

**DECONVOLUCIÓN Y ESTIMACIÓN DE SEÑALES
APLICANDO UN FILTRO ÓPTIMO DE WIENER
FRACCIONARIO**

Autor
JOHAN FABIÁN TRIANA GALVIS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2.012

**DECONVOLUCIÓN Y ESTIMACIÓN DE SEÑALES
APLICANDO UN FILTRO ÓPTIMO DE WIENER
FRACCIONARIO**

Autor
JOHAN FABIÁN TRIANA GALVIS

PROYECTO DE GRADO
PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
FÍSICO

Director
RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS
Doctor en Ciencias Naturales (Física)

Codirector
HERLING GONZÁLEZ ÁLVAREZ
M. Sc. en Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2.012

To my dear

*La probabilidad depende, de nuestro conocimiento y nuestra habilidad para hacer,
estimaciones. En realidad, ¿de nuestro sentido común!*

Richard Feynman.

*Estoy firmemente convencido de que la mayoría de los pueblos del mundo
prefieren vivir en pax y en seguridad. El deseo de pax de la humanidad sólo
puede convertirse en realidad mediante la creación de un gobierno mundial*

Albert Einstein.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	14
1 PROPIEDADES Y OPERACIONES BÁSICAS	16
1.1 Transformación de Fourier Fraccionaria	16
1.1.1 Propiedades de la transformación de Fourier fraccionaria	17
1.2 Distribución de Wigner-Ville	17
1.3 Operador de Traslación Fraccionaria	19
1.4 Convolución Fraccionaria	21
1.5 Correlación Fraccionaria	23
2 PROCESOS ALEATORIOS	24
2.1 Señales deterministas vs. Señales aleatorias	24
2.2 Variable Aleatoria	25
2.3 Señales aleatorias	26
2.3.1 Promedio Estadístico	26
2.4 Estacionariedad	28
2.4.1 Estacionariedad en sentido fraccionario	28

2.5	Teorema de Wiener-Kinchine fraccionario	29
3	FILTRO DE WIENER FRACCIONARIO	32
3.1	Filtro No Causal	38
3.1.1	Reducción de Ruido	39
3.2	Deconvolución y Estimación de Señales	39
4	APLICACIONES DEL FILTRO DE WIENER FRACCIONARIO	43
4.1	Reducción de Ruido Aleatorio	43
4.2	Estimación de Señales	51
4.2.1	Curva de Error	57
	CONCLUSIONES	58
	REFERENCIAS	61
	ANEXOS	62

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Transformación de Fourier Fraccionaria sobre la distribución de Wigner-Ville. Siendo α es el ángulo de la transformación.	18
1.2	Operador de traslación fraccionaria efectuando sobre la distribución de Wigner-Ville. Siendo α es el ángulo de rotación y τ el desplazamiento. .	20
1.3	Convolución Fraccionaria entre dos rectángulos a diferentes ordenes a ($\alpha = a\frac{\pi}{2}$).	22
2.1	Ejemplo de una señal aleatoria desde el punto de vista del espacio muestral Ω	27
3.1	Distribución de Wigner-Ville de la señal S y del ruido N	40
4.1	Señal generada s	45
4.2	Señal registrada x	45
4.3	Distribución de Wigner-Ville de la señal x	46
4.4	Señal Estimada a diferentes ordenes a . El error se presenta en porcentaje.	48
4.5	Espectro de la Señal Registrada.	49
4.6	Señal Generada de la forma $s(t) = \sin(2\pi t) + n(t)$	49
4.7	Espectro de la Señal Generada de la forma $s(t) = \sin(2\pi t) + n(t)$	50
4.8	Generación de la señal registrada x	52

4.9	Distribución de Wigner-Ville de la señal registrada x	54
4.10	Señal Estimada a diferentes ordenes a por medio de una deconvolución. El error se presenta en porcentaje.	55
4.11	Señal Estimada con el algoritmo para el filtro de Wiener estándar [1]. .	56
4.12	Espectro de la Señal Registrada.	56
4.13	Curva de Error del proceso de Deconvolución. A) Punto de mínimo error.	57

RESUMEN

TÍTULO: DECONVOLUCIÓN Y ESTIMACIÓN DE SEÑALES APLICANDO UN FILTRO ÓPTIMO DE WIENER FRACCIONARIO.¹

AUTOR: Johan Fabián Triana Galvis^{2,3}

PALABRAS CLAVES: Filtro de Wiener Fraccionario, convolución fraccionaria, estimación, deconvolución, representación tiempo-frecuencia.

En este trabajo se realizan algunas aplicaciones para la deconvolución y estimación de señales aleatorias aplicando un Filtro de Wiener Fraccionario. El filtro es diseñado a partir de la definición planteada en [20] basado en la transformación de Fourier fraccionaria y la convolución fraccionaria. Debido a que la transformación de Fourier fraccionaria está basada en la distribución de Wigner-Ville (representación tiempo-frecuencia), hace que la extensión del Filtro de Wiener estándar a un Filtro de Wiener Fraccionario lo hagan más eficaz en el tratamiento de señales, en especial, para señales no estacionarias.

Inicialmente se formulan las herramientas teóricas utilizadas en el trabajo, para así llegar a una definición del Filtro de Wiener Fraccionario. Debido al tipo de señales con las cuales se trabaja, se implementan algunos elementos para el análisis de procesos aleatorios, entre los cuales se destaca el teorema de Wiener-Kinchine fraccionario, que nos da la relación existente entre la densidad espectral de potencia y la correlación.

Luego, se plantean los algoritmos para aplicarlos en señales distorsionadas por algún efecto y por un ruido gaussiano aleatorio. Después, se muestran los resultados obtenidos tanto con el filtro de Wiener fraccionario como con el filtro de Wiener estándar (en nuestro filtro existe como un caso particular) para comparar y dar veracidad a nuestro trabajo. Finalmente, se presentan los resultados principales de nuestro trabajo, las conclusiones y posibles fenómenos en los cuales se podría realizar este tipo de filtrado.

¹Trabajo de Grado.

²GOTS, Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales. Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Rafael Ángel Torres Amarís. Codirector: Herling Gonzalez Álvarez

³Grupo Petrosísmica, Instituto Colombiano del Petróleo.

ABSTRACT

TITLE: DECONVOLUTION AND SIGNAL ESTIMATION APPLYING A OPTIMAL FRACTIONAL WIENER FILTER.¹

AUTHOR: Johan Fabián Triana Galvis^{2,3}

KEYWORDS: Fractional Wiener Filter, fractional convolution, estimation, deconvolution, time–frequency representation.

In our job, we made some applications for deconvolution and random signals estimations applying a Fractional Wiener Filter. Filter was designed from the definition showed in [20] based on the Fractional Fourier Transform and fractional convolution. Due that the Fractional Fourier Transform is based in the Wigner-Ville distribution (time-frequency representation), this made that extension of Wiener Filter to Fractional Wiener Filter will be more effective in signal processing, specially in non-stacionary signals.

Firstly, we formulated the theoretical tools to be used in our job, to be able of defined the Fractional Wiener Filter. Due the type of signals we worked, we implemented some elements for random processes analysis. For example, the Fractional Wiener-Kinchine Theorem that it represented the rate between the power spectral density and correlation.

Then, we used the algorithms to apply in modified signals for some phenomenon physical and for a non-stacionary noise. After, we show results obtain it with both Filters, Standard Wiener Filter and Fractional Wiener Filter to compare and give more information.

Finally, we submitted principal results of our job, conclusions and possible phenomenon in which anybody could implement this methodology.

¹Thesis Degree

²GOTS, Optics and Signal Processing Group. Science Faculty. Physics School. Director: Rafael Ángel Torres Amarís. Co-director: Herling Gonzalez Álvarez

³Petrosísmica Group, Colombian Oil Institute.

Símbolos

\mathcal{F}_α :	Transformación de Fourier Fraccionaria
$\mathcal{F}_{-\alpha}$:	Transformación de Fourier Fraccionaria Inversa
DW:	Distribución de Wigner-Ville
\mathcal{T} :	Operador de Traslación Fraccionaria

INTRODUCCIÓN

Uno de los métodos para la estimación de parámetros o de señales es el propuesto por Norbert Wiener [25], el cual está basado en métodos estadísticos bajo el criterio del mínimo error cuadrático. Este trabajo, el cual consiste en el *filtro de Wiener*, se propone con el objetivo de encontrar un estimador que nos recupere la señal deseada a partir de una señal registrada [26]. Esta señal registrada en algunas ocasiones se puede expresar por medio de un modelo convolucional entre dos señales más un ruido. Una de las limitaciones que presenta este tipo de filtro es que fue desarrollado solo para señales estacionarias y que el filtrado solamente se realiza en el eje del tiempo o en el eje de las frecuencias bajo una representación de Wigner-Ville.

Existen varias extensiones o modificaciones realizadas al Filtro de Wiener para tratar los problemas de estimación de parámetros en geofísica o estimación de señales en el procesamiento de estas. En un principio el Filtro de Wiener fue utilizado para atenuar el ruido en las señales y así poder estimar una señal que ha sido distorsionada por algún fenómeno, conociendo que el contenido frecuencial de la señal es diferente al contenido frecuencial del ruido [19]. Otra modificación realizada fue el “Filtro de Wiener Modificado” [24], en el cual se introduce un parámetro que permite extraer el ruido de la señal de una manera más efectiva, minimizando el error cuadrático medio. Una de las últimas extensiones al Filtro de Wiener es la “Deconvolución de Gabor” que plantea un análisis para señales no estacionarias [9], ya que el dominio de Fourier en el cual trabaja el filtro de Wiener es solamente para aplicaciones en señales estacionarias. Este análisis en señales no estacionarias es de gran utilidad ya que en la naturaleza la mayoría de las señales son de este tipo.

Siguiendo la misma línea de ampliar o realizar una extensión al filtro de Wiener, en nuestro trabajo realizamos la aplicación de un “filtro de Wiener fraccionario”. Esta extensión es realizada con el propósito de trabajar con señales no estacionarias, las cuales son señales que se presentan con gran frecuencia en la naturaleza. Para lograr este propósito, nuestro filtro fue diseñado basado en la transformación de Fourier fraccionaria y en la convolución fraccionaria [12, 10, 21, 20]. Sin embargo, incluimos en nuestro trabajo la definición del filtro de Wiener estándar, el cual se presenta como un caso particular.

En este trabajo de grado, primero se presentan todas herramientas teóricas utilizadas durante el desarrollo para la aplicación del filtro de Wiener fraccionario, tales herramientas corresponden a la transformación de Fourier fraccionaria , convolución fraccionaria, operador de traslación fraccionaria, distribución de Wigner-Ville y procesos aleatorios. Luego se presenta el desarrollo teórico del filtro de Wiener fraccionario con algunos ejemplos de sus aplicaciones.

Finalmente se presentan las aplicaciones y conclusiones de los resultados obtenidos, los cuales son comparados con el filtro de Wiener estándar para una mejor interpretación.

1

PROPIEDADES Y OPERACIONES BÁSICAS

En este capítulo se muestran las propiedades y operaciones básicas utilizadas en el desarrollo de este trabajo.

1.1. Transformación de Fourier Fraccionaria

La transformación de Fourier fraccionaria (TFF) puede transformar una función en un dominio intermedio entre el tiempo y la frecuencia mientras que la transformada de Fourier estándar de una función es el espectro de esta. Fue planteada inicialmente por Victor Namias [12] en aplicaciones para mecánica cuántica, pero debido a algunas inconsistencias presentadas, no fue extensamente aceptada hasta la definición que dieron McBride y Kerr [10] en 1987. Por lo tanto la transformada de Fourier de una función f se define como

$$\mathcal{F}_\alpha[f](\nu) = C_\alpha e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\pi x^2 \cot \alpha} e^{2\pi i x \nu / \sin \alpha} dx, \quad (1.1)$$

donde $C_\alpha = \frac{e^{i(\mathbb{S}(\sin \alpha) \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{|\sin \alpha|}}$ [10], y donde la función $\mathbb{S}(\sin \alpha)$ representa el signo de α . Como caso particular se tiene que cuando $\alpha = \pi/2$ obtenemos la transformación de Fourier convencional.

Para nuestro trabajo denotaremos la transformada de Fourier fraccionaria de una función f como $\mathcal{F}_\alpha[f]$.

1.1.1. Propiedades de la transformación de Fourier fraccionaria

Las principales propiedades conocidas para la transformación de Fourier estándar han sido generalizadas para TFF, entre las cuales tenemos

- **Linealidad**

$$\mathcal{F}_\alpha[af(x) + bg(x)](\nu) = a\mathcal{F}_\alpha[f](\nu) + b\mathcal{F}_\alpha[g](\nu). \quad (1.2)$$

- **Traslación**

$$\mathcal{F}_\alpha[f(x - \tau)](\nu) = \mathcal{F}_\alpha[f](\nu - \tau \cos \alpha) e^{i\pi \sin \alpha (\tau^2 \cos \alpha - 2\nu\tau)}. \quad (1.3)$$

- **Teorema de Parseval**

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha[f](\nu) \overline{\mathcal{F}_\alpha[g](\nu)} d\nu. \quad (1.4)$$

- **Teorema de la modulación**

$$\mathcal{F}_\alpha[f(x) e^{2\pi i x \tau}](\nu) = \mathcal{F}_\alpha[f](\nu - \tau \sin \alpha) e^{-i\pi \cos \alpha (\tau^2 \sin \alpha - 2\nu\tau)}. \quad (1.5)$$

Donde la barra representa el complejo conjugado de la función.

1.2. Distribución de Wigner-Ville

La distribución de Wigner-Ville (DW), que corresponde a una representación en el espacio de fase, fue introducida por Eugene Wigner [27] para correcciones cuánticas en mecánica estadística, e introducida por Jean-André Ville [23] en 1948 para el análisis y procesamiento de señales. En nuestro trabajo utilizaremos la definición de la DW de una función f en términos de la representación temporal $f(t)$ como

$$W[f](t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} f\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{2\pi i \tau \nu} d\tau, \quad (1.6)$$

o en términos de la representación frecuencial $F(u)$ como

$$W[f](t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} F\left(\nu + \frac{\mu}{2}\right) \overline{F\left(\nu - \frac{\mu}{2}\right)} e^{-2\pi i t \mu} d\mu. \quad (1.7)$$

La transformación de Fourier fraccionaria está basada en la distribución de Wigner-Ville, donde una de las principales propiedades de la TFF es que corresponde a una rotación en esta distribución [8, 11], de la forma

$$W[\mathcal{F}_\alpha[f]](t, \nu) = W[f](t \cos \alpha - \nu \sin \alpha, t \sin \alpha + \nu \cos \alpha). \quad (1.8)$$

Para una mejor interpretación, en la figura 1.1 se observa el efecto de rotación que tiene la transformación de Fourier fraccionaria sobre la distribución de Wigner-Ville. En esta figura los ejes x_α y y_α corresponden al nuevo sistema de referencia de acuerdo al ángulo de rotación α .

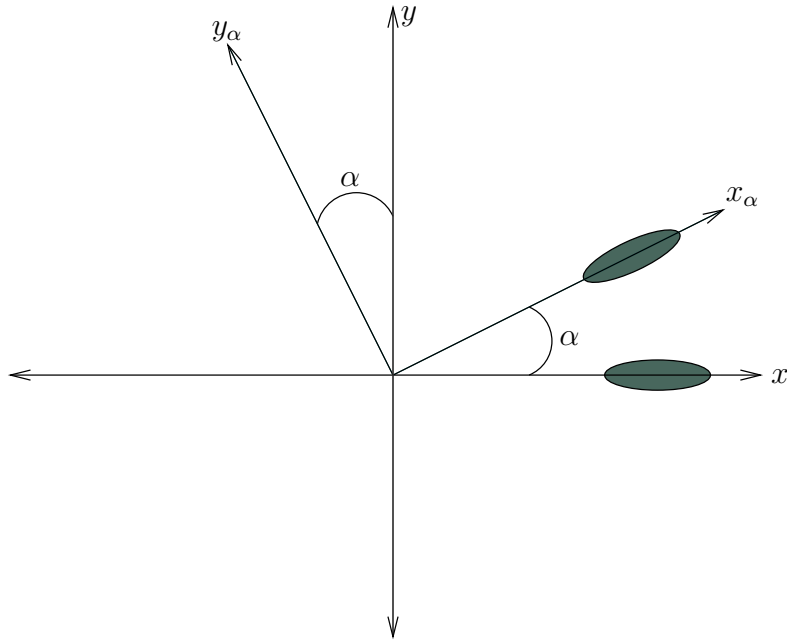


FIGURA 1.1: Transformación de Fourier Fraccionaria sobre la distribución de Wigner-Ville. Siendo α es el ángulo de la transformación.

1.3. Operador de Traslación Fraccionaria

El operador de traslación fraccionaria se define para poder recuperar la invariancia a la traslación, en módulo, de la transformación de Fourier fraccionaria; invariancia que posee la transformación de Fourier estándar ante traslaciones. Por lo tanto el operador de traslación fraccionaria está definido según R. Torres como [21]

$$\mathcal{T}_{\tau;\alpha}[f](x) = f(x - \tau)e^{2\pi i\tau(x - \frac{\tau}{2})\cot\alpha}, \quad (1.9)$$

de modo que

$$\mathcal{F}_\alpha \mathcal{T}_{\tau;\alpha}[f](\nu) = \mathcal{F}_\alpha[f](\nu)e^{i\frac{2\pi}{\sin\alpha}\tau\nu}. \quad (1.10)$$

Este operador al igual que la transformación de Fourier fraccionaria tiene un efecto sobre la DW, por lo tanto, a continuación veremos el efecto que tiene el operador de traslación fraccionaria sobre la DW.

Sea una función f cuya DW es $W[f]$ y de acuerdo con la ecuación 1.7, la DW para la traslación en θ de la función f se expresa como

$$W[\mathcal{T}_{\theta;\alpha}f](t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{T}_{\theta;\alpha}[f]\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \overline{\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[f]\left(t - \frac{\tau}{2}\right)} e^{2\pi i\tau\nu} d\tau, \quad (1.11)$$

de acuerdo a las definiciones dadas en 1.9 y 1.7 tenemos que

$$\begin{aligned} W[\mathcal{T}_{\theta;\alpha}f](t, \nu) &= \int_{\mathbb{R}} f\left(t - \theta + \frac{\tau}{2}\right) e^{2\pi i\theta(t - \theta + \frac{\tau}{2})\cot\alpha} \overline{f\left(t - \theta - \frac{\tau}{2}\right)} e^{-2\pi i\theta(t - \theta - \frac{\tau}{2})\cot\alpha} e^{2\pi i\tau\nu} d\tau \\ W[\mathcal{T}_{\theta;\alpha}f](t, \nu) &= \int_{\mathbb{R}} f\left(t - \theta + \frac{\tau}{2}\right) \overline{f\left(t - \theta - \frac{\tau}{2}\right)} e^{2\pi i\tau(\nu + \theta\cot\alpha)} d\tau, \end{aligned} \quad (1.12)$$

de donde podemos obtener

$$W[\mathcal{T}_{\theta;\alpha}f](t, \nu) = W[f](t - \theta, \nu + \theta\cot\alpha). \quad (1.13)$$

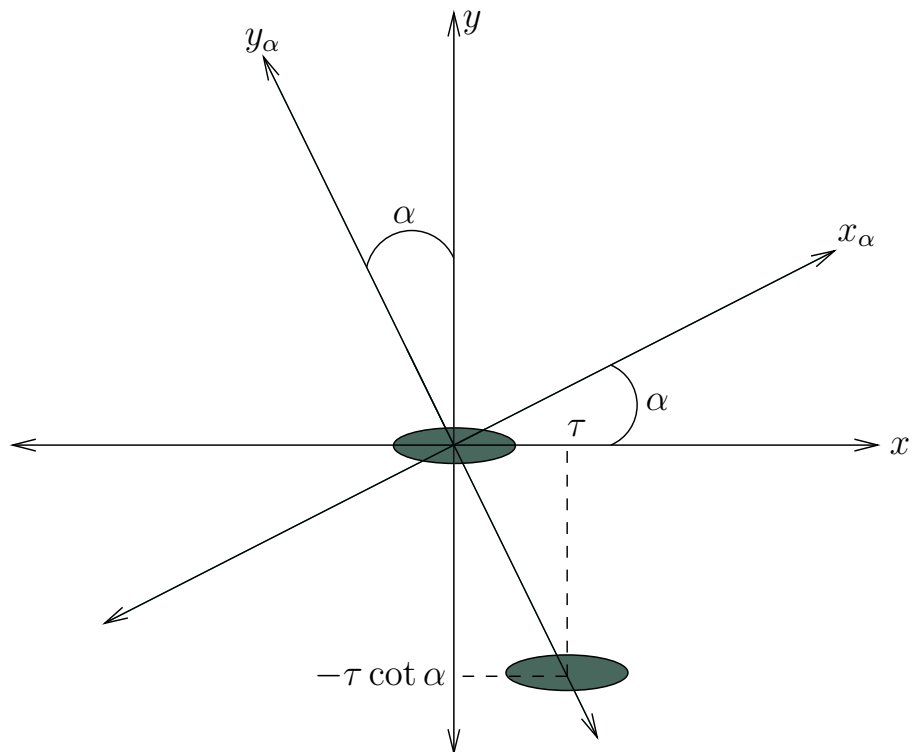


FIGURA 1.2: Operador de traslación fraccionaria efectuando sobre la distribución de Wigner-Ville. Siendo α es el ángulo de rotación y τ el desplazamiento.

Para poder comprender mejor el efecto geométrico que tiene el operador de traslación fraccionaria sobre la DW observamos la figura 1.2.

1.4. Convolución Fraccionaria

La convolución siempre ha sido de gran importancia en el análisis de Fourier, por tanto es de gran interés definir una expresión para la convolución fraccionaria que cumpla con la invariancia a la traslación y que tenga como un caso particular, al igual que en la transformación de Fourier fraccionaria, la convolución estándar.

Se define la convolución fraccionaria de orden α de dos funciones f y g en [20] como

$$[f *_{\alpha} g](x) = C_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)e^{2\pi i u(x-u) \cot \alpha} du, \quad (1.14)$$

donde $C_{\alpha} = \frac{e^{i(\mathbb{S}(\sin \alpha)\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{|\sin \alpha|}}$. Esta definición es equivalente a la expresada por Zayed [28], obtenida a partir de otra metodología. La definición establecida en 1.14 se realizó teniendo en cuenta que debe cumplir el Teorema de la convolución definido como

$$[f *_{\alpha} g](x) = C_{\alpha}^2 \mathcal{F}_{-\alpha} \left[\mathcal{F}_{\alpha}[f](\nu) \mathcal{F}_{\alpha}[g](\nu) e^{i\pi \nu^2 \cot \alpha} \right](x). \quad (1.15)$$

Al igual que en la transformación de Fourier fraccionaria, la convolución fraccionaria tiene la dependencia del ángulo α , el cual en este caso corresponde al orden fraccionario para la convolucion fraccionaria. La definición expresada en 1.14 tiene como caso particular para $\alpha = \pi/2$, la convolución estándar.

A continuación, en la Figura 1.3 se muestra la convolución fraccionaria a diferentes órdenes entre dos rectángulos. Como se puede observar, a medida que el orden se acerca al orden $a = 1$ o $\alpha = \pi/2$, la convolucion fraccionaria también se aproxima a un triángulo, el cual es el resultado de la convolución estándar entre dos rectángulos.

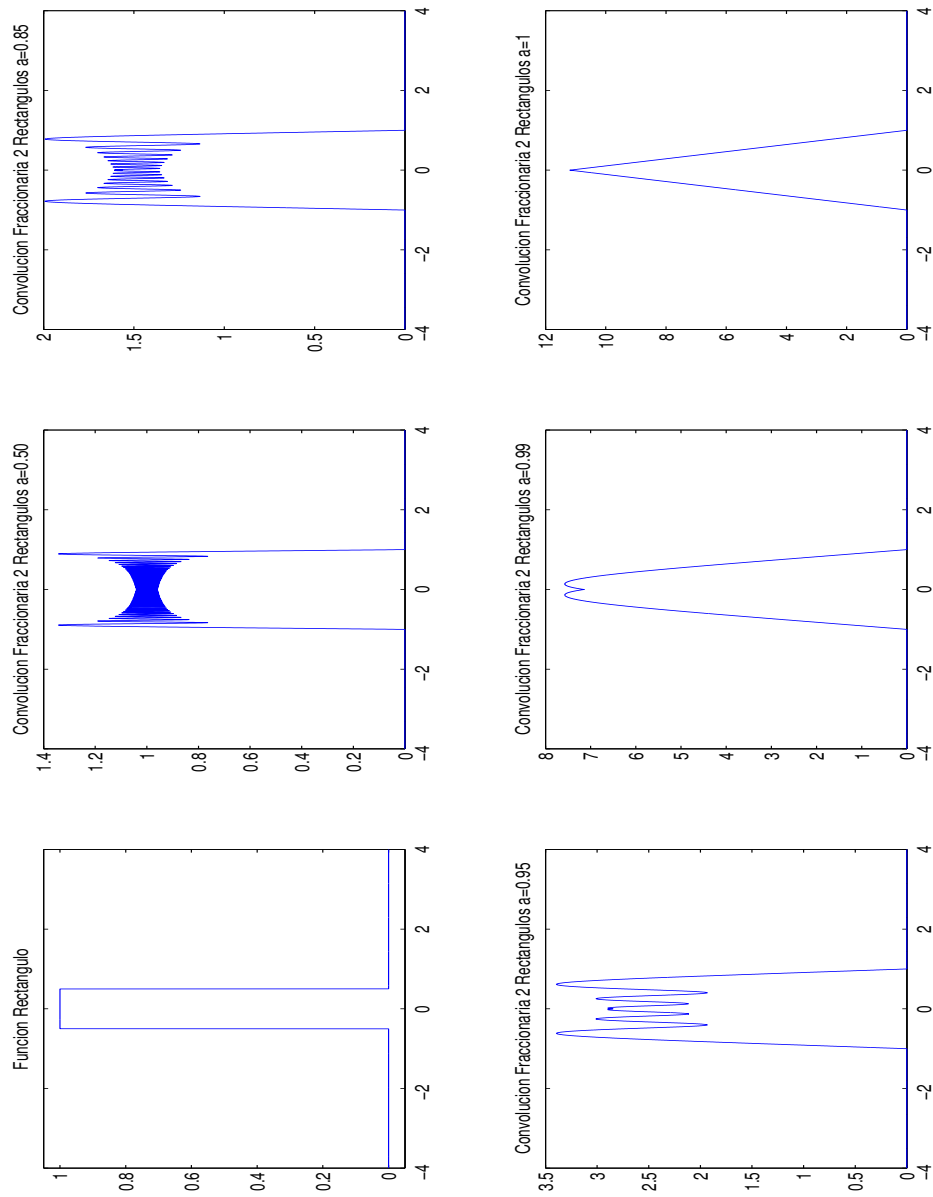


FIGURA 1.3: Convolución Fraccionaria entre dos rectángulos a diferentes ordenes a ($\alpha = a \frac{\pi}{2}$).

1.5. Correlación Fraccionaria

La correlación fraccionaria de orden α entre dos funciones f y g de acuerdo con [28, 20] se define como

$$[f \circledast_{\alpha} g](x) = C_{\alpha} \overline{C_{\alpha}} \mathcal{F}_{-\alpha} \left[\overline{\mathcal{F}_{\alpha}[f](\nu)} \cdot \mathcal{F}_{\alpha}[g](\nu) e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha} \right] (x), \quad (1.16)$$

y donde su definición integral es

$$[f \circledast_{\alpha} g](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \overline{g(u-x)} e^{-2\pi i x(u-x) \cot \alpha} du. \quad (1.17)$$

Al igual que en la transformación de Fourier fraccionaria, la correlación fraccionaria tiene la dependencia del ángulo α , el cual corresponde al orden fraccionario para la correlación fraccionaria. La definición expresada en 1.16 tiene como caso particular para $\alpha = \pi/2$, la correlación estándar.

2

PROCESOS ALEATORIOS

En procesamiento de señales, los modelos de probabilidad son usados para describir las señales aleatorias en aplicaciones tales como patrones de reconocimiento, codificación de señales y estimación de señales. Por tanto, el propósito de este capítulo es explicar de manera resumida algunos conceptos de probabilidad, basados principalmente en la definición de variable aleatoria [17, 16, 15, 7, 22]. Igualmente se exponen brevemente algunos fundamentos de probabilidad en sentido fraccionario para el procesamiento de señales aleatorias, basado en la transformación de Fourier fraccionaria.

2.1. Señales deterministas vs. Señales aleatorias

El análisis matemático y procesamiento de señales requiere la disponibilidad de una descripción matemática de la misma señal. Esta descripción nos conduce a una importante clasificación de las señales. Cualquier señal en la cual todos sus valores puedan ser predecibles por una expresión matemática, se denomina *determinista*. Esto nos indica que de esta señal podemos conocer todos los valores del pasado, presente y futuro sin ningún tipo de aproximación.

Sin embargo, en muchas aplicaciones existen señales que no pueden ser descritas por una fórmula matemática exacta. Esto implica que estas señales se comportan de manera no predecible. Estas las conocemos como señales *aleatorias*. Las señales sísmicas o la salida de un generador de ruido son ejemplos de señales aleatorias.

Debido a la aleatoriedad de estas señales, empleamos procedimientos estadísticos en

lugar de fórmulas explícitas, donde estos procedimientos proceden de la teoría de probabilidad. Sin embargo, debemos destacar que al momento de clasificar señales en fenómenos del mundo real como deterministas o aleatorias, no siempre es clara. En algunas ocasiones, ambos procedimientos generan resultados significativos, pero en otras ocasiones, la mala clasificación de la señal nos lleva a resultados erróneos. Por lo tanto debemos escoger las herramientas matemáticas para aplicarlas en cada tipo de señal.

2.2. Variable Aleatoria

En muchos experimentos físicos o problemas de procesamiento de señales es necesario asignar un valor numérico al resultado de un experimento aleatorio. Por ejemplo, un experimento aleatorio sería la adquisición de datos sísmicos. Podemos tomar el registro sísmico $x(t)$ en algún terreno de interés y obtener resultados, es decir, $x(t)$ es un valor numérico. Si realizamos el experimento una y otra vez en el mismo lugar, no obtendremos los mismo resultados que obtuvimos en el primer registro. Por lo tanto a cada realización ω se le asigna un valor numérico obtenido en el experimento.

Una variable aleatoria es aquella a la cual no le podemos predecir su valor, el cual está dominado por el “azar”. Formalmente, para introducir el concepto de variable aleatoria debemos asignar un valor numérico a cada elemento ω del conjunto Ω . Por lo tanto, consideramos un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y una función real $X(\omega)$ que tome valores en la recta real $R = (-\infty, \infty)$. Para considerar una variable aleatoria la función $X(\omega)$ debe ser medible. Finalmente, esto se puede explicar de la siguiente manera. Considerando un conjunto $A(x)$ de puntos ω , donde $\omega \in \Omega$, tal que $X(\omega) \leq x$, donde para un valor de x tenemos que

$$A(x) = \{\omega | X(\omega) \leq x\}. \tag{2.1}$$

Como suponemos que la función $X(\omega)$ es medible, y de hecho tiene que ser medible para poder definir el espacio de probabilidad, y si el conjunto está bien definido y tiene una probabilidad $P(A)$, entonces $X(\omega)$ es una variable aleatoria. Además la probabilidad $P(A)$ es llamada la función de repartición de X definida por

$$F(x) = P[A(x)]. \tag{2.2}$$

La función de repartición expresada en la ecuación 2.2 es la caracterización estadística asignada directamente a la variable aleatoria y no al espacio muestral. Esto se debe a

que una descripción estadística una variable aleatorio es de mayor interés para ciertas aplicaciones en procesamiento de señales. Sin embargo, otra importante caracterización estadística es la función de distribución de probabilidad, $\mathcal{P}(x)$, la cual corresponde a la derivada de la función de repartición, la cual se expresa como

$$\mathcal{P}(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad (2.3)$$

y finalmente, el valor esperado de una variable aleatoria está definido como

$$E\{X\} = \int_{\mathfrak{R}} x\mathcal{P}(x) dx, \quad (2.4)$$

donde la integral se calcula desde $-\infty$ hasta ∞ . El valor esperado expresado en la ecuación 2.4 nos representa la cantidad media que daría como resultado de una toma de datos sobre algún fenómeno aleatorio que se repite muchas veces.

2.3. Señales aleatorias

Una señal aleatoria está definida como una secuencia de variables aleatorias $\{X_0, X_1, \dots, X_\omega, \dots\}$ [2]. Además, a una señal aleatoria podemos asignarle una función aleatoria $f_X(t)$, de manera que en un instante de tiempo $t = t_0$ tenemos una variable aleatoria $f_{X_\omega}(t_0) = X(t_0)$, y para una realización $\omega = \omega_0$ de la función aleatoria tenemos una función determinista del tiempo $f_{X_{\omega_0}}(t) = x_{\omega_0}(t)$. Para una mejor interpretación en la Figura 2.1 se visualizan las funciones $x_{\omega}(t)$ y la variable aleatoria $f_{X_\omega}(t_0)$, donde Ω es el conjunto de las posibles realizaciones de la señal aleatoria.

2.3.1. Promedio Estadístico

Una completa caracterización estadística de una señal aleatoria requiere del conocimiento de la estadística de cada una de las variables aleatorias. Por lo tanto, la densidad de probabilidad P_X y la función de probabilidad F_X del n -ésimo orden, se expresan como

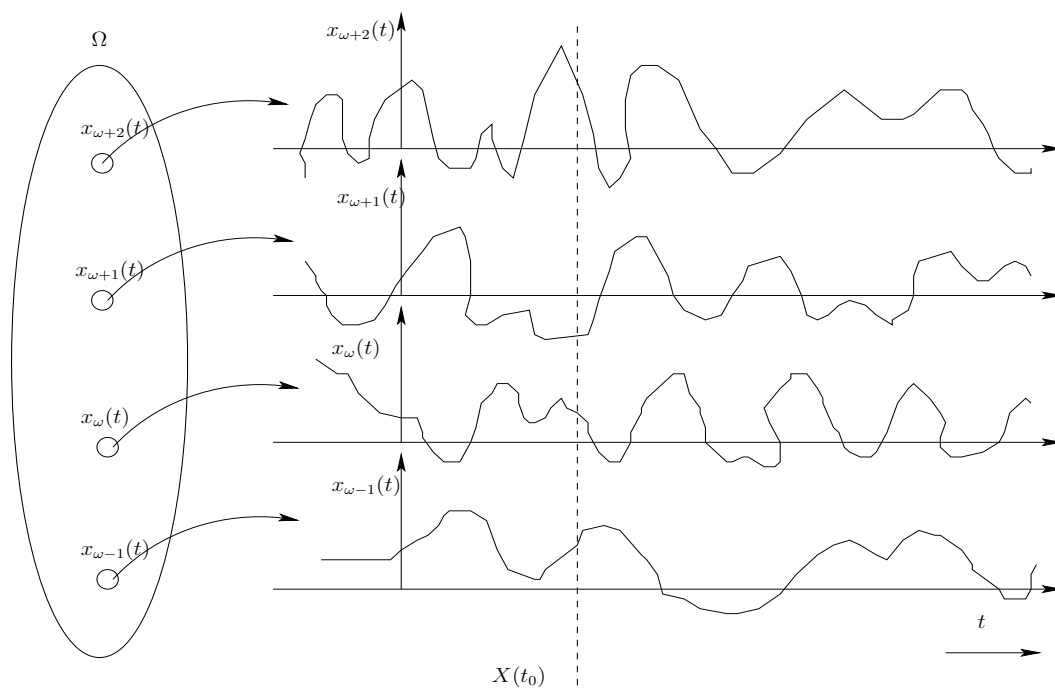


FIGURA 2.1: Ejemplo de una señal aleatoria desde el punto de vista del espacio muestral Ω .

$$F_X(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n) = P\{f_X(t_1) \leq X_1, \dots, f_X(t_n) \leq X_n\}, \quad (2.5)$$

$$P_X(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_X(X_1, \dots, X_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial X_1 \dots \partial X_n}. \quad (2.6)$$

Esto nos dice que en principio para solucionar el problema es necesario conocer todas las distribuciones con $n \rightarrow \infty$, pero para satisfacción nuestra, en la práctica solo se llega hasta segundo orden y en otros hasta cuarto orden.

Utilizando la densidad de probabilidad de primer orden $P_X(x; t)$, podemos definir el *promedio estadístico* como

$$E\{X(t)\} = \int x P_X(x; t) dx, \quad (2.7)$$

la cual será en general una función dependiente del tiempo.

2.4. Estacionariedad

En algunas aplicaciones del procesamiento de señales, el promedio estadístico de una señal aleatoria o de un proceso aleatorio es independiente del tiempo, es decir, la función de distribución de probabilidad en un t_0 dado es la misma para todos los instantes de tiempo.

Una señal aleatoria la entendemos como estacionaria cuando cumple con las siguientes condiciones:

1. Todos sus momentos del proceso son constantes, matemáticamente expresado como

$$m_n = E\{|f_X(t)|^n\} = \int_{\mathfrak{R}} |x|^n P_X(X; t) dx. \quad (2.8)$$

2. La función de autocorrelación estadística definida como

$$\Gamma_X(\tau) = E\left\{f_X(t_1)\overline{f_X(t_2)}\right\}, \quad (2.9)$$

depende solo de la diferencia $\tau = t_1 - t_2$.

3. La varianza del proceso sea un valor finito y constante como en el caso del ruido blanco, el cual es un ejemplo de señal estacionaria.

2.4.1. Estacionariedad en sentido fraccionario

Como vimos en la sección 2.4, aquí mostraremos el caso para una señal estacionaria en sentido fraccionario. Para eso definimos la función para una señal aleatoria como

$$f'_{X_\omega}(t) = f_{X_\omega}(t)e^{-i\phi_\omega(t)}, \quad (2.10)$$

donde $\phi_\omega(t)$ es una función aleatoria. Tomando como caso particular tenemos que $\phi_\omega(t) = 2\pi\nu_\omega(t)t$ y $\nu_\omega(t) = \frac{1}{2}t \cot \alpha_\omega$, entonces tenemos que

$$f'_{X_\omega}(t) = f_{X_\omega}(t)e^{-i\pi t^2 \cot \alpha_\omega}, \quad (2.11)$$

donde α_ω es una variable aleatoria.

Por lo tanto la función de autocorrelación estadística para f_{X_ω} es

$$E\{f'_{X_\omega}(t_1)\overline{f'_{X_\omega}(t_2)}\} = E\{f_{X_\omega}(t_1)\overline{f_{X_\omega}(t_2)}\}e^{-i\pi t_1^2 \cot \alpha_\omega} e^{i\pi t_2^2 \cot \alpha_\omega}. \quad (2.12)$$

Como en un proceso estacionario solo se depende de $\tau = t_1 - t_2$, entonces

$$\begin{aligned} E\{f'_{X_\omega}(t)\overline{f'_{X_\omega}(t-\tau)}\} &= E\{f_{X_\omega}(t)\overline{f_{X_\omega}(t-\tau)}e^{-i\pi\tau(t-\tau)\cot\alpha_\omega}\} \\ &= E\{f_{X_\omega}(t)\overline{\mathcal{J}_{\tau;\alpha}[f_{X_\omega}]}(t)e^{i\pi\tau^2\cot\alpha_\omega}\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por lo tanto si el proceso f_{X_ω} es estacionario, tenemos que

$$[f_{X_\omega} \circledast_\alpha f_{X_\omega}](\tau) = E\{f_{X_\omega}(t)\overline{\mathcal{J}_{\tau;\alpha}[f_{X_\omega}]}(t)e^{i\pi\tau^2\cot\alpha_\omega}\}. \quad (2.14)$$

Con lo cual tenemos que la ecuación 2.14 es la autocorrelación estadística fraccionaria [20]. Aquí se demuestra que si $f_{X'_\omega}$ es estacionaria, la función f_{X_ω} no es estacionaria, por lo tanto podemos decir que f_{X_ω} es estacionaria en sentido fraccionario.

De aquí en adelante en el desarrollo de nuestro trabajo suponemos que las señales o procesos aleatorias son estacionarios.

2.5. Teorema de Wiener-Kinchine fraccionario

Una aplicación importante que se le puede dar a las funciones de autocorrelación es la relación que poseen con la densidad espectral de potencia cuando la señales son estacionarias, donde, la autocorrelación y la densidad espectral de potencia corresponden a un par de Fourier[6]. Para nuestro trabajo, basado en la transformación de Fourier fraccionaria, utilizaremos el “Teorema de Wiener-Kinchine fraccionario” expresado por R. Torres en [20].

En la naturaleza generalmente nos encontramos con señales aleatorias de energía infinita, de manera que

$$\mathcal{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x_\omega(t)|^2 dt = \infty, \quad (2.15)$$

sin embargo nos interesa conservar la noción del espectro que se adapta a estas señales, con lo cual recurrimos a la definición de potencia media, la cual se expresa como

$$0 < \mathcal{P}_\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_\omega(t)|^2 dt < \infty, \quad (2.16)$$

en este caso, debido a que la potencia media es finita, decimos que es una *señal de potencia*, mientras que si una señal tiene energía finita, decimos que es una *señal de energía*. Las señales de potencia son el tipo de señales que generalmente encontramos en las aplicaciones y experimentos aleatorios.

La densidad espectral de potencia fraccionaria de una realización x_ω está definida como

$$S_{x_\omega}^\alpha(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| e^{i\pi\nu^2 \cot \alpha} \int_{-T/2}^{T/2} x_\omega(t) e^{i\pi t^2 \cot \alpha} e^{2i\pi\nu t / \sin \alpha} dt \right|^2. \quad (2.17)$$

Entonces podemos definir la densidad espectral de potencia fraccionaria de la señal o proceso aleatorio por

$$S_X^\alpha(\nu) = E\{S_{x_\omega}^\alpha\}. \quad (2.18)$$

Para poder expresar el Teorema de Wiener-Kinchine fraccionario, tenemos en cuenta las ecuaciones 1.16 para el caso de la autocorrelación y 2.17, por lo tanto tenemos que

$$\mathcal{F}_\alpha[f_X \circledast_\alpha f_X](\nu) = e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| e^{i\pi\nu^2 \cot \alpha} \int_{-T/2}^{T/2} x_\omega(t) e^{i\pi t^2 \cot \alpha} e^{2i\pi\nu t / \sin \alpha} dt \right|^2, \quad (2.19)$$

donde f_X aquí corresponde al promedio estadístico de la señal aleatoria y la ecuación

2.19 corresponde al Teorema de Wiener-Kinchine fraccionario. Si la señal tiene como caso particular, que es ergódica en autocorrelación fraccionaria, tenemos que

$$\mathcal{F}_\alpha[f_X \circledast_\alpha f_X](\nu) e^{i\pi\nu^2 \cot \alpha} = S_X^\alpha(\nu). \quad (2.20)$$

La relación expresada en la ecuación 2.20 se realiza con el interés de emplearla en el momento de la definición del Filtro de Wiener Fraccionario.

3

FILTRO DE WIENER FRACCIONARIO

El filtro de Wiener estándar fue publicado por Norbert Wiener en 1949[26]. Este filtro es considerado como una de las mejores técnicas para eliminar el ruido presente en una señal y/o el aspecto borroso de una imagen, basado en una aproximación estadística. Sin embargo, este filtro tiene sus contras, debido a que está diseñado solo para señales estacionarias. Debido a la necesidad de trabajar con señales no estacionarias, fue diseñado una extensión del Filtro de Wiener por R. Torres [20], denominado “Filtro de Wiener Fraccionario”. En este capítulo se muestra de una manera más detallada la forma como se llegó al Filtro de Wiener Fraccionario basado en la convolución y correlación fraccionaria.

En la práctica obtenemos el registro de una señal por medio de diferentes mecanismos e instrumentos. En la mayoría de los casos esta señal está compuesta por una señal que porta una información S y un ruido aditivo N , por lo tanto la señal registrada se puede expresar como $X = S + N$. En este trabajo proponemos un modelo para filtrar la información que se encuentra en la señal X basados en la convolución y correlación fraccionaria, expresadas en las ecuaciones 1.14 y 1.16 respectivamente. De esta manera, encontraremos un filtro de respuesta percursional h , que aplicado a X , en general, minimice el error cuadrático medio entre $[X *_{\alpha} h]$ y Y , donde Y es la señal estimada o señal que se quiere extraer de la señal registrada X , por lo tanto

$$z^2 = E\{| [X *_{\alpha} h] (t) - Y(t) |^2\}, \quad (3.1)$$

siendo z^2 la cual es la cantidad a minimizar. Resolviendo en la ecuación 3.1, tenemos que

$$z^2 = E\{([X *_{\alpha} h](t) - Y(t))(\overline{[X *_{\alpha} h](t)} - \overline{Y(t)})\} \quad (3.2)$$

$$z^2 = E\{|[X *_{\alpha} h](t)|^2 + |Y(t)|^2 - 2\mathcal{R}\{Y(t)[X *_{\alpha} h](t)\}\}. \quad (3.3)$$

Definiendo de manera integral de acuerdo a la convolución fraccionaria expresada en la ecuación 1.14, tenemos que

$$z^2 = E\left\{\left|\int_{t_i}^{t_f} h(\theta)X(t-\theta)e^{2\pi i\theta(t-\theta)\cot\alpha}d\theta\right|^2 + |Y(t)|^2 - 2\mathcal{R}\left[Y(t)\int_{t_i}^{t_f}\overline{h(\sigma)X(t-\sigma)}e^{-2\pi i\sigma(t-\sigma)\cot\alpha}d\sigma\right]\right\} \quad (3.4)$$

$$z^2 = E\left\{\int_{t_i}^{t_f}\int_{t_i}^{t_f}h(\theta)\overline{h(\sigma)}X(t-\theta)e^{2\pi i\theta(t-\theta)\cot\alpha}\overline{X(t-\sigma)}e^{-2\pi i\sigma(t-\sigma)\cot\alpha}d\theta d\sigma + |Y(t)|^2 - 2\mathcal{R}\left[Y(t)\int_{t_i}^{t_f}\overline{h(\sigma)X(t-\sigma)}e^{-2\pi i\sigma(t-\sigma)\cot\alpha}d\sigma\right]\right\}, \quad (3.5)$$

de acuerdo a la definición de traslación fraccionaria tenemos que:

$$\mathcal{I}_{\theta;\alpha}[X](t) = X(t-\theta)e^{2\pi i\theta(t-\frac{\theta}{2})\cot\alpha} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{I}_{\theta;\alpha}[X](t)e^{-\pi i\theta^2\cot\alpha} = X(t-\theta)e^{2\pi i\theta(t-\theta)\cot\alpha}. \quad (3.7)$$

y de igual manera

$$\overline{\mathcal{I}_{\sigma;\alpha}[X](t)}e^{\pi i\sigma^2\cot\alpha} = \overline{X(t-\sigma)}e^{-2\pi i\sigma(t-\sigma)\cot\alpha}, \quad (3.8)$$

por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
 z^2 = & \iint_{t_i}^{t_f} h(\theta)\overline{h(\sigma)}E\left\{\mathcal{I}_{\theta;\alpha}[X](t)e^{-\pi i\theta^2\cot\alpha}\overline{\mathcal{I}_{\sigma;\alpha}[X](t)e^{\pi i\sigma^2\cot\alpha}}\right\}d\theta d\sigma \\
 & + E\{|Y(t)|^2\} - 2\mathcal{R}\left[\int_{t_i}^{t_f}\overline{h(\sigma)}E\left\{Y(t)\overline{\mathcal{I}_{\sigma;\alpha}[X](t)e^{\pi i\sigma^2\cot\alpha}}\right\}d\sigma\right], \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

de acuerdo a la definición de correlación fraccionaria expresada en la ecuación 1.16 tenemos que

$$\mathcal{I}_{\theta;\alpha}[X \circledast_{\alpha} X](\sigma) = E\left\{\mathcal{I}_{\theta;\alpha}[X](t)\overline{\mathcal{I}_{\sigma;\alpha}[X](t)e^{\pi i\sigma^2\cot\alpha}}\right\} \quad (3.10)$$

$$[Y \circledast_{\alpha} Y](0) = E\{|Y(t)|^2\} \quad (3.11)$$

$$[Y \circledast_{\alpha} X](\sigma) = E\left\{Y(t)\overline{\mathcal{I}_{\sigma;\alpha}[X](t)e^{\pi i\sigma^2\cot\alpha}}\right\}, \quad (3.12)$$

entonces

$$\begin{aligned}
 z^2 = & \iint_{t_i}^{t_f} h(\theta)\overline{h(\sigma)}\mathcal{I}_{\theta;\alpha}[X \circledast_{\alpha} X](\sigma)e^{-\pi i\theta^2\cot\alpha}d\theta d\sigma \\
 & + [Y \circledast_{\alpha} Y](0) - 2\mathcal{R}\left[\int\overline{h(\sigma)}[Y \circledast_{\alpha} X](\sigma)d\sigma\right]. \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Como el procedimiento consiste en minimizar el error cuadrático medio z^2 , aplicamos calculo variacional y buscamos una función h que extreme la integral

$$I = \int_A^B f(h; h'; x)dx. \quad (3.14)$$

Definiendo $h(x, \lambda) = h(x) + \lambda\phi(x)$, con $\phi(A) = \phi(B) = 0$, una función suave y λ real, luego

$$J = \int_A^B f(h + \lambda\phi; h' + \lambda\phi'; x)dx = I + \Delta I, \quad (3.15)$$

para cumplir el principio de Hamilton y minimizar la integral se debe cumplir que

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} J(\lambda) \right|_{\lambda=0} = 0. \quad (3.16)$$

Definiendo el error de la siguiente manera

$$z'^2(\alpha, \lambda) = z^2(\alpha, \lambda) + \Delta z^2(\alpha, \lambda), \quad (3.17)$$

entonces

$$\begin{aligned} z^2(\alpha, \lambda) &= \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} h(\theta, \lambda) \overline{h(\sigma, \lambda)} \mathcal{I}_{\theta; \alpha} [X \circledast_{\alpha} X](\sigma) e^{-\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\theta d\sigma \\ &+ [Y \circledast_{\alpha} Y](0) - 2\mathcal{R} \left[\int_{t_i}^{t_f} \overline{h(\sigma, \lambda)} [Y \circledast_{\alpha} X](\sigma) d\sigma \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
 z^2(\alpha, \lambda) &= \iint_{t_i}^{t_f} h(\theta)\overline{h(\sigma)} \mathcal{T}_{\theta;\alpha} [X \otimes_{\alpha} X](\sigma) e^{-\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\theta d\sigma + [Y \otimes_{\alpha} Y](0) \\
 &\quad - 2\mathcal{R} \left[\int_{t_i}^{t_f} \overline{h(\sigma)} [Y \otimes_{\alpha} X](\sigma) d\sigma \right] + \lambda \iint_{t_i}^{t_f} h(\theta)\overline{\phi(\sigma)} \mathcal{T}_{\theta;\alpha} [X \otimes_{\alpha} X](\sigma) e^{-\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\theta d\sigma \\
 &\quad + \lambda \iint_{t_i}^{t_f} \phi(\theta)\overline{h(\sigma)} \mathcal{T}_{\theta;\alpha} [X \otimes_{\alpha} X](\sigma) e^{-\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\theta d\sigma \\
 &\quad + \lambda^2 \iint_{t_i}^{t_f} \phi(\theta)\overline{\phi(\sigma)} \mathcal{T}_{\theta;\alpha} [X \otimes_{\alpha} X](\sigma) e^{-\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\theta d\sigma \\
 &\quad - 2\mathcal{R} \left[\lambda \int \overline{\phi(\sigma)} [Y \otimes_{\alpha} X](\sigma) d\sigma \right], \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

aplicando las propiedades de la traslación fraccionaria tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{\theta;\alpha} [X \otimes_{\alpha} X](\sigma) &= E \left\{ \mathcal{T}_{\theta;\alpha} [X](t) \overline{\mathcal{T}_{\sigma;\alpha} [X](t)} e^{\pi i \sigma^2 \cot \alpha} \right\} \\
 &= \overline{\mathcal{T}_{\sigma;\alpha} [X \otimes_{\alpha} X](\theta)} e^{\pi i \sigma^2 \cot \alpha} e^{\pi i \theta^2 \cot \alpha}, \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

entonces de la ecuación 3.19 se tiene que

$$\iint_{t_i}^{t_f} \phi(\theta)\overline{h(\sigma)} \mathcal{T}_{\theta;\alpha} [X \otimes_{\alpha} X](\sigma) e^{-\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\sigma d\theta = \iint_{t_i}^{t_f} \phi(\sigma)\overline{h(\theta)} \overline{\mathcal{T}_{\sigma;\alpha} [X \otimes_{\alpha} X](\theta)} e^{\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\sigma d\theta. \tag{3.21}$$

Reemplazando obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 \Delta z^2(\alpha, \lambda) &= \lambda \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} \phi(\sigma) \overline{h(\theta)} \overline{\mathcal{T}_{\sigma;\alpha}[X \circledast_{\alpha} X](\theta)} e^{\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\sigma d\theta \\
 &+ \lambda \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} h(\theta) \overline{\phi(\sigma)} \mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_{\alpha} X](\sigma) e^{-\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\theta d\sigma \\
 &+ \lambda^2 \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} \phi(\theta) \overline{\phi(\sigma)} \mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_{\alpha} X](\sigma) e^{-\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\theta d\sigma \\
 &- 2\mathcal{R} \left[\lambda \int_{t_i}^{t_f} \overline{\phi(\sigma)} [Y \circledast_{\alpha} X](\sigma) d\sigma \right], \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

al aplicar la condición del principio de Hamilton obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta z^2 \Big|_{\lambda=0} &= \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} \phi(\sigma) \overline{h(\theta)} \overline{\mathcal{T}_{\sigma;\alpha}[X \circledast_{\alpha} X](\theta)} e^{\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\sigma d\theta \\
 &+ \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} h(\theta) \overline{\phi(\sigma)} \mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_{\alpha} X](\sigma) e^{-\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\theta d\sigma \\
 &- 2\mathcal{R} \left[\int_{t_i}^{t_f} \overline{\phi(\sigma)} [Y \circledast_{\alpha} X](\sigma) d\sigma \right] \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta z^2 \Big|_{\lambda=0} &= \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} h(\theta) \overline{\phi(\sigma)} \mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_{\alpha} X](\sigma) e^{-\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\theta d\sigma \\
 &+ \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} \overline{\phi(\sigma)} h(\theta) \mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_{\alpha} X](\sigma) e^{-\pi i \theta^2 \cot \alpha} d\sigma d\theta \\
 &- 2\mathcal{R} \left[\int_{t_i}^{t_f} \overline{\phi(\sigma)} [Y \circledast_{\alpha} X](\sigma) d\sigma \right] \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \Delta z^2 \Big|_{\lambda=0} = \mathcal{R} \left\{ \int_{t_i}^{t_f} \overline{\phi(\sigma)} \left[\int_{t_i}^{t_f} h(\theta) \mathcal{T}_{\theta;\alpha} [X \otimes_{\alpha} X](\sigma) e^{-i\pi\theta^2 \cot \alpha} d\theta - [Y \otimes_{\alpha} X](\sigma) \right] d\sigma \right\} = 0, \quad (3.25)$$

como generalmente ϕ es diferente de cero, entonces tenemos que

$$[Y \otimes_{\alpha} X](\sigma) = \int_{t_i}^{t_f} h(\theta) \mathcal{T}_{\theta;\alpha} [X \otimes_{\alpha} X](\sigma) e^{-i\pi\theta^2 \cot \alpha} d\theta. \quad (3.26)$$

La ecuación 3.26 tiene como caso particular para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la ecuación de Wiener-Hopf. Aquí el parámetro α juega un papel importante ya que permite implementar una técnica de filtrado adaptivo [20].

3.1. Filtro No Causal

Aplicando transformación de Fourier fraccionaria a la ecuación 3.26 y de acuerdo al Teorema de Wiener-Kinchine fraccionario, obtenemos que

$$S_{YX}^{\alpha}(\nu) e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha} = H^{\alpha}(\nu) S_X^{\alpha}(\nu), \quad (3.27)$$

despejando obtenemos que el filtro de Wiener fraccionario para señales no causales se encuentra expresado como

$$H^{\alpha}(\nu) = \frac{S_{YX}^{\alpha}(\nu)}{S_X^{\alpha}(\nu)} e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha}. \quad (3.28)$$

Como podemos observar en la ecuación 3.28, el filtro tiene una dependencia con el orden fraccionario α , lo cual lo convierte en un filtro adaptativo y lo que da como resultado que sea apto para señales no estacionarias. El parámetro α permite encontrar un mínimo error cuadrático de forma recursiva, lo que hace que el error sea generalmente menor al encontrado en el tratamiento de Wiener estándar. El mínimo error se presentará cuando el parámetro α obtenga un valor mínimo para $z^2(\alpha)$ tal que

$$\left. \frac{\partial z^2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{min}} = 0. \quad (3.29)$$

3.1.1. Reducción de Ruido

Un caso particular para la ecuación 3.28 se presenta cuando la señal registrada X está compuesta por una información S y un ruido aditivo N , por lo tanto $X = S + N$. Nuestro filtro de Wiener fraccionario, suponiendo que la señal deseada $Y = S$, está expresado por

$$H^\alpha(\nu) = \frac{S_S^\alpha(\nu)}{S_S^\alpha(\nu) + S_N^\alpha(\nu)} e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha}. \quad (3.30)$$

La manera como funciona este filtrado está determinado por las distribuciones de Wigner-Ville de la señal S y del ruido N . Como podemos observar en la Figura 3.1, el ruido y la señal se separan en la DW presentando rotaciones. En el tratamiento de Wiener estándar, el filtrado se realiza sobre el eje del tiempo o sobre el eje de las frecuencias, pero al realizarlo de esta manera estaremos filtrando también una parte del ruido. Sin embargo, en nuestro tratamiento, filtramos sobre ejes oblicuos, es decir, evitando filtrar una parte del ruido, y así obtenemos un menor error cuadrático medio.

Las aplicaciones de esta sección se mostrarán más adelante en el Capítulo 4.

3.2. Deconvolución y Estimación de Señales

Una de las técnicas más usadas para la restauración y estimación de señales es el “filtro de Wiener”. Contrario a otras técnicas [4, 5], este método disminuye el ruido mientras restaura la señal original. Cuando las señales han sido modificadas por un fenómeno físico que puede describirse por medio de la convolución, la técnica para la restauración se conoce como “Deconvolución”.

En el procesamiento de imágenes la distorsión en algunos casos es causada por un efecto que se denomina “Blurring o Desenfoque”. Para nuestro caso, citando las señales sísmicas, la ondícula distorsiona la reflectividad propia de cada medio, lo cual se puede expresar por medio del modelo convolucional $s(t) = [r * \omega](t)$ [18], razón por la cual se hace necesario aplicar el proceso de deconvolución para recuperar la reflectividad.

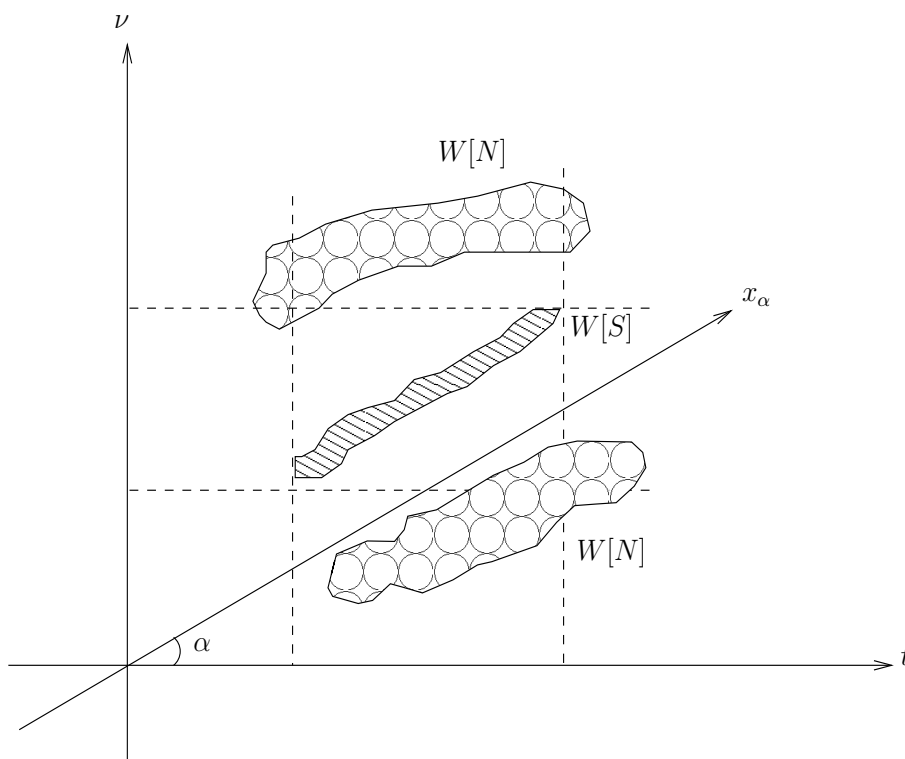


FIGURA 3.1: Distribución de Wigner-Ville de la señal S y del ruido N .

En la actualidad existen varios métodos de deconvolución, entre los cuales tenemos la “Deconvolución de Wiener” [26] y la “Deconvolución de Gabor” [9]. En nuestro trabajo con el “Filtro de Wiener fraccionario” desarrollamos una extensión al trabajo realizado por N. Wiener, ya que nuestro filtro trabaja con señales no estacionarias mientras que el tratamiento estándar no lo realiza. Comparando con algunas metodologías, que trabajan con señales no estacionarias [9, 5], estas metodología generalmente son bastante complejas de implementar mientras que nuestro filtro en nuestra opinión es más práctico y sencillo implementarlo. Igualmente, en sismica para la estimación de la serie de reflectividad se utilizan métodos como basados en el “teorema de Bayes” [5], los cuales en el momento de la implementación son bastante tediosos de manipular.

Como el problema se reduce finalmente a una señal que queremos estimar, que denominamos Y , la cual ha sido distorsionada por un fenómeno físico W y un ruido no estacionario aditivo N . Esta distorsión, la del fenómeno físico y el ruido, la representamos por medio de una convolución y de una suma respectivamente, y por tanto

$$X(t) = [Y *_{\alpha} W](t) + N(t). \quad (3.31)$$

Para aplicar el proceso de Deconvolución debemos calcular las densidades espectrales de potencia S_X^α y S_{YX}^α del filtro de Wiener expresado en la ecuación 3.28, y por tanto de acuerdo al teorema de Wiener-Kinchine fraccionario expresado en la ecuación 2.19 tenemos

$$\begin{aligned}
 S_X^\alpha(\nu)e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha} &= \mathcal{F}_\alpha[X \otimes_\alpha X](\nu) \\
 &= \mathcal{F}_\alpha[S \otimes_\alpha S](\nu) + \mathcal{F}_\alpha[N \otimes_\alpha N](\nu) \\
 S_X^\alpha(\nu)e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha} &= \mathcal{F}_\alpha[Y](\nu) \overline{\mathcal{F}_\alpha[Y](\nu)} \cdot \mathcal{F}_\alpha[W](\nu) \overline{\mathcal{F}_\alpha[W](\nu)} e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha} \\
 &\quad + \mathcal{F}_\alpha[N](\nu) \overline{\mathcal{F}_\alpha[N](\nu)} e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha}, \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

despejando finalmente obtenemos que

$$S_X^\alpha(\nu) = S_Y^\alpha(\nu)S_W^\alpha(\nu) + S_N^\alpha(\nu). \tag{3.33}$$

Ahora aplicando nuevamente el procedimiento anterior podemos calcular S_{YX} , por tanto

$$\begin{aligned}
 S_{YX}^\alpha(\nu)e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha} &= \mathcal{F}_\alpha[R \otimes_\alpha X](\nu) \\
 &= \mathcal{F}_\alpha[Y](\nu) \overline{\mathcal{F}_\alpha[Y *_\alpha W](\nu)} e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha} \\
 &= \mathcal{F}_\alpha[Y](\nu) \overline{\mathcal{F}_\alpha[Y](\nu)} \cdot \mathcal{F}_\alpha[W](\nu) e^{-2i\pi\nu^2 \cot \alpha}, \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

despejando obtenemos que

$$S_{YX}^\alpha(\nu) = S_Y^\alpha(\nu) \overline{\mathcal{F}_\alpha[W](\nu)} e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha}. \tag{3.35}$$

Finalmente reemplazando los resultados obtenidos en las ecuaciones 3.33 y 3.35 en la ecuación 3.28, la cual corresponde al filtro de Wiener, tenemos

$$H^\alpha(\nu) = \frac{S_Y^\alpha(\nu) \overline{\mathcal{F}_\alpha[W](\nu)}}{S_Y^\alpha(\nu)S_W^\alpha(\nu) + S_N^\alpha(\nu)} e^{-2i\pi\nu^2 \cot \alpha}. \tag{3.36}$$

Finalmente para aplicar el proceso de Deconvolución aplicamos transformación de Fourier fraccionaria inversa en la ecuación 3.36 y obtenemos el filtro de respuesta

percursional $h(t) = \mathcal{F}_{-\alpha}[H](t)$. Aplicando h a la señal registrada X , obtenemos la señal estimada Y_e como

$$Y_e(t) = [X *_{\alpha} h](t). \quad (3.37)$$

Para aplicar este procedimiento, debemos conocer la información a priori de la señal. Esta información debe ser estimada de acuerdo al algún conocimiento del fenómeno físico que distorsiona la señal y los factores que producen el ruido no estacionario.

Las aplicaciones para el proceso de Deconvolución a partir de este filtro se muestran en el Capítulo 4.

4

APLICACIONES DEL FILTRO DE WIENER FRACCIONARIO

En este capítulo se mostrarán las implementaciones numéricas del Filtro de Wiener Fraccionario y así confirmar los resultados predichos en la teoría en el capítulo 3. Los diferentes algoritmos empleados se implementaron en la herramienta computacional MATLAB y se pueden observar en los anexos.

4.1. Reducción de Ruido Aleatorio

Como se planteó en el capítulo 3, la idea es reducir o eliminar el ruido de una señal registrada X para estimar u obtener la información que se desea. Todo esto se realiza suponiendo que tenemos conocimiento apriori de la información deseada. Para realizar este procedimiento, suponemos que en la señal X existe un ruido aditivo aleatorio y por tanto tenemos que

$$X(t) = S(t) + N(t). \quad (4.1)$$

De acuerdo a la definición para la señal registrada X en la ecuación 4.1 y a la ecuación para el Filtro de Wiener Fraccionario para señales no causales expresado en la ecuación 3.28, tenemos que $Y = S$, además suponemos que la S y N no se encuentran correlacionados, por lo tanto la densidad espectral de potencia entre la señal deseada S y la señal registrada X será

$$\begin{aligned}
 S_{SX}^{\alpha}(\nu) &= \mathcal{F}_{\alpha}[S \otimes_{\alpha} X](\nu) e^{i\pi\nu^2 \cot \alpha} \\
 &= \left\{ \mathcal{F}_{\alpha}[S \otimes_{\alpha} S](\nu) + \mathcal{F}_{\alpha}[S \otimes_{\alpha} N](\nu) \right\} e^{i\pi\nu^2 \cot \alpha} \\
 &= \mathcal{F}_{\alpha}[S \otimes_{\alpha} S](\nu) e^{i\pi\nu^2 \cot \alpha} = S_S^{\alpha}(\nu)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

e igualmente

$$S_X^{\alpha}(\nu) = S_S^{\alpha}(\nu) + S_N^{\alpha}(\nu). \tag{4.3}$$

Con estos valores tenemos que nuestro Filtro de Wiener Fraccionario, expresado en la ecuación 3.28, para la reducción de ruido aleatorio de señales no causales se expresa como

$$H^{\alpha}(\nu) = \frac{S_S^{\alpha}(\nu)}{S_S^{\alpha}(\nu) + S_N^{\alpha}(\nu)} e^{-i\pi\nu^2 \cot \alpha}. \tag{4.4}$$

Para la implementación de este filtro se generó una señal de la forma $s = \text{rect}(t - 1) + \text{tri}[2(t - 3)]$, se rotó su distribución de Wigner-Ville en el espacio de fase o en la representación tiempo-frecuencia [8], y se le adicionó un ruido no estacionario. La señal s y la señal registrada x se puede observar en las Figuras 4.1 y 4.2 respectivamente.

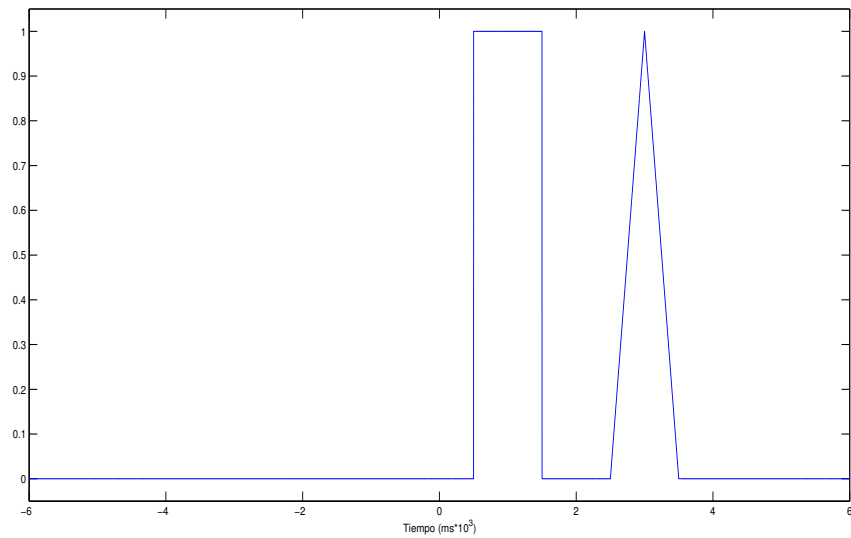


FIGURA 4.1: Señal generada s .

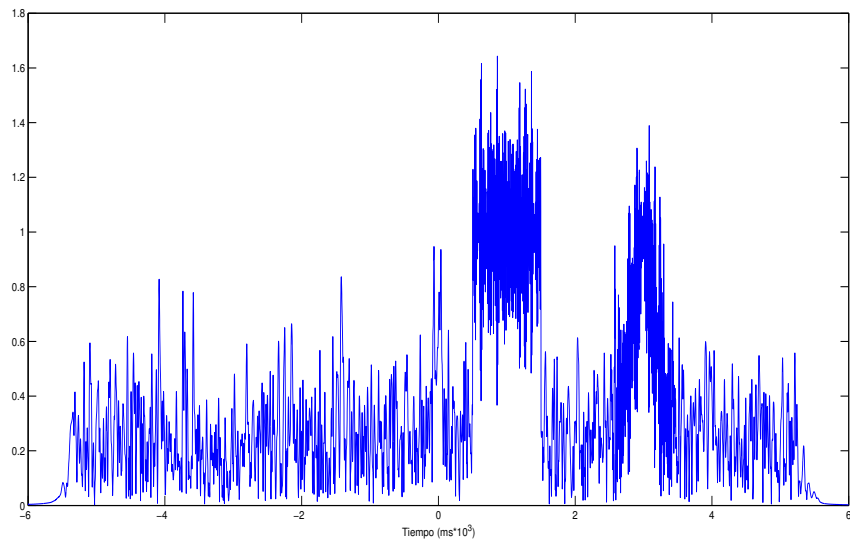


FIGURA 4.2: Señal registrada x .

De acuerdo a la Distribución de Wigner-Ville de la señal x mostrada en la Figura 4.3, podemos observar como el ruido y la información se separan, lo cual permite que la información pueda ser filtrada con mayor eficiencia bajo un filtro de Wiener fraccionario de orden α , siendo $\alpha \neq \pi/2$, comparado con el filtrado de Wiener estándar el cual se realiza cuando $\alpha = \pi/2$.

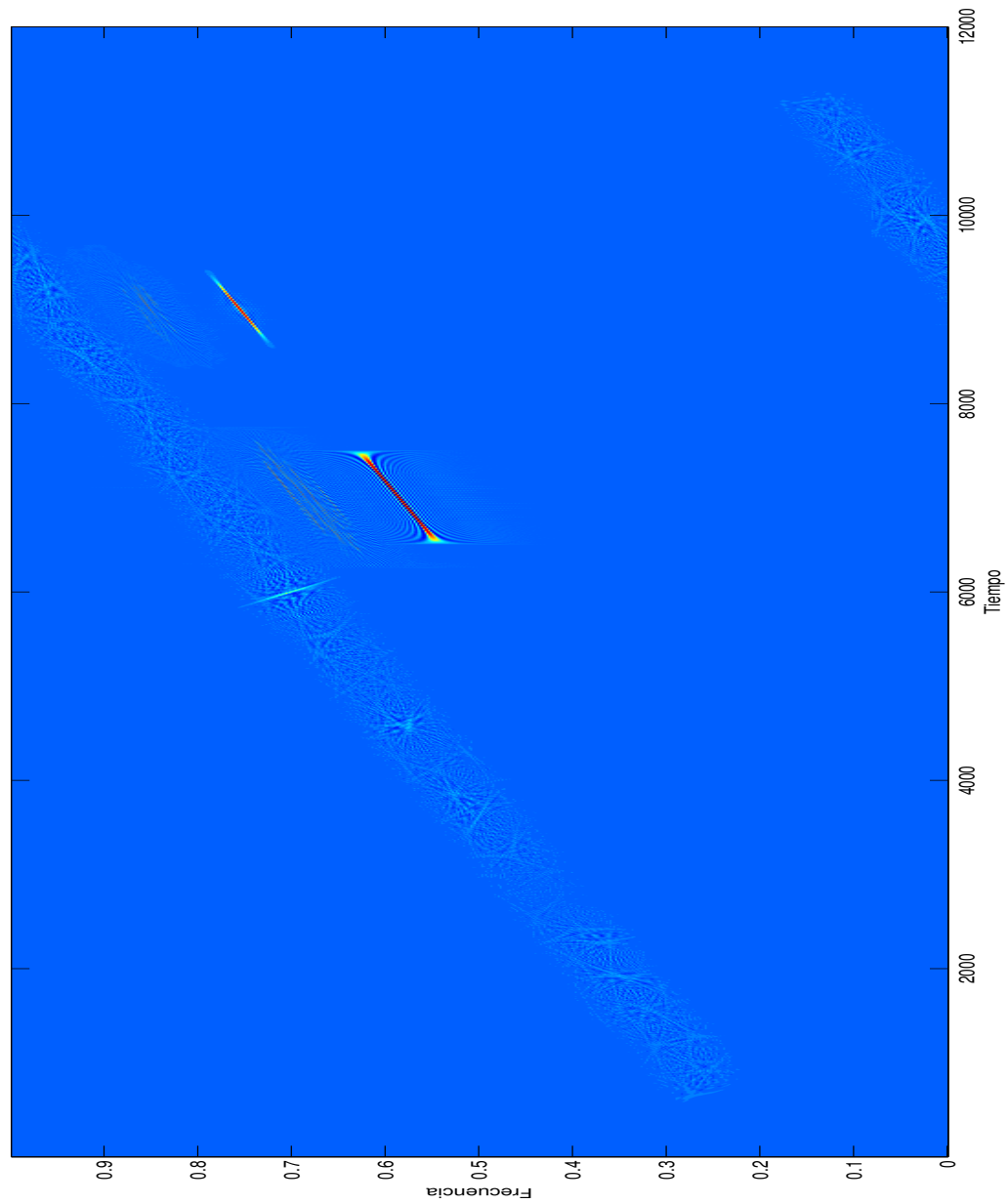


FIGURA 4.3: Distribución de Wigner-Ville de la señal x .

Los resultados obtenidos al implementar el Filtro de Wiener Fraccionario expresado en la ecuación 4.4 se muestran en la Figura 4.4. En esta, podemos observar como la señal estimada en el orden $a = 0,7$, es la que contiene el mínimo error cuadrático medio (ver Figura 4.4), igualmente podemos ver como a medida que se acerca o se aleja del orden $a = 0,7$ el error aumenta. Para el caso estándar, $a = 1$ o $\alpha = \pi/2$, encontramos que para este tipo de señales en particular (ver Figuras 4.2 y 4.3), señales que se encuentran rotadas en la distribución de Wigner-Ville, la estimación no se realiza con una muy buena aproximación.

Existen casos particulares en los cuales, en el espectro la señal y ruido se separan (ver Figuras 4.6 y 4.7), y por tanto la mayor parte de la información de la señal puede ser filtrada por medio de un filtro pasabanda [14] con el proposito de atenuar el rango de frecuencias introducidas por el ruido. Pero existen casos en los cuales el ruido y la señal no se separan en el espectro pero si en la distribución de Wigner-Ville. En la Figura 4.5 se muestra que en nuestra señal registrada X , la señal y el ruido no se separan en el espectro, pero como vimos en la Figura 4.3, si se separan en la distribución de Wigner-Ville. Es aquí donde nuestro Filtro de Wiener Fraccionario toma importancia, ya que al estar basado en la transformación de Fourier fraccionaria y en la convolución fraccionaria realiza el filtrado sobre ejes oblicuos a la distribución de Wigner-Ville y separa el ruido de la señal.

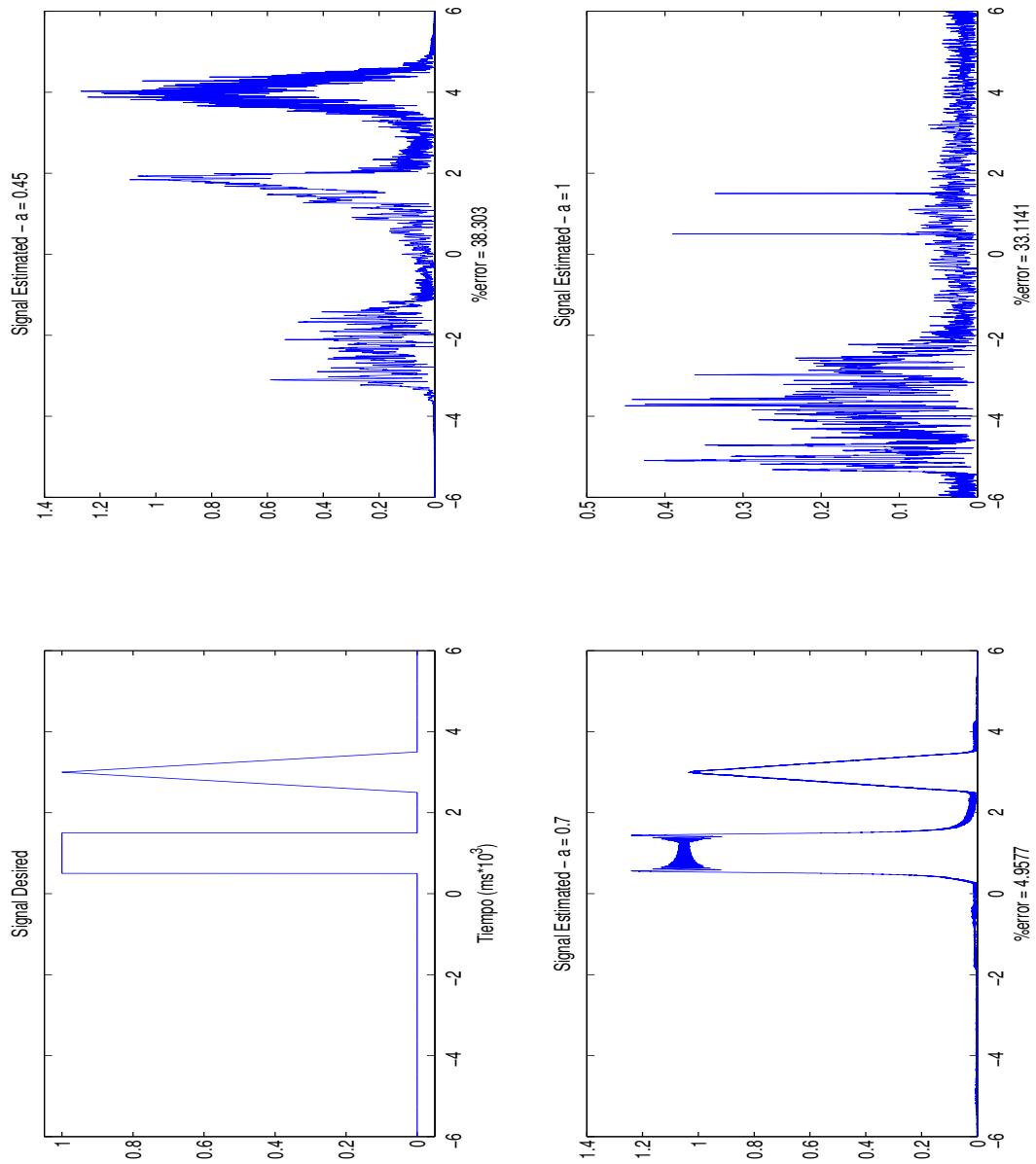


FIGURA 4.4: Señal Estimada a diferentes ordenes a . El error se presenta en porcentaje.

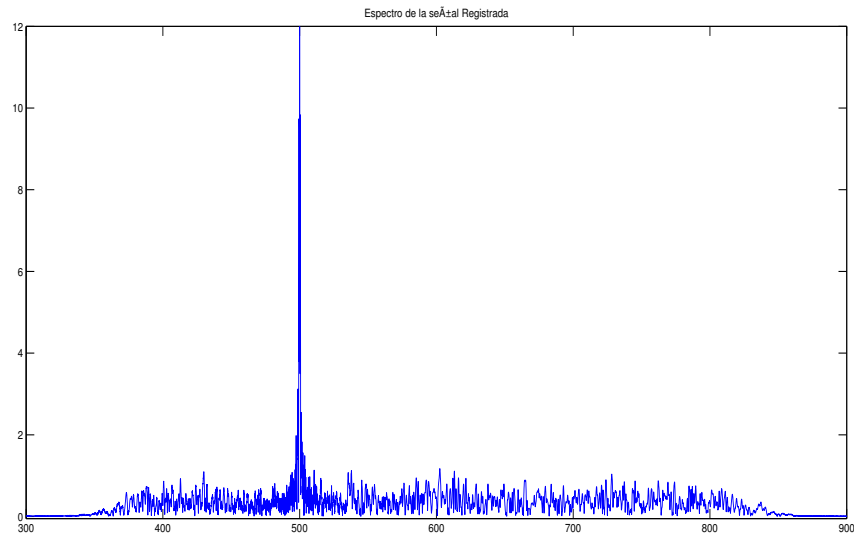


FIGURA 4.5: Espectro de la Señal Registrada.

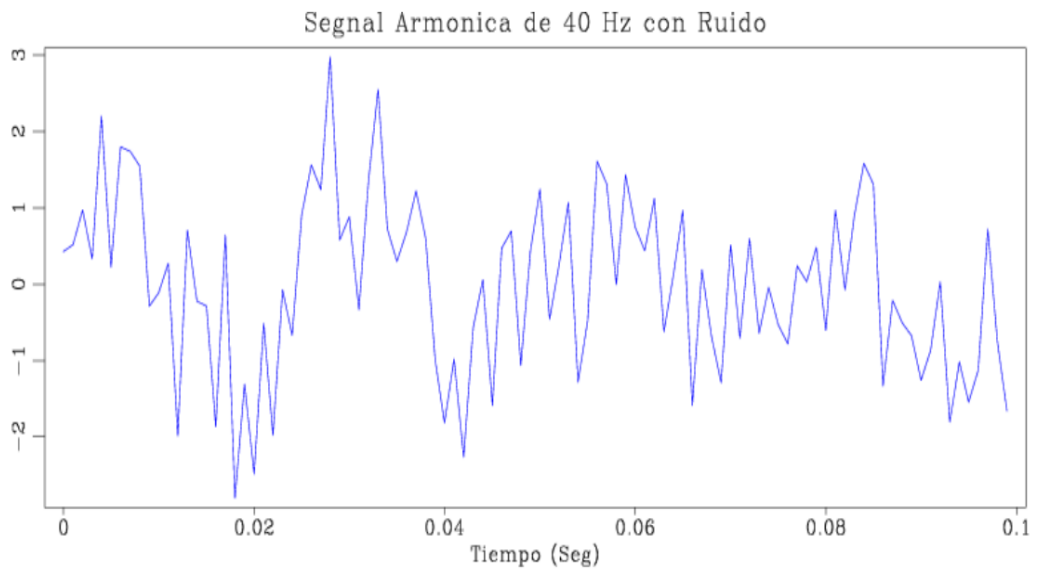


FIGURA 4.6: Señal Generada de la forma $s(t) = \sin(2\pi t) + n(t)$.

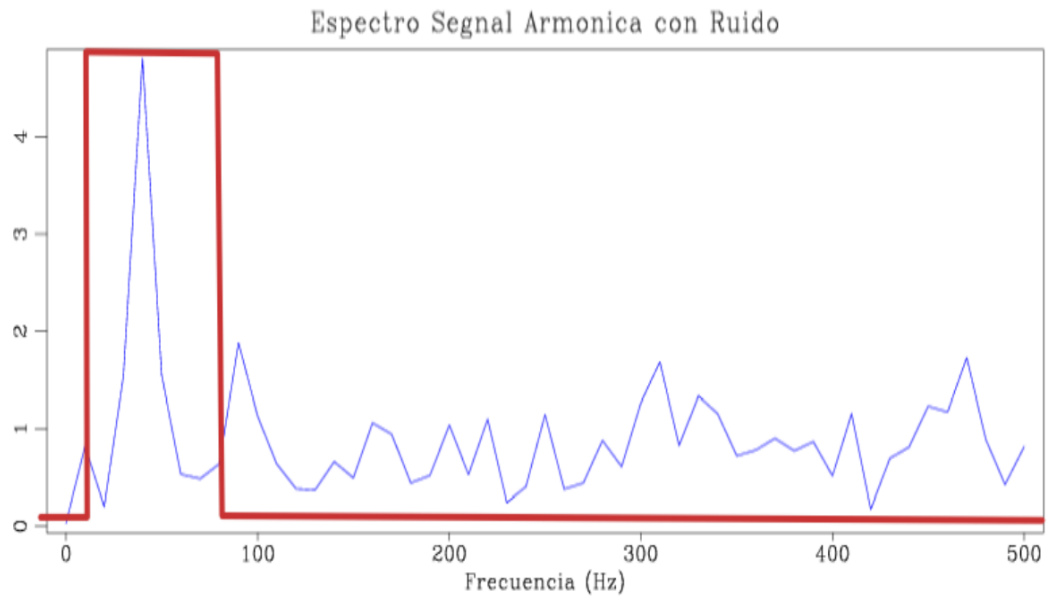


FIGURA 4.7: Espectro de la Señal Generada de la forma $s(t) = \sin(2\pi t) + n(t)$.

4.2. Estimación de Señales

Como se mostró en el Capítulo 3, la restauración y estimación de una señal es un problema que en algunas ocasiones los resultados obtenidos luego de aplicar el proceso de deconvolución generan una mayor propagación del error y la amplificación de los datos para la solución [3]. Esto se debe a que el sistema o el medio donde se registran los datos no nos proporcionan una completa información acerca de la señal o del fenómeno. Incluso, en algunas ocasiones en ausencia de ruido, se pueden encontrar dificultades para solucionar el problema.

Como consecuencia de las dificultades encontradas, en el proceso de deconvolución, debemos olvidar que la solución del problema será exacta y buscar soluciones aproximadas. Igualmente, para obtener una solución debemos usar propiedades y características de la señal “desconocida” para seleccionar de un conjunto de soluciones aproximadas, cuales son las que tienen una mayor utilidad o mayor aproximación. Aquí en donde entra en juego la información a priori de la señal.

Para la implementación del filtro expresado en la ecuación 3.36 se generó una señal de la forma $s = \text{rect}(t + 1) + \text{tri}[2(t - 1/2)]$, la cual fue distorsionada por una ondícula de la forma $w = e^{-at^2} \text{sinc}(bt)$, donde $a, b \in \mathfrak{R}$. Luego su distribución de Wigner-Ville fue rotada bajo una representación tiempo-frecuencia [8], y se le adicionó un ruido no estacionario. La señal r (que corresponde a la señal que al final queremos estimar), la ondícula con la cual se distorsiono la señal, y la señal registrada x se pueden observar en las Figura 4.8.

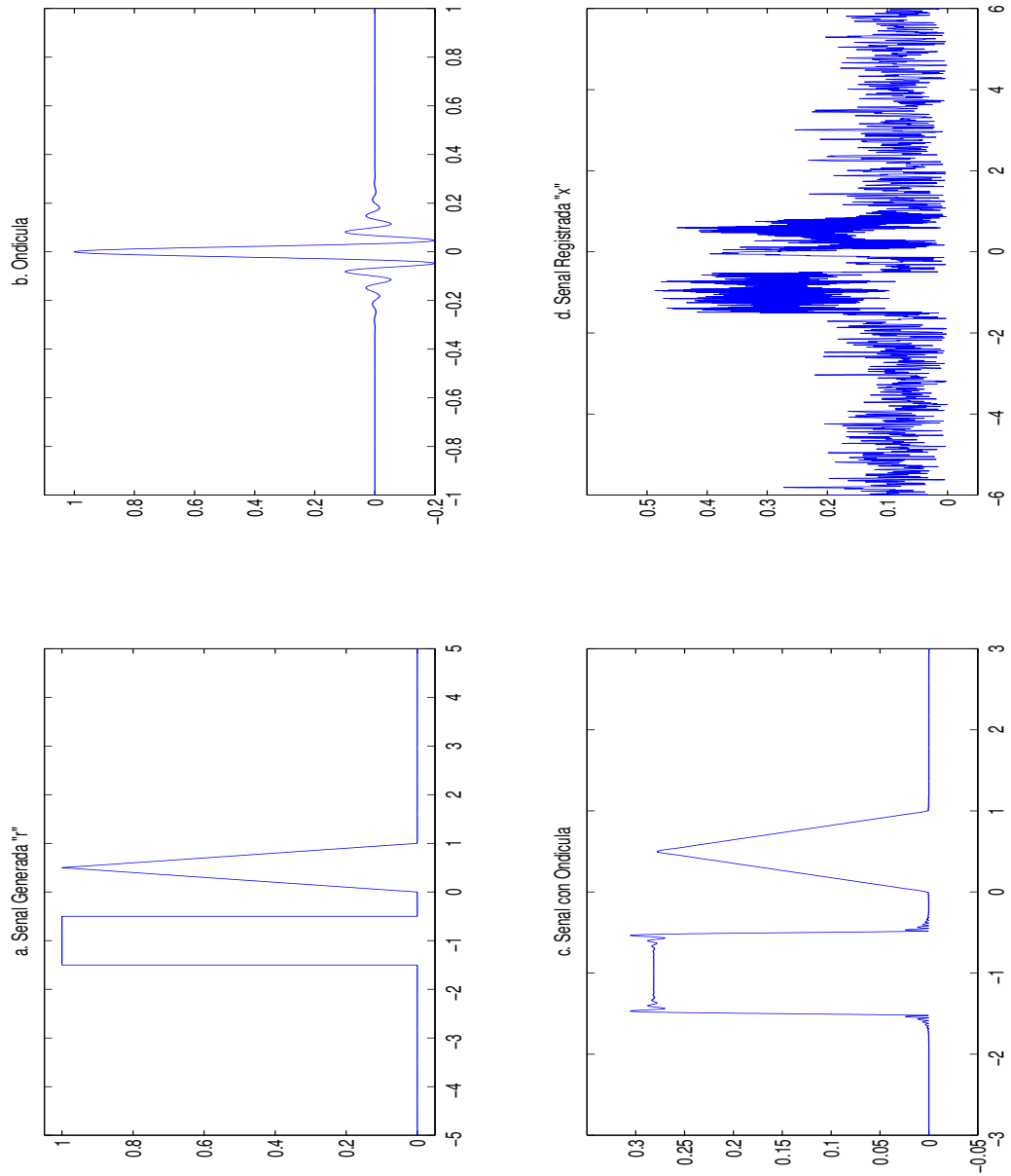


FIGURA 4.8: Generación de la señal registrada x .

De acuerdo a la Distribución de Wigner-Ville de la señal x mostrada en la Figura 4.9, podemos observar como el ruido y la información se separan, lo cual permite que la información pueda ser filtrada y deconvolucionada con mayor eficiencia bajo un filtro de Wiener fraccionario de orden α , siendo $\alpha \neq \pi/2$, comparado con el filtrado de Wiener estándar el cual se realiza cuando $\alpha = \pi/2$.

Al aplicar el filtro de Wiener fraccionario expresado en la ecuación 3.36 sobre la señal registrada x , obtenemos la señal estimada, que para este caso corresponde a r . Los resultados obtenidos al realizar este procedimiento se muestran en la Figura 4.10. Podemos observar como la señal estimada en el orden $a = 0,75$, es la que contiene el mínimo error cuadrático medio (ver Figura 4.10), igualmente podemos ver como a medida que se acerca o se aleja del orden $a = 0,75$ el error aumenta. Para el caso estándar, $a = 1$ o $\alpha = \pi/2$ (parte d Figura 4.10), la aproximación de la señal no es muy buena y contiene un error considerablemente grande respecto al error encontrado en $a = 0,75$.

Para el caso estándar, también se realizó la implementación de un algoritmo para el filtro para así poder comparar ambos resultados. Los resultados obtenidos con este algoritmo [13, 1] se muestran en la Figura 4.11. Como podemos observar, los resultados obtenidos con este algoritmo son aproximados a nuestro filtro de Wiener fraccionario, que tiene como caso particular el filtro de Wiener estándar cuando $a = 1$ o $\alpha = \pi/2$.

Como podemos observar en los resultados encontrados, el filtro de Wiener fraccionario obtiene mejores resultados que el filtro de Wiener estándar para la estimación de señales no estacionarias. Esto se debe principalmente a que el tratamiento estándar está diseñado principalmente para señales estacionarias. Como explicamos anteriormente, la deconvolución de Gabor, basado en la transformada de Gabor, resulta más complicada de implementar de acuerdo a las expresiones matemáticas allí encontradas comparado con las expresiones encontradas en nuestro filtro de Wiener fraccionario. Por tal razón, aconsejamos que este filtro comience a ser implementado en trabajos futuros ya que el tratamiento utilizado en este trabajo aún no ha sido implementado en datos reales.

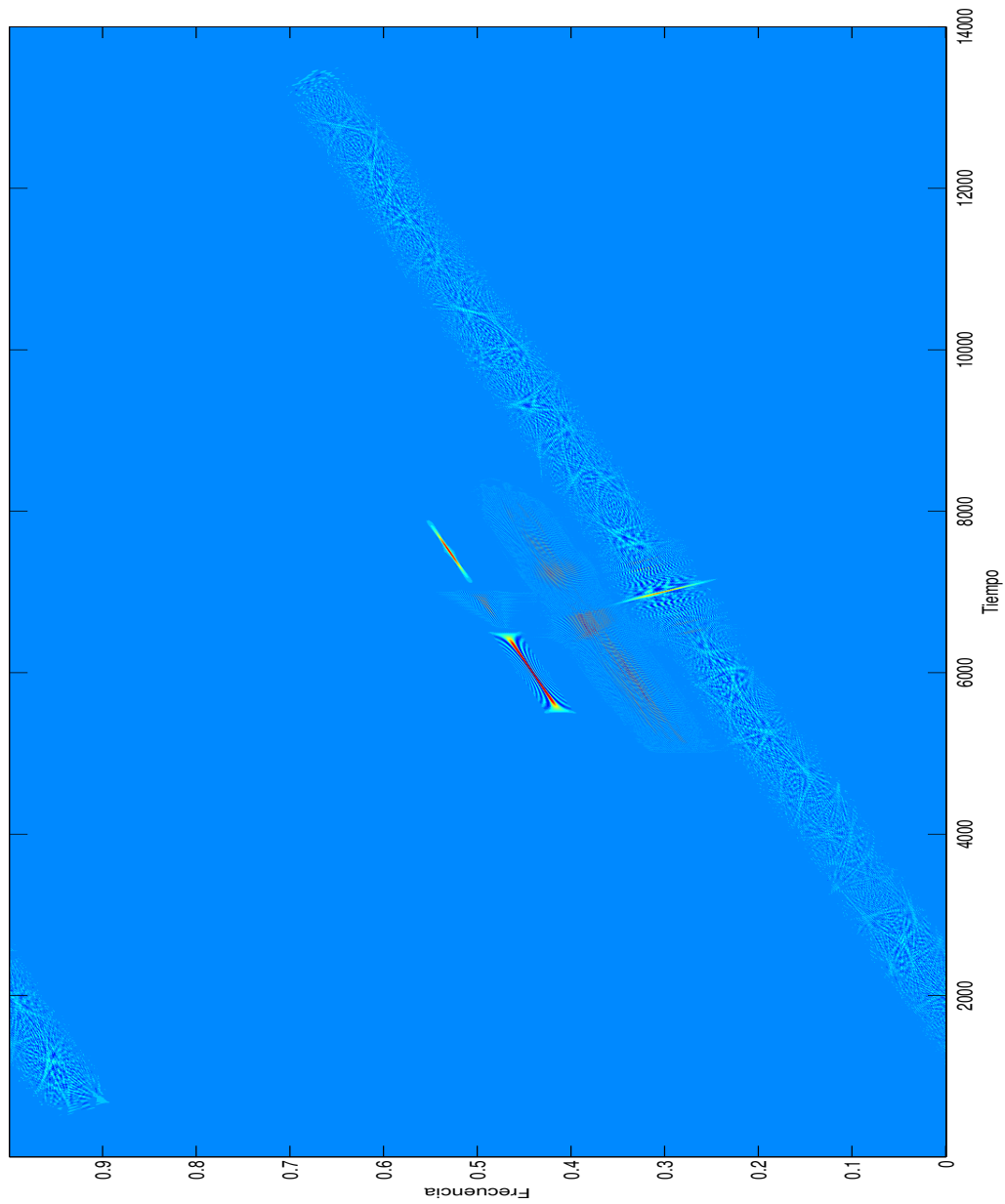


FIGURA 4.9: Distribución de Wigner-Ville de la señal registrada x .

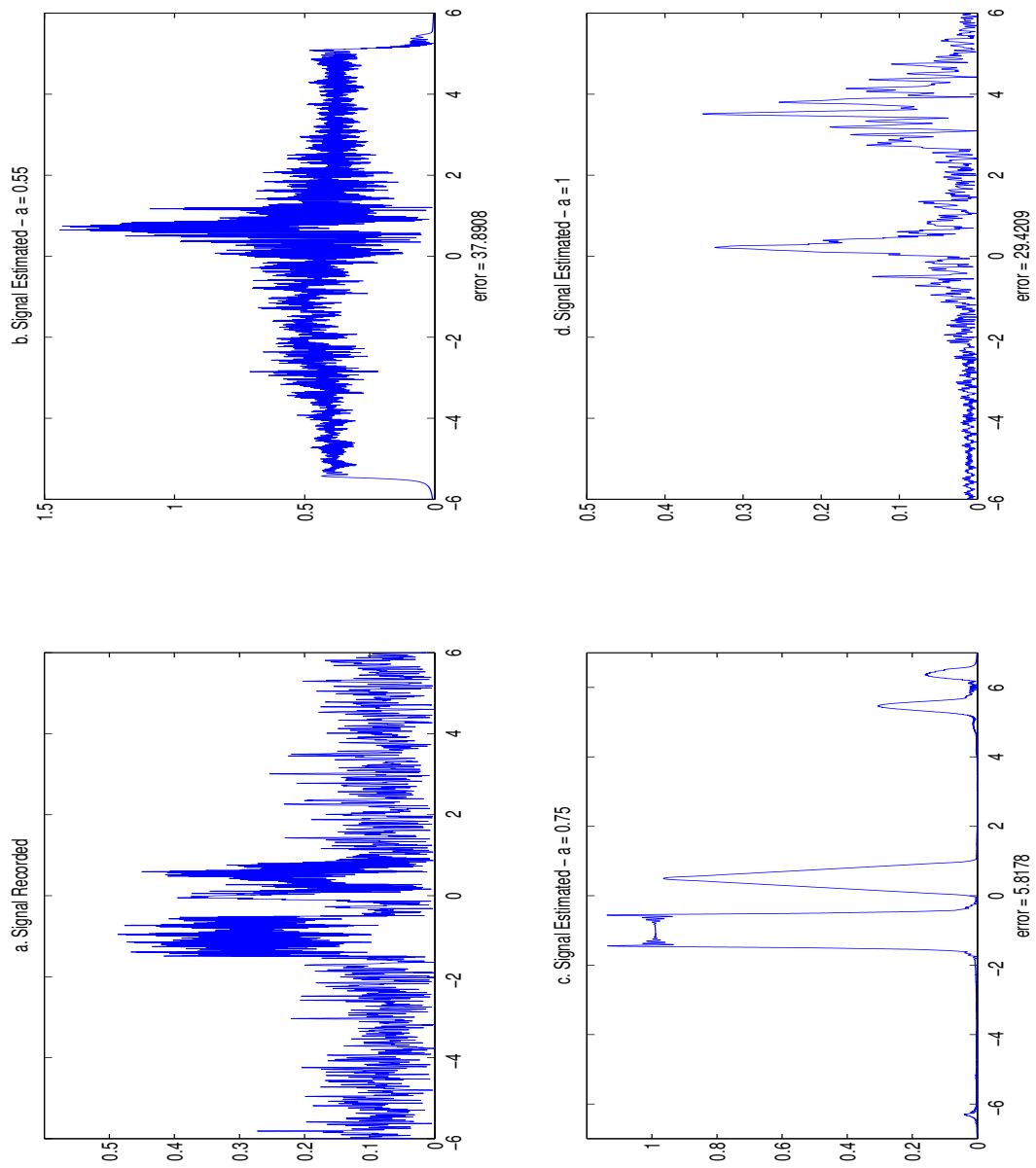


FIGURA 4.10: Señal Estimada a diferentes ordenes a por medio de una deconvolución. El error se presenta en porcentaje.

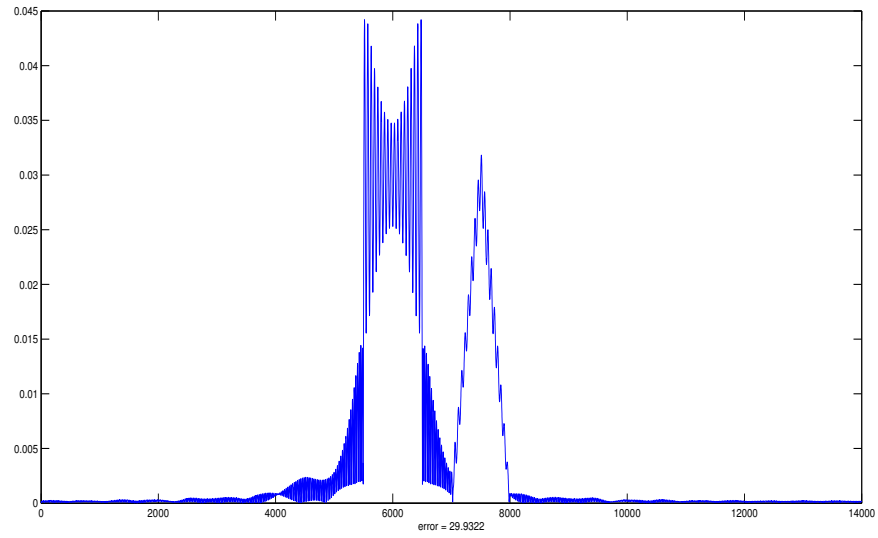


FIGURA 4.11: Señal Estimada con el algoritmo para el filtro de Wiener estándar [1].

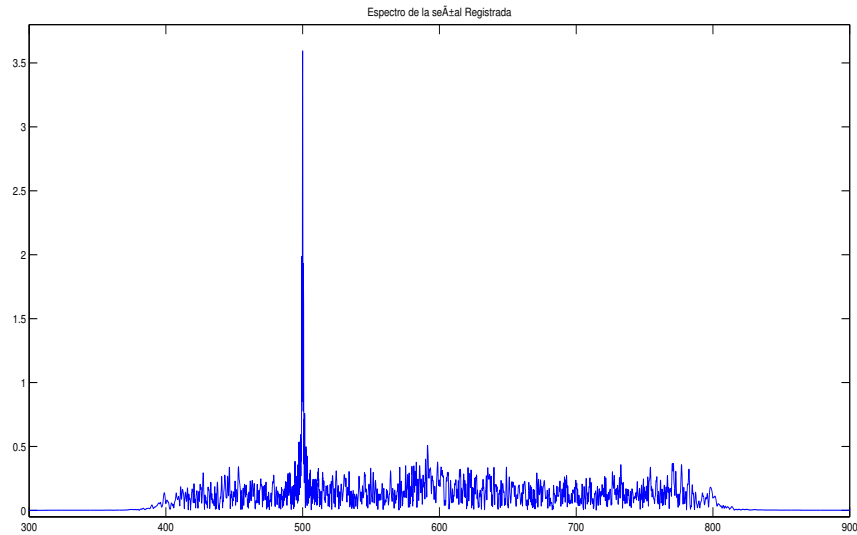


FIGURA 4.12: Espectro de la Señal Registrada.

Como vimos en la sección 4.1, los resultados se diferencian de otros métodos debido a que la señal y el ruido no se separan en el espectro pero si se separan en la distribución de Wigner-Ville. En la Figura 4.12 se muestra que en nuestra señal registrada X , la señal y el ruido no se separan en el espectro, pero como vimos en la Figura 4.9, si se separan en la distribución de Wigner-Ville.

4.2.1. Curva de Error

A continuación se muestra la curva de error para la función $f(\alpha)$ de la aplicación realizada en esta sección, la cual consistió en el proceso de deconvolución, donde se cumple que

$$\left. \frac{\partial z^2}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{min}} \approx 0. \quad (4.5)$$

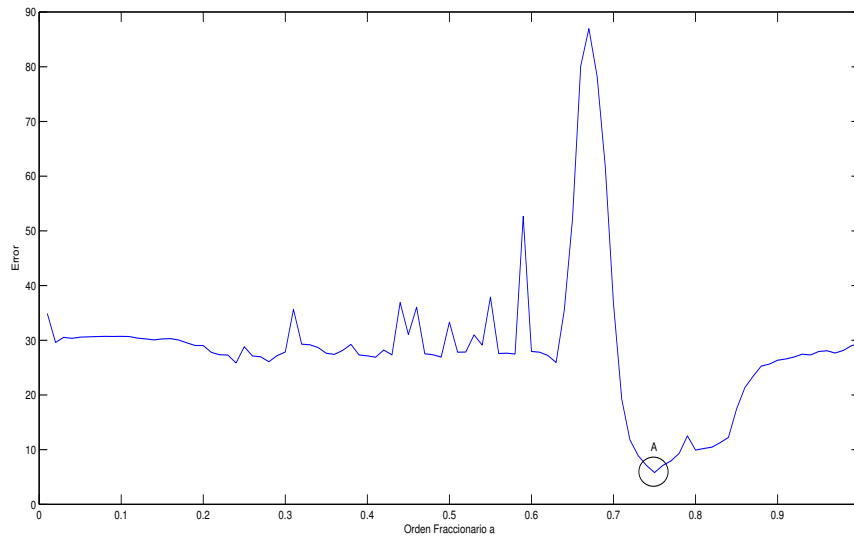


FIGURA 4.13: Curva de Error del proceso de Deconvolución. A) Punto de mínimo error.

Como se mostró anteriormente en la aplicación, el mínimo error se registra cuando el orden fraccionario a equivale a 0.75 (ver Figuras 4.10 y 4.13). Con eso se demuestra la condición expresada en la ecuación 4.5, la cual nos indica que el mínimo error cuadrático se presenta para un α_{min} . Para nuestra aplicación este valor es $\alpha_{min} = a\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}$. Igualmente, en la Figura 4.13 se muestra como la función crece rápidamente y luego decrece de la misma manera hasta llegar al valor del mínimo error cuadrático (Punto A Figura 4.13). Esto nos muestra o nos indica que el mínimo error está cerca a esos valores del orden fraccionario.

CONCLUSIONES

- Se implementó una extensión del filtro de Wiener estándar para señales no estacionarias, la cual obtuvo excelentes resultados comparado con el tratamiento estándar. Además, con este tratamiento se obtienen expresiones matemáticas más sencillas para ser implementadas comparado con las expresiones utilizadas en la deconvolución de Gabor.
- El filtro de Wiener fraccionario diseñado para la reducción de ruido y estimación de señales es de carácter adaptivo ya que el mínimo error cuadrático depende del parámetro α , esto permite que esta metodología pueda ser aplicada en señales no estacionarias.
- Se realizaron algunas aplicaciones para el filtro de Wiener fraccionario basado en la convolución y la transformación de Fourier fraccionaria, las cuales consistieron en la reducción de ruido aleatorio y en la deconvolución. De esta manera se lograron algunos resultados importantes comparando con el tratamiento de Wiener estándar, para así poder continuar implementando esta herramienta en diferentes campos donde la toma de datos involucra ruido no estacionario.
- Como se mostró en las aplicaciones realizadas, se obtuvieron mejores resultados para la estimación de señales con el filtro de Wiener fraccionario que con el filtro de Wiener estándar. Estos resultados igualmente dependen de la naturaleza de las señales, ya que se pueden presentar algunos casos donde la mejor estimación se presente con el filtro de Wiener estándar, sin embargo, nuestra metodología involucra el tratamiento estándar cuando $\alpha = \pi/2$, por lo tanto no sería necesario implementar dos tratamientos diferentes.

REFERENCIAS

- [1] R. G. BARANIUK., *Blind deconvolution*, 1997.
- [2] M. BARKAT, *Signal detection and estimation*, Artech House radar library, Norwood, MA 02062, 2005.
- [3] M. BERTERO AND P. BOCCACCI, *Introduction to Inverse Problems in Imaging*, IOP Publishing, Bristol BS1 6BE, UK, first ed., 1998.
- [4] D. COOKE AND J. CANT, *Model-based seismic inversion: Comparing deterministic and probabilistic approaches*, CSEG - RECORDER, April 2010 (2010), pp. 28–39.
- [5] J. G. GLINSKY AND MICHAEL, *Delivery: an open-source model-based bayesian seismic inversion program*, Computers & Geosciences, 30 (2004), pp. 1–76.
- [6] J. GOODMAN, *Statistical Optics*, Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [7] M. H. HAYES, *Statistical Digital Signal Processing And Modeling*, John Wiley & Sons, Inc., Georgia Institute of Technology, 1996.
- [8] A. W. LOHMANN, *Image rotation, wigner rotation, and the fractional fourier transform*, Journal of the Optical Society of America A, 10 (April 1994), pp. 2181–2186.
- [9] G. MAGRAVE, P. GIBSON, L. DONG, J. GROSSMAN, AND M. LAM-OUREUX, *Gabor deconvolution: extending wiener's method to nonstationarity*, CSEG RECORDER, 30 (2003), pp. 5–12.
- [10] A. MCBRIDE AND F. H. KERR, *On namias's fractional fourier transforms*, IMA J. Appl. Maths, 39 (1987), pp. 159–175.
- [11] D. MUSTARD, *The fractional fourier transform and the wigner distribution*, Journal of the Australian Mathematical Society (Series B), 38 (1996), pp. 209–219.

-
- [12] V. NAMIAS, *The fractional fourier transform and it's aplication to quantum mechanics*, J. Inst. Maths Its Appl, 25 (1980), pp. 241–265.
- [13] R. NEELAMANI, H. CHOI, AND R. G. BARANIUK, *Wavelet-based deconvolution for ill-conditioned systems*, IEEE Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), 6 (March 15-19, 1999), pp. 3241–3244.
- [14] A. V. OPPENHEIM, *Applications of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, first ed., 1978.
- [15] S. J. ORFANIDIS, *Optimum Signal Processing*, McGraw-Hill Publishing Company, New York, NY, second ed., 2007.
- [16] B. PICINBONO, *Random Signals and Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, first ed., 1993.
- [17] J. PROAKIS AND D. MANOLAKIS, *Digital Signal Processing:Principles, Algorithms, and Applications*, Prentice-Hall International, Inc., New Jersey, third ed., 1996.
- [18] E. ROBINSON AND M. SILVA, *Deconvolution of Geophysical Time Series in the Exploration for Oil and Natural Gas*, Elsevier, New York, first ed., 1979.
- [19] J. C. ROBINSON, *Computer-designed wiener filters for seismic data*, Geophysics, 37 (1972), pp. 235–259.
- [20] R. TORRES, *Tratamiento de señales por transformación de Fourier fraccionaria. Aplicaciones a la holografía sintética y al filtrado óptico*, PhD thesis, Universidad Industrial de Santander, Escuela de Física, Enero 2010. Bucaramanga, Colombia.
- [21] R. TORRES, P. PELLAT–FINET, AND Y. TORRES, *Fractional convolution, fractional correlation and their translation invariance properties*, Signal Processing, 90 (2010), pp. 1976–1984.
- [22] S. V. VASEGHI, *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction*, Jonh Wiley & Sons, Ltd, Brunel University, UK, second ed., 2000.
- [23] J.-A. VILLE, *Théorie et applications de la notion de signal analytique*, Câbles et Transmiss, 2 (1948), pp. 61 – 74.
- [24] A. T. WALDEN, *Robust deconvolution by modified wiener filtering*, Geophysics, 53 (1988), pp. 186–195.
- [25] N. WIENER, *Hermitian polynomials and fourier analysis.*, Journal of Mathematical Physics, 8 (1929), pp. 70 – 73.
- [26] N. WIENER, *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*, The MIT Press Classic, New York, 1949.

- [27] E. WIGNER, *On the quantum correction for thermodynamic equilibrium*, Physical Review, 40 (1932), pp. 749 – 759.
- [28] A. I. ZAYED, *A convolution and product theorem for the fractional fourier transform*, IEEE Signal Processing, 5 (April 1998), pp. 101–103.

ANEXOS

Algoritmo para la convolución fraccionaria

```
function y=convfrac(f,g,a)

% f and g - vectors to convolution and they have to have the same samples.
% a - fractional order

deltax = sqrt(length(f));
alpha = a*pi/2;
N = fix(length(f));
x = [-ceil(N/2):fix(N/2)-1]/deltax;

c= exp(-1i*(pi*sign(sin(alpha))/4-alpha/2))/sqrt(abs(sin(alpha)));
prod=fracF(f',a)'.*fracF(g',a)'.*exp(1i*pi.*x.*x*cot(alpha));

y=c*fracF(prod',-a);
```

Algoritmo para la transformación de Fourier fraccionaria

```
%FAST COMPUTATION OF THE FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM
%by M. Alper Kutay, September 1996, Ankara
%Copyright 1996 M. Alper Kutay
%This code may be used for scientific and educational purposes
%provided credit is given to the publications below:
%
%Haldun M. Ozaktas, Orhan Arikan, M. Alper Kutay, and Gozde Bozdagi,
```

```

%Digital computation of the fractional Fourier transform,
%IEEE Transactions on Signal Processing, 44:2141--2150, 1996.
%Haldun M. Ozaktas, Zeev Zalevsky, and M. Alper Kutay,
%The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and
%Signal Processing, Wiley, 2000, chapter 6, page 298.
%
%The several functions given below should be separately saved
%under the same directory. fracF(fc,a) is the function the user
%should call, where fc is the sample vector of the function whose
%fractional Fourier transform is to be taken, and 'a' is the
%transform order. The function returns the samples of the a'th
%order fractional Fourier transform, under the assumption that
%the Wigner distribution of the function is negligible outside a
%circle whose diameter is the square root of the length of fc.

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function[res]=fracF(fc,a);

% This function operates on the vector fc which is assumed to
% be the samples of a function, obtained at a rate 1/deltax
% where the Wigner distribution of the function f is confined
% to a circle of diameter deltax around the origin.
% (deltax^2 is the time-bandwidth product of the function f.)
% fc is assumed to have an even number of elements.
% This function maps fc to a vector, whose elements are the samples
% of the a'th order fractional Fourier transform of the function f.
% The lengths of the input and output vectors are the same if the
% input vector has an even number of elements, as required.
% Operating interval: -2 <= a <= 2
% This function uses the 'core' function corefrmod2.m

N = length(fc);
if fix(N/2) ~= N/2
    error('Length of the input vector should be even');
end;

fc = fc(:);

fc = bizinter(fc);
fc = [zeros(N,1); fc ; zeros(N,1)];

flag = 0;

```

```
if (a>0) & (a<0.5)
    flag = 1;
    a = a-1;
end;
if (a>-0.5) & (a<0)
    flag = 2;
    a = a+1;
end;

if (a>1.5) & (a<2)
    flag = 3;
    a = a-1;
end;

if (a>-2) & (a<-1.5)
    flag = 4;
    a = a+1;
end;

res = fc;

if (flag==1) | (flag==3)
    res = corefrmod2(fc,1);
end;

if (flag==2) | (flag==4)
    res = corefrmod2(fc,-1);
end;

if (a==0)
    res = fc;
else
    if (a==2) | (a==-2)
        res = flipud(fc);
    else
        res = corefrmod2(res,a);
    end;
end;

res = res(N+1:3*N);
res = bizdec(res);
```

```

res(1) = 2*res(1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function[res]=corefrmod2(fc,a);

% Core function for computing the fractional Fourier transform.
% Valid only when 0.5 <= abs(a) <= 1.5
% Decomposition used:
%   chirp mutiplication - chirp convolution - chirp mutiplication

deltax = sqrt(length(fc));

phi = a*pi/2;
N = fix(length(fc));
deltax1 = deltax;
alpha = 1/tan(phi);
beta = 1/sin(phi);

x = [-ceil(N/2):fix(N/2)-1]/deltax1;
fc = fc(:);
fc = fc(1:N);
f1 = exp(-i*pi*tan(phi/2)*x.*x); %multiplication by chirp!
f1 = f1(:);
fc      = fc.*f1;
x = x(:);
clear x;
t =[-N+1:N-1]/deltax1;
hlptc =exp(i*pi*beta*t.*t);
clear t;
hlptc = hlptc(:);

N2 = length(hlptc);
N3 = 2^(ceil(log(N2+N-1)/log(2)));
hlptcz = [hlptc;zeros(N3-N2,1)];
fcz = [fc;zeros(N3-N,1)];
Hcfft = ifft(fft(fcz).*fft(hlptcz)); % convolution with chirp
clear hlptcz;
clear fcz;
Hc = Hcfft(N:2*N-1);
clear Hcfft;
clear hlptc;

```

```

Aphi = exp(-i*(pi*sign(sin(phi))/4-phi/2))/sqrt(abs(sin(phi)));
xx = [-ceil(N/2):fix(N/2)-1]/deltax1;
f1 = f1(:);
res = (Aphi*f1.*Hc)/deltax1; % multiplication by chirp!

if (fix(N/2) ~=N/2)
    res2(1:N-1) = res(2:N);
    res2(N)      = res(1);
    res         = res2;
end;

res = res(:);

clear f1
clear Hc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function xint=bizinter(x)

N=length(x);
im = 0;
if sum(abs(imag(x)))>0
    im = 1;
    imx = imag(x);
    x = real(x);
end;

x2=x(:);
x2=[x2.'; zeros(1,N)];
x2=x2(:);
xf=fft(x2);
if rem(N,2)==1 %N = odd
N1=fix(N/2+1); N2=2*N-fix(N/2)+1;
xint=2*real(ifft([xf(1:N1); zeros(N,1) ;xf(N2:2*N)].')));
else
xint=2*real(ifft([xf(1:N/2); zeros(N,1) ;xf(2*N-N/2+1:2*N)].')));
end;
if ( im == 1)
    x2=imx(:);
    x2=[x2.'; zeros(1,N)];
    x2=x2(:);

```

```

xf=fft(x2);
if rem(N,2)==1      %N = odd
N1=fix(N/2+1); N2=2*N-fix(N/2)+1;
xmint=2*real(iff([xf(1:N1); zeros(N,1) ;xf(N2:2*N)].'));
else
xmint=2*real(iff([xf(1:N/2); zeros(N,1) ;xf(2*N-N/2+1:2*N)].'));
end;
xint = xint + i*xmint;
end;

xint = xint(:);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

Algoritmo para la Distribución de Wigner-Ville

```

function [y, tmin, tmax] = wvd(z, res, fa)

%WVD Wigner-Ville time-frequency distribution.

% USAGE:    y=wvd(x,res,fa)
%           or
%           [y,min_t,max_t]=tfd(...)
% INPUT:
% z         - Complex input signal (column- or row vector).
%           If signal is real use hilbert(x).
% res      - Number of samples between the windows.
%           Good value: res=1
% fa       - Length of frequency axis.
%           (Default value: half the signal length.)
% OUTPUT:
% y        - Contains the distribution. Each row represents
%           a frequency, each column a time instant.
% min_t    - first time-instant of distribution
% max_t    - final time-instant of distribution

%           /
% Author:   Rene Laterveer, R.Laterveer@fel.tno.nl
% Ref:     - B. Boashash, "Time- Frequency Signal Analysis, methods and

```

```

%      applicatoions", Chapter 7, Wiley Halsted Press (1992)

% This software may be freely used and modified for research and development
% purposes. If you wish to use it for commercial gain please contact me.
% I provide absolutely NO WARRANTY for this software.
%      /
% Copyright: Rene Laterveer

nplts = floor(length(z)/res);

% make even for two transforms at once
nplts = floor(nplts/2)*2;

% make window length nearest odd integer to fa
lwin = 2*floor((fa-1)/2)+1;
hlf  = (lwin+1)/2-1;

tmin = 1;
tmax = length(z);

% zero padding to remove wrap around problems
z = [zeros(1,lwin-1), z, zeros(1,lwin-1)];

y = zeros(nplts,fa);

R = zeros(1, fa);
idx = 1:hlf;

for n=0:nplts/2-1

    t = 2*n*res+lwin;
    R(1) = z(t)*conj(z(t)) + 1i*z(t+res)*conj(z(t+res));
    v1 = z(t+idx).*conj(z(t-idx));
    v2 = z(t+res+idx).*conj(z(t+res-idx));
    R(idx+1) = v1+1i*v2;
    R(fa-idx+1) = conj(v1)+1i*conj(v2);

    RF = fft(R, fa);

    y(2*n+1,:) = real(RF);
    y(2*n+2,:) = imag(RF);

```

```

end

y = fftshift(y.',1);
imagesc([1:nplts],[0:fa-1]/fa,real(y))
axis('xy');

```

Algoritmo Filtro de Wiener Estándar

```

%Andy Doran
% function wien(name,xdim,No)
% y = 'input signal'
% N = Noise
% w = Blur
% This function takes an input image, runs it through a LSI filter h,
%and adds Gaussian noise to it. The MSE between the degraded and
% original image is then calculated. Weiner Filtering is then performed
%(using known Suu, Snn, and h) and the degraded image is restored using
% the filter. The MSE between the restored and original image is then
%calculated and returned.

% Calculate power spectral density of input signal
DPICT = fftshift(fft(y));
Suu = abs(DPICT).^2;
% Calculate power spectral density of noise
NOISE = fftshift(fft(n));
Snn = abs(NOISE).^2;
% Calculate Fourier Transform of LSI Filter
H = fftshift(fft(w));
H2 = abs(H).^2;
% Calculate thresholded 1/H
HINV = H.^(-1);
index = find(abs(H) < .2);
hzeros = length(index); % Return number of elements below threshold
HINV(index) = 0;

% Calculate Wiener Filter
G = HINV.*(H2.*Suu)./((H2.*Suu) + Snn');

```

```

% Restore Image
%DPICT = fftshift(fft(y));
RPICT = DPICT.*G;
rpict = ifftshift(ifft(RPICT));
% Calculate mean square error
e = error2(abs(rpict),abs(rt));

```

Algoritmo Filtro de Wiener Fraccionario

```

function y = pdeconb(a,t,rt,w,n,x,y)

    % Operable interval -1<= a <= 1
    % t - Linear Space
    % rt - Signal Desired
    % w - Wavelet or Blurring Estimated
    % n - Noise Estimated
    % x - Normalization Vector
    % y - Signal Recorded

    % Fractional Wiener Filter
    R = fracF(rt,a); % Signal Desired
    Rc = conj(R);
    Sr = R.*Rc;
    W = fracF(w,a); % Wavelet or Blurring
    Wc = conj(W);
    Sw = W.*Wc;
    N = fracF(n,a); % Noise
    Nc = conj(N);
    Sn = N.*Nc;

    % No causal
    H = (Sr.*W.*exp(-1i*pi.*x'.*x'*cot(a*pi/2)))./((Sr.*Sw)+Sn);

    % Deconvolution
    h = fracF(H,-a);

    % Signal Estimation
    se = convfrac(h',y,a);

```

```
e = error2(abs(se),abs(rt));  
figure  
plot(abs(se)); title(['d. Signal Estimated - a = ',num2str(a)]);  
xlabel(['error = ',num2str(e)])
```