

CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE
ESPECÍFICOS A LOS PROCESOS DE DESCRIPCIÓN, DEFINICIÓN Y
DEMOSTRACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS RAZONES
TRIGONOMÉTRICAS

DANNY LUZ ALGARÍN TORRES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2013

CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE
ESPECÍFICOS A LOS PROCESOS DE DESCRIPCIÓN, DEFINICIÓN Y
DEMOSTRACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS RAZONES
TRIGONOMÉTRICAS

DANNY LUZ ALGARÍN TORRES

Trabajo de grado para optar al título de
Magister en Educación Matemática

Director:

Dr. JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2013

DEDICATORIA

A Dios que lo ha permitido,
a mis padres quienes desde la distancia me hacen sentir su apoyo y afecto
y a Freddy y Luz V. por su gran amor.

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Jorge Fiallo Leal, por sus enseñanzas, su exigencia y su confianza en la realización de este trabajo que me ha permitido alcanzar este gran logro en mi vida profesional.

A los profesores de la Maestría, por el apoyo y la colaboración brindada durante todo el proceso.

A los directivos, docentes y estudiantes de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento por la disposición y colaboración para que este proyecto se realizara.

A mis compañeros de Maestría por su invaluable apoyo y amistad.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	16
1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA	21
1.1 ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA	22
1.2 MODELO DE VAN HIELE.	28
1.3 PROCESOS MATEMÁTICOS	32
1.4 USO DE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA	36
2. MARCO CONCEPTUAL	39
2.1 PROCESOS MATEMÁTICOS	39
2.1.1 PROCESO DE DESCRIPCIÓN	40
2.1.2 PROCESO DE DEFINICIÓN	40
2.1.3 PROCESO DE DEMOSTRACIÓN	43
2.2 MODELO DE VAN HIELE.....	46
2.3 CONTENIDOS MATEMÁTICOS: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.....	52
2.3.1 MAPAS CONCEPTUALES DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA	64
3. METODOLOGÍA	70
3.1 CARACTERÍSTICAS DE LA METODOLOGÍA	70
3.2 FORMAS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN	71
3.3 CRITERIOS Y PROCEDIMIENTOS DEL ANÁLISIS DE DATOS	72
3.4 DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN	73
3.5 METODOLOGÍA DEL TRABAJO DE CLASE.....	74
4. UNIDAD DE ENSEÑANZA	77
4.1 GENERALIDADES DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA.....	77

4.2	DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES.....	79
4.3	DESCRIPCIÓN INICIAL DE LOS NIVELES DE VAN HIELE PARA CADA UNA DE LAS ACTIVIDADES	103
5.	ANÁLISIS DE DATOS.....	108
5.1	PRIMERA ACTIVIDAD: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.....	108
5.1.1	PROCESO DE DESCRIPCIÓN	108
5.1.2	PROCESO USO DE DEFINICIONES	117
5.1.3	PROCESO FORMULACIÓN DE DEFINICIONES	121
5.1.4	PROCESO DE DEMOSTRACIÓN.....	124
5.2	SEGUNDA ACTIVIDAD: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL	132
5.2.1	PROCESO DE DESCRIPCIÓN	132
5.2.2	PROCESO USO DE DEFINICIONES	139
5.2.3	PROCESO FORMULACIÓN DE DEFINICIONES	143
5.2.4	PROCESO DE DEMOSTRACIÓN.....	147
6.	CONCLUSIONES.....	159
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	176
	ANEXOS	181

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Relación entre procesos y niveles de razonamiento	49
Tabla 2 Descriptores para la actividad Razones trigonométricas para triángulos rectángulos	104
Tabla 3 Descriptores Actividad Razones trigonométricas para ángulos en posición normal.....	105
Tabla 4 Descriptores Actividad Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas.....	106
Tabla 5 Descriptores Actividad Identidades Pitagóricas.	107

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Esquema de los tipos de demostración encontrados por Fiallo (2010) ...	45
Figura 2 Razones trigonométricas.	53
Figura 3 Las razones solo dependen del ángulo.	54
Figura 4 Segmentos trigonométricos "directos".	54
Figura 5 Segmentos trigonométricos inversos.	55
Figura 6 triángulo básico I.	56
Figura 7 Razones de 30° y 60°	57
Figura 8 Triángulo básico II.	57
Figura 9 Coordenadas de los puntos de la circunferencia unidad en el primer cuadrante.	58
Figura 10 Coordenadas de los puntos de la circunferencia unidad en el segundo, tercer y cuarto cuadrante.	59
Figura 11 Aplicación del Teorema de Pitágoras.	60
Figura 12 Ángulos suplementarios.	61
Figura 13 Ángulos que difieren en 180°	61
Figura 14 Ángulos opuestos.	62
Figura 15 Ángulos complementarios.	63
Figura 16 Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.	65
Figura 17 Razones trigonométricas para un ángulo en posición normal.	66
Figura 18 Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas	67
Figura 19 Identidades Pitagóricas.	68
Figura 20 Seno y coseno de la suma de dos ángulos.	69
Figura 21 Distribución de los equipos en la sala de informática.	76
Figura 22 Imagen del archivo ACT 1 Razones trigonométricas para triángulos rectángulos.	81
Figura 23 Imagen del archivo ACT 1.	83

Figura 24 Imagen del archivo ACT 2.1	87
Figura 25 Imagen del archivo ACT 2.2	91
Figura 26 Imagen del archivo ACT 3.1	94
Figura 27 Imagen del archivo ACT 3.2	97
Figura 28 Imagen del archivo ACT 4.2	100
Figura 29 Representación de un ángulo de 90° por el estudiante	109
Figura 30 Imagen del archivo Act 1.	110
Figura 31 Respuesta del estudiante pregunta 2.1	110
Figura 32 Imagen del archivo Act 1	111
Figura 33 Fase de explicitación en parejas.....	111
Figura 34 Descripción del archivo 2.1 por los estudiantes.....	112
Figura 35 Descripción del archivo por el estudiante, con el movimiento de la mano indica el aumento en el valor de la razón.....	115
Figura 36 Anotación en la hoja de trabajo del estudiante.	115
Figura 37 Anotación en la hoja de trabajo del estudiante.	118
Figura 38 Imagen del archivo Act 1.	119
Figura 39 Razones trigonométricas del triángulo rectángulo encontradas por el estudiante	119
Figura 40 Relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos A y B encontradas por el grupo de estudiantes.	120
Figura 41 Imagen de la modificación del archivo Act 1 por el grupo.....	122
Figura 42 Relación entre seno de A y coseno de B encontradas por el grupo de estudiantes.....	123
Figura 43 Relación entre seno, coseno y tangente.....	123
Figura 44 Conjetura elaborada por el estudiante	124
Figura 45 Demostración elaborada por el estudiante	125
Figura 46 Conjetura elaborada por el estudiante	128
Figura 47 Demostración elaborada por el estudiante.	128
Figura 48 Imagen del archivo Act 1	129
Figura 49 Solución dada por el estudiante.....	130

Figura 50 Continuación de la explicación por el estudiante	132
Figura 51 Gráfico de un ángulo en posición normal que hace el estudiante.....	133
Figura 52 Imagen del archivo Act 2.1	134
Figura 53 Definiciones de las razones trigonométricas en el plano cartesiano....	134
Figura 54 Estudiante en la fase de explicitación.	136
Figura 55 Fragmento de la anotación de los estudiantes donde concluyen que las razones no dependen del radio.....	137
Figura 56 Explicación del estudiante	140
Figura 57 Definiciones de las razones trigonométricas formuladas por los estudiantes.....	143
Figura 58 Relaciones entre las razones trigonométricas para los ángulos A, A-90 y 90-A del primer grupo de estudiantes	145
Figura 59 Relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos A, A-90 y 90-A del segundo grupo.....	145
Figura 60 Relación entre $\sin A$, $\cos (90-A)$ y $\cos (A-90)$	146
Figura 61 Imagen del archivo Act 2.1 luego que los estudiantes ubican el radio en 1	147
Figura 62 El estudiante señala la razón en la pantalla.....	148
Figura 63 Valores de las razones trigonométricas para ángulos cuadrantales. ...	149
Figura 64 Escritura del estudiante en el tablero.....	151
Figura 65 Demostración de tipo empírico ingenuo.....	151
Figura 66 Demostración elaborada por los estudiantes cuando el radio es 1.....	154
Figura 67 Gráfico del estudiante.	156
Figura 68 Demostración de $\cos (A-90)=\cos (90-A)$	158
Figura 69: Lados trigonométricos para un ángulo en cualquier posición	196

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.....	181
ANEXO B: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL	187
ANEXO C: REPRESENTACIÓN LINEAL Y VISUALIZACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.....	194
ANEXO D: IDENTIDADES PITAGÓRICAS	202

RESUMEN

TÍTULO: CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE RAZONAMIENTO DE VAN HIELE ESPECÍFICOS A LOS PROCESOS DE DESCRIPCIÓN, DEFINICIÓN Y DEMOSTRACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS*

AUTOR: DANNY LUZ ALGARÍN TORRES **

PALABRAS CLAVES: Descripción, definición, demostración, Modelo de Van Hiele, Razones trigonométricas.

DESCRIPCIÓN:

La presente investigación fue desarrollada durante el primer semestre de 2013 con estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Luis Carlos Galán Sarmiento de Bucaramanga, cuyo objetivo era: Caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el tema de las razones trigonométricas. El marco conceptual de la investigación se fundamentó en los procesos matemáticos de descripción, definición y demostración, entendidos como actividades cognitivas relacionadas con la comprensión y uso de los conocimientos en el tema de las Razones Trigonométricas, se partió de la utilización de una unidad de enseñanza en un sistema de geometría dinámica (SGD) y del modelo de Van Hiele, que permitió analizar la evolución del razonamiento de los estudiantes. En una primera etapa de la investigación, se elaboró una caracterización a priori de los procesos, enmarcados en cada uno de los niveles de Van Hiele, y se diseñó la unidad de enseñanza de las razones trigonométricas. La implementación de la unidad permitió obtener los datos cualitativos, que fueron analizados para perfeccionar la caracterización inicial de los descriptores de los niveles, esto se realizó con base en las actuaciones y trabajos de los estudiantes en cada una de las tareas y actividades planteadas en la unidad de enseñanza. La principal conclusión del trabajo se constituyó en la construcción del listado de descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

* Proyecto de Grado.

** Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en Educación Matemática. Director: Dr. Jorge Fiallo Leal.

ABSTRACT

TITLE: CHARACTERIZATION OF LEVELS OF VAN HIELE REASONING PROCESSES SPECIFIC DESCRIPTION, DEFINITION AND DEMONSTRATION IN LEARNING TRIGONOMETRIC RATIOS*

AUTHOR: DANNY LUZ ALGARÍN TORRES**

KEYWORDS: Description, definition, proof, Van Hiele's model, trigonometric ratios.

DESCRIPTION:

This research was conducted during the first half of 2013 with students of tenth grade of School Luis Carlos Galan Sarmiento of Bucaramanga, its aim was : to characterize the levels of Van Hiele reasoning, specific to the processes of description, definition and demonstration in the subject of the trigonometric ratios . The conceptual framework of the research was based on the mathematical processes of description, definition and demonstration, understood as cognitive activities related to the understanding and use of knowledge in the subject of Trigonometric Ratios, it was based on the use of a teaching unit in a system of dynamic geometry (SGD) and the Van Hiele model, which allowed to analyze the evolution of students' reasoning. During the first stage of the research, we developed the characterization of the processes, framed in each van Hiele levels, and designed teaching unit trigonometric ratios. The implementation of the unit yielded qualitative data that were analyzed to refine the initial characterization of the level descriptors, this was done based on the actions and students' work in each of the tasks and activities outlined in the teaching unit. The main conclusion of the work was incorporated in the construction of the list of descriptors of the levels of van Hiele reasoning specific to the processes of description, definition and demonstration on learning of the trigonometric.

*Project Degree.

** Industrial University of Santander. Sciences Faculty. School of Mathematics. Master in Mathematics Education. Director: Dr.Jorge Fiallo Leal

INTRODUCCIÓN

La motivación por realizar este estudio surge al observar que los alumnos llegan a los niveles superiores con muchas falencias en las competencias matemáticas, y es que, precisamente en los grados superiores, una de las dificultades a las que se enfrentan los docentes y estudiantes es la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría.

Diversos estudios han contribuido al análisis de las dificultades en el campo de la trigonometría, entre estos tenemos a Van Hiele (1957), quien expresa que los alumnos que han aprendido a solucionar problemas con una cantidad de fórmulas, luego se sienten bloqueados porque se dan cuenta que han olvidado las fórmulas y carecen de principios ordenadores para recuperarlos. Otras investigaciones tratan sobre la complejidad que se deriva de la desconexión entre las diferentes formas de ver las razones trigonométricas (Montiel, 2005; Brown, 2006), situación que se complejiza cuando no se tiene en cuenta el papel del triángulo rectángulo al utilizar el enfoque de las funciones circulares (Markel, 1982); o estudios relacionados con dificultades asociadas al concepto de razón (Freudenthal, 2001). Sin embargo, al analizar las propuestas curriculares, tanto a nivel nacional (MEN, 1998; MEN, 2003, 2006), como a nivel internacional (NCTM, 2003), se observa que no se profundiza en el tema, ni se dan propuestas concretas para abordar la problemática, de hecho, el contenido se trata muy superficialmente, llevando a que la trigonometría se enseñe de la misma manera (lo que dicen los libros de texto) en los últimos treinta años. Al existir muy pocas referencias con relación la enseñanza de la trigonometría, se manifiesta una falta de claridad en cuanto al enfoque propuesto para poder desarrollar procesos generales. Esta situación, unida a la necesidad de promover el desarrollo de procesos de razonamiento matemático, además de contenidos, lleva a plantear este trabajo, el cual puede brindar a los docentes herramientas que les permitan

desarrollar en sus estudiantes la comprensión de conceptos trigonométricos y el desarrollo de procesos matemáticos como la descripción, definición y demostración.

Para contribuir al aprendizaje de la trigonometría y al desarrollo de procesos matemáticos, se parte de un enfoque geométrico y se usa el modelo de Van Hiele, que explica por una parte la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y por otra, la forma en que el docente puede ayudar a sus estudiantes a mejorar el razonamiento para analizar y entender el uso de estrategias, métodos y herramientas que favorezcan el aprendizaje de la trigonometría.

Gutiérrez (2007a) considera que aprender matemáticas se relaciona con los procesos de observar y describir, analizar y definir, comparar y clasificar, explicar y demostrar, imaginar y visualizar, planteando que se pueden diseñar unidades de enseñanza basadas en el modelo de Van Hiele que permitan desarrollar estos procesos. En esta investigación se proponen descriptores para los procesos de descripción, definición y demostración. Se espera que a partir de la descripción, los estudiantes puedan usar y comprender definiciones que los lleven paulatinamente a elaborar demostraciones cada vez más formales.

Tomando en cuenta lo anterior y con miras a lograr que el estudiante, a partir de situaciones concretas desarrolle su proceso de razonamiento, que adquiera y comprenda conceptos y relaciones matemáticas que favorezcan el aprendizaje de las razones trigonométricas, y sobre todo, que las situaciones planteadas favorezcan el tránsito de los estudiantes de un nivel de razonamiento a otro superior, se formula la siguiente pregunta de investigación: *¿Cuáles son los descriptores que caracterizan los procesos de descripción, definición y demostración en cada uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele de los estudiantes cuando se estudian las razones trigonométricas?* Para dar respuesta a

esta pregunta se plantea como objetivo general de esta investigación: **Caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el tema de las razones trigonométricas.**

Para alcanzar este objetivo se establece un marco conceptual basado en el estudio de los procesos matemáticos, el modelo de Van Hiele y el componente matemático de las razones trigonométricas, de modo que primero se establezca que en esta investigación, los procesos se entienden como actividades cognitivas relacionadas con la comprensión y el uso de los conocimientos, para luego integrarlos en cada uno de los niveles de Van Hiele.

Una vez elaborada la caracterización inicial basada en investigaciones previas (Fiallo, 2010), se registra cómo se organizan las observaciones que se hacen al aplicar las actividades planeadas, las cuales cuentan con archivos dinámicos que les permiten a los estudiantes: visualizar, explorar y analizar las relaciones y propiedades trigonométricas. Dichas observaciones son relativas a las actuaciones de los estudiantes cuando interactúan con el software, compañeros y docente. Así, el trabajo que se describe puede ayudar a construir los descriptores de los procesos de descripción, definición y demostración en cada uno de los niveles de Van Hiele relativos al aprendizaje de las razones trigonométricas, a partir de la resolución de las actividades diseñadas en la unidad de enseñanza planteada en un Software de Geometría Dinámica (SGD).

La estructura de este trabajo se ha organizado de la siguiente manera, en el primer capítulo con el fin de situar el área de estudio, se hace un recorrido a través de investigaciones relacionadas con la enseñanza de la trigonometría, estudios sobre el modelo de Van Hiele, investigaciones referentes a los procesos

matemáticos de descripción, definición y demostración y aspectos relacionados con el uso de SGD.

En el segundo capítulo se presenta el marco conceptual, que está formado por los aspectos teóricos, modelos y aspectos didácticos relacionados con los procesos matemáticos de descripción, definición y demostración, el modelo de Van Hiele y el componente matemático de las razones trigonométricas; los cuales son básicos tanto en el diseño de la experimentación como en el análisis de los resultados.

En el tercer capítulo se caracteriza la metodología de la investigación, se explican las formas de recolección de la información, a la vez que los criterios y procedimientos para el análisis de los datos. Se culmina el capítulo con una descripción de la población y las características del trabajo con los estudiantes.

En el cuarto capítulo, se describen las cuatro actividades planteadas para el estudio, en cada una de las cuales se muestran los objetivos de aprendizaje, la explicación de cada sub-actividad, en caso de ser necesario se describen los archivos usados en GeoGebra, y por último se modelan algunas de las actuaciones para cada proceso que se esperan de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades. En este capítulo además, se presenta la lista inicial de los descriptores específicos para las razones trigonométricas.

En el quinto capítulo se presenta el análisis de los datos con los cuales se perfecciona la caracterización inicial de los descriptores de los niveles de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el estudio de las Razones Trigonómicas, esto se hace con base en las

actuaciones de los estudiantes en cada una de las tareas y actividades de la unidad de enseñanza.

El sexto capítulo se dedica a las conclusiones finales. En este se muestra como producto de la investigación el listado de descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas que se han elaborado y verificado con la aplicación de la unidad de enseñanza de las razones trigonométricas específicamente para un entorno de geometría dinámica. También se detallan algunas limitaciones que se presentaron durante el desarrollo y sugerencias para futuras investigaciones.

En el séptimo capítulo, se presentan las referencias bibliográficas consultadas y finalmente se muestran como anexos las cuatro actividades planteadas en el estudio.

1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

A continuación se presenta la revisión bibliográfica que se ha tenido en cuenta para el planteamiento del problema, diseño de actividades, aplicación de la unidad de enseñanza y análisis de las actuaciones de los estudiantes de acuerdo con la caracterización de los descriptores de los niveles de Van Hiele propuesta.

La sección 1.1 se relaciona con la enseñanza de la trigonometría; en este apartado se analiza un compendio de investigaciones pertinentes al trabajo desarrollado y que se refieren a dificultades que se presentan cuando se trabaja con ésta área de conocimiento, estudios sobre el pensamiento matemático avanzado y algunas propuestas didácticas para la enseñanza de la trigonometría.

En la sección 1.2 se revisan investigaciones relacionadas con el modelo de Van Hiele, las cuales sirvieron de base para el diseño de las actividades y el análisis de las actuaciones de los estudiantes.

La sección 1.3 se relaciona con investigaciones sobre procesos matemáticos, estas fueron fundamentales a la hora de elaborar la caracterización inicial y posteriormente para analizar los resultados encontrados. Se dedicó la sección 1.4 a las investigaciones relacionadas con el uso del software de geometría dinámica en la enseñanza de la trigonometría, para observar tanto los beneficios como los riesgos en el uso de la tecnología

1.1 ENSEÑANZA DE LA TRIGONOMETRÍA

En esta sección se hace referencia a investigaciones sobre la comprensión de conceptos trigonométricos, investigaciones relacionadas con el pensamiento matemático avanzado y propuestas para la enseñanza de la trigonometría.

Con relación a la primera categoría, investigaciones sobre la comprensión de conceptos trigonométricos, Van Hiele (1957) plantea que una de las principales dificultades en el estudio de la trigonometría es la relativa a la algebrización de los contenidos:

Normalmente se suelen enseñar muchas fórmulas. Esto le da la sensación al alumno de que para dominar la trigonometría se necesitan muchas valencias. Y cuando les faltan esas valencias no hacen ningún esfuerzo por alcanzar resultados a pesar de que se pueden alcanzar perfectamente con los medios de que disponen. El tratamiento del seno y la tangente como funciones no tiene nada que ver con todo esto. (p. 122)

Para Van Hiele basta con la definición de seno y coseno para abarcar el contenido geométrico de la trigonometría. En Colombia por lo general, la trigonometría se trabaja en décimo grado; por lo que cuando los estudiantes ingresan a primer semestre en la universidad se presume que ya han aprendido las funciones trigonométricas. Sin embargo, Markel (1982) expresa con preocupación que los estudiantes universitarios o incluso estudiantes de colegio con habilidades y aptitudes para matemáticas tienen vacíos sobre conceptos fundamentales de trigonometría. En su investigación, Markel concluye que un factor que influye en la comprensión de conceptos trigonométricos, consiste en el enfoque que se le da al estudio de las funciones circulares porque no tiene en cuenta el papel del triángulo rectángulo y no se puede construir apoyado en conocimientos previos de los estudiantes. Este autor menciona la necesidad de prestar más atención a las conexiones entre las relaciones de las funciones circulares y el triángulo rectángulo según lo propuesto en los estándares curriculares.

Brown (2006) expresa que aunque la trigonometría en el plano coordenado es un tema difícil para los estudiantes, muy poco se ha hecho para investigar lo que hace que sea difícil. Existen muchos factores que pueden estar implicados y se debe tener en cuenta que la trigonometría es un tema complejo e interconectado. El objetivo del trabajo de Brown consistió en explorar la comprensión de los conceptos trigonométricos de un grupo de 120 estudiantes. Los resultados fueron utilizados para crear un modelo de comprensión de los estudiantes del seno y coseno y para perfeccionar el marco de contenido que fue desarrollado y aplicado.

Brown concluye que muchos estudiantes tienen una comprensión incompleta o fragmentada de las tres formas principales de ver el seno y el coseno:

- Como coordenadas de un punto en el círculo unitario,
- Como distancias que son la vinculación gráfica de esas coordenadas, y
- Como las razones de los lados de un triángulo rectángulo.

Araya, Monge y Morales (2007), estudian de qué manera la comprensión, entendida como la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe, incide en la resolución de problemas sobre razones trigonométricas. La investigación se realizó con tres estudiantes de la carrera de Bachillerato en enseñanza de la Matemática de la UCR (Universidad de Costa Rica), se indaga en especial por la relación entre la comprensión que tiene el docente y la que espera que logren sus estudiantes. Estos autores concluyen que la formación de los docentes en trigonometría no satisface los requerimientos mínimos para enseñar ciertos temas de forma no mecánica, por tanto en su formación se deberían incluir modelos que evidencien la aplicación de los contenidos en la resolución de problemas vinculados con otras áreas.

Por otro lado, factores relacionados con la falta de conocimientos previos y la comprensión de los conceptos básicos de la trigonometría se convierten en obstáculos para los docentes. Por ejemplo, Goldin (1983) reportó dificultades encontradas por los maestros de primer año en programas de formación en

Ciencias y Matemáticas; mediante un estudio realizado en las escuelas de Illinois como parte de un estudio más amplio de profesores en otras áreas. En la investigación se diseñó y envió un cuestionario a 104 profesores de matemáticas, del cual se recibieron respuestas de 32. El análisis de las respuestas evidenció que el mayor porcentaje de informes que presentaron considerable o extrema dificultad se produjo en la enseñanza de los temas más avanzados: álgebra II o trigonometría, geometría plana y matemáticas avanzadas o cálculo. La resolución de problemas fue identificado como la actividad de mayor dificultad.

Freudenthal (2001) expresa que la comprensión del concepto de razón encierra en sí mismo otra dificultad:

La razón es una función de un par ordenado de números o valores de magnitud. Pero, ¿qué hay de los valores de esa función? ¿Números o valores de magnitud, de nuevo? Se puede interpretar así, pero es la manera incorrecta de hacerlo. (p. 3)

Para Freudenthal, la razón en cuanto a concepto e incluso objeto mental requiere un desarrollo considerablemente alto, su comprensión puede guiarse y profundizarse mediante visualizaciones que pueden ilustrarse utilizando construcciones detalladas que lleven a la verbalización gradual del razonamiento visual; la familiaridad con las aplicaciones que conservan la razón se convierte en un soporte para visualizar los contextos de la razón que no son visibles a priori.

