ACCIONES PARCIALES Y C^*-ÁLGEBRAS

Edwar Alexis Ramírez Ardila

Trabajo de Grado para Optar al Título de Magíster en Matemáticas

Director

Héctor Edonis Pinedo Tapia

Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2020

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos

- ⋆ Al profesor **Ph.D. Hector Edonis Pinedo Tapia** quien ha dispuesto su tiempo, conocimiento y esfuerzo en el proceso de creación de un trabajo de grado.
- ⋆ Al Profesor **Ph.D. Carlos Enrique Uzcategui** y a mi fiel amigo y colega **Jerson Enrique Perez**. Considero que mi oratoria no es muy buena y me es difícil explicarme, a pesar de ello, ellos con su infinita paciencia lograban descifrar mi marañe de ideas y motivados por el humilde y desapegado amor hacia esta hermosa ciencia me ayudaban a encontrar la luz. Y es por esto, que de la manera mas sincera y especial mis agradecimientos son para ellos.
- ⋆ A **Daniela Arana** quien me ha mostrado lo bonito de la vida.
- ⋆ A mis padres, **Luis Carlos** y **María del Carmen** que gracias a sus esfuerzos y sacrificio me han permitido ser quien soy.
- ⋆ A mi hermana **Yully Zuley**, ella siempre ha estado a mi lado dándome ánimos, su apoyo incondicional y alientos han sido de gran ayuda para seguir adelante.
- ⋆ A mi tía **Mónica** que de una u otra forma me ha brindado su apoyo durante mis estudios, y en general agradezco a toda mi familia.
- ⋆ A todo aquel que durante los últimos dos años me brindó su amistad y a cada profesor que ha contribuido en mi formación como matemático.

Tabla de Contenido

INTRODUCCIÓN **11**

1. C*-ÁLGEBRAS **14**

1.1. C*-Álgebra de Multiplicadores 14

1.2. El Teorema de Representación de Gelfand 23

2. ACCIONES PARCIALES **41**

2.1. Acciones Parciales Topológicas 41

2.2. Acciones Parciales en C^*-Álgebras 47

2.3. Producto Cruzado 51

2.4. C^*-Álgebras Graduadas 60

3. C*-ÁLGEBRAS GRADUADAS **72**

3.1. Morfismos 72

3.2. El Semigrupo de Exel 76

3.3. Preguntas Relevantes 82

APÉNDICE **86**

A. $\mathbb{K}$-ÁLGEBRAS **86**

B. ESPACIOS DE BANACH **87**

C. ESPACIOS TOPOLÓGICOS **90**

D. COMPLETACIÓN **91**

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS **94**

ÍNDICE **96**

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.	Acción global de $\mathbb{Z}_4$ en S^1	42
Figura 2.	μ_2 actuando en $1, 2$ y 3.	44
Figura 3.	ρ_5 actuando en S^1	45
Figura 4.	μ_1 actuando en S^1	45
Figura 5.	Acción restringida a Y_1, Y_2 y Y_3.	47
Figura 6.	Posible acción de $\mathbb{D}_3$ en S^1.	83

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Dualidad de Gelfand. 38

Tabla 2. Algunas propiedades duales. 39

Tabla 3. Producto en $\mathbb{D}_3$ 43

Tabla 4. Las categorías $G \curvearrowright \mathbf{LCH}$ y $G \curvearrowright C^*$-**Álg** 74

RESUMEN

Título: ACCIONES PARCIALES Y C*-ÁLGEBRAS *

Autor: Edwar Alexis Ramírez Ardila **

Palabras Clave: SISTEMAS DINÁMICOS PARCIALES, ESPACIOS LOCALMENTE COMPACTOS HAUSDORFF, C^*-ÁLGEBRAS, PRODUCTOS CRUZADOS, C^*-ÁLGERAS GRADUADAS.

Descripción: Este trabajo consiste principalmente en estudiar las acciones parciales en el contexto de los espacios topológicos localmente compactos Hausdorff y de las C^*-álgebras, así como la construcción del producto cruzado asociado a un sistema dinámico parcial LCH.

En el primer capítulo se hace un breve estudio de la teoría de C^*-álgebras y del importante teorema de representación de Gelfand.

En el segundo capítulo se definen e ilustran algunos conceptos básicos en la teoría de sistemas dinámicos parciales topológicos y en C^*-álgebras, también se presentará la relación que existe entre estos. Por último, se mostrará la construcción del producto cruzado asociado a un C^*-sistema dinámico parcial y su relación con las C^*-álgebras graduadas.

En el último capítulo se mostrará, a partir de la relación que existe entre los sistemas dinámicos parciales LCH y los C^*-sistemas dinámicos parciales, una posible forma de extender el mecanismo de Gelfand a unas categorías mas generales. Presentaremos el semigrupo de Éxel y su utilidad en el estudio de las C^*-álgebras graduadas, junto con algunas preguntas que personalmente fueron de gran relevancia en el estudio de esta temática.

---

* Tesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Hector Edonis Pinedo Tapia, Doctor en Matemáticas.

Abstract

Title: PARTIAL ACTIONS AND C*ALGEBRAS [*]

Author: Edwar Alexis Ramírez Ardila [**]

Keywords: PARTIAL DYNAMICAL SYSTEMS, LOCALLY COMPACT HAUSDORFF SPACES, C^*-ALGEBRAS, CROSSED PRODUCT, GRADDED C^*-ALGEBRAS.

Description: This work mainly consists of partial actions study in the context of the locally compact Hausdorff spaces (LCH) and C^*-algebras, as well as the construction of crossed product associated to a partial dynamical system LCH
In the first chapter, we will study of the C^*-algebras theory and the important Gelfand representation theorem.
In the second chapter we will define some basic concepts in the topological partial dynamical systems and C^*-algebras, we will also present the relationship between these. By last, we will show cross product construction associated with a C^*-partial dynamical system and its relationship with graded C^*-algebras.
In the last chapter, we will show from the relationship that exists between partial dynamical systems LCH and C^*-partial dynamical systems, a possible way to extend the Gelfand mechanism to more general categories. We will present the Éxel semigroup and its utility in the graded C^*-algebras study, and some questions that personally were of great relevance in the study of this subject.

---

[*] Thesis

[**] Faculty of Sciences. School of Mathematics. Advisor: Hector Edonis Pinedo Tapia (PhD in mathematics).

INTRODUCCIÓN

En 1872 ante la aparición de las geometrías no-Euclideas surgió una pregunta bastante natural que podría situarse entre la frontera de las matemáticas y la filosofía ¿qué es una Geometría? Frente a tal cuestionamiento, el matemático Alemán Felix Klein (1849-1925) propuso una interesante perspectiva (el Erlange Programm) que engloba la *noción* de Geometría Euclidea. Cada **Geometría** es el estudio de aquellas propiedades en un espacio que no cambian cuando se le aplica un tipo de transformación, esas propiedades "geométricas" que no cambian son también conocidas como invariantes. Por ejemplo, la geometría Euclideana (en el plano) es el estudio de los invarintes mediante simetrías, giros y traslaciones. Esta interesante interpretación podría pensarse como una intuición de acción, pues el grupo de simetrías, giros y traslaciones estarían actuando en el plano así como los elementos de un grupo actúan en un conjunto. En este caso, podríamos interpretar el concepto de espacio como un ente matemático (objeto) que vive en una teoría matemática (categoría) y el concepto de geometría como una acción parcial de un grupo sobre tal objeto.

Posteriormente, mas exactamente en los años 40's, Gelfand relaciona la topología (y por lo tanto la geometría) con el análisis, mostrando que toda C^*-álgebra conmutativa es el álgebra de funciones de algún espacio localmente compacto Hausdorff (LCH). Más aún, la teoría de espacios LCH puede ser traducida en la teoría de las C^*-álgebras conmutativas, y viceversa, por medio de una dualidad categórica.

Más de un siglo después de la definición de geometría de Klein, el Medallista Fields Alain Connes en 1982 propone la geometría no conmutativa que, *grosso modo*, estudia las propiedades topológicas traducidas al contexto de las C^*-álgebras en general. Así, dada una acción parcial de un grupo G en un espacio localmente compacto Hausdorff X, o bien, dada una geometría en el sentido de Klein, de la dualidad de Gelfand podemos asociar una acción parcial de G en su C^*-álgebra de funciones $C_0(X)$, y a su vez construir el producto cruzado $C_0(X) \rtimes G$ que es una C^*-álgebra posiblemente no conmutativa, o bien, una geometría en el sentido de Connes conectando así las dos definiciones.

Naturalmente, nos preguntarnos bajo que condiciones una C^*-álgebra no conmutativa B proviene de una acción parcial de un grupo dado G sobre una C^*-álgebra conmutativa A, es decir ¿cuándo $B \cong A \rtimes G$? En el segundo capítulo presentaremos una respuesta parcial en el contexto de las C^*-álgebras graduadas por un grupo, y motivados por este resultado, presentaremos en el último capitulo un intento de extender el mecanismo de Gelfand C_0 a una familia de funtores más generales $\_\_ \rtimes G$ donde G es un grupo.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el primer capítulo se hace un breve estudio de la teoría de C^*-álgebras, la construcción de la C^*-álgebra de Multiplicadores y del importante teorema de representación de Gelfand.

En el segundo capítulo se definen e ilustran algunos conceptos básicos y ejemplos en la teoría de acciones parciales topológicas y en C^*-álgebras, también se presentará la relación que existe entre los sistemas dinámicos parciales LCH y los C^*-sistemas dinámicos parciales. Por último, se mostrará la construcción del producto cruzado asociado a un C^*-sistema dinámico parcial y su relación con las C^*-álgebras graduadas.

En el último capítulo se mostrará, a partir de la relación que existe entre los sistemas dinámicos parciales LCH y los C^*-sistemas dinámicos parciales, una posible forma de extender el mecanismo de Gelfand a unas categorías mas generales. Presentaremos el semigrupo de Éxel y su utilidad en el estudio de las C^*-álgebras graduadas, junto con algunas preguntas que personalmente fueron de gran relevancia en el estudio de esta temática.

Se solicita al lector estar familiarizado con resultados clásicos del análisis como son el teorema de la aplicación abierta, teorema de Hahn-Banach, las versiones localmente compactas del lema de Urysohn y Stone-Weierstrass, y el teorema de Liouville de la variable compleja (vea Folland (1999) y Megginson (1998)).

1. C*-ÁLGEBRAS

1.1. C*-Álgebra de Multiplicadores

En esta sección a partir de la definición de álgebra de Banach, progresivamente iremos dotando de estructura para así llegar al concepto de C^*-álgebra. Esto con el fin de mostrar la construcción de la C^*-álgebra de multiplicadores $M(A)$ asociada a una C^*-álgebra A.

Definición 1.1. *Sea A un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$, si A es una $\mathbb{C}$-álgebra cuya norma es submultiplicativa, es decir $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$, para cada $a, b \in A$. Entonces decimos que A es un* ***álgebra de Banach****.*

Ejemplo 1.2. Sea X espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ y sea $B(X)$ la familia de operadores lineales y acotados de X en si mismo, en este caso $B(X)$ es un espacio de Banach con la norma $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_X\}$. Además si $x \in B_X$

$$\begin{aligned} \|S \circ T(x)\| &\leq \|S\| \|T(x)\| \\ &\leq \|S\| \|T\| \|x\| \\ &\leq \|S\| \|T\|, \end{aligned}$$

entonces $\|S \circ T\| \leq \|S\| \|T\|$ $(\star)$, y por lo tanto $B(X)$ es un álgebra de Banach con la composición de funciones como producto.

Ejemplo 1.3. Defina $L^1(\mathbb{Z})$ como el conjunto de funciones $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ que verifican

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| = \sum_{n<0} |f(n)| + \sum_{n\geq 0} |f(n)| < \infty.$$

$L^1(\mathbb{Z})$ tiene estructura de espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ con la suma y producto por un escalar usual de funciones, y la siguiente norma:

$$\|f\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|.$$

Si $f, g \in L^1(\mathbb{Z})$ definimos su *convolución* $f \cdot g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ como sigue:

$$(f \cdot g)(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(m-n)g(n)$$

Note que $|f(n)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)| = \|f\|_1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Así

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(m-n)|\,|g(n)| \leq \|f\|_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |g(n)| < \infty,$$

y por lo tanto $f \cdot g$ está bien definida. Para ver que $f \cdot g \in L^1(\mathbb{Z})$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} |(f\cdot g)(n)| &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(m-n)g(n))| \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(m-n)|\,|g(n)| \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(m-n)|\,|g(n)| \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f\cdot g \in L^1(\mathbb{Z})$ y $\|f\cdot g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$, es decir, $L^1(\mathbb{Z})$ es un álgebra de Banach abeliana con producto dado por la convolución y $1 = \chi_{\{0\}}$.

Definición 1.4. *Si un álgebra de Banach A admite una función $*: A \longrightarrow A$ con las siguientes propiedades:*

(i) $(a^*)^* = a$,

(ii) $(a+\lambda b)^* = a^* + \overline{\lambda} b^*$,

(iii) $(ab)^* = b^*a^*$,

(iv) $\|a^*\| = \|a\|$,

para cada $a,b \in A$ y cada $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces A es llamada una $*$-álgebra de Banach y la función $*$ es llamada una involución en A. Si además la involución satisface (v) $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para cada $a \in A$, entonces A es llamada una C^*-álgebra.

Definición 1.5. *Dadas A y B $*$-álgebras de Banach, la función $f: A \longrightarrow B$ es un $*$-homomorfismo si es un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras que verifica $f(a^*) = (f(a))^*$ para cada $a \in A$.*

Veremos en la siguiente sección que los $*$-homomorfismos entre C^*-álgebras son automáticamente continuos.

La siguiente C^*-álgebra es el ejemplo mas importante de C^*-álgebra conmutativa.

Definición 1.6. *Sea X un espacio topológico localmente compacto Hausdorff y $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, decimos que f se anula en el infinito si para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ es compacto. Definimos $C_0(X)$ como el conjunto de funciones continuas de X en $\mathbb{C}$ que se anulan en el infinito.*

$C_0(X)$ tiene estructura de C^*-álgebra con las operaciones puntualmente definidas

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) = &\quad f(x)+g(x), \\
(fg)(x) = &\quad f(x)g(x), \\
(\lambda f)(x) = &\quad \lambda f(x), \\
f^*(x) = &\quad \overline{f(x)},
\end{aligned}
$$

y la norma del supremo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|, \text{ para cada } f \in C_0(X).$$

Si además X es compacto, toda función continua se anula en el infinito, por lo tanto $C_0(X) = C(X)$.

Ejemplo 1.7. Sea H un espacio de Hilbert y $B(H)$ el álgebra de operadores lineales y acotados de H en si mismo. Una consecuencia del teorema de representación de Riesz garantiza que $B(H)$ admite una involución $u \longmapsto u^*$ que verifica (i)-(iii) de la Definición 1.4, además $\|u\| = \|u^*\| = \|u^*u\|^{1/2}$ (Vea apéndice, Teorema B.10). Por lo tanto $B(H)$ es una C^*-álgebra no abeliana y con $1_{B(H)} = id_H$. En particular, si $M_n(\mathbb{C})$ es el conjunto de matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en los complejos y sea $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, definimos la operación $*$ en $M_n(\mathbb{C})$ como $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$, con esta operación $M_n(\mathbb{C})$ es una C^*-álgebra, en este caso $B(\mathbb{C}^n) \cong M_n(\mathbb{C})$ como C^*-álgebras.

En cuanto al álgebra de Banach $L^1(\mathbb{Z})$ podemos definir una involución como sigue: Dado $f \in L^1(\mathbb{Z})$, defina $f^* : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ donde $f^*(n) = \overline{f(-n)}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Sea $m \in \mathbb{Z}$, basta ver (iii) y (iv) de la Definición 1.4.

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)^*(m) &= \overline{(f \cdot g)(-m)} \\
&= \overline{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(-m-n)g(n)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{f(-(m+n))}\,\overline{g(n)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^*(m+n)\, g^*(-n) \\
9 \quad &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f^*(m-n)\, g^*(n) \\
&= (f^* \cdot g^*)(m).
\end{aligned}
$$

Esto demuestra además que el producto en $L^1(\mathbb{Z})$ es conmutativo. Por último, para cada $f \in L^1(\mathbb{Z})$, note que

$$\|f^*\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\overline{f(-n)}| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(-n)| = \|f\|_1.$$

Así $L^1(\mathbb{Z})$ es una $*$-álgebra de Banach, por otro lado, existen funciones f en $L^1(\mathbb{Z})$ de tal manera que $\|f\|^2 \neq \|f^* \cdot f\|$, por lo tanto $L^1(\mathbb{Z})$ no es una C^*-álgebra con esa involución.

Las C^*-álgebras fueron presentadas por primera vez en 1943 por Gelfand y Naimark en el artículo *"On the embedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert spaces"* bajo el nombre de anillos completamente regulares. En este mismo artículo muestran además que toda C^*-álgebra puede ser vista como una C^*-subálgebra del álgebra de operadores de algún espacio de Hilbert también llamada la construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS) (Murphy., 1996, Teorema 3.4.1.). La teoría de operadores fue desarrollada en los años 30's por Von Neumann y Murray, y actualmente junto con la teoría de C^*-álgebras son de bastante utilidad en la física, específicamente en mecánica cuántica.

En lo que sigue presentaremos la C^*-álgebra de multiplicadores $M(A)$ asociada a una C^*-álgebra A, esto será de bastante utilidad en el siguiente capítulo.

Definición 1.8. *Sea A una C^*-álgebra, un multiplicador de A es un par (L,R) en el espacio producto $B(A)\times B(A)$ tales que para todo $a,b\in A$*

(i) $L(ab) = L(a)b$,

(ii) $R(ab) = aR(b)$,

(iii) $aL(b) = R(a)b$.

Denotamos por $M(A)$ como la familia de todos los multiplicadores de A, $M(A)$ es no vacío pues si $c\in A$, definimos los operadores $L_c, R_c : A \longrightarrow A$ donde $L_c(a) = ca$ y $R_c(a) = ac$, para cada

$a \in A$, tenemos que

$$\|L_c\| = \sup_{\|b\|\leq 1} \|cb\| = \|c\| = \sup_{\|b\|\leq 1} \|bc\| = \|R_c\|.$$

Luego $(L_c, R_c) \in M(A)$ y $\|(L_c, R_c)\| = \|L_c\| = \|R_c\| = \|c\|$, en general tenemos el siguiente lema.

