecuación (1.7), es fácil ver que (1.35) satisface la relación

$$\sigma = \mp \epsilon; \quad (1.36)$$

es decir, la densidad de carga y la densidad de energía son proporcionales, excepto un signo.

Una clase interesante de soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell es la de espacio-tiempos conformestáticos en la que la densidad de carga es igual a la densidad de masa, como se puede ver en la ecuación (1.36). Las atracciones gravitacionales son equilibradas por las repulsiones eléctricas, por lo tanto, ambas cantidades físicas están en equilibrio. Este tipo de fenómenos se ha denominado en la literatura por algunos autores “*Electrically Counterpoised Dust*”(ECD) [42]. Dichas distribuciones de equilibrio han sido estudiadas en un principio por [5]. Fuentes de discos conformestacionarios (la versión estacionaria de la métrica conformestática) se estudiaron en [13]. Aunque uno puede esperar de manera intuitiva que los objetos astrofísicos no tienen carga neta, es un primer paso para poder estudiar dichos objetos bajo otras consideraciones con campos electromagnéticos.

## CAPÍTULO 2

---

---

# Modelos Relativistas de Discos Delgados Conformestáticos con Campo Magnético

---

---

### 2.1 Preliminares

Soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein y Einstein-Maxwell axialmente simétricas que describen modelos de discos delgados relativistas son de gran importancia en astrofísica puesto que pueden ser usadas como modelos teóricos de ciertas estrellas, galaxias y discos de acreción. Estas soluciones pueden ser estáticas o estacionarias, con o sin presión radial. Se estudiaron soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para un elemento de línea conformestático con campo magnético, las cuales representan fuentes de modelos de discos que serán construidos usando el método de “*Desplazamiento, Corte y Reflexión*”. Dichas fuentes discoidales son de polvo y magnetizadas. Se encontrarán las ecuaciones de campo y al igual que en el Capítulo 1, encontramos soluciones mediante el método de dependencias funcionales entre el coeficiente métrico  $\lambda$ , el potencial electromagnético  $A_a$  y una función  $U$ , que representa un potencial newtoniano y es una solución de la ecuación de Laplace.

Este Capítulo se presenta de la siguiente manera. En la sección 2.2, se presenta un estudio de las ecuaciones de Einstein-Maxwell correspondiente a un espacio-tiempo conformestático con campo magnético y su solución. En la sección 2.3, dicha solución es usada para obtener las expresiones generales de las propiedades físicas del tensor energía-momentum y de la corriente en el disco, respectivamente.

## 2.2 Ecuaciones de Einstein-Maxwell y Soluciones Conformestáticas con Campo Magnético

Con el fin de obtener soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell interpretables como discos delgados, estáticos, axialmente simétricos con campo magnético, se debe escoger un elemento de línea que permita obtener soluciones exactas simples, de tal manera que se puedan analizar las propiedades físicas de los modelos de discos obtenidos. En el caso de las ecuaciones de Einstein en el vacío para espacio-tiempos estáticos, como es conocido [43-44], cuando se considera la presencia de campos electromagnéticos, existe una clase de elementos de línea para los cuales es posible obtener soluciones exactas simples, las cuales se pueden expresar en términos de soluciones de la ecuación de Laplace. Dicho elemento de línea se puede escribir, en coordenadas cilíndricas  $x^a = (t, \varphi, r, z)$ , en la forma [43-44]

$$ds^2 = -e^{2\lambda} dt^2 + e^{-2\lambda} (r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2), \quad (2.1)$$

donde  $\lambda$  es función de las coordenadas  $r, \varphi$  y  $z$  únicamente. Este elemento de línea es estático y la parte espacial es conformalmente plana, pues está multiplicada por el factor  $e^{-2\lambda}$ . De acuerdo con esto, esta clase de métricas se conocen en la literatura como métricas conformestáticas [44-45].

El sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío, en unidades geométricas tales que  $c = G = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$ , está dado por

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (2.2)$$

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left[ F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right], \quad (2.3)$$

$$F^{ab}{}_{;b} = 0, \quad (2.4)$$

$$F_{ab} = A_{b,a} - A_{a,b}, \quad (2.5)$$

donde todos los símbolos tienen el sentido usual.

Para la métrica (2.1), y tomando el potencial electromagnético como  $A_a = (0, 0, A, 0)$ , el

sistema anterior se puede escribir explícitamente como

$$r(A_{,rr} + A_{,zz}) - A_{,r} + 2r(A_{,r}\lambda_{,r} + A_{,z}\lambda_{,z}) = 0, \quad (2.6)$$

$$r^2\nabla^2\lambda = e^{2\lambda}(A_{,r}^2 + A_{,z}^2), \quad (2.7)$$

$$r^2\nabla^2\lambda - 2r^2\lambda_{,r}^2 = e^{2\lambda}(A_{,r}^2 - A_{,z}^2), \quad (2.8)$$

$$r^2\nabla^2\lambda - 2r^2\lambda_{,z}^2 = e^{2\lambda}(A_{,z}^2 + A_{,r}^2), \quad (2.9)$$

$$r^2\lambda_{,r}\lambda_{,z} + e^{2\lambda}A_{,r}A_{,z} = 0, \quad (2.10)$$

donde  $\nabla$  es el operador diferencial usual en coordenadas cilíndricas.

Ahora bien, después de un corto cálculo, el anterior sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell se reduce a

$$A_{,r} = re^{-\lambda}\lambda_{,z}, \quad (2.11)$$

$$A_{,z} = -re^{-\lambda}\lambda_{,r}, \quad (2.12)$$

$$\nabla^2\lambda = \nabla\lambda \cdot \nabla\lambda. \quad (2.13)$$

Al igual que en el Capítulo anterior, con el fin de resolver el sistema de ecuaciones, asumimos una dependencia funcional para la función métrica  $\lambda$ , la cual se expresa como  $\lambda = \lambda(U)$ , donde  $U$  es una función auxiliar que para nuestros fines es tomada como solución a la ecuación de Laplace. Con esto en mente, la ecuación (2.13) reduce a

$$\lambda''(U) = [\lambda'(U)]^2, \quad (2.14)$$

donde su solución está dada por

$$e^\lambda = \frac{k_2}{U + k_1}, \quad (2.15)$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son constantes de integración arbitrarias.

Ahora bien, con el fin de tener un comportamiento apropiado en el infinito, vamos a imponer algunas condiciones de frontera sobre las soluciones. Así, con el fin de tener un espacio asintóticamente plano, esto es que  $e^\lambda = 1$  en el infinito, en consecuencia, consideraremos para la función  $U$  solo soluciones de la ecuación de Laplace que satisfacen la condición de contorno  $U = 0$  en el infinito, de tal manera que si hacemos  $k_1 = k_2 = k$  obtenemos el

comportamiento deseado para la función métrica  $\lambda$ . Por otro lado, el sistema de ecuaciones (2.11)-(2.12) en términos de soluciones de la ecuación de Laplace  $U$  está dado por

$$A_{,r} = -\frac{rU_{,z}}{k}, \quad (2.16)$$

$$A_{,z} = \frac{rU_{,r}}{k}, \quad (2.17)$$

donde podemos ver que (2.15), (2.16) y (2.17), son las soluciones del sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell (2.6)-(2.10), las cuales se expresan en términos de  $U$ , una solución de la ecuación de Laplace, que para nuestro caso representa una fuente gravitacional newtoniana.

### 2.3 Tensor Energía-Momentum y Corriente

Como se señaló en la sección 2.2, soluciones a las ecuaciones de Einstein-Maxwell correspondientes a fuentes gravitacionales tipo disco son funciones de las coordenadas  $r$  y  $z$ . Entonces, ellas son funciones continuas pero sus primeras derivadas de la coordenada  $z$  - discontinuas en la superficie del disco. En consecuencia con esto, a fin de obtener el tensor energía-momentum y la corriente de la fuente, podemos expresar el salto en el disco de la primera derivada de la coordenada  $z$  del tensor métrico como

$$b_{ab} = [g_{ab,z}] = 2g_{ab,z}|_{z=0^+}, \quad (2.18)$$

y el salto en el disco del tensor de campo electromagnético como

$$[F_{za}] = [A_{a,z}] = 2A_{a,z}|_{z=0^+}, \quad (2.19)$$

donde hemos usado simetría de reflexión con respecto a  $z = 0$ .

Ahora, usando el formalismo de las distribuciones tensoriales [38, 39, 40], las ecuaciones de Einstein-Maxwell y el tensor energía-momentum se pueden expresar en la forma

$$T^{ab} = T_+^{ab}\theta(z) + T_-^{ab}[1 - \theta(z)] + Q^{ab}\delta(z), \quad (2.20)$$

y la corriente como

$$J^a = I^a\delta(z), \quad (2.21)$$

donde,  $\theta(z)$  y  $\delta(z)$  son distribuciones de Heaveside y de Dirac evaluadas en  $z = 0$ , respectivamente. Aquí  $T_{\pm}^{ab}$  es el tensor energía-momentum electromagnético el cual está definido por (2.3) para las regiones  $z \geq 0$  y  $z \leq 0$ , respectivamente, mientras que

$$\begin{aligned} 16\pi Q_b^a &= b^{az}\delta_b^z - b^{zz}\delta_b^a + g^{az}b_b^z - g^{zz}b_b^a \\ &+ b_c^c(g^{zz}\delta_b^a - g^{az}\delta_b^z), \end{aligned} \quad (2.22)$$

da la parte al tensor energía-momentum correspondiente a una fuente discoidal y

$$4\pi I^a = [F^{az}], \quad (2.23)$$

es la contribución de la corriente a la fuente discoidal. Ahora, el “verdadero” tensor energía-momentum superficial del disco,  $S_{ab}$ , y la “verdadera” corriente superficial,  $j^a$ , pueden ser obtenidos a través de las relaciones

$$S_{ab} = \int Q_{ab} \delta(z) ds_n = e^{-\lambda} Q_{ab}, \quad (2.24)$$

$$j^a = \int I^a \delta(z) ds_n = e^{-\lambda} I^a, \quad (2.25)$$

donde  $ds_n = \sqrt{g_{zz}} dz$  es la medida física de longitud en la dirección normal al disco.

Para la métrica (2.1), las únicas componentes diferentes de cero de  $Q_b^a$  son

$$Q_t^t = -\frac{e^{2\lambda} \lambda_{,z}}{2\pi}, \quad (2.26)$$

mientras, que las únicas componentes diferentes de cero de  $I^a$  son

$$I^\varphi = -\frac{A_{,z}}{2\pi}. \quad (2.27)$$

Por lo tanto, la única componente diferente de cero para el tensor energía-momentum superficial  $S_b^a$  está dada por

$$S_t^t = -\frac{e^\lambda \lambda_{,z}}{2\pi}, \quad (2.28)$$

y la única componente diferente de cero de la corriente superficial  $j^a$  es la componente en la dirección acimutal  $\varphi$ , de la forma

$$j^\varphi = -\frac{e^{-\lambda} A_{,z}}{2\pi}, \quad (2.29)$$

donde todas las cantidades están evaluadas en el plano del disco  $z = 0^+$ .

El tensor energía-momentum superficial y la corriente superficial del disco se pueden escribir como

$$S^{ab} = \epsilon V^a V^b, \quad (2.30)$$

$$j^a = j W^a, \quad (2.31)$$

con

$$V^a = e^{-\lambda} (1, 0, 0, 0), \quad (2.32)$$

$$W^a = \frac{e^\lambda}{r} (0, 1, 0, 0), \quad (2.33)$$

donde  $V^a$  es el vector velocidad de la distribución de materia y  $W^a$  es un vector ortogonal al vector velocidad. Entonces, la densidad de energía y la corriente de la distribución de materia estan dadas por

$$\epsilon = \frac{e^\lambda \lambda_{,z}}{2\pi}, \quad (2.34)$$

$$j = -\frac{e^{2\lambda} A_{,z}}{2\pi r}, \quad (2.35)$$

respectivamente.

Usando las ecuaciones (2.15) y (2.17) en (2.34) y (2.35) respectivamente, podemos obtener

$$\epsilon = -\frac{kU_{,z}}{2\pi(U+k)^2}, \quad (2.36)$$

$$j = -\frac{kU_{,r}}{2\pi(U+k)^2}, \quad (2.37)$$

donde, la densidad de energía y la corriente de la distribución de materia estan escritas en términos de la función  $U$ , la cual es una solución de la ecuación de Laplace.

Ahora bien, en el contexto de la relatividad general, es razonable esperar que el tensor energía-momentum satisfaga ciertas condiciones, las cuales se pueden citar como las “*Condiciones de Energía: Débil, Fuerte y Dominante*” [41].

La condición de energía débil de cualquier distribución de materia, medida por cualquier observador en un espacio - tiempo, debe ser no negativa. Por lo tanto la condición de energía débil implica que

$$\epsilon \geq 0, \quad (2.38)$$

mientras que la condición de energía fuerte es equivalente a la condición

$$\sigma \geq 0, \quad (2.39)$$

es la “densidad newtoniana efectiva”. Finalmente, la condición de energía dominante puede ser interpretada diciendo que para cualquier observador la densidad de energía aparece como no negativa y que el flujo de energía no es tipo espacial. La condición de energía dominante es la misma condición de energía débil con el requerimiento adicional que la presión no debe exceder la densidad de energía. Ésto es válido para todas las formas conocidas de materia, esto es

$$S^a S_a \leq 0. \quad (2.40)$$

## CAPÍTULO 3

---

---

### Modelos Particulares de Discos Delgados Conformestáticos

---

---

#### 3.1 *Preliminares*

Como una aplicación de lo presentado en los Capítulos anteriores, en este Capítulo se obtuvieron algunos modelos simples de discos. Tales discos se obtienen considerando soluciones simples de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para espacio-tiempos conformestáticos en presencia de campos eléctricos y magnéticos respectivamente, que permiten obtener expresiones de las cantidades físicas propias del tensor energía momentum, densidad de corriente y corriente en los discos, respectivamente; y se estudió su comportamiento gráfico.

De acuerdo con esto, en la sección 3.2, consideramos la familia generalizada de discos de Kalnajs, para la cual se analizan las propiedades físicas de un disco tipo polvo con campo eléctrico tales como son la densidad de energía, dada por la expresión (1.36). Dicho disco se genera de forma natural debido a que la geometría del problema se adapta a las coordenadas del mismo. Como característica adicional, el disco modelado es axialmente simétrico, de extensión finita y cumple con todas las condiciones de energía. Posteriormente en la sección 3.3, obtuvimos una clase de discos tomando como solución de la ecuación de Laplace el potencial gravitacional de dos fuentes puntuales alineadas a lo largo del eje  $-z$ . En particular, se obtienen las expresiones explícitas para la densidad de energía y la corriente dadas por (2.36)-(2.37), respectivamente, y se analiza su comportamiento gráfico según la variación de ciertos parámetros.

Finalmente, en la sección 3.4, obtuvimos otra distribución discoidal, tomando como solución de la ecuación de Laplace el potencial gravitacional generado por una barra de masa  $m$  y longitud finita localizada en el eje  $-z$ . Al igual que en la sección inmediatamente anterior

calculamos las expresiones explícitas para la densidad de energía y la corriente. En los dos últimos casos, las fuentes discoidales son de extensión infinita, con campo magnético, tipo polvo; y para los tres casos presentados se cumplen todas las condiciones de energía.

## 3.2 Discos Tipo Kalnajs

Ahora se restringe el formalismo presentado en el Capítulo 1, en la aplicación de las soluciones conformestáticas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell con campo eléctrico para la construcción de un modelo de disco tipo polvo. El potencial gravitacional adopta la siguiente forma

$$U(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^m C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \quad (3.1)$$

donde, las constantes de normalización estan dadas por [20]

$$C_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} (4n+1)(2l+1)! \Gamma(l-n+1/2)}{(2n+1)2^{n+1}(2l-2n)! \Gamma(l+n+3/2) Q_{2n+1}(i0)} m. \quad (3.2)$$

Ahora vamos a considerar una familia particular de discos con un buen comportamiento en la densidad de energía superficial del disco. Los miembros de la familia se expresan en términos de soluciones particulares  $U_m$  de la ecuación de Laplace y eligiendo correctamente las constantes de la solución general (3.1). Las soluciones obtenidas para  $U_m$  representan el potencial gravitacional newtoniano para discos delgados, finitos, axialmente simétricos, con la densidad de masa dada por

$$\Sigma_m(r) = \frac{(2m+1)M}{2\pi a^2} \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right]^{m-\frac{1}{2}}, \quad (3.3)$$

donde  $M$  y  $a$ , son respectivamente, la masa total del disco y el radio del disco y toma un valor  $m \geq 1$ . Para cada valor de  $m$ , las constantes  $C_{2n}$  estan definidas a través de la relación [20]

$$C_{2n} = \frac{K_{2n}}{(2n+1)q_{2n+1}(0)}, \quad (3.4)$$

donde

$$K_{2n} = \frac{M}{2a} \left[ \frac{\pi^{1/2} (4n+1) (2m+1)!}{2^{2m} (m-n)! \Gamma(m+n+\frac{3}{2})} \right], \quad (3.5)$$

para  $n \leq m$ , y  $C_{2n} = 0$  para  $n > m$ . En el Cuadro 3.1 podemos calcular los valores diferentes de cero de  $C_{2n}$  para los primeros seis miembros de la familia. De está manera, utilizando estas constantes en la solución general (3.1) es fácil ver que el potencial gravitacional  $U_m$  es negativo en todas partes, tal como se impuso en el Capítulo anterior.