En otra categoría se consideran investigaciones en la línea denominada pensamiento matemático avanzado, principalmente enfocadas al estudio de la variación y al cambio; en la cual se incluyen temas de trigonometría y se tienen en cuenta los procesos implicados. Por ejemplo Dreyfus (2002), realiza un estudio sobre procesos mentales, entre ellos la abstracción, los cuales son analizados y discutidos con el objetivo de hacer que los profesores de matemáticas avanzadas sean más conscientes de lo que está pasando durante la adquisición de estos procesos. En su estudio Dreyfus expone que una función es un concepto abstracto en el que usualmente se trabaja en una de varias representaciones o en varias

representaciones de una vez. Enseñar y aprender estos procesos de cambio no es fácil para los estudiantes; por ejemplo cuando se trabaja la función trigonométrica, sus propiedades, frecuencia, amplitud y fase, más aún si se consideran las fórmulas, gráficos, tablas de valores y los vínculos entre estas representaciones; se trata de demasiada información en especial si se tiene en cuenta la poca experiencia de los estudiantes. Como consecuencia a menudo se limitan a trabajar en una sola representación, por tanto los procesos adquieren tanta importancia como el desarrollo de habilidades, experiencia matemática y los contenidos; siendo el proceso más importante el de la abstracción.

Vinner (2002) considera la diferencia entre las definiciones abstractas de un concepto dado en una teoría matemática y la imagen del concepto tal como es concebida en la mente de los estudiantes. Según Vinner los profesores de matemáticas pueden establecer una serie de definiciones, teoremas y demostraciones como un esqueleto para su curso, lo que puede acarrear consecuencias pedagógicamente incorrectas ya que la enseñanza debe tener en cuenta los procesos psicológicos comunes de adquisición de conceptos y razonamiento lógico. Vinner observa que la presentación y organización de las matemáticas en muchos libros de texto y clases se basan en los siguientes supuestos: 1. Los conceptos son principalmente adquiridos por medio de sus definiciones. 2. Los estudiantes usan las definiciones para resolver problemas y probar teoremas desde un punto de vista matemático. 3. Las definiciones deben ser mínimas. 4. Las definiciones son elegantes. 5. Las definiciones son arbitrarias. Aunque, estos supuestos no muestran del todo el tratamiento que se da a las definiciones en la matemática superior, a menudo reflejan la pedagogía de la enseñanza de las matemáticas. Por lo que según el autor, al entrar a decidir sobre la pedagogía de la enseñanza de las matemáticas hay que tener en cuenta no sólo la cuestión de cómo se espera que los estudiantes adquieran los conceptos matemáticos, sino también, y principalmente, cómo los estudiantes realmente adquieren estos conceptos.

Para Tall (2002) no existe una sola forma de pensar en las matemáticas, sino formas desarrolladas culturalmente, diversas maneras de pensamiento en el que varios aspectos están relacionados con el contexto. Tall distingue entre las matemáticas como una actividad mental y las matemáticas como un sistema formal. Esta teoría se aplica tanto a los matemáticos expertos como a estudiantes, un alumno sin la experiencia del profesor puede encontrar un enfoque inicial difícil, fenómeno que puede ser visto por el profesor como falta de experiencia o conocimiento del estudiante. Entonces, el problema del desarrollo curricular es presentar al estudiante contextos en los que es posible el desarrollo cognitivo, lo que llevaría finalmente al pensamiento matemático significativo en el que el formalismo juega un papel apropiado, es decir las actividades diseñadas deben mostrar al estudiante escenarios en los cuales se hace evidente la formulación de la teoría y la necesidad de justificaciones teóricas para las argumentaciones desarrolladas.

En la tercera categoría (Propuestas para la enseñanza de la trigonometría) se encuentra que en el tratamiento de la comprensión de las dificultades y planteamiento de propuestas didácticas, algunos autores han desarrollado estudios de carácter histórico-epistemológico. Por ejemplo Montiel (2005) examina la factibilidad de reconocer la base de significados naturales a procesos y conceptos matemáticos mediante un análisis de ideas, que señaladas en la historia y la epistemología, establezcan explicaciones sobre un cierto conocimiento matemático (Función Trigonométrica), de modo que con estos elementos se forme una base de significaciones para conceptos y procesos. Montiel busca incidir en problemáticas específicas a los conceptos trigonométricos escolares, mediante un acercamiento didáctico de la construcción de los conocimientos a través de la búsqueda de significados de los conceptos, entendiendo su evolución y las circunstancias y problemáticas que determinaron su creación, con lo cual se privilegia la epistemología de las prácticas (de referencia y sociales) asociadas a su construcción. Toda propuesta didáctica basada en esta aproximación supone un cambio en el discurso matemático escolar; es decir busca el desarrollo del

pensamiento matemático y la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes con base en prácticas sociales. En su investigación Montiel propone la construcción de la función trigonométrica en escenarios que articulan la actividad del alumno con una práctica de referencia específica y realista, ambas reguladas por las prácticas sociales de anticipación, predicción y formalización.

Fiallo (2010) propone una unidad de enseñanza de las razones trigonométricas. El autor diseña, implementa y evalúa la unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un contexto normal de clases y analiza la existencia de continuidad o distancia cognitiva entre los procesos de argumentar y demostrar en el desarrollo por los estudiantes de demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas. En su trabajo identifica y caracteriza los orígenes de las dificultades que se presentan en los procesos de planteamiento de conjeturas y de construcción de demostraciones. Producto de la investigación se plantean cinco categorías de unidad o ruptura cognitiva, que agrupan los logros y dificultades en los procesos de argumentación y demostración.

Continuando con las propuestas para la enseñanza de la trigonometría, se observa que en cada país se llevan a cabo esfuerzos para aumentar la educación obligatoria, mejorar la infraestructura, diseñar nuevos currículos y mejorar la formación de los docentes. Estos esfuerzos se ven reflejados en las políticas públicas y el desarrollo de acciones específicas para lograr una educación de calidad para todos. Precisamente, para que las Instituciones Educativa cumplan con esos requisitos de calidad y los estudiantes desarrollen competencias básicas, los gobiernos proporcionan una serie de principios básicos que enmarcan la educación que se ofrece. A continuación se presentan los estándares relacionados con trigonometría en el ámbito internacional y nacional.

A nivel internacional, en los principios y estándares del NCTM (2003) para la etapa 9-12 se plantea que todos los estudiantes deberían: “Usar las relaciones trigonométricas para determinar longitudes y medidas angulares” (p. 312)

A nivel nacional, en Colombia, en los lineamientos Curriculares (1998) no se especifica el estudio de la trigonometría, este contenido se puede considerar inmerso dentro de los conocimientos básicos relativos al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, en el cual se identifica el estudio de la función como dependencia y modelos de función, como uno de los núcleos conceptuales en los que está involucrada la variación; y el pensamiento espacial y sistemas geométricos, en el cual se sugiere el uso del Modelo de Van Hiele como una orientación didáctica para desarrollar este tipo de pensamiento en los estudiantes. En los Estándares básicos de competencias en Matemática (2006) aparecen las siguientes referencias a las funciones trigonométricas:

Pensamiento espacial: “Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas”. (p. 88)

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos: “Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas”. (p. 89)

Se encuentran pocas referencias con relación a la enseñanza de la trigonometría, esto se manifiesta en una falta de claridad en cuanto al enfoque propuesto para desarrollar procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje de la trigonometría (Fiallo, 2010)

1.2 MODELO DE VAN HIELE.

Al revisar trabajos de investigación relacionados con la enseñanza de la geometría, se observa que uno de los estudios de mayor trascendencia es el Modelo de Van Hiele. Este modelo fue elaborado en los años 50 por los esposos Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof mientras trabajaban como profesores de geometría en Holanda. Los componentes principales del modelo son los niveles de razonamiento, que explican el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes y las fases de aprendizaje que constituyen la propuesta didáctica para

la enseñanza y aprendizaje de la geometría. En esta sección se relacionan algunos trabajos de investigación sobre el Modelo de Van Hiele.

Las investigaciones sobre el modelo de Van Hiele, se empezaron a conocer en el mundo hispanohablante, por los trabajos realizados especialmente en España por el grupo de investigación de la Universidad de Valencia, liderado por Ángel Gutiérrez. De estos trabajos se destacan: Gutiérrez, Corberán y otros (1994), en este trabajo se ofrece una propuesta curricular concreta de enseñanza de geometría plana, en la cual se evalúa el nivel de razonamiento de los estudiantes antes y después de la aplicación de la enseñanza. Los autores diseñan unidades para la enseñanza de determinadas partes de la geometría plana (polígonos, triángulos, cuadriláteros), se analizan las clases con ejemplos de los comportamientos y respuestas de los estudiantes, y por último se presentan los resultados de la evaluación del progreso de los estudiantes. En sus conclusiones, los autores expresan que las unidades de enseñanza son una buena base para formar parte del currículo completo de Geometría plana a lo largo de la enseñanza media obligatoria basada en el modelo de Van Hiele, esto puede permitir a los profesores aplicar el modelo de Van Hiele de forma tal que los estudiantes de Enseñanza secundaria obligatoria (España) puedan conseguir el nivel 3 de razonamiento.

Jaime y Gutiérrez (1990) aplican el modelo para el estudio de las relaciones angulares de los polígonos. Entre las principales ideas que se muestran en el estudio se encuentran: la adquisición por una persona de nuevas habilidades de razonamiento es fruto de su propia experiencia; aunque la adquisición de los niveles superiores en particular el 3 y el 4 pueden durar varios años, al final de un curso los estudiantes estarán más cerca de lograr un nivel superior; las fases 2(orientación dirigida), 3 (explicitación) y 4 (orientación libre) son fundamentales para conseguir un buen aprendizaje y desarrollo del razonamiento, por lo que no se pueden obviar, la fase 3 no se debe entender como un periodo concreto entre las fases 2 y 4, se refiere más a la actitud del profesor para incitar a los

estudiantes al diálogo y explicación de su experiencia, forma de trabajar, preguntas, opiniones entre otros.

De Villiers (1998) señala que en los años sesenta cuando investigadores rusos estudiaban el motivo por el cual los estudiantes presentaban poco progreso en geometría, fijaron su atención en el modelo de Van Hiele; se dieron cuenta que al finalizar el 5° grado solo del 10 al 15% de los estudiantes se encontraba en el nivel 2 de Van Hiele, encontrando como una de las principales causas la poca atención al currículo de geometría en la primaria, razón por la cual se diseñó un currículo experimental de geometría basado en el modelo de Van Hiele, que resultó muy exitoso; un factor clave fue la secuencia y desarrollo continuo de conceptos desde el grado primero. Otro aspecto importante que considera De Villiers es que en el modelo de Van Hiele, las actividades informales en los niveles 1 y 2 deberían constituir “subestructuras conceptuales” apropiadas para las actividades formales del siguiente nivel.

En Estados Unidos, Burger y Shaughnessy (1986) elaboran una descripción de los niveles de Van Hiele a partir de una entrevista clínica realizada a estudiantes de los grado 1 a 12 por medio de una serie de actividades sobre triángulos y cuadriláteros que implicaban dibujo de formas, identificación, definición y clasificación de formas y razonamiento informal y formal. Los indicadores obtenidos proporcionan una caracterización de los niveles en términos de la conducta de los estudiantes, por lo que concluyen que se pueden construir caracterizaciones de los niveles utilizando otras actividades geométricas.

En Colombia, los trabajos sobre el modelo de Van Hiele se conocieron en la década de los 90's, dando lugar a propuestas de investigación basadas en el modelo, entre ellas, Fiallo (1996) realiza un diagnóstico sobre los niveles de razonamiento de Van Hiele de los estudiantes de Bucaramanga y su área metropolitana y plantea una unidad para la enseñanza de los deslizamientos en el plano en sexto grado. En el diagnóstico se evidencia que la mayoría de los estudiantes que terminan la primaria, se encuentran a lo máximo en el nivel de

reconocimiento en los temas de rectas paralelas, rectas perpendiculares, ángulos, triángulos y polígonos; destacándose dificultades en el tema de perpendicularidad. De la Torre (2000) presenta una aplicación del modelo de Van Hiele al problema de la modelización matemática del espacio y del tiempo como un continuo; se utiliza una entrevista clínica y un test con los cuales se comprueban los descriptores de los niveles 2, 3 y 4 para el tema en cuestión, mediante el estudio, el autor resalta la pertinencia de establecer tanto los niveles como sus descriptores para obtener la comprensión del concepto a la luz del modelo de Van Hiele, lo cual acompañado de las fases, puede llevar a los estudiantes a superar cada nivel en relación con dicho concepto. Camargo, Leguizamón y Samper (2002) describen una tarea de conceptualización aplicada con el propósito de indagar por el potencial de la actividad de conceptualizar en el desarrollo del razonamiento en geometría, la tarea planteada consiste en determinar un objeto geométrico, aunque la descripción diseñada no corresponde a un objeto específico o categoría particular dentro de la clasificación de los cuadriláteros. El análisis de las respuestas permite establecer el nivel de Van Hiele de cada caso particular con los grupos de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y de Especialización en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica de Colombia de acuerdo con la caracterización propuesta. En las conclusiones de este trabajo se motiva a usar actividades como: construcción, visualización, exploración de propiedades, elaboración de explicaciones y clasificaciones como alternativas de tratamiento curricular para geometría de modo que se logre ampliar los horizontes conceptuales de los estudiantes. Ceballos y López (2003) estudian los conceptos claves para el aprendizaje del cálculo y elaboran una propuesta para la aplicación del modelo de Van Hiele, concluyen que “utilizar el modelo potencia las metodologías de enseñanza para facilitar el aprendizaje del cálculo”, además realizar investigaciones que permitan establecer claramente los niveles con sus descriptores facilitan implementar nuevas técnicas o modelos pedagógicos útiles para el aprendizaje y didáctica de las matemáticas. Carmona (2011) elabora una propuesta didáctica para la enseñanza de la circunferencia,

cuyo propósito es revisar conceptos, relaciones y propiedades básicas mediante el diseño de una unidad didáctica fundamentada en el modelo de Van Hiele y la geometría dinámica. Entre las conclusiones del trabajo se menciona que la utilización del Modelo de Van Hiele permite hacer un seguimiento de los niveles de interpretación de los objetos matemáticos y sus propiedades, según las habilidades y competencias de cada estudiante; además que la geometría dinámica permite la manipulación de los objetos y sus atributos, de tal manera que el estudiante puede establecer hipótesis y verificarlas en la práctica, permitiendo inclusive que el error sea reto para el avance en el conocimiento del objeto y su definición. Gualdrón (2011) realiza una investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas. Este autor propone un listado de descriptores para el tema de la semejanza, el cual es validado mediante la aplicación de una unidad de enseñanza. Gualdrón propone la realización de estudios tendientes a caracterizar niveles de Van Hiele en diversos temas de geometría para complementar las propuestas didácticas. Bedoya, Esteban y Salazar (2013) realizan un estudio de caso sobre la comprensión de estructuras de tipo aditivo en estudiantes de tercer grado, para desarrollar la investigación se utilizan entrevistas de carácter socrático y observaciones, las cuales fueron estructuradas con las fases del modelo de Van Hiele; como resultado se elaboran los descriptores de los niveles, estos permiten dar cuenta de las características de los estudiantes en relación con la comprensión del concepto; los autores concluyen que las actividades que involucraban la componente visual favoreció la configuración del concepto. El producto de esta investigación se condensó en un módulo de aprendizaje.

1.3 PROCESOS MATEMÁTICOS

En este apartado se revisa la literatura correspondiente a los procesos matemáticos de descripción, definición y demostración ya que corresponden a los

procesos con los cuales se precisan las características de los niveles de Van Hiele en esta investigación. Tall (2002) considera:

El paso del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado implica una importante transición: de describir a definir, de convencer a demostrar de una manera lógica basada en esas definiciones. Esta transición requiere una reconstrucción cognitiva la cual es vista durante la lucha inicial del estudiante universitario con abstracciones formales que enfrentan el primer año de universidad. Es la transición de la coherencia de las matemáticas elementales a la consecuencia de las matemáticas avanzadas, basado en entidades abstractas que el individuo debe construir a través de deducciones de definiciones formales. (p. 20)

Lograr que los estudiantes pasen de hacer descripciones a formular definiciones y elaborar demostraciones requiere en primer lugar entender lo que significa cada proceso. Para esto se han revisado estudios que nos han permitido identificar elementos importantes a tener en cuenta en la investigación. Respecto al significado de proceso, Puig (1996) realiza un estudio con el objetivo de elaborar elementos de un modelo teórico de la resolución de problemas en los sistemas escolares, y explorar la actuación de los estudiantes al resolver problemas, describiendo su actuación respecto a los elementos del modelo. En este trabajo Puig, se refiere al término *proceso* de la siguiente manera:

Con el término “procesos” nos referimos a clasificar, definir, algoritmizar, probar, demostrar, particularizar, generalizar, abstraer; al hablar de procesos matemáticos, pretendemos fijarnos exclusivamente en las características que estas acciones tienen como componentes de la práctica matemática. Este mundo tiene un pobre reflejo en los sistemas escolares y, en consecuencia, está poco presente en la literatura de investigación. (p. 14)

En el trabajo de Puig no se aborda la definición de cada proceso, sin embargo Guillén (1997), quien desarrolla una aplicación del modelo de Van Hiele a la enseñanza de la geometría de los sólidos y observación de procesos de aprendizaje de profesores de primaria en formación y de niños de 12 años,

considera necesario precisar los significados que se asocian a los procesos, correspondientes a los significados que les dan los estudiantes cuando razonan en diferentes niveles. Ambos autores plantean que se debe tener claridad con relación al significado que se le dé a los procesos matemáticos, ya que se deben relacionar con el aprendizaje de la matemática.

Gutiérrez (2007a) plantea que aprender matemáticas está relacionado con aprender una serie de procesos (observar y describir, analizar y definir, comparar y clasificar, explicar y demostrar, imaginar y visualizar). Como resultado de sus investigaciones, plantea que en el proceso de definición, los estudiantes pueden usar o construir las definiciones de acuerdo al nivel de razonamiento de Van Hiele en el cual estén, mientras que el proceso de descripción sólo se da en los niveles 1 y 2. Dado que el proceso de demostración requiere de un razonamiento matemático, este no se da en el nivel 1 de Van Hiele.

Freudenthal (citado por De Villiers, 1998) criticó la práctica tradicional de entregar las definiciones geométricas a los estudiantes, planteando que más bien se debería guiarlos a entender por qué alguna definición o concepto es mejor a través de la organización de experiencias que le permitan llegar a sus propias conclusiones. Freudenthal expresa que:

... muchas definiciones no son preconcebidas sino hasta el toque final de la actividad organizativa. El niño no debería ser privado de este privilegio... La buena instrucción de geometría puede implicar mucho – aprendizaje para organizar una materia y aprendizaje de qué se está organizando, aprendizaje para conceptualizar y de qué se está conceptualizando, aprendizaje para definir y qué es una definición. Implica guiar a los alumnos a entender por qué alguna organización, algún concepto, alguna definición es mejor que otra. La instrucción tradicional es diferente. En vez de darle al niño la oportunidad de organizar experiencias espaciales, la materia se ofrece como una estructura preorganizada. Todos los conceptos, las definiciones y las deducciones son preconcebidas por el profesor, quien sabe cuál es su uso con todo detalle – o

mejor dicho, por el autor del libro de texto que ha construido cuidadosamente todos sus secretos en la estructura. (p. 14)

De Villiers (1998) plantea que el uso de un software de geometría dinámica lleva a los estudiantes a la prueba de sus conjeturas mediante un proceso de demostración; aunque llevar a cabo el proceso de demostración presenta inconvenientes; al respecto Mariotti (2006) expresa que en muchos países, a pesar de que en el currículo aparece el tema de la demostración, este no es desarrollado debido a que los estudiantes presentan problemas con relación a este proceso. En su investigación, Mariotti concluye que existe una tendencia a incluir la demostración en el currículo, pero que debido a las dificultades que se presentan esto no se cumple. Finalmente plantea que se debe promover la participación de los estudiantes para que expliquen sus argumentos.

En los Principios y Estándares de la NCTM (2003) como en los Lineamientos curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (1998), se plantea la necesidad de abordar procesos y contenidos para desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes, en ambos se da relevancia a la enseñanza por procesos distinguiendo los procesos más importantes que se deben desarrollar; en los Principios y Estándares de la NCTM (2003) se propone trabajar en el desarrollo de habilidades involucradas en los estándares de proceso de: resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representación; se considera que dichos estándares privilegian las formas de adquisición y uso de los contenidos, debido a que los procesos pueden aprenderse con los contenidos y los contenidos junto a los procesos.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) contemplan que los estudiantes deben desarrollar los procesos generales que tienen que ver con el aprendizaje como: formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Se indica que las situaciones problemáticas diseñadas deben comprometer la afectividad del estudiante y desencadenar los procesos

esperados. Miguel de Guzmán (citado en los lineamientos curriculares, 1998) plantea que:

“la enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces. Se trata de considerar como lo más importante:

- que el alumno manipule los objetos matemáticos;
- que active su propia capacidad mental;
- que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento con el fin de mejorarlo conscientemente;
- que, de ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental;
- que adquiera confianza en sí mismo;
- que se divierta con su propia actividad mental;
- que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana;
- que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia”. (p. 24)

1.4 USO DE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

Las aplicaciones informáticas en educación son diversas y muestran un gran potencial. Cuando se habla de posibilidades del software es debido a la oportunidad que tienen los docentes para diseñar actividades con las cuales los estudiantes pueden realizar cálculos y elaborar gráficas de manera ágil, de esta forma, pueden dedicar más tiempo a la reflexión y análisis de las situaciones propuestas. En ese orden de ideas se puede afirmar que con la utilización de un software de geometría dinámica se puede dar a los estudiantes la posibilidad de adquirir habilidades para mejorar sus procesos de descripción, definición y demostración.

“La Tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y potencia el aprendizaje” (NCTM, 2003, p.12).

El uso de los computadores en la educación matemática ha hecho más accesible e importante para los estudiantes temas de la geometría, la probabilidad, la estadística y el álgebra. Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar. (MEN, 1998, p. 18)

Muchos investigadores se han centrado en estudiar cómo utilizar las nuevas tecnologías para facilitar el aprendizaje y hacerlo más significativo. En particular Noss y Hoyles (1993) proponen que a los estudiantes se les debe ofrecer un conjunto de actividades computacionales cuidadosamente diseñadas en formas que puedan ser a la vez funcionales y lúdicas, de modo que al interactuar con el software puedan discriminar los conceptos y relaciones matemáticas específicas a la situación; esto conlleva a la generalización y síntesis de las ideas en un marco matemático coherente. Noss y Hoyles han demostrado que el computador es capaz de desempeñar un papel similar a un andamiaje para desarrollar la comprensión de los conceptos. Al mismo tiempo, en un entorno basado en computadores, el papel que juega el profesor directamente en el proceso, se vuelve ciertamente no menos importante, pero mucho más sutil. La idea principal consiste en centrar la atención en las relaciones importantes que intervienen cuando se usan computadores, pero no sin la intervención consciente de los educadores y el desarrollo de una cultura y ambiente de aprendizaje.

La contribución de la tecnología a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría es principalmente percibida como un fuerte vínculo entre lo dinámicamente manipulable e interactivo con representaciones gráficas como lo señalan Laborde, Kynigos, Hollebrands, y Strässer (2006), ya que en los archivos que se manejan, al utilizar el arrastre, el diagrama se modifica, pero todas las relaciones geométricas utilizadas en su construcción se conservan; es como si los

diagramas reaccionaran a las manipulaciones del usuario siguiendo las leyes de la geometría, de modo que puedan observar las características, propiedades invariantes que les permitan desarrollar los procesos esperados. Estos autores consideran que una perspectiva constructivista en un sentido amplio es adoptada en la investigación sobre el papel y el uso de la tecnología en la enseñanza de la geometría de forma que el aprendizaje no se toma como un simple proceso de la incorporación del conocimiento prescrito y determinado, sino como la reconstrucción de la geometría. Las interacciones que tienen lugar entre el alumno y la máquina y como se ve afectada esta reconstrucción.

El papel del profesor y las interacciones sociales que este podría organizar en el aula, las normas sociales en el desarrollo del contexto del aula así como el diseño de actividades para promover procesos también constituyen un motivo de estudio con relación al uso de la tecnología. Sobre este aspecto, Sánchez y Sacristán (citados en Kynigos, C. Hollebrands, K. y Strässer, 2006) concluyen que la integración de entornos de geometría dinámica en la enseñanza, ofrece oportunidades para el diseño de actividades, incluso a veces en un período de largo plazo, cuyo objetivo es introducir o fomentar el razonamiento deductivo y la demostración.

Continuando con investigaciones relacionadas con el diseño de actividades y procesos; Laborde (citada en Angulo, 2009) “reconoce en la investigación que concierne al uso de los Ambientes de Geometría Dinámica en el aula, dos propósitos distintos: preparar a los estudiantes para aprender a demostrar, y enseñar a demostrar” (p.5). Al respecto, Fiallo (2010) plantea que la tecnología por sí misma no logra el objetivo, el profesor debe motivar a los estudiantes a desarrollar argumentaciones que no se queden en la parte perceptiva y visual, sino que los lleven poco a poco a las demostraciones deductivas, por lo cual el papel del docente es fundamental en la planeación de las actividades y en enfocar al estudiante a la construcción del conocimiento matemático a partir de las interacciones con la tecnología.

2. MARCO CONCEPTUAL

El propósito de este capítulo es establecer las bases teóricas que sustentan la investigación, las cuales se basan en los Procesos matemáticos de Descripción, Definición y Demostración; el Modelo de Van Hiele como organizador de la enseñanza y fundamental en la elaboración de los descriptores; y los contenidos matemáticos de las Razones trigonométricas que constituyen el objeto de estudio del presente trabajo.

El apartado 2.1 se dedica al estudio de los procesos matemáticos; en esta sección se define cada uno de los procesos y se explican los cambios que se van dando en el razonamiento matemático de los estudiantes a medida que avanzan en los niveles de razonamiento.