Lema 1.9. *Si (L,R) es un multiplicador de la C^*-álgebra A, entonces $\|L\| = \|R\|$.*

Demostración. Ya que $\|aL(b)\| = \|R(a)b\| \leq \|R\| \, \|a\| \, \|b\|$,

$$\|L(b)\| = \sup_{\|a\|\leq 1} \|aL(b)\| \leq \|R\| \, \|b\|,$$

así $\|L\| \leq \|R\|$. Del mismo modo $\|R(a)b\| = \|aL(b)\| \leq \|L\| \, \|a\| \, \|b\|$, implica que

$$\|R(b)\| = \sup_{\|a\|\leq 1} \|aL(b)\| \leq \|L\| \, \|b\|,$$

Por lo tanto $\|R\| = \|L\|$. ■ Dado $T \in B(A)$, si definimos $T^* : A \longrightarrow A$ donde $T^*(a) = (T(a^*))^*$, T^* es lineal y verifica

$$\begin{aligned} \|T^*(a)\| &= \|(T(a^*))^*\| \\ &= \|T(a^*)\| \\ &\leq \|T\| \, \|a^*\| \\ &= \|T\| \, \|a\|, \text{ para cada } a \in A. \end{aligned}$$

Por lo tanto T^* es acotado.

Teorema 1.10. *(Murphy., 1996, Teorema 2.1.5.) $M(A)$ tiene estructura de C^*-álgebra con producto $(L,R)(L',R') = (L\circ L', R'\circ R)$ e involución $(L,R)^* = (R^*, L^*)$ para cada $(L,R),(L',R') \in M(A)$.*

Demostración. Veamos que $M(A)$ es cerrado en $B(A)\times B(A)$, y dejaremos el resto de la prueba como ejercicio para el lector interesado.

Supongamos que la sucesión $((L_n,R_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en $M(A)$ converge a (L,R) en $B(A)\times B(A)$, entonces dados $a,b\in A$, $L_n(ab)\longrightarrow L(ab)$ y $L_n(ab) = L_n(a)b \longrightarrow L(a)b$ por lo tanto $L(ab) = L(a)b$ (análogamente $R(ab) = aR(b)$). Por último $R_n(a)b \longrightarrow R(a)b$ y $R_n(a)b = aL_n(b) \longrightarrow aL(b)$, por lo tanto $R(a)b = aL(b)$ y así $(L,R)\in M(A)$. ■ En cuanto a la relación entre A y $M(A)$ tenemos el siguiente lema.

Lema 1.11. *Dada A una C^*-álgebra, la función natural $\mu_A : A \longrightarrow M(A)$ donde para cada $c\in A$, $\mu_A(c) = (L_c, R_c)$ define un $*$-homomorfismo isométrico (por tanto inyectivo).*

Demostración. Sean $a,b\in A$ y $\lambda\in\mathbb{C}$, note que

$$\begin{aligned} L_{a+\lambda b}(x) &= (a+\lambda b)x \\ &= ax + \lambda(bx) \\ &= L_a(x) + \lambda L_b(x) \end{aligned}$$

para cada $x\in A$, entonces $L_{a+\lambda b} = L_a + \lambda L_b$ (análogamente $R_{a+\lambda b} = R_a + \lambda R_b$). Por lo tanto μ_A es lineal, y como $\|\mu_A(c)\| = \|(L_c,R_c)\| = \|c\|$, entonces μ_A es isometría, y así $\mu_A(A)$ es cerrado de $M(A)$.

Veamos que μ_A es un $*$-homomorfismo.

Note que para cada $x \in A$

$$\begin{aligned} L_{ab}(x) &= (ab)x & R_{ab}(x) &= x(ab) \\ &= a(bx) & &= (xa)b \\ &= L_a(bx) & &= R_b(xa) \\ &= L_a \circ L_b(x), & &= R_b \circ R_a(x), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} L_{a^*}(x) &= a^*x & R_{a^*}(x) &= xa^* \\ &= (x^*a)^* & &= (ax^*)^* \\ &= (R_a(x^*))^* & &= (L_a(x^*))^* \\ &= R_a^*(x) & &= L_a^*(x). \end{aligned}$$

Entonces $L_{ab} = L_a \circ L_b$, $R_{ab} = R_b R_a$, $L_{a^*} = L_a^*$ y $R_{a^*} = R_a^*$, y por lo tanto

$$\mu_A(a)\mu_A(b) = \mu_A(ab) \;\text{ y }\; \mu_A(a^*) = \mu_A(a)^*.$$

∎

NOTA. Si A tiene uno, entonces μ_A es sobreyectiva, es decir, $M(A) \cong A$ como C^*-álgebras.

Teorema 1.12. *Si* $(L^1, R^1), (L^2, R^2) \in M(A)$ *y* $a \in A$*, entonces* $R^2 L^1 = L^1 R^2$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} R^2(L^1(a))b &= L^1(a)L^2(b) \\ &= L^1(aL^2(b)) \\ &= L^1(R^2(a)b) \\ &= L^1(R^2(a))b. \end{aligned}$$

Así $(R^2L^1(a) - L^1R^2(a))b = 0$, del mismo modo $b(R^2L^1(a) - L^1R^2(a)) = 0$ para cada $b \in A$, es decir $\mu_A(c) = 0$ con $c = (R^2L^1(a) - L^1R^2(a))$, de la inyectividad de μ_A, $R^2L^1(a) - L^1R^2(a) = 0$ y por lo tanto, $R^2L^1 = L^1R^2$, para cada $(L^1, R^1), (L^2, R^2) \in M(A)$. ■

1.2. El Teorema de Representación de Gelfand

En esta sección presentaremos el importante teorema de representación de Gelfand para álgebras de Banach conmutativas, posteriormente mostraremos que toda C^*-álgebra conmutativa es de hecho $C_0(\Omega)$ para algún espacio topológico Ω localmente compacto Hausdorff. Esto con el fin de adquirir nociones básicas acerca de la teoría de C^*-álgebras así como de ideales y $*$-homomorfismos.

El siguiente teorema puede ser visto como una generalización de la serie geométrica del análisis real.

Teorema 1.13. *(Murphy., 1996, Teorema 1.2.2.) Sea A un álgebra de Banach con unidad y $a \in A$ tal que $\|a\| < 1$, entonces $1 - a \in Inv(A)$ y*

$$(1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n, \ \left(\textit{Serie de Neumann de } (1-a)^{-1}\right).$$

Dada A un $\mathbb{C}$-álgebra con unidad, denotamos por $Inv(A)$ como la familia de elementos invertibles A, además, para cada $a \in A$ definimos *el espectro* de a como

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \notin Inv(A)\}.$$

En el caso de las matrices de $n \times n$ con entradas en los complejos, el espectro de una matriz resulta ser su conjunto de autovalores.

Por otro lado, si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo con unidad ($\varphi(1_A) = 1_B$) entre $\mathbb{C}$-álgebras unitarias, tenemos que $\varphi(Inv(A)) \subseteq Inv(B)$ y por lo tanto $\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a)$, para cada $a \in A$.

Teorema 1.14. *(Murphy., 1996, Teorema 1.2.3.) Si A es un álgebra de Banach con unidad, entonces $Inv(A)$ es abierto en A, y la función*

$$Inv(A) \xrightarrow{\delta} A, \ a \longmapsto a^{-1},$$

es diferenciable.

Demostración. Sea $a \in Inv(A)$ y $\varepsilon = \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, tenemos que si $b \in B(a:\varepsilon)$

$$\|b-a\| < \|a^{-1}\|^{-1} \Rightarrow \|ba^{-1} - 1\| \leq \|b-a\|\|a^{-1}\| < 1.$$

Por el Teorema 1.13 $1-(1-ba^{-1}) = ba^{-1} \in Inv(A)$ y por lo tanto $b = (ba^{-1})a \in Inv(A)$, así $Inv(A)$ es un abierto en A.

(i) Si $b \in A$ y $\|b\| < 1$, entonces $1+b \in Inv(A)$ y

$$\begin{aligned}
\|(1+b)^{-1} - 1 - b\| &= \|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b^n - 1 - b\| \\
&= \|\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n b^n\| \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty}\|b^n\| = \tfrac{\|b\|^2}{1-\|b\|}
\end{aligned}$$

(ii) Si $a \in Inv(A)$ y suponemos que $\|c\| < \frac{1}{2}\|a^{-1}\|^{-1}$, entonces $\|a^{-1}c\| < \frac{1}{2} < 1$, tomando $b = a^{-1}c$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(1+a^{-1}c)^{-1} - 1 + a^{-1}c\| &\leq \tfrac{\|a^{-1}c\|^2}{1-\|a^{-1}c\|} \\
&< 2\|a^{-1}c\|^2
\end{aligned}$$

Defina $\mu_a : A \longrightarrow A$, donde $b \longmapsto -a^{-1}ba^{-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(a+c)^{-1} - a^{-1} - \mu_a(c)\| &= \|(a+c)^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ca^{-1}\| \\
&= \|(a(1+a^{-1}c))^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ca^{-1}\| \\
&= \|(1-a^{-1}c)^{-1}a^{-1} - a^{-1} + a^{-1}ca^{-1}\| \\
&\leq \|(1-a^{-1}c)^{-1} - 1 + a^{-1}c\|\|a^{-1}\| \\
&\leq 2\|a^{-1}c\|^2\|a^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|^3\|c\|^2.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\lim_{c\to 0}\frac{\|(a+c)^{-1}-a^{-1}-\mu_a(c)\|}{\|c\|}=0,$$

y por lo tanto δ es diferenciable en a con $\delta'_a=\mu_a$. ■ Si $|\lambda|>\|a\|$, entonces $\|\lambda^{-1}a\|<1$ y $1-\lambda^{-1}a\in Inv(A)$, por lo tanto $\lambda-a$ es invertible, es decir, $\lambda\notin\sigma(a)$, luego si $\lambda\in\sigma(a)$, entonces $|\lambda|\leq\|a\|$ y así $\sigma(a)$ está contenido en la bola cerrada $\|a\|B_{\mathbb{C}}$ con $B_{\mathbb{C}}=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leq 1\}$. Como consecuencia del teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.15. *(Murphy., 1996, Lema 1.2.4.) Sea A un álgebra de Banach con unidad y $a\in A$. El espectro $\sigma(a)$ de a es un subconjunto cerrado contenido en $\|a\|B_{\mathbb{C}}$ y la función*

$$\mathbb{C}-\sigma(a)\xrightarrow{\varphi_a}\mathbb{C}\text{ , } donde\ \lambda\longmapsto(a-\lambda)^{-1}$$

es diferenciable.

El siguiente resultado puede ser pensado como el Teorema fundamental en la teoría de álgebras de Banach.

Teorema 1.16. *(Gelfand) Si a es un elemento de un álgebra de Banach no nula con unidad A, entonces $\sigma(a)\neq\emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $\sigma(a)=\emptyset$, si $|\lambda|>2\|a\|$, entonces $\|\lambda^{-1}a\|<\frac{1}{2}$ $(\star)$ y por lo tanto $\frac{1}{2}<1-\|\lambda^{-1}a\|<1$, haciendo uso del Teorema 1.13 en la expresión $(\star)$ tenemos que $1-\lambda^{-1}a\in Inv(A)$ y

$$(1-\lambda^{-1}a)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}a)^n$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1}-1\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda^{-1}a)^n\right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|\lambda^{-1}a\|^n \\
&= \tfrac{\|\lambda^{-1}a\|}{1-\|\lambda^{-1}a\|} \\
&< 2\|\lambda^{-1}a\| < 1
\end{aligned}$$

Así $\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\|-1 \leq \|(1-\lambda^{-1}a)^{-1}-1\| < 1$ y $\|(1-\lambda^{-1}a)^{-1}\| < 2$. Por lo tanto

$$\|(\lambda-a)^{-1}\| < \tfrac{2}{|\lambda|} < \|a\|^{-1}.$$

Luego $\|\varphi_a(\lambda)\| = \|(\lambda-a)^{-1}\| < \|a\|^{-1}$ para cada $|\lambda| > 2\|a\|$. Ya que φ_a es continua (Lema 1.15), φ_a es acotada en $\overline{B(0:2\|a\|)}$, por lo tanto es acotada en $\mathbb{C}$. Dado $\tau \in A^*$, por el Lema 1.15 tenemos que $\tau \circ \varphi_a : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es entera y acotada, luego por el Teorema de Liouville de la variable compleja $\tau \circ \varphi_a$ es constante para cada $\tau \in A^*$, en particular $\tau(\varphi_a(0)) = \tau(\varphi_a(1))$, o bien $\tau(a^{-1}) = \tau((1-a)^{-1})$, para cada $\tau \in A^*$.

Afirmamos que $a^{-1} = (1-a)^{-1}$, si suponemos lo contrario, defina la función

$$\begin{array}{rrcl}
f: & gen\{a^{-1},(1-a)^{-1}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
& a^{-1} & \longmapsto & 1 \\
& (1-a)^{-1} & \longmapsto & i
\end{array}$$

f es lineal y acotada, del Teorema de Hahn-Banach para espacios normados existe $\tau \in A^*$ que extiende a f, esto es una contradicción pues $\tau(a^{-1}) = 1 \neq i = \tau((1-a)^{-1})$. Luego $a^{-1} = (1-a)^{-1}$ y por lo tanto $0 = 1$ *Ad Absurdum*. ■

Teorema 1.17 (Gelfand-Mazur)**.** *(Murphy., 1996, Teorema 1.2.6) Si A es un álgebra de Banach con unidad en donde cada elemento no nulo es invertible, entonces $A = \mathbb{C}1_A$.*

Como el supremo del espectro de cada elemento en un álgebra de Banach con unidad existe, definimos para cada $a \in A$ su *radio espectral* como

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Ejemplo 1.18. Sea $A = C(\Omega)$ con Ω compacto Hausdorff y $f \in C(\Omega)$, entonces

$$r(f) = \sup_{\lambda \in \sigma(f)} |\lambda| = \sup_{\lambda \in f(\Omega)} |\lambda| = \|f\|_\infty$$

Luego el radio espectral coincide con la norma. Esto no sucede en general pues por ejemplo en $M_2(\mathbb{C})$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \|a\| = 1 \neq 0 = r(a).$$

Veremos ahora algunos resultados relacionados con ideales en álgebras de Banach.

Dado I un ideal cerrado en un álgebra de Banach A, A/I tiene estructura de álgebra de Banach con producto $(a+I)(b+I) = ab+I$ y norma

$$\|a+I\| = \text{ínf}\{\|a+b\| : b \in I\}.$$

Por otro lado, si I es modular entonces A/I tiene uno ($1_{A/I} = u+I$), mas aún, tenemos los siguientes dos resultados.

Teorema 1.19. *(Murphy., 1996, Teorema 1.3.1.) Sea I un ideal modular de un álgebra de Banach A. Si I es propio, $\bar{I}$ también lo es. Si I es maximal, entonces este es cerrado.*

Lema 1.20. *(Murphy., 1996, Lema 1.3.2.) Si I es un ideal modular maximal de un álgebra de Banach abeliana A, entonces A/I es campo.*

Es posible extender el concepto de espectro en un punto a álgebras de Banach no necesariamente con unidad como sigue.

Observación. Dada un álgebra de Banach A, definimos $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$, esta tiene estructura de álgebra de Banach con $1_{\tilde{A}} = (0,1)$, y con las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} (a,\lambda)+(b,\beta) &= (a+b,\lambda+\beta), \\ \lambda(b,\beta) &= (\lambda b,\lambda\beta), \\ (a,\lambda)(b,\beta) &= (ab+\lambda b+\beta a,\lambda\beta), \end{aligned}$$

y norma $\|(a,\lambda)\| = \|a\|+|\lambda|$.

A puede ser encajado de manera natural como un ideal cerrado en $\tilde{A}$ de tal suerte que si A tiene uno, $A \cong \tilde{A}$ como álgebras de Banach. Luego para cada $a \in A$ definimos

$$\sigma(a) = \{\lambda : \lambda - a \notin Inv(\tilde{A})\}.$$

Un *caracter* en una $\mathbb{C}$-álgebra A es un homomorfismo *no nulo* $\tau : A \longrightarrow \mathbb{C}$. Denotamos por $\Omega(A)$ al conjunto de caracteres de A.

Teorema 1.21. *Sea A un álgebra de Banach abeliana con unidad.*

(1) *Si* $\tau \in \Omega(A)$*, entonces* $\|\tau\| = 1$.

(2) $\Omega(A)$ *es no vacío, y la función* $\tau \overset{\varphi}{\longmapsto} Ker(\tau)$ *define una biyección entre* $\Omega(A)$ *y la familia de ideales maximales de* A.

Demostración. Si $\tau \in \Omega(A)$ y $a \in A$, entonces $\tau(a) \in \sigma(a)$ pues $\sigma(\tau(a)) \subseteq \sigma(a)$, y $|\tau(a)| \leq r(a) \leq \|a\|$, por lo tanto $\|\tau\| \leq 1$ $(\star)$. También $\tau(1_A) = 1$ pues $\tau(1_A)^2 = \tau(1_A)$ y $\tau(1_A) \neq 0$ (si $\tau(1_A) = 0$, como $\sigma(\tau(1_A)) \subseteq \sigma(1_A)$ tenemos que $-1_A = \tau(1_A) - 1_A \notin Inv(A)$ contradicción). Así $\tau(1_A) = 1$ y por consiguiente $\|\tau\| = 1$.

$Ker(\tau)$ es un ideal propio de A pues si $a \in A$, entonces $a - \tau(a) \in Ker(\tau)$, por lo tanto $a = (a - \tau(a)) + \tau(a) \in Ker(\tau) \oplus \mathbb{C}1_A$, y así $A = Ker(\tau) \oplus \mathbb{C}1_A$.

$Ker(\tau)$ es maximal, en efecto, si J es un ideal propio de A tal que $Ker(\tau) \subseteq J$. Supongamos que $x \in J - Ker(\tau)$, $x = a + \lambda 1_A$ con $a \in Ker(\tau)$, entonces $\tau(x) = \tau(\lambda 1_A) = \lambda \neq 0$ y $\lambda 1_A - x = \tau(x)1_A - x \in Ker(\tau) \subseteq J$, por lo tanto $\lambda 1 \in J$ y $1 \in J$, como J es ideal de A, tenemos que $J = A$ absurdo.

φ es inyectiva pues si $\tau_1, \tau_2 \in \Omega(A)$ tal que $Ker(\tau_1) = Ker(\tau_2)$. Entonces para cada $a \in A$, $a - \tau_2(a) \in Ker(\tau_2) = Ker(\tau_1)$, entonces $0 = \tau_1(a - \tau_2(a)) = \tau_1(a) - \tau_2(a)\tau_1(1_A) = \tau_1(a) - \tau_2(a)$ y por lo tanto $\tau_1 = \tau_2$.

Por último, si I es un ideal maximal arbitrario de A, entonces del Teorema 1.19 I es cerrado, y ya que A es abeliano, se sigue que A/I es un álgebra de Banach unitaria en donde cada elemento es invertible, por el Teorema de Gelfand-Mazur $A/I = \mathbb{C}(1 + I)$, es decir, $A = I \oplus \mathbb{C}1_A$. Defina

$\tau : A \longrightarrow \mathbb{C}$ donde $a+\lambda \longmapsto \lambda$, tenemos que $\tau \in \Omega(A)$ y $Ker(\tau) = I$, por lo tanto φ es sobre. Como A tiene 1, este admite ideales maximales, por lo tanto $\Omega(A) \neq \emptyset$. ■ En el caso en que A no tenga unidad, de $(\star)$ en la prueba del Teorema 1.21 se sigue que $\Omega(A) \subseteq B_{A^*}$. Además si dotamos a A^* con la topología débil* y haciendo uso del Teorema de Banach-Alaoglu se sigue el siguiente resultado que conecta las álgebras de Banach con los espacios topológicos localmente compactos Hausdorff.

Teorema 1.22. *(Murphy., 1996, Teorema 1.3.5.) Si A es un álgebra de Banach abeliana, entonces* $\Omega(A)$ *es localmente compacto Hausdorff. Si A tiene unidad, entonces* $\Omega(A)$ *es compacto.*

Ejemplo 1.23. Considere el álgebra de Banach $L^1(\mathbb{Z})$ del Ejemplo 1.3, S^1 es homeomorfo a $\Omega(L^1(\mathbb{Z}))$ vía la función $z \in S^1 \longmapsto \tau_z \in \Omega(L^1(\mathbb{Z}))$ donde

$$\tau_z(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)z^n \ (f \in L^1(\mathbb{Z})) \text{ (Murphy., 1996, Ejemplo 1.3.1.).}$$

Si A es un álgebra de Banach abeliana y sin unidad $\Omega(A)$ puede ser vacío, supongamos que $\Omega(A) \neq \emptyset$. Dado $a \in A$, definimos la función

$$\widehat{a} : \Omega(A) \longrightarrow \mathbb{C}, \ \tau \longmapsto \tau(a).$$

$\Omega(A)$ tiene la topología mas pequeña que hace a las funciones $\{\widehat{a}\}_{a\in A}$ continuas (pues $\widehat{a} = J(a)|_{\Omega(A)}$), como consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$\{\tau \in \Omega(A) : |\tau(a)| \geq \varepsilon\} = |\widehat{a}|^{-1}([\varepsilon, \infty)),$$

es un cerrado de la bola B_{A^*} con la topología *débil, por Banach-Alaoglu este es compacto y por lo tanto $\widehat{a} \in C_0(\Omega(A))$. Así tenemos el resultado principal de esta sección (Murphy., 1996, Teorema de representación de Gelfand).

Teorema 1.24 (Representación de Gelfand)**.** *Sea A un álgebra de Banach conmutativa tal que $\Omega(A)$ es no vacío. Entonces la función (llamada representación de Gelfand)*

$$A \longrightarrow C_0(\Omega(A)),\ a \longmapsto \widehat{a}$$

es un homomorfismo decreciente en norma ($\|\widehat{a}\| \leq \|a\|$), y

$$r(a) = \|\widehat{a}\|_\infty \ \ (a \in A).$$

Si A tiene unidad, $\sigma(a) = \widehat{a}(\Omega(A))$, y si A no tiene unidad, $\sigma(a) = \widehat{a}(\Omega(A)) \cup \{0\}$, para cada $a \in A$.

Nuestro siguiente objetivo será mostrar que si A es una C^*-álgebra conmutativa, entonces el homomorfismo anterior resulta ser una isometría sobreyectiva.

Observación. Si A es una C^*-álgebra, definimos $(a,\lambda)^* = (a^*,\overline{\lambda})$. La norma en $\tilde{A}$ definida en la Observación 1.2 no necesariamente cumple la propiedad (v) en la Definición 1.4. En este caso podemos vía la C^*-álgebra de multiplicadores definir una norma en $\tilde{A}$ que la convierte en C^*-álgebra (Murphy., 1996, Teorema 2.1.6.). Del mismo modo A estará encajada en $\tilde{A}$ y $\tilde{A} \cong A$ como C^*-álgebras si, y solo si, A tiene unidad.

Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un $*$-homomorfismo entre $*$-álgebras, podemos extender φ a un $*$-homomorfismo con uno $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$ donde $\tilde{\varphi}(a+\lambda) = \varphi(a) + \lambda$.

Un elemento a en una $*$-álgebra es llamado *hermitiano* (o auto-adjunto) si $a^* = a$.

Motivado en el Ejemplo 1.18, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.25. *Si a es un elemento auto-adjunto en una C^*-álgebra A, entonces $r(a) = \|a\|$.*

Note que para cada elemento a en una C^*-álgebra A, a^*a es auto-adjunto, por el resultado anterior $\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a)$, por lo tanto, la norma en A está completamente determinada por la estructura algebraica de A, y como consecuencia, existe una única norma que hace a una $*$-álgebra de Banach, una C^*-álgebra (Murphy., 1996, Corolario 2.1.2.).

Observación. Si φ es un $*$-homomorfismo entre una $*$-álgebra de Banach A y una C^*-álgebra B, entonces para cada $a \in A$,

$$\begin{aligned} \|\varphi(a)\|^2 &= \|\varphi(a)\varphi(a)^*\| \\ &= \|\varphi(a^*a)\| \\ &= r(\varphi(a^*a)) \\ &\leq r(a^*a) \\ &\leq \|a^*a\| \\ &= \|a\|^2. \end{aligned}$$

Como consecuencia, todo $*$-homomorfismo entre C^*-álgebras es automáticamente continuo, en particular, todo $*$-isomorfismo es isometría.

Observación. (i) Para cada $a \in A$ existen únicos hermitianos $b, c \in A$ tal que $a = b + ic$ $\Big(b = \frac{1}{2}(a + a^*)$ y $c = \frac{1}{2i}(a -$ además $a^* = b - ic$.

Por otro lado, note que si $f \in C_0(X)$ es un hermitiano, entonces f está definida a valores reales, por lo tanto $\sigma(f) = \overline{f(X)} \subseteq \mathbb{R}$. En general en una C^*-álgebra A, $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ para cada hermitiano $a \in A$ (Murphy., 1996, Teorema 2.1.8.).

(ii) Dado $a \in A$, una consecuencia del Teorema de representación de Gelfand establece que si A no tiene uno $\sigma(a) = \widehat{a}(\Omega(\tilde{A})) = \{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\} \cup \{0\}$, y en caso en que A tenga uno $\sigma(a) = \widehat{a}(\Omega(A)) = \{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\}$.

Veremos ahora que el conjunto de caracteres en una C^*-álgebra conmutativa es no vacío, para ello requeriremos del siguiente resultado.

Teorema 1.26. *Si τ es un caracter en una C^*-álgebra A, entonces este preserva adjuntas.*

Demostración. Si $a \in A$, entonces $a = b + ic$ con b, c hermitianos, de la parte (ii) en la Observación anterior $\tau(b) \in \sigma(b) \subseteq \mathbb{R}$ y $\tau(c) \in \sigma(c) \subseteq \mathbb{R}$, es decir, $\tau(b), \tau(c) \in \mathbb{R}$. Así $\tau(a^*) = \tau(b - ic) = \tau(b) - i\tau(c) = \overline{\tau(b) + i\tau(c)} = \overline{\tau(a)}$. ■

Si A es una C^*-álgebra conmutativa sin unidad y no nula, A admite hermitianos no nulos (tome por ejemplo a^*a con $a \in A - \{0\}$, tenemos que $\|a^*a\| = \|a\|^2 \neq 0$, por lo tanto a^*a es hermitiano no nulo). Sea a hermitiano no nulo, del Teorema 1.25 $r(a) = \|a\|$, por (ii) en la Observación anterior y la compacidad de $\sigma(a)$, existe $\tau \in \Omega(A)$ tal que $|\tau(a)| = \|a\|$, así $\Omega(A) \neq \emptyset$ y además tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.27 (Gelfand)**.** *Si A es una C^*-álgebra conmutativa no nula, entonces la representación* *de Gelfand*

$$\varphi : A \longrightarrow C_0(\Omega(A)),\ a \longmapsto \widehat{a},$$

es un $*$-isomorfismo isométrico.

Demostración. Del Teorema de Representación de Gelfand, φ define un homomorfismo decreciente en norma tal que $\|\varphi(a)\| = r(a)$, y del Teorema 1.26 $\varphi(a^*)(\tau) = \tau(a^*) = \overline{\tau(a)} = \varphi(a)^*(\tau)$, así φ es un $*$-homomorfismo. Además φ es isometría pues $\|\varphi(a)\|^2 = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = \|\varphi(a^*a)\| = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$, por lo tanto basta ver que φ es sobre. En efecto, note que $\varphi(A)$ es una subálgebra de $C_0(\Omega(A))$ que preserva adjuntas, además separa puntos pues si $\tau_1, \tau_2 \in \Omega(A)$ son distintos, existe $a \in A$ tal que $\tau_1(a) \neq \tau_2(a)$, o bien, $\widehat{a}(\tau_1) \neq \widehat{a}(\tau_2)$ con $\widehat{a} \in \varphi(\Omega(A))$.
Además, si $\tau \in \Omega(A)$, como $\tau \neq 0$ existe $a \in A$ tal que $\tau(a) \neq 0$, es decir, $\varphi(a)(\tau) \neq 0$, del Teorema de Stone-Weierstrass se sigue que $\varphi(A) = C_0(\Omega(A))$. ■

Dado un elemento a en una C^*-álgebra conmutativa A, este puede ser visto como una función $\widehat{a} : \Omega(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ continua y que se anula en el infinito. Recíprocamente, dado un punto x en un espacio localmente compacto Hausdorff X, $f, g \in C_0(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, la suma y multiplicación por un escalar se definió puntualmente como $(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x)$ leído de "derecha a izquierda" puede ser interpretado como $x(f + \lambda g) = x(f) + \lambda x(g)$, del mismo modo, el producto $(fg)(x) = f(x)g(x)$ leído de derecha a izquierda es $x(fg) = x(f)x(g)$; es decir, x puede ser visto como un caracter de $C_0(X)$, de hecho $X \cong \Omega(C_0(X))$ como espacios topológicos (Murphy., 1996, Teorema 2.1.15. (caso compacto)). Así, cada elemento de X está en correspondencia con un caracter de $C_0(X)$, y en cuyo caso estaríamos tentados a definir "punto" en una C^*-álgebra como un caracter de A.

Como consecuencia de la representación de Gelfand (Teorema 1.27.) tenemos el siguiente sorprendente resultado.

Teorema 1.28. *(Murphy., 1996, Teorema 3.1.5.) Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un $*$-homomorfismo inyectivo entre las C^*-álgebras A y B, entonces φ es una isometría.*

Demostración. Podemos suponer que A es conmutativo (restringiendo φ a $C^*(a^*a)$[1] de ser necesario), y que B es conmutativo (restringiendo $\varphi : A \longrightarrow \overline{\varphi(A)} \subseteq B$), también podemos extender φ a $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$ y suponer que φ es unitario. Basta verificar que $\|\varphi(a)\| = \|a\|$ para cada $a \in A$ hermitiano (si suponemos la isometría, $\|\varphi(a^*a)\| = \|\varphi(a)\|^2 = \|a\|^2 = \|a^*a\|$).

Defina φ' de $\Omega(B)$ en $\Omega(A)$, donde $\tau \longmapsto \tau \circ \varphi$, tenemos que φ' es continua, por lo tanto $\varphi'(\Omega(B))$ es compacto. Si $\varphi'(\Omega(B)) \neq \Omega(A)$, del lema de Urysohn existe $f : \Omega(A) \longrightarrow [0,1]$ no nula, tal que f se anula en $\varphi'(\Omega(B))$. Por la representación de Gelfand, $f = \widehat{a}$ para algún $a \in A$. Tenemos que si $\tau \in \Omega(B)$, $\tau(\varphi(a)) = \widehat{a}(\tau \circ \varphi) = 0$, entonces $r(\varphi(a)) = 0$ y como $\varphi(a)$ es hermitiano, tenemos que $\|\varphi(a)\| = r(\varphi(a)) = 0$ (Teorema 1.25), así $\varphi(a) = 0$, de la inyectividad de φ se sigue que $a = 0$ pero esto contradice que f sea no nula. Así $\varphi'(\Omega(B)) = \Omega(A)$ y por lo tanto, para cada $a \in A$

---

[1] Sea A una C^*-álgebra y $a \in A$ denotamos por $C^*(a)$ como la C^*-subálgebra mas pequeña de A que contiene a a y a^*.

$$\begin{aligned}\|a\| &= \|\widehat{a}\| \\ &= \sup_{\tau\in\Omega(A)} |\tau(a)| \\ &= \sup_{\tau\in\Omega(B)} |\tau(\varphi(a))| \\ &= \|\varphi(a)\|.\end{aligned}$$

■

Corolario 1.29. *Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un $*$-homomorfismo entre las C^*-álgebras A y B, entonces $\varphi(A)$ es una C^*-subálgebra de B.*

Definición 1.30. *Decimos que un $*$-homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ entre C^*-álgebras es no-degenerado si el ideal a izquierda de B generado por $\varphi(A)$ es denso en B.*

En el caso que A y B sean C^*-álgebras con unidad, todo $*$-homomorfismo con uno es no-degenerado pues $1_B = \varphi(1_A) \in \varphi(A)$.

Considere la función continua $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos LCH, f induce un $*$-homomorfismo

$$f' : C_0(Y) \longrightarrow C_0(X)$$

mediante el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "f'(g)=g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd} \qquad g \in C_0(Y).$$

En cuyo caso f' es no-degenerado si, y solo si, f es propia. Recíprocamente, si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un $*$-homomorfismo entre C^*-álgebras conmutativas, φ induce una función continua

$$\varphi' : \Omega(B) \longrightarrow \Omega(A)$$

mediante el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\varphi'(\tau)=\tau\circ\varphi"'] & B \arrow[d, "\tau"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd} \qquad \tau \in \Omega(B).$$

De nuevo, φ' es propia si, y solo si, φ es no-degenerado. Esto motiva a definir los morfismos entre C^*-álgebras como $*$-homomorfismo no-degenerados, y los morfismos entre espacios LCH como funciones continuas propias, tenemos así dos categorías y funtores de ida y vuelta como sigue.

Espacios topológicos LCH con funciones continuas propias.	$\xleftarrow{\Omega}$ $\xrightarrow{C_0}$	C^*-álgebras conmutativas con $*$-homomorfismos no-degenerados.

Tabla 1
Dualidad de Gelfand.

El par (C_0, Ω) es de hecho una dualidad entre estas categorías, es decir, la Teoría de los espacios topológicos LCH se puede "traducir" en la Teoría de las C^*-álgebras conmutativas y viceversa. La siguiente tabla presentada con mayor detalle en (Wegge-Olsen, 1993, Sección 1.11) muestra a modo de diccionario algunas propiedades relevantes en topología que pueden ser traducidas al contexto de las C^*-álgebras.

Espacios Localmente compactos Hausdorff	|	*C^*-Álgebras*
Espacios LCH	$\leftrightarrow$	C^*-Álgebras conmutativas
Funciones continuas propias	$\leftrightarrow$	$*$-homomorfismos no-degenerados
Compacidad	$\leftrightarrow$	Existencia del elemento 1
Conexidad	$\leftrightarrow$	No idempotentes distintos de 0 y 1
Puntos $x \in X$	$\leftrightarrow$	Caracteres de A
Conjuntos abiertos	$\rightarrow$	Ideales cerrados
Compactifición	$\leftrightarrow$	**Unitarización**
$X \overset{\alpha}{\rightsquigarrow} \alpha X$, C. Alexandroff	$\leftrightarrow$	$C_0(X)^\sim \cong C(\alpha X)$
$X \overset{\beta}{\rightsquigarrow} \beta X$, C. Stone–Čech	$\leftrightarrow$	$M(C_0(X)) \cong C(\beta X)$
Producto cartesiano	$\leftrightarrow$	Producto tensorial C^*
Medidas de Radon Complejas	$\leftrightarrow$	Elementos de $C_0(X)^*$
X es 2-numerable	$\leftrightarrow$	$C_0(X)$ es separable

Tabla 2
Algunas propiedades duales.

Las C^*-álgebras conmutativas son análogas a los espacios topológicos LCH, entre estos espacios se encuentran, por ejemplo, los espacios Euclideos n-dimensionales, la esfera de Riemann, etc. Entonces, a modo de extender el concepto de espacio, las C^*-álgebras no conmutativas pueden ser vistas como una generalización de los espacios topológicos localmente compactos Hausdorff. La forma de proceder en el estudio de tales objetos es a través de la traducción presentada anteriormente. Por ejemplo, los puntos se traducen en caracteres, por lo tanto, definimos punto en una C^*-álgebra, o mas bien, sus objeto dual "*topología no conmutativa*", como un caracter de A. Naturalmente existen C^*-álgebras sin caracteres, de ahí, el objeto asociado podría no tener puntos, tales objetos también son llamados *topologías sin puntos* o *espacios cuánticos*. Este es el objeto de estudio de la *geometría no conmutativa*, una teoría impulsada por el matemático francés Alain

Connes en "*Nonconmutative Geometry (1994)*", su principal obra hasta la fecha.

2. ACCIONES PARCIALES

Este capítulo está hecho con el fin de proporcionarle al lector algunos conceptos y resultados básicos acerca de la teoría de acciones parciales en espacios topológicos y en C^*-álgebras, así como la construcción del producto cruzado asociado a un C^*-sistema dinámico parcial y su relación con las C^*-álgebras graduadas.

2.1. Acciones Parciales Topológicas

Nuestro principal objeto de estudio serán los sistemas dinámicos parciales en el contexto de los espacios topológicos localmente compactos Hausdorff (LCH) y en C^*-álgebras.
Más adelante, como aplicación de la dualidad de Gelfand veremos cómo conseguir C^*-sistemas dinámicos parciales en C^*-álgebras conmutativas a partir de sistemas dinámicos parciales LCH. Por ahora definamos acción parcial topológica.

Definición 2.1. *Dado G un grupo y X un conjunto, una acción parcial de G en X es un par*

$$\alpha := (\{U_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}),$$

donde para cada $g \in G$, $U_g \subseteq X$ y $\alpha_g : U_{g^{-1}} \longrightarrow U_g$ es una biyección que verifica

i) $U_e = X$ *y* $\alpha_e = Id_X$,

ii) $\alpha_g(U_{g^{-1}} \cap U_h) = U_g \cap U_{gh}$, *para todo* $g,h \in G$,

iii) $\alpha_g(\alpha_h(x)) = \alpha_{gh}(x)$, *para todo* $x \in U_{h^{-1}} \cap U_{(gh)^{-1}}$ *y todo* $g,h \in G$.

Llamaremos a la cuadrupla $(X,G,\{U_g\}_{g\in G},\{\alpha_g\}_{g\in G})$ *un* ***sistema dinámico parcial****.*

- *Si* $U_g = X$*, para todo* $g \in G$*, decimos que* α *es una acción global.*
- *Las condiciones ii) y iii) equivalen a decir que* α_{gh} *es una extensión de* $\alpha_g \circ \alpha_h$*, lo cual es la diferencia principal entre el concepto de acción parcial y el de acción global de grupo.*
- *Si X es un espacio topológico, diremos que* α *es una acción parcial topológica si cada* U_g *es un abierto en X y cada* $\alpha_g : U_{g^{-1}} \longrightarrow U_g$ *es un homeomorfismo. En el caso que X sea localmente compacto Hausdorff (LCH), diremos que la cuadrupla* $(X,G,\{U_g\}_{g\in G},\{\alpha_g\}_{g\in G})$ *es un sistema dinámico parcial LCH.*

Ejemplo 2.2. Dado $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$ y $z \in S^1$, denote por $\overline{m}z,\ 0 \leq m < n$ la m-esima partición de S^1 en n-partes, es decir, el efecto de operar $\overline{m}$ por z es rotar a z un ángulo de $\frac{2\pi m}{n}$, esto puede ser visto como un homeomorfismo $\alpha_{\overline{m}} : S^1 \longrightarrow S^1$ donde $\alpha_{\overline{m}}(e^{it}) = e^{i(t+\frac{2\pi m}{n})}$, para cada $t \in [0,2\pi]$.

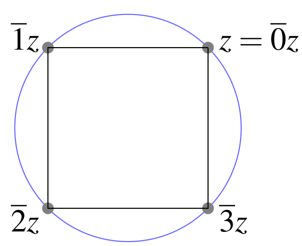

Figura 1. Acción global de $\mathbb{Z}_4$ en S^1

Resultaría más natural actuar el grupo de $\mathbb{D}_4$ en S^1 puesto que éste representa básicamente todos los movimientos admisibles de un cuadrado. Por ahora presentaremos el grupo de simetrías de un triángulo actuando en S^1.

Sea $\mathbb{D}_3 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ el grupo de simetrías de un triángulo, es decir, el grupo que representa todos los movimientos admisibles de un triángulo.

$\cdot$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_2	μ_3	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_3	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	μ_3	μ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1
μ_2	μ_2	μ_1	μ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
μ_3	μ_3	μ_2	μ_1	ρ_2	ρ_1	ρ_0

Tabla 3
Producto en $\mathbb{D}_3$

Ejemplo 2.3. Para cada $z = e^{it} \in S^1$ defina los siguientes homeomorfismos

$$
\begin{aligned}
\alpha_{\rho_0}(e^{it}) &= e^{it} \\
\alpha_{\rho_1}(e^{it}) &= e^{i(t+\frac{2\pi}{3})} \\
\alpha_{\rho_2}(e^{it}) &= e^{i(t+\frac{4\pi}{3})} \\
\alpha_{\mu_1}(e^{it}) &= e^{i(-t)} \\
\alpha_{\mu_2}(e^{it}) &= e^{i(\frac{2\pi}{3}-t)} \\
\alpha_{\mu_3}(e^{it}) &= e^{i(\frac{4\pi}{3}-t)}
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, el efecto geométrico de aplicar α_{μ_2} a la circunferencia consiste en reflejar con respecto al eje x y rotar $\frac{2\pi}{3}$ radianes, lo que es lo mismo que reflejarla con respecto al eje l_2 como se muestra en la figura.

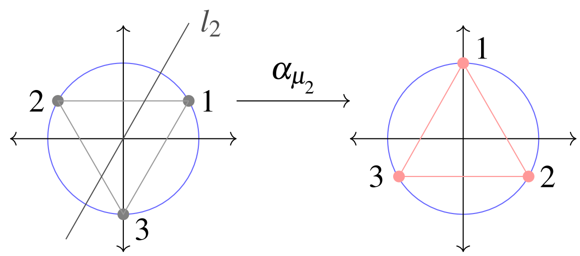

Figura 2. μ_2 actuando en $1, 2$ y 3.

Por otro lado, note que

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mu_3}(\alpha_{\mu_2}(e^{it})) &= \alpha_{\mu_3}(e^{i(\frac{2\pi}{3}-t)}) \\
&= e^{i(\frac{4\pi}{3}-(\frac{2\pi}{3}-t))} \\
&= e^{i(t+\frac{2\pi}{3})} \\
&= \alpha_{\rho_1}(e^{it}) \\
&\therefore\ \alpha_{\mu_3}\alpha_{\mu_2} = \alpha_{\rho_1} = \alpha_{\mu_3\mu_2}
\end{aligned}$$

No es difícil ver que α define una acción global de $\mathbb{D}_3$ en S^1.

Definiremos el grupo diedral $\mathbb{D}_n$ como el subgrupo del grupo de permutaciones de un conjunto de n elementos como sigue:

Cada elemento de $\mathbb{D}_n$ puede ser visto como una simetría de un polígono regular de n lados, es decir, si indejemos los vértices del polígono con los números $1, 2, .., n$, los $\rho_j \in \mathbb{D}_n$ con $0 \leq j \leq n-1$, representan las rotaciones del polígono $\frac{2\pi j}{n}$ radianes, por ejemplo para $n = 7$

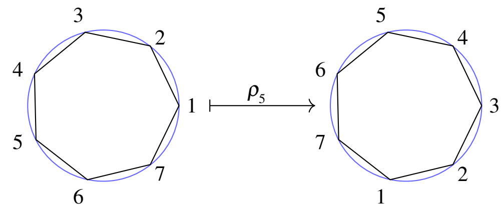

Figura 3. ρ_5 actuando en S^1

y los $\mu_k \in \mathbb{D}_n$ con $1 \leq k \leq n$ representan reflexiones con respecto a un eje dado. Por ejemplo

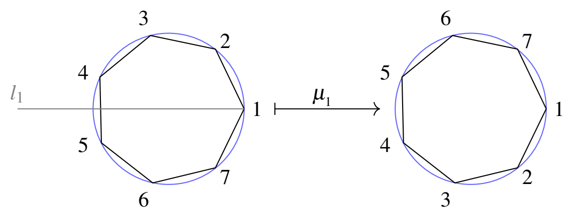

Figura 4. μ_1 actuando en S^1

Así, por ejemplo, el efecto de operar $\rho_j\rho_k$ consiste en girar el polígono $\frac{2\pi k}{n}$ radianes y al polígono resultante girarlo $\frac{2\pi j}{n}$ radianes. El caso de operar $\mu_j\mu_k$ consiste en reflejar con respecto al eje k y reflejar el polígono resultante con respecto al eje j y por último operar $\mu_j\rho_k$ consiste en girar el polígono $\frac{2\pi k}{n}$ y reflejarlo con respecto al eje j.

Este grupo tiene la siguiente presentación

$$\mathbb{D}_n = \{\rho, \mu : \rho^n = \mu^2 = (\rho\mu)^2 = 1\}.$$

Ejemplo 2.4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Análogo al Ejemplo 2.3 es posible actuar $\mathbb{D}_n$ en S^1 como sigue:

$$\alpha_{\rho_j}(e^{it}) = \quad e^{i(t+\frac{2\pi j}{n})},\ 0 \leq j \leq n-1,$$

$$\alpha_{\mu_j}(e^{it}) = \quad e^{i(\frac{2\pi j}{n}-t)},\ 1 \leq j \leq n.$$

Al igual que el ejemplo anterior, α_{ρ_j} representa girar la circunferencia $\frac{2\pi j}{n}$ radianes, mientras que α_{μ_j} representa reflejar la circunferencia con respecto al eje x y luego girarla $\frac{2\pi j}{n}$ radianes, por lo tanto, esta acción "captura" todas las simetrías posibles de un polígono regular de n lados.

En el contexto de las acciones parciales, los grupos pueden ser interpretados como tareas, es decir, los elementos de un grupo representan ordenes y el actuar un elemento del grupo en un punto del objeto se interpretaría como ordenar al punto que cumpla cierta orden, sería como dotar de "movimiento" al objeto.

Una manera estándar de producir acciones parciales en conjuntos y espacios topológicos es vía restricciones, es decir, sea Φ una acción global de un grupo G en un espacio topológico X, y sea $Y \subseteq X$ abierto, entonces podemos definir una acción parcial ϕ de G en Y como la "restricción" de Φ a Y

$$\phi = (\{Y_g\}_{g\in G}, \{\phi_g\}_{g\in G}),$$

donde cada $Y_g = Y \cap \Phi_g(Y)$ y cada $\phi_g = \Phi_g|_{Y_{g^{-1}}} : Y_{g^{-1}} \longrightarrow Y_g$, para todo $g \in G$. Recíprocamente toda acción parcial de un grupo en un conjunto (espacio topológico) proviene de una acción global vía una restricción, a esto se le conoce como una globalización (Exel, 2017, Teorema 3.5 y Proposición 5.5.).

Ejemplo 2.5. Considere la acción global del Ejemplo 2.3 y tome los abiertos Y_1, Y_2, Y_3 de S^1 como sigue:

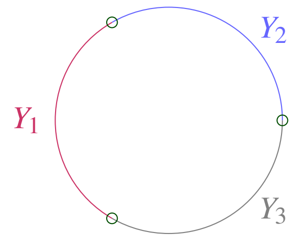

Figura 5. Acción restringida a Y_1, Y_2 y Y_3.

Las acciones parciales de $\mathbb{D}_3$ vía la restricción de α a los Y_i's vienen dadas como sigue

$$\phi^i = (\{U_g^i\}_{g\in\mathbb{D}_3}, \{\phi_g^i\}_{g\in\mathbb{D}_3}).$$

Donde para cada $1 \leq i \leq 3$, tenemos que

$$U_g^i = \begin{cases} \emptyset, & g \in \{\rho_1, \rho_2, \mu_j : j \neq i\} \\ \\ Y_i, & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad \& \quad \phi_g^i = \begin{cases} \emptyset, & g \in \{\rho_1, \rho_2, \mu_j : j \neq i\} \\ \\ Id_{Y_i}, & g = \rho_0, \\ \\ \alpha_{\mu_i}|_{Y_i}, & g = \mu_i. \end{cases}$$

2.2. Acciones Parciales en C^*-Álgebras

Dado X un espacio topológico localmente compacto Hausdorff, la idea en síntesis ha sido deducir propiedades topológicas relevantes de X a partir de su C^*-álgebra "subyacente" $C_0(X)$, por ejemplo, una condición necesaria y suficiente para que se de la compacidad en X es que $C_0(X)$ tenga uno, del mismo modo la conexidad de X equivale a decir que $C_0(X)$ no tiene idempotentes distintos de las funciones constantes 0 y 1. Esta "traducción" está perfectamente establecida entre los espacios LCH y las C^*-álgebras conmutativas por medio de la dualidad categórica presentada en el primer capítulo.

En esta sección mostraremos que dado $(X, G, \{U_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ un sistema dinámico parcial LCH, existe un C^*-sistema dinámico parcial sobre $C_0(X)$ al cual en la siguiente sección se le asociará una nueva C^*-álgebra posiblemente no conmutativa llamada *producto cruzado*.

Definición 2.6. *Una acción parcial de un grupo G en una C^*-álgebra A es una acción parcial*

$$\theta := (\{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$$

del grupo G en el conjunto A tales que cada D_g es un ideal cerrado de A y cada $\theta_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ es un $*$-isomorfismo, es decir, un $*$-homomorfismo biyectivo.

La cuadrupla $(A, G, \{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ será llamada un C^*-sistema dinámico parcial.

De ahora en adelante X denotará un espacio topológico localmente compacto Hausdorff. Sea U abierto no vacío de X, defina

$$C_0(U) = \{f \in C_0(X) : f(x) = 0, \text{ para cada } x \in X \setminus U\}$$

Es claro que $C_0(U)$ es un ideal cerrado de $C_0(X)$, además es no vacío pues si $x \in U$, del Lema de Urysohn existe $f \in C_0(X)$ tales que $f(x) = 1$ y $f \equiv 0$ fuera de U.

Como consecuencia del lema de Urysohn tenemos también el siguiente lema.

Lema 2.7. *Sean U y V abiertos de X, $U \subseteq V$ si, y solo si, $C_0(U) \subseteq C_0(V)$.*

Demostración. Sea $f \in C_0(U)$, tenemos que $f(x) = 0$ para cada $x \in X \setminus U$, como $X \setminus V \subseteq X \setminus U$, entonces $f(x) = 0$, para cada $x \in X \setminus V$, y por lo tanto $f \in C_0(V)$. Recíprocamente, si $x \in U$, del lema de Urysohn, existe $f \in C_0(U)$ tal que $f(x) = 1$, como $C_0(U) \subseteq C_0(V)$ tenemos que $f \in C_0(v)$. Ya que $f(x) \neq 0$, concluimos que $x \notin X \setminus V$, por lo tanto $x \in V$. ■

Como consecuencia del Lema anterior, existe una correspondencia inyectiva entre los abiertos de X y los ideales cerrados de $C_0(X)$, de hecho, si X es compacto de Hausdorff, entonces tal correspondencia es una biyección Gillman and Jerison (1976).

Por otro lado, si U y V son abiertos de un LCH X, entonces U y V son LCH. Identificando $C_0(U)$ con las funciones continuas de U en $\mathbb{C}$ que se anulan en el infinito, tenemos que si $h : U \longrightarrow V$ es un homeomorfismo, entonces $h' : C_0(V) \longrightarrow C_0(U)$, $f \longmapsto f \circ h$ es un $*$-isomorfismo.

Veamos la sobreyectividad, note que $h'[C_0(V)]$ es una C^*-subálgebra de $C_0(U)$ (Corolario 1.29), además, si $x, y \in V$ son distintos, de la inyectividad de h, $h(x) \neq h(y)$ y del Lema de Urysohn existe $f \in C_0(V)$ tal que $h'(f)_{(x)} = f(h(x)) \neq f(h(y)) = h'(f)_{(y)}$, por lo tanto $h'[C_0(V)]$ separa puntos. Ahora, si $x \in U$, del Lema de Urysohn existe $k \in C_0(V)$ tal que $k(h(x)) \neq 0$. Luego por el Teorema de Stone-Weierstrass $h'[C_0(V)] = C_0(U)$.

Si $(X, G, \{U_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ es un sistema dinámico parcial LCH, definimos para cada $g \in G$, $D_g = C_0(U_g)$ y $\theta_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ donde para cada $f \in D_{g^{-1}}$

$$\begin{tikzcd} U_g \arrow[r, "\alpha_{g^{-1}}"] \arrow[dr, dashed, "f\circ\alpha_{g^{-1}}"'] & U_{g^{-1}} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}
\qquad
\theta_g(f)_{(x)} = \begin{cases} f(\alpha_{g^{-1}}(x)), & x \in U_g, \\ 0, & x \in X - U_g. \end{cases}$$

θ_g es un $*$-homomorfismo entre C^*-álgebras y por la Observación 1.2, θ_g es continuo. Veamos que $(C_0(X), G, \{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ es un C^*-sistema dinámico parcial, es decir, que se verifican los tres ítems de la Definición 2.1.

(i) $D_e = C_0(U_e) = C_0(X)$ y $\theta_e = Id_{C_0(X)}$.

(ii) Sea $f \in D_{g^{-1}} \cap D_h = C_0(U_{g^{-1}} \cap U_h)$, como α define una acción parcial, de (ii) en la Definición 2.1 tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U_{g^{-1}} \cap U_h \arrow[d, "f"] & U_g \cap U_{gh} \arrow[l, "\alpha_{g^{-1}}"'] \arrow[dl, dashed, "f\circ\alpha_{g^{-1}}"] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

En cuyo caso

$$\theta_g(f)_{(x)} = \begin{cases} f(\alpha_{g^{-1}}(x)), \ x \in U_g \cap U_{gh}, \\ 0, \ \text{caso contrario.} \end{cases}$$

$\therefore\ \theta_g(f) \in C_0(U_g \cap U_{gh}) = D_g \cap D_{gh}$ y así $\theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) \subseteq D_g \cap D_{gh}$.

(iii) Sea $f \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}} = C_0(U_{h^{-1}} \cap U_{(gh)^{-1}})$, de (iii) en la Definición 2.1 tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U_{h^{-1}} \cap U_{(gh)^{-1}} \arrow[r, "\alpha_g\circ\alpha_h=\alpha_{gh}"] \arrow[d, "f"] & U_g \cap U_{gh} \arrow[dl, dashed, "f\circ\alpha_{(gh)^{-1}}"] \\ \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

En $U_g \cap U_{gh}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \theta_g(\theta_h(f)) &= f \circ \alpha_{h^{-1}} \circ \alpha_{g^{-1}} \\ &= f \circ (\alpha_g \circ \alpha_h)^{-1} \\ &= f \circ \alpha_{gh}^{-1} \\ &= f \circ \alpha_{(gh)^{-1}} \\ &= \theta_{gh}(f), \end{aligned}$$

por lo tanto $\theta_g \circ \theta_h \subseteq \theta_{gh}$ y así tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.8. *Sea $(X, G, \{U_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ un sistema dinámico parcial LCH. Entonces*

$$(C_0(X), G, \{C_0(U_g)\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$$

define un C^*-sistema dinámico parcial.

2.3. Producto Cruzado

En esta sección nos ocuparemos básicamente de la construcción producto cruzado, en particular de su asociatividad.

Definición 2.9. *Sea $(A, G, \{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ un C^*-sistema dinámico parcial, definimos el producto cruzado algebraico $A \rtimes_{\theta}^{alg} G$ como la familia de combinaciones lineales finitas*

$$\sum_{g\in G} a_g \delta_g, \ con\ a_g \in D_g.$$

Donde cada δ_g denota un símbolo que separa los ideales, es decir,

$$A \rtimes_{\theta}^{alg} G = \bigoplus_{g\in G} D_g \delta_g.$$

Definimos ahí la suma y multiplicación por un escalar componente a componente, además defini-

mos el producto en $A \rtimes_{\theta}^{alg} G$ como sigue:

$$(a\delta_g)(b\delta_h) = \theta_g(\theta_{g^{-1}}(a)b)\delta_{gh}.$$

Tal producto está bien definido pues $\theta_{g^{-1}}(a)b \in D_{g^{-1}} \cap D_h$ y de la Definición 2.1-(ii), tenemos que $\theta_g(\theta_{g^{-1}}(a)b) \in \theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh} \subseteq D_{gh}$.

Además la aplicación definida en (Exel, 2017, Proposición 8.9)

$$(a\delta_g)^* = \theta_{g^{-1}}(a^*)\delta_{g^{-1}},$$

extendida por linealidad, define una función en $A \rtimes_{\theta}^{alg} G$ que verifica (i)-(iii) de la Definición 1.4.

Supongamos que el producto cruzado es **asociativo**, es decir, dados $a \in D_g,\ b \in D_h$ y $c \in D_k$ con $g,h,k \in G$

$$(a\delta_g\, b\delta_h)c\delta_k = a\delta_g(b\delta_h\, c\delta_k). \qquad (1)$$

Si nos fijamos en el lado izquierdo de (1), tenemos que

$$\begin{aligned}(a\delta_g\, b\delta_h)c\delta_k &= \theta_g(\theta_{g^{-1}}(a)b)\delta_{gh}\, c\delta_k \\ &= \theta_{gh}(\theta_{(gh)^{-1}}[\theta_g(\theta_{g^{-1}}(a)b)]c)\delta_{ghk} = (\star).\end{aligned}$$

$\theta_g(\theta_{g^{-1}}(a)b) \in \theta_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$ que por la Definición 2.1 es donde $\theta_{(gh)^{-1}}\theta_{h^{-1}g^{-1}}$ y $\theta_{h^{-1}} \circ \theta_{g^{-1}}$ coinciden, por lo tanto tenemos que

$$
\begin{aligned}
(\star) \quad &= \theta_{gh}[\theta_{(gh)^{-1}}(\theta_g(\theta_{g^{-1}}(a)b))c]\delta_{ghk} \\
&= \theta_{gh}[\theta_{h^{-1}} \circ \theta_{g^{-1}}(\theta_g(\theta_{g^{-1}}(a)b))c]\delta_{ghk} \\
&= \theta_{gh}[\theta_{h^{-1}}(\theta_{g^{-1}}(a)b)c]\delta_{ghk} = (\star\star).
\end{aligned}
$$

Ya que $\theta_{h^{-1}}(\theta_{g^{-1}}(a)b) \in \theta_{h^{-1}}(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_{h^{-1}g^{-1}} \cap D_h^{-1}$ que es donde θ_{gh} y $\theta_g \circ \theta_h$ coinciden.

Por lo tanto tenemos que

$$
\begin{aligned}
(\star\star) \quad &= \theta_{gh}(\theta_{h^{-1}}(\theta_{g^{-1}}(a)b)c)\delta_{ghk} \\
&= \theta_g[\theta_h(\theta_{h^{-1}}(\theta_{g^{-1}}(a)b)c))]\delta_{ghk}
\end{aligned}
$$

Ahora, si nos fijamos en el lado derecho de (1), tenemos que

$$
\begin{aligned}
a\delta_g\,(b\delta_h\,c\delta_k) \quad &= a\delta_g\,(\theta_h(\theta_{h^{-1}}(b)c))\delta_{hk} \\
&= \theta_g[\theta_{g^{-1}}(a)\theta_h(\theta_{h^{-1}}(b)c)]\delta_{ghk}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la ecuación (1) equivale a

$$
\theta_g[\theta_{g^{-1}}(a)\theta_h(\theta_{h^{-1}}(b)c)] = \theta_g[\theta_h(\theta_{h^{-1}}(\theta_{g^{-1}}(a)b)c)],
$$

como θ_g es isomorfismo, tenemos que

$$
\theta_{g^{-1}}(a)\theta_h(\theta_{h^{-1}}(b)c) = \theta_h(\theta_{h^{-1}}(\theta_{g^{-1}}(a)b)c),
$$

Podemos reemplazar $\theta_{g^{-1}}(a)$ por a, obteniendo así el siguiente lema.

Lema 2.10. *(Exel, 2017, Lema 8.5.) Si para cada $a,c \in A$ y $b \in D_h$ tenemos que*

$$a\theta_h(\theta_{h^{-1}}(b)c) = \theta_h(\theta_{h^{-1}}(ab)c).$$

Entonces, el producto en $A \rtimes_{\theta}^{alg} G$ es asociativo

El producto cruzado asociado a un C^*-sistema dinámico parcial apareció mucho antes que en el contexto de las álgebras en general debido a que en C^*-álgebras el producto cruzado resultaba ser siempre asociativo, la prueba de ello requería el uso de identidades aproximadas[2]. La asociatividad de tal producto en el contexto puramente algebraico fue tratada por primera vez por M. Dokuchaev y R. Exel en Dokuchaev and Exel (2005). En lo que sigue mostraremos sin hacer uso de identidades aproximadas que el producto cruzado asociado a un C^*-sistema dinámico parcial es asociativo Dokuchaev and Exel (2005).

Dado un C^*-sistema dinámico parcial $(A, G, \{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$, $h \in G$ y $c \in A$, sea $(L_c, R_c) \in M(A)$ y defina

$$L^2 = \theta_h L_c \theta_{h^{-1}} \text{ y } R^2 = \theta_h R_c \theta_{h^{-1}}.$$

No es difícil demostrar que $(L^2, R^2) \in B(D_h) \times B(D_h)$, veamos que (L^2, R^2) define un multiplicador

---

[2] Una identidad aproximada a izquierda en un álgebra de Banach A es una red $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $\lim\limits_{\lambda} u_\lambda a = a$ (respectivamente $\lim\limits_{\lambda} a u_\lambda = a$ para identidad aproximada a derecha)

en D_h.

Dados $x, y \in D_h$, veamos (i) de la Definición 1.8 pues (ii) es análogo.

$$\begin{aligned}
L^2(xy) &= \theta_h[L_c(\theta_{h^{-1}}(xy))] \\
&= \theta_h[c\,\theta_{h^{-1}}(xy)] \\
&= \theta_h[c\,\theta_{h^{-1}}(x)\theta_{h^{-1}}(y)] \\
&= \theta_h[c\,\theta_{h^{-1}}(x)]\theta_h[\theta_{h^{-1}}(y)] \ \ \text{(pues } c\,\theta_{h^{-1}}(x), \theta_{h^{-1}}(y) \in D_{h^{-1}}) \\
&= \theta_h(c\,\theta_{h^{-1}}(x))y \\
&= \theta_h[L_c(\theta_{h^{-1}}(x))]y \\
&= L^2(x)y.
\end{aligned}$$

Veamos ahora (iii) de la Definición 1.8.

$$\begin{aligned}
xL^2(y) &= x\theta_h[L_c(\theta_{h^{-1}}(y))] \\
&= x\theta_h[c\theta_{h^{-1}}(y)] \\
&= \theta_h(\theta_{h^{-1}}(x))\theta_h(c\theta_{h^{-1}}(y)) \\
&= \theta_h[\theta_{h^{-1}}(x)c\theta_{h^{-1}}(y)] \\
&= \theta_h(\theta_{h^{-1}}(x)c)\theta_h(\theta_{h^{-1}}(y)) \\
&= \theta_h(R_c(\theta_{h^{-1}}(x)))y \\
&= R^2(x)y.
\end{aligned}$$

Además si $b \in D_h$, tenemos que

$$L^1R^2(b) = a(\theta_h(\theta_{h^{-1}}(b)c)) \ \text{ y } \ R^2L^1(b) = \theta_h(\theta_h(\theta_{h^{-1}}(ab)c)),$$

Puesto que cada ideal D_g es cerrado[3] en A, por el Teorema 1.12 tenemos que

$$R^2L^1 = L^1R^2,$$

para cada $(L^1,R^1),(L^2,R^2) \in M(D_g)\,(g \in G)$, y por el Lema 2.10 se concluye la asociatividad del producto cruzado algebraico.

Dado un C^*-sistema dinámico parcial $(A,G,\{D_g\}_{g\in G},\{\theta_g\}_{g\in G})$, definiremos una norma en el producto cruzado algebraico $A \rtimes_\theta^{alg} G$ que verifique las condiciones (i)-(v) de la Definición 1.4 de tal manera que su *completamiento* resulte ser una C^*-álgebra.

Teorema 2.11. *Toda C^*-seminorma en una C^*-álgebra es acotada por la norma de la C^*-álgebra.*

Demostración. Consideremos el encaje canónico $i : A/N \longrightarrow B$, tenemos que

---

[3] Todo ideal cerrado I en una C^*-álgebra A es automáticamente cerrado bajo la involución, por lo tanto I es C^*-subálgebra de A.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, dashed, "i\circ\pi"'] & A/N \arrow[d, "i"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$i \circ \pi$ es un $*$-homomorfismo, además si suponemos que A es una C^*-álgebra, por la Observación 1.2 tenemos que $\|(i \circ \pi)(a)\|_B \leq \|a\|_A$ $(a \in A)$, o bien, $\rho(a) \leq \|a\|$. ∎

Proposición 2.12. *(Exel, 2017, Proposición 11.9.) Sea ρ una C^*-seminorma en $A \rtimes_\theta^{alg} G$. Entonces, para cada $a = \sum\limits_{g \in G} a_g \delta_g$ en $A \rtimes_\theta^{alg} G$, tenemos que*

$$\rho(a) \leq \sum_{g \in G} \|a_g\|.$$

Demostración. De lo anterior, e identificando A con $A\delta_e$ como C^*-álgebras tenemos que

$$\rho(a\delta_e) \leq \|a\|, \ (a \in A)$$

Por otro lado

$$\rho(a_g\delta_g)^2 = \rho((a_g\delta_g)(a_g\delta_g)^*) = \rho(a_g a_g^* \delta_e) \leq \|a_g a_g^*\| = \|a_g\|^2,$$

el resultado se sigue de la desigualdad triangular. ∎

Se define una seminorma en $A \rtimes_\theta^{alg} G$ por

$$\|a\|_{max} = \sup\{\rho(a) : \rho \text{ es } C^*\text{-seminorma en } A \rtimes_\theta^{alg} G\}$$

Tal supremo existe por la Proposición 2.12, además se puede demostrar que $\|\cdot\|_{max}$ es de hecho una C^*-norma en $A \rtimes_\theta^{alg} G$ (Exel, 2017, (11.10)).

Definición 2.13. *El producto cruzado asociado a un C^*-sistema dinámico parcial $(A, G, \{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ es la C^*-álgebra $A \rtimes_\theta G$ obtenida al completar $A \rtimes_\theta^{alg} G$ relativa a la C^*-norma $\|\cdot\|_{max}$.*

Sea $e : A \rtimes_\theta^{alg} G \longrightarrow A \rtimes_\theta G$ el encaje canónico obtenido por el completamiento, y sea $i : A \longrightarrow A \rtimes_\theta^{alg} G$, $a \longmapsto a\delta_e$.

$$\begin{tikzcd} A \rtimes_\theta^{alg} G \arrow[r, "e"] & A \rtimes_\theta G \\ A \arrow[u, "i"] \arrow[ur, dashed, "\iota = e\circ i"'] & \end{tikzcd}$$

Los mapas e, i son $*$-homomorfismos inyectivos, entonces $A \xrightarrow{\iota} A \rtimes_\theta G$ es un $*$-homomorfismo inyectivo, por lo tanto es isometría.

Al igual que el completamiento en espacios métricos, existe una propiedad universal en $A \rtimes_\theta G$.

Proposición 2.14. *Sea B una C^*-álgebra y $\varphi_0 : A \rtimes_\theta^{alg} G \longrightarrow B$ un $*$-homomorfismo. Entonces existe un único $*$-homomorfismo $\varphi : A \rtimes_\theta G \longrightarrow B$, tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \rtimes_\theta^{alg} G \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "e"'] & B \\ A \rtimes_\theta G \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Note que $\rho(x) = \|\varphi_0(x)\|$ define una C^*-seminorma en $A \rtimes_\theta^{alg} G$, entonces $\|\varphi_0(a)\| \leq \|a\|_{max}$, por lo tanto φ es continua, luego se puede extender a su completamiento. ∎

Observación. $(A \rtimes_\theta G, e)$ es el único par que verifica la proposición anterior, es decir, si consideramos el par (C, f), donde C es una C^*-álgebra y f es un $*$-homomorfismo de $A \rtimes_\theta^{alg} G$ en C tal que para cada C^*-álgebra D y para cada $*$-homomorfismo $\varphi_0 : A \rtimes_\theta^{alg} G \longrightarrow D$ existe un único $\varphi : C \longrightarrow D$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \rtimes_\theta^{alg} G \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "f"'] & D \\ C \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Luego $A \rtimes_\theta G$ y C son isomorfos como C^*-álgebras. En efecto, note que existen únicos $*$-homomorfismos $\varphi : A \rtimes_\theta G \longrightarrow C$ y $\psi : C \longrightarrow A \rtimes_\theta G$ tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} A \rtimes_\theta^{alg} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & C \\ A \rtimes_\theta G \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \rtimes_\theta^{alg} G \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & A \rtimes_\theta G \\ C \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $\varphi \circ e = f$ y $\psi \circ f = e$. Note además que los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} A \rtimes_\theta^{alg} G \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e"'] & A \rtimes_\theta G \\ A \rtimes_\theta G \arrow[ur, dashed, "Id_{A \rtimes_\theta G}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \rtimes_\theta^{alg} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & C \\ C \arrow[ur, dashed, "Id_C"'] & \end{tikzcd}$$

conmutan. Por la unicidad de tales funciones y el hecho de que $(\psi \circ \varphi) \circ e = e$ y $(\varphi \circ \psi) \circ f = f$, se concluye que $\psi \circ \varphi = Id_{A \rtimes_\theta G}$ y $\varphi \circ \psi = Id_C$.

En conclusión, dado $(X, G, \{U_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ un sistema dinámico parcial LCH, existe una C^*-álgebra asociada $C_0(X) \rtimes_\theta G$ posiblemente no conmutativa.

$$\begin{tikzcd}
(X, G, \{U_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G}) \arrow[r, rightsquigarrow, "C_0"] & (C_0(X), G, \{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G}) \arrow[d, rightsquigarrow, "__\rtimes G"] \\
& C_0(X) \rtimes_\theta G
\end{tikzcd}$$

En este sentido se podría pensar en un sistema dinámico parcial LCH como un caso particular de una *topología no conmutativa*.

Ejemplo 2.15. Considere la acción global de $\mathbb{D}_n$ en S^1 del Ejemplo 2.4, de la construcción anterior

$$D_g = C(S^1) \text{ y } \theta_g(f) = f \circ \alpha_{g^{-1}}$$

para todo $f \in C(S^1)$ y todo $g \in \mathbb{D}_n$. Tenemos así que $(C(S^1), \mathbb{D}_n, \{\theta_g\}_{g\in\mathbb{D}_n})$ es un C^*-sistema dinámico. Además, de la Definición 2.13 tenemos la C^*-álgebra $C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{D}_n$.

Note que la función $g \longmapsto 1\,\delta_g$ de $\mathbb{D}_n$ en $C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{D}_n$ es inyectiva, por lo tanto $C(S^1) \rtimes_\theta \mathbb{D}_n$ es una C^*-álgebra *no conmutativa*.

2.4. C^*-Álgebras Graduadas

La construcción del producto cruzado asociado a un sistema dinámico parcial LCH puede ser pensada como una "encriptación" de una C^*-álgebra conmutativa por un grupo. Naturalmente podemos preguntarnos bajo que condiciones una C^*-álgebra proviene de un producto cruzado de una C^*-álgebra conmutativa por un grupo, para ello introduciremos el concepto de C^*-álgebra graduada.

Definición 2.16. *(Exel, 1998, Definición 5.1.) Sea G un grupo. Una C^*-álgebra B es llamada G-graduada, si B es equipada con una familia linealmente independiente de subespacios lineales cerrados $\{B_g\}_{g\in G}$ también llamados subespacios graduados, tales que para cada $g,h \in G$, se verifica*

(i) $B_g B_h \subseteq B_{gh}$,

(ii) $B_g^* = B_{g^{-1}}$,

(iii) $\bigoplus\limits_{g\in G} B_g$ *es denso en* B.

Ejemplo 2.17. Sea $(A, G, \{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ un C^*-sistema dinámico parcial. Note que $\{D_g\delta_g\}_{g\in G}$ es una familia de subespacios cerrados linealmente independiente de $A \rtimes_\theta G$ y además

$$A \rtimes_\theta G = \overline{\bigoplus_{g\in G} D_g\delta_g}$$

- $(D_g\delta_g)(D_h\delta_h) = \theta_g(\theta_{g^{-1}}(D_g)D_h)\delta_{gh} \subseteq D_{gh}\delta_{gh}$,
- $(D_g\delta_g)^* = \theta_{g^{-1}}(D_g^*)\delta_{g^{-1}} = D_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}$.

Por lo tanto $A \rtimes_\theta G$ es una C^*-álgebra G-graduada.

Ejemplo 2.18. (Exel, 2017, Página 47) Sean $e_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$ cuya componente i, j-ésima es 1 y en las demás componentes es 0. $M_n(\mathbb{C})$ es una C^*-álgebra $\mathbb{Z}$ - graduada por

$$B_k = span\{e_{ij} : i - j = k\},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 2.19. En $L^1(\mathbb{Z})$ sea w la función característica en $\{1\}$, $w \in L^1(\mathbb{Z})$ y se puede demostrar que

$$w^n = \underbrace{w \cdot w \cdot \ldots \cdot w}_{n \text{ veces}}$$

con "$\cdot$" como el producto de convolución, es la función característica en $\{n\}$. Si definimos $B_n = gen\{w^n\}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, los B_n's son de dimensión finita y por lo tanto son subespacios lineales cerrados, además $\{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es linealmente independiente.
Note que para cada $f \in L^1(\mathbb{Z})$ se verifica

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)w^n.$$

tenemos así que $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} B_n$ es denso en $L^1(\mathbb{Z})$. Por último w verifica para cada $m, n \in \mathbb{Z}$

$$w^n \cdot w^m = w^{n+m} \text{ y } (w^n)^* = w^{-n}.$$

por lo tanto

- $B_m \cdot B_n = B_{m+n}$,
- $(B_n)^* = B_{-n}$.

Así $L^1(\mathbb{Z})$ es una $*$-álgebra de Banach $\mathbb{Z}$-graduada. Note que $B_m \cdot B_n = B_{m+n}$ suponiendo que entendemos a $B_m \cdot B_n$ como el menor subespacio vectorial cerrado que contiene a $B_m \cdot B_n$. En este caso decimos que $L^1(\mathbb{Z})$ es fuertemente graduado.

Definición 2.20. *Decimos que un $*$-homomorfismo $\psi : A \longrightarrow B$ entre C^*-álgebras G-graduas es G-graduado si $\psi(A_g) \subseteq B_g$, para cada $g \in G$.*

Definición 2.21. *Dado G un grupo y B una C^*-álgebra con unidad, decimos que la función $u : G \longrightarrow B$ es una $*$-representación parcial si verifica*

(i) $u_e = 1,$

(ii) $u_g u_h u_{h^{-1}} = u_{gh} u_{h^{-1}},$

(iii) $u_g^* = u_{g^{-1}},$

Ejemplo 2.22. Sea

$$v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in B_1 \subseteq M_n(\mathbb{C}),$$

y sea $u : \mathbb{Z} \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ dada por

$$u_n = \begin{cases} v^n & \text{si } n \geq 0, \\ (v^*)^{|n|}, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

u es una $*$-representación parcial de $\mathbb{Z}$ en $M_n(\mathbb{C})$.

Note que de (ii) y (iii) en la Definición 2.21 se verifica además que

$$u_{g^{-1}} u_g u_h = u_{g^{-1}} u_{gh}.$$

Intuitivamente la igualdad anterior puede ser interpretada como que posible reemplazar $u_g u_h$ por u_{gh} siempre que $u_{g^{-1}}$ esté "observando". Tenemos además que $u_g u_{g^{-1}} u_g = u_g$, para cada $g \in G$, esta propiedad la verifican ciertos operadores entre espacios de Hilbert también llamados isometrías parciales. En virtud de la construcción GNS (Murphy., 1996, Teorema de Gelfand-Naimark) las $*$-representaciones parciales en C^*-álgebras suelen ser definidas a valores en la C^*-álgebra de operadores de algún espacio de Hilbert como es el caso de Exel (1998) y Exel and Vieira (2010).

Observación. Sea $u : G \longrightarrow B$ una $*$-representación parcial. Para cada $g \in G$ definimos $e_g = u_g u_{g^{-1}}$, no es difícil demostrar que los e_g's verifican

1) e_g es idempotente y auto-adjunto,

2) $u_g e_h = e_{gh} u_g$,

3) $e_g e_h = e_h e_g$,

4) $u_g u_h = e_g u_{gh}$.

Sea A la C^*-subálgebra más pequeña de B que contiene a los e_g's, del ítem 3) A es una C^*-álgebra conmutativa. Además si para cada $g \in G$ definimos D_g como el ideal cerrado más pequeño de A que contiene a e_g y $\theta_g : D_{g^{-1}} \longrightarrow D_g$ donde $a \longmapsto u_g a u_{g^{-1}}$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.23. *En las condiciones de la Observación 2.4, $(A, G, \{D_g\}_{g \in G}, \{\theta_g\}_{g \in G})$ define un C^*-sistema dinámico parcial.*

Demostración. Para cada $g \in G$, no es difícil ver que θ_g es lineal. Además, cada $e_g = 1_{D_g}$ pues $e_g = 1_{Ae_g}$ y $D_g = \overline{Ae_g}$. Por lo tanto, para cada $a, b \in D_{g^{-1}}$ tenemos

$$\begin{aligned} \theta_g(a)\theta_g(b) &= u_g a u_{g^{-1}} u_g b u_{g^{-1}} \\ &= u_g a e_{g^{-1}} b u_{g^{-1}} \\ &= u_g a b u_{g^{-1}} \\ &= \theta_g(ab), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \theta_g(a^*) &= u_g a^* u_{g^{-1}} \\ &= (u^*_{g^{-1}} a u^*_g)^* \\ &= (u_g a u_{g^{-1}})^* \\ &= \theta_g(a)^*. \end{aligned}$$

Por lo tanto cada θ_g es un $*$-homomorfismo.

De la Definición 2.1 basta verificar que θ_{gh} es una extensión de $\theta_g \circ \theta_h$.

Sea $a \in D_{g^{-1}} \cap D_h$,

$$\begin{aligned} \theta_g(a) &= u_g a u_{g^{-1}} \\ &= u_g e_h a u_{g^{-1}} \text{ [Aplique 2) de la Observación 2.4]} \\ &= e_{gh} u_g a u_{g^{-1}} \in D_{gh}. \end{aligned}$$

Sea a un elemento del dominio de $\theta_g \circ \theta_h$ el cual es $\theta_h^{-1}(D_{g^{-1}} \cap D_h)$, esto dice que $a = ae_{h^{-1}}$ y además

$$\begin{aligned} u_h a u_{h^{-1}} &= \theta_h(a) \\ &= \theta_h(a) e_{g^{-1}} \\ &= u_h a u_{h^{-1}} e_{g^{-1}} \\ &= u_h a e_{(gh^{-1})} u_{h^{-1}} \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} a &= e_{h^{-1}} a e_{h^{-1}} \\ &= u_{h^{-1}} u_h a u_{h^{-1}} u_h \\ &= u_{h^{-1}} u_h a e_{(gh)^{-1}} u_{h^{-1}} u_h \\ &= e_{h^{-1}} a e_{(gh)^{-1}} e_{h^{-1}} \in D_{(gh)^{-1}} \cap D_{h^{-1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto a está en el dominio de θ_{gh}. Además

$$\begin{aligned}\theta_g(\theta_h(a)) &= u_g u_h a u_{h^{-1}} u_{g^{-1}} \\ &= u_g u_h (e_{h^{-1}} a e_{h^{-1}}) u_{h^{-1}} u_{g^{-1}} (\star)\end{aligned}$$

Como $u_g u_h e_{h^{-1}} = u_{gh} e_{h^{-1}}$ y $e_{h^{-1}} u_{h^{-1}} u_{g^{-1}} = e_{h^{-1}} u_{(gh)^{-1}}$, tenemos que

$$\begin{aligned}(\star) &= u_{gh} e_{h^{-1}} a e_{h^{-1}} u_{(gh)^{-1}} \\ &= u_{gh} a u_{(gh)^{-1}} \\ &= \theta_{gh}(a).\end{aligned}$$

Así concluimos que $\theta_g \circ \theta_h \subseteq \theta_{gh}$. ■

Una manera estándar de producir $*$-homomorfismos del producto cruzado en C^*-álgebras es vía representaciones covariantes.

Definición 2.24. *Una representación covariante de un C^*-sistema dinámico parcial*

$$(A, G, \{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$$

en una C^*-álgebra B es un par (π, u) donde $\pi : A \longrightarrow B$ es un $*$-homomorfismo y u es una repre-

sentación parcial de G en B que verifica

$$u_g\pi(a)u_{g^{-1}} = \pi(\theta_g(a)),\ \forall g \in G,\ \forall a \in D_{g^{-1}}.$$

Como consecuencia de la definición tenemos que

- $\pi(a) = e_g\pi(a) = \pi(a)e_g$, *para cada* $a \in D_g$,
- $u_g\pi(a) = \pi(\theta_g(a))u_g$, *para cada* $a \in D_{g^{-1}}$.

Ejemplo 2.25. Sea $u : G \longrightarrow B$ una $*$-representación parcial y considere la construcción de la acción parcial a partir de u del Teorema 2.23. Sea ι la inclusión de A en B, por definición de la acción $u_g\iota(a)u_{g^{-1}} = \theta_g(a) = \iota(\theta_g(a))$, $\forall a \in A$, por lo tanto (ι, u) define una representación covariante.

Proposición 2.26. *(Exel, 2017, Proposición 13.1.) Sea* (π, u) *una representación covariante de un* C^**-sistema dinámico parcial* $(A, G, \{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ *en una* C^**-álgebra B. Entonces existe un único* $*$*-homomorfismo*

$$\pi \times u : A \rtimes_\theta G \longrightarrow B$$

tal que $(\pi \times u)(a\delta_g) = \pi(a)u_g$, *para cada* $g \in G$ *y cada* $a \in D_g$.

Demostración. La función $\pi \times^{alg} u : A \rtimes_\theta^{alg} G \longrightarrow B$, $a\delta_g \longmapsto \pi(a)u_g$ define un $*$-homomorfismo de una $*$-álgebra en una C^*-álgebra.

En efecto, no es dificil ver que $\pi \times^{alg} u$ es lineal, en cuanto al producto y la involución basta verificar para los generadores. Sean $a\delta_g$ y $b\delta_h$ en $A \rtimes_{\theta}^{alg} G$, tenemos

$$\begin{aligned}
(\pi \times^{alg} u)(a\delta_g)\,(\pi \times^{alg} u)(b\delta_h) &= \pi(a)u_g\pi(b)u_h \\
&= u_g\pi(\theta_{g^{-1}}(a))\pi(b)u_h \\
&= u_g\pi(\theta_{g^{-1}}(a)b)u_h \\
&= \pi(\theta_g[\theta_{g^{-1}}(a)b])u_g u_h \\
&= \pi(\theta_g[\theta_{g^{-1}}(a)b])e_g u_{gh} \\
&= \pi(\theta_g[\theta_{g^{-1}}(a)b])u_{gh} \\
&= (\pi \times^{alg} u)(a\delta_g\, b\delta_h).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\pi \times^{alg} u)(a\delta_g))^* &= (\pi(a)u_g)^* \\
&= u_g^*\pi(a)^* \\
&= u_{g^{-1}}\pi(a^*) \\
&= \pi(\theta_{g^{-1}}(a^*))u_{g^{-1}} \\
&= (\pi \times^{alg} u)(\theta_{g^{-1}}(a^*)\delta_{g^{-1}}) \\
&= (\pi \times^{alg} u)((a\delta_g)^*).
\end{aligned}$$

Del Ejemplo D.4, $\rho(x) = \|(\pi \times^{alg} u)(x)\|_B$ define una C^*-seminorma en $A \rtimes_{\theta}^{alg} G$, que es acotada por $\|\cdot\|_B$ (es decir $\pi \times^{alg} u$ es continua). Así, de la Proposición 2.14 se obtiene el resultado. ■

Observación. Volviendo a la representación covariante (ι, u) del Ejemplo 2.25, supongamos que $B = C^*(u_g : g \in G)$, es decir, supongamos que la C^*-subálgebra mas pequeña de B que contiene a los u_g's es precisamente B.

$\imath \times u : A \rtimes_\theta G \longrightarrow B$ es un $*$-homomorfismo, como $(\imath \times u)_{(A\rtimes_\theta G)}$ es C^*-álgebra y $u_g = (\imath \times u)(e_g\delta_g)$, se sigue que $u_g \in (\imath \times u)_{(A\rtimes_\theta G)}$ para cada $g \in G$, por lo tanto $\imath \times u$ es sobre.

Vimos que en virtud de la dualidad de Gelfand podemos construir C^*-álgebras no necesariamente conmutativas a partir de sistemas dinámicos parciales LCH. Recíprocamente nos preguntamos ¿bajo que condiciones una C^*-álgebra proviene de un C^*-sistema dinámico parcial $(A, G, \{D_g\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ donde A es una C^*-álgebra conmutativa?. El siguiente resultado da una respuesta parcial a tal cuestionamiento en el contexto de las C^*-álgebras graduadas.

Teorema 2.27. *En las condiciones de la Observación 2.4, si suponemos que*

$$B = \overline{\bigoplus_{g\in G} B_g}$$

es una C^*-álgebra graduada tal que $u_g \in B_g$ para cada $g \in G$ y $A \rtimes_\theta^{alg} G$ es abierto en $A \rtimes_\theta G$. Entonces $\imath \times u$ es un $*$-isomorfismo G-graduado.

Demostración. Note que $(\imath \times u)(D_g\delta_g) = D_g u_g \subseteq A u_g \subseteq B_e B_g \subseteq B_g$, así $\imath \times u$ es G-graduado. Por otro lado, como $\imath \times u$ es lineal, continua y sobreyectiva, del Teorema de la aplicación abierta $\imath \times u$ es abierta, por hipótesis $A \rtimes_\theta^{alg} G$ es abierto en $A \rtimes_\theta G$, por lo tanto $\imath \times^{alg} u := (\imath \times u)|_{A\rtimes_\theta^{alg} G}$: $A \rtimes_\theta^{alg} G \longrightarrow B$ es abierta, veamos que $\imath \times^{alg} u$ es inyectiva.

Sea $a \in ker(\iota \times^{alg} u)$, tenemos que a es una suma finita

$$a = \sum_{g \in G} a_g \delta_g,$$

por lo tanto

$$0 = (\iota \times^{alg} u)(a) = \sum_{g \in G} a_g u_g. \ (\star)$$

Por otro lado, note que $a_g u_g \in AB_g \subseteq B_e B_g \subseteq B_g$. De $(\star)$ y que B es una suma directa, tenemos que $a_g u_g = 0$ luego $a_g = a_g e_g = 0$ $(e_g \in B_{g^{-1}} B_g \subseteq B_e)$. Así $a = 0$ y $\iota \times^{alg} u$ es $*$-isomorfismo, por lo tanto su extensión $\iota \times u$ también lo és. ■

Cabe resaltar que el Teorema 2.27 no ha sido encontrado en la literatura concerniente a la Teoría de acciones parciales en C^*-álgebras. Las ideas expuestas en la prueba del tal teorema provienen de (Exel, 2017, Teorema 10.3.), en el cual se presenta una versión algebraica del anterior resultado.

3. C*-ÁLGEBRAS GRADUADAS

En este capítulo mostraremos una posible forma de extender el mecanismo de Gelfand a una categoría mas general, presentaremos además el semigrupo de Éxel y su utilidad en el estudio de las C^*-álgebras graduadas. Por último mostraré algunas preguntas que personalmente fueron de gran relevancia en el estudio de esta temática.

3.1. Morfismos

En lo que sigue se mostrará que la construcción del producto cruzado asociado a un sistema dinámico parcial LCH es un funtor $\_ \rtimes G$ que depende del grupo dado G, su dominio de objetos serán los sistemas dinámicos parciales LCH, y rango de objetos las C^*-álgebras G-graduadas. Los morfismos adecuados entre sistemas dinámicos parciales en conjuntos son las funciones G-equivariantes.

Sean $(X^i, G, \{U_g^i\}_{g\in G}, \{\alpha_g^i\}_{g\in G})$ sistemas dinámicos parciales con $i \in \{1,2\}$. Decimos que la función $f : X^1 \longrightarrow X^2$ es G-equivariante si para todo g en G se verifica:

(i) $f(U_g^1) \subseteq U_g^2$,

(ii) $f(\alpha_g^1(x)) = \alpha_g^2(f(x))$, para cada $x \in U_{g^{-1}}^1$.

En caso que $f(U_g^1) = U_g^2$, para cada $g \in G$, diremos que f es G-invariante.

Proposición 3.1. *Sean $(X^i, G, \{U_g^i\}_{g\in G}, \{\alpha_g^i\}_{g\in G})$ sistemas dinámicos parciales LCH ($i \in \{1,2\}$), y $\varphi : X^1 \longrightarrow X^2$ una función continua G-invariante. Entonces $\varphi' : C_0(X^2) \longrightarrow C_0(X^1)$ define un $*$-homomorfismo G-equivariante.*

Demostración. En efecto,

(i) Note que

$$\varphi'(C_0(U_g^2)) = \{f \circ \varphi : f \in C_0(U_g^2)\},$$

además si $f \in C_0(U_g^2)$, tenemos que $f \circ \varphi \in C_0(X^1)$ y es tal que

$$\begin{aligned} \varphi(X^1 \setminus U_g^1) &= X_2 \setminus \varphi(U_g^1) \\ &= X^2 \setminus U_g^2. \end{aligned}$$

Dado $x \in X^1 \setminus U_g^1$, tenemos que $\varphi(x) \in X^2 \setminus U_g^2$, entonces $f(\varphi(x)) = 0$, por lo tanto $f \circ \varphi \in C_0(U_g^1)$ y $\varphi'(C_0(U_g^2)) \subseteq C_0(U_g^1)$.

(ii) Dados $f \in C_0(U_{g^{-1}}^2)$ y $x \in U_{g^{-1}}^2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi'(\theta_g^2(f))(x) &= \theta_g^2(f)(\varphi(x)) \\ &= f(\alpha_{g^{-1}}^2(\varphi(x))) \\ &= f(\varphi(\alpha_{g^{-1}}^1(x))) \\ &= \theta_g^1(f \circ \varphi)(x) \\ &= \theta_g^1(\varphi'(f))(x). \end{aligned}$$

Si $x \in X^2 \setminus U_{g^{-1}}^2$, entonces $\varphi(x) \in X^1 \setminus U_{g^{-1}}^1$ y $\varphi'(\theta_g^2(f))(x) = \theta_g^2(f)(\varphi(x)) = 0 = \theta_g^1(\varphi'(f))(x)$. Así, $\varphi'(\theta_g^2(f)) = \theta_{g^{-1}}^1(\varphi'(f))$ para cada $f \in C_0(U_{g^{-1}}^2)$. ■

La composición de funciones G-equivariantes es G-equivariante, por lo tanto definimos las categorías $G \curvearrowright$ **LCH** y $G \curvearrowright C^*$**-Álg** como sigue:

$G \curvearrowright$ **LCH**	**Objetos:**	Sistemas dinámicos parciales LCH,
	Morfismos:	Funciones continuas G-invariantes.
$G \curvearrowright C^*$**-Álg**	**Objetos:**	C^*-sistemas dinámicos parciales,
	Morfismos:	$*$-homomorfismos G-equivariantes.

Tabla 4
*Las categorías $G \curvearrowright$ **LCH** y $G \curvearrowright C^*$-**Álg***

Podemos definir el funtor contravariante

$$F_G : G \curvearrowright \textbf{LCH} \longrightarrow G \curvearrowright C^*\textbf{-Álg}$$

que asigna a cada sistema dinámico parcial LCH un C^*-sistema dinámico parcial como en el Teorema 2.8, y a cada morfismo entre sistemas dinámicos parciales LCH un morfismo entre C^*-sistemas dinámicos parciales como en la Proposición 3.1.

Proposición 3.2. *Sean $(A^i, G, \{D^i_g\}_{g\in G}, \{\theta^i_g\}_{g\in G})$ C^*-sistemas dinámicos parciales $i \in \{1,2\}$, y $\varphi : A^1 \longrightarrow A^2$ un $*$-homomorfismo G-equivariante. Entonces existe un único $*$-homomorfismo G-graduado $\widehat{\varphi} : A^1 \rtimes G \longrightarrow A^2 \rtimes G$ tal que $\widehat{\varphi}(a\delta_g) = \varphi(a)\delta_g$, para cada $a \in D^1_g$.*

Demostración. Defina $\varphi_0 : A^1 \rtimes^{alg} G \longrightarrow A^2 \rtimes G$ donde $\varphi_0(a\delta_g) = \varphi(a)\delta_g$ extendida por linealidad. φ_0 define un $*$-homomorfismo, así por la Proposición 2.14 existe un único $*$-homomorfismo $\widehat{\varphi} : A^1 \rtimes G \longrightarrow A^2 \rtimes G$ tal que $\widehat{\varphi}(a\delta_g) = \varphi(a)\delta_g$. Note que $\widehat{\varphi}(D^1_g\delta_g) = \varphi(D^1_g)\delta_g \subseteq D^2_g\delta_g$, por lo tanto φ es G-graduado. ■

Observación. Considere los $*$-homomorfismos G-equivariantes

$$A^1 \xrightarrow{\varphi} A^2 \xrightarrow{\psi} A^3,$$

tenemos que $\psi \circ \varphi$ es un $*$-homomorfismo G-equivariante, por lo anterior existe un único $*$-homomorfismo $\widehat{\psi \circ \varphi}$ que extiende a $\psi \circ \varphi$ en el sentido de la Proposición 3.2, como $\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}$ también extiende a $\psi \circ \varphi$, tenemos que $\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi} = \widehat{\psi \circ \varphi}$ y por lo tanto podemos definir el funtor covariante H_G suponiendo que G-**Graded** es la categoría de C^*-álgebras G-graduadas con $*$-homomorfismos G-graduados.

$$H_G : G \curvearrowright C^*\textbf{-Álg} \longrightarrow G\textbf{-Graded}$$

que asigna a cada C^*-sistema dinámico parcial un producto cruzado como en la Definición 2.13, y a cada morfismo entre C^*-sistemas dinámicos parciales un $*$-homomorfismo G-graduado como en la Proposición 3.2. Definimos el funtor contravariante

$$\_ \rtimes G := H_G \circ F_G : G \curvearrowright \textbf{LCH} \longrightarrow G\textbf{-Graded}$$

Podríamos pensar en identificar cada espacio X LCH, como un objeto de $G \curvearrowright$ **LCH**, es decir, como un sistema dinámico parcial LCH $(X, G, \{U_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ de la manera mas trivial

$$U_g = \begin{cases} \emptyset & g \neq e, \\ X & g = e. \end{cases} \quad \text{y} \quad \alpha_g = \begin{cases} \emptyset & g \neq e, \\ Id_X & g = e. \end{cases} \qquad (\star)$$

Tal identificación está bien establecida en objetos pues si consideramos el C^*-sistema dinámico parcial $(C_0(X), G, \{C_0(U_g)\}_{g\in G}, \{\theta_g\}_{g\in G})$ que proviene del sistema dinámico parcial LCH $(X, G, \{U_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$, tenemos que

$$C_0(U_g) = \begin{cases} \{0\} & g \neq e, \\ C_0(X) & g = e. \end{cases} \quad \text{y} \quad \theta_g = \begin{cases} 0 & g \neq e, \\ Id_{C_0(X)} & g = e. \end{cases}$$

Entonces, $C_0(X) \rtimes_\theta^{alg} G = \bigoplus_{g\in G} C_0(U_g)\delta_g = C_0(X)\delta_e \cong C_0(X)$, y por lo tanto

$$C_0(X) \rtimes_\theta G \cong C_0(X).$$

Podríamos pensar que el funtor $\_ \rtimes G$ extiende al funtor C_0, lastimosamente si $\varphi : X \longrightarrow Y$ es una función continua entre espacios LCH, entonces identificando a X y Y como en $(\star)$, no necesariamente $\varphi' : C_0(Y) \longrightarrow C_0(X)$ es G-equivariante. Para que φ' sea G-equivariante se requiere que φ sea sobreyectiva.

3.2. El Semigrupo de Exel

En esta sección presentaremos el semigrupo de Éxel $S(G)$ asociado a un grupo dado G, este semigrupo fue presentado por primera vez en 1998 por el Matemático Brasilero Ruy Éxel en Exel (1998). Mostraremos además que los subespacios cerrados que se pueden obtener como producto de espacios graduados de una C^*-álgebra G-graduada estan "*gobernados*" por $S(G)$, es decir, existe un homomorfismo del semigrupo $S(G)$ en el semigrupo de todos los subespacios vectoriales cerrados de la C^*-álgebra graduada cuya imagen es el conjunto de todos los posibles subespacios cerados que se pueden obtener como producto de subespacios graduados. Un *semigrupo inverso* es un semigrupo S tal que, para cada $r \in S$, existe un único $r^* \in S$ tales que $rr^*r = r$ y $r^*rr^* = r^*$.

Ejemplo 3.3. Sean X y Y conjuntos, una función parcial f de X en Y es una función $f : A \longrightarrow B$ donde $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Note que, si f y g son funciones parciales de X en Y y de Y en Z respectivamente, entonces la composición $g \circ f = gf$ es una función parcial, y es tal que

$$dom(gf) = f^{-1}(dom(g) \cap Im(f)) \text{ y } im(gf) = g(im(f) \cap dom(g))$$

Sea X un conjunto no vacío, una biyección parcial f de X es una función parcial $f : A \longrightarrow B$ biyectiva, donde A y B son subconjuntos de X. Así denotaremos por $\mathscr{I}(X)$ la familia de biyecciones parciales de X. En este caso $(\mathscr{I}(X), \circ)$ es un semigrupo inverso con $1_{\mathscr{I}(X)} = Id_X$ también llamado el monoide inverso simétrico de X.

Un resultado clásico y muy conocido es el Teorema de Cayley, el cual establece que todo grupo es isomorfo a algún subgrupo de un grupo de permutaciones. De manera análoga, el Teorema de representación de Wagner-Preston establece que cada semigrupo inverso S puede ser representado en $\mathscr{I}(S)$ (Lawson, 1998, Proposición3.2.3), siendo así el monoide inverso simétrico el “prototipo” de semigrupo inverso. En este sentido el semigrupo inverso simétrico es el ejemplo más importante en la teoría de semigrupos inversos.

Introduciremos ahora un semigrupo inverso que es de bastante utilidad en el estudio de las acciones parciales. Sea G un grupo, considere el conjunto de símbolos $L = \{[g] : g \in G\}$ y la relación en el conjunto de todas las palabras formadas por elementos de L.

(i) $[s^{-1}][s][t] = [s^{-1}][st]$,

(ii) $[s][t][t^{-1}] = [st][t^{-1}]$,

(iii) $[s][e] = [s]$,

(iv) $[e][s] = [s]$.

Sea L^* el conjunto de todas las palabras de L, definimos $S(G)$ como el subconjunto de L^* que verifica las relaciones anteriores. Con la concatenación de palabras veremos que $S(G)$ es un semigrupo inverso también llamado *el semigrupo de Exel*.

Intuitivamente, es posible reemplazar $[s][t]$ por $[st]$ siempre que $[s^{-1}]$ esté "observando". Por otro lado, (i) y (iii) implican además que $[t] = [e][t] = [tt^{-1}][t] = [t][t^{-1}][t], \ \forall t \in G$. Dado $g \in G$, definimos $r_g = [g][g^{-1}]$, entonces los r_g's verifican que para cada $g, h \in G$:

(i) $r_g^* = r_g = r_g^2$,

(ii) $[g]r_h = r_{gh}[g]$,

(iii) r_g y r_h conmutan.

Cada elemento de $S(G)$ puede ser representado de manera única como una combinación de elementos de esta forma (Exel, 1998, Proposicion 3.2.).

Proposición 3.4. *Cada elemento no nulo α en $S(G)$ admite una descomposición $\alpha = r_{g_1}...r_{g_n}[g]$, donde $g_1, ..., g_n, g \in G$ son distintos, no nulo y $r_{g_i} \neq r_{g_j}$, $i \neq j$. Además denotamos por $\partial(\alpha) = g$.*

Proposición 3.5. *(Exel, 1998, Proposicion 2.2.) Sea S un semigrupo y G un grupo. Si $f : G \longrightarrow S$ es tal que para cada $g,h \in G$ se verifica que*

i) $f(g^{-1})f(g)f(h) = f(g^{-1})f(gh)$,

ii) $f(g)f(h)f(h^{-1}) = f(gh)f(h^{-1})$,

iii) $f(g)f(e) = f(g)$.

Entonces existe un único homomorfismo

$$\widehat{f} : S(G) \longrightarrow S,\ \widehat{f}(\alpha) = f(g_1)f(g_1^{-1})...f(g_n)f(g_n^{-1})f(g),$$

para cada $\alpha = r_{g_1}...r_{g_n}[g]$ en $S(G)$.

Ejemplo 3.6. Dado $(X,G,\{U_g\}_{g\in G},\{\alpha_g\}_{g\in G})$ un sistema dinámico parcial LCH, note que podemos definir la función

$$\alpha : G \longrightarrow \mathscr{I}(X),\ g \longmapsto \alpha_g.$$

Tal función verifica $i) - iii)$ de la Proposición 3.5, por lo tanto existe un único homomorfismo $\widehat{\alpha} : S(G) \longrightarrow \mathscr{I}(X)$ tal que $\widehat{\alpha}([g]) = \alpha_g$.

Una herramienta útil en el estudio de las acciones parciales en C^*-álgebras es la teoría de C^*-módulos de Hilbert. Sea A una C^*-álgebra y M un $\mathbb{C}$-A bimódulo. Un *producto interno* sobre M a valores en la C^*-álgebra A es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : M \times M \longrightarrow A$ que verifica

(i) $\langle\xi,\lambda\eta+\eta'\rangle = \lambda\langle\xi,\eta\rangle+\langle\xi,\eta'\rangle$,

(ii) $\langle \xi, \xi \rangle \geq 0$[4],

(iii) $\langle \xi, \xi \rangle = 0 \Rightarrow \xi = 0$,

(iv) $\langle \xi, \eta a \rangle = \langle \xi, \eta \rangle a$,

(v) $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \eta, \xi \rangle^*$,

para cada $\xi, \eta, \eta' \in M$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $a \in A$.

M es llamado un A-módulo de Hilbert a derecha si la norma en M

$$\|\xi\|_2 = \|\langle \xi, \xi \rangle\|^{1/2},\ \xi \in M$$

es completa. Por ejemplo cada C^*-álgebra A puede ser vista como un A-módulo de Hilbert a derecha con producto interno $\langle a, b \rangle = a^* b,\ \forall a, b \in A$.

Lema 3.7. *(Exel, 2017, Lema 15.2.) Sea M un A-módulo de Hilbert a izquierda (resp. a derecha). Si $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una identidad aproximada[5] de A, entonces para cada $x \in M$, tenemos que $x = \lim\limits_{\lambda} u_\lambda x$ (resp. $x = \lim\limits_{\lambda} x u_\lambda$).*

Dada A una C^*-álgebra G-graduada por $\{A_g\}_{g \in G}$. Note que $A_g A_{g^{-1}} \subseteq A_e$ es un ideal de la

---

[4] Decimos que x es un elemento positivo de una C^*-álgebra A ($x \geq 0$), si x pertenece al conjunto $A^+ = \{a^* a : a \in A\}$ (Murphy., 1996, 2.2.5. Theorem).

[5] Toda C^*-álgebra admite una identidad aproximada (Takesaki, 1979, Corollary 7.5).

C^*-álgebra A_e, por lo tanto su clausura (también denotado por $A_gA_{g^{-1}}$) es una C^*-álgebra. Además es posible dotar a A_g de estructura de $A_gA_{g^{-1}}-$módulo de Hilbert a derecha, vía la acción

$$A_g \times A_gA_{g^{-1}} \longrightarrow A_g,\ (x,\varepsilon) \longmapsto x\varepsilon,$$

y producto interno $\langle x,y\rangle = x^*y \in A_gA_g^* = A_gA_{g^{-1}}$, para cada $x,y \in A_g$.

Por el Lema anterior $A_gA_{g^{-1}}A_g = A_g$ y así tenemos el siguiente resultado presentado por R. Exel en (Exel, 1998, 5.3. Proposition).

Proposición 3.8. *Sea $A = \overline{\bigoplus_{g\in G} A_g}$ una C^*-álgebra G-graduada. Entonces para cada $g,h \in G$, tenemos lo siguiente:*

(i) $A_{g^{-1}}A_gA_h = A_{g^{-1}}A_{gh}$,

(ii) $A_gA_hA_{h^{-1}} = A_{gh}A_{h^{-1}}$,

(iii) $A_gA_e = A_g$.

Demostración. Note que $A_{g^{-1}}A_gA_h \subseteq A_{g^{-1}}A_{gh} = (A_{g^{-1}}A_gA_{g^{-1}})A_{gh} \subseteq A_{g^{-1}}A_gA_h$, por lo tanto $A_{g^{-1}}A_gA_h = A_{g^{-1}}A_{gh}$. Del mismo modo se demuestra (ii) y (iii). ■

Sea $P_l(A)$ el conjunto de todos los subespacios vectoriales cerrados de A. Si definimos para cada X y Y en $P_l(A)$, $X \cdot Y$ como el menor subespacio cerrado de A que contiene a $XY := \{xy : x \in X \text{ y } y \in Y\}$, entonces $P_l(A)$ tiene estructura de semigrupo. Además, por la Proposición 3.8, la función $g \longmapsto A_g$ de G en $P_l(A)$ cumple las condiciones de la Proposición 3.5, como consecuencia tenemos el siguiente resultado que relaciona el semigrupo de Éxel con los subespacios cerrados de una C^*-álgebra G-graduada

$$A = \overline{\bigoplus_{g \in G} A_g},$$

que pueden ser formados como productos de los A_g's. En particular, si G tiene n elementos, la cantidad de subespacios posibles es a lo más $2^{n-2}(n-1)$ (Exel, 1998, 6.8. Corollary).

Teorema 3.9. *(Exel, 1998, Teorema 5.4.) Sea*

$$A = \overline{\bigoplus_{g \in G} A_g}$$

una C^*-álgebra G-graduada, existe una correspondencia que asigna, para cada $\alpha \in S(G)$, un subespacio cerrado A^α de A que satisface, para cada $\alpha, \beta \in S(G)$ y cada $g \in G$,

(i) $A^{[g]} = A_g$,

(ii) *Si* $\partial(\alpha) = g$, *entonces* $A^\alpha \subseteq A_g$,

(iii) $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha\beta}$.

3.3. Preguntas Relevantes

Pregunta 1. En el Ejemplo 2.5, las acciones parciales definidas sobre Y_i's dependen básicamente del subgrupo $\{\rho_0, \mu_i\} \leq \mathbb{D}_3$, para cada i. En cuyo caso podemos preguntarnos ¿que relación existe entre dos sistemas dinámicos parciales LCH dados por grupos distintos, es decir, es posible relacionar (por medio de un funtor por ejemplo) a $G \curvearrowright$ **LCH** y $H \curvearrowright$ **LCH**, siendo G y H grupos distintos?.

Pregunta 2. ¿Es posible extender el Funtor C_0 a una categoría más general que **LCH** cuyos objetos sean sistemas dinámicos parciales LCH (como $G \curvearrowright$ **LCH** por ejemplo)?

Pregunta 3. Del capítulo anterior, tenemos el siguiente funtor

$$\_ \rtimes G : G \curvearrowright \mathbf{LCH} \longrightarrow G\text{-}\mathbf{Graded},$$

y en el Teorema 2.27 se presenta una evidencia de funtor de regreso, al menos en objetos. Así podemos preguntarnos, ¿es posible definir una dualidad entre una subcategoría de G-**Graded** y una subcategoría de $G \curvearrowright$ **LCH**?.

Pregunta 4. Considere la subcategoría de $G \curvearrowright$ LCH cuyos objetos son las acciones globales. ¿Es esta una subcategoría reflexiva?.

Pregunta 5. Sean $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, he intentado definir una acción de $\mathbb{D}_3$ en S^1 siguiendo un camino análogo a las ideas expuestas en el Ejemplo 2.3.

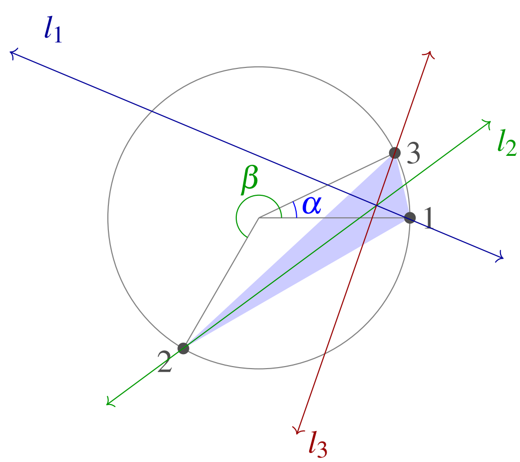

Figura 6. Posible acción de $\mathbb{D}_3$ en S^1.

Requerimos que los ρ_i's "roten" la circunferencia y los μ_i's la "reflejen". Por ejemplo, aplicar ρ_1 a S^1 consiste en mapear los arcos

$$\overset{\frown}{13} \xrightarrow{\rho_1} \overset{\frown}{32}$$

$$\overset{\frown}{32} \xrightarrow{\rho_1} \overset{\frown}{21}$$

$$\overset{\frown}{21} \xrightarrow{\rho_1} \overset{\frown}{13}$$

Mientras que μ_2 por ejemplo, consiste en mapear los arcos

$$\overset{\frown}{13} \xrightarrow{\mu_2} \overset{\frown}{31}$$

$$\overset{\frown}{32} \xrightarrow{\mu_2} \overset{\frown}{12}$$

$$\overset{\frown}{21} \xrightarrow{\mu_2} \overset{\frown}{23}$$

o bien, μ_2 puede ser pensado como aplicar una reflexión de S^1 con respecto a la recta l_2 que deja fijos al punto 2 y al punto que se encuentra en la intersección de l_2 con el punto medio del arco $\overset{\frown}{13}$. Análogamente, μ_1 consiste en reflejar S^1 con respecto a l_1 y μ_3 reflejar con respecto a l_3.

Informalmente, es preferible pensar en la circunferencia como una liga de caucho y en los puntos 1,2 y 3 como puntos en la liga, de tal manera que aplicar ρ_1 por ejemplo, consiste en girar la liga de tal forma que el segmento $\overset{\frown}{13}$ es estirado en el segmento $\overset{\frown}{32}$, el segmento $\overset{\frown}{32}$ es recogido al segmento $\overset{\frown}{21}$ y el segmento $\overset{\frown}{21}$ es recogido en el segmento $\overset{\frown}{13}$. Del mismo modo, μ_2 por ejemplo, es fijar el punto 2 mientras se gira la liga de tal modo que el arco $\overset{\frown}{23}$ sea recogido en el arco $\overset{\frown}{21}$, el arco $\overset{\frown}{21}$ sea estirado en el arco $\overset{\frown}{23}$ y el arco $\overset{\frown}{31}$ sea reflejado en el arco $\overset{\frown}{13}$. Por otro lado, puesto que las rotaciones ρ_1, ρ_2 son generadas a partir de las reflexiones, es decir:

$$\rho_1 = \mu_2\mu_1 = \mu_1\mu_3 = \mu_3\mu_2 \quad \text{y} \quad \rho_2 = \mu_1\mu_2 = \mu_2\mu_3 = \mu_3\mu_1.$$

Bastaría definir la acción γ_α^β para las reflexiones y verificar lo siguiente:

$$\gamma_{\mu_2} \circ \gamma_{\mu_1} = \gamma_{\mu_1} \circ \gamma_{\mu_3} = \gamma_{\mu_3} \circ \gamma_{\mu_2}, \quad \text{y} \quad \gamma_{\mu_1} \circ \gamma_{\mu_2} = \gamma_{\mu_2} \circ \gamma_{\mu_3} = \gamma_{\mu_3} \circ \gamma_{\mu_1}.$$

PRERREQUISITOS

A. $\mathbb{K}$-ÁLGEBRAS

Definición A.1. *Una $\mathbb{K}$-álgebra A es un $\mathbb{K}$-módulo sobre un anillo conmutativo con uno $\mathbb{K}$ que verifica $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ para cada $a, b \in A$ y cada $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Ejemplo A.2. Dado un grupo abeliano G de orden n, podemos identificar $\mathbb{C}^n$ con el conjunto $\mathbb{C}^G$ de funciones de G en $\mathbb{C}$, definamos un producto como sigue:

$$(f \cdot g)(s) = \sum_{t \in G} f(s-t)g(t), \text{ para cada } s \in G.$$

Por ejemplo tome $G = \mathbb{Z}_4$, y dada $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_4}$, en este caso podemos identificar $f : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{C}$ con

$$\begin{pmatrix} a_{\overline{0}} \\ a_{\overline{1}} \\ a_{\overline{2}} \\ a_{\overline{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\overline{0}) \\ f(\overline{1}) \\ f(\overline{2}) \\ f(\overline{3}) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4.$$

Así, dados $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_4}$, digamos

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(\overline{0}) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_4} f(\overline{0} - n)g(n) \\ &= f(\overline{0})g(\overline{0}) + f(\overline{3})g(\overline{1}) + f(\overline{2})g(\overline{2}) + f(\overline{1})g(\overline{3}). \end{aligned}$$

Y del mismo modo se puede demostrar que para cada par de elementos en $\mathbb{C}^4$

$$\begin{pmatrix} a_{\overline{0}} \\ \\ a_{\overline{1}} \\ \\ a_{\overline{2}} \\ \\ a_{\overline{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{\overline{0}} \\ \\ b_{\overline{1}} \\ \\ b_{\overline{2}} \\ \\ b_{\overline{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\overline{0}}b_{\overline{0}} + a_{\overline{3}}b_{\overline{1}} + a_{\overline{2}}b_{\overline{2}} + a_{\overline{1}}b_{\overline{3}} \\ \\ a_{\overline{1}}b_{\overline{0}} + a_{\overline{0}}b_{\overline{1}} + a_{\overline{3}}b_{\overline{2}} + a_{\overline{2}}b_{\overline{3}} \\ \\ a_{\overline{2}}b_{\overline{0}} + a_{\overline{1}}b_{\overline{1}} + a_{\overline{0}}b_{\overline{2}} + a_{\overline{3}}b_{\overline{3}} \\ \\ a_{\overline{3}}b_{\overline{0}} + a_{\overline{2}}b_{\overline{1}} + a_{\overline{1}}b_{\overline{2}} + a_{\overline{0}}b_{\overline{3}} \end{pmatrix}$$

define un producto que le da estructura a $\mathbb{C}^4$ de álgebra sobre los complejos.

Definición A.3. *Un homomorfismo entre las $\mathbb{K}$-álgebras A y B es una función lineal $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(ab) = f(a)f(b)$ para cada $a, b \in A$.*

Definición A.4. *Diremos que un ideal I en una $\mathbb{K}$-álgebra A es modular si existe $u \in A$ tal que $a - au, a - ua \in I$ para cada $a \in A$. Note que todo ideal en una $\mathbb{K}$-álgebra con unidad es modular.*

Por el lema de Zorn cada ideal modular propio está contenido en un ideal maximal de A (Murphy., 1996, Página 4). Por otro lado, todo ideal en una $\mathbb{K}$-álgebra con unidad es modular y por lo tanto admite ideales maximales.

B. ESPACIOS DE BANACH

Definición B.1. *Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) donde toda sucesión de Cauchy es convergente. En caso que la norma provenga de un producto interno, diremos que X es un espacio de Hilbert.*

Teorema B.2. *Dados X y Y espacios de Banach, $X \times Y$ tiene estructura de espacio de Banach con la norma*

$$\|(x,y)\| = \text{máx}\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}.$$

Definición B.3. *Si X es un espacio vectorial y $\{W_i\}_{i\in I}$ es una familia de subespacios de X, decimos que la familia es linealmente independiente si*

$$W_i \cap \sum_{j\in I\setminus\{i\}} W_j = 0, \text{ para cada } i \in I.$$

Definición B.4. *Un operador lineal T entre los espacio normados X y Y es acotado si $T(B_X)$ es acotado en Y, o equivalentemente, la función $T : X \longrightarrow Y$ es continua. Definimos $B(X,Y)$ como la familia de operadores lineales y acotados de X y Y.*

- *Si Y es $\mathbb{C}$ diremos que T es un funcional lineal y acotado y $B(X,\mathbb{C}) = X^*$.*
- *Si $X = Y$ denotaremos $B(X,X)$ como $B(X)$.*

Definición B.5. *Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$), la función canónica $J : X \longrightarrow X^{**}$ donde $J(x) = \widehat{x} \in X^{**}$ es tal que $\widehat{x}(\tau) = \tau(x)$ para cada $\tau \in X^*$ y cada $x \in X$ define una isometría. Decimos que X^* tiene la topología débil* si tiene la topología débil inducida por la familia $J(X)$ de funcionales de X^* en $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$).*

Teorema B.6. *(Megginson, 1998, Banach-Alauglu) Si X es un espacio normado, entonces la bola cerrada, centrada en el origen y de radio uno B_{X^*} es compacta en X^* con la topología débil*.*

Teorema B.7. *(Megginson, 1998, Aplicación abierta) Toda función lineal, acotada y sobreyectiva* *entre espacios de Banach es abierta.*

Definición B.8. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre espacios normados sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Dado $a \in X$, decimos que f es diferenciable en a si existe $\mu_a \in B(X,Y)$ tal que*

$$\lim_{c \to 0} \frac{\|f(a+c) - f(a) - \mu_a(c)\|}{\|c\|} = 0.$$

Teorema B.9 (Representación de Riesz)**.** *Sea H un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ y $\tau : H \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal y acotada. Entonces existe un único $y \in H$ tal que $T(x) = \langle x, y \rangle$, para cada $x \in H$.*

Como consecuencia del Teorema de representación de Riesz tenemos el siguiente resultado.

Teorema B.10. *(Murphy., 1996, Teorema 2.3.1) Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert.*

(1) Si $u \in B(H_1, H_2)$, entonces existe un único elemento $u^* \in B(H_2, H_1)$ tal que

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle \quad (x \in H_1,\ y \in H_2).$$

(2) La función $u \longmapsto u^*$ es conjugado lineal, y $u^{**} = u$. Además

$$\|u\| = \|u^*\| = \|u^*u\|^{1/2}.$$

Definición B.11. *Sea H Hilbert y $W \subseteq H$ no vacío, definimos el subconjunto ortogonal de W como*

$$W^{\perp} = \{w \in H : \langle v, w \rangle = 0 \; para \; cada \; v \in W\}.$$

Tal $W^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H.

Definición B.12. *Una isometría parcial es un operador $u \in B(H)$ que es isometría en $ker(u)^{\perp}$ o equivalentemente, $uu^{*}u = u$ como se puede ver en (Murphy., 1996, Teorema 2.3.3).*

C. ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Definición C.1. *Sea X un espacio de Hausdorff, decimos que X es localmente compacto (LCH) si para cada $x \in X$, existe un abierto V de X tal que $x \in V$ y $\overline{V}$ es compacto.*

Definición C.2. *Decimos que una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios LCH es propia si envía compactos en compactos por imagen recíproca.*
Note que si X es compacto Hausdorff, entonces toda función continua es propia.

Teorema C.3. *(Folland, 1999, Stone-Weierstrass) Dado X LCH, si existe una $*$-álgebra $\mathscr{A}$ que separa puntos de X, entonces $\mathscr{A} = C_0(X)$ ó existe $x_0 \in X$ tal que $\mathscr{A} = \{f \in C_0(X) : f(x_0) = 0\}$.*

Lema C.4. *(Folland, 1999, Urysohn) Si X es un espacio LCH y $K \subseteq U \subseteq X$ donde K es compacto y U es abierto, entonces existe $f \in C(X, [0,1])$ tal que $f = 1$ en K y $f = 0$ fuera de un subconjunto compacto de U.*

D. COMPLETACIÓN

Cada espacio métrico M puede ser encajado de manera isométrica como un subconjunto denso de un espacio completo ((Megginson, 1998, Teorema B.61)). Además verifica la siguiente propiedad universal.

Teorema D.1. *Sean X es un espacio métrico y $\widehat{X}$ su completamiento, si Y es completo y $f : X \longrightarrow Y$ es continua, entonces existe una única función continua $\widehat{f} : \widehat{X} \longrightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e"'] & Y \\ \widehat{X} \arrow[ur, "\widehat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Propiedad universal del completamiento,

siendo $e : X \longrightarrow \widehat{X}$ el encaje canónico de X en su completamiento.

Si X es un espacio vectorial normado, por medio de la propiedad universal es posible dotar a $\widehat{X}$ de estructura de espacio vectorial y extender la norma de tal manera que $\widehat{X}$ sea un espacio de Banach.

Definición D.2. *Una seminorma de un espacio vectorial X sobre $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$), es una función $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$ y $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ y cada $x \in X$.*

Definición D.3. *Una C^*-seminorma en una $*$-álgebra compleja A es una seminorma $\rho : A \longrightarrow \mathbb{C}$, tales que para cada $a, b \in A$ tenemos* *(i)* $\rho(ab) \leq \rho(a)\rho(b)$,

(ii) $\rho(a^*) = \rho(a)$,

(iii) $\rho(a^*a) = \rho(a)^2$.

En caso que se tenga la propiedad ($\rho(x) = 0 \Rightarrow x = 0$), decimos que ρ es una C^*-norma.

Ejemplo D.4. Si $\varphi : A \longrightarrow B$ es un $*$-homomorfismo de una $*$-álgebra en una C^*-álgebra, entonces la función

$$\rho : A \longrightarrow \mathbb{R}^+, \; a \longmapsto \|\varphi(a)\|$$

define una C^*-seminorma en A, y si φ es inyectiva, entonces ρ es C^*-norma.

Veremos ahora que toda $*$-álgebra compleja junto con una C^*-seminorma puede ser encajada en una C^*-álgebra.

Teorema D.5. *Sea A es una $*$-álgebra compleja y ρ una C^*-seminorma sobre A. Entonces existe una única C^*-álgebra B tales que A es denso en B.*

[*bosquejo de la demostración*] Sea ρ una C^*-seminorma en una $*$-álgebra compleja A, el conjunto $N = \rho^{-1}(\{0\})$ es un ideal auto-adjunto de A. Además $\|a+N\| = \rho(a)$ define una C^*-norma en A/N.

En efecto, no es dificil ver que $\|\cdot\|$ define una norma en A/N, veamos que es C^*-norma. Sean $x+N, y+N \in A/N$

- $\|(x+N)(y+N)\| = \|xy+N\| = \rho(xy) \leq \rho(x)\rho(y) = \|x+N\|\|y+N\|$,

- $\|(x+N)^*\| = \|x^*+N\| = \rho(x^*) = \rho(x) = \|x+N\|$,

- $\|(x+N)(x+N)^*\| = \|xx^*+N\| = \rho(xx^*) = \rho(x)^2 = \|x+N\|^2$.

Sea B el espacio de Banach que se obtiene al completar A/N.

Por la submultiplicatividad de $\|\cdot\|$ en A/N tenemos que el producto en A/N es continuo, por lo tanto, existe una única función continua $B \times B \longrightarrow B$ que extiende al producto.

No es dificil demostrar que tal función es un producto en B, de hecho es submultiplicativo pues si $x, y \in B$, de la densidad de A/N, existen sucesiones $(x_n), (y_n) \in A/N$, tales que $x_n \longrightarrow x$ y $y_n \longrightarrow y$ en B, de la continuidad del producto $\|x_n y_n - xy\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, por lo tanto

$$\|xy\| \leq \|x_n y_n - xy\| + \|x_n y_n\| \leq \|x_n y_n - xy\| + \|x_n\|\|y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|x\|\|y\|,$$

luego $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ y por lo tanto B es un álgebra de Banach. Del mismo modo, la involución en A/N es continua pues si $x_n + N \to x + N$ en A/N, de la propiedad (ii) tenemos que

$$\begin{aligned} \|(x_n+N)^* - (x+N)^*\| &= \|(x_n - x)^* + N\| \\ &= \rho((x_n - x)^*) \\ &= \rho(x_n - x) \\ &= \|(x_n+N) - (x+N)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Entonces, la involución en $A/N \longrightarrow B$ puede ser extendida a una única función continua $*: B \longrightarrow B$, veamos que B es una C^*-álgebra. Por la continuidad de las extensiones de la suma y la involución en B tenemos (i)-(iii) de la Definición 1.4, veamos por ejemplo que $*$ es involutiva. Dado $x \in B$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A/N$ tal que $x_n \longrightarrow x$, tenemos que

$$(x^*)^* = \left(\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^*\right)^* = \left(\lim_{n\to\infty} x_n^*\right)^* = \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

La continuidad de la norma, de la involución y del producto implican (iv) y (v) de la Definición 1.4, veamos por ejemplo (v).

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|x_n^* x_n\| = \|x^* x\|.$$

■

Referencias Bibliográficas

Dokuchaev, M. and Exel, R. (2005). Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(5):1931–1952.

Exel, R. (1998). Partial actions of groups and actions of inverse semigroups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126(12):3481–3494.

Exel, R. (2017). *Partial dynamical systems, Fell bundles and applications*, volume 224 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI.

Exel, R. and Vieira, F. (2010). Actions of inverse semigroups arising from partial actions of groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 363(1):86–96.

Folland, G. B. (1999). *Real analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

Gillman, L. and Jerison, M. (1976). *Rings of continuous functions*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg. Reprint of the 1960 edition, Graduate Texts in Mathematics, No. 43.

Lawson, M. V. (1998). *Inverse semigroups*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ. The theory of partial symmetries.

Megginson, R. E. (1998). *An introduction to Banach space theory*, volume 183 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.

Murphy., G. J. (1996). *C^*-algebras and operator theory*. Academic Press. Mathematics Department, University College, Cork, Ireland.

Takesaki, M. (1979). *Theory of operator algebras. I.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

Wegge-Olsen, N. E. (1993). *K-theory and C^*-algebras*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York. A friendly approach.

ÍNDICE

$*$-homomorfismo no-degenerado, 37
$*$-homomorfismos graduados, 63
$B(X,Y)$, 88
C^*-seminorma, 91
$Inv(A)$, 24
$\mathbb{K}$-Álgebras, 86
$\sigma(a)$, 24

Acción parcial, 41

Caracter, 29
Completamiento de $*$-Álgebras, 92

Diferenciabilidad, 89

Elementos Positivos, 80
Espacio de Banach, 87
Espacio de Hilbert, 87
Espacio producto, 88

Familia linealmente independiente, 88
Función G-equivariante, 72
Función G-invariante, 72
Función continua propia, 90

Hermitiano o Auto-adjunto, 32
Homomorfismo, 87

Ideales en $\mathbb{K}$-Álgebras, 87
Ideales en C^*-álgebras, 56
Identidad aproximada, 54, 80
Isometría Parcial, 90

LCH, 90
Lema de Urysohn, 90

Multiplicador, 19
Módulo de Hilbert, 79

Operador adjunto, 89

Producto Cruzado, 58

Radio espectral, 28
Representación de Riesz, 89

Seminorma, 91
Subespacios graduados, 61

Teorema de Banach-Alauglu, 88
Teorema de Stone-Weierstrass, 90
Topología débil*, 88
Topología no conmutativa, 39