$m$	$C_0$	$C_2$	$C_4$	$C_6$	$C_8$	$C_{10}$	$C_{12}$
1	$\frac{M}{a}$	$\frac{M}{a}$					
2	$\frac{M}{a}$	$\frac{10M}{7a}$	$\frac{3M}{7a}$				
3	$\frac{M}{a}$	$\frac{5M}{3a}$	$\frac{9M}{11a}$	$\frac{5M}{33a}$			
4	$\frac{M}{a}$	$\frac{20M}{11a}$	$\frac{162M}{143a}$	$\frac{4M}{11a}$	$\frac{7M}{143a}$		
5	$\frac{M}{a}$	$\frac{25M}{13a}$	$\frac{18M}{13a}$	$\frac{10M}{17a}$	$\frac{35M}{247a}$	$\frac{63M}{4199a}$	
6	$\frac{M}{a}$	$\frac{2M}{a}$	$\frac{27M}{17a}$	$\frac{260M}{323a}$	$\frac{5M}{19a}$	$\frac{378M}{7429a}$	$\frac{33M}{7429a}$

Cuadro 3.1: Las constantes  $C_{2n}$  para  $m = 0, \dots, 6$ .

Ahora bien, con el fin de ilustrar gráficamente el comportamiento de los diferentes modelos particulares, primero definamos las siguientes cantidades adimensionales, a través de las relaciones

$$\tilde{U}_m(\tilde{r}) = \frac{aU_m(\tilde{r})}{M}, \quad (3.6)$$

$$\tilde{\Sigma}_m(\tilde{r}) = \frac{\pi a^2 \Sigma_m(\tilde{r})}{M}, \quad (3.7)$$

$$\tilde{\epsilon}_m(\tilde{r}) = \pi a \epsilon_m(\tilde{r}), \quad (3.8)$$

donde  $\tilde{r} = r/a$ ,  $0 \leq \tilde{r} \leq 1$ , y  $U_m(\tilde{r})$  está evaluado en  $z = 0^+$ . De acuerdo con esto, la densidad de energía adimensional  $\tilde{\epsilon}(\tilde{r})$  puede escribirse como

$$\tilde{\epsilon}_m(\tilde{r}) = -\frac{\tilde{k}\tilde{\Sigma}_m(\tilde{r})}{[\tilde{U}_m(\tilde{r}) + \tilde{k}]^2}, \quad (3.9)$$

donde  $\tilde{k} = (ka)/M$ .

Ahora, usando las expresiones y los valores para las constantes  $C_{2n}$ , dados por el Cuadro 3.1, además de basarnos en (1.36) y (3.1), obtenemos las siguientes densidades de carga para diferentes valores de  $m$ , las cuales están dadas por

$$\tilde{\epsilon}_1 = -\frac{3\tilde{k}\sqrt{1-\tilde{r}^2}}{2[\tilde{k} + \frac{3\pi}{8}(\tilde{r}^2 - 2)]^2}, \quad (3.10)$$

$$\tilde{\epsilon}_2 = -\frac{5\tilde{k}(1-\tilde{r}^2)^{3/2}}{2[\tilde{k} - \frac{15\pi}{128}(3\tilde{r}^4 - 8\tilde{r}^2 + 8)]^2}, \quad (3.11)$$

$$\tilde{\epsilon}_3 = -\frac{7\tilde{k}(1-\tilde{r}^2)^{5/2}}{2[\tilde{k} + \frac{35\pi}{512}(5\tilde{r}^6 - 18\tilde{r}^4 + 24\tilde{r}^2 - 16)]^2}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{\epsilon}_4 = -\frac{9\tilde{k}(1-\tilde{r}^2)^{7/2}}{2[\tilde{k} - \frac{315\pi}{32768}(35\tilde{r}^8 - 160\tilde{r}^6 + 288\tilde{r}^4 - 256\tilde{r}^2 + 128)]^2}, \quad (3.13)$$

$$\tilde{\epsilon}_5 = -\frac{11\tilde{k}(1-\tilde{r}^2)^{9/2}}{2[\tilde{k} + \frac{693\pi}{131072}(63\tilde{r}^{10} - 350\tilde{r}^8 + 800\tilde{r}^6 - 960\tilde{r}^4 + 640\tilde{r}^2 - 256)]^2}, \quad (3.14)$$

$$\tilde{\epsilon}_6 = -\frac{13\tilde{k}(1-\tilde{r}^2)^{11/2}}{2[\tilde{k} - \frac{3003\pi}{2097152}(231\tilde{r}^{12} - 1512\tilde{r}^{10} + 4200\tilde{r}^8 - 6400\tilde{r}^6 + 5760\tilde{r}^4 - 3072\tilde{r}^2 + 1024)]^2}, \quad (3.15)$$

para las densidades de energía de los seis primeros modelos de disco.

Para tratar de explicar lo anterior, en la Figura 3.1, se presenta la densidad de energía adimensional  $\tilde{\epsilon}_m$  como función de  $\tilde{r}$  con  $\tilde{k} = -1$  para los modelos de disco con  $m = 1, \dots, 6$ . Por último, para un determinado valor de  $m$ , el valor de la densidad de energía inicialmente aumenta con el valor de  $|\tilde{k}|$ , pero luego llega a un máximo y luego disminuye a medida que  $|\tilde{k}|$  aumenta.

En la Figura 3.2, se presenta una gráfica de la densidad de energía adimensional en el centro del disco,  $\tilde{\epsilon}(0)$ , como una función de  $\tilde{k}$  para los mismos seis modelos de discos previamente considerados. Ahora bien, como la densidad de carga de los discos es igual a su densidad de energía, excepto un signo, todos los análisis anteriores se aplican también al comportamiento de la densidad de carga superficial de los modelos de disco.

En la Figura 3.3, se presenta la densidad superficial de energía adimensional  $\tilde{\epsilon}_m$  como función de  $\tilde{r}$  para los seis primeros modelos de disco, con  $m = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6$ . En cada caso, hemos graficado  $\tilde{\epsilon}_m(\tilde{r})$  para  $0 \leq \tilde{r} \leq 1$  con diferentes valores del parámetro  $\tilde{k}$ . Hemos tomado primero  $\tilde{k} = -0,25$ , la parte inferior de la curva y entonces  $\tilde{k} = -0,5, -1, -2, -4$  y  $-8$ . Como podemos ver, en todos los casos, la densidad de energía es positiva en todas partes, y se anula rápidamente en el borde del disco. Sin embargo, hay diferentes comportamientos en función de los valores de  $m$  y  $\tilde{k}$ . Ahora, para los dos primeros modelos con  $m = 1$  y  $m = 2$ , se encontró que para pequeños valores de  $|\tilde{k}|$  la densidad de energía presenta un máximo cerca del borde del disco, mientras que para valores más altos de  $|\tilde{k}|$  el máximo ocurre en el centro del disco. Por otra parte, para  $m > 3$ , encontramos que para todos los valores de  $|\tilde{k}|$  el máximo

de densidad de energía ocurre en el centro del disco.

También podemos ver que, a medida que el valor de  $m$  aumenta, la densidad de energía está más concentrada en el centro del disco. Asimismo, en la parte central de los discos, a medida que  $m$  aumenta, el valor de la densidad de energía también aumenta de tal manera que, para un determinado valor de  $\tilde{k}$ , la densidad de energía es mayor o igual que el valor de  $m$ . Por otra parte, en el borde de los discos el comportamiento es contrario, el valor de la densidad de energía disminuye a medida que  $m$  aumenta.

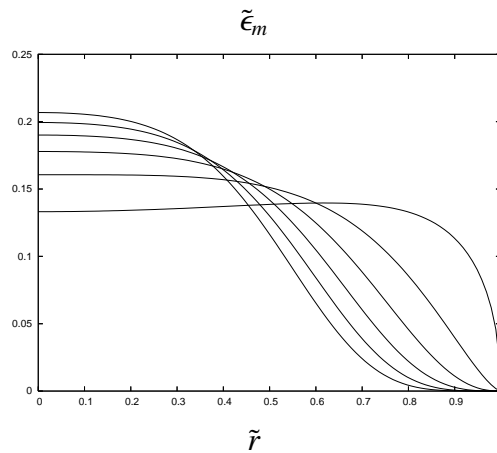


Figura 3.1: Densidad de energía adimensional  $\tilde{\epsilon}_m$  como una función de  $\tilde{r}$  con  $\tilde{k} = -1$  para los seis primeros modelos de discos  $m = 1, \dots, 6$ .

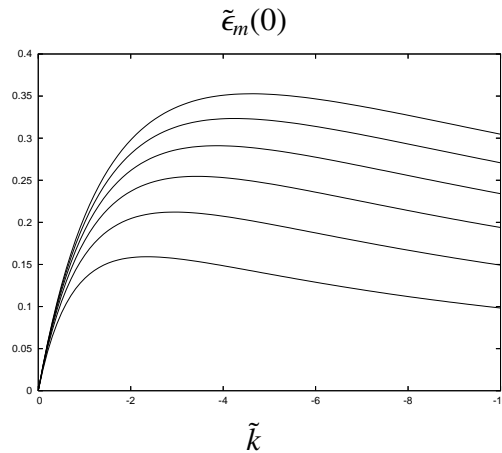


Figura 3.2: Densidad de energía adimensional en el centro de los discos,  $\tilde{\epsilon}(0)$ , como una función de  $\tilde{k}$  para los mismos seis modelos de discos previamente considerados.

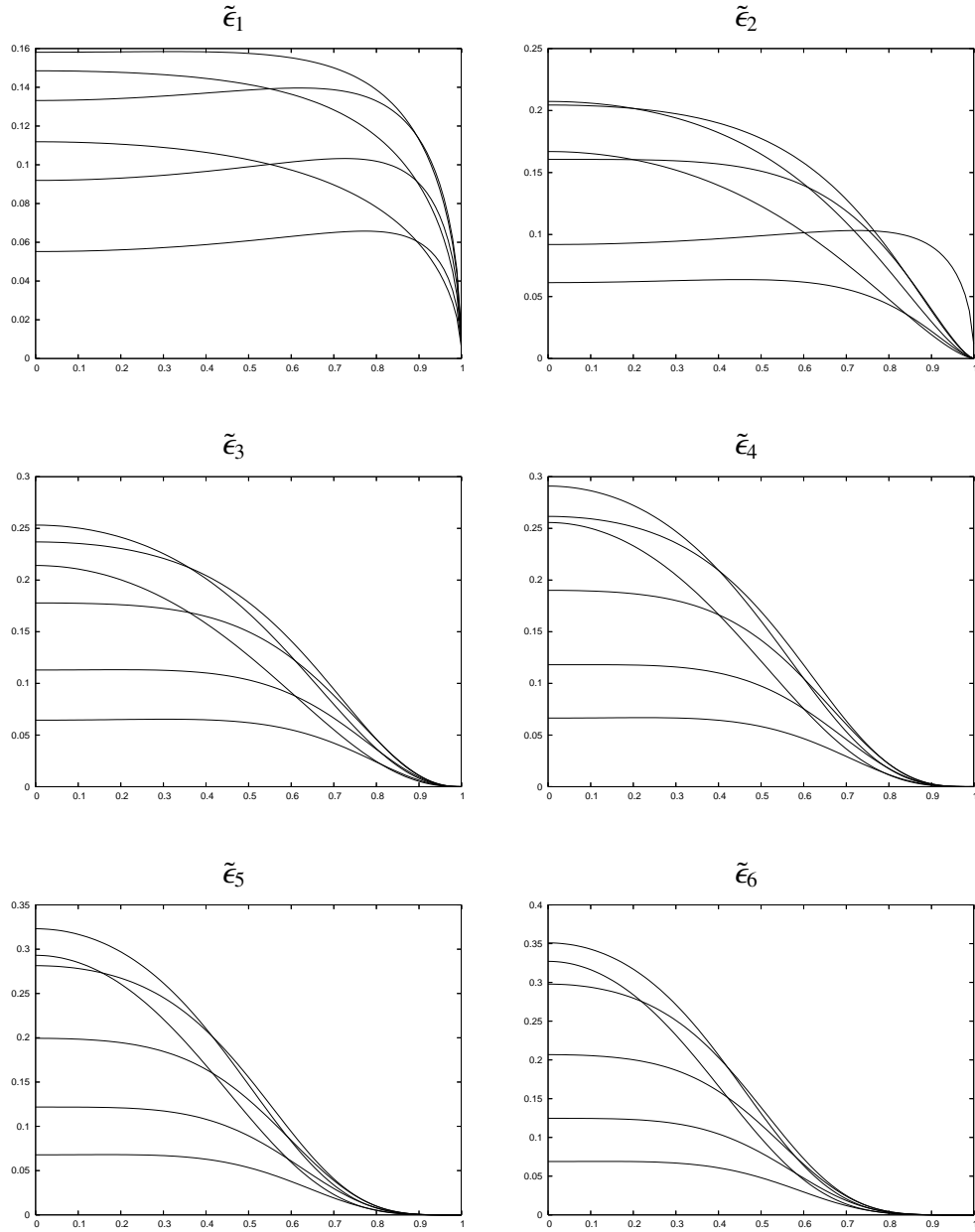


Figura 3.3: Densidad superficial de energía adimensional  $\tilde{\epsilon}_m$  como una función de  $\tilde{r}$  para los seis primeros modelos de disco con  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . En cada caso, hemos graficado  $\tilde{\epsilon}_m(\tilde{r})$  para  $0 \leq \tilde{r} \leq 1$  con  $\tilde{k} = -0,25$  para  $\tilde{\epsilon}_1$ , con  $\tilde{k} = -0,5$  para  $\tilde{\epsilon}_2$ , con  $\tilde{k} = -1$  para  $\tilde{\epsilon}_3$ , con  $\tilde{k} = -2$  para  $\tilde{\epsilon}_4$ , con  $\tilde{k} = -4$  para  $\tilde{\epsilon}_5$ , y finalmente  $\tilde{k} = -8$  para  $\tilde{\epsilon}_6$

### 3.3 Dos Fuentes Puntuales Alineadas en el Eje $z$

Soluciones de electrovacío que representan dos masas puntuales alineadas en posiciones arbitrarias se pueden construir debido a que, como se ha señalado anteriormente, la función

$U(R, z)$  debe satisfacer la ecuación de Laplace y, por tanto, pueden ser superpuestas. Supongamos que tenemos una solución de la ecuación de Laplace que representa dos masas puntuales localizadas en el eje  $z$ , la primera con masa  $m_1$  en  $z = 0$  y la segunda con masa  $m_2$  localizada en  $z = -z_2$ . La función  $U$  que representa la superposición de ellas, está dada por

$$U(R, z) = \frac{m_1}{\sqrt{R^2 + z^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{R^2 + (z + z_2)^2}}. \quad (3.16)$$

El método que vamos a utilizar para generar la fuente discoidal y su contenido magnético a partir de 3.16, es el bien conocido “*Desplazamiento, Corte y Reflexión*”, método el cual fué utilizado por primera vez por Kuzmin [37] and Toomre [46] en gravedad newtoniana. El método que vamos a utilizar se pueden dividir en los siguientes pasos: En primer lugar, elegir una superficie que divide el espacio habitual en dos partes, una con singularidades o no fuentes y el otro con las fuentes. En segundo lugar, ignorar la parte del espacio con singularidades. En tercer lugar, utilizar la superficie para hacer una inversión de la región no singular, que es una función Delta con el apoyo en la superficie. En la siguiente Figura 3.4, se presenta una representación gráfica del método.

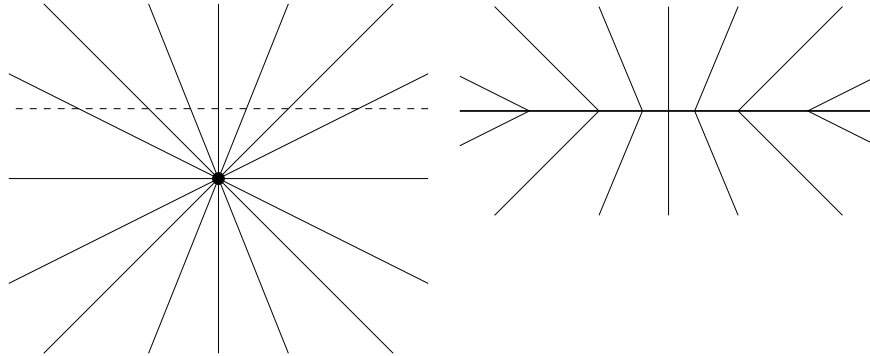


Figura 3.4: Método de Desplazamiento, Corte y Reflexión

El procedimiento es matemáticamente equivalente a hacer una transformación  $z \rightarrow |z| + b$ , con  $b$  constante.

Ahora, si aplicamos el método de “*Desplazamiento, Corte y Reflexión*” a la ecuación (3.16), podemos obtener la densidad de energía (2.36) y la corriente (2.37) del disco en el plano  $z = 0$  las cuales están dadas por

$$\epsilon = \frac{k}{2\pi \sqrt{R_1 R_2}} \left[ \frac{m_1 b R_2^{3/2} + m_2 (b + z_2) R_1^{3/2}}{[k \sqrt{R_1 R_2} + m_1 \sqrt{R_2} + m_2 \sqrt{R_1}]^2} \right], \quad (3.17)$$

$$j = \frac{kr}{2\pi \sqrt{R_1 R_2}} \left[ \frac{m_1 R_2^{3/2} + m_2 R_1^{3/2}}{[k \sqrt{R_1 R_2} + m_1 \sqrt{R_2} + m_2 \sqrt{R_1}]^2} \right], \quad (3.18)$$

respectivamente. Aquí  $R_1 = r^2 + b^2$ ,  $R_2 = r^2 + (b + z_2)^2$  y  $k > 0$  lo cual garantiza todas las condiciones de energía; esto es, la ecuación de estado  $\epsilon > 0$ .

En las Figuras 3.5, 3.6 y 3.7, se presenta la densidad superficial de energía  $\epsilon$  como función de  $r$  y de la corriente  $j$  también como función de  $r$  para los cuatro primeros modelos de disco, con  $m = 1, 2, 3, 4$ . Como podemos ver, en todos los casos, la densidad de energía es positiva en todas partes, y se anula rápidamente en el borde del disco de extensión infinita. La misma situación se presenta con la corriente en el disco. Para cada gráfica, se variaron los parámetros para la densidad de energía y la corriente; así, en el orden que se presentan las gráficas, los parámetros que variaron fueron  $m_2 = 0, 1, 2, 3$  para 3.5, adicionalmente para 3.6 quien cambio fué  $z_2 = 1, 2, 3, 4$ ; y, finalmente  $k = 1, 2, 3, 4$  para la gráfica 3.7.

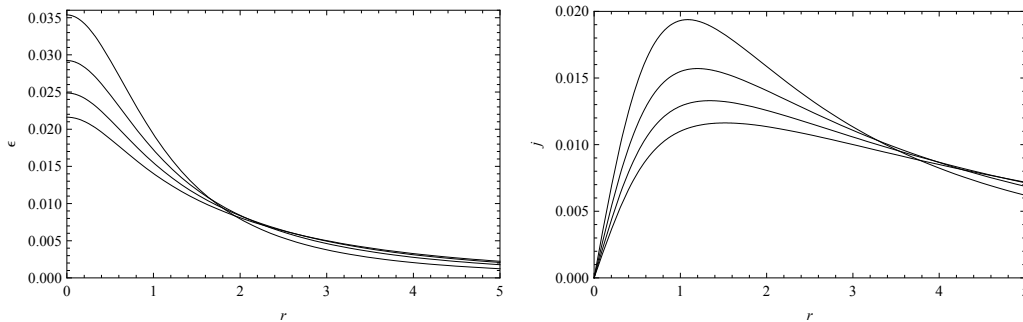


Figura 3.5: Densidad de energía superficial  $\epsilon$  y corriente  $j$ , como una función de  $r$  respectivamente. Se presentan las curvas de cada propiedad física para los cuatro primeros modelos de discos con  $m_1 = 2, m_2 = 0, 1, 2, 3, k = 1, z_2 = 1, b = 1$ .

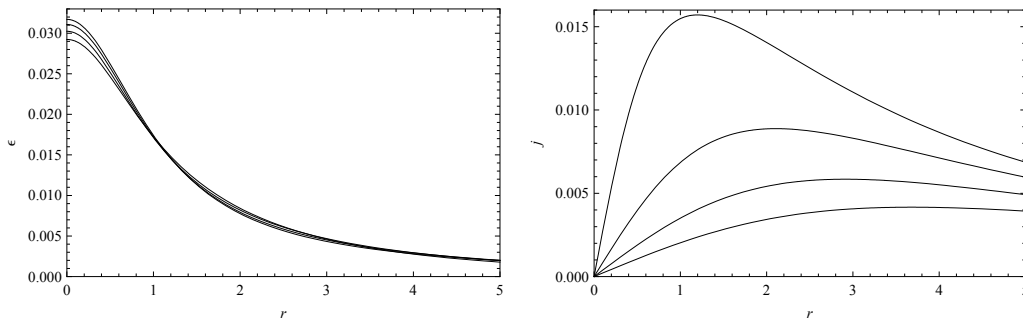


Figura 3.6: Densidad de energía superficial  $\epsilon$  y corriente  $j$ , como una función de  $r$  respectivamente. Se presentan las curvas de cada propiedad física para los cuatro primeros modelos de discos con  $m_1 = 2, m_2 = 1, k = 1, z_2 = 1, 2, 3, 4, b = 1$ .

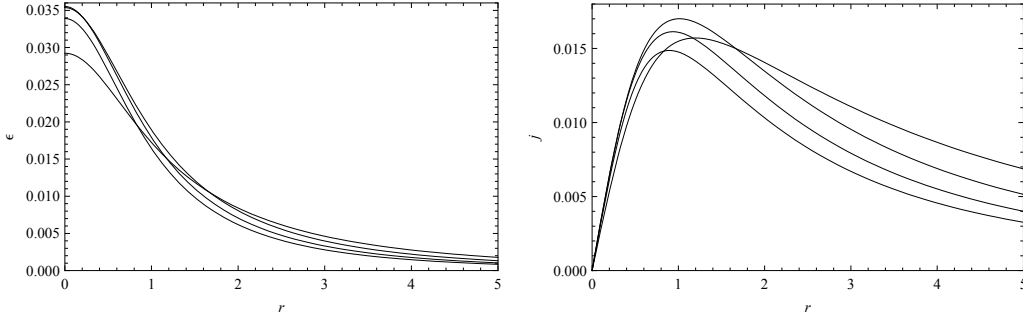


Figura 3.7: Densidad de energía superficial  $\epsilon$  y corriente  $j$ , como una función de  $r$  respectivamente. Se presentan las curvas de cada propiedad física para los cuatro primeros modelos de discos con  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 1$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ ,  $z_2 = 1$ ,  $b = 1$ .

### 3.4 Potencial de una Barra Finita Localizada en el Eje $z$

Como un segundo ejemplo, se ha tomado una solución de la ecuación de Laplace que representa un potencial gravitacional generado por una barra de masa  $m$ , de longitud finita y localizada sobre el eje  $z$ , la cual puede servir en la construcción de discos relativistas o un campo de un esferoidal oblató o prolato; dicha solución se puede escribir como [47]

$$U(r, z) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{R_1 + R_2 - 2m}{R_1 + R_2 + 2m} \right], \quad (3.19)$$

donde  $R_1^2 = r^2 + (z + m)^2$ ,  $R_2^2 = r^2 + (z - m)^2$  y  $m$  es una constante positiva.

Ahora, si aplicamos el método de “Desplazamiento, Corte y Reflexión” a la ecuación (3.19), obtenemos las expresiones para la densidad de energía (2.36) y para la corriente (2.37) del disco en el plano  $z = 0$ , las cuales toman las siguientes formas respectivamente

$$\epsilon = - \frac{k(R_+ - R_-)}{\pi R_+ R_- \left[ 2k + \ln \left[ \frac{R_+ + R_- - 2m}{R_+ + R_- + 2m} \right] \right]^2}, \quad (3.20)$$

$$j = - \frac{2mkr(R_+ + R_-)}{\pi R_+ R_- [r^2 + b^2 - m^2] \left[ 2k + \ln \left[ \frac{R_+ + R_- - 2m}{R_+ + R_- + 2m} \right] \right]^2}, \quad (3.21)$$

donde  $R_+ = \sqrt{r^2 + (b + m)^2}$ ,  $R_- = \sqrt{r^2 + (b - m)^2}$  y  $k < 0$  lo cual garantiza el cumplimiento de todas las condiciones de energía.

A continuación en la Figura 3.8, graficamos la densidad de energía  $\epsilon$  y corriente  $j$ , como función de  $r$  para los primeros cuatro modelos de disco con los siguientes parámetros  $m = 1$ ,  $k = -0,5, -1, -1,5, -2$ ,  $b = 2$ . Vemos que el valor de la densidad de energía inicialmente aumenta en una región cercana al centro del disco luego llega a un máximo y comienza a decaer monótonamente según la coordenada  $r$  aumenta. Algo similar sucede con la corriente para los mismos valores de parámetros, presenta un incremento desde la región central del disco, luego toma un valor máximo y decae de manera similar a la densidad de energía. Se puede destacar también que ambas cantidades físicas siempre son positivas de acuerdo como lo garantizan las condiciones de energía y éste tipo de discos presentan extensión infinita, tal como el método de DCR lo garantiza.

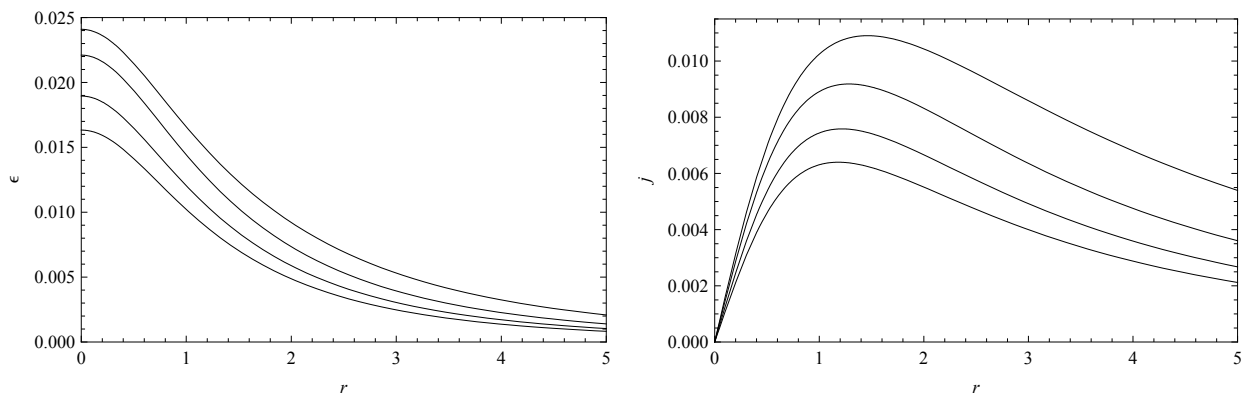


Figura 3.8: Densidad de energía superficial  $\epsilon$  y corriente  $j$  como una función de  $r$  para los siguientes parámetros  $m = 1$ ,  $k = -0,5, -1, -1,5, -2$ ,  $b = 2$

De manera similar, en la Figura 3.9, graficamos la densidad de energía  $\epsilon$  y corriente  $j$ , como función de  $r$  para los cinco primeros modelos de disco con los siguientes parámetros  $m = 1$ ,  $k = -1$ ,  $b = 2, 3, 4, 5, 6$ . El valor de la densidad de energía inicialmente aumenta pero según el valor que se toma del parámetro  $b$  la densidad de energía disminuye más rápidamente, esto se puede ver en las curvas de la parte superior a la parte inferior. El comportamiento de la corriente también presenta un cambio significativo debido a la variación del parámetro  $b$ , el cual al disminuir su valor hace que la curva de corriente sea menos pronunciada.

Sin embargo, la densidad de energía superficial y la corriente en el disco siempre son positivas tal como lo garantizan las condiciones de energía. Éste tipo de discos son delgados, presentan extensión infinita, y cumplen con todas las condiciones de energía.

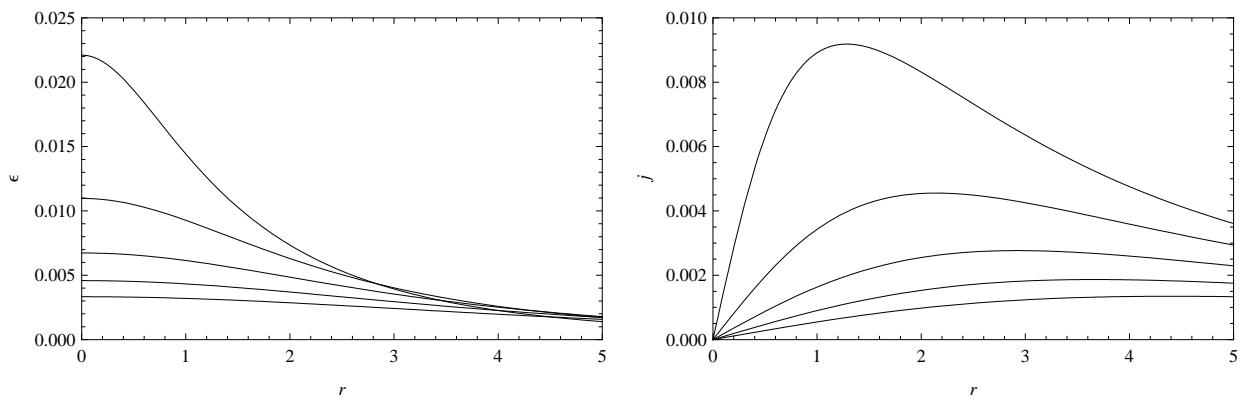


Figura 3.9: Densidad de energía superficial  $\epsilon$  y corriente  $j$  como una función de  $r$  para los siguientes parámetros  $m = 1$ ,  $k = -1$ ,  $b = 2, 3, 4, 5, 6$

---

---

## Conclusiones

---

---

Se presentó un tipo muy especial de espacio-tiempos, los bien llamados elementos de línea conformestáticos en términos de la construcción de discos de polvo cargados con campos eléctricos y magnéticos. Para este fin, en el Capítulo 1, se presentó un estudio de modelos de discos delgados finitos en relatividad general a partir de soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío con campo eléctrico, de tal forma que las primeras derivadas del tensor métrico y del potencial electromagnético poseen una discontinuidad finita. También se obtuvo las soluciones a las ecuaciones de campo mediante el sencillo método de dependencia funcional entre el coeficiente métrico, el potencial electromagnético y una solución de la ecuación de Laplace. Basados en dicha solución, se obtuvo la expresión general para el tensor de energía-momentum y de la densidad de corriente del disco, respectivamente; las cuales representan las cantidades físicas de dichos modelos de discos. Dichos modelos de discos son conformestáticos, delgados, finitos, axialmente simétricos, con campo eléctrico y cumple con la ecuación de estado  $P = 0$ , en donde se cumple que la densidad de carga es igual a la densidad de energía, excepto un signo y siempre es positiva (1.36), lo cual nos conduce a afirmar que dichos modelos satisfacen todas las condiciones de energía [41].

En el Capítulo 2, se realizó un estudio de modelos de discos delgados en relatividad general a partir de soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío con campo magnético, de tal forma que las primeras derivadas del tensor métrico y del potencial electromagnético poseen una discontinuidad finita. Se obtuvieron las soluciones a las ecuaciones de campo mediante el método de dependencia funcional entre el coeficiente métrico, el potencial electromagnético y una solución de la ecuación de Laplace al igual que el Capítulo anterior. Basados en dicha solución, obtuvimos la expresión general para el tensor de energía-momentum y la corriente del disco dadas por (2.36)-(2.37), respectivamente, las cuales representan las cantidades físicas de dichos modelos de discos. Dichos modelos tienen la característica de ser conformestáticos, delgados, tipo polvo con campo magnético y de extensión infinita. A diferencia del caso eléctrico, estos discos fueron construidos utilizando el método de “*Desplazamiento, Corte y Reflexión*”. En este caso también se cumplen en su totalidad todas las condiciones de energía [41].

En el Capítulo 3, se consideró en primera instancia los desarrollos referentes a la generación de soluciones conformestáticas que representan distribuciones discoidales tipo polvo y de extensión finita con campo eléctrico. Como ejemplo se muestran los casos correspondientes a los discos generalizados de Kalnajs. Vimos que las gráficas de densidad de energía presentan

---

un comportamiento aceptable en la región del disco y además cumple con todas las condiciones de energía tal como se hablo en líneas precedentes. También se consideraron la presencia de campos magnéticos en espacio-tiempos conformestáticos que nos representan soluciones discoidales, las cuales fueron generadas mediante el método de “*Desplazamiento, Corte y Reflexión*”, el cual permite construir fuentes discoidales infinitas a partir de soluciones simples. Dichas soluciones cumplen con la condición de ser soluciones de la ecuación de Laplace. La primera solución nos representa el potencial gravitacional generado por dos masas puntuales alineadas sobre el eje  $z$ . La segunda es una solución que representa en potencial newtoniano generado por una barra de masa  $m$  y de longitud finita, localizada sobre el eje  $z$ . En ambos casos las propiedades físicas tales como la densidad de energía y la corriente, dependían de varios parámetros que al ser modificados levemente presentaban un comportamiento físicamente razonable. En los casos presentados en éste Capítulo se presentaron varios modelos de discos los cuales cumplen con todas las condiciones de energía.

Finalmente, los resultados del presente proyecto de investigación condujeron a las siguientes ponencias internacionales

- **Segunda Reunión Colombo-Venezolana de Relatividad y Gravitación.**  
Octubre 28-31 de 2007, Armenia, Colombia.
- **Spanish Relativity Meeting.**  
Septiembre 15-19 de 2008, Salamanca, España.

También a la redacción de dos artículos en revistas internacionales

- **Finite axisymmetric charged dust disks in conformastatic spacetimes.**  
Physical Review D **78**, 064058 (2008).
- **Axisymmetric magnetized dust disks in conformastatic spacetimes.**  
Sometime a referato a la revista Classical and Quantum Gravity.

---

---

## Apéndice A: Distribuciones Tensoriales

---

---

Sean  $T, U$  dos campos tensoriales definidos sobre un espaciotiempo  $M$ , y  $(T, U)$  su producto escalar en el punto  $x \in M$ . Sea  $D(M)$  el espacio de campos tensoriales con soporte compacto y de una clase de diferenciabilidad determinada. Una distribución tensorial  $T$  es una función lineal sobre  $D(M)$  definida como

$$\langle T, U \rangle = \int_M (T, U) \sqrt{-g} d^4x \quad (22)$$

donde  $U \in D(M)$  y  $T$  es un campo tensorial localmente integrable.

Sea  $\Sigma$  una hipersuperficie en  $M$  descrita por la ecuación

$$\phi(x^a) = 0, \quad (23)$$

donde  $\phi$  es una función suave de las coordenadas  $x^a$ , y por el vector normal

$$\eta_a = \phi_{,a} \quad (24)$$

donde  $(\ )_{,a} = \partial/\partial x^a$ . La hipersuperficie  $\Sigma$  divide el espaciotiempo  $M$  en dos partes  $M^+ = \{x^a : \phi > 0\}$  y  $M^- = \{x^a : \phi < 0\}$ , de tal forma que se puede introducir la función  $\theta$  de Heaviside, definida como

$$\theta(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi > 0 \\ \frac{1}{2}, & \phi = 0 \\ 0, & \phi < 0 \end{cases} \quad (25)$$

y tal que

$$\theta_{,a} = n_a \delta(\phi), \quad (26)$$

donde  $\delta(\phi)$  es la función delta de Dirac con soporte sobre la hipersuperficie  $\Sigma$ . Así, para toda función  $F$  con soporte compacto

$$\int_M F \delta(\phi) \sqrt{-g} d^4x = \int_\Sigma F dV, \quad (27)$$

donde  $dV$  es un elemento de volumen invariante introducido sobre la hipersuperficie  $\Sigma$ .

De la definición de  $\theta$  se tiene que, para todo campo tensorial  $U(x)$  definido sobre  $M$ ,

$$\begin{aligned}
\langle \theta(1 - \theta), U(x) \rangle &= \int_M U(x)\theta(1 - \theta) \sqrt{-g} d^4x \\
&= \int_{M^+} U(x)(1 - \theta) \sqrt{-g} d^4x \\
&= 0, \\
\langle \theta^2, U(x) \rangle &= \int_M U(x)\theta^2 \sqrt{-g} d^4x \\
&= \int_{M^+} U(x)\theta \sqrt{-g} d^4x \\
&= \int_{M^+} U(x) \sqrt{-g} d^4x, \\
\langle (1 - \theta)^2, U(x) \rangle &= \int_M U(x)(1 - \theta)^2 \sqrt{-g} d^4x \\
&= \int_{M^-} U(x)(1 - \theta) \sqrt{-g} d^4x \\
&= \int_{M^-} U(x) \sqrt{-g} d^4x, \\
\langle \theta\delta(\phi), U(x) \rangle &= \int_M U(x)\theta\delta(\phi) \sqrt{-g} d^4x \\
&= U(x)\theta|_{\Sigma} \\
&= \frac{1}{2}U(x)|_{\Sigma}, \\
\langle (1 - \theta)\delta(\phi), U(x) \rangle &= \int_M U(x)(1 - \theta)\delta(\phi) \sqrt{-g} d^4x \\
&= U(x)(1 - \theta)|_{\Sigma} \\
&= \frac{1}{2}U(x)|_{\Sigma},
\end{aligned}$$

lo que prueba las identidades

$$\begin{aligned}
\theta(1 - \theta) &= 0, \\
\theta^2 &= \theta, \\
(1 - \theta)^2 &= (1 - \theta), \\
(1 - \theta)\delta(\phi) &= \theta\delta(\phi) = \frac{1}{2}\delta(\phi),
\end{aligned} \tag{28}$$

en el sentido de las distribuciones.

Si  $T$  es un campo tensorial definido en  $M$  tal que  $T$  y sus derivadas tienen discontinuidades finitas a través de  $\Sigma$ , se pueden definir distribuciones en términos de  $T$  en la forma:

$$(T)^D = T^+\theta + T^-(1-\theta), \quad (29)$$

$$(T_{,a})^D = T_{,a}^+\theta + T_{,a}^-(1-\theta), \quad (30)$$

donde los índices  $\pm$  sobre el campo tensorial lo restringen a las regiones  $M^\pm$ , respectivamente. De esta forma,  $T = T^+$  en  $M^+$ ,  $T = T^-$  en  $M^-$  y  $T = T_\Sigma = \frac{1}{2}(T^+ + T^-)$  en  $\Sigma$ . Usando las identidades (28) se puede probar fácilmente que

$$(T)^D_{,a} = (T_{,a})^D + [T] n_a \delta(\phi), \quad (31)$$

$$(TU)^D = (T)^D(U)^D, \quad (32)$$

$$[TU] = U_\Sigma[T] + [U]T_\Sigma, \quad (33)$$

donde  $[T]$  es el salto de  $T$  a través de  $\Sigma$ , definido como

$$[T] = T^+|_\Sigma - T^-|_\Sigma, \quad (34)$$

el cual mide la discontinuidad de  $T$  a través de  $\Sigma$ .

---



---

## Apéndice B: Ecuaciones de Einstein-Maxwell para Cascarones de Materia

---



---

Con base en las ideas expuestas se formularán las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell para el caso en que existe un cascarón de materia en el espaciotiempo  $M$ , de tal forma que las primeras derivadas del tensor métrico presentan discontinuidad finita a través de una hipersuperficie  $\Sigma$  y las derivadas del potencial electromagnético pueden o no presentarla. El tensor métrico  $g_{ab}$  se supone continuo a través de  $\Sigma$ , mientras que el potencial electromagnético puede o no serlo. Las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell, en unidades geometrizadas tales que  $c = G = \mu_0 = \varepsilon_0 = 1$ , están dadas por

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (35a)$$

$$F^{ab}{}_{;b} = J^a, \quad (35b)$$

con

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left[ F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right], \quad (36a)$$

$$F_{ab} = A_{b,a} - A_{a,b}, \quad (36b)$$

donde todos los símbolos tienen el significado usual. La continuidad en el tensor métrico a través de  $\Sigma$  se puede expresar como

$$[g_{ab}] = g_{ab}^+|_{\Sigma} - g_{ab}^-|_{\Sigma} = 0, \quad (37)$$

de modo que en la vecindad de  $\Sigma$ , se tiene

$$g_{ab}^{\pm} = g_{ab}^0 + \phi g_{ab}'^{\pm} + \frac{1}{2} \phi^2 g_{ab}''^{\pm} + \dots, \quad (38)$$

donde prima denota la derivada con respecto a  $\phi$ .

De otra parte, mediante el uso de la continuidad de  $g_{ab}$ , se puede escribir

$$g_{ab} = (g_{ab})^D, \quad (39a)$$

$$g_{ab,c} = (g_{ab,c})^D, \quad (39b)$$

$$\Gamma_{bc}^a = (\Gamma_{bc}^a)^D, \quad (39c)$$

$$\Gamma_{bc,d}^a = (\Gamma_{bc,d}^a)^D + [\Gamma_{bc}^a] n_d \delta(\phi), \quad (39d)$$

donde

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ae} (g_{eb,c} + g_{ce,b} - g_{bc,e}), \quad (40)$$

son los símbolos de Christoffel y se supone que el tensor métrico,  $g_{ab}$ , se puede expresar en términos de una función de distribución según,

$$g_{ab} = (g_{ab})^D \equiv g_{ab}^+ \Theta(\phi) + g_{ab}^- \{1 - \Theta(\phi)\}, \quad (41)$$

siendo  $\Theta(\phi)$  la función de Heaviside y  $\delta(\phi)$  la distribución de Dirac con soporte en  $\Sigma$ .

Con el uso de los resultados anteriores en la definición del tensor de curvatura de Riemann,

$$R_{bcd}^a = \Gamma_{bd,c}^a - \Gamma_{bc,d}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a, \quad (42)$$

y la suposición que el tensor métrico  $g_{ab}$  es, por lo menos, de clase  $C^3$  en las regiones  $M^\pm$ , se obtiene para el tensor de Riemann la expresión [?]

$$R_{bcd}^a = (R_{bcd}^a)^D + H_{bcd}^a \delta(\phi), \quad (43)$$

donde

$$H_{bcd}^a = [\Gamma_{bd}^a] n_c - [\Gamma_{bc}^a] n_d, \quad (44)$$

y los  $(R_{bcd}^a)^\pm$  son los tensores de Riemann usuales definidos en  $M^\pm$ .

Las discontinuidades en las primeras derivadas del tensor métrico se pueden obtener de (38) y están caracterizadas por el tensor  $b_{ab}$ , definido a través de las relaciones

$$[g_{ab,c}] = b_{ab} n_c, \quad (45)$$

de tal forma que

$$[\Gamma_{bc}^a] = \frac{1}{2} (b_b^a n_c + b_c^a n_b - g^{ae} b_{bc} n_e), \quad (46a)$$

$$H_{bcd}^a = \frac{1}{2} (b_d^a n_b n_c - b_c^a n_b n_d + b_{bc} n^a n_d - b_{bd} n^a n_c), \quad (46b)$$

donde todas las cantidades se evalúan en la hipersuperficie  $\Sigma$ .

De igual manera, para el potencial electromagnético  $A_a$ , se define la distribución

$$A_a = (A_a)^D \equiv A_a^+ \Theta(\phi) + A_a^- \{1 - \Theta(\phi)\}, \quad (47)$$

de modo que su derivada,  $A_{a,b} = (A_a)^D_{,b}$ , se puede escribir como  $A_{a,b} = (A_{a,b})^D + [A_a] n_b \delta(\phi)$ . Así, el tensor electromagnético,  $F_{ab} = A_{b,a} - A_{a,b}$ , se puede escribir, equivalentemente, como

$$F_{ab} = (F_{ab})^D + \{ [A_b] n_a - [A_a] n_b \} \delta(\phi), \quad (48)$$

donde  $(F_{ab})^D = (A_{b,a})^D - (A_{a,b})^D$  y todas las cantidades se evalúan en la superficie.

Suponiendo que el tensor de momentum-energía  $T_{ab}$  y la densidad de corriente  $\hat{J}^a$  se pueden expresar en la forma

$$T_{ab} = (T_{ab})^D + Q_{ab} \delta(\phi), \quad (49a)$$

$$\hat{J}^a = (\hat{J}^a)^D + \hat{j}^a \delta(\phi), \quad (49b)$$

donde  $Q_{ab}$  y  $\hat{j}^a$  son el tensor de energía-momentum y la densidad de corriente asociados con la hipersuperficie  $\Sigma$  y los  $T_{ab}^\pm$  y  $\hat{J}_\pm^a$ , con  $\hat{J}^a = \sqrt{-g} J^a$ , son los tensores de energía-momentum y la densidad de corriente usuales definidos en  $M^\pm$ , se puede probar fácilmente, mediante (49b), que las ecuaciones de Einstein-Maxwell (35) son equivalentes al sistema de ecuaciones

$$G_{ab}^\pm = T_{ab}^\pm, \quad (50a)$$

$$H_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} H = Q_{ab}, \quad (50b)$$

$$\hat{F}_{\pm}^{ab}{}_{;b} = \hat{J}_{\pm}^a, \quad (50c)$$

$$j^a = j^a([A^a], g^{ab}), \quad (50d)$$

donde  $H_{ab} = H^c{}_{acb}$  y  $H = g_\Sigma^{ab} H_{ab}$ .

Cuando el cascarón de materia es la única fuente de los campos gravitacional y electromagnético, de tal forma que el resto del espaciotiempo es vacío (o electrovacío),  $J_\pm^a \equiv 0$  y las ecuaciones (50a) y (50c) se reducen a las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío

$$G_{ab}^\pm = T_{ab}^\pm, \quad (51a)$$

$$F_{\pm}^{ab}{}_{;b} = 0. \quad (51b)$$

De esta forma, después de resolver el sistema anterior, las ecuaciones (50b) y (50d) se pueden usar para obtener las expresiones del tensor de momentum-energía y la densidad de corriente para un cascarón de materia,

$$Q_b^a = \frac{1}{2} \{ (b_c^a n_b - b_b^a n_c) n^c + (b_b^c n_c - b_c^b n_b) n^a - \delta_b^a (b_c^e n_e - b_e^c n_c) \}, \quad (52a)$$

$$j^a = j^a([A^a], g^{ab}), \quad (52b)$$

donde todas las cantidades son evaluadas en la hipersuperficie  $\Sigma$ . Como se puede ver, en (52b) no aparece una función explícita para la densidad de corriente para un cascarón de materia.

---

---

## Bibliografía

---

---

- [1] J. B. Hartle and D. H. Sharp, *Astrophys. J.*, **147**, 317 (1967).
- [2] L. Lindblom, *Astrophys. J.*, **208**, 873 (1976).
- [3] C. Struck, *Phys. Rep.* **321**, 1 (1999).
- [4] M. Rees, in *Black Holes and Relativistic Stars*. edited by R. Wald (University of Chicago Press, Chicago, 1998), p 79.
- [5] W. A. Bonnor and A. Sackfield, *Comm. Math. Phys.* **8**, 338 (1968).
- [6] T. Morgan and L. Morgan, *Phys. Rev.* **183**, 1097 (1969).
- [7] L. Morgan and T. Morgan, *Phys. Rev. D* **2**, 2756 (1970).
- [8] B. H. Voorhees, *Phys. Rev. D* **5**, 2413 (1972).
- [9] D. Lynden-Bell and S. Pineault, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **185**, 679 (1978).
- [10] A. Chamorro, R. Gregory, and J. M. Stewart, *Proc. R. Soc. London* **A413**, 251 (1987).
- [11] P. S. Letelier and S. R. Oliveira, *J. Math. Phys.* **28**, 165 (1987).
- [12] J. P. S. Lemos, *Class. Quantum Grav.* **6**, 1219 (1989).
- [13] J. Bičák, D. Lynden-Bell, and J. Katz, *Phys. Rev. D* **47**, 4334 (1993).
- [14] J. Bičák, D. Lynden-Bell, and C. Pichon, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **265**, 126 (1993).
- [15] G. A. González and P. S. Letelier, *Class. Quantum Grav.* **16**, 479 (1999).
- [16] G. A. González and O. A. Espitia, *Phys. Rev. D* **68**, 104028 (2003).
- [17] D. Lynden-Bell and S. Pineault, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **185**, 695 (1978).
- [18] J. Bičák and T. Ledvinka, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1669 (1993).
- [19] C. Pichon and D. Lynden-Bell, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **280**, 1007 (1996).
- [20] G. A. González and J. I. Reina, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **371**, 1873 (2006).

- [21] G. A. González and P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* **62**, 064025 (2000).
- [22] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier, *Class. Quantum Grav.* **10**, L75 (1993).
- [23] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier, *Phys. Rev D* **49**, 5135 (1994).
- [24] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier, *Int. J. Mod. Phys. D* **5**, 53 (1996).
- [25] O. Semerák and M. Žáčěk, *Class. Quantum Grav.* **17**, 1613 (2000)
- [26] O. Semerák, *Class. Quantum Grav.* **19**, 3829 (2002)
- [27] M. Žáčěk and O. Semerák, *Czech. J. Phys.* **52**, 19 (2002)
- [28] O. Semerák, *Class. Quantum Grav.* **20**, 1613 (2003)
- [29] O. Semerák, *Class. Quantum Grav.* **21**, 2203 (2004)
- [30] V. Karas, J-M. Huré and O. Semerák, *Class. Quantum Grav.* **21**, R1 (2004).
- [31] M. Ujevic and P. S. Letelier, *Phys. Rev D* **70**, 084015 (2004)
- [32] T. Ledvinka, J. Bičák and M. Zofka, in *Proceeding of 8th Marcel-Grossmann Meeting in General Relativity*, edited by T. Piran(World Scientific, Singapore, 1999).
- [33] P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* **60**, 104042 (1999).
- [34] D. Vogt and P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* **68**, 084010 (2003).
- [35] G. García-Reyes and G. A. González, *Phys. Rev D* **70**, 104005 (2004).
- [36] G. García-Reyes and G. A. González, *Class. Quantum Grav.* **21**, 4845 (2004).
- [37] G. Kusmin, *Astron. Zh.* **33**, 27 (1956).
- [38] A. Papapetrou and A. Hamouni, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **9**, 179 (1968).
- [39] A. Lichnerowicz, *C.R. Acad. Sci.* **273**, 528 (1971).
- [40] A. H. Taub, *J. Math. Phys.* **21**, 1423 (1980).
- [41] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. (Cambridge University Press, 1973).
- [42] D. Vogt and P. S. Letelier, *Class. Quantum Grav.* **21**, 3369 (2004).
- [43] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, and M. McCallum, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2003).
- [44] J. L. Synge, *Relativity, the General Theory* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966).

- [45] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1984).
- [46] A. Toomre, *Astrophys. J.* **138**, 385 (1962).
- [47] H. P. Robertson and T. W. Noonan, *Relativity and Cosmology*. (Saunders, Philadelphia, 1969).