En la sección 2.2 se presenta en forma sintética el Modelo de Van Hiele, explicando por una parte las características de los procesos de acuerdo al nivel de razonamiento y por otra las fases de aprendizaje básicas en la organización y diseño de la unidad de enseñanza.

Finalmente en la sección 2.3 se presentan en forma esquemática los contenidos y relaciones estudiadas en la unidad de enseñanza.

2.1 PROCESOS MATEMÁTICOS

En la actividad matemática desarrollada en el aula de clase, intervienen procesos que se articulan en la medida que los estudiantes interactúan con las diversas situaciones planteadas. Estos procesos se entienden como actividades cognitivas relacionadas con la comprensión y el uso de los conocimientos. En la medida que estos procesos son desarrollados el estudiante avanza en la consecución de sus conocimientos y competencias matemáticas.

A continuación se presenta una breve descripción de los tres procesos que se estudian en esta investigación.

2.1.1 PROCESO DE DESCRIPCIÓN

Para Guillén (2004), la palabra describir en todos los niveles de razonamiento de Van Hiele puede asociarse a listas de propiedades o características de los conceptos. Si un estudiante se encuentra en el primer nivel de razonamiento, al describir incluye propiedades visuales o funcionales; no quiere decir que no pueda señalar propiedades geométricas, sino que cuando las usan a menudo son incorrectas, poco precisas o inadecuadas. En el segundo nivel empieza a reconocer la presencia de las propiedades matemáticas de los objetos. Guillén considera que el segundo nivel es propio de la descripción en el sentido matemático.

El proceso de reconocimiento y descripción se da mediante acciones como: observación de ejemplos, identificación de propiedades y verbalización que dan como resultado la creación de imágenes conceptuales, por lo cual la utilización de un entorno de geometría dinámica facilita la creación de imágenes conceptuales mediante la creación de situaciones en las que intervienen ejemplos y contraejemplos (Gutiérrez, 2007b).

2.1.2 PROCESO DE DEFINICIÓN

En esta sección se analiza la construcción de definiciones en geometría. Es importante recordar, como lo expresan Jaime y Gutiérrez (1996) que los conceptos introducidos en la geometría escolar forman parte de una amplia red de relaciones que los vinculan, lo cual se traduce en una diversidad de organizaciones posibles de esos conceptos, a diferencia de lo que ocurre en otras áreas de las Matemáticas escolares como aritmética, álgebra o cálculo, en las que los grupos de conceptos relacionados están muy jerarquizados y parece claro cuál es el orden a seguir en su enseñanza.

En estudios desarrollados por Vinner (2002) acerca del aprendizaje de conceptos geométricos, se incorporan los términos “imagen del concepto” y

“definición del concepto”. La imagen del concepto se refiere a la forma en que el concepto se refleja en la mente de la persona, incluye todo lo que se recuerda relacionado con el concepto; por ejemplo, todo lo que se evoca cuando se escucha una palabra o se observa un dibujo. Cuando la imagen se forma, la definición se vuelve prescindible.

En contextos técnicos, la definición juega un papel muy importante. La imagen del concepto y la definición del concepto interactúan aunque se pueden formar independientemente. Cuando se plantea una tarea cognitiva al estudiante, se supone que la imagen y la definición del concepto son activadas, por lo cual los profesores esperan que para solucionar la tarea los estudiantes empleen las definiciones del concepto, este sería el proceso ideal, pero no ocurre así; las definiciones del concepto según Vinner, equivalen a las definiciones verbales que un estudiante tiene en su memoria y que recita cuando se le piden, por lo que Vinner considera que se deben cambiar los hábitos de pensamientos que se utilizan en el contexto diario, esto no se da en un periodo corto y no es necesariamente exitoso para todos. Los conceptos matemáticos, si su naturaleza lo permite, deberían ser adquiridos como conceptos en formación; se comenzaría con ejemplos y contra-ejemplos que ayuden a formar el concepto imagen.

En cuanto a la definición del concepto, se refiere a la definición verbal que se tiene para una cierta noción (si se tiene alguna, no siempre recoge todo lo que sabe el individuo) esta no tiene por qué ser la definición matemática. La imagen del concepto y la definición del concepto dependen de la persona y del contexto.

En los trabajos de Vinner se recalca que para que ocurra la identificación y la construcción de conceptos debe introducirse una variedad de ejemplos en una variedad de orientaciones, aunque debe tenerse en cuenta los distractores que pueden surgir en el transcurso del proceso. Dreyfus (2002) puntualiza que para ser exitoso en matemáticas, es deseable tener una riqueza de representaciones mentales de los conceptos; una representación es rica si contiene aspectos vinculados con ese concepto; aunque a veces muchas representaciones pueden

entrar en conflicto, en la mayoría de los casos pueden complementarse e integrarse en una representación de ese concepto.

Vinner (1976) explica el proceso de definición en los niveles 1 a 3 de la siguiente manera: en el primer nivel de Van Hiele, los estudiantes tratan con definiciones, para definir una familia de ejemplos, se apoyan en modelos conocidos o indican propiedades visuales. Es decir, la definición será una idea muy ingenua del concepto basado en ejemplos prototipo y pueden incluir atributos visuales o características funcionales. En el segundo nivel, definir equivale a describir o dar una lista de propiedades que pueden ser insuficientes o redundantes. En el tercer nivel, cuando se define se organizan las propiedades, se seleccionan las mínimas que se deben cumplir y se organizan en un sistema deductivo, aunque consideramos que en el tercer nivel las definiciones son descripciones de los objetos en los que se ha reducido la lista de propiedades a un conjunto suficiente. Es posible entonces, usar la visualización para dar una configuración global a un concepto matemático, para mostrar sus propiedades o lo que no cuenta como propiedad de forma que se crea una necesidad para la formulación de la teoría.

Por otra parte, Gutiérrez (2007a) plantea que los estudiantes usan o construyen definiciones, según el nivel de razonamiento de Van Hiele, la construcción de definiciones es propia del nivel de deducción informal (nivel 3). Las acciones para formular una definición son: observar ejemplos, identificar propiedades, generalizar propiedades, verbalizar una definición; como resultado se obtiene una creación de definiciones conceptuales (Gutiérrez, 2007b). Las acciones para usar una definición son: comprender la definición, identificar propiedades en la definición y usar las propiedades para tomar decisiones, obteniendo como resultado la resolución de problemas (Gutiérrez, 2007b).

Se debe resaltar que en el modelo de Van Hiele las definiciones son el resultado de un proceso: análisis de ejemplos, análisis de propiedades entre otros; no se puede dar una definición si no se han descrito las figuras y se han

familiarizado con sus elementos. En este sentido De Villiers (1998) indica que en cada nivel de Van Hiele se deben perseguir los siguientes tipos de definición: Nivel 1: definiciones visuales, Nivel 2: definiciones no económicas, Nivel 3: definiciones correctas y económicas.

2.1.3 PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

Fiallo (2010) define la demostración como “el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática” (p. 48).

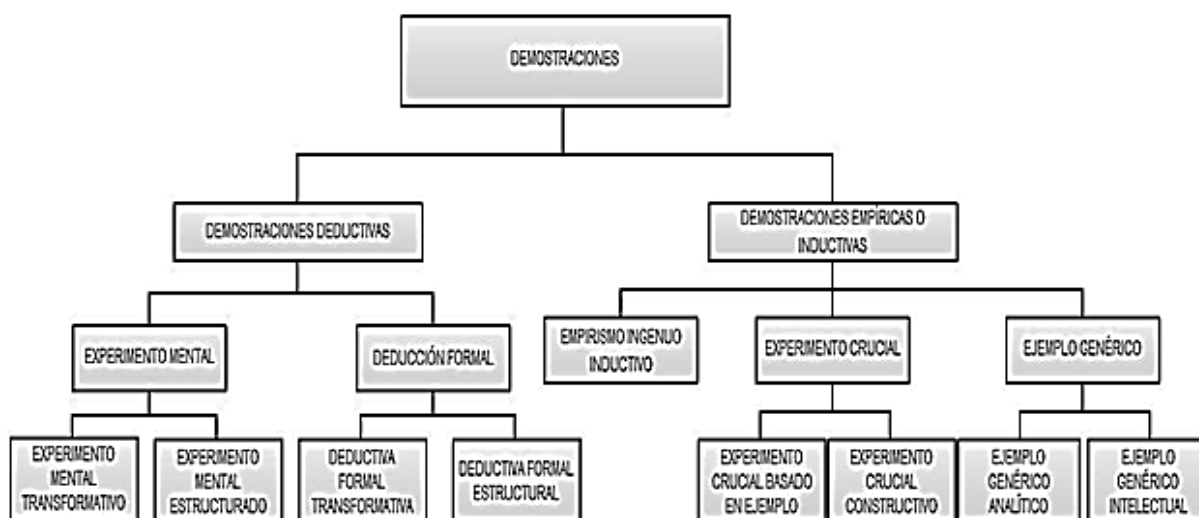
Los tipos de demostración que propone Fiallo (2010) son:

- A. Demostraciones deductivas: Estas demostraciones están caracterizadas por la descontextualización de los argumentos usados, se basan en los aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y deducciones lógicas, que apuntan a validar la conjetura de una manera general. Los tipos de demostraciones deductivas son:
 - a. Experimento mental: Se usa un ejemplo para organizar la demostración, puede ser:
 - i. Experimento mental transformativo: Las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente.
 - ii. Experimento mental estructural: Demostraciones basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, axiomas, definiciones o teoremas; los ejemplos se usan para organizar o entender los pasos de las deducciones.
 - b. Deducción formal: La demostración se basa en operaciones mentales sin la ayuda de ejemplos específicos. Se presentan dos tipos:
 - i. Deductiva formal transformativa: Demostraciones basadas en operaciones mentales que transforman el problema en otro equivalente.

- ii. Deductiva formal estructural: Las demostraciones se basan en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, axiomas, definiciones o teoremas.
- B. Demostraciones empíricas o inductivas: Se caracterizan por el uso de ejemplos como el principal o único elemento de convicción. Los tipos de demostraciones empíricas son:
 - a. Empirismo ingenuo inductivo: Para hacer la demostración se usan ejemplos escogidos sin ningún criterio, las argumentaciones se basan en elementos visuales o táctiles (perceptivos) o elementos matemáticos o relaciones detectadas en el ejemplo (inductivo).
 - b. Experimento crucial: Se escoge un ejemplo seleccionado cuidadosamente, se presume que en cualquier otro caso dará el mismo resultado.
 - i. Experimento crucial basado en ejemplo: Los estudiantes se basan en la existencia de un único ejemplo o ausencia de contraejemplos para la demostración.
 - ii. Experimento crucial constructivo: Los estudiantes sustentan sus demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo.
 - c. Ejemplo genérico: Cuando en la demostración se usa un ejemplo específico que es representante de una clase y la demostración incluye la producción de razonamientos abstractos. Los tipos de ejemplos genéricos son:
 - i. Ejemplo genérico analítico: Cuando en la demostración se usa un ejemplo representante de una clase y las justificaciones están basadas en propiedades y relaciones generales descubiertas en el ejemplo.
 - ii. Ejemplo genérico intelectual: cuando para la conjetura o demostración se usa un ejemplo representante de una clase y los argumentos están basados en propiedades matemáticas aceptadas, pero no son resultado de observaciones o propiedades encontradas en el ejemplo, sino que al trabajar sobre él se recuerdan.

Los tipos de demostración encontrados por Fiallo (2010) se resumen a continuación en la figura 11:

Figura 1 Esquema de los tipos de demostración encontrados por Fiallo (2010)



Guillén (2004) explica que en el segundo nivel de Van Hiele, demostrar una propiedad geométrica puede ser equivalente a comprobar o verificar experimentalmente en uno o más ejemplos, que se verifica la propiedad. La demostración va más allá de repetir el resultado, hay que mostrar que la proposición resulta verdadera, verificando o comprobando la conjetura. En este nivel los estudiantes distinguen enunciados que necesitan ser explicados para demostrarlos.

En el tercer nivel, según Guillén, demostrar una propiedad matemática demostrar es equivalente a argumentar para convencer que la propiedad es cierta utilizando razonamientos deductivos informales basados en la experimentación, están encadenados y conectan lo que saben con lo que quieren demostrar. La red de relaciones es bastante simple, las demostraciones en este nivel no corresponden a las demostraciones propias de un sistema deductivo. Los

argumentos están basados en la experimentación con material concreto y no siguen necesariamente reglas de demostración, tienen un significado ligado al contexto en el que se utilizan.

Para el cuarto nivel Guillén expresa que ya se pueden comprender las demostraciones como la organización de una secuencia de implicaciones basadas en las hipótesis del problema y elementos del sistema axiomático. El estudiante asocia la demostración como lo que vincula cada proposición con los axiomas, a las proposiciones y a las definiciones que la preceden.

2.2 MODELO DE VAN HIELE

El modelo de Van Hiele, está formado por dos componentes: una componente descriptiva formada por los niveles de razonamiento, que detallan la forma como los estudiantes razonan cuando efectúan diversas actividades para un tema, desde el razonamiento intuitivo hasta el razonamiento abstracto formal y una componente instructiva, las fases de aprendizaje, que ayudan al profesor a organizar las actividades para que sus estudiantes puedan avanzar de un nivel de razonamiento al inmediatamente superior.

El modelo considera cinco niveles de razonamiento, siendo el último nivel el de rigor, el cual no se alcanza en la escuela secundaria, por lo que en nuestro trabajo no lo tendremos en cuenta. Es característico de la teoría el seguimiento de un orden, la adyacencia, las relaciones y el lenguaje propio de cada uno de los niveles. En el modelo se considera que pasar de un nivel de pensamiento y conocimiento a otro no va asociado a la edad y sólo alcanzado un nivel se puede pasar al siguiente, además dos personas que razonan en niveles diferentes no se pueden entender.

Las características de cada uno de los niveles y los descriptores generales para el aprendizaje de la geometría han sido ampliamente publicados y divulgados en diferentes investigaciones y artículos (Gutiérrez, 2007; Guillén, 2004; Burger y

Shaughnessy, 1986; Fiallo, 2010; Gualdrón, 2011), por lo que en este apartado nos centraremos más bien en presentar las características que tendremos en cuenta para cada proceso en los diferentes niveles:

Nivel 1 Reconocimiento: En este nivel se da la percepción de los objetos en su totalidad y como unidades. No se suele reconocer explícitamente los elementos característicos ni las propiedades de los objetos.

- Proceso de descripción: Los estudiantes razonan sobre conceptos básicos, tales como formas simples, principalmente por medio de consideraciones visuales del concepto como un todo (Burger y Shaughnessy, 1986).
- Proceso de definición: Los estudiantes describen las propiedades y elementos físicos de los objetos matemáticos.
- Proceso de demostración: No hay razonamiento matemático, por lo que no realizan ningún tipo de demostración (Gutiérrez, 2007a).

Nivel 2 Análisis: Se perciben los objetos como formados por partes y dotados de propiedades, aunque no se identifican relaciones. Deducen propiedades a partir de la experimentación.

- Proceso de descripción: Los estudiantes razonan sobre los conceptos por medio de un análisis informal de las relaciones y propiedades, se establecen las propiedades necesarias del concepto (Burger y Shaughnessy, 1986).
- Proceso de definición: Los estudiantes describen propiedades y elementos matemáticos de los conceptos, usan definiciones de estructura lógica simple, construyen definiciones a partir de un listado de las propiedades conocidas (Gutiérrez, 2007a).
- Proceso de demostración: Los estudiantes realizan demostraciones de tipo empírico ingenuo, experimento crucial basado en ejemplo,

experimento crucial constructivo y ejemplo genérico analítico (Fiallo, 2010)

Nivel 3 Deducción informal: En este nivel se observan las propiedades y relaciones ya conocidas. Se detecta la necesidad de justificar.

- Proceso de descripción: Se considera que en este nivel no se da la descripción.
- Proceso de definición: Los estudiantes ordenan lógicamente las propiedades de los conceptos, construyen definiciones abstractas y pueden distinguir entre la necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades al determinar un concepto (Burger y Shaughnessy, 1986). Usan cualquier tipo de definición (Gutiérrez, 2007a).
- Proceso de demostración: Realizan demostraciones de tipo ejemplo genérico intelectual, experimento mental transformativo y experimento mental estructurado (Fiallo, 2010)

Nivel 4 Deducción formal: Aceptación de llegar al mismo resultado desde distintas premisas o de diferentes formas.

- Proceso de descripción: Se considera que en este nivel no se da la descripción.
- Proceso de definición: Los estudiantes razonan formalmente dentro del contexto de un sistema matemático completo, con términos indefinidos, axiomas, un sistema lógico subyacente, definiciones y teoremas (Burger y Shaughnessy, 1986). Se admite la existencia de definiciones equivalentes, se puede demostrar la equivalencia de definiciones (Gutiérrez, 2007a).
- Proceso de demostración: Los estudiantes realizan demostraciones de tipo experimento mental estructurado, deductiva formal transformativa y deductiva formal estructurada (Fiallo, 2010)

En la tabla 1, se muestra la relación entre los procesos y los niveles de razonamiento. Las celdas sombreadas representan los niveles en los cuales determinados procesos no se dan.

Tabla 1. Relación entre procesos y niveles de razonamiento

	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
DESCRIPCIÓN	Descripción de propiedades y elementos físicos de los objetos matemáticos.	Descripción de propiedades y elementos matemáticos de los conceptos		
USO DE DEFINICIONES		Definiciones con una estructura lógica simple	Cualquier tipo de definición	Admite la existencia de definiciones equivalentes
FORMULACIÓN DE DEFINICIONES	Descripción de características físicas de las figuras	Lista de las propiedades conocidas de ese concepto	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes	Se puede demostrar la equivalencia de definiciones
DEMOSTRACIÓN		Verificación empírica de las propiedades en uno o varios ejemplos	Demostraciones deductivas informales, pero generalmente con ayuda de ejemplos concretos.	Demostraciones deductivas formales

En el modelo de Van Hiele se proponen una serie de fases de aprendizaje para pasar de un nivel a otro, las fases no se asocian a un nivel determinado. Para Crowley (1987), el método y la organización de la instrucción, así como los contenidos y el material utilizado, son áreas importantes de interés pedagógico.

- *Fase 1* Información: Crowley (1987) afirma que en esta etapa inicial el profesor y los estudiantes conversan y realizan actividades sobre los

objetos de estudio de este nivel. Al respecto, Jaime y Gutiérrez (1990) expresan que:

Se trata de una fase de contacto: El profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear, qué materiales van a utilizar, etc. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos e imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho.

Esta es también una fase de información para el profesor, pues sirve para que éste averigüe los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema que se va abordar. (p. 333)

“El propósito de estas actividades es doble: (1) el profesor ve cuáles son los conocimientos previos de los estudiantes en relación al tema, y (2) los estudiantes ven qué dirección tomarán los estudios posteriores” (Crowley, 1987, p. 4).

- *Fase 2 Orientación dirigida:* Según Crowley (1987) en esta fase:

Los estudiantes exploran el tema de estudio a través de los materiales que el profesor ha ordenado cuidadosamente. Estas actividades deben revelar gradualmente a los estudiantes las estructuras características de este nivel. De este modo, la mayoría del material serán tareas simples diseñadas para obtener respuestas específicas. (p. 4)

Para Jaime y Gutiérrez, el objetivo principal es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan los principales conceptos, propiedades, figuras, etc. en el área de la geometría que están estudiando ya que se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel.

De la organización y diseño de las actividades que el profesor realice en esta fase depende en gran medida el éxito de los estudiantes para pasar de un nivel de razonamiento a otro superior (Fiallo, 2010).

- *Fase 3 Explicitación:* Crowley (1987) expresa que apoyándose en sus experiencias previas, los estudiantes expresan e intercambian sus incipientes puntos de vista acerca de las estructuras que han observado. Para Jaime y Gutiérrez (1990):

Una de las principales finalidades de la tercera fase es hacer que los estudiantes intercambien experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han resuelto las actividades, todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo. Es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o las de su compañero), que ordenarlas y que expresarlas con claridad. (p. 334)

El papel del profesor consiste en ayudar a los estudiantes a que usen un lenguaje preciso y apropiado para describir sus experiencias y comunicar sus conocimientos, lo que ayuda a afianzar los nuevos conocimientos.

- *Fase 4 Orientación libre:* Crowley (1987) expresa que en esta fase los estudiantes encuentran tareas más complejas, tareas con muchos pasos, tareas que se pueden realizar de varias formas y actividades abiertas. Para Jaime y Gutiérrez (1990) en esta fase los estudiantes perfeccionan su conocimiento mediante problemas, en los cuales se colocarán indicios que muestren el camino a seguir, de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente aplicando los conocimientos y la forma de razonar que ha adquirido en las fases anteriores. Con estas actividades los estudiantes pueden completar la red de relaciones que comenzó a formar en las fases anteriores.

- Fase 5 Integración: Para Crowley (1987) los estudiantes analizan y resumen lo que han aprendido, con el fin de tener una visión global de la nueva red de objetos y relaciones, el profesor ayuda con observaciones globales, pero es importante que los resúmenes no contengan nada nuevo. Jaime y Gutiérrez (1990) explican que en esta fase los estudiantes adquieren una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente, además al completar la fase tendrán una nueva red de relaciones mentales y habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

En cuanto a la evaluación, se considera de la misma forma como se tiene en cuenta en el modelo, ya que es una de las claves para la asignación de niveles, por esto se precisan algunas ideas previas:

1. El nivel de razonamiento de los estudiantes depende del área de las Matemáticas que se trate.
2. Se debe evaluar cómo los estudiantes contestan y el porqué de sus respuestas, más que lo que no contestan o contestan bien o mal.
3. En las preguntas no está el nivel de los estudiantes sino que está en sus respuestas.
4. En unos contenidos se puede estar en un nivel y, en otros diferentes, en nivel distinto.
5. Cuando se encuentran en el paso de un nivel a otro puede resultar difícil determinar la situación real en que se encuentran.

2.3 CONTENIDOS MATEMÁTICOS: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En esta sección se esbozan los contenidos matemáticos sobre los cuales se basa el estudio y que están propuestos en las actividades que desarrollaremos

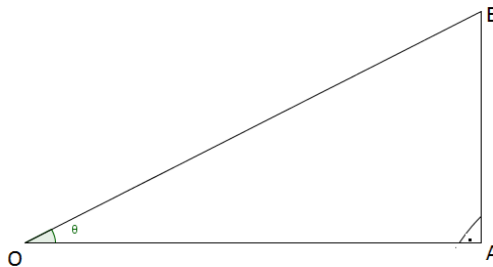
con los estudiantes. El trabajo se delimita a las razones seno, coseno y tangente por el análisis de experiencias anteriores, pertinencia de los contenidos y duración de la investigación.

De acuerdo con el libro de Trigonometría de Esteban, Ibañez y Ortega (1998):

Razones trigonométricas para ángulos agudos

Se parte de un triángulo rectángulo OAB , como muestra la Figura 2 y nos fijamos en su ángulo agudo AOB , al que se denotará θ . Se definen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, respectivamente, por las relaciones:

Figura 2 Razones trigonométricas.



Esteban et al., 1998, p.148

$$\text{sen}(\theta) = AB/OB,$$

$$\text{cos}(\theta) = OA/OB,$$

$$\text{tan}(\theta) = AB/OA$$

Es decir,

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos}(\theta) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tan}(\theta) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Estas definiciones dependen únicamente del ángulo θ , y nunca del triángulo particular OAB que se considere. Efectivamente, como indica la Figura 13, dos triángulos

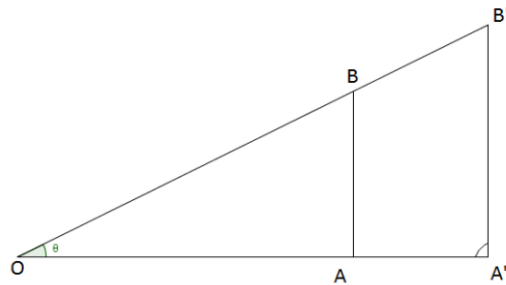
rectángulos con el mismo ángulo agudo θ , son semejantes y, por lo tanto, las razones definidas permanecen constantes:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{A'B'}{OB'} = \dots$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \dots$$

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} = \dots$$

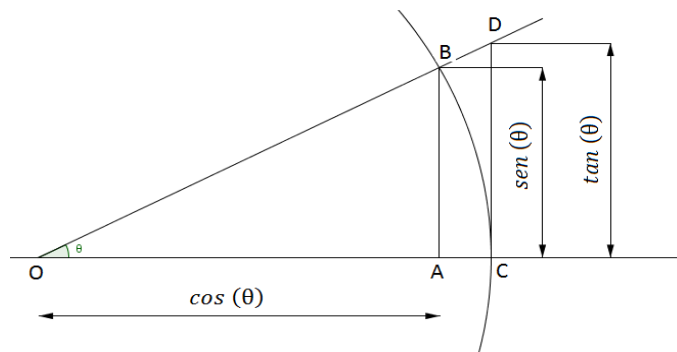
Figura 3 Las razones solo dependen del ángulo.



Esteban et al., 1998, p.149

Las razones trigonométricas definidas se visualizan de forma particularmente clara en la llamada circunferencia goniométrica de radio unidad como muestra la Figura 4

Figura 4 Segmentos trigonométricos "directos".



Esteban et al., 1998, p.149.

En este caso $OB = OC = 1$ Y por consiguiente:

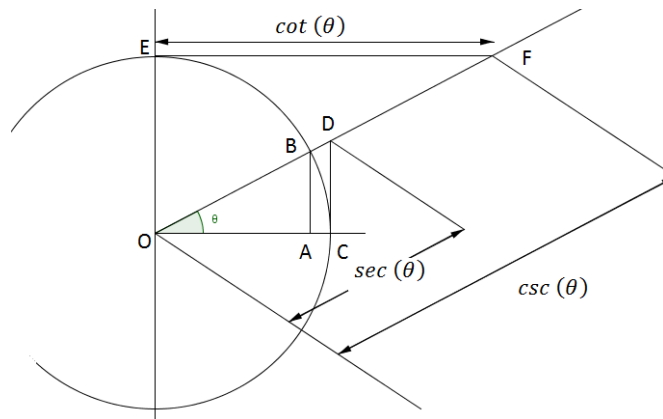
$$\operatorname{sen}(\theta) = AB, \quad \cos(\theta) = OA, \quad \tan(\theta) = \frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC} = CD$$

A veces resulta conveniente considerar las razones trigonométricas inversas: cosecante, secante y cotangente, que se definen mediante las correspondientes expresiones inversas, respectivamente, de las de seno, coseno y tangente:

$$\operatorname{csc}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}, \quad \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}, \quad \cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

Estas razones trigonométricas también se visualizan claramente en la circunferencia goniométrica de radio uno. Figura 5

Figura 5 Segmentos trigonométricos inversos.



Esteban et al., 1998, p.150.

Así es:

$$\operatorname{csc}(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} = \frac{OB}{AB} = \frac{OF}{OE} = \frac{OF}{1} = OF$$

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{1} = OD$$

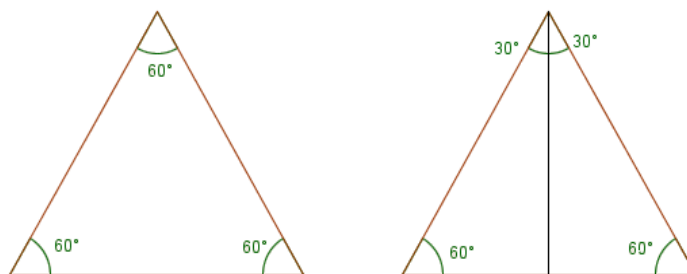
$$\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{OA}{AB} = \frac{EF}{OE} = \frac{EF}{1} = EF$$

Las abreviaturas que se han utilizado, tanto en las razones directas como en las inversas, a excepción de la cosecante (por coincidir con el coseno), están formadas por las tres primeras letras de la palabra, abreviaturas que, por otra parte, en el caso de las tres funciones directas, son las que utilizan las calculadoras.

Razones trigonométricas para ángulos destacados

Los ángulos de un triángulo equilátero miden 60° , y si se considera una de las alturas, aparecen dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo de 30° , como aparece en la figura 6.

Figura 6 triángulo básico I.



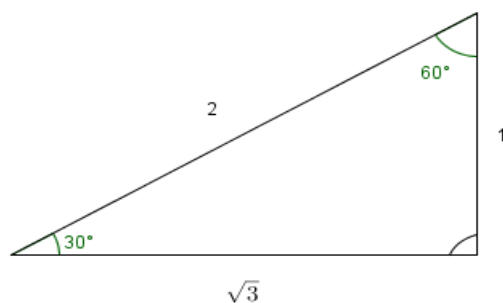
Esteban et al., 1998, p.150.

Suponiendo, para simplificar los cálculos, que el triángulo inicial tiene de lado 2, y aplicando el teorema de Pitágoras en uno de los triángulos rectángulos resultantes, se obtiene que la altura considerada vale $\sqrt{3}$. Entonces, los elementos del triángulo rectángulo se deducen, rápidamente, a partir de la figura y, de ellos,

$$\text{sen}(30^\circ) = 1/2; \cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2; \tan(30^\circ) = \sqrt{3}/3$$

$$\text{sen}(60^\circ) = \sqrt{3}/2; \cos(60^\circ) = 1/2; \tan(60^\circ) = \sqrt{3}$$

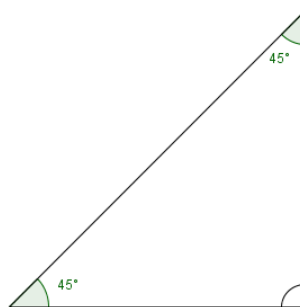
Figura 7 Razones de 30° y 60°.



Esteban et al., 1998, p.151.

Si, por otro lado, se considera un triángulo rectángulo isósceles, sus ángulos agudos son de 45° y las razones de este ángulo se determinan fácilmente.

Figura 8 Triángulo básico II.



Esteban et al., 1998, p.151.

Igual que antes, se simplifican los cálculos si se supone, como muestra la figura 8, que los catetos miden 1 y, por lo tanto, la hipotenusa $\sqrt{2}$. Se deduce entonces que

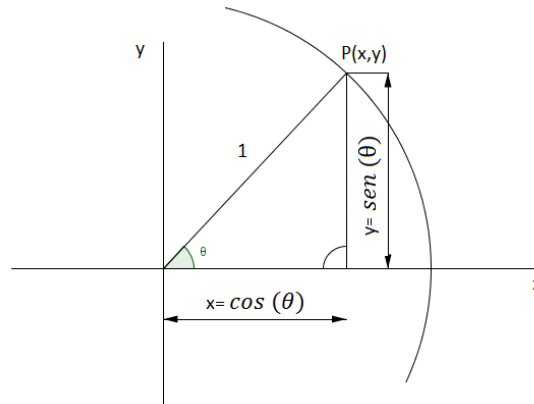
$$\text{sen}(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \tan(45^\circ) = 1$$

Razones trigonométricas para ángulos cualesquiera

Se han definido las razones trigonométricas para ángulos agudos . Puesto que en la práctica surgen, en numerosas ocasiones, ángulos que no son agudos, se hace

necesario extender esas definiciones al caso general. Como ya se ha dicho, las razones trigonométricas de un ángulo agudo dependen exclusivamente de dicho ángulo. Por lo tanto, se partirá del caso más sencillo, considerando la circunferencia goniométrica de radio unidad.

Figura 9 Coordenadas de los puntos de la circunferencia unidad en el primer cuadrante.



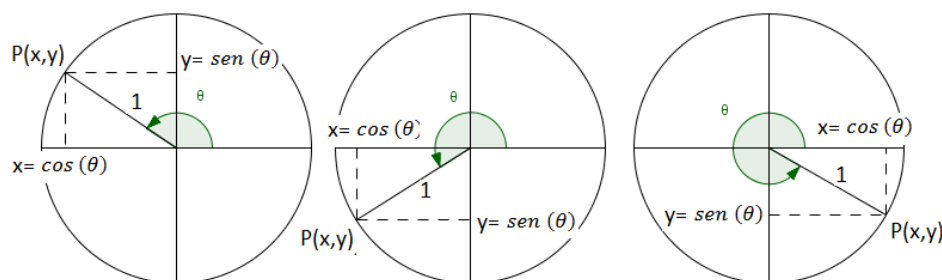
Esteban et al., 1998, p.152.

Si, como ya muestra la figura 19, se fija un *sistema de coordenadas cartesianas* con origen en el centro, O , de la circunferencia unitaria, cualquier punto $P(x,y)$ sobre la misma define un ángulo, θ , de modo que, si éste es agudo, las expresiones de las razones trigonométricas se pueden reescribir en función de las coordenadas de P mediante las relaciones:

$$\text{sen}(\theta) = y; \cos(\theta) = x; \tan(\theta) = y/x$$

Interpretadas así las razones trigonométricas, éstas se pueden extender de modo natural para cualquier ángulo, tal y como se ilustra en la figura 10.

Figura 10 Coordenadas de los puntos de la circunferencia unidad en el segundo, tercer y cuarto cuadrante.



Esteban et al., 1998, p.153.

Observación

Incluso, adquieren pleno sentido las razones trigonométricas para los ángulos de 0° , 90° , 180° y 270° , cuyos valores se exponen en el cuadro

ÁNGULO/RAZÓN	SENO	COSENO	TANGENTE
0°	0	1	0
90°	1	0	—
180°	0	-1	0
270°	-1	0	—

Cabe destacar que el signo de cada razón trigonométrica va a variar en función del cuadrante donde se encuentre el ángulo θ , de la forma que resume el cuadro:

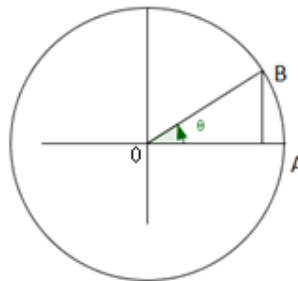
CUADRANTE	$\text{sen}(\theta)$	$\text{cos}(\theta)$	$\text{tan}(\theta)$
I($0^\circ < \theta < 90^\circ$)	+	+	+
II($90^\circ < \theta < 180^\circ$)	+	—	—
III($180^\circ < \theta < 270^\circ$)	—	—	+
IV($270^\circ < \theta < 360^\circ$)	—	+	—

Fórmulas trigonométricas

En esta sección se argumentará también sobre la circunferencia goniométrica de radio unidad. De esta forma se simplifican notablemente los razonamientos y los cálculos.

Relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas

Figura 11 Aplicación del Teorema de Pitágoras.



Esteban et al., 1998, p.154.

Considerando el triángulo rectángulo OAB de la figura 11, se tiene

$$\tan(\theta) = AB/OA = \text{sen}(\theta)/\cos(\theta)$$

Por tanto,

$$\tan(\theta) = \text{sen}(\theta)/\cos(\theta)$$

Además, si se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo OAB , se obtiene que $AB^2 + OA^2 = OB^2$, es decir,

$$\text{sen}(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 = 1$$

Por otra parte,

$$1 + \tan^2(\theta) = 1 + [\text{sen}(\theta)/\cos(\theta)]^2 = 1 + \text{sen}^2(\theta)/\cos^2(\theta) =$$

$$[\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)]/\cos^2(\theta) = 1/\cos^2(\theta)$$

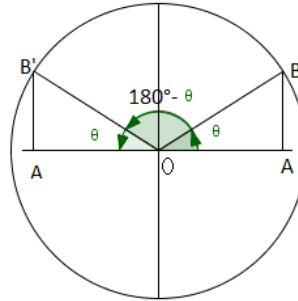
Y finalmente,

$$1 + \tan^2(\theta) = 1/\cos^2(\theta)$$

Relaciones entre las razones de ciertos ángulos

A) *Ángulos suplementarios*

Figura 12 Ángulos suplementarios.



Esteban et al., 1998, p.155.

Los triángulos rectángulos OAB y $OA'B'$ de la figura 12 son semejantes por tener un ángulo (ángulo en O) igual. Además, son congruentes por tener idéntica la hipotenusa y por tanto,

$$\text{sen}(180^\circ - \theta) = \text{sen}(\theta)$$

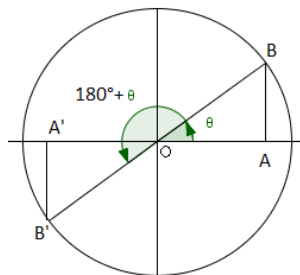
$$\text{cos}(180^\circ - \theta) = -\text{cos}(\theta)$$

$$\text{tan}(180^\circ - \theta) = -\text{tan}(\theta)$$

(siempre que exista la tangente)

B) *Ángulos que difieren en 180°*

Figura 13 Ángulos que difieren en 180° .



Esteban et al., 1998, p.156.

Por la misma razón que antes los triángulos rectángulos OAB y $OA'B'$ de la figura 13 son congruentes, luego

$$\text{sen}(180^\circ + \theta) = -\text{sen}(\theta)$$

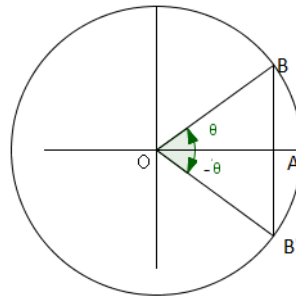
$$\text{cos}(180^\circ + \theta) = -\text{cos}(\theta)$$

$$\text{tan}(180^\circ + \theta) = \text{tan}(\theta)$$

(siempre que exista la tangente)

C) Ángulos opuestos

Figura 14 Ángulos opuestos.



Esteban et al., 1998, p.156.

De la congruencia de los triángulos OAB y $OA'B'$ de la figura 14 se desprenden las relaciones,

$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$$

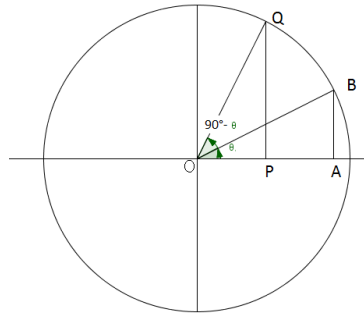
$$\text{cos}(-\theta) = \text{cos}(\theta)$$

$$\text{tan}(-\theta) = -\text{tan}(\theta)$$

(siempre que exista la tangente)

D) Ángulos complementarios

Figura 15 Ángulos complementarios



. Esteban et al., 1998, p.157.

Aquí los triángulos OAB y $OA'B'$ de la figura 15 son congruentes, de lo que se deduce:

$$\text{sen}(90^\circ - \theta) = \cos(\theta)$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \text{sen}(\theta)$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = 1/\tan(\theta) = \cot(\theta)$$

(siempre que exista la tangente)

Observaciones

Las fórmulas para ángulos que se diferencian en 180° , pueden interpretarse de forma intuitiva como las de un giro de 180° . En efecto, si aplicamos tal giro a un punto $P[\cos(\theta), \text{sen}(\theta)]$, sobre la circunferencia unidad, se transforma en el punto P' de coordenadas

$$\cos(180^\circ) \cdot \cos(\theta) - \text{sen}(180^\circ) \cdot \text{sen}(\theta) = -\cos(\theta)$$

$$\text{sen}(180^\circ) \cdot \cos(\theta) + \cos(180^\circ) \cdot \text{sen}(\theta) = -\text{sen}(\theta)$$

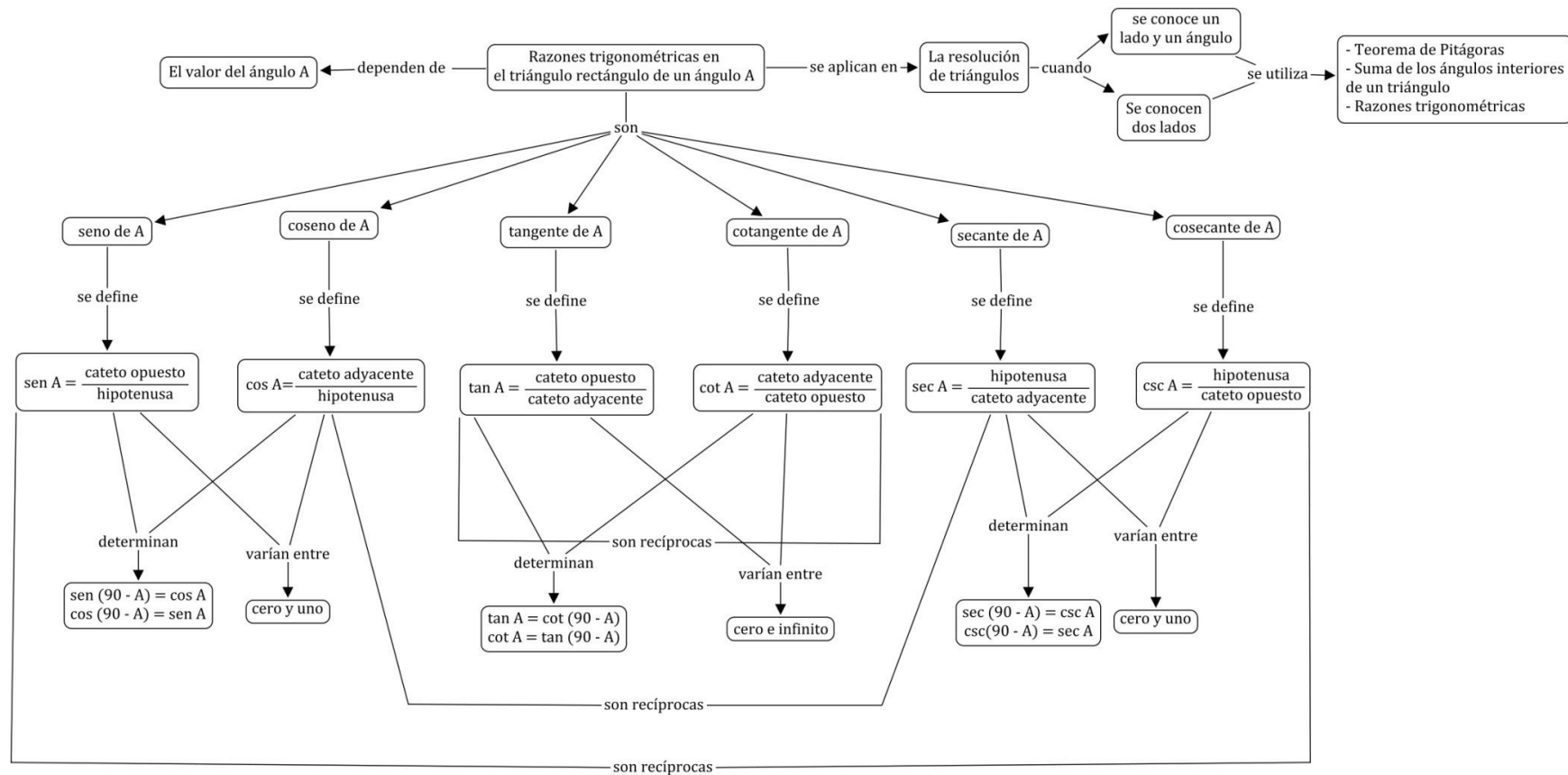
Por este motivo, dichas fórmulas también pueden denominarse *fórmulas para el semigiro*.

Igualmente, las fórmulas para razones de ángulos opuestos pueden interpretarse en términos de una *simetría* respecto del eje OX . Como las fórmulas de transformación de esta simetría son $x' = x$, $y' = -y$, el punto $P(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ se convierte en $P'(\cos(\theta), -\text{sen}(\theta))$.

2.3.1 MAPAS CONCEPTUALES DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA

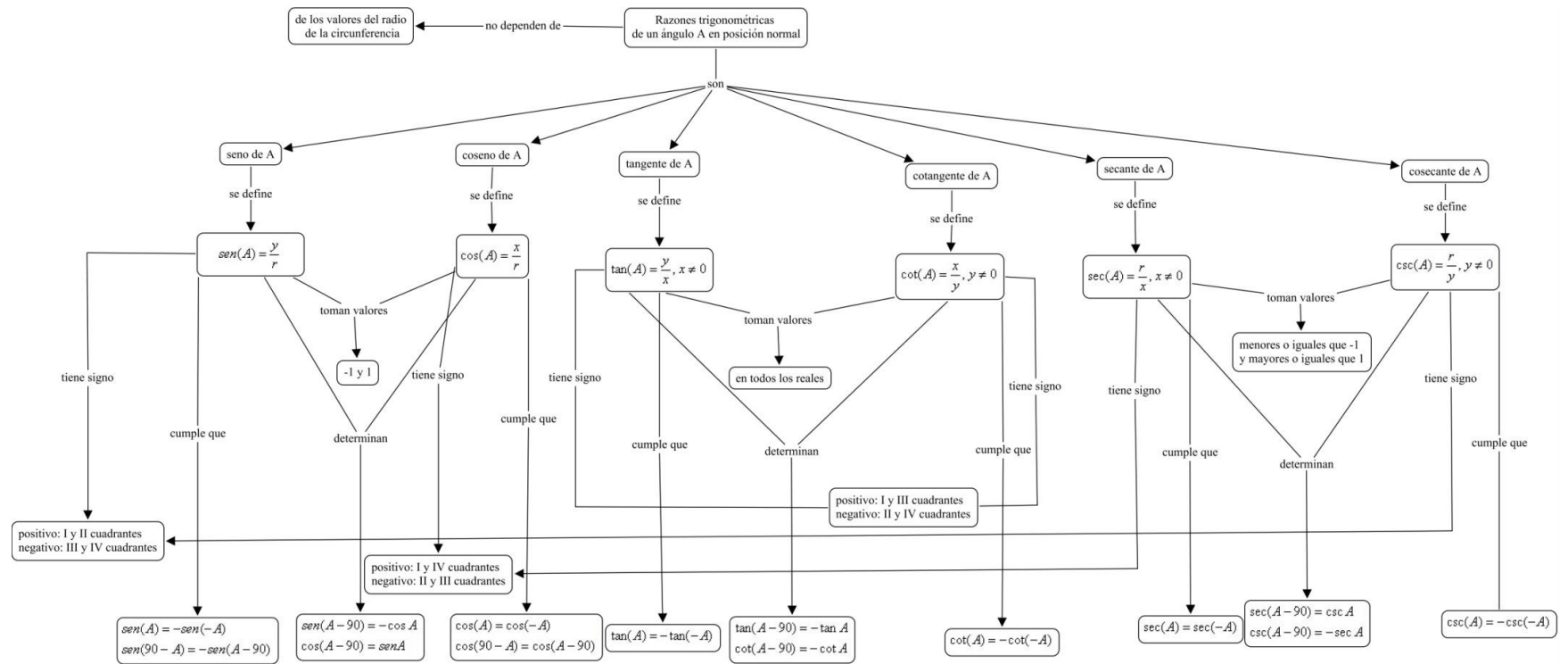
A continuación se muestran los mapas conceptuales en los cuales se basa cada una de las actividades planteadas en la unidad de enseñanza de modo que se pueda tener una visión global de los conceptos y relaciones considerados fundamentales en el estudio de las razones trigonométricas, por otra parte se resalta que los mapas están acordes con el enfoque y objetivo de la investigación.

Figura 16 Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.



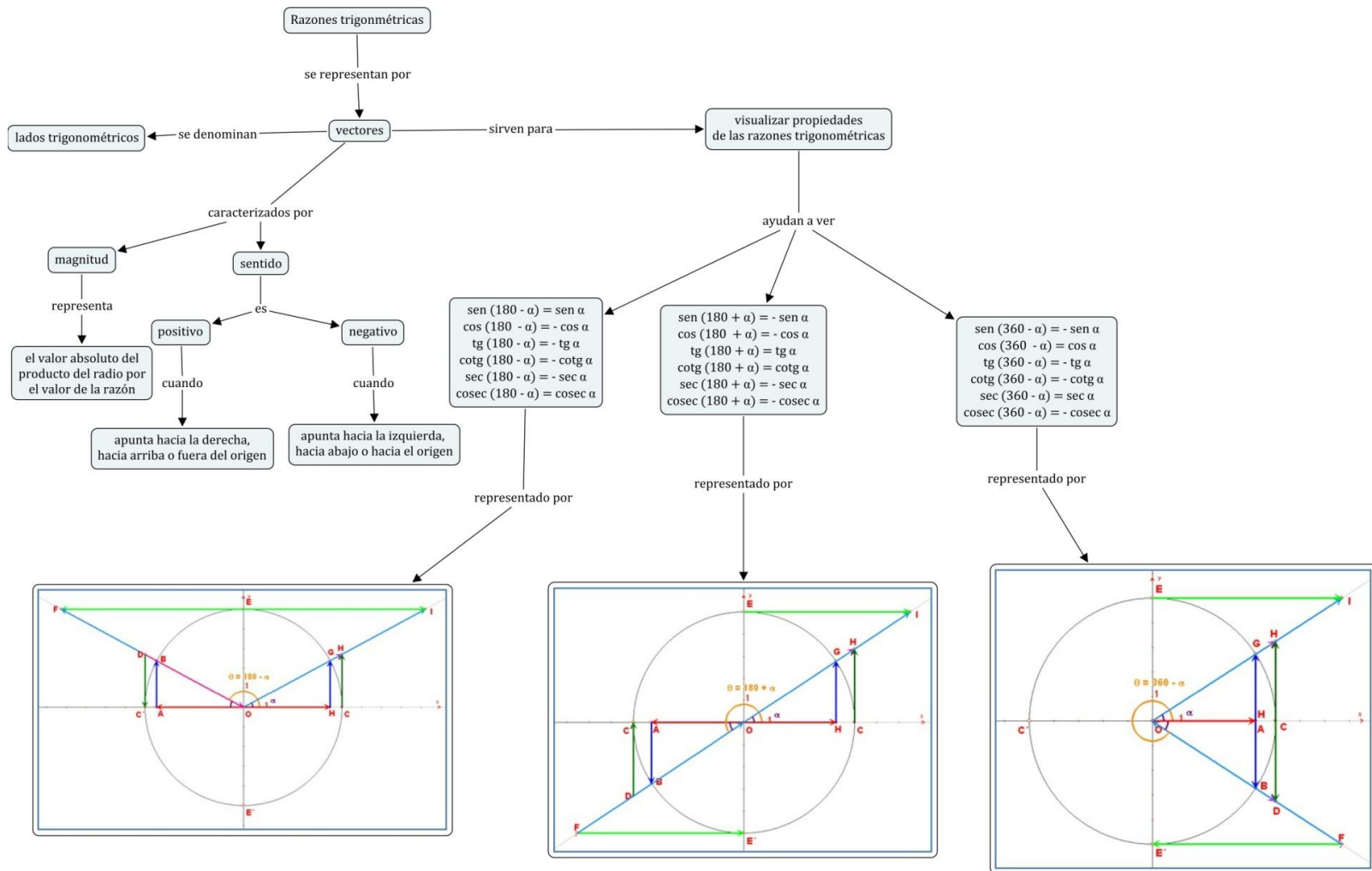
Fiallo, 2010, p. 67

. **Figura 17** Razones trigonométricas para un ángulo en posición normal.



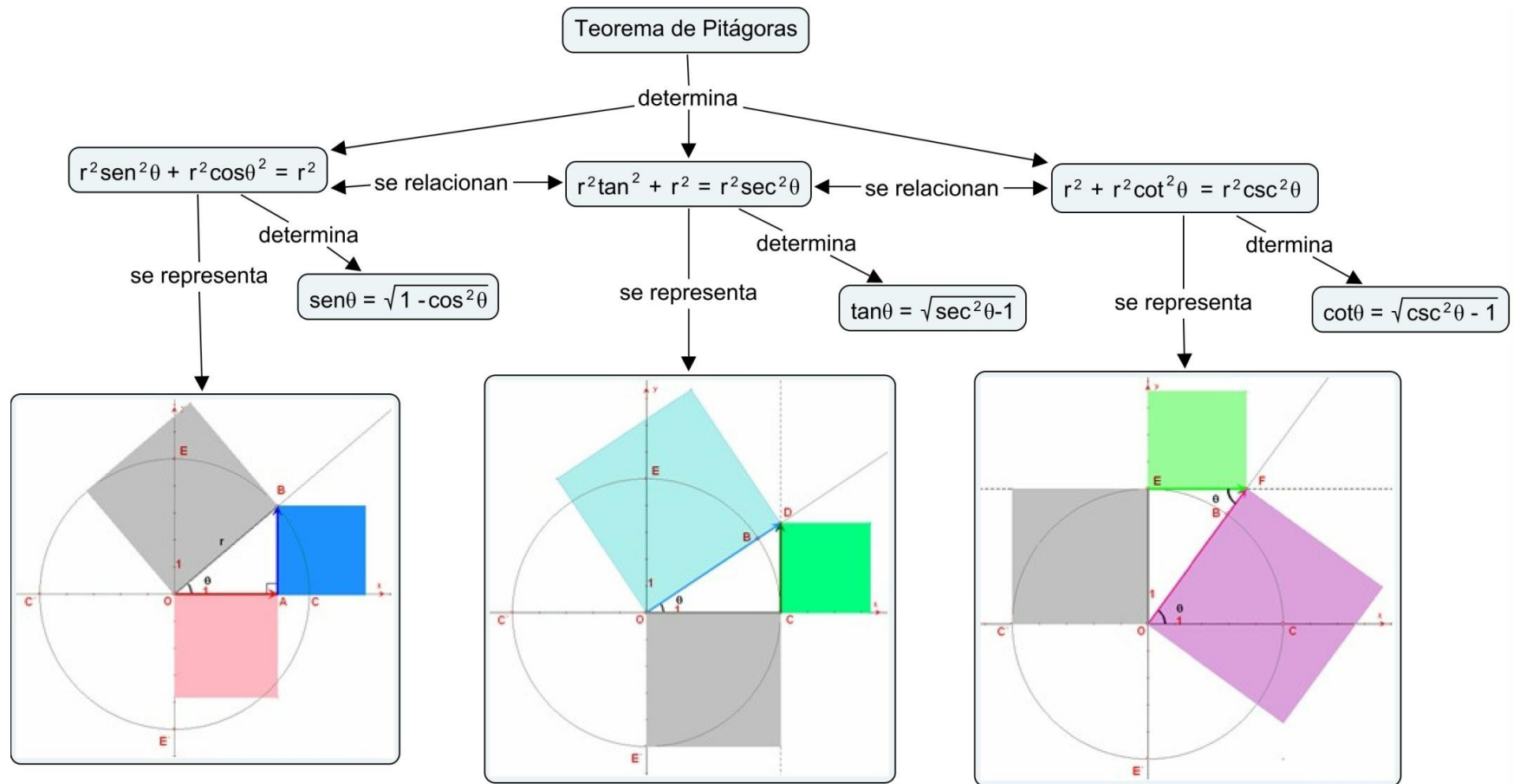
Fiallo, 2010, p. 68.

Figura 18 Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas



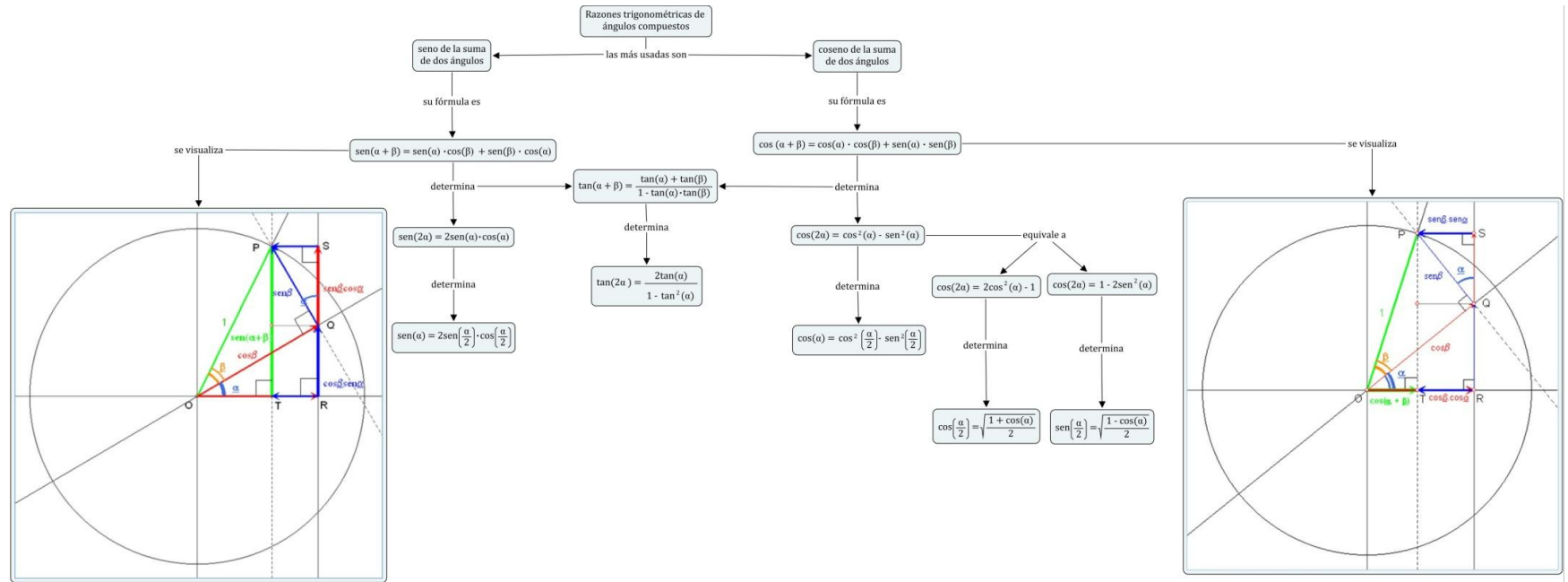
Fiallo, 2010, p. 69.

Figura 19 Identidades Pitagóricas.



Fiallo, 2010, p. 70.

Figura 20 Seno y coseno de la suma de dos ángulos.



Fiallo, 2010, p. 71.

3. METODOLOGÍA

A partir de este estudio y con base en otros trabajos de investigación relacionados, se pretende construir la caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración cuando se estudian las Razones Trigonométricas mediante el análisis de las actuaciones de los estudiantes cuando desarrollan las actividades diseñadas en la Unidad de enseñanza planeada.

El capítulo inicia con las características de la metodología empleada (sección 3.1). En la sección 3.2 se enuncian las formas de recolección de la información, en la sección 3.3 los criterios y procedimientos para el análisis de datos, seguido de la descripción de la población en la sección 3.4. Por último, en la sección 3.5, se analiza la metodología del trabajo de la clase.

3.1 CARACTERÍSTICAS DE LA METODOLOGÍA

Teniendo como eje central las preguntas planteadas y sin perder de vista el objetivo principal de la investigación: Caracterizar los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el tema de las razones trigonométricas, se consideró viable elaborar una investigación cualitativa porque a partir de las actuaciones de los estudiantes y su interacción con los compañeros y docente se obtienen datos cualitativos, que al ser analizados son útiles en la construcción de la caracterización de los descriptores de los niveles de razonamiento para las actividades de la unidad de enseñanza.

La investigadora que fue a la vez docente del grupo, orientó las actividades a todo el curso, con la colaboración de un auxiliar (estudiante de último semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander) quien conocía las actividades y el objetivo de la investigación.

3.2 FORMAS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

La investigación, de tipo cualitativo, se llevó a cabo con un grupo completo de estudiantes de 10° grado de la Institución Educativa Luis C. Galán de Bucaramanga. La implementación de la unidad se realizó durante el horario normal: dos sesiones de dos horas y una sesión de una hora. Todas las clases se trabajaron en el aula de informática, en grupos de dos estudiantes por computador.

El objetivo de la investigación hizo necesario recoger la mayor cantidad de datos posible, por esta razón los datos se recolectaron mediante video grabación de dos grupos de estudiantes y al grupo completo durante las sesiones de clase dedicadas a la fase de explicitación, hojas de trabajo de los estudiantes y las actuaciones de los estudiantes en la interacción con el computador, con los compañeros y con el investigador. Por consiguiente, el proceso de investigación se inició con el diseño de la unidad de enseñanza al tiempo que se realizaba la caracterización inicial de los procesos de acuerdo al marco teórico establecido; la siguiente etapa consistió en la aplicación de la unidad de enseñanza durante las sesiones de clase para obtener la información requerida mediante videos, hojas de trabajo y observaciones del investigador. A continuación se describen los medios usados para la recolección de los datos.

Video-grabaciones: Los videos se usaron para elaborar las transcripciones de las actividades y análisis de los procedimientos desarrollados mediante la implementación de las actividades, de modo que se pudo observar como mediante la descripción de los archivos, los estudiantes fueron generalizando propiedades y usando definiciones que los llevaron a adquirir habilidades en la demostración. Con la utilización de las video grabaciones se captó con fidelidad las interacciones verbales de los estudiantes en el momento de solucionar las situaciones planteadas, con esto se logró complementar las informaciones de las hojas de trabajo, dado que no siempre los estudiantes plasman en sus escritos todas las acciones y el razonamiento realizado con sus compañeros, con el docente o, con

la pantalla del computador (gestos para señalar ángulos, figuras, datos, movimientos de las manos para realizar descripciones etc.). Con estas grabaciones, se realizaron transcripciones de los momentos que al parecer del investigador se consideraron pertinentes para elaborar los descriptores de los niveles de Van Hiele o para ejemplificar momentos en donde los estudiantes están describiendo, definiendo, conjeturando o demostrando.

Hojas de trabajo de los estudiantes: En estas, los estudiantes plasmaban sus respuestas a las actividades planteadas, las cuales se recogían al finalizar la clase para escanearlas. Las hojas de trabajo sirvieron como soporte y complemento a las grabaciones, ya que permitieron identificar las descripciones realizadas por los estudiantes, el uso y la formulación de definiciones y los procesos de demostración desarrollados.

Registro de notas del investigador: Al finalizar las clases el docente-investigador realizaba las transcripciones de los videos a la vez que tomaba nota de los momentos claves para identificar los descriptores de los procesos seleccionados. Esto se convirtió en una herramienta valiosa para el análisis de la información.

En resumen la captura de los datos se logró a través de los medios descritos en los párrafos anteriores, específicamente a través de las video-grabaciones, el registro de las notas del investigador y la recolección del material original producido por los estudiantes para escanearlo. Toda la información recolectada se transcribió de manera precisa y clara para su análisis.

3.3 CRITERIOS Y PROCEDIMIENTOS DEL ANÁLISIS DE DATOS

Para conseguir el objetivo de la investigación, se realizó un análisis de las actividades teniendo en cuenta los procedimientos realizados por los estudiantes, las descripciones elaboradas, las definiciones usadas y formuladas, los tipos de demostración y la caracterización inicial de los niveles de Van Hiele propuesta para llevar a cabo este trabajo, este hecho llevó al investigador a revisar cada

detalle en los videos y cada procedimiento en las hojas de trabajo elaboradas por los estudiantes, para determinar qué aportaban al análisis. Una vez encontrados los datos relevantes a la investigación, se relacionaron con los descriptores inicialmente propuestos para elaborar las explicaciones necesarias. En otras palabras, los datos fueron analizados, examinados y comparados con cada descriptor de nivel, buscando los vínculos que los enlazaban.

De esta manera, al analizar las producciones escritas se apoya la información en los videos y las transcripciones de los fragmentos que parecieron útiles al estudio y que se captaron durante el desarrollo de las actividades. Se ejemplifica cada nivel de Van Hiele propuesto en la caracterización inicial con las soluciones elaboradas por los estudiantes a las tareas planteadas, esto se logró organizando las producciones de los estudiantes las cuales se asignaban dentro de las categorías de los niveles.

En resumen, el procedimiento general para el análisis de datos se condensa de la siguiente forma: a) Elaboración de las transcripciones del material necesario para ser analizado, b) Lectura cuidadosa de la información obtenida, haciendo una primera categorización de acuerdo con los descriptores iniciales, c) Clasificación de los datos de acuerdo con los procesos y niveles de razonamiento, d) Descripción del análisis para encontrar significados de las actuaciones y producciones de los estudiantes, hacer comparaciones de los respectivos niveles de razonamiento, hacer interpretaciones, sacar conclusiones y construir la caracterización de los descriptores de los procesos, tal como se planteó en el objetivo.

3.4 DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN

El estudio se llevó a cabo durante el primer semestre del año 2013 en la Institución Luis Carlos Galán Sarmiento de Bucaramanga (Santander, Colombia), con 35 estudiantes de grado 10° (14 – 16 años). Se escogió este colegio ya que es el sitio de trabajo de la investigadora, que en este caso también es docente del

grupo. La institución educativa se encuentra ubicada en el barrio Los Estoraques, en un sector de estrato socio-económico bajo y en él se ofertan todos los niveles educativos.

Durante el 2012 los estudiantes realizaron acercamientos ocasionales con el software GeoGebra para realizar construcciones, pero no lo usaron como herramienta de análisis sobre construcciones ya elaboradas, para describir lo que observaban en la pantalla, construir o usar definiciones o demostrar sus argumentos. En ese año en la institución educativa no se tenía contemplada la asignatura de geometría; dentro del plan de área de Matemáticas sólo se contemplaban algunos acercamientos con temas relacionados con áreas de figuras planas y volúmenes de sólidos.

3.5 METODOLOGÍA DEL TRABAJO DE CLASE

Trabajo de clase: Las clases fueron ejecutadas según el diseño de la Unidad de enseñanza y teniendo en cuenta los procesos escogidos, de ahí que la mayoría de las actividades se realizaban en parejas y algunas se desarrollaban con el grupo completo de acuerdo a la planeación de las fases de explicitación en las guías de trabajo. En las fases de explicitación que se llevaban a cabo con el grupo completo, también se motivaba a los estudiantes a la discusión de conceptos, relaciones, propiedades, descripciones, definiciones y demostraciones utilizadas para que observaran las diferentes formas en que cada pareja organizaba su trabajo y explicaban sus resultados; estos momentos fueron propicios para que el docente hiciera explícito el uso de las descripciones para mostrar las propiedades o lo que no era una propiedad de modo que se creara la necesidad del uso y formulación de la teoría que serviría para elaborar demostraciones más formales.

Los estudiantes distribuidos en parejas llevaban a cabo las actividades de acuerdo con las de guías de trabajo (Anexos 1 al 4), las cuales eran entregadas al iniciar la actividad; estas deberían ser terminadas para poder continuar la secuencia de actividades. Las respuestas debían ser escritas en las hojas de

trabajo, al igual que los procedimientos utilizados; de la misma forma debían registrar las preguntas que surgieran o las dificultades con las cuales se encontraban a lo largo de las sesiones.

A los estudiantes se les entregaban hojas en blanco para desarrollar sus actividades de modo que se facilitara escanearlas para su posterior lectura y análisis de los trabajos elaborados.

Durante el desarrollo de todas las sesiones, se insistió que los estudiantes a partir de la exploración de los archivos y del uso de las herramientas del software podrían visualizar, experimentar y generalizar procedimientos que les permitirían realizar sus procesos de descripción, definición y demostración. Se insistió además que las conclusiones serían discutidas en parejas, escritas en las hojas de trabajo y comunicadas en la sesión de explicitación grupal.

Papel del docente: La docente actuó a la vez como investigadora, implementaba las actividades y orientaba las clases según las planeaciones elaboradas, es decir jugó un papel activo en la orientación y seguimiento de las actividades y asesoría de los estudiantes teniendo cuidado de interactuar con todos los estudiantes, pero especialmente con dos grupos que fueron escogidos para el seguimiento.

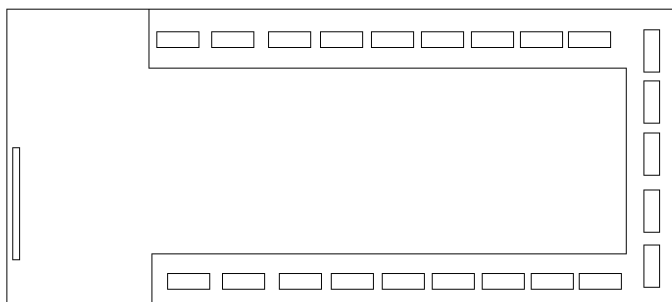
Con el objeto de facilitar la toma de datos en los grupos seleccionados para la investigación, se contó con el apoyo de un profesor-auxiliar en el aula de clase quien en ese momento era estudiante de último semestre de la licenciatura de matemáticas y colaboró con la docente apoyando a los estudiantes en el manejo de software e inquietudes que se presentaron durante las sesiones de trabajo en la sala de informática. Como requisito para fungir de docente auxiliar el estudiante de la licenciatura debió conocer además de la temática, los objetivos de la investigación y las actividades a desarrollar con el grupo.

Docente y auxiliar motivaban a los estudiantes a elaborar sus propios procedimientos, en ningún momento se les daba la respuesta a las preguntas planteadas, más bien se insistía en el uso de las herramientas de medida en el software y la utilización de argumentos matemáticos para la elaboración de las

demostraciones, en lugar de usar argumentos poco precisos, como datos obtenidos de ejemplos observados en la pantalla, es decir se insistió en pasar de las demostraciones inductivas a las deductivas en la medida de los conocimientos de los estudiantes. Se pedía además la elaboración de dibujos o diagramas con los cuales reforzaran sus respuestas y explicaciones.

Aula de clase: Todas las sesiones de trabajo se realizaron en el aula de informática, de modo que los horarios fueran respetados en su totalidad y que no se afectara el normal desarrollo de las actividades. La sala cuenta con 30 computadores en buen estado, que están dispuestos en forma de herradura para facilitar el trabajo de los estudiantes en parejas o ternas, y para que el profesor pueda observar el trabajo que realizan. Además en todos los equipos se encuentra disponible el software Geogebra para facilitar la ejecución de las actividades. En el siguiente plano se puede observar la distribución de los equipos dentro de la sala:

Figura 21 Distribución de los equipos en la sala de informática.



4. UNIDAD DE ENSEÑANZA

En el presente capítulo se muestra detalladamente la unidad de enseñanza diseñada luego de analizar el objetivo de la investigación, la revisión bibliográfica, los contenidos a desarrollar y los aspectos metodológicos necesarios para el desarrollo de la investigación.

En la sección 4.1 se presentan las Generalidades de la Unidad de Enseñanza. En la sección 4.2 se describen cada una de las cuatro actividades y en el apartado 4.3 se hará una descripción inicial de los niveles de razonamiento para el estudio de las Razones trigonométricas que sirven como punto de partida para la investigación.

4.1 GENERALIDADES DE LA UNIDAD DE ENSEÑANZA

La unidad de enseñanza está conformada por 4 actividades: 1) Razones trigonométricas para triángulos rectángulos; 2) Razones trigonométricas para ángulos en posición normal; 3) Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas y; 4) Identidades Pitagóricas. Con estas actividades se busca principalmente, que los estudiantes comprendan conceptos y relaciones matemáticas, acorde con las propuestas curriculares y textos de matemáticas; además de la iniciación de los estudiantes en los procesos de Descripción, Definición y Demostración.

La unidad de enseñanza se caracteriza por la enseñanza basada en el descubrimiento guiado apoyado en el uso de software de geometría dinámica. A partir de las interacciones con el software, los estudiantes pueden hacer descripciones de lo que observan en la pantalla, realizan generalizaciones que los llevan a usar y comprender definiciones, con las cuales paulatinamente elaboran demostraciones cada vez más formales.

Una estrategia clave en el desarrollo de las sesiones de clase es motivar a los estudiantes a utilizar el arrastre, las herramientas de medida y /o cálculo del software para explorar las construcciones, realizar descripciones, identificar definiciones o verificar sus conjeturas. En este sentido, es importante llevar a los estudiantes a reflexionar sobre sus procesos para no quedarse en la parte estática de las descripciones referidas a lo que se observa en la pantalla o en la elaboración de demostraciones inductivas.

Cada actividad cuenta con un archivo dinámico en GeoGebra, que se enfoca como herramienta de visualización, exploración y análisis de relaciones y propiedades trigonométricas. En las actividades no se proponen tareas de construcción, sin embargo los estudiantes están en libertad de usar construcciones adicionales para realizar descripciones, plantear definiciones o verificar conjeturas.

Como objetivo principal de la unidad de enseñanza se propone que los estudiantes logren *Analizar situaciones relacionadas con las razones trigonométricas que les permitan identificar aspectos relevantes, establecer relaciones, usar en forma flexible conceptos y procedimientos, expresar sus ideas en forma matemática con lo cual puedan justificar la validez de las soluciones propuestas.*

Las actividades se organizaron utilizando las fases del Modelo de Van Hiele. En la fase de explicitación se proponen momentos de discusión grupal que promuevan la participación, intercambio de resultados, adquisición de vocabulario, realizar conexiones entre conceptos y procesos de razonamiento, y la comprensión de conceptos y propiedades de las razones trigonométricas. Para la fase de integración, se propone completar un mapa conceptual de modo que puedan organizar los conceptos, sus relaciones y propiedades. Los niveles de Van Hiele se tienen en cuenta para la caracterización de los descriptores de los procesos en cada una de las actividades.

4.2 DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

A continuación se presenta la descripción de las actividades planeadas, las guías completas se encuentran en los anexos de esta memoria. Para cada actividad se muestran los objetivos de aprendizaje, la explicación de cada sub-actividad, en caso de ser necesario se describen los archivos usados en GeoGebra, y por último se modelan algunas de las actuaciones para cada proceso que se esperan de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades.

ACTIVIDAD 1: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS:

Con esta actividad se persiguen los siguientes objetivos: 1) Identificar las razones trigonométricas del triángulo rectángulo. 2) Reconocer que el valor de las razones trigonométricas de un triángulo depende de la amplitud de los ángulos del triángulo pero no depende de las longitudes de los lados. 3) Fomentar la reflexión y la discusión sobre conceptos básicos de las razones trigonométricas. 4) Promover el desarrollo de los procesos de descripción, definición y demostración.

Actividad 1. (Información) En esta actividad no se hace uso del software, los estudiantes deben hallar los elementos que se solicitan de un triángulo rectángulo. Uno de los objetivos de los problemas planteados es crear la necesidad de aprender conceptos nuevos que le ayuden en la solución de estas situaciones. Se presentan problemas que no se pueden resolver si no conocen las razones trigonométricas, a no ser que encuentre respuesta aproximada mediante la utilización de instrumentos de medida.

El profesor debe orientar a los estudiantes para que comprendan que las medidas encontradas mediante instrumentos de medición, como regla y transportador no son exactos, y que cuando se usa un software a pesar de lograr precisión se requieren justificaciones teóricas.

Los resultados esperados para cada proceso se muestran a continuación:

Descripción: Con este grupo de actividades se espera que los estudiantes logren identificar los elementos geométricos de los triángulos rectángulos (hipotenusa, catetos, ángulos internos y externos).

Definición: Los estudiantes no podrán encontrar la solución a los problemas planteados si no conocen las razones trigonométricas, o si a pesar de conocerlas no saben cómo utilizarlas. La necesidad de encontrar solución a los problemas planteados los llevará a buscar relaciones que les permitan plantear respuestas, estas pueden darse mediante la utilización de las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente), uso del teorema de Pitágoras, el análisis de la relación entre la longitud de los lados y la medida de los ángulos en un triángulo rectángulo.

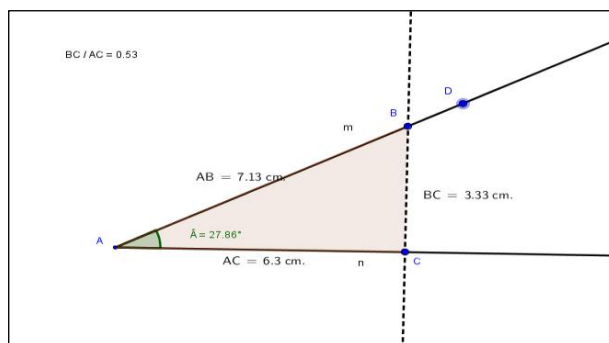
Demostración: Con esta actividad todavía no se espera que los estudiantes realicen demostraciones, sin embargo pueden utilizar ejemplos específicos para la resolución de problemas.

Con este grupo de actividades el profesor puede identificar conocimientos previos de los estudiantes y corregir errores que se presenten, además puede identificar el nivel de Van Hiele en el cual se encuentran los estudiantes, por lo que puede aprovechar la experiencia de los estudiantes como fuente de motivación, a la vez que evitar repetir o tratar de enseñar cosas que los alumnos ya saben, por otra parte para utilizar el modelo es necesario conocer el grado de conocimiento del tema por parte de los estudiantes y sobre todo el nivel de razonamiento.

Actividad 2 (Orientación dirigida) Razones entre las longitudes de un triángulo rectángulo, identidades trigonométricas básicas. Con esta actividad se pretende introducir a los estudiantes a las razones trigonométricas mediante la exploración de las medidas de los lados y ángulos del triángulo rectángulo. Se espera que identifiquen la dependencia de las razones de los ángulos, los valores de variación de las razones y que se den cuenta que las razones seno y cosecante son recíprocas al igual que coseno y secante, tangente y cotangente.

En la figura 22 se muestra una imagen del archivo que trabajarán los estudiantes (ACT 1).

Figura 22 Imagen del archivo ACT 1 Razones trigonométricas para triángulos rectángulos.



En el archivo mediante el arrastre del punto D , los estudiantes pueden visualizar la variación de los ángulos A y B , lados del triángulo y la variación de las razones trigonométricas. Con el arrastre del punto C , los estudiantes pueden visualizar la variación de los lados del triángulo y que los valores de los ángulos y de las razones permanecen invariantes, visualizan además, triángulos semejantes.

A continuación se describe lo que se espera para cada proceso con la actividad 2:

Descripción: Mediante la utilización del arrastre en el archivo ACT 1 los estudiantes pueden describir la variación de las razones trigonométricas, de los ángulos, visualizan que las razones dependen de la amplitud de los ángulos del triángulo, pero no depende de las longitudes de sus lados. Así mismo podrán observar y describir que dos razones varían entre cero y uno; otras dos entre cero e infinito; y las otras dos entre uno e infinito.

Definición: Los estudiantes reconocen las razones trigonométricas como cocientes entre los lados del triángulo rectángulo así: En el triángulo ABC se establecen las razones $\frac{AB}{BC}$, $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AC}$, $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$ y $\frac{AC}{BC}$.

Demostración: Mediante esta actividad, las variaciones de las razones y los valores entre los que varía cada una, serán susceptibles de demostrar, ya sea con ejemplos encontrados en la pantalla o mediante razonamientos matemáticos.

Actividad 3 (Explicitación) Definición de las razones trigonométricas. Con esta actividad el docente define formalmente las razones trigonométricas, haciendo énfasis en la importancia que estas tienen para la resolución de problemas sobre triángulos tanto en la vida diaria como en otras ciencias.

A continuación se muestran los resultados esperados para cada proceso.

Descripción: La discusión sobre las variaciones de las razones trigonométricas permite a los estudiantes explicar lo observado en la pantalla.

Definición: El profesor debe hacer énfasis en que los estudiantes comprendan las razones como relación entre lados del triángulo y no como cocientes, debe hacerlos caer en la cuenta que, en este caso, el numerador y el denominador son números racionales por las limitaciones del software, pero igualmente podrían ser irracionales. También debe formalizar los resultados obtenidos, de tal manera que queden institucionalizadas las definiciones de las razones trigonométricas y algunas de sus propiedades.

Demostración: Los estudiantes explican y argumentan sus conjeturas y demostraciones sobre los intervalos de variación de las razones trigonométricas cuando varían los ángulos, sobre la dependencia de las razones de los ángulos y sobre la reciprocidad de las razones seno y cosecante, coseno y secante, tangente y cotangente. Los estudiantes ven diferentes formas y tipos de demostración. El profesor debe empezar a cuestionar las demostraciones basadas en ejemplos o en lo visualizado en la pantalla, e irá creando la necesidad de las justificaciones teóricas.

Actividad 4 (Orientación dirigida) Identidades trigonométricas de un ángulo y su complemento. Utilizando el archivo ACT 1 (Figura 23), se calculan y relacionan las seis razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo,

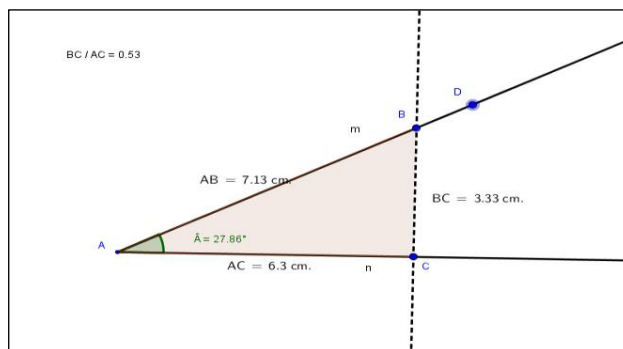
se espera que describan y demuestren las relaciones y propiedades entre las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios.

Para cada proceso se espera lo siguiente:

Descripción: En esta actividad los estudiantes describen la relación entre los ángulos agudos del triángulo rectángulo, podrán plantear que son complementarios, describen que cuando uno de los ángulos agudos aumenta el otro disminuye, e intentan expresar el ángulo B en términos del ángulo A , según la construcción del archivo ACT 1. Describen el comportamiento de las razones del ángulo B . Se espera que identifiquen algunas de las relaciones entre las razones del ángulo A y B , por ello en una de las actividades se indaga sobre la relación entre el seno del ángulo A y el coseno del ángulo complementario B .

Definición: Los estudiantes usan las definiciones de las razones trigonométricas dadas en la actividad 3 para hallar las razones del ángulo B :

Figura 23 Imagen del archivo ACT 1.



$$\sin(B) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos(B) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan(B) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cot(B) = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\sec(B) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\csc(B) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{AB}{AC}$$

Con esta actividad se espera que los estudiantes usen las definiciones de las razones trigonométricas para el ángulo $B = 90 - A$, definan B en función de A , de modo que puedan encontrar relaciones entre las razones de ambos ángulos (por ejemplo, que $\text{sen}(A) = \cos(B)$) y posteriormente que admitan su equivalencia. Es decir,

$$\text{sen}(A) = \cos(90 - A); \quad \cos(A) = \text{sen}(90 - A); \quad \tan(A) = \cot(90 - A)$$

$$\text{sen}(A) = \frac{1}{\csc(A)}, \quad \cos(A) = \frac{1}{\sec(A)}, \quad \tan(A) = \frac{1}{\cot(A)}$$

Demostración: Los estudiantes demuestran propiedades reconocidas de las razones trigonométricas:

$$\text{sen}(A) = \cos(90 - A); \quad \cos(A) = \text{sen}(90 - A); \quad \tan(A) = \cot(90 - A)$$

$$\text{sen}(A) = \frac{1}{\csc(A)}, \quad \cos(A) = \frac{1}{\sec(A)}, \quad \tan(A) = \frac{1}{\cot(A)}$$

Actividad 5 (Explicitación) Discutiendo y comunicando. Esta actividad sirve para la discusión grupal de conceptos y relaciones encontradas, así como para realizar las correcciones pertinentes y la formalización de los conceptos sobre identidades de un ángulo y su complemento.

Para cada proceso se espera lo siguiente:

Descripción: Describen las propiedades matemáticas encontradas en la actividad anterior tales como:

$$\text{sen}(A) = \cos(90 - A); \cos(A) = \text{sen}(90 - A); \tan(A) = \cot(90 - A).$$

Definición: La actividad permite a los estudiantes compartir con sus compañeros los usos que le ha dado a las definiciones de las razones trigonométricas. El profesor debe enfatizar en la importancia de uso correcto de las definiciones.

Demostración: Los estudiantes explican a los compañeros las demostraciones desarrolladas en la actividad anterior y observan otras formas y tipos de demostración. El profesor debe insistir en el uso de propiedades matemáticas en las demostraciones, sin descalificar las demostraciones de los estudiantes,

debe buscar contraejemplos o refutaciones potenciales que cuestionen los tipos de demostraciones inductivas.

Actividad 6 (Orientación libre) Propiedades y aplicaciones de las razones trigonométricas, identidades trigonométricas básicas. Se proponen nuevos problemas de aplicación de los conocimientos sobre las razones trigonométricas. Se espera que los estudiantes comprendan la importancia de los conocimientos adquiridos en la solución de problemas de triángulos rectángulos, de áreas, de la vida cotidiana y otras ciencias.

Se espera que los estudiantes desarrollen los procesos de la siguiente manera:

Descripción: Reconocen que: $\tan(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\cos(A)}$.

Definición: Con esta actividad los estudiantes utilizan las definiciones de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en la construcción de definiciones adicionales en las que relacionan unas razones con otras como por ejemplo $\tan(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\cos(A)}$.

Demostración: Los estudiantes realizan la demostración de la relación entre seno, coseno y tangente de un ángulo. Demuestran que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente.

Actividad 7 (Integración) Mapa conceptual. Se entrega un mapa conceptual incompleto a los estudiantes, para establecer la integración de los conceptos y relaciones estudiados. Se debe tener cuidado de explicar lo que es un mapa conceptual por si alguno de los estudiantes no ha utilizado esta herramienta.

ACTIVIDAD 2: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

Los objetivos que se persiguen con esta actividad son los siguientes:

- Introducir la representación de las razones trigonométricas en la circunferencia trigonométrica.

- Reconocer que las razones trigonométricas no dependen del radio de la circunferencia.
- Reconocer y calcular las razones trigonométricas de ángulos positivos y negativos.

Actividad 1 (Información) Identidades trigonométricas de los ángulos A y $A - 90^\circ$. Para crear la necesidad de ampliar las razones trigonométricas al plano cartesiano se plantean dos problemas en los cuales los estudiantes deben tener en cuenta ángulos mayores de 90° y ángulos negativos. El primer problema es verdadero, se espera que los estudiantes solo den algunos casos como ejemplos. El segundo problema es falso, se espera que los estudiantes traten de encontrar algunos ejemplos que consideren verdaderos para solucionar la situación. Se debe motivar a los estudiantes a no conformarse con un ejemplo, que usen varios ejemplos para probar sus conjeturas y en el caso que utilicen calculadora o herramientas del software, la idea es que justifiquen sus mediciones.

Con relación a los procesos tenemos que:

Descripción: Describen los elementos geométricos de los triángulos rectángulos. Elaboran el listado de las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo y las describen como cocientes entre los lados del triángulo.

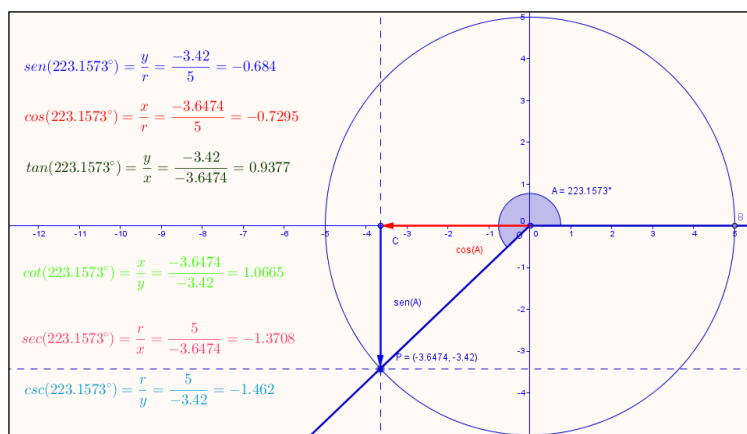
Definición: Usan las definiciones de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, se espera que adquieran la necesidad de ampliar estas definiciones al plano cartesiano ya que con las preguntas propuestas se indaga por ángulos mayores de 90° y ángulos negativos.

Demostración: Se espera que los estudiantes demuestren con ejemplos o contraejemplos la validez de las conjeturas propuestas. Algunos intentan realizar demostraciones deductivas, si han comprendido la importancia de las reglas teóricas y la deficiencia de los ejemplos.

$$\text{sen}(A) = \cos(A - 90) \text{ y } \cos(A) = \text{sen}(A - 90)$$

Actividad 2 (Orientación dirigida) Introducción a las razones trigonométricas en el plano cartesiano. Se espera que los estudiantes exploren el archivo ACT 2.1 (Figura 24) para que describan los elementos y relaciones que encuentran, además se espera que usen las definiciones de las razones trigonométricas en el plano cartesiano y las relacionen con las definiciones del triángulo rectángulo. Igualmente se espera que en el archivo entregado, visualicen y relacionen las razones seno y coseno con los vectores azul y rojo respectivamente. En el archivo el punto P se puede mover sobre la circunferencia, lo cual permite observar el cambio de las razones trigonométricas y las coordenadas del punto, la utilización de colores y ayudas visuales permiten a los estudiantes identificar y conectar conceptos y relaciones. También se visualiza el triángulo formado por el eje de las x , el lado final del ángulo y la perpendicular al eje x que pasa por P .

Figura 24 Imagen del archivo ACT 2.1



El docente debe acordar con los estudiantes que cuando se midan ángulos que giran en el sentido de las manecillas del reloj, el signo del ángulo es negativo y si el giro es en contra de las manecillas del reloj, entonces el ángulo es positivo. Con esta actividad se podrán formalizar las definiciones de las razones trigonométricas en el plano cartesiano.

Para cada proceso se esperan los siguientes resultados:

Descripción: Los estudiantes describen y encuentran relaciones entre los elementos geométricos que encuentren en la construcción. Describen los triángulos rectángulos que se forman cuando se mueve el punto P alrededor de la circunferencia. Identifican ángulos en posición normal, describen la variación del ángulo, identifican las razones seno y coseno por los colores, describen la variación de las razones a medida que el ángulo A cambia, identifican y describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos.

Definición: Comprenden y usan las definiciones de las razones trigonométricas para ángulos en posición normal. Reconocen cuando las razones son indefinidas.

$$\operatorname{sen}(A) = \frac{y}{r}$$

$$\operatorname{cos}(A) = \frac{x}{r};$$

$$\operatorname{tan}(A) = \frac{y}{x}; x \neq 0$$

$$\operatorname{cot}(A) = \frac{x}{y}; y \neq 0$$

$$\operatorname{sec}(A) = \frac{r}{x}; x \neq 0$$

$$\operatorname{csc}(A) = \frac{r}{y}; y \neq 0$$

Demostración: Justifican relaciones entre elementos geométricos encontrados como triángulos semejantes, clases de ángulos. Demuestran el cambio de las razones trigonométricas cuando varía el ángulo A .

Actividad 3(Orientación dirigida) Propiedades y valores de las razones trigonométricas en el plano cartesiano. Se definen las razones trigonométricas para ángulos en posición normal sobre la circunferencia, se afianza que las razones dependen de la amplitud de los ángulos. El profesor ayuda a los estudiantes a entender las limitaciones del software para mostrar todas las cifras decimales relacionadas con cada una de las razones trigonométricas, por lo cual se les pide aproximar los resultados con la mayor cantidad de cifras posible para observar las tendencias de los valores. Se analizan los signos de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en cada cuadrante y se identifican cuando son indefinidas o las restricciones de cada razón.

Para cada proceso se espera:

Descripción: Describen la variación de los valores y de los signos de las razones trigonométricas a medida que varía el ángulo A . La interacción con el software permite a los estudiantes describir que las razones trigonométricas del ángulo A permanecen invariantes cuando varía el radio de la circunferencia. Describen la relación que encuentran entre las coordenadas del punto P y las razones trigonométricas seno y coseno cuando el radio de la circunferencia mide 1. Describen lo que ocurre con las razones trigonométricas seno, coseno y tangente cuando el ángulo A mide 0° , 90° , 180° , 270° y 360° .

Definición: Comprenden y usan las definiciones de las razones trigonométricas para ángulos en posición normal.

Demostración: Encuentran y demuestran que $\text{sen } A$ y $\text{cos } A$ equivalen a las coordenadas del punto P respectivamente, cuando $r = 1$. Demuestran los valores que toman las razones trigonométricas a medida que varía el ángulo A . Demuestran cómo es la variación de los signos de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en cada cuadrante.

Actividad 4 (Explicitación) Discutiendo y comunicando. Esta actividad sirve para la discusión grupal de las relaciones y propiedades de las razones trigonométricas en el plano cartesiano, al mismo tiempo se definen las razones trigonométricas en el plano, se realizan las correcciones pertinentes y se institucionalizan los conceptos trabajados.

En la explicitación, se espera que en cada proceso los estudiantes realicen:

Descripción: Mediante el intercambio de las experiencias de los diferentes grupos durante la actividad, los estudiantes describen las conclusiones elaboradas sobre: intervalos de variación de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, propiedades y regularidades de las razones; las relaciones entre ángulos positivos y negativos, los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante, describen además lo que sucede con las razones cuando varía el valor del radio y cuando el valor del radio es 1.

Definición: La actividad permite a los estudiantes compartir con sus compañeros los usos que le han dado a las definiciones de las razones trigonométricas.

Demostración: Explican a los compañeros las demostraciones desarrolladas sobre: el cambio de las razones trigonométricas cuando varía el ángulo A , los valores que toman las razones trigonométricas a medida que varía el ángulo A , demuestran cómo es la variación de los signos de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en cada cuadrante, demuestran que $\operatorname{sen} A$ y $\operatorname{cos} A$ equivalen a las coordenadas del punto P respectivamente, cuando $r = 1$ y demuestran los valores de las razones trigonométricas para cuando el ángulo mide 0° , 90° , 180° , 270° y 360° .

Actividad 5 (Orientación dirigida) Identidades trigonométricas entre ángulos opuestos. Los estudiantes deben analizar las relaciones entre las coordenadas de un ángulo y su opuesto, definiendo las razones en términos de las variables x, y, r .

Se espera para cada proceso:

Descripción: Describen la variación de las razones a medida que varía el ángulo A . Describen la variación de signos de las razones trigonométricas de ángulos en posición normal.

Definición: Usan las definiciones de las razones trigonométricas en términos de x, y, r :

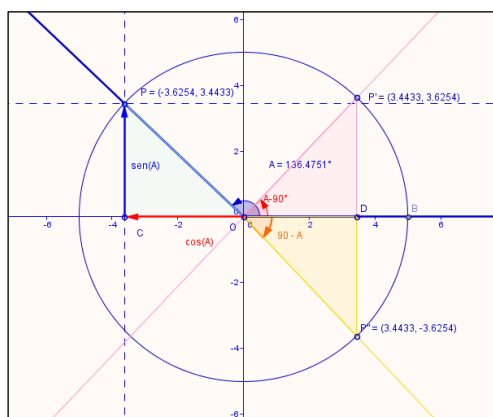
$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}(A) = \frac{y}{r} & \operatorname{cos}(A) = \frac{x}{r} & \operatorname{tan}(A) = \frac{y}{x}; x \neq 0 \\ \operatorname{cot}(A) = \frac{x}{y}; y \neq 0 & \operatorname{sec}(A) = \frac{r}{x}; x \neq 0 & \operatorname{csc}(A) = \frac{r}{y}; y \neq 0 \end{array}$$

Usan las definiciones de las razones en el plano cartesiano para hallar las razones trigonométricas para ángulos opuestos, admiten definiciones equivalentes para ángulos opuestos.

Demostración: Encuentran y demuestran relaciones entre $\operatorname{sen}(A)$ y $\operatorname{sen}(-A)$, $\operatorname{cos}(A)$ y $\operatorname{cos}(-A)$, $\operatorname{tan}(A)$ y $\operatorname{tan}(-A)$ tales como: $\operatorname{sen}(A) = -\operatorname{sen}(-A)$; $\operatorname{cos}(A) = \operatorname{cos}(-A)$; $\operatorname{tan}(A) = -\operatorname{tan}(-A)$.

Actividad 6 (Orientación libre) Identidades trigonométricas de los ángulos A , $90 - A$ y $A - 90$. Se utiliza el archivo ACT 2.2 (Figura 25) en el cual se pueden visualizar los ángulos A , $90 - A$ y $A - 90$ y los triángulos rectángulos formados con el eje x para que los estudiantes analicen las relaciones entre las razones trigonométricas de los tres ángulos.

Figura 25 Imagen del archivo ACT 2.2



Para cada proceso se espera que:

Descripción: Describen y encuentran relaciones entre los elementos geométricos presentes en el archivo ACT 2.2. Describen los triángulos rectángulos que se forman cuando se mueve el punto P alrededor de la circunferencia y las relaciones que encuentran entre ellos. Describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos. Describen la variación en los valores y signos de las razones trigonométricas de los ángulos A , $A - 90$, $90 - A$.

Definición: Usan las definiciones de las razones trigonométricas en términos de x , y , r para construir las definiciones de las razones para los ángulos A , $A - 90$, $90 - A$. Admiten definiciones equivalentes de las razones trigonométricas para los ángulos A , $A - 90$, $90 - A$.

Demostración: Encuentran y demuestran relaciones entre las razones trigonométricas para los ángulos A , $A - 90$, $90 - A$ tales como: $\text{sen}(90 - A) = -\text{sen}(A - 90)$; $\cos(A) = -\text{sen}(A - 90)$; $\cos(A - 90) = \cos(90 - A)$; $\tan(A) = -\cot(A - 90)$.

Actividad 7 (Explicitación) Discutiendo y comunicando. Esta actividad sirve para la discusión grupal de las identidades trigonométricas de los ángulos A , $A - 90$, $90 - A$, se definen las razones trigonométricas para estos ángulos y se realizan las correcciones pertinentes y la institucionalización de los conceptos trabajados.

En la explicitación, se espera que en cada proceso los estudiantes:

Descripción: Describan las relaciones encontradas para las razones trigonométricas de los ángulos A , $-A$, $A - 90$, $90 - A$.

Definición: Compartan los usos que le ha dado a las definiciones de las razones trigonométricas para los ángulos A , $-A$, $A - 90$, $90 - A$ en la aceptación de definiciones equivalentes.

Demostración: Expliquen a los compañeros las demostraciones empíricas o deductivas desarrolladas para las relaciones entre los ángulos A , $-A$, $A - 90$, $90 - A$, tales como:

$$\text{sen}(A) = -\text{sen}(-A); \cos(A) = \cos(-A); \tan(A) = -\tan(-A);$$

$$\text{sen}(90 - A) = -\text{sen}(A - 90); \cos(A) = -\text{sen}(A - 90);$$

$$\cos(A - 90) = \cos(90 - A); \tan(A) = -\cot(A - 90).$$

Actividad 8 (Orientación libre) Propiedades de las razones trigonométricas, identidades trigonométricas de los ángulos A , $90 - A$ y $A - 90$. Con esta actividad se busca llevar a los estudiantes a la reflexión sobre los conceptos y propiedades de la primera serie de actividades propuesta, que identifiquen sus errores, usen los conocimientos adquiridos y apliquen otras herramientas del software para analizar las propiedades encontradas.

A continuación se muestra lo que se espera que los estudiantes desarrollen para cada proceso:

Descripción: Describen semejanzas y diferencias entre las razones para triángulos rectángulos y ángulos en posición normal. Describen relaciones entre las razones trigonométricas para los ángulos A , $-A$, $A - 90$, $90 - A$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(90 - A) &= -\operatorname{sen}(A - 90); & \cos(A) &= -\operatorname{sen}(A - 90); & \cos(A - 90) &= \\ \cos(90 - A); & \tan(A) &= -\cot(A - 90). \end{aligned}$$

Definición: Usan las definiciones de las razones trigonométricas de los ángulos A , $-A$, $A - 90$, $90 - A$ para solucionar problemas.

Demostración: Demuestran relaciones encontradas para las razones trigonométricas de los ángulos A , $-A$, $A - 90$, $90 - A$, tal como $\cos(A - 90) = \cos(90 - A)$

Actividad 9 (Integración) Mapa conceptual. Se entrega un mapa conceptual incompleto a los estudiantes, para establecer la integración de los conceptos y relaciones estudiados.

ACTIVIDAD 3: REPRESENTACIÓN LINEAL Y VISUALIZACIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Los objetivos para esta actividad son:

- Introducir las representaciones gráficas de las razones trigonométricas como vectores sobre la circunferencia. Los vectores se denominarán “lados trigonométricos”.
- Utilizar la representación vectorial de las razones trigonométricas para visualizar y descubrir propiedades.

Actividad 1 (Información) Identidades trigonométricas entre los ángulos relacionados. Esta actividad apunta a motivar a los estudiantes hacia el estudio de las identidades trigonométricas de ángulos relacionados. Los estudiantes pueden

o no encontrar relaciones que tratan de probar en ejemplos, se insiste en el uso de argumentos matemáticos.

Para cada proceso se espera que:

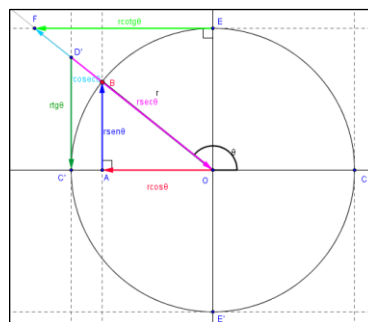
Descripción: Describen la variación de los valores y los signos de las razones trigonométricas para ángulos en posición normal. Describen relaciones entre las razones trigonométricas para los ángulos A , $-A$, $A - 90$, $90 - A$, $180 - A$ y $180 + A$.

Definición: Usan las definiciones de las razones trigonométricas de los ángulos A , $-A$, $A - 90$, $90 - A$, $180 - A$ y $180 + A$ para resolver problemas.

Demostración: Utilizan ejemplos o contraejemplos para demostrar afirmaciones relacionadas a las razones trigonométricas de los ángulos A , $180 - A$ y $180 + A$.

Actividad 2 (Orientación dirigida) Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas. Con esta actividad se introduce la representación de las razones trigonométricas como vectores sobre la circunferencia. El archivo dinámico permite a los estudiantes analizar esta representación en los cuatro cuadrantes, de modo que podrán entender más fácilmente las relaciones entre el ángulo y los lados trigonométricos. En la figura 26 se observa el archivo ACT 3.1 que se utiliza en la actividad.

Figura 26 Imagen del archivo ACT 3.1



El uso de vectores facilita la identificación de signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante y la visualización de relaciones entre ellas. Si los vectores inician en (0,0), la razón es positiva; si los vectores finalizan en (0,0), la razón es negativa. Los vectores cuyo extremo está en el eje de coordenadas, con sentido arriba o a la derecha representan razones cuyos valores son positivos, mientras que los vectores con sentido hacia abajo o la izquierda representan razones cuyos valores son negativos.

Para los procesos se espera que:

Descripción: Describen los elementos geométricos presentes en la construcción. Describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos. Describen la variación de los valores y los signos de las razones trigonométricas para ángulos en posición normal. Describen el cambio de los valores y signos de las razones, basados en las propiedades visuales los vectores cuando el ángulo varía entre -360° y 360° . Describen relaciones entre las razones trigonométricas para los ángulos A , $180 - A$, $180 + A$, $360^\circ - \alpha$ y $360^\circ + \alpha$. Describen los lados trigonométricos del ángulo θ por medio de sus colores y dirección, identificando el signo correspondiente.

Definición: Usan las definiciones de las razones trigonométricas para los ángulos $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ ó $360^\circ - \alpha$; admiten definiciones equivalentes:

$\text{sen}(A) = \text{sen}(180 - A)$; $-\tan(A) = \tan(180 - A)$; $-\cos(A) = \cos(180 - A)$;
 $-\text{sen}(A) = \text{sen}(180 + A)$; $-\cos(A) = \cos(180 + A)$; $\tan(A) = \tan(180 + A)$.

Demostración: Demuestra las siguientes relaciones:

$\text{sen}(A) = \text{sen}(180 - A)$; $-\tan(A) = \tan(180 - A)$; $-\cos(A) = \cos(180 - A)$;
 $-\text{sen}(A) = \text{sen}(180 + A)$; $-\cos(A) = \cos(180 + A)$; $\tan(A) = \tan(180 + A)$.

Actividad 3 (Orientación dirigida) Demostración de las relaciones entre las razones trigonométricas y los segmentos. Se presenta la demostración de que la longitud del lado tangente de α es igual a $r \cdot \tan(\alpha)$, de modo que los estudiantes

analicen un ejemplo de la demostración de una igualdad, y continúen el proceso con las otras razones trigonométricas.

Para los procesos se espera:

Descripción: Describen relaciones entre los ángulos θ y α en cada cuadrante (toman como referencia los ángulos 0° , 90° , 180° , 360° , además θ puede ser $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ ó $360^\circ - \alpha$).

Definición: Usan las definiciones de las razones trigonométricas en el plano cartesiano para los ángulos α , $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ y $360^\circ - \alpha$.

Demostración: Se expone una demostración de la longitud del lado *tangente de θ* es igual a $r \cdot \tan \theta$, La observación y experimentación con el software les permite entender la demostración realizada y elaborar las correspondientes demostraciones para las otras razones: 1) demuestra que el segmento $\overline{AB}$ (si $0^\circ < \theta < 360^\circ$) está relacionado con el seno de θ y 2) demuestra que el segmento $\overline{OA}$ (si $0^\circ < \theta < 360^\circ$) está relacionado con el coseno de θ .

Actividad 4 (Orientación dirigida) Relaciones entre ángulos de referencia. Se motiva a los estudiantes al establecimiento de conexiones entre distintos tipos de representaciones y a la elaboración de justificaciones teóricas basadas en la congruencia de ángulos y triángulos, semejanza de triángulos; se insiste en el uso de dibujos para sustentar sus explicaciones. Para cada proceso se espera:

Descripción: Describen relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos α , $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ ó $360^\circ - \alpha$.

Definición: Usan las definiciones de las razones trigonométricas en el plano para los ángulos α , $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ ó $360^\circ - \alpha$.

Demostración: Elaboran demostraciones de las relaciones que encuentra entre los ángulos θ y α (toma como referencia los ángulos 0° , 90° , 180° y 360°) así:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A) &= \operatorname{sen}(180 - A); & -\tan(A) &= \tan(180 - A); & -\cos(A) &= \cos(180 - A); \\ -\operatorname{sen}(A) &= \operatorname{sen}(180 + A); & -\cos(A) &= \cos(180 + A); & \tan(A) &= \tan(180 + A); \end{aligned}$$

$$-\sin(A) = \sin(360 - A); \quad \cos(A) = \cos(360 - A); \quad -\tan(A) = \tan(360 - A).$$

Actividad 5 (Explicitación) Discutiendo y comunicando. Esta actividad sirve para la discusión grupal de los conceptos y relaciones trabajadas. Con relación a los procesos se espera:

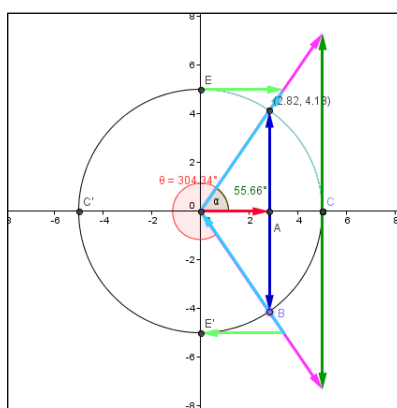
Descripción: Describen las relaciones encontradas en las actividades anteriores.

Definición: La actividad permite a los estudiantes compartir con sus compañeros los usos que le den a las definiciones de las razones trigonométricas.

Demostración: Explican a los compañeros las demostraciones empíricas o deductivas desarrolladas.

Actividad 6 (Orientación libre) Identidades trigonométricas entre ángulos relacionados. A partir de la utilización del archivo ACT. 3.2 (Figura 27) encuentran relaciones entre los objetos geométricos identificados y las razones trigonométricas de los ángulos A , $-A$, $180 - A$, $180 + A$, $360 - A$ los cuales utilizan en sus demostraciones.

Figura 27 Imagen del archivo ACT 3.2



El docente debe motivar a los estudiantes a usar toda la información contenida en el archivo (vectores, coordenadas, ángulos, triángulos) para relacionar las diferentes representaciones; se les debe recordar la necesidad de argumentar teóricamente lo que visualiza. Se espera que en cada proceso los estudiantes:

Descripción: Describen los elementos geométricos presentes en el archivo: vectores, ángulos, triángulos, coordenadas, entre otros. Describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos. Describen las relaciones visualizadas entre los ángulos A , $180 - A$, $180 + A$, $360 - A$.

Definición: Admiten definiciones equivalentes de las razones trigonométricas que encuentran entre $\sin(180 - \alpha)$ y $\sin \alpha$, $\tan(180 - \alpha)$ y $\tan \alpha$, $\sin(180 + \alpha)$ y $\sin \alpha$, $\cos(180 + \alpha)$ y $\cos \alpha$, $\tan(360 - \alpha)$ y $\tan \alpha$.

Demostración: Los estudiantes deben demostrar la congruencia de triángulos por medio de los teoremas correspondientes para garantizar que los valores absolutos de los ángulos relacionados son iguales. Elaboran demostraciones de las relaciones que encuentran entre $\sin(180 - \alpha)$ y $\sin \alpha$, $\tan(180 - \alpha)$ y $\tan \alpha$, $\sin(180 + \alpha)$ y $\sin \alpha$, $\cos(180 + \alpha)$ y $\cos \alpha$, $\tan(360 - \alpha)$ y $\tan \alpha$.

Actividad 7(Explicitación) Discutiendo y comunicando. Esta actividad sirve para la discusión grupal de los conceptos y relaciones trabajadas. Con relación a los procesos se espera que:

Descripción: Describen las relaciones encontradas entre los ángulos A , $180 - A$, $180 + A$, $360 - A$.

Definición: La actividad permite a los estudiantes compartir con sus compañeros los usos y equivalencias que encuentren de las razones trigonométricas de los ángulos A , $180 - A$, $180 + A$, $360 - A$.

Demostración: Explican a los compañeros las demostraciones desarrolladas de las relaciones entre $\sin(180 - \alpha)$ y $\sin \alpha$, $\tan(180 - \alpha)$ y $\tan \alpha$, $\sin(180 + \alpha)$ y $\sin \alpha$, $\cos(180 + \alpha)$ y $\cos \alpha$, $\tan(360 - \alpha)$ y $\tan \alpha$.

Actividad 8(Orientación libre) Identidades trigonométricas entre ángulos relacionados. Con esta actividad se espera que los estudiantes afiancen los conocimientos adquiridos y analicen las relaciones encontradas.

Para los procesos se espera que:

Descripción: A partir de la experimentación con el software describen la relación entre $\cos(180 - \alpha)$ y $\cos \alpha$; $\sin 180 + \alpha$ y $\sin \alpha$.

Definición: Usan las definiciones de las razones trigonométricas de los ángulos A , $180 - A$, $180 + A$, $360 - A$ para resolver problemas y elaborar demostraciones.

Demostración: Elaboran demostraciones de $\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$, $\sin 180 + \alpha = \sin \alpha$. Justifican con argumentos teóricos la existencia de ángulos cuyos valores de las razones coincidan.

Actividad 9 (Integración) Mapa conceptual. Se entrega un mapa conceptual completo a los estudiantes, para que establezcan la integración de los conceptos y relaciones estudiados.

ACTIVIDAD 4: IDENTIDADES PITAGÓRICAS

Los objetivos para esta actividad son:

- Describir, comprender y demostrar la Identidad Pitagórica Fundamental mediante la exploración del diagrama dinámico.
- Describir otras identidades Pitagóricas, definir las y demostrarlas.
- Comprender relaciones geométricas y analíticas de las Identidades Pitagóricas.

Actividad 1 (Información) Seno en función de coseno, coseno en función de seno. Se pretende crear la necesidad de expresar unas razones en función de otras, sobre todo cuando resuelven problemas en los cuales conocen una razón y necesitan encontrar otra u otras.

Para los procesos se espera:

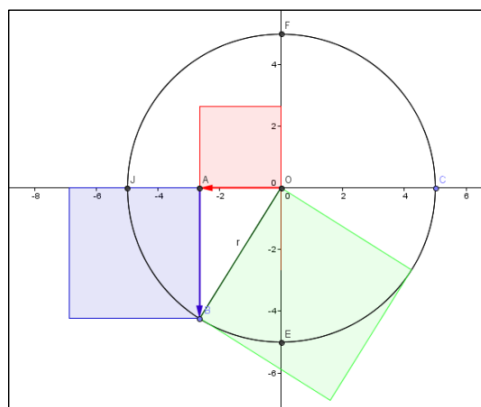
Descripción: Describen relaciones entre las razones trigonométricas seno y coseno para cualquier ángulo. Describen relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos suplementarios y ángulos complementarios. Describen relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos que difieren en 180° . Describen relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos opuestos.

Definición: Usan las definiciones de las razones trigonométricas para cualquier ángulo.

Demostración: Usan argumentos teóricos que le permiten encontrar relaciones entre las razones trigonométricas.

Actividad 2 (Orientación dirigida) La Identidad Pitagórica fundamental. En el archivo ACT 4.2 encuentran la demostración dinámica de la Identidad Pitagórica Fundamental (Figura 28), al visualizarlo y explorarlo, podrán descubrir relaciones entre las razones seno y coseno y encuentran elementos claves que les permite demostrarla. En sus justificaciones, podrán utilizar las relaciones y propiedades observadas en el archivo, pero también deben demostrar de manera algebraica usando las definiciones de las razones trigonométricas conocidas.

Figura 28 Imagen del archivo ACT 4.2



En cada proceso se espera:

Descripción: Describen los elementos geométricos presentes en el archivo. Describen los variantes e invariantes geométricos y numéricos. Describen las relaciones que encuentran entre el radio de la circunferencia y las razones trigonométricas seno y coseno.

Definición: Usan las definiciones de las razones trigonométricas para cualquier ángulo para demostrar nuevas relaciones entre las razones trigonométricas.

Demostración: Demuestran relaciones que encuentra entre el radio de la circunferencia y las razones trigonométricas seno y coseno. Demuestran las relaciones $r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2$; $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$.

Actividad 3 (Explicitación) Discutiendo y comunicando. Esta actividad sirve para la discusión grupal de los conceptos y relaciones trabajo. En cuanto a los procesos tenemos que:

Descripción: Describen las relaciones encontradas en la actividad anterior.

Definición: La actividad permite a los estudiantes compartir con sus compañeros las relaciones que ha encontrado de las razones trigonométricas.

Demostración: Explican a los compañeros las demostraciones desarrolladas.

Actividad 4 (Orientación libre) Otras identidades Pitagóricas. Se espera que los estudiantes trabajen otras identidades Pitagóricas induciéndolos a hacerlo en forma visual, geométrica y analítica.

Con relación a los procesos:

Descripción: Describe las relaciones encontradas entre el radio de la circunferencia y las razones tangente y cotangente.

Definición: Usan las definiciones de las razones de las razones trigonométricas.

Demostración: Elabora demostraciones más formales de las relaciones encontradas: $r^2 \tan^2 \theta + r^2 = r^2 \sec^2 \theta$; $r^2 + r^2 \cot^2 \theta = r^2 \csc^2 \theta$; $\tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$; $\cot \theta = \sqrt{\csc^2 \theta - 1}$.

Actividad 5 (Orientación libre) Razones trigonométricas en función de otras.

Se quiere que los estudiantes relacionen conceptos y propiedades de las cuatro actividades desarrolladas, la actividad se propondrá como ejercicio para la casa. Para cada proceso se espera lo siguiente:

Descripción: Describen conceptos, propiedades y relaciones sobre las razones trigonométricas.

Definición: Usan las definiciones de las razones para resolver problemas. Formulan las definiciones de razones trigonométricas en función de otras razones.

Demostración: Elaboran demostraciones de las relaciones que encuentra entre las razones trigonométricas y demuestran las definiciones que formula sobre las razones trigonométricas en función de otras razones.

Actividad 6 (Integración) Mapa conceptual. Se pide a los estudiantes que elaboren un mapa conceptual, para establecer la integración de los conceptos y relaciones estudiados.

En cada proceso se espera que:

Descripción: Describen los conceptos y relaciones encontradas en la actividad.

Definición: La actividad permite a los estudiantes compartir con sus compañeros las relaciones que ha encontrado haciendo uso de las definiciones de las razones trigonométricas.

Demostración: Explican a los compañeros las demostraciones desarrolladas.

Actividad 7 (Explicitación) Discutiendo y comunicando. Esta actividad sirve para la discusión grupal de los conceptos y relaciones que cada uno estableció en los mapas conceptuales. Al final se hace la comparación con el mapa conceptual del experto.

Descripción: Describen las relaciones encontradas en la actividad anterior.

Definición: La actividad permite a los estudiantes compartir con sus compañeros las relaciones que ha encontrado haciendo uso de las definiciones de las razones trigonométricas.

Demostración: Explican a los compañeros las demostraciones desarrolladas.

4.3 DESCRIPCIÓN INICIAL DE LOS NIVELES DE VAN HIELE PARA CADA UNA DE LAS ACTIVIDADES

En el marco teórico se presentó una descripción general de los Niveles de razonamiento. Ahora con base esos descriptores generales de los niveles de Van Hiele, en los resultados encontrados por Fiallo (2010) y teniendo en cuenta los contenidos matemáticos de la unidad de enseñanza, se organiza una lista inicial de los descriptores específicos para las razones trigonométricas que será perfeccionada y completada como resultado de esta investigación, a partir del análisis de las actuaciones de los estudiantes frente a las tareas planteadas.

Tabla 2 Descriptores para la actividad Razones trigonométricas para triángulos rectángulos

Nivel Proceso	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Descripción	Describe los elementos y las propiedades de los triángulos rectángulos, e identifica los ángulos internos y externos. Elaboran el listado de razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las describen como “cocientes” entre los lados del triángulo.	Describen las razones trigonométricas como la relación entre pares de lados del triángulo rectángulo. Reconocen que el valor de las razones trigonométricas de un triángulo depende de la amplitud de los ángulos del triángulo pero no depende de las longitudes de sus lados. Describen con ayuda del SGD que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito. Describen las relaciones de reciprocidad de las razones seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente. Describen la relación de complementariedad entre los ángulos agudos del triángulo rectángulo. Describen con ayuda de SGD las relaciones: $\text{sen}(A) = \cos(90 - A)$; $\cos(A) = \text{sen}(90 - A)$; $\tan(A) = \cot(90 - A)$; $\tan(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\cos(A)}$		
Uso de definiciones		Comprende las definiciones de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo: $\text{sen}(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ $\cos(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ $\tan(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$ $\cot(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$ $\sec(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$ $\csc(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$	Relacionan las definiciones de las razones en trigonométricas en el triángulo rectángulo como cociente y como relación entre magnitudes reales positivas.	Admiten definiciones equivalentes de las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente.
Formulación de definiciones		Usa las definiciones: $\text{sen}(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ $\cos(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$ $\tan(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$ $\cot(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$ $\sec(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$ $\csc(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$ $\tan(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\cos(A)}$	Comprenden que las definiciones se basan en un conjunto de propiedades necesarias y suficientes Encuentra relaciones entre las razones trigonométricas Reconoce con ayuda de SGD que: $\text{sen}(A) = \cos(90 - A)$; $\cos(A) = \text{sen}(90 - A)$; $\tan(A) = \cot(90 - A)$;	Formula definiciones equivalentes entre razones trigonométricas: $\tan(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\cos(A)}$
Demostración		Demuestra en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito. Demuestra en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente Demuestra en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas: $\text{sen}(A) = \cos(90 - A)$; $\cos(A) = \text{sen}(90 - A)$; $\tan(A) = \cot(90 - A)$; $\tan(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\cos(A)}$	Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito. Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente. Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas: $\text{sen}(A) = \cos(90 - A)$; $\cos(A) = \text{sen}(90 - A)$; $\tan(A) = \cot(90 - A)$;	Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) que seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente. Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas: $\text{sen}(A) = \cos(90 - A)$; $\cos(A) = \text{sen}(90 - A)$; $\tan(A) = \cot(90 - A)$; Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) que : $\tan(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\cos(A)}$

Tabla 4 Descriptores Actividad Representaciones lineales y visualización de las razones trigonométricas

Nivel Proceso	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Descripción	Describen la variación de los valores y los signos de las razones trigonométricas para ángulos en posición normal. Describen relaciones entre las razones trigonométricas para los ángulos A , $-A$, $A - 90$, $90 - A$, $180 - A$ y $180 + A$.	Describen elementos geométricos que representan las razones trigonométricas (vectores) Describen relaciones entre un ángulo y sus ángulos de referencia. Describen las relaciones entre los ángulos θ y α en cada cuadrante (toma como referencia los ángulos 0° , 90° , 180° , 360° , además θ puede ser $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$ ó $360^\circ - \alpha$) Describen con ayuda de SGD que: $\text{sen}(A) = \text{sen}(180 - A)$; $-\tan(A) = \tan(180 - A)$; $-\cos(A) = \cos(180 - A)$; $-\text{sen}(A) = \text{sen}(180 + A)$; $-\cos(A) = \cos(180 + A)$; $\tan(A) = \tan(180 + A)$; $-\text{sen}(A) = \text{sen}(360 - A)$; $\cos(A) = \cos(360 - A)$; $-\tan(A) = \tan(360 - A)$;		
Uso de definiciones		Usa las definiciones de las razones trigonométricas del ángulo A • $\text{sen}(A) = \frac{y}{r}$ • $\cos(A) = \frac{x}{r}$ • $\tan(A) = \frac{y}{x}$	Relaciona los valores de las razones trigonométricas para ángulos ubicados en diferentes cuadrantes	• Se admiten definiciones equivalentes de las razones trigonométricas
Formulación de definiciones		Comprende las definiciones: • $\text{sen}(A) = \frac{y}{r}$ • $\cos(A) = \frac{x}{r}$ • $\tan(A) = \frac{y}{x}$	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes Define las razones trigonométricas para los ángulos A , $180-A$, $180+A$, $360-A$	Comprende definiciones equivalentes de las razones trigonométricas para los ángulos A , $180-A$, $180+A$, $360-A$
Demostración		Realizan demostraciones empíricas de las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) • Comprende y sigue demostraciones de los lados trigonométricos relacionados con la razón trigonométrica respectiva. • $\text{sen}(A) = \text{sen}(180 - A)$; $-\tan(A) = \tan(180 - A)$; $-\cos(A) = \cos(180 - A)$; $-\text{sen}(A) = \text{sen}(180 + A)$; $-\cos(A) = \cos(180 + A)$; $\tan(A) = \tan(180 + A)$; $-\text{sen}(A) = \text{sen}(360 - A)$; $\cos(A) = \cos(360 - A)$; $-\tan(A) = \tan(360 - A)$;	Realizan demostraciones empíricas (Ejemplo Genérico Intellectual) Realizan demostraciones deductivas (Experimento Mental) • Realiza demostraciones de los lados trigonométricos relacionados con la razón trigonométrica respectiva • $\text{sen}(A) = \text{sen}(180 - A)$; $-\tan(A) = \tan(180 - A)$; $-\cos(A) = \cos(180 - A)$; $-\text{sen}(A) = \text{sen}(180 + A)$; $-\cos(A) = \cos(180 + A)$; $\tan(A) = \tan(180 + A)$; $-\text{sen}(A) = \text{sen}(360 - A)$; $\cos(A) = \cos(360 - A)$; $-\tan(A) = \tan(360 - A)$;	Realiza demostraciones deductivas (Deductivas Formales) • Realiza demostraciones de los lados trigonométricos relacionados con la razón trigonométrica respectiva • $\text{sen}(A) = \text{sen}(180 - A)$; $-\tan(A) = \tan(180 - A)$; $-\cos(A) = \cos(180 - A)$; $-\text{sen}(A) = \text{sen}(180 + A)$; $-\cos(A) = \cos(180 + A)$; $\tan(A) = \tan(180 + A)$; $-\text{sen}(A) = \text{sen}(360 - A)$; $\cos(A) = \cos(360 - A)$; $-\tan(A) = \tan(360 - A)$;

Tabla 5 Descriptores Actividad Identidades Pitagóricas.

Nivel Proceso	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
Descripción	Describe información gráfica Describe variantes e invariantes presentes en el archivo.	Describen las relaciones que encuentran entre el radio de la circunferencia y las razones trigonométricas seno y coseno. Describen relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos que difieren en 180°. Describen relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos opuestos.		
Uso de definiciones		Usan las definiciones de las razones trigonométricas del ángulo A • $\text{sen}(A) = \frac{y}{r}$ • $\text{cos}(A) = \frac{x}{r}$ • $\text{tan}(A) = \frac{y}{x}$	Utiliza la información que obtiene de los gráficos para establecer relaciones entre las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras	Se admiten definiciones equivalentes de las razones trigonométricas
Formulación de definiciones		Comprenden las definiciones: • $\text{sen}(A) = \frac{y}{r}$ • $\text{cos}(A) = \frac{x}{r}$ • $\text{tan}(A) = \frac{y}{x}$	Conjunto de propiedades necesarias y suficientes Utiliza el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas para establecer identidades	Comprende definiciones equivalentes de las razones trigonométricas
Demostración		Realizan demostraciones empíricas de las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) Demuestra $r^2 \text{sen}^2 \theta + r^2 \text{cos}^2 \theta = r^2$ $r^2 \text{tan}^2 \theta + r^2 = r^2 \text{sec}^2 \theta$ $r^2 + r^2 \text{cot}^2 \theta = r^2 \text{csc}^2 \theta$ Demuestra las identidades: $\text{sen } \theta = \sqrt{1 - \text{cos}^2 \theta}$ $\text{tan } \theta = \sqrt{\text{sec}^2 \theta - 1}$ $\text{cot } \theta = \sqrt{\text{csc}^2 \theta - 1}$	Realizan demostraciones empíricas (Ejemplo Genérico Intelectual) Realizan demostraciones deductivas (Experimento Mental) Demuestra $r^2 \text{sen}^2 \theta + r^2 \text{cos}^2 \theta = r^2$ $r^2 \text{tan}^2 \theta + r^2 = r^2 \text{sec}^2 \theta$ $r^2 + r^2 \text{cot}^2 \theta = r^2 \text{csc}^2 \theta$ Demuestra las identidades: $\text{sen } \theta = \sqrt{1 - \text{cos}^2 \theta}$ $\text{tan } \theta = \sqrt{\text{sec}^2 \theta - 1}$ $\text{cot } \theta = \sqrt{\text{csc}^2 \theta - 1}$	Realiza demostraciones deductivas (Deductivas Formales) Demuestra: $r^2 \text{sen}^2 \theta + r^2 \text{cos}^2 \theta = r^2$ $r^2 \text{tan}^2 \theta + r^2 = r^2 \text{sec}^2 \theta$ $r^2 + r^2 \text{cot}^2 \theta = r^2 \text{csc}^2 \theta$ Demuestra las identidades: $\text{sen } \theta = \sqrt{1 - \text{cos}^2 \theta}$ $\text{tan } \theta = \sqrt{\text{sec}^2 \theta - 1}$ $\text{cot } \theta = \sqrt{\text{csc}^2 \theta - 1}$

5. ANÁLISIS DE DATOS

El presente capítulo está dedicado al análisis de la caracterización de los procesos de descripción, definición y demostración en el estudio de las razones trigonométricas, de acuerdo con los componentes de los niveles de razonamiento de Van Hiele detallados en el marco teórico.

Cuando hay casos, los niveles se ejemplifican con las actuaciones de los estudiantes en cada una de las tareas y actividades de la unidad de enseñanza. El análisis no se limita a los dos grupos escogidos; en algunos casos se analizan las producciones de estudiantes del curso durante las plenarias que también fueron video-grabadas y las notas del investigador. Se observan los procesos de resolución de las tareas planteadas por lo cual se motivó a los estudiantes a expresar sus opiniones, a escribir las descripciones, definiciones y demostraciones que utilizaban sin decirles si los procesos o respuestas eran correctos o no.

En cada ejemplo se detalla la situación planteada junto a la correspondiente pregunta de la actividad, a continuación se muestran comentarios y respuestas de los estudiantes, seguido se analiza el descriptor planteado frente a las actuaciones de los estudiantes al interactuar con el software, compañeros y docente. En los diálogos, la letra **P** indica que es el profesor-investigador quien interviene, los estudiantes se representados con las letras **E_i**.

La sección 5.1 está dedicada al análisis de la primera actividad, en la sección 5.2 se analiza la segunda actividad.

5.1 PRIMERA ACTIVIDAD: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

5.1.1 PROCESO DE DESCRIPCIÓN

NIVEL 1

- Describen los elementos y las propiedades de los triángulos rectángulos, e identifica los ángulos internos y externos del triángulo por medio de consideraciones visuales.

Ejemplo. En el análisis de la primera sesión, los estudiantes están elaborando un dibujo para dar respuesta a la pregunta 1.1: *En un triángulo rectángulo las medidas de sus catetos son iguales a 8cm y 10cm. ¿Cuál es la medida de la hipotenusa? ¿Cuáles son las medidas de sus ángulos? JUSTIFICA TU RESPUESTA.* En ese momento no usan herramientas de medición, la docente indaga por la medida del ángulo de 90° , el estudiante representa el ángulo con sus manos:

P: ¿por qué saben que ese es un ángulo de 90° ?

E₁: por lo que está recto [*con las manos forma un ángulo con su dedo índice y dedo pulgar*]

Figura 29 Representación de un ángulo de 90° por el estudiante

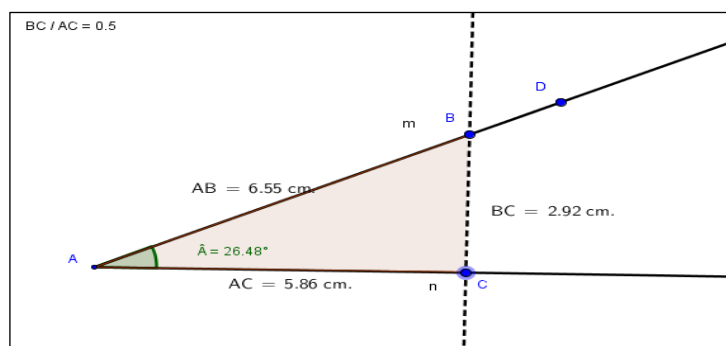


La respuesta del estudiante se basa en la referencia a un prototipo visual para caracterizar el ángulo de 90° por medio de la comparación de un ángulo recto con el ángulo que forma su dedo índice y pulgar.

- Describen en forma estática lo que observa en la pantalla.

Ejemplo. Para responder la pregunta 2.1: *Abre el archivo ACT 1, elabora una descripción de lo que observas en este archivo*, el estudiante elabora una descripción estática del archivo ACT 1 (figura 30), describe lo que observa sin tener en cuenta que los valores cambian al arrastrar los puntos D o C.

Figura 30 Imagen del archivo Act 1.



El estudiante expresa de la siguiente manera lo que está observando en la pantalla:

E₂: “lo que pudimos observar fue que es un triángulo rectángulo, sus lados miden el ángulo A... el lado AB mide 6,55 cm, el lado AC 5,87cm y el lado BC mide 2,92cm además sus ángulos son, el ángulo CAB es igual a 26,47grados”

En su hoja de trabajo anota:

Figura 31 Respuesta del estudiante pregunta 2.1

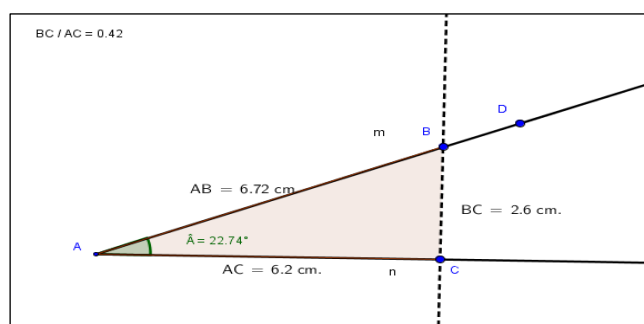
2.1. pues podemos observar que nos dan un triángulo rectángulo y sus ángulos miden 90° , 26.47° y 63.53° y sus lados miden 5.87cm, 2.92cm y 6.55cm por lo que nos pide que hallemos las razones.

Tanto en la producción oral como escrita, el estudiante describe el archivo limitándose a los datos que en ese momento observa en la pantalla (descripción

basada en características visuales). Aunque reconoce la variación de los elementos, cuando se arrastran los puntos C o D, esto no juega un papel importante en la identificación de las razones trigonométricas.

Ejemplo. En otras respuestas de los estudiantes para describir el archivo ACT 1, analizan el cambio en las medidas de ángulos, lados y razones; sin embargo en su hoja de trabajo escriben valores exactos para las razones.

Figura 32 Imagen del archivo Act 1



P: ¿ese dato es fijo?

E₁: No.

P: ¿qué sucede con ese dato en el archivo?

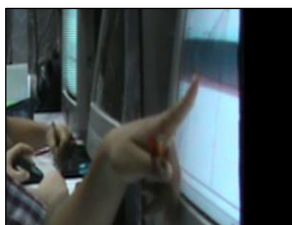
E₂: Puede variarlo.

E₁: Variar.

[...]

E₂: si uno varía esto [señalando el ángulo A],

Figura 33 Fase de explicitación en parejas.



E₂: podemos mover acá el punto D

P: Ah! ¿Qué se puede hacer con el punto D?

E₁: es el que puede variar los ángulos

P: explique

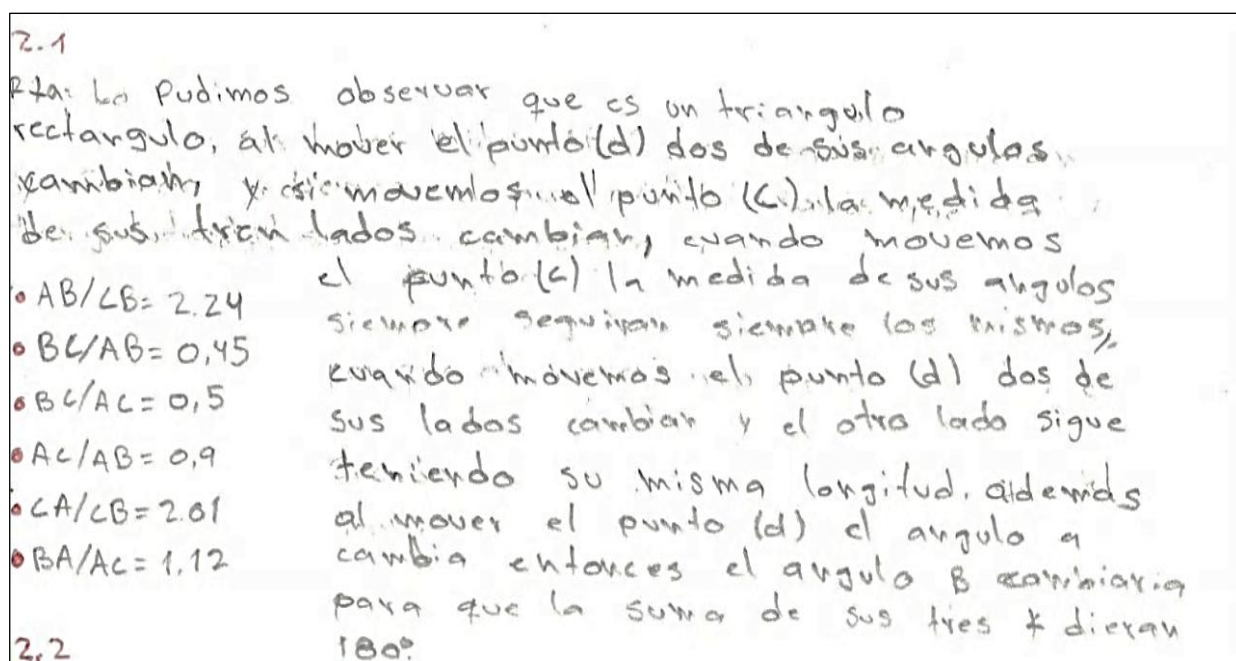
E₁: es el que hace variar los ángulos

P: ¿Cuáles ángulos? Por ejemplo arrástrelo, ¿qué pasa?

E₂: cambia el ángulo CAB

A pesar de observar cambios en el archivo; en la hoja de trabajo anotan valores específicos para las razones:

Figura 34 Descripción del archivo 2.1 por los estudiantes



Los estudiantes arrastran los puntos C y D e identifican la variación en las medidas del triángulo, sin embargo cuando elaboran la descripción del archivo solo se fijan en los datos que observan en ese momento en la pantalla, es decir la descripción se basa solo en características visuales. No reconocen explícitamente las propiedades matemáticas de las razones trigonométricas.

- Identifican las seis razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las describe como “cocientes” entre los lados del triángulo rectángulo.

Ejemplo. En uno de los momentos de explicitación con todo el grupo, se está respondiendo la pregunta 2.3: *¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo entre 0° y 90° ?* Al analizar la razón BC/AC , los estudiantes observan que cada grupo anotó valores diferentes para esta razón trigonométrica; cuando la profesora pregunta por qué, si es la misma razón, han anotado varias respuestas, un estudiante se refiere a esta razón como la división de las distancias de los lados del triángulo.

[...]

E₅: pues yo digo esta es la distancia, la división es como la división de la longitud, y si se cambia la forma.

[...]

El estudiante analiza el concepto básico de razón como el resultado de la división entre las longitudes de los lados del triángulo porque lo observó en la pantalla, pero no considera explícitamente las propiedades de las razones.

NIVEL 2

- Describen que el valor de las razones trigonométricas de un triángulo depende de la amplitud de los ángulos del triángulo pero no depende de las longitudes de sus lados.

Ejemplo. Mientras están discutiendo la pregunta 2.3; *¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo entre 0° y 90° ?* los estudiantes describen el cambio de las razones cuando se arrastran los puntos D o C ; ellos aclaran que al cambiar la medida de los ángulos las razones cambian, pero si se cambia la longitud de los lados, las razones permanecen.

P: ¿Qué sucede al mover el punto C ?, ¿qué pasa con el triángulo?

E₅: La longitud de los lados cambian y el ángulo queda igual.

P: ¿Cómo dices?

E₅: Que la longitud de los lados cambian, pero el ángulo sigue igual.

P: ¿El ángulo?

E₁: Los ángulos.

P: ¿Los ángulos siguen iguales?

E₆: Las razones.

P: Ah, los ángulos siguen iguales pero, ¿qué le pasaba a los lados?

E₅: Cambiaban el resultado pero la razón observábamos que las razones quedaban iguales y los lados cambiaban.

P: Me dices que cuando se arrastraba el punto *C* la medida de los lados cambiaban, pero quedaban iguales las razones, pasaba lo mismo al arrastrar el punto *D*?

E₅: No.

P: ¿Por qué? ¿Qué sucedía cuando uno movía el punto *D*?

E₅: Las razones cambiaban y sus lados y sus ángulos también.

Por medio de la observación y la experimentación con el software, el estudiante percibe las propiedades necesarias para describir la dependencia de las razones trigonométricas de la amplitud de los ángulos.

- Describen con ayuda del SGD la variación de las razones trigonométricas así: seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito.

Ejemplo. Respondiendo la pregunta 2.2: *¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo entre 0° y 90°?*, uno de los grupo de estudiantes escoge la razón AB/CB (razón cosecante), ellos se dan cuenta que al variar el ángulo BAC de 90° hacia 0°, esta razón varía de 1 hasta infinito, por lo que describen el cambio así:

E₄: Esta razón, detallémosla muy bien. Aquí, movemos el ángulo, el ángulo comienza a disminuir su marca... hasta cierto punto

E₃: Hasta el ángulo 84

E₄: Aquí vemos que desde el ángulo 89, 99 hasta el ángulo 84 aproximadamente 84,68 la razón AB/CB mide 1 de ahí para abajo comienza a agregarse un número decimal, si me entiende y comienza desde el ángulo 90 comienza a medir 1

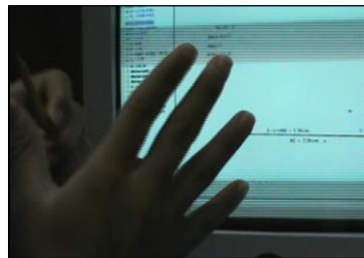
E₄: hasta el 84

E₄: a medida que vamos bajando comienza... cuando ya está en cero mire lo que pasa

E₃: su número cambia y ese es.

E₄: todo lo que mide su número, o sea a medida que vamos bajando el ángulo la... la razón va aumentando su número [*mueve la mano para indicar el cambio de tamaño del valor de la razón*]

Figura 35 Descripción del archivo por el estudiante, con el movimiento de la mano indica el aumento en el valor de la razón



Al finalizar el diálogo, esto es lo que reportan en su hoja de trabajo con relación al cambio de la cosecante:

Figura 36 Anotación en la hoja de trabajo del estudiante.

Podemos ver que si movemos el ángulo A a 0° la razón AB/CB es 2583.68 pero a la medida que movemos el ángulo A a 90° su razón cambia a 1. y además si su ángulo es poquito su razón aumenta.

Los estudiantes deducen el cambio de las razones trigonométricas por medio de la observación y la experimentación con el software, esto les permite generalizar el cambio en la razón cosecante; para la descripción en la hoja de trabajo utilizan explícitamente las características observadas en algunos ángulos. No usan un lenguaje apropiado.

Ejemplo. Al analizar el cambio de la razón BC/AB (seno de A), para solucionar la pregunta 2.2: *¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo entre 0° y 90° ?* el estudiante le explica al docente:

E₄: mire, empieza en cero y luego va aumentando hasta uno porque cada vez que vamos subiendo el punto D, el BC es como a alcanzarse al lado AB, en los noventa grados se lo alcanza, los lados son de la misma medida y al dividir dos medidas iguales da uno.

P: no entendí qué significa alcanzar

E₂: que son similares

E₁: semejantes

El estudiante es consciente del cambio que observa al experimentar con el archivo. Describe de una manera informal el cambio de la razón seno, utiliza un lenguaje cotidiano para expresar las justificaciones.

Ejemplo. Cuando está respondiendo la pregunta 2.2: *¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo entre 0° y 90° ?* Un estudiante explica de la siguiente manera el cambio de la razón seno

“La razón CB/AB comienza desde cero y no pasa de uno o sea estando a los 90° está en uno; mire, aquí está en uno [señala el ángulo de 90°] y aquí en cero [arrastra el punto D hasta formar un ángulo de 0°], o sea, el intermedio que hay entre el cero y el uno son decimales, si ve que aquí, cuando vamos subiendo el ángulo, comienzan los decimales y ya estando en un ángulo cercano a 90° comienza a estar en uno.”

En este ejemplo se observa que el estudiante deduce el cambio de la razón seno por medio de la experimentación, usa características observadas en determinados valores de ángulos, las cuales compara para sacar sus propias conclusiones. Su vocabulario es impreciso.

- Describen que los ángulos agudos del triángulo rectángulo son complementarios.

Ejemplo. Los estudiantes responden la pregunta 4.3: *¿Qué relación existe entre la medida de los ángulos A y B?*, identificando que los ángulos A y B son complementarios tal como se aprecia en el siguiente diálogo en el cual describen la situación observada:

E₄: el A disminuye y el B aumenta

E₅: o sea pasan de 90 a 0

P: y ¿qué pasa siempre?

E₅: se mantienen para completar los otros 90

P: ah! Y ¿qué pasa?

E₅: se suman...las dos siempre están para completar 90, más los otros 90 [señala el ángulo C] da 180

Los estudiantes son conscientes que los ángulos A y B suman 90° , la experimentación con el software les permite entender que mientras la medida de uno de los ángulos aumenta la del otro disminuye, con lo cual generalizan su conclusión pero presentan un vocabulario impreciso.

5.1.2 PROCESO USO DE DEFINICIONES

NIVEL 1

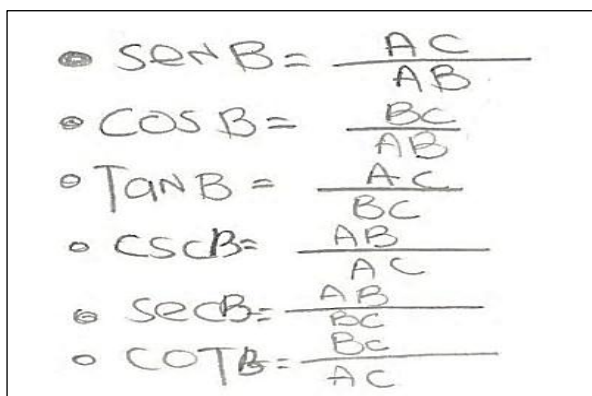
- Los estudiantes no están en capacidad de usar definiciones

NIVEL 2

- Usan las definiciones de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo para identificar los lados correspondientes de las razones en el archivo dinámico.

Ejemplo. Al analizar las razones trigonométricas para el ángulo B (pregunta 4.1: *Calcula las razones trigonométricas del ángulo B*) el estudiante aplica las definiciones dadas:

Figura 37 Anotación en la hoja de trabajo del estudiante.



Handwritten student work showing the following trigonometric ratios for angle B:

- $\sin B = \frac{AC}{AB}$
- $\cos B = \frac{BC}{AB}$
- $\tan B = \frac{AC}{BC}$
- $\csc B = \frac{AB}{AC}$
- $\sec B = \frac{AB}{BC}$
- $\cot B = \frac{BC}{AC}$

El estudiante identifica propiedades en la definición y las usa para reconocer en el archivo los datos necesarios para establecer cada una de las razones para el ángulo B, obteniendo como resultado las razones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo ABC.

- Usan las definiciones:

$$\sin(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\cot(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

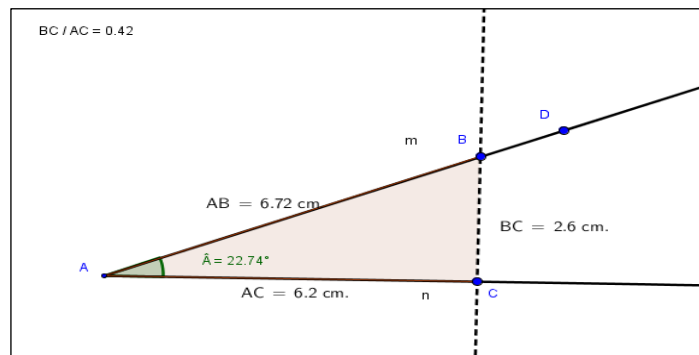
$$\sec(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$$

$$\csc(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$$

Ejemplo. Ante la pregunta 4.1: *Calcula las razones trigonométricas del ángulo B. Nombra cada razón con su respectivo nombre (sen B, cos B, tan B)* Un estudiante

utiliza el archivo ACT 1 (Figura 48) para relacionar las definiciones dadas para el triángulo rectángulo de la siguiente manera:

Figura 38 Imagen del archivo Act 1.



“el seno de B sería el lado opuesto que es AC, sobre la hipotenusa que es AB, el coseno sería el cateto adyacente que es el lado BC sobre la hipotenusa que es el lado AB, la tangente sería el cateto opuesto que es AC sobre el cateto adyacente que es BC [...]”

Figura 39 Razones trigonométricas del triángulo rectángulo encontradas por el estudiante

$$\begin{aligned} \text{Sen} &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{AB} \\ \text{Cos} &= \frac{\text{cateto Adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BC}{AB} \\ \text{tan} &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{AC}{BC} \\ \text{csc} &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{AB}{AC} \\ \text{sec} &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{AB}{BC} \\ \text{cot} &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{BC}{AC} \end{aligned}$$

El estudiante recita una lista de definiciones para identificar las razones trigonométricas, en lugar de aplicarlas al archivo dinámico, es decir necesita comparar la definición con los elementos del triángulo.

NIVEL 3

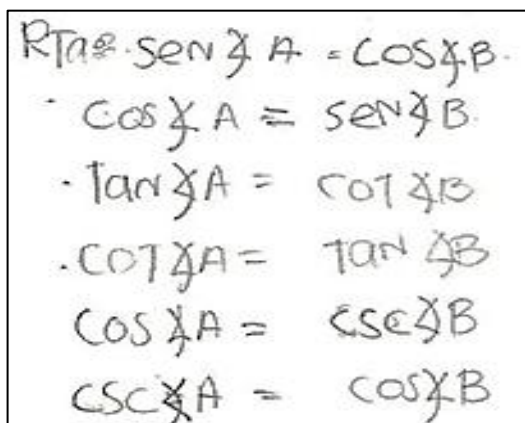
- Relacionan las definiciones de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo como cociente y como relación entre magnitudes reales positivas.

NIVEL 4

- Admiten definiciones equivalentes de las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente.

Ejemplo. Dando respuesta a la pregunta 4.4: *¿Qué relaciones existen entre las razones trigonométricas halladas para el ángulo A y el ángulo B?*, los estudiantes encuentran las siguientes relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos A y B:

Figura 40 Relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos A y B encontradas por el grupo de estudiantes.



Handwritten list of trigonometric relationships between angles A and B:

- $\text{RTA} \cdot \text{sen } \angle A = \text{cos } \angle B$
- $\text{cos } \angle A = \text{sen } \angle B$
- $\text{tan } \angle A = \text{cot } \angle B$
- $\text{cot } \angle A = \text{tan } \angle B$
- $\text{cos } \angle A = \text{csc } \angle B$
- $\text{csc } \angle A = \text{cos } \angle B$

Los estudiantes usan las definiciones de las razones trigonométricas de los ángulos A y B para identificar en el archivo dinámico relaciones que les permiten aceptar equivalencias entre dichas definiciones, sus argumentos están basados en el uso de las definiciones de cada razón, no utilizan una deducción formal dentro de un sistema axiomático.

5.1.3 PROCESO FORMULACIÓN DE DEFINICIONES

NIVEL 1

- Los estudiantes no están en capacidad de formular definiciones.

NIVEL 2

- Usan las definiciones:

$$\text{sen}(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos}(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tan}(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\text{cot}(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

$$\text{sec}(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$$

$$\text{csc}(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$$

Ejemplo. En el siguiente diálogo mientras los estudiante dan solución de la pregunta 4.4: *¿Qué relaciones existen entre las razones trigonométricas halladas para el ángulo A y el ángulo B?*, usan la definición de $\text{sen}(A)$

P: ¿cuál es el seno de A?

E₁: es igual a ángulo opuesto, no, es BC

E₅: es opuesto sobre hipotenusa

P: ¿ángulo?

E₁: no, el cateto opuesto sobre la hipotenusa

[...]

E₁: sería BC sobre AB

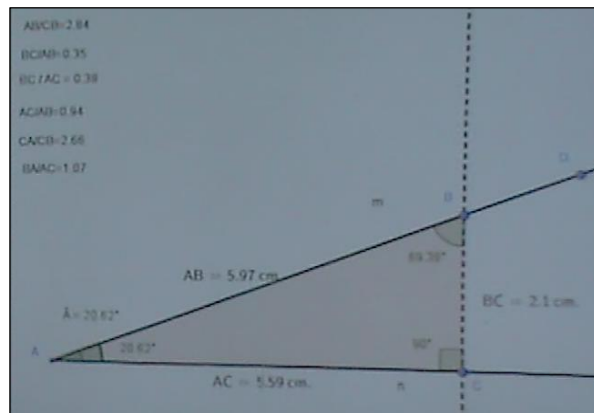
Los estudiantes recuerdan la definición de $\text{sen}(A)$ ubican el respectivo cateto opuesto e hipotenusa para el ángulo solicitado y dan una respuesta correcta a la pregunta solicitada por el docente.

NIVEL 3

- Usan las definiciones de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo para formular y demostrar relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos A y $90 - A$, tales como: $\sin(A) = \cos(90 - A)$; $\cos(A) = \sin(90 - A)$; $\tan(A) = \cot(90 - A)$;

Ejemplo. En el siguiente diálogo y posterior reporte en la hoja de trabajo sobre la solución de la pregunta 4.4: *¿Qué relaciones existen entre las razones trigonométricas halladas para el ángulo A y el ángulo B ?*, se observa que el estudiante relaciona el *seno de A* y *coseno de $90^\circ - A$* al trabajar con el archivo ACT 1, que ha sido modificado previamente por el grupo (Figura 41).

Figura 41 Imagen de la modificación del archivo Act 1 por el grupo.



P: díganme una relación que hayan encontrado

E₁: seno de A con coseno de B

P: ¿cómