Los números racionales en estudiantes de secundaria: un análisis teórico desde la perspectiva de APOE

Paola Andrea Pedraza Correa

Trabajo de Grado para Optar el Título de Licenciada en Matemáticas

Directora
Dora Solange Roa Fuentes
Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2026

Tabla de Contenido

Pág.

Lista de Tablas

Pág.

Lista de Figuras

Pág.

Resumen

Título: Los números racionales en estudiantes de secundaria: un análisis teórico desde la perspectiva de APOE*

Autor: Paola Andrea Pedraza Correa**

Palabras Clave: Número racional, teoría APOE, descomposición genética, educación matemática, estructuras mentales.

Descripción: El presente trabajo de grado tiene como propósito analizar las estructuras y mecanismos mentales que pueden desarrollar estudiantes de secundaria, específicamente entre los 12 y 13 años, para comprender el concepto de número racional desde la primera fase del ciclo de investigación de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). La investigación se sitúa en el marco del Análisis Teórico, primera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE, y se orienta a comprender cómo se configuran las construcciones cognitivas asociadas al aprendizaje de los números racionales en la educación básica secundaria.

Para ello, se desarrolla un estudio que integra diversos elementos fundamentales. En primer lugar, se aborda un análisis histórico-epistemológico del concepto de número racional, con el fin de reconocer su evolución y los significados que han acompañado su construcción a lo largo del tiempo. En segundo lugar, se revisan los lineamientos curriculares y estándares educativos vigentes, con el propósito de identificar las expectativas institucionales respecto a la enseñanza y el aprendizaje de este concepto. Asimismo, se realiza un análisis de libros de texto utilizados en grado séptimo, así como una revisión de investigaciones previas relacionadas con el tema, lo que permite reconocer enfoques didácticos, dificultades recurrentes y vacíos conceptuales presentes en la literatura.

A partir de estos insumos se construye una descomposición genética preliminar que describe el tránsito cognitivo del estudiante desde acciones iniciales, como dividir, repartir o comparar cantidades, hacia la interiorización de procesos que articulan distintas representaciones del número racional. Este tránsito conduce a la consolidación del número racional como un objeto matemático integrado dentro de un esquema coherente. En este sentido, la teoría APOE se asume como un marco teórico pertinente para comprender el aprendizaje del número racional y para fundamentar futuras propuestas didácticas orientadas a favorecer una comprensión profunda, significativa y articulada.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Dora Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa.

Abstract

Title: Rational numbers in secondary school students: A theoretical analysis from the APOS perspective*

Author: Paola Andrea Pedraza Correa**

Key Words: Rational number, APOS theory, genetic decomposition, mathematics education, mental structures.

Description: This undergraduate thesis aims to analyze the mental structures and mechanisms that secondary school students, specifically between 12 and 13 years of age, may develop to understand the concept of rational numbers, based on the first phase of the research cycle of APOS theory (Action, Process, Object, and Schema). The study is situated within the Theoretical Analysis component of the APOS research cycle and seeks to explain how cognitive constructions related to rational numbers are formed during lower secondary education.

The research integrates several key elements. First, a historical and epistemological analysis of the concept of rational number is conducted in order to identify its evolution and the meanings associated with its development over time. Second, current curricular guidelines and educational standards are reviewed to examine institutional expectations regarding the teaching and learning of rational numbers. In addition, an analysis of seventh-grade mathematics textbooks is carried out, along with a review of previous research related to the topic, allowing the identification of common instructional approaches, recurring learning difficulties, and gaps in the existing literature.

Based on these elements, a preliminary genetic decomposition is constructed to describe the possible cognitive progression of students from initial actions, such as dividing, sharing, or comparing quantities, toward the internalization of processes that coordinate multiple representations of rational numbers. This progression culminates in the conceptualization of rational numbers as mathematical objects integrated within a coherent schema. In this sense, APOS theory is considered a relevant theoretical framework for understanding the learning of rational numbers and for supporting future didactic proposals aimed at promoting deeper and more meaningful learning.

---

* Degree Work

** Faculty of Ciencias. School of Matemáticas. Director: Dora Solange Roa Fuentes. Doctor of Science in Especialidad de Matemática Educativa.

Introducción

La enseñanza y comprensión del número racional desde hace varias décadas continúa siendo uno de los desafíos más persistentes de investigación en educación matemática. Desde Kieren (1980) y Behr et al. (1983), se ha evidenciado que este concepto requiere por parte del estudiante una profunda reestructuración cognitiva: pasar de una concepción aritmética del número natural a una concepción relacional que integra razones, proporciones y medidas. En este sentido, en trabajos como Arcila (2016) y Andrade (2023) se destacan las dificultades que enfrentan los estudiantes en la interpretación y uso de los racionales, especialmente en el tránsito entre sus diferentes representaciones.

En el contexto colombiano, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) establecen que los estudiantes con edades comprendidas entre los 12 y 13 años deben comprender los números racionales como expresiones de división, razón, proporción o medida, y ser capaces de aplicarlos a situaciones cotidiana. Sin embargo, en diversos estudios nacionales (Rueda, 2018; Obando, 2003) se confirma que los aprendizajes se reducen a procedimientos algorítmicos, evidenciando la falta de comprensión conceptual. Bajo este marco, el presente estudio se pregunta: ¿qué estructuras y mecanismos mentales desarrollan los estudiantes con edades comprendidas entre 12 y 13 años para comprender el concepto de numero racional? Esta pregunta se orienta en la primera fase del ciclo de investigación de la teoría APOE, la cual permite modelar los mecanismos cognitivos implicados en el aprendizaje matemático. Comprender el concepto de número racional, desde esta perspectiva, supone la interiorización de acciones como "dividir" o "comparar", la coordinación de procesos que articulen fracción, razón y cociente, y la encapsulación de tales procesos en un objeto mental que permita operar con sentido sobre los racionales.

Así mismo, la justificación de este estudio se sostiene en la necesidad de extender la aplicabilidad de la teoría APOE a contextos de educación básica, contribuyendo a la comprensión de un concepto elemental pero epistemológicamente complejo. A su vez, se retoma el enfoque propuesto por Betancur, Roa-Fuentes y Ballesteros (2021), quienes plantean el análisis sistemático de libros de texto como base para el diseño de una descomposición genética preliminar. El trabajo ofrece al docente una herramienta para comprender las dificultades cognitivas asociadas al número racional y orientar su enseñanza desde una perspectiva constructivista. Finalmente, la investigación aporta a la consolidación de un pensamiento proporcional sólido, fundamental para el desarrollo del razonamiento matemático y científico en los estudiantes (MEN 1998; NCTM, 1989).

En síntesis, este trabajo busca una mirada teórica y epistemológica a la comprensión del número racional desde la teoría APOE. Al articular el análisis epistemológico, curricular y cognitivo, se busca aportar a la consolidación de modelos que sirvan de base para futuras investigaciones y propuestas didácticas que favorezcan la comprensión profunda del número racional en estudiantes de secundaria.

1. Antecedentes

Este capítulo está dividido en dos secciones que contemplan: i. Estudios relacionados con la didáctica de los números racionales y ii. Elementos curriculares que guían diversos aspectos de la actividad matemática en el aula.

1.1 Sobre los números racionales

Esta sección presenta el análisis de algunos antecedentes que son un componente esencial de esta investigación focalizando aspectos epistémicos, curriculares y didácticos de los números racionales.

La importancia de los números racionales se puede ver desde dos perspectivas según Behr et al. (1983): i. Desde la perspectiva práctica, donde el dominio de los números racionales tiene gran importancia para enfrentar problemas del mundo real; en este dominio el estudiante puede generar habilidades a través del uso de fracciones y proporciones que le permiten abordar situaciones cotidianas con un razonamiento más profundo y directo de los números racionales. Y ii. Desde el ámbito de la psicología, donde no solo se refuerza el conocimiento matemático, sino que los números racionales permiten el desarrollo de estructuras mentales complejas que contribuyen al desenvolvimiento cognitivo general de los individuos; lo que promueve en los estudiantes en la exploración, la construcción, la comprensión y la expansión de sus habilidades de razonamiento.

Algunas investigaciones muestran que el razonamiento proporcional que pueden desarrollar los estudiantes en problemas que giran alrededor de las razones, implica la comprensión de números racionales (Howe et al., 2010). Por tanto, las dificultades relacionadas con el número racional, pueden ser un obstáculo a la hora de desarrollar un razonamiento proporcional.

Por otra parte, los estudiantes piensan incorrectamente sobre la fracción según Obando (2003) cuando “Se piensa la fracción como dos números naturales separados por una rayita (vínculo) y no como una relación cuantitativa entre la parte y el todo” (p.169). Al no reconocer la fracción como una relación intrínseca, los estudiantes tienden a realizar procedimientos mecánicos y a memorizar reglas sin captar el significado subyacente de los conceptos involucrados. Este tipo de aprendizaje, basado en el dominio operativo en lugar de conceptual, limita su capacidad para resolver problemas que exigen el uso de fracciones y proporciones, tanto en el ámbito académico como en la vida cotidiana (Obando, 2013). Por lo tanto, abordar esta concepción errónea desde la enseñanza de los números racionales se convierte en un elemento crucial para el desarrollo de competencias matemáticas y de pensamiento crítico en los estudiantes.

Para los estudiantes de grado séptimo, el aprendizaje de los números racionales, en particular de las fracciones, representa un reto notable en el ámbito educativo. Este desafío se refleja en las dificultades que los estudiantes afrontan al realizar operaciones aritméticas tales como al adicionar y sustraer fracciones. En la investigación de Rueda (2018), se identificación dificultades como la aplicación errónea del algoritmo de la suma y la falta de claridad operacional con fracciones de distinto denominador, lo cual limita el desempeño de los estudiantes en tareas matemáticas que demandan un razonamiento preciso.

Por otra parte, en Rueda (2018) también indica que la enseñanza de las fracciones en los primeros grados no aborda adecuadamente conceptos esenciales como la adición y la representación de fracciones en diversos contextos. Esta falencia contribuye a que los estudiantes divisen las fracciones como una extensión abstracta de los números enteros, sin un uso practico en la vida cotidiana. Esta percepción restringe la comprensión de conceptos clave, afectando el rendimiento escolar de los estudiantes en operaciones básicas de fracciones (Rueda, 2018).

1.2 Aspectos curriculares

En esta unidad se consideran aspectos señalados por el Ministerio de Educación Nacional Colombiano (MEN) y los Estándares para la Educación Matemática de *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM por sus siglas en ingles), documento traducido al español por la Sociedad Andaluza.

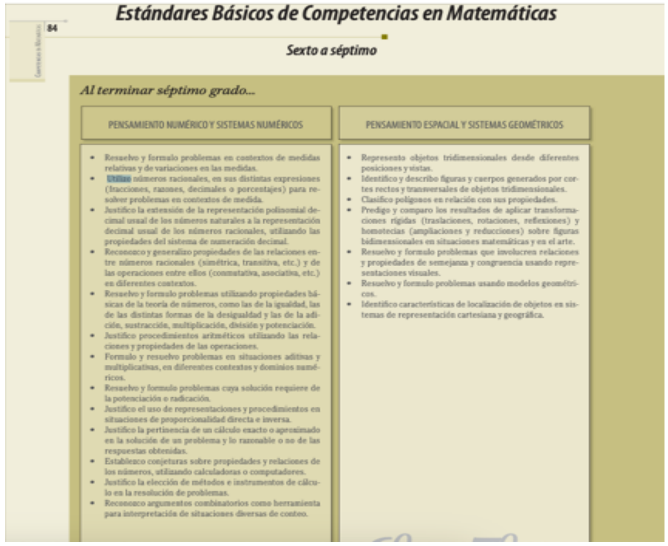
1.2.1 Ministerio de educación nacional

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBC) establecen objetivos fundamentales en torno a los números racionales, enfocándose en su comprensión y aplicación en la resolución de problemas prácticos (MEN, 2006). El propósito de los estándares es promover una comprensión profunda y versátil de los números racionales a través de sus distintas representaciones, tales como: fracciones, decimales y porcentajes, facilitando un uso correcto y contextualizado de estos números.

Los estudiantes (12-13 años) deben estar preparados para realizar conversiones entre representaciones de fracciones y decimales, comprender los números racionales como expresión de división y realizar operaciones con ellos en contextos matemáticos y cotidianos. El desarrollo de estas competencias se orienta hacia la resolución de problemas que impliquen la comparación, ordenamiento y operaciones con números racionales, con el fin de fortalecer la comprensión conceptual y su aplicación en contextos reales (MEN, 2006).

Figura 1

Estándares Básicos de Competencias [Sexto a Séptimo]



84

Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas

Sexto a séptimo

Al terminar séptimo grado...

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS

- Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.
- Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
- Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.
- Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.
- Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.
- Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.
- Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.
- Resuelvo y formulo problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.
- Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
- Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.
- Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores.
- Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas.
- Reconozco argumentos combinatorios como herramienta para interpretación de situaciones diversas de conteo.

PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS

- Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
- Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.
- Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.
- Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.
- Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
- Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.
- Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

Nota. Tomado de *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (p.84), MEN, 2006.

El propósito de estos estándares es que los estudiantes comprendan los números racionales y sean capaces de aplicarlos en contextos reales. En esa línea, uno de los objetivos establece que los alumnos deben "utilizar números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida" (MEN, 2006, p.84). De esta manera, se busca promover un aprendizaje con sentido, en el que el uso de fracciones y decimales trascienda los ejercicios formales y se relacione con actividades cotidianas como medir, comprar o estimar cantidades.

Así mismo, el MEN (2006) plantea que los estudiantes deben "justificar la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal" (p. 84). Este planteamiento apunta a que los estudiantes establezcan una continuidad entre los números naturales, con los que tienen una mayor familiaridad, con representaciones decimales más complejas, desarrollando así un entendimiento más profundo de los números racionales.

Por otra parte, los estándares también señalan la importancia de que los estudiantes logren "reconocer y generalizar propiedades de las relaciones entre los números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos" (MEN, 2006, p.84). Este tipo de competencia no solo fortalece el razonamiento lógico y abstracto, necesario para el aprendizaje de matemáticas avanzadas en niveles superiores, sino que también se alinea con los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional; estos integran enfoques modernos en los cuales los números racionales no se limitan a ser operaciones abstractas, sino que se conciben como herramientas prácticas que permiten a los estudiantes interactuar de manera significativa con el mundo.

La enseñanza de los números racionales, como parte integral del desarrollo del pensamiento numérico, ha sido objeto de reformas desde mediados del siglo XX. Durante los años 60 y 70, cuando surge la denominada "nueva matemática" la enseñanza se centraba en el desarrollo de conceptos abstractos, ahondar en el rigor lógico, y ver los números racionales a través de estructuras formales con fundamentación de la teoría de conjuntos y el álgebra (MEN, 1998). Reconociendo esas dificultades de la "nueva matemática" surge el movimiento "*Back to basics*" que tuvo como intercesor matemáticos, padres de familia y maestros que afirmaban que los estudiantes no podían realizar operaciones entre números naturales y fraccionarios, y es ahí donde este nuevo movimiento genera un impacto en el diseño curricular, ya que los números racionales se empiezan a ver de una forma menos abstracta, que busca promover la comprensión básica de sumas y restas de fracciones (MEN, 1998).

Se ha buscado promover una enseñanza más integral, que no solo forme a los estudiantes en la realización de cálculos con números racionales, sino que fomente una comprensión profunda de las relaciones numéricas y sus aplicaciones en el mundo real desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998). De acuerdo con dichos Lineamientos, la enseñanza de los números racionales debe desarrollarse desde un enfoque constructivista, que brinde a los estudiantes la posibilidad de explorar, formular y contrastar sus propias estrategias de solución. Este planteamiento busca que los aprendizajes surjan de la interacción con experiencias previas y de la resolución de situaciones problemáticas significativas. Además, se enfatiza que los números racionales no deben abordarse como un conjunto de conceptos aislados, sino como parte de un sistema numérico más amplio que incluye los números enteros, reales y las operaciones algebraicas. En esa perspectiva, la enseñanza de los números racionales se vincula con el desarrollo de competencias como la resolución de problemas, la modelación y el uso adecuado de herramientas tecnológicas, las cuales favorecen la aplicación de los conocimientos matemáticos a contextos reales.

A su vez, el MEN (1998) señala que uno de los principales retos en la enseñanza de los números racionales ha sido encontrar un equilibrio entre la instrucción teórica y la práctica. Con el paso del tiempo, el currículo ha incorporado actividades más experimentales que permitan a los estudiantes comprender la utilidad de estos números en situaciones concretas, como la medición de cantidades, el cálculo de proporciones en recetas o la conversión de monedas en distintos contextos. Estas experiencias hacen que los contenidos matemáticos adquieran un sentido más cercano y funcional para el aprendizaje.

El currículo actual propuesto por el MEN (1998) plantea como propósito central fortalecer el pensamiento numérico, de manera que los estudiantes no se limiten a operar con fracciones y decimales, sino que comprendan su utilidad en procesos de estimación, análisis de datos y toma de decisiones. Así mismo, se impulsa el uso de herramientas tecnológicas como calculadoras y software de matemáticas, que permiten realizar cálculos con números racionales de manera más rápida y eficiente, sin perder de vista la importancia de la comprensión conceptual. La incorporación de calculadoras gráficas y programas informativos en el aula contribuye a que los estudiantes puedan visualizar relaciones numéricas y trabajar con fracciones de mayor complejidad. Este tipo de recursos favorece una comprensión más conceptual de los contenidos, ya que permite centrar la atención en el razonamiento y en la interpretación de los resultados, en lugar de limitarse a la ejecución mecánica de los procedimientos de cálculo.

En coherencia con ello, el currículo promueve el uso de las tecnologías como herramientas que facilitan la exploración y el análisis de los números racionales. Gracias a estos recursos, los estudiantes pueden modelar situaciones del entorno, resolver problemas con distintos grados de dificultad y descubrir vínculos entre los números de forma interactiva. Además, el uso de Software y calculadoras ofrecen oportunidades para apreciar como los números racionales se aplican en distintos campos del conocimiento, como la ingeniería la economía o las ciencias aplicadas.

1.2.2 Propuesta del National Council of Teachers of Mathematics

La enseñanza de las matemáticas constituye un componente esencial en la formación cognitiva de los estudiantes. En esta línea, el (NCTM) ha establecido una serie de lineamientos orientados a fortalecer los procesos de enseñanza y el aprendizaje, especialmente en lo que respecta al estudio de los números racionales y al desarrollo del razonamiento proporcional, considerados ambos como bases para la consolidación de un pensamiento matemático más avanzado.

En su documento de estándares, el NCTM (1998) propone una perspectiva que trasciende la mera repetición de algoritmos o la memorización de procedimientos. Su planteamiento busca que los estudiantes “hagan matemáticas” como lo haría un matemático profesional, es decir, explorando conceptos, formulando conjeturas y comunicando sus resultados dentro de un entorno social y académico (Ernest, 1991). En ese sentido, la enseñanza de los números racionales y del razonamiento proporcional debe orientarse a ofrecer oportunidades para construir sentido numérico, comprender las operaciones y establecer relaciones entre fracciones, decimales y porcentuales (NCTM, 1989).

Un eje central del currículo propuesto por el NCTM es el énfasis en la comprensión de los números racionales y del razonamiento proporcional durante los grados 5-8. La transición de los números naturales a los enteros, y de estos a los racionales, se considera un proceso clave en la formación de ideas matemáticas más abstractas y en la comprensión de los números reales (Gómez, 1998).

De acuerdo con Gómez (1998), un currículo que prioriza el estudio de los números racionales ofrece un marco para desarrollar un sentido numérico profundo, el cual puede consolidarse mediante experiencias de aprendizaje que inviten a los estudiantes a explorar las relaciones entre números y a interpretar su magnitud relativa.

Por otra parte, el razonamiento proporcional, definido como la capacidad de comparar relaciones y deducir valores desconocidos a partir de estas, representa una habilidad esencial en la educación matemática. Dicho razonamiento no solo implica reconocer estructuras numéricas, sino también gestionar comparaciones múltiples de forma simultánea y flexible (Lesh et al., 1988).

2. Planteamiento del Problema

Este proyecto analiza el desarrollo cognitivo que pueden alcanzar estudiantes de secundaria (12-13 años), en relación con la comprensión de los números racionales. Está fundamentado en el diseño y desarrollo de la primera componente del Ciclo de Investigación, Análisis Teórico, que propone la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Dicho ciclo contempla la identificación de los elementos epistemológicos, didácticos y curriculares que permiten la construcción de un modelo cognitivo. En este modelo, llamado descomposición genética, se proponen las estructuras y los mecanismos mentales necesarios para que un estudiante desarrolle la comprensión de una parte del conocimiento matemático; en este caso, de los números racionales.

De la misma manera, dicho modelo puede guiar el diseño y el desarrollo de la clase del profesor de matemáticas, sustentar las decisiones de la evaluación, así como la dirección de la evolución del concepto en niveles más avanzados (Arnon et al., 2014). Por lo tanto, este proyecto parte de la pregunta: ¿Qué estructuras y mecanismos mentales pueden desarrollar estudiantes con edades comprendidas entre 12 y 13 años para comprender el concepto de número racional? Esta pregunta da paso al capítulo 3, el Marco Teórico, que permite plantear el siguiente objetivo de investigación: Analizar las estructuras y mecanismos mentales que pueden desarrollar estudiantes de secundaria a partir del diseño y desarrollo del Análisis teórico, primera componente del ciclo de investigación de APOE.

3. Marco Teórico

La teoría APOE fue desarrollada inicialmente por Ed Dubisky y un grupo de personas interesadas en comprender cómo los individuos aprenden o construyen conceptos matemáticos avanzados; esta teoría se basa en el concepto de Abstracción Reflexiva planteado por Piaget. Aunque en algunos contextos se piensa que APOE solo es útil para analizar conceptos matemáticos avanzados, se cuenta con aspectos teóricos y empíricos que han mostrado su efectividad para analizar la comprensión de conceptos básicos; como puede considerarse en concepto de número racional (Arnon et al., 2001; Arnon et al., 2014).

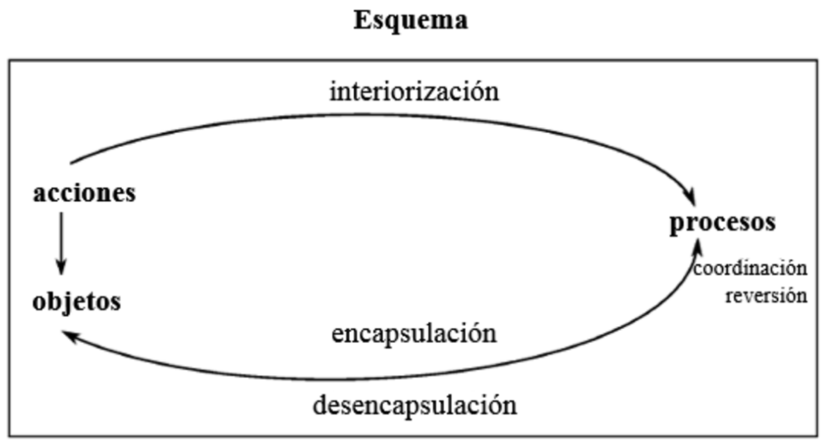
A continuación, se muestran los elementos teóricos que usualmente se usan en APOE para luego ahondar en la manera como esta teoría ha sido adaptada para explicar la comprensión que los estudiantes pueden lograr sobre nociones matemáticas escolares.

3.1 Estructuras y mecanismos mentales

La Teoría APOE define estructuras y mecanismos para explicar maneras de construir conceptos o nociones matemáticas. Las estructuras definidas como Acción, Proceso, Objeto y Esquema se conciben como niveles de comprensión de un concepto matemático. Estas estructuras se relacionan a través de mecanismos, casos particulares de Abstracción reflexiva, estos son: interiorización, coordinación, encapsulación y desencapsulación (Ver Figura 2). A continuación, se explica cada estructura y su la relación con los mecanismos tomando como ejemplo el concepto de integral presentado en Arnon et al. (2014).

Figura 2

Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático



Nota. Tomado de *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p.18), por Arnon et al., 2014, Springer.

La construcción de un concepto matemático parte de la aplicación de Acciones sobre Objetos iniciales construidos previamente por el individuo. Las Acciones son transformaciones que generalmente responden a una orden externa; por ejemplo, calcular, mostrar, encontrar, entre otras, generalmente se asocian con el desarrollo o aplicación de un algoritmo. Este tipo de transformaciones se realizan paso a paso y en un orden establecido. Por ejemplo, una estructura Acción del concepto de n-upla consiste en tomar n cantidades específicas de números reales y ubicarlos con un orden particular (Arnon at al., 2014). Como se muestra en la Figura 2, las Acciones son interiorizadas en un Proceso. Según Arnon et al., (2014) la aplicación de diferentes Acciones y la reflexión del individuo sobre ellas permite que logre un control mental sobre el tipo de transformaciones. Así puede imaginar un conjunto de pasos sin necesidad de realizarlos de manera externa. Para el caso del concepto de n-upla, la estructura Proceso se caracteriza por la capacidad del individuo para transformar o caracterizar n-uplas; esta estructura permite pensar en definir operaciones como suma vectorial y producto por escalar, incluso dependiendo de la experiencia del individuo, es posible que la estructura Proceso de n-upla permita que el individuo inicie con la construcción del concepto de espacio vectorial. Como se muestra en la Figura 2, los Procesos son encapsulados en Objetos. Los Objetos son estructuras estáticas sobre las cuales es posible realizar nuevas Acciones, de tal manera que se inicia con la construcción de un nuevo Objeto o el Objeto previamente construido es asimilado por otro Esquema (Arnon et al., 2014). El mecanismo de encapsulación permite que el proceso se estructure como un todo. En el caso de las n-uplas, el individuo puede generar nuevas n-uplas a partir de las operaciones definidas entre ellos; incluso esta estructura permite pensar en n-uplas de la forma $v \in \mathbb{R}^n$.

Para el caso de este trabajo las estructuras y sus relaciones a través de los mecanismos descritos hasta el momento, son la base para analizar la manera como los estudiantes pueden acercarse a la noción de número racional.

3.2 La teoría APOE y los números racionales

La comprensión de los números racionales es un tema esencial en la educación matemática y como muestran diversas investigaciones los desafíos que presentan los estudiantes con los números racionales genera problemas en el desarrollo de su razonamiento proporcional (Howe et al., 2010). El número racional se puede interpretar de diferentes subconstrucciones: una comparación de parte con el todo, un decimal, una razón y un cociente (Behr et al., 1983). La teoría APOE propone un marco teórico apto para abordar estos desafíos.

Un aspecto que se ha planteado en diferentes escenarios es la importancia de que los estudiantes interactúen con fracciones por medio de manipulación de material. Padierna y Zapata (2018) por ejemplo plantea que: "la construcción del número racional inicia cuando el estudiante manipula material concreto" (p.33). Esta representación permite que los estudiantes asimilen el concepto. La Figura 3 sirve como una herramienta visual eficaz para representar fracciones.

Figura 3

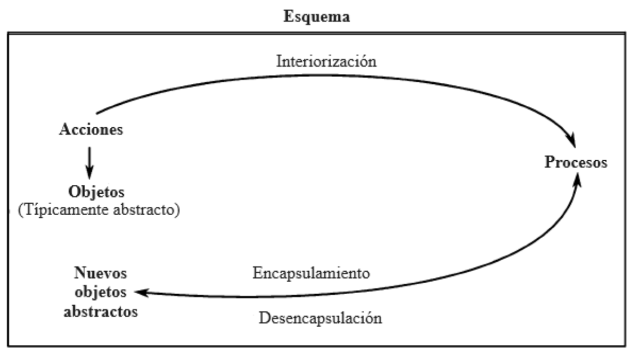
Circle cutouts [Recortes circulares]

Nota: La figura anterior representa recortes de círculos y círculos enteros, algunos de los recortes llevan la fracción que representa, otros no. Tomado de *APOS Theory : A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p.152), por Arnón et al., 2014, Springer.

La teoría APOE ofrece una perspectiva sobre cómo los estudiantes conciben conceptos matemáticos, entre un contexto abstracto (educación postsecundaria) Figura 4 y un contexto concreto (educación elemental) Figura 5. Las diferencias en estos dos contextos, radica en el nivel de abstracción, los estudiantes de (educación elemental) en ocasiones necesitan manipulación de material tangible, y los estudiantes de primaria operan principalmente en el nivel de "acción" donde se trabajan actividades concretas. En el nivel postsecundario se requiere una adecuación importante, los estudiantes se afrontan un nivel de abstracción mayor, ya que se espera que realicen operaciones mentales complejas sin apoyo concreto aquí la teoría se direcciona a la transición desde el "Proceso" al "Objeto". (Arnon et al., 2014).

Figura 4

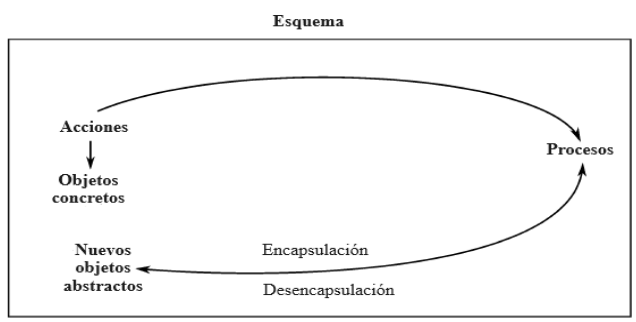
APOS for postsecundary students [APOE para estudiantes de post-secundaria]



Nota. Tomado de *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p. 153), por Arnón et al., 2014, Springer.

Figura 5

APOS for elementary school students [APOE para estudiantes de primaria]



Nota. Tomado de *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education* (p. 154), por Arnón et al., 2014, Springer.

Arnon et al., (2014) afirma que "los objetos que surgen de la encapsulación de las acciones interiorizadas son abstractos al igual que para los estudiantes postsecundarios" (p.154). Estos aspectos serán analizados a profundidad en esta investigación, con el objetivo de profundizar sobre el tipo de Acciones Concretas y la manera cómo es posible generar el mecanismo de interiorización en Procesos que dan paso a Nuevos Objetos abstractos.

4. Método

La Teoría APOE contempla un ciclo de investigación que permite el diseño y validación de descomposiciones genéticas que se refinan y validan a través de su aplicación (Arnon et al., 2014). Este trabajo se centra específicamente en el diseño y desarrollo de la primera componente de dicho ciclo: Análisis Teórico.

El principal objetivo del Análisis Teórico es el estudio y sistematización de información que sustente el diseño de un modelo hipotético, que muestre cómo un individuo puede desarrollar la comprensión de un concepto y/o noción matemática. En esta componente tradicionalmente se contempla: el análisis epistemológico del concepto, resultados en didáctica sobre el concepto, el análisis de libros de texto y la experiencia de los integrantes del equipo de investigación como profesores y estudiantes (Arnon et al., 2014).

Esta investigación se propone identificar, estudiar y sistematizar información relacionada con el concepto de número racional a través de: i. el estudio de un análisis histórico epistemológico del número racional; ii. el análisis de libros de texto usados por los profesores en los cursos de séptimo grado; iii. el conocimiento sobre asuntos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del número racional; y iv. El estudio de análisis cognitivos previos sobre número racional desde la perspectiva de APOE. Todos estos insumos permiten plantear una descomposición genética hipotética que puede guiar el diseño de tareas de clase, así como la actividad del profesor en el aula.

5. Diseño de una descomposición genética de los números racionales

En este capítulo se sistematiza el trabajo realizado sobre cada uno de los aspectos que da paso a la formulación de un modelo cognitivo de los números racionales.

5.1 Componentes histórico-epistemológicos de los números racionales

Desde tiempos muy antiguos, las personas han necesitado expresar cantidades que no podían representarse solo con números enteros. En culturas como la egipcia y la babilónica, la medición agrícola y astronómica ya había impulsado una comprensión práctica de las fracciones como números (Obando, 2003). Las prácticas sociales de medición fueron un motor para aceptar la divisibilidad de la unidad y ampliar el concepto numérico más allá de los enteros.

En el Antiguo Egipto, por ejemplo, un escriba podía anotar en un papiro que para pagar a un obrero se le entregaría "$\frac{1}{4}$ de una medida de grano", utilizando fracciones unitarias que hoy nos parecen extrañas, como $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}$. En Mesopotamia, los comerciantes usaban el sistema sexagesimal para repartir aceite o cebada, calculando fracciones como $\frac{1}{3}$ o $\frac{5}{6}$ con sorprendente exactitud. En este contexto, el número racional no se pensaba como una entidad abstracta, sino como una respuesta directa a problemas concretos de reparto, medición y comercio (Elias et al., 2019).

En el pensamiento griego clásico, la distinción entre número y magnitud condicionó la concepción de la unidad. El número se asociaba a lo discreto y contable, mientras que la magnitud se vinculaba a lo continuo y medible. Esto dio lugar a dos nociones: la unidad aritmética, indivisible y universal, y la unidad geométrica, dependiente del objeto medido y divisible infinitamente (Obando, 2003). Euclides, en sus Elementos, desarrolló una teoría general de proporciones y magnitudes que ofrecía un marco lógico para tratar con estas cantidades sin depender solo de su interpretación física (Elias et al., 2019).

En la Edad Media, el conocimiento griego fue traducido, ampliado y sistematizado por matemáticos árabes. Al-Juarismi, por ejemplo, explicaba cómo sumar fracciones con distintos denominadores, una habilidad crucial para el comercio de la época. En una clase moderna, este avance se refleja cuando un estudiante aprende a calcular $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$ transformándolas a un denominador común. Este salto – de cortar pan a manipular símbolos – marcó una etapa en la que el número racional empezó a concebirse como un objeto que podía operar con independencia de la magnitud física que representaba (Elias et al., 2019).

Durante el Renacimiento, Simon Stevin revolucionó el tratamiento de estas cantidades al promover el uso de la notación decimal. Gracias a ella, operaciones como dividir siete entre ocho podían expresarse como 0,875, un formato más uniforme para cálculos en comercio, astronomía o navegación. Hoy, este cambio puede recrearse en clase pidiendo a los estudiantes que conviertan fracciones en decimales para comparar longitudes o precios. La notación decimal hizo más visible la idea de que entre dos números siempre hay otro, aunque la noción formal de continuidad aún tardaría en llegar (Stein, 1990; Elias et al., 2019).

En el siglo XIX, matemáticos como Dedekind ofrecieron una definición rigurosa: los números racionales son clases de equivalencia de pares ordenados de enteros (a, b), con $b \neq 0$, bajo la relación $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ (NCTM, 1968). Con esto, se reconoció formalmente que forman un conjunto denso (entre dos racionales hay infinitos más) y ordenado, pero no completo. En términos escolares, esta diferencia se aprecia al intentar encontrar un racional que sea exactamente igual a $\sqrt{2}$: no existe, aunque podamos aproximarlo tanto como queramos (Elias et al., 2019).

Hoy, el número racional se interpreta de muchas formas según el contexto: parte de un todo ($\frac{3}{4}$ de una pizza), medida (1,5 metros de tela), cociente ($7/4$) u operador ("tomar la mitad de algo"). En clase, esto significa que un mismo número puede aparecer en un problema de recetas, en la medición de una pista de atletismo o en una razón de velocidad. Esta diversidad forma lo que Elias et al., (2019) llaman una "matriz de significados", que explica por qué dominar los racionales no es simplemente aprender a sumar y restar fracciones (Kieren, 1980).

Sin embargo, esa misma riqueza de usos trae consigo desafíos. Muchos estudiantes asocian las fracciones únicamente con la idea de parte-todo y no logran conectarlas con la medida o el operador. Otros creen que entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ no hay más números, o confunden 0,5 con 0,50 pensando que "son diferentes". Estas dificultades muestran que desarrollar una verdadera comprensión de los números racionales requiere articular todos sus significados y representaciones, pasando con soltura de fracciones a decimales y a su ubicación en la recta numérica (Elias et al., 2019).

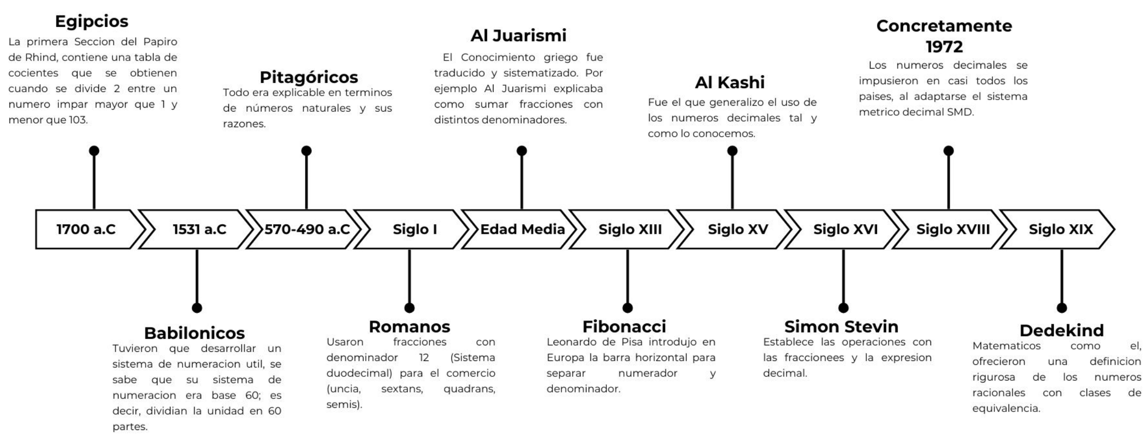
Elias et al., (2019) señalan que los números racionales conforman una 'matriz de significados', donde pueden interpretarse como parte-todo, cociente, medida, razón u operador. Históricamente, estos significados emergieron en contextos distintos: la fracción como parte-todo se asocia a repartos y particiones; como medida, a la agrimensura y estandarización de unidades; como cociente, al cálculo aritmético; y como razón, a la comparación de magnitudes. Integrar estos significados en la enseñanza es crucial para evitar una visión reducida del concepto.

La línea de tiempo (véase Figura 6 y Figura 7) genera la curiosidad y el interés por contextualizar el conocimiento no solo matemático si no cultural y epistemológico. Muestra que los resultados no surgieron de forma espontánea si no de un proceso de búsqueda construcción y sistematización a lo largo de la historia. En ese sentido la línea del tiempo favorece a un análisis epistemológico del número racional al vincularlo con los hitos de diversas civilizaciones épocas y matemáticos.

Conocer la evolución histórica y epistemológica de este concepto no solo resulta valioso desde una perspectiva teórica o cultural, sino que se convierte en una herramienta pedagógica que permite una visión integral de como se ha construido, interpretado y enseñado el concepto de numero racional a lo largo del tiempo. En la Figura 6, se muestra una línea de tiempo epistemológica que ilustra los hitos más relevantes en el desarrollo histórico y conceptual de los números racionales.

Figura 6

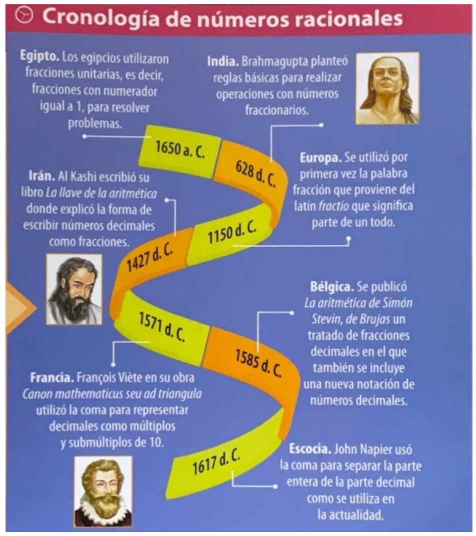
Línea del tiempo Números Racionales



En uno de los libros del análisis de texto Matemáticas 7 (Ortiz et al., 2014) la enseñanza de los números racionales se acompaña de recursos visuales que buscan contextualizar históricamente el concepto (véase Figura 7). Uno de estos recursos es la línea de tiempo que destaca los aportes de diferentes culturas y matemáticos en la construcción y comprensión de las fracciones y los números racionales.

Figura 7

Línea de tiempo números racionales libro Santillana



Nota. Tomado de *Matemáticas 7* (p.72), por Ortiz et al., 2014, Santillana.

Aunque una línea tiene un enfoque más analítica y epistemológica, y la otra más pedagógica y visual, ambas convergen a un mismo objetivo: reconstruir la historia del concepto de numero racional para favorecer su comprensión desde una visión integral y motivar su estudio.

5.2 El análisis de libros de texto usados por profesores

Betancur et al. (2021) destacan la importancia del análisis de libros de texto en la formulación de una descomposición genética preliminar; los autores establecen que el análisis de libros de texto no se reduce a una revisión superficial, sino que implica un ejercicio crítico para identificar y utilizar estrategias pedagógicas en la presentación de los conceptos como también las estructuras cognitivas que la promueven. Como bien lo resaltan Cook y Stewart (2014) analizar múltiples textos permite evidenciar diferencias en las orientaciones pedagógicas, lo cual es fundamental para enriquecer tanto la reflexión didáctica como el diseño de investigaciones educativas más pertinentes.

Una de las ideas más relevantes es que la construcción de un concepto matemático no sigue un camino único ni lineal (Arnon et al., 2014). Por el contrario, pueden existir múltiples descomposiciones genéticas válidas, dependiendo de la naturaleza del concepto, el contexto educativo y la experiencia previa del estudiante. Esta multiplicidad de enfoques favorece el diseño de investigaciones que no solo documenten estas diferencias, sino que exploren su impacto en el aprendizaje.

En ese mismo sentido, Kilpatrick (2014) señala que el aprendizaje matemático está condicionado no solo por el contenido formal que ofrecen los libros de texto, sino también por el uso e interpretación que de estos materiales hace el docente. Esto subraya su carácter mediador en el proceso de enseñanza-aprendizaje ya que son materiales didácticos que no operan de forma aislada, sino que adquieren sentido y eficacia en función del contexto de aula, las decisiones pedagógicas del profesor y las interacciones con los estudiantes.

Para el análisis del concepto de números racionales en grado séptimo se toman los libros de Bautista et al. (2013) y Ortiz et al. (2014) publicados por la editorial Santillana, con el fin de dar como resultado una descomposición genética preliminar.

5.2.1 Estructura general de los libros de texto

La publicación de Ortiz et al. (2014) está conformada por unidades que siguen un desarrollo lineal. El recorrido inicia con la unidad dedicada a los números enteros, en ella se introducen su definición, representación en la recta y las operaciones básicas; además, de temas como potenciación y radicación, polinomios aritméticos y ecuaciones sencillas (véase Figura 8). Esta primera parte enfatiza en el conjunto de los números enteros, sus transformaciones y propiedades para dar paso a la construcción de los números racionales.

En la siguiente unidad (véase Figura 8), el autor del libro de texto define formalmente el conjunto Q, explica sus propiedades fundamentales y aborda conceptos como fracciones equivalentes, clasificación de números racionales, su representación en la recta y la expresión decimal clasificados entre decimales finitos y periódicos. Posteriormente, desarrolla las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, tanto en forma de fracción como en decimal y finaliza con problemas aplicados propuestos.

Luego de consolidar los racionales, el texto conecta de forma natural con la idea de razón y proporción, es decir, introduce en la unidad 3 sobre proporcionalidad mostrando así una progresión didáctica lineal. Más adelante el libro continúa numéricamente con introducción al álgebra, 4; figuras planas, 5; cuerpos geométricos, 6 y finaliza con Estadística y probabilidad.

Figura 8

Contenido de la unidad 1 y 2 del libro Matemáticas 7

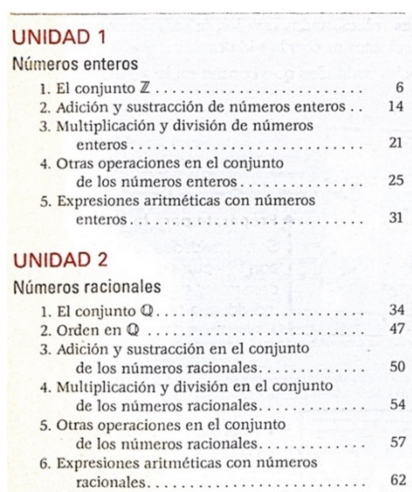
Nota. Tomado de *Matemáticas 7* (p.12), Ortiz et al., 2014, Santillana.

Por otra parte, la publicación de Bautista et al. (2013) está organizada por unidades llamados “rutas” (véase Figura 9), que buscan integrar los contenidos mediante situaciones contextualizadas. La primera ruta presenta actividades relacionas con los números enteros, utilizando contextos familiares relacionados con: temperatura, ganancias y deudas para introducir las cantidades positivas y negativas, su representación en la recta numérica y las operaciones básicas. Esta prepara el camino para la siguiente, donde se trabaja el concepto de numero racional; los números racionales se abordan como necesidades prácticas, asociadas con repartir y medir cantidades no enteras, así como calcular porcentajes.

La ruta desarrolla el concepto de número racional de forma integrada con problemas cotidianos, en los que el estudiante avanza desde el manejo de fracciones hacia su interpretación en la recta numérica y expresión decimal. A continuación, el programa de Rutas utiliza una lógica análoga, es decir, después de trabajar racionales, las siguientes rutas a temáticas relacionadas con: proporcionalidad, polígonos y cuerpos, y finalmente mediciones. Finalizando con las rutas 7 y 8 destinadas a Estadística y probabilidad respectivamente.

Figura 9

Contenido de la unidad 1 y 2 del libro Rutas Matemáticas 7



Nota. Tomado de *Rutas Matemáticas 7* (p.4), Bautista et al., 2013, Santillana.

En este sentido, se presentan la Tabla 1 y Tabla 2, las cuales sintetizan los elementos centrales del análisis comparativo entre los textos de Ortiz et al. (2014) y Bautista et al. (2013). La primera muestra aspectos relacionados con la estructura y organización de los contenidos, y la segunda precisa la motivación con la que se introduce el concepto de número racional en cada libro.

Tabla 1

Elementos para destacar sobre la estructura general de los textos Matemáticas 7 y Rutas Matemáticas 7

Ortiz et al. (2014)	Bautista et al. (2013)
Inicia con los números enteros, definidos formalmente, con operaciones y propiedades en la recta numérica.	Comienza con los números enteros, presentados mediante contextos reales.
En la unidad 2 aparecen los números racionales desde una definición explicita, seguida de representación, clasificación, operaciones y problemas sugeridos.	Análogamente en la ruta 2 aparecen los números racionales, como necesidad derivada de situaciones de reparto, medidas y porcentajes. La definición se construye progresivamente.
En las unidades 3 y 4 tienen como título proporcionalidad e introducción al álgebra, figuran en la tabla de contenido, sin embargo, no aparecen desarrolladas en el libro.	En la unidad 3, rutas asegura continuidad de los números racionales hacia las ecuaciones a su vez en la unidad 4 desarrolla aplicar los conceptos e identificación de razones y proporciones en la solución de problemas.
Unidades 5 y 6 trabajan pensamiento espacial y métrico con figuras planas y cuerpos geométricos, reconociendo las características generales de los polígonos, la clasificación de sus elementos con sus propiedades, reconociendo el perímetro como un atributo medible y determinando áreas de figuras.	En las unidades 5 y 6, se desarrollan las características generales de las figuras geométricas, clasificación a partir de sus elementos y propiedades, reconocer las unidades básicas de longitud, masa, superficie y volumen.
La última unidad del libro está focalizada en la estadística y la probabilidad partiendo de caracterización de variables, ejemplos y ejercicios.	Desarrolla pensamientos aleatorios y variacionales en las unidades 7 y 8 llamadas estadística y probabilidad respectivamente, identificando los conceptos básicos de estadística partiendo de ejemplos cotidianos y finalizando con problemas sugeridos.

Tabla 2

Motivación al introducir el concepto de numero racional

Ortiz et al. (2014)	Bautista et al. (2013)
Presentar la estructura formal de los números racionales y sus propiedades como paso necesario en la formación matemática.	La capacidad de resolver operaciones de la forma $\frac{x}{i}$ donde el resultado no es un número entero.

El análisis de la motivación inicial de los dos textos revela que, aunque ambos pertenecen a la misma editorial, sus propuestas responden a caminos diferentes. En *Matemáticas 7* (Ortiz et al., 2014) la motivación responde más a la lógica curricular de continuidad en el estudio del sistema numérico. Situando al estudiante frente a un objeto matemático ya definido, cuyo estudio se aborda de manera ordenada y sistemática iniciando con la definición explicita del conjunto $\mathbb{Q}$ luego presenta ejemplos y ejercicios de clasificación y operación. Por su parte, en *Rutas Matemáticas 7* (Bautista et al., 2013)*,* la motivación está orientada a que el estudiante experimente la necesidad de ampliar el sistema numérico cuando los números enteros no resultan suficientes. Situaciones como divisiones entre números enteros, mediciones fraccionarias o cálculos porcentuales se justifican ya que se requieren nuevos números para resolverse y por lo tanto el punto de partida desde el cual se construye gradualmente la noción de numero racional.

A continuación, se presenta el contenido de la sección 2 propuesta en el libro *Matemáticas 7* (Ortiz et al, 2014), el cual inicia con la definición formal del conjunto de los números racionales (véase Figura 10). Esta introducción axiomática permite observar como el texto inicia la unidad con una expresión simbólica que refleja una concepción estructural del número racional, sin un desarrollo previo de las acciones o procesos que sustentan su comprensión.

Figura 10

Definición del conjunto Q Matemáticas 7

1.1 Definición del conjunto $\mathbb{Q}$

El conjunto de números racionales se simboliza con la letra $\mathbb{Q}$ y se define como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,/\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Por ejemplo, las fracciones $\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{9}$ son números racionales. De la misma forma, todo número entero es un número racional porque se puede escribir como una fracción. Así, el número 2 se puede escribir como $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \ldots$

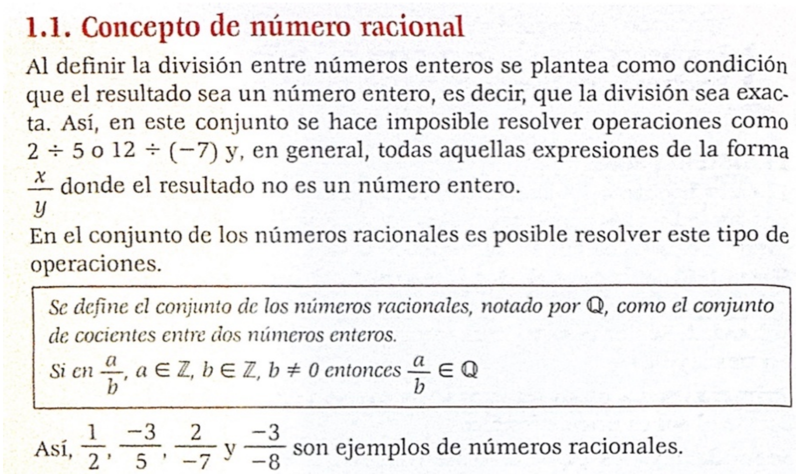
Nota. Tomado de *Matemáticas 7* (p.72), Ortiz et al., 2014, Santillana.

Por lo anterior, se identifica que el libro guía inicia la sección con el planteamiento directo del concepto de numero racional, sin un desarrollo inicial que vincule experiencias concretas con la formalización del concepto. En términos de la teoría APOE, con ese inicio el libro sitúa al estudiante directamente en el nivel de objeto, sin propiciar las acciones ni los procesos mentales que deberían conducir a dicha abstracción (Arnon et al.,2014).

De otra parte, el texto *Rutas Matemáticas 7* (Bautista et al., 2013) presenta una introducción del concepto de numero racional a partir de la necesidad de resolver operaciones de división. Entre enteros cuyo resultado no pertenece al conjunto de los números enteros (véase la Figura 11). Este punto de partida sitúa el concepto en un conflicto aritmético: la imposibilidad de realizar ciertas divisiones entre números enteros.

Figura 11

Definición del conjunto Q Rutas Matemáticas 7



1.1. Concepto de número racional

Al definir la división entre números enteros se plantea como condición que el resultado sea un número entero, es decir, que la división sea exacta. Así, en este conjunto se hace imposible resolver operaciones como $2 \div 5$ o $12 \div (-7)$ y, en general, todas aquellas expresiones de la forma $\frac{x}{y}$ donde el resultado no es un número entero.

En el conjunto de los números racionales es posible resolver este tipo de operaciones.

Se define el conjunto de los números racionales, notado por $\mathbb{Q}$, como el conjunto de cocientes entre dos números enteros.

Si en $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ entonces $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Así, $\frac{1}{2}$, $\frac{-3}{5}$, $\frac{2}{-7}$ y $\frac{-3}{-8}$ son ejemplos de números racionales.

Nota. Tomado de *Rutas Matemáticas 7* (p.34), Bautista et al., 2013, Santillana.

Esta presentación se alinea con la evolución histórica del número racional, donde la fracción surge precisamente para representar divisiones no exactas (Bautista et al., 2013). Así el texto reproduce una intencionalidad constructiva, pues antes de formalizar el conjunto $\mathbb{Q}$, invita a reconocer la insuficientica del sistema numérico previo. Este enfoque posibilidad el desarrollo de acciones como dividir, comparar y/o expresar relaciones entre cantidades, que pueden luego interiorizarse como procesos mentales y finalmente encapsularse en la noción de fracción $\frac{a}{b}$ Como sostiene Arnon et al. (2014).

Aun así, en ambos textos se observa una tendencia a introducir tempranamente la formación del concepto de numero racional, partiendo de manera casi inmediata en la definición simbólica del conjunto $\mathbb{Q}$. Este modo de presentación puede conducir a que los estudiantes centren su atención en aspectos formales del concepto, centrándose en recordar la notación o fórmula, pero no en el significado.

A partir de esta observación, se considera necesario profundizar en el tipo de tareas que proponen los libros de texto. Por ello, luego de analizar, revisar los ejemplos y ejercicios contenidos en los dos textos guía, se elabora una propuesta para clasificar y analizar las actividades relacionadas con el tema de los números racionales. El propósito de este análisis fue reconocer el tipo de aprendizaje que promueven los libros de texto, es decir, si las actividades planteadas favorecen la comprensión del concepto o si se limitan principalmente al uso mecánico de procedimientos y algoritmos.

A partir de esta revisión, se establecieron categorías de análisis que permiten organizar los ejemplos y ejercicios según su intención didáctica y su nivel de complejidad cognitiva. Estas categorías se construyeron tomando como base la propuesta de Betancourt, Roa-Fuentes y Ballesteros (2021), quienes desarrollan una caracterización de ejemplos y ejercicios a partir de las estructuras mentales del aprendizaje matemático. Dichas categorías fueron adaptadas al estudio del concepto de numero racional, con el fin de analizar cómo se promueve su comprensión en los libros de texto. A continuación, se presentan las categorías utilizadas en este análisis:

- A: ejemplos y/o ejercicios que se remiten a ilustrar o seguir un procedimiento o usar directamente un resultado.
- P: ejemplos y/o ejercicios que requieren considerar acercamientos diferentes a un procedimiento mecanizado y reflexionar sobre el mismo. Implica explicar, analizar y desarrollar nuevas estrategias.
- O: ejemplos y/o ejercicios que requieren usar de manera consistente y coherente los números racionales y/o sus implicaciones con el fin de analizar, demostrar y/o resolver situaciones más complejas que pueden involucrar otros conceptos.

Con base en estas categorías, se elaboró la Tabla 3 que resume la cantidad, el tipo de ejemplos y ejercicios identificados en los textos revisados, observando la proporción y distribución de actividades.

Tabla 3

Clasificación de ejemplos y ejercicios según categorías definidas

Ortiz et al. (2014)	Bautista et al. (2013)
Ejemplos 16	Ejemplos 20
Ejemplos (ejercicios resueltos) 23	Ejercicios resueltos 24
Afianzo competencias 422	Ejercicios propuestos 380
Ejercicios para repasar 44	
Problemas para repasar 8	

Durante la revisión del material, se observó que algunos ejercicios podían corresponder simultáneamente a más de una categoría. Se identificaron ejercicios con elementos de las categorías A y P, en los que la actividad partía de la aplicación de un proceso mecánico, pero exigía posteriormente una explicación o una reflexión de este. De la misma forma, se identificaron ejercicios con rangos de las categorías P y O, donde el estudiante debía, además de analizar o justificar un procedimiento, usar los números racionales para resolver situaciones más complejas.

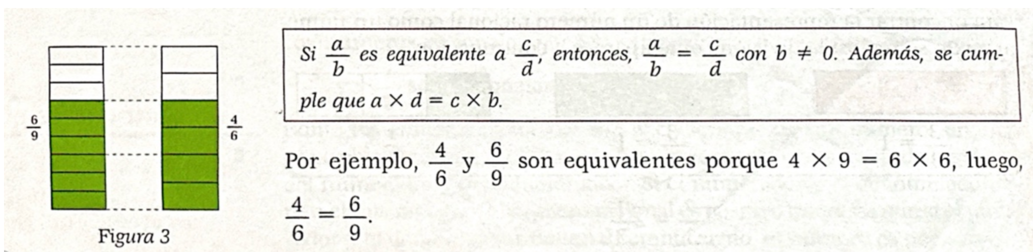
Dichas observaciones muestran que los libros de texto no se limitan a un único nivel de razonamiento, sino que favorecen transiciones entre categorías. En este sentido, el análisis reconoce que las fronteras entre las categorías pueden ser flexibles y depender del tipo de razonamiento que se active en el estudiante. Por ello, se consideró la posibilidad de que un mismo ejercicio fuese clasificado dentro de más de una categoría (A-P o P-O), reflejando la naturaleza dinámica y progresiva del aprendizaje del número racional.

A partir de esta comprensión, se identificó que, entre los libros de texto revisados, predomina la presencia de ejemplos de la categoría A, es decir, aquellos que siguen un procedimiento o la aplicación de un resultado. Este tipo de actividades se presenta en Bautista et al. (2004, p.36), donde se define la equivalencia de fracciones, expresada algebraicamente como

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $a \times d = c \times b$. A partir de esta relación, se ofrece un ejemplo concreto con las fracciones $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$, verificando que se cumple la igualdad entre los productos cruzados, (véase Figura 12). De manera complementaria, se incluye una representación visual mediante rectángulos equivalentes que permite observar que ambas fracciones corresponden a la misma proporción del todo.

Figura 12

Categorización tipo A



Si $\frac{a}{b}$ es equivalente a $\frac{c}{d}$, entonces, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ con $b \neq 0$. Además, se cumple que $a \times d = c \times b$.

Por ejemplo, $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$ son equivalentes porque $4 \times 9 = 6 \times 6$, luego, $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$.

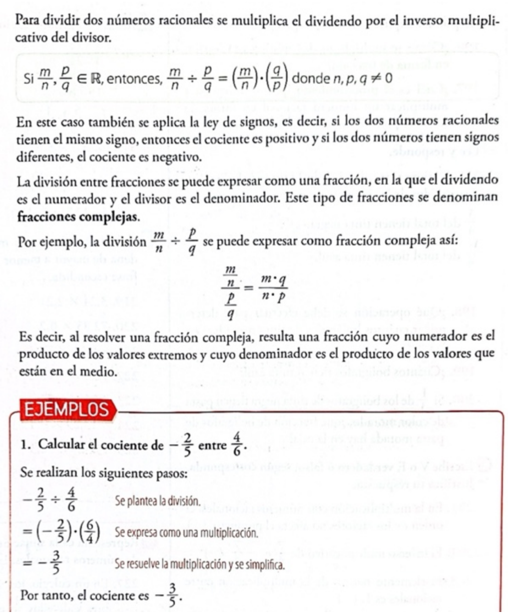
Nota. Tomado de *Matemáticas 7* (p.100), Ortiz et al., (2014), Santillana.

Este tipo de ejemplos se establecen en la categoría A, ya que se centra en la aplicación directa de una regla y la comprobación de un procedimiento previamente establecido, sin requerir procesos de reflexión o generalización más amplios. A su vez, la Figura 12 cumple una función ilustrativa que refuerza la comprensión operativa del concepto de equivalencia, pero no promueve aun un razonamiento analítico o una justificación por parte del estudiante.

Asimismo, en Ortiz et al. (2003, p.100) se observa un predomino de procedimientos mecánicos en ejemplos como la división de racionales en forma de fracción. En la Figura 13 se presenta la regla para dividir dos números racionales, expresada algebraicamente como la multiplicación del dividendo por el inverso multiplicativo. Además, se incluye ejemplo numérico que ilustra la aplicación directa de esta propiedad. Este tipo de presentación corresponde a la categoría A, ya que se centra en la ejecución de un procedimiento específico sin requerir justificación o interpretación de este.

Figura 13

Ejemplo de categorización tipo A



Para dividir dos números racionales se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

Si $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{R}$, entonces, $\frac{m}{n} \div \frac{p}{q} = \left(\frac{m}{n}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right)$ donde $n, p, q \neq 0$

En este caso también se aplica la ley de signos, es decir, si los dos números racionales tienen el mismo signo, entonces el cociente es positivo y si los dos números tienen signos diferentes, el cociente es negativo.

La división entre fracciones se puede expresar como una fracción, en la que el dividendo es el numerador y el divisor es el denominador. Este tipo de fracciones se denominan **fracciones complejas**.

Por ejemplo, la división $\frac{m}{n} \div \frac{p}{q}$ se puede expresar como fracción compleja así:

$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}$$

Es decir, al resolver una fracción compleja, resulta una fracción cuyo numerador es el producto de los valores extremos y cuyo denominador es el producto de los valores que están en el medio.

EJEMPLOS

1. Calcular el cociente de $-\frac{2}{5}$ entre $\frac{4}{6}$.

Se realizan los siguientes pasos:

$-\frac{2}{5} \div \frac{4}{6}$ Se plantea la división.

$= \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{6}{4}\right)$ Se expresa como una multiplicación.

$= -\frac{3}{5}$ Se resuelve la multiplicación y se simplifica.

Por tanto, el cociente es $-\frac{3}{5}$.

Nota. Tomado de *Rutas Matemáticas 7* (p.36), Bautista et al. (2013), Santillana.

En este caso, el ejercicio se limita a la aplicación del algoritmo de división de fracciones, lo que contribuye al desarrollo de habilidades operativas básicas, pero no fomenta la reflexión conceptual ni el análisis del significado de la operación.

En estos tipos de ejemplos y/o ejercicios, la estructura cognitiva que se moviliza corresponde a la memorización y aplicación algorítmica o de resultados directos, lo cual es fundamental para la apropiación de las operaciones y propiedades de los números racionales, pero limita la reflexión independiente al involucrarse en un aprendizaje repetitivo.

No obstante, dentro de los libros de textos revisados también se identifican ejercicios que suscitan un nivel de razonamiento más elevado. En la Figura 14, se propone encontrar dos fracciones positivas cuyos numerador y denominador sean múltiplos de 5 y cuya suma sea igual a

45. Este ejercicio tomado de Ortiz et al. (2014, p. 75), es clasificado dentro de la categoría P, dado que demanda del estudiante un razonamiento reflexivo y analítico más que la aplicación directa de un algoritmo.

Figura 14

Ejercicio de categorización tipo P

Encuentra dos fracciones que cumplan las condiciones dadas.

43. Es un número racional positivo cuyo numerador y denominador son múltiplos de 5, y cuya suma es igual a 45.

Nota. Tomado de *Matemáticas 7* (p.76), Ortiz et al., (2014), Santillana.

A su vez, se identifican ejercicios similares en Bautista et al. (2013), donde también se promueve la reflexión más allá del cálculo mecánico. En la Figura 15, se propone determinar cuáles de las operaciones con números racionales presentan una respuesta incorrecta y justificar elección.

Figura 15

Ejercicios de operaciones con números racionales

RAZONAMIENTO. Indicar cuáles de las operaciones que se dan a continuación, tienen una respuesta equivocada. Justificar la respuesta.

22. $-\frac{7}{10}-\left[-\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)\right]=-\frac{13}{20}$

23. $-\frac{9}{6}+\frac{3}{2}\left[-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(-\frac{7}{10}+\frac{8}{15}\right)\right]=-4$

24. $\frac{4}{5}-\left[-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{5}\right)\right]=-\frac{1}{3}$

25. $-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\left[-\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)\right]=-\frac{1}{20}$

Nota. Tomado de *Rutas Matemáticas 7* (p.64), Bautista et al., (2013), Santillana.

Este tipo de actividades, al igual que en Ortiz et al. (2014), requieren que el estudiante comprenda las propiedades de las operaciones y los signos, evalué los procedimientos realizados y argumente la validez de los resultados. Por ello, esta clase de ejercicios se clasifican en la categoría P, ya que moviliza procesos de razonamiento analítico y de verificación que conducen a una comprensión más profunda del concepto de numero racional. Si resolverlo implica comprender varias condiciones de forma simultánea: el carácter racional del número, la relación entre el numerador y denominador, y la restricción impuesta por la suma. Dado que no existe un procedimiento directo, sino la necesidad de establecer conjeturas, relaciones numéricas y verificar posibles soluciones. Esta actividad promueve una comprensión analítica del número racional al vincular sus propiedades con procesos de búsqueda y verificación.

Algunas actividades de los libros de texto pueden involucrar más de una categoría al mismo tiempo. En este caso, se identifican ejercicios que integran la ejecución de un procedimiento con la reflexión sobre su significado, los cuales corresponden a la categoría A-P. Este tipo de competencias permite que el estudiante no solo aplique reglas, algoritmos o procedimientos aprendidos previamente, sino que también interprete y justifique los resultados obtenidos dentro de un contexto determinado.

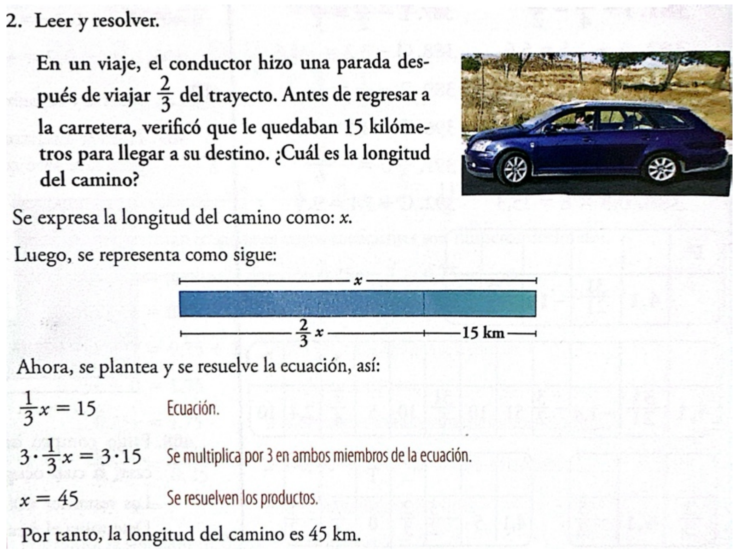
Ortiz et al. (2013, p.118) plantean el siguiente problema:

Un conductor ha recorrido $\frac{2}{3}$ del trayecto y le faltan $15\ km$ para llegar a su destino (véase Figura 16).

Resolver esta situación implica traducir la información verbal y grafica a una ecuación, efectuar operaciones y analizar la coherencia del resultado. Por tanto, este ejercicio refleja la transición entre la aplicación mecánica de un procedimiento (Acción) y la comprensión conceptual (Proceso).

Figura 16

Problema de Categoría A-P



2. Leer y resolver.

En un viaje, el conductor hizo una parada después de viajar $\frac{2}{3}$ del trayecto. Antes de regresar a la carretera, verificó que le quedaban 15 kilómetros para llegar a su destino. ¿Cuál es la longitud del camino?

Se expresa la longitud del camino como: x.

Luego, se representa como sigue:

Ahora, se plantea y se resuelve la ecuación, así:

$\frac{1}{3}x = 15$ Ecuación.

$3 \cdot \frac{1}{3}x = 3 \cdot 15$ Se multiplica por 3 en ambos miembros de la ecuación.

$x = 45$ Se resuelven los productos.

Por tanto, la longitud del camino es 45 km.

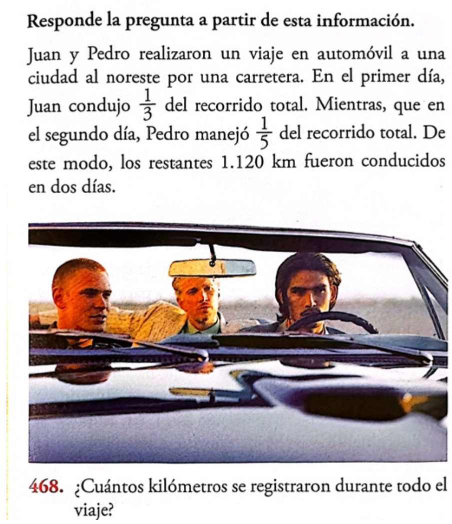
Nota. Tomado de *Rutas Matemáticas 7* (p.118), Bautista et al., (2013), Santillana.

De manera más profunda, se identificaron ejemplos y/o ejercicios correspondientes a la categoría O, ya que implican la coordinación de diferentes conceptos y la abstracción de relaciones generales entre ellos. Este tipo de tareas promueven un nivel de razonamiento estructural, en donde el estudiante no se limita a ejecutar o analizar un procedimiento, sino que utiliza los números racionales como objetos matemáticos definidos para resolver situaciones más complejas.

En la Figura 17, se presenta un problema contextualizado sobre fracciones que involucra la modelación de un recorrido total a partir de partes conocidas. Este ejercicio se clasifica en la categoría O, porque exige que el estudiante trate las fracciones como entidades simbólicas que operan sobre una variable, construya y manipule una representación algebraica y verifique la coherencia en el contexto.

Figura 17

Ejercicio categoría O



Responde la pregunta a partir de esta información.

Juan y Pedro realizaron un viaje en automóvil a una ciudad al noreste por una carretera. En el primer día, Juan condujo $\frac{1}{3}$ del recorrido total. Mientras, que en el segundo día, Pedro manejó $\frac{1}{5}$ del recorrido total. De este modo, los restantes 1.120 km fueron conducidos en dos días.

468. ¿Cuántos kilómetros se registraron durante todo el viaje?

Nota. Tomado de *Matemáticas 7* (p.123), Ortiz et al., (2014), Santillana.

La resolución implica introducir una incógnita x, además usar las fracciones como entidades simbólicas que multiplican a la incógnita x, es decir, expresar el recorrido conducido por Juan en $\frac{1}{3}x$, Pedro $\frac{1}{5}x$ y el resto fueron $1200\ km$, con la finalidad de hallar el valor de la incógnita. Por lo tanto, el estudiante debe escribir la relación estableciendo que las partes suman el todo, es decir, $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + 1120 = x$; a partir de esto debe sumar fracciones con distinto denominador y por tanto la ecuación queda $\frac{8}{15}x + 1120 = x$. Seguido a ello, el estudiante debe despejar $x,$ para esto restamos a ambos lados de la igualdad $\frac{8}{15}x$ y realizando la respectiva operación aritmética básica, obteniendo la proporción $1120 = \frac{7}{15}x$. Finalmente, se despeja y se realiza la multiplicación de fracciones y se obtiene que $x = 1120 * \frac{15}{7} = 160 * 15 = 2400\ km$. Con la obtención del valor de la incógnita x, se realiza una comprobación rápida $\frac{1}{3}(2400) + \frac{1}{5}(2400) + 1120 = 800 + 480 + 1120 = 2400$. Lo cual es coherente.

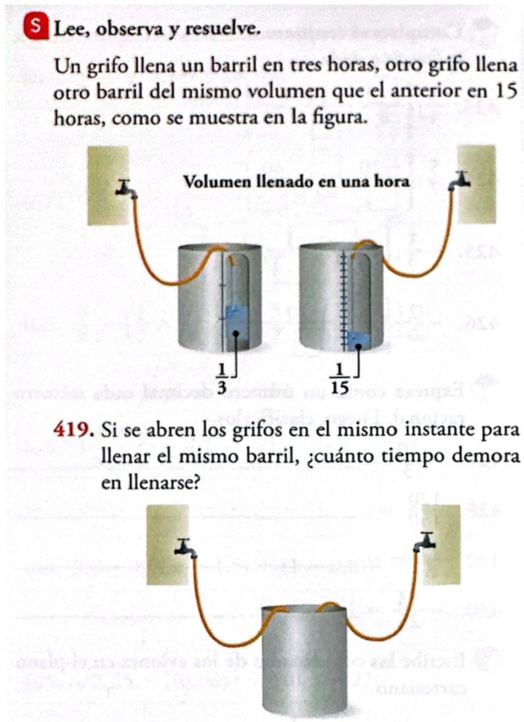
Así, desde la perspectiva de APOE (Arnon et al., 2014), la actividad ilustra la encapsulación de un proceso en un objeto matemático: la representación $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{5}x$ y la ecuación son ya objetos sobre los cuales se realizan acciones algebraicas.

Luego de la categorización de ejemplos y/o ejercicios en O, se identificaron actividades que presentan una transición intermedia entre el razonamiento procesual y la estructuración conceptual. Estas tareas, se caracterizan por exigir simultáneamente la reflexión sobre los procedimientos y la aplicación de los números racionales como objetos de pensamiento en la resolución de situaciones más complejas; por lo tanto, se agrupan en la categoría P-O donde la interiorización de las acciones y la encapsulación de los procedimientos se articulan para dar sentido a nuevas construcciones mentales relacionadas con los números racionales.

Un ejemplo representativo de esta categoría se encuentra en *Matemáticas 7* (Ortiz et al., 2014), donde se plantea el problema de dos grifos que llenan un barril en tiempos distintos (véase Figura 18). Este ejercicio exige no solo un reconocimiento de la fracción de trabajo que realiza cada grifo por unidad de tiempo, sino también la construcción de un modelo que relacione dichas fracciones con el tiempo total de llenado.

Figura 18

Ejemplo de la categoría P-O



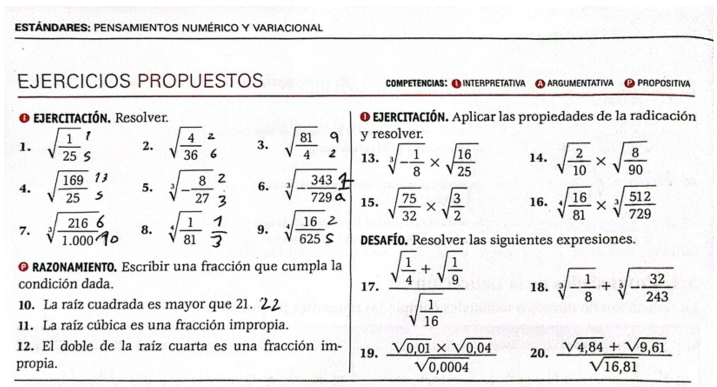
Nota. Tomado de *Matemáticas 7* (p.119), Ortiz et al., (2014), Santillana.

La solución del problema permite validar la coherencia del modelo construido y analizar si el resultado tiene sentido dentro del contexto planteado, lo cual le demanda al estudiante un razonamiento lógico y pensamiento proporcional avanzado. Esta actividad, al integrar el análisis de relaciones con la modelación de situaciones, permite observar un tránsito cognitivo entre el razonamiento reflexivo (estructura Proceso) y la abstracción simbólica (estructura Objeto). Por ello, se considera de la categoría P-O, donde los números racionales adquieren un significado funcional y estructurado a partir de su aplicación en contextos de resolución de problemas.

En contraste con la categorización realizada en este análisis y durante la revisión de los ejercicios se observó que ambos textos de la editorial Santillana incorporan sus propias clasificaciones internas. En *Rutas Matemáticas 7* (Bautista et al., 2013), los ejercicios se organizaban mediante tres competencias (véase Figura 19): I (Interpretativa), A (Argumentativa) y P (Propositiva).

Figura 19

Clasificación de actividades por competencias



ESTÁNDARES: PENSAMIENTOS NUMÉRICO Y VARIACIONAL

EJERCICIOS PROPUESTOS

COMPETENCIAS: I INTERPRETATIVA A ARGUMENTATIVA P PROPOSITIVA

I EJERCITACIÓN. Resolver.

1. $\sqrt{\frac{1}{25}}$ $\frac{1}{5}$
2. $\sqrt{\frac{4}{36}}$ $\frac{2}{6}$
3. $\sqrt{\frac{81}{4}}$ $\frac{9}{2}$
4. $\sqrt{\frac{169}{25}}$ $\frac{13}{5}$
5. $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$ $\frac{2}{3}$
6. $\sqrt[3]{-\frac{343}{729}}$ $\frac{7}{a}$
7. $\sqrt[3]{\frac{216}{1.000}}$ $\frac{6}{10}$
8. $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$ $\frac{1}{3}$
9. $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$ $\frac{2}{5}$

P RAZONAMIENTO. Escribir una fracción que cumpla la condición dada.

10. La raíz cuadrada es mayor que 21. 22
11. La raíz cúbica es una fracción impropia.
12. El doble de la raíz cuarta es una fracción impropia.

I EJERCITACIÓN. Aplicar las propiedades de la radicación y resolver.

13. $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} \times \sqrt{\frac{16}{25}}$
14. $\sqrt{\frac{2}{10}} \times \sqrt{\frac{8}{90}}$
15. $\sqrt{\frac{75}{32}} \times \sqrt{\frac{3}{2}}$
16. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} \times \sqrt[3]{\frac{512}{729}}$

DESAFÍO. Resolver las siguientes expresiones.

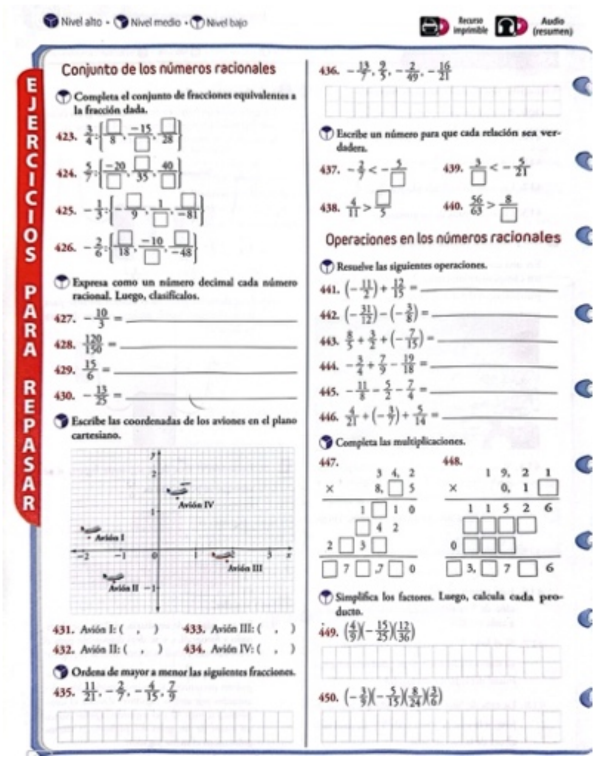
17. $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{9}}}{\sqrt{\frac{1}{16}}}$
18. $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} + \sqrt[5]{-\frac{32}{243}}$
19. $\dfrac{\sqrt{0{,}01} \times \sqrt{0{,}04}}{\sqrt{0{,}0004}}$
20. $\dfrac{\sqrt{4{,}84} + \sqrt{9{,}61}}{\sqrt{16{,}81}}$

Nota. Tomado de *Rutas Matemáticas 7* (p.118), Bautista et al., (2013), Santillana.

Por su parte *Matemáticas 7* (Ortiz et al., 2014) clasifica los ejercicios de la sección “Afianzo competencias” con etiquetas como: I (Interpreto), A (Argumento), E (Ejercito), R (Razono) y S (Soluciono problemas), además de identificar los ejercicios para repasar con niveles de dificultad: bajo, medio y alto (véase Figura 20).

Figura 20

Clasificación de los ejercicios por niveles de dificultad



Nota. Tomado de *Matemáticas 7* (p.119), Ortiz et al., (2014), Santillana.

Estas clasificaciones editoriales muestran una intención de guiar el aprendizaje según distintos niveles de desempeño, pero su propósito se orienta más hacia el aspecto pedagógico que haga el análisis del pensamiento matemático. Por su parte, la categorización A-P-O propuesta se enfoca en identificar procesos cognitivos que intervienen en la comprensión del número racional, permitiendo reconocer con mayor precisión como el estudiante avanza desde la acción inicial hasta la reflexión y la construcción de significados más estructurados.

En definitiva, el análisis de los ejemplos y ejercicios permitió reconocer como las actividades de los libros de texto promueven distintos niveles de comprensión del número racional, desde la aplicación algorítmica de procedimientos hasta la modelación y el razonamiento estructural. La categorización A-P-O evidenció una progresión en el tipo de demandas cognitivas que enfrentan los estudiantes, mostrando que el aprendizaje de este concepto requiere transitar de la Acción hacia el Proceso. Este enfoque permite una lectura consecuente de los materiales escolares, al identificar no solo que se enseña sino como se movilizan los procesos mentales que sustenten la construcción del conocimiento del número racional. Los resultados de esta revisión constituyen una base importante para el análisis posterior sobre las aplicaciones didácticas y cognitivas de la enseñanza de los números racionales.

5.3 Aspectos sobre la enseñanza y aprendizaje de los números racionales

Diversas investigaciones coinciden en que la enseñanza y compresión de los números racionales sigue siendo un desafío en el aula. Andrade (2023) sostiene que "el aprendizaje y comprensión del número racional no ha mejorado, a pesar de los numerosos estudios sobre su enseñanza y aprendizaje en el ámbito escolar" (p. 174). Esta observación introduce un problema persistente: aunque existe una amplia literatura sobre el tema, los avances en investigación no siempre se traducen en mejores claras en el aula. A partir de esta afirmación, resulta pertinente revisar los trabajos que describen como los estudiantes enfrentan las fracciones, los decimales y otras expresiones de lo racional, para identificar las barreras cognitivas y didácticas que mantienen esa brecha entre la teoría y práctica.

En la misma línea, Gómez y Schmalbach (2016) señalan que:

> La representación de los números racionales en forma de fracción es la más usual en los libros de texto, de allí que la mayoría de los problemas en la enseñanza y aprendizaje de los números racionales surgen en este aspecto, siendo el problema tan antiguo como dichos números. (p. 819)

Estas observaciones permiten entender que gran parte de las dificultades de los estudiantes se relacionan no solo con la naturaleza abstracta del número racional, sino también con la forma en que este se presenta y se trabaja en el aula, donde la fracción suele convertirse en la única vía de acceso al concepto.

Al respecto Vasco (1991, citado en Arcila, 2016), señala que existe una brecha notable entre la comprensión de los números enteros y los números racionales, dado que sus relaciones no son exactas. Según el autor, comprender los racionales implica reconocerlos como expresiones de magnitudes comparadas entre sí, lo que da lugar a dos interpretaciones fundamentales: el numero como medidor y como razón. Dicho planteamiento revela la necesidad de promover en los estudiantes una visión más amplia del número, que supere el uso instrumental de la fracción.

En coherencia con lo anterior, los Lineamientos Curriculares del MEN (1998), destacan la importancia del pensamiento numérico como una capacidad que permite establecer relaciones entre situaciones reales y operaciones matemáticas. Desde esta perspectiva, comprender los números racionales supone no solo aplicar procedimientos de cálculo, sino también desarrollar la habilidad de razonar, argumentar y juzgar la pertinencia de los resultados obtenidos.

En cuanto a las investigaciones que profundizan en las causas de estas dificultades, Perera y Valdemoros (2009, como se citó en Gómez y Schmalbach, 2015), sostienen que los problemas comienzan cuando los estudiantes se enfrentan al estudio de las fracciones sin previo conocimiento ni experiencias cotidianas que les permitan relacionarlos con situaciones reales. Por su parte, Gairín y Muñoz (2005) coinciden en que el desarrollo de los números racionales en los libros de texto suele centrarse en los procedimientos, lo que dificulta la comprensión conceptual y su aplicación en contextos reales.

De igual forma, De León (1998, como se citó en Gómez y Schmalbach, 2016) confiere parte de las dificultades a la tendencia de presentar la fracción únicamente como resultado del fraccionamiento de una unidad, sin reconocer su carácter de un par ordenados de números; lo que también afecta la comprensión de la equivalencia de fracciones (Maza, 1999, como se citó en Gómez y Schmalbach, 2016). Quispe y Gallardo (2009), por ejemplo, encontraron que un gran número de estudiantes de secundaria poseen una noción incompleta del número racional, ya que lo asocian con cocientes de enteros sin comprender el papel del denominador.

En este panorama de dificultades teóricas y metodológicas, el estudio de Arcila (2016) aporta una mirada empírica valiosa, al mostrar como estos problemas se manifiestan en la práctica escolar. En el análisis de una prueba diagnóstica aplicada a estudiantes, la autora observó que:

> Los estudiantes presentan dificultades en los conceptos de fracción en cuanto: clasificación, medida, orden, operaciones y problemas. Lo que evidencia la falencia que se tienen en los conceptos previos, algunos estudiantes muestran dificultad en la interpretación de los enunciados y en la relación de la comunicación escrita con el lenguaje matemático, lo que dificultad un aprendizaje significativo. (p. 59)

Arcila (2016) explica que los estudiantes suelen reconocer con mayor facilidad las fracciones propias e impropias, pero presentan dificultades al identificar la fracción entera, que tienden a clasificar erróneamente como impropia. Además, señala que, al analizar representaciones gráficas, algunos estudiantes cambian el orden entre el numerador y denominador, así como otro grupo de estudiantes no identifican correctamente la unidad de referencia. Lo anterior, refleja vacíos conceptuales en la comprensión del significado parte-todo. En relación con el uso de fracción como operador, la autora observa que solo la mitad de los grupos logra establecer correctamente las proporciones entre conjuntos, mientras que el resto muestra errores al tomar el total como denominador. En cuanto a las operaciones de suma y resta los estudiantes evidencian que al realizar operaciones donde el signo menos este al inicio los estudiantes se confunden e incluso todo lo escriben con ese mismo signo. De igual manera, señala que, al trabajar la fracción como cociente, varios estudiantes realizan divisiones numéricas sin reconocer la estructura fraccionaria subyacente. Finalmente, cuando se analiza la fracción como razón la autora comenta que "al enfrentarse a una razón y luego comprarla con otra formando una operación se confundieran sin saber el proceso que deben realizar" (p.58), en contraparte en la resolución de problemas afirma que "los estudiantes organizan los datos y disponen de ellos para procesar la información y obtener un resultado" (p.58).

En conjunto, estos resultados muestran que la comprensión del número racional se encuentra fragmentada, pues los estudiantes logran manejar procedimientos aislados, pero sin integrar los diferentes significados de la fracción en un mismo esquema de pensamiento. Esta desconexión entre la acción y el razonamiento evidencia la necesidad de fortalecer las estrategias de enseñanza que promuevan una comprensión más relacional y menos operativa del concepto de fracción.

A partir de las investigaciones revisadas, se evidencia que la comprensión de los números racionales requiere una enseñanza que articule las representaciones, los significados y las interacciones en el aula. En esta dirección, Arcila (2016) plantea que el proceso formativo debe apoyarse en los conocimientos previos de los estudiantes, particularmente los relacionados con la noción de parte-todo, la medida, la razón y el cociente, así como en estrategias cooperativas que promuevan la reflexión colectiva y la argumentación. Además, resalta la necesidad de seleccionar materiales que conecten el lenguaje cotidiano con la notación matemática, permitiendo una transición gradual hacia el pensamiento formal; unidas, estas consideraciones invitan a repensar la enseñanza de los números racionales desde una perspectiva más integral, donde el aprendizaje deje de centrarse en la ejecución de algoritmos o aplicación de procedimientos y se oriente hacia la construcción significativa del concepto.

5.4 Modelos cognitivos previos sobre los números racionales

La intensión por comprender los números racionales ha sido de gran interés en la educación matemática. Autores como Dubinsky, Yopp, Tall y Arnon, entre otros, han insistido en que su aprendizaje no resulta sencillo, pues exige un tipo de razonamiento diferente al que se usa con los números naturales. Según mencionan Arnon et al. (2014) a partir de Yopp et al. (2011), las dificultades aparecen tanto en los estudiantes como en los profesores, debido a los esquemas previos que interfieren en la comprensión de los racionales.

Arnon et al. (2014) señalan que los números racionales constituyen un tema clave tanto en la educación primaria como en la segundaria. Por ello, resulta importante que los docentes comprendan sus distintas formas de representación, en especial las relacionadas con los decimales periódicos. A pesar de ello, los autores afirman que “many preservice elementary and middle school teachers have considerable difficulty with repeating decimals” [muchos futuros docentes de primaria y secundaria presentan dificultades significativas con los decimales periódicos] (Arnon et al., 2014, p. 76). Estas problemáticas suelen manifestarse en ideas como creer que las cifras decimales infinitas dejan un “pequeño faltante” (“there’s a wee bit missing”) o la idea de que los números reales solo corresponden a experiencias físicas, es decir, solo tienen sentido cuando se relaciones con situaciones físicas, lo cual restringe su comprensión a lo empírico.

En la misma línea, Tall y Schwarzenberger (1978) observaron que incluso estudiantes universitarios tienden a pensar en términos de “infinitésimos” y no reconocen que dos representaciones decimales diferentes pueden denotar el mismo número racional, por ejemplo, $\overline{0.9} = 1$. Esto muestra que la comprensión del número racional no surge de manera natural, sino que requiere una reorganización cognitiva guiada que permita superar las nociones intuitivas heredades del pensamiento aritmético elemental.

Según Arnon et al. (2014), un decimal periódico puede considerarse como un ejemplo de infinito potencial, que representa un proceso de formación continua de dígitos para expresar un número racional mediante una división larga. No obstante, también indican que dicho número puede entenderse como la representación de un número con valor fijo. Esta distinción entre infinito potencial y actual muestra la evolución cognitiva desde la Acción hacia la abstracción estructural del número racional. La distinción entre el infinito potencial y el infinito actual se comprende, de acuerdo con Dubinsk et al. (2005a, 2005b, como se citó en Arnon et al., 2014), a partir del mecanismo cognitivo de encapsulación. Este proceso mental permite transformar una acción o secuencia infinita en un objeto de pensamiento. En palabras de Arnon et al. (2014), “as an individual reflects on a completed infinite process. He or she can conceive of it as a totality” [cuando un individuo reflexiona sobre un proceso infinito completado. Él o ella puede concebirlo como una totalidad] (p.77), lo que sugiere que, al reflexionar sobre un proceso, como el desarrollo decimal periódico, el sujeto deja de percibirlo como una acción interminable y pasa a concebirlo como una totalidad finita y manejable. Dicho cambio evidencia el transito desde la Acción concreta de generar dígitos hacia la comprensión abstracta del número racional como una entidad mental coherente y completa.

En relación con los decimales periódicos, Arnon et al. (2014) proponen una descomposición genética que describe la transición cognitiva que lleva al estudiante desde la acción hasta la formación del objeto mental. En las primeras etapas, el aprendizaje se apoya en acciones concretas con números naturales; por ejemplo, cuando el estudiante recita o escribe una secuencia de dígitos que da inicio a la expresión decimal periódica. Posteriormente, dichas acciones se interiorizan y se transforman en un proceso mental en el que el estudiante reconoce que “from some point on the decimal repeats forever to form an infinite string” [a partir de cierto punto, el decimal se repite eternamente generando una cadena infinita] (Arnon et al., 2014, p. 77). Al reflexionar sobre esta idea, se produce la encapsulación del proceso en un objeto mental, lo que permite operar con decimales, compararlos y relacionarlos con fracciones, comprendiendo que ambos representan el mismo número racional.

Este avance conceptual se apoya en el Ciclo de Enseñanza ACE (A: Actividades; C: Discusión de Clase; E: Ejercicios), diseñado por Dubinsky (2005a, 2005b) con el cual Arnon et al. (2014) señalan que la primera iteración busca (A) buscaba "to interiorize the Action of listing digits to a mental Process (in order to conceive of an infinite string of digits comprising a repeating decimal)" [interiorizar la Acción de enumerar dígitos en un proceso mental (con el fin de concebir una cadena infinita de dígitos que componen un decimal repetitivo)] (p. 79), las dos iteraciones posteriores se orientaron hacia la encapsulación y la consolidación del esquema del número racional como objeto matemático. En síntesis, el modelo cognitivo propuesto desde la teoría APOE muestra que el aprendizaje de los números racionales no se limita a repetir algoritmos, sino que requiere coordinar acciones, procesos y objetos mentales hasta formar un esquema coherente que dé sentido al concepto de número racional.

Los modelos cognitivos revisados muestran que comprender los números racionales requieren mucho más que aprender reglas, procedimientos o algoritmos. Los aportes de Dubinsky, Tall, Arnon y otros investigadores desde la teoría APOE permite entender que el estudiante necesita interiorizar las acciones, coordinarlas y finalmente encapsularlas para construir un esquema coherente del número racional. En otras palabras, aprender sobre los números racionales significa reorganizar la forma de pensar los números, integrando sus diferentes representaciones y significados en una comprensión más completa y abstracta del concepto.

En este camino, como señalan Arnon et al. (2014), la comprensión del número racional inicialmente como fracción requiere de la transición entre la Acción y el Proceso. La transición de una Acción a un Proceso está condicionada desde la perspectiva de Piaget (1974-1976) por el desarrollo de un estado de no conciencia a un nivel de plena conciencia. Esta transición según Piaget no ocurre por un estado de iluminación, sino que es el resultado de una construcción progresiva donde el individuo incrementa sus estados de conciencia. Por ejemplo, Arnon (1998) identifica dos niveles que están relacionados con la interiorización de una fracción no unitaria, estos niveles consideran en parte el error como una forma de generar conciencia de lo que se está construyendo. Así la descomposición genética considera Acciones sobre Objetos concretos (por ejemplo, sectores circulares), la interiorización de acciones incorrectas que luego son parcialmente correctas, para lograr la interiorización del Proceso que incluye un conjunto de Acciones correctas que caracterizan la comprensión de la fracción no unitaria. Este es un ejemplo de cómo se puede describir la construcción de una pequeña porción de conocimiento en términos de cada paso que puede desarrollar niveles cada vez más complejos de comprensión de dicho conocimiento.

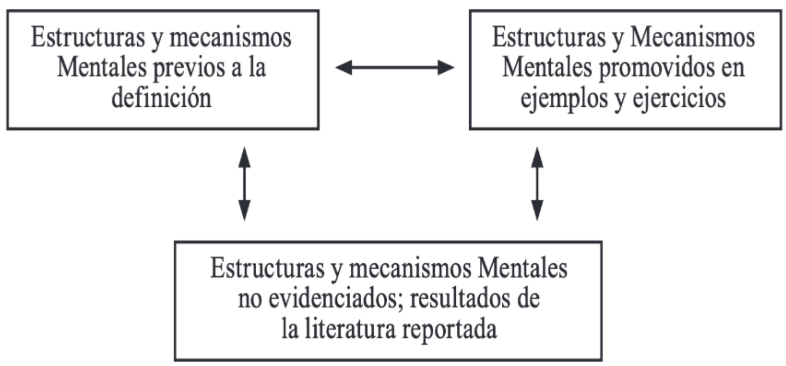
5.5 Una descomposición genética hipotética de los números racionales

El proceso de construcción del concepto de número racional implica una compleja reorganización cognitiva que articula dimensiones históricas, epistemológicas y didácticas. Desde la perspectiva de la teoría APOE (Dubisnky, 1991; Arnon et al., 2014), dichas construcción puede describirse mediante una descomposición genética, entendida como una hipótesis teórica sobre las construcciones mentales que un sujeto debe realizar para comprender un concepto matemático determinado. En esta investigación, la descomposición genética se elabora en el marco de la fase de Análisis Teórico del ciclo de investigación APOE, teniendo como insumo principal el análisis epistemológico-histórico y el estudio de los libros de texto escolares *Matemáticas 7* (Ortiz et al.,

2014) y *Rutas Matemáticas 7* (Bautista et al., 2013). Tal integración resulta coherente con el planteamiento de Betancur et al. (2021), quienes sostienen que el análisis de libros de texto constituye un medio valido para reconocer la manera en que se presenta y organiza un concepto matemático, y a partir de ello formular hipótesis sobre las construcciones mentales que los estudiantes podrían desarrollar (véase Figura 21).

Figura 21

Ciclo para la elaboración de una descomposición genética preliminar teniendo como insumo principal el análisis de los libros de texto



Nota. Tomado de *Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: el análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos* (p.254), por Betancur et al. 2021, Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática.

En ese sentido, la descomposición genética que se propone busca vincular los significados históricos del concepto de número racional con los significados escolares que emergen en los textos analizados, con el propósito de caracterizar las Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas implicados en su comprensión.

5.5.1 Concepciones previas

Las concepciones previas que los estudiantes manifiestan frente al número racional se configuran a partir de su experiencia con los números naturales y enteros, así como de las primeras aproximaciones escolares al concepto en los grados anteriores. Como se expuso en el análisis epistemológico-histórico, el número racional surge históricamente de la necesidad de expresar cantidades no representables mediante números naturales, en contextos de medición, reparto y comparación de magnitudes. Este desarrollo histórico guarda relación con las comprensiones iniciales que los estudiantes suelen mostrar, al entender las fracciones como partes de una unidad o como resultados de divisiones no exactas (Obando, 2003; Arcila 2016).

La revisión de los textos permite reconocer como las propuestas escolares influyen en dichas concepciones. Ortiz et al. (2014), destaca la unidad sobre los números racionales combina definiciones formales, como la presentación del conjunto $\mathbb{Q}$ (véase Figura 10), con ejemplos y problemas que introducen las fracciones a partir de situaciones de la vida cotidiana. En este texto se incluyen actividades donde el estudiante debe identificar o modelar partes de una cantidad total, resolver repartos o analizar fragmentos de un recorrido (véase Figura 16), lo cual refuerza la idea de fracción como parte–todo y, progresivamente, como cociente. También aparecen tareas que plantean relaciones de caudal o flujo (véase Figura 17), que exigen comparar magnitudes y vinculan el concepto con la proporcionalidad.

El texto de Bautista et al., (2013) se presenta una secuencia semejante, pero organiza los contenidos en "rutas" de aprendizaje. Allí se observa que las primeras actividades se relacionan con mediciones y repartos, y más adelante se incluyen ejercicios de comparación y equivalencia de fracciones (véase Figura 13 y Figura 15), donde se explican procedimientos y se proponen justificaciones gráficas. Posteriormente, se abordan temas de proporciones y porcentajes (Figura

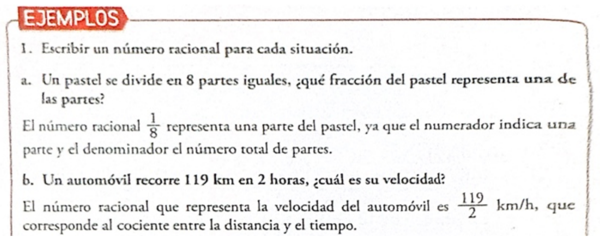
17), que amplían el significado del número racional y lo conectan con contextos de proporcionalidad.

Del análisis conjunto de ambos textos se reconoce una trayectoria de construcción que inicia con tareas de reparto y fraccionamiento de la unidad (significado parte–todo), continúa con actividades de medición (significado de medida) y de equivalencia (significado de cociente), y culmina con representaciones en la recta numérica y aplicaciones porcentuales (significados de razón y operador). Esta secuencia coincide con la evolución histórica del concepto y sugiere las acciones y procesos cognitivos que los estudiantes pueden desarrollar al trabajar con tales actividades.

En consecuencia, las concepciones previas consideradas en esta descomposición genética se apoyan tanto en los significados históricos del número racional como en la forma en que estos aparecen en los libros analizados. El numero racional ha sido comprendido de diversas formas: como medida, cociente, razón y operador, cada una vinculada a distintas prácticas y necesidades matemáticas (Kieren, 1980). Por ejemplo, en los textos escolares analizados, significados como medida o cociente emergen al concebir la fracción como el resultado de dividir una cantidad en partes iguales (véase Figura 22) o comparar longitudes mediante unidades fraccionaras. Estas situaciones reproducen los contextos que históricamente dieron origen al concepto y ofrece a los estudiantes reconocer como los significados que sustentan el desarrollo del concepto se recontextualiza en la enseñanza

Figura 22

Diversas formas de comprensión del número racional



EJEMPLOS

1. Escribir un número racional para cada situación.

a. Un pastel se divide en 8 partes iguales, ¿qué fracción del pastel representa una de las partes?

El número racional $\frac{1}{8}$ representa una parte del pastel, ya que el numerador indica una parte y el denominador el número total de partes.

b. Un automóvil recorre 119 km en 2 horas, ¿cuál es su velocidad?

El número racional que representa la velocidad del automóvil es $\frac{119}{2}$ km/h, que corresponde al cociente entre la distancia y el tiempo.

Nota. Tomado de *Matemáticas 7* (p.72), Ortiz et al., (2014), Santillana.

5.5.2 Estructura Acción

En el nivel Acción, el estudiante actúa directamente sobre objetos o representaciones del número racional, sin haber interiorizado todavía los procedimientos que ejecuta. Este es el punto de partida en la construcción cognitiva del número racional, pues el pensamiento se apoya en manipulaciones y observaciones concretas antes de poder operar mentalmente (Dubinsky, 1991).

Al revisar los libros de texto, se advierte que las primeras actividades que proponen se centran en este tipo de acciones: dividir, medir y ubicar en la recta numérica. Por ejemplo, las unidades sobre números racionales inician con ejercicios donde el estudiante debe dividir figuras en partes iguales, identificar la fracción correspondiente o sombrear determinadas porciones de una figura (véase Figura 10). Este tipo de tareas consolida la idea de parte–todo, ya que obligan a reconocer una unidad y a establecer la relación entre el número de partes tomadas y el total. El estudiante no reflexiona todavía sobre el significado simbólico del número fraccionario, pero empieza a construir una noción operativa de equivalencia visual y de proporcionalidad implícita.

Así mismo los libros de texto incorporan actividades de medición con unidades fraccionarias. En ellas se pide medir segmentos o comparar longitudes usando medios o cuartos de unidad. Estas tareas desplazan el foco de la figura estática hacia la Acción repetitiva de contar cuántas veces “cabe” una parte en el todo. Cognitivamente, esto introduce la fracción como medida, una relación entre magnitudes que amplía la comprensión inicial del reparto. Según Kieren (1980) y Behr et al. (1992), estas situaciones son esenciales porque permiten transitar de una concepción discreta del número a otra continua, en la que la fracción representa la magnitud de una cantidad.

En las primeras unidades se incluyen ejercicios en los que el estudiante debe dividir colecciones de objetos, determinar la fracción representada o ubicar una fracción en la recta numérica incorporando una mayor variedad de contextos. Más adelante aparecen actividades de comparación y equivalencia entre fracciones, donde se solicita justificar por qué dos representaciones son iguales o distintas. Estos ejercicios activan acciones de conteo, comparación visual y construcción de subdivisiones, que más adelante se interiorizan como procesos de equivalencia y ordenamiento.

Las acciones ligadas a los significados parte–todo, medida y comparación cumplen, en conjunto, una función de base: proporcionan al estudiante los referentes perceptuales y las experiencias concretas necesarias para interiorizar los procedimientos que luego se convertirán en procesos mentales. Las tareas de reparto fijan la noción de unidad; las de medición hacen visible la repetición de una unidad fraccionaria; y las de comparación obligan a modificar la unidad para establecer equivalencias. En la teoría APOE, estas repeticiones y variaciones de contexto son fundamentales, porque al reiterar la misma Acción en distintas representaciones, el estudiante empieza a reconocer un patrón que puede luego ejecutar mentalmente, dando paso al nivel de Proceso.

5.5.3 Estructura Proceso

En el nivel Proceso, el estudiante comienza a interiorizar las Acciones que antes realizaba de forma concreta o con apoyo visual. Según Dubinsky (1991), un Proceso surge cuando la persona ya no necesita manipular los objetos, sino que puede ejecutar mentalmente la Acción, anticipar su resultado y reflexionar sobre el procedimiento. En este punto, la comprensión del número racional se amplía, pues la fracción deja de ser solo una parte visible o una medida tangible y pasa a concebirse como una relación entre dos números enteros.

Los libros de texto promueven este tránsito hacia la interiorización mediante actividades que ya no dependen de la manipulación concreta, sino del razonamiento simbólico y numérico. Aparecen ejercicios en los que se debe comparar fracciones con distinto denominador, utilizando denominadores comunes o transformaciones equivalentes. En ellos, el estudiante ya no observa figuras, sino que aplica reglas o estrategias para determinar cuál fracción es mayor, generalizando la acción de subdividir y repetir. Esta capacidad de operar sobre símbolos sin recurrir a la representación visual marca el paso del nivel de Acción al Proceso. Estas actividades demandan que el estudiante se anticipe al resultado, comprenda la reversibilidad de las operaciones y justifique las relaciones sin apoyo gráfico. En términos cognitivos, esto significa que ha interiorizado las acciones de subdividir y agrupar partes iguales, transformándolas en un procedimiento mental que puede reproducir de forma general.

En este nivel también aparecen problemas que requieren argumentar y explicar los resultados. Por ejemplo, se incluyen situaciones donde se debe decidir qué cantidad es mayor, si tres cuartos o dos tercios, y justificar la elección (Ortiz et al., 2014, p. 123). El énfasis se traslada del “hacer” al “pensar”, lo cual evidencia que la comprensión del número racional ha comenzado a consolidarse como una estructura operativa. En este tipo de ejercicios, el estudiante empieza a coordinar distintas representaciones (fracción, número decimal, porcentaje) y a reconocer su equivalencia.

Este Proceso mental implica también una generalización progresiva: el estudiante comprende que las fracciones representan la misma cantidad, aunque sus formas sean diferentes, lo que constituye la base para reconocer el número racional como una clase de equivalencia de pares ordenados de enteros. Desde la perspectiva de Kieren (1980) y Behr et al. (1992), esta es una etapa clave en la evolución conceptual del número racional, pues en ella confluyen los significados de cociente, medida y razón.

5.5.4 Estructura Objeto

El nivel Objeto se alcanza cuando el estudiante deja de concebir las fracciones únicamente como procedimientos o relaciones y comienza a verlas como entidades matemáticas con existencia propia. En este punto, el número racional se encapsula como un Objeto de pensamiento, que puede manipularse, compararse y operar con él sin necesidad de regresar a las Acciones o Procesos que le dieron origen (Dubinsky, 1991; Arnon et al., 2014).

En los libros de texto, este tránsito se refleja en las unidades dedicadas a las operaciones con fracciones y números decimales, así como en los apartados donde se abordan los porcentajes, razones y proporciones. En estas secciones, las fracciones ya no aparecen únicamente como partes o medidas, sino como números que se pueden sumar, restar, multiplicar o dividir, de acuerdo con reglas establecidas. El estudiante comienza a reconocer que $\frac{3}{4}$ o 0.75 no representan solamente Acciones de repartir o medir, sino valores numéricos que pueden combinarse y transformarse manteniendo su significado.

Este cambio se hace visible en los ejercicios donde se solicita operar con fracciones equivalentes o convertir fracciones a decimales, así como en los problemas que involucran porcentajes o razones de proporcionalidad. Estas actividades promueven una comprensión más abstracta del número racional, pues requieren reconocerlo como elemento del conjunto $\mathbb{Q}$, con propiedades propias dentro del sistema numérico. El estudiante ya no necesita representar físicamente las fracciones, sino que puede operar con ellas a nivel simbólico, lo que evidencia la encapsulación del concepto. Al resolver situaciones donde se comparan descuentos, tasas o proporciones, el estudiante aplica los racionales como herramientas de análisis, lo que confirma que el concepto ha adquirido el estatus de objeto matemático utilizable. En términos de la teoría APOE, este reconocimiento de la fracción como número constituye una reorganización mental profunda: el estudiante puede pensar sobre el número racional en lugar de limitarse a pensar con él.

Además, la representación de los racionales en la recta numérica se convierte en un recurso esencial en este nivel. En los textos analizados, se promueve ubicar fracciones y decimales en la recta para compararlos o determinar intervalos. Esta práctica consolida la comprensión de los racionales como elementos de un conjunto ordenado y denso, donde entre dos números siempre puede encontrarse otro. Tal propiedad refuerza la noción de continuidad, a la vez que prepara el camino hacia la comprensión de los números reales.

En conjunto, la descomposición genética preliminar del número racional formulada en este estudio permite comprender la complejidad del tránsito cognitivo que los estudiantes recorren desde las primeras acciones concretas hasta la construcción de un esquema mental integrado. El análisis de los niveles Acción, Proceso y Objeto, sustentado en la teoría APOE (Dubinsky, 1991; Arnon et al., 2014) y en el examen detallado de los libros de texto pone en evidencia que la comprensión del número racional no sigue una secuencia lineal, sino que implica un avance progresivo en el que cada nivel reorganiza estructuras previas. De este modo, las distintas interpretaciones del número racional: parte–todo, medida, cociente, razón y operador, se articulan gradualmente en una red coherente de significados. Así, la descomposición genética aquí presentada no pretende constituir un modelo definitivo, sino una hipótesis teórica que orienta la descripción de las construcciones mentales implicadas en el aprendizaje de los números racionales, así como el diseño de situaciones didácticas que favorezcan su desarrollo en la educación básica.

6. Conclusiones

El desarrollo de este trabajo permitió comprender que el aprendizaje del número racional en los estudiantes de secundaria no se limita a la aplicación de reglas sobre un sistema numérico, sino que requiere una reconstrucción en la manera como se concibe el significado del número. A lo largo del análisis teórico se hizo evidente que esta noción involucra procesos mentales complejos, donde el estudiante debe reorganizar su pensamiento para pasar de una comprensión discreta del número natural a una comprensión relacional del número racional. Tal como señalaron Berh et al. (1983) y Kieren (1980), este tránsito supone un cambio conceptual que va más allá del dominio de algoritmos o de la representación simbólica. En el contexto educativo colombiano, dicho proceso continúa siendo un reto, pues la enseñanza sigue privilegiando la práctica mecánica sobre la reflexión conceptual.

En análisis desde la teoría APOE permitió describir con mayor claridad las estructuras y mecanismos mentales que intervienen en esta construcción. Se concluye que la comprensión del número racional implica la interiorización de Acciones como dividir, comprar y medicar, que progresivamente se transforman en Procesos capaces de relacionar las representaciones fraccionaria, decimal y proporcional. Estos Procesos, al consolidarse, se encapsulan en un Objeto de pensamiento que posibilita al estudiante operar con sentido sobre los racionales. En este punto, la teoría APOE se confirma como un marco teórico pertinente para analizar el aprendizaje de conceptos matemáticos en niveles escolares, mostrando su aplicabilidad más allá del ámbito teórico.

La aplicación de la categorización A-P-O propuesta por Betancurt, Roa-Fuentes y Ballesteros (2021), al análisis de los textos escolares Matemáticas 7 (Ortiz et al., 2014) y Rutas Matemáticas 7 (Bautista et al., 2013), permitió observar cómo las actividades propuestas se concentran en Acciones de tipo algorítmico, limitando la oportunidad de promover procesos de interiorización y reflexión. Sin embargo, también se identificaron ejercicios con potencial para favorecer la comprensión, especialmente aquellos que vinculan la fracción con la medida o la comparación de magnitudes. Este resultado evidencia que los libros de texto pueden constituir una fuente valiosa para inferir las construcciones cognitivas que subyacen en las tareas escolares, siempre que el docente los aborde con una mirada crítica y sustentada en la teoría.

Como producto de este análisis, se elaboró una descomposición genética preliminar del número racional que articula tres dimensiones: la epistemológica, que retoma la evolución histórica del concepto y sus significados; la curricular, que incorpora los lineamientos del MEN (1998, 2006) y del NCTM (1989, 2000); y la cognitiva, que describe los mecanismos mentales involucrados en su comprensión. Esta integración permitió construir una visión coherente y fundamentada del número racional en la que convergen los aspectos históricos, teóricos y educativos del concepto. Además, la descomposición genética diseñada constituye una base sólida para avanzar hacia fases posteriores del ciclo de investigación de la teoría APOE, en especial hacia el diseño de actividades que validen las hipótesis cognitivas propuestas.

Referencias Bibliográficas

Andrade Mosquera, O. E. (2023). Habilidades predictivas en la comprensión de los números racionales. *Pedagogía y Educación CIEC-I 2023: Educación, Conciencia y Competencias*, 174-186. https://editorial.redipe.org/index.php/1/catalog/download/149/262/5216?inline=1

Arcila Henao, G. J. (2016). *Estrategia metodológica para la enseñanza de los números fraccionarios en la relación de representaciones y operaciones de suma y resta mediada por procesos tecnológicos* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://bffrepositorio.unal.edu.co/server/api/core/bitstreams/24cfd93f-0835-4118-babd-1f5ae2280ed2/content

Arnon, I. Cotrill, J. Dubinsky, E. Oktac, A. Roa-Fuentes, S. Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. [Teoría APOE. Un marco para la investigación y el desarrollo curricular en educación matemática]. Springer New York, NY. (pp.151-174). https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Arnon, I., Nesher, P., y Nirenburg, R. (2001). Where do Fractions Encounter their Equivalents? – Can this Encounter Take Place in Elementary–School? [¿Dónde encuentran las fracciones sus equivalentes? ¿Este encuentro puede tener lugar en la escuela primaria?]. (Vol. 6, pp. 167-214). *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. https://doi.org/10.1023/A:1017998922475

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1997). *A* Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education [Un marco para la investigación y el diseño curricular en la enseñanza universitaria de las matemáticas], *Research in Collegiate Mathematics Education II*, *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1–32. https://doi.org/10.1090/cbmath/006/01

Bautista, M., Chizner, J., Joya, A. y Romero, J. (2013). *Rutas Matemáticas 7*. Santillana.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., y Silver E. (1983). Rational Number Concepts [Conceptos de número racional]. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, 91-125. New York: Academic Press.

Betancur Sánchez, A., Roa Fuentes, S., y Ballesteros, S. J. (2021). Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: el análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos. *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa*, 24(3), 245–276. https://doi.org/10.12802/relime.21.2431

Elias, H. R., Ribeiro, A. J., y Savioli, A. M. P. d. (2019). Epistemological matrix of rational number: A look at the different meanings of rational numbers [Matriz epistemológica del número racional: Una mirada a los diferentes significados de los números racionales]. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*(2), 357–376. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09965-4

Galván A. F. (1968) *Números racionales*. National Council of Teachers of Mathematics U.S.A. Editorial F. Trillas, S.A.

Gairín J. y Muñoz J. (2005). El número racional positivo en la práctica educativa: Estudio de una propuesta editorial. *IX Simposio SEIEM*, Grupo de investigación: Pensamiento Numérico y Algebraico, Córdoba. http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicaciónesgrupos/cd/grupos/grupopna/gairinmunoz.pdf

Gómez Mullett, A., y Perez Schmalbach, A. (2016). Tres enfoques para la enseñanza de los números racionales. *SABER. Revista Multidisciplinaria del Consejo de Investigación de la Universidad de Oriente*, 28(4), 819-827. https://www.redalyc.org/journal/4277/427751365017/html/

Gómez, C., (1998). Números racionales y razonamiento proporcional: una propuesta curricular basada en los estándares del NCTM. *Revista EMA.* 3(2), 112-132. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1143757/38_G25C325B3mez1998N25C325BAmeros_RevEMA.pdf

Howe, C., Nunes, T., y Bryant, P. (2010). Rational number and proportional reasoning: Using intensive quantities to promote achievement in mathematics and science [Número racional y razonamiento proporcional: uso intensivo de cantidades para promover el rendimiento en matemáticas y ciencias.]. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 391-417. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9249-9

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct—Its elements and mechanisms [La construcción del número racional: Sus elementos y mecanismos]. En T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning* [Investigaciones recientes sobre el aprendizaje del número] (pp. 125-149). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education. https://eric.ed.gov/?id=ED212463

Lesh, R., Post, T., y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades [Conceptos y operaciones numéricas en los grados intermedios] (Vol. 1, pp. 93–118). Lawrence Erlbaum Associates; National Council of Teachers of Mathematics.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas y Ciudadanas.* Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (1968). Temas de matemáticas. Cuaderno 6: Números racionales (F. Galván Anaya, Trans.). Editorial Trillas. (Trabajo original publicado en 1954)

Obando, G. (2003), La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA,* 8(2), 157-182. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/la-ensenanza-de-los-numeros-racionales-a-partir-de-la-relacion-parte-todo/

Ortiz, L., Ramirez, M., Joya, A., Celi, V., Acosta, M., Perdomo, A., Morales, D. y Gamboa, J. (2014). *Matemáticas 7*. Santillana.

Padierna, A., Zapata, A. (2018). *Noción de número racional en grado tercero: construcción de objetos abstractos a partir de acciones*. [Tesis de Maestría, Universidad de Medellín]. Repositorio Académico de la Universidad de Medellín. http://hdl.handle.net/11407/4979

Piaget, J. (1975/1985). *El nacimiento de la inteligencia en el niño*. Barcelona: Crítica.

Platón. (1997). La República (Trad. C. Eggers Lan). Madrid: Alianza Editorial.

Rueda Seguro, N. O. (2018). *Algunas dificultades que presentan los estudiantes de séptimo para sumar y restar fracciones: una mirada desde la modelación matemática* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Académico de la Universidad Nacional de Colombia. https://bffrepositorio.unal.edu.co/server/api/core/bitstreams/0a738e51-5bdf-4ec6-bc2c-afa1b6d528c1/content

Stein, H. (1990). Logos, logic, and logistiké: Some philosophical remarks on nineteenth-century transformation of mathematics [Logos, lógica y logistiké: Algunas observaciones filosóficas sobre la transformación decimonónica de las matemáticas]. En W. Aspray & P. Kitcher (Eds.), *History and philosophy of modern mathematics* (Vol. 11, pp. 238-259). University of Minnesota Press. https://hdl.handle.net/11299/185656

Tall, D. O., y Schwarzenberger, R. L. E. (1978). *Conflicts in the learning of real numbers and limits*. *Mathematics Teaching,* 82, 44–49. wrap.warwick.ac.uk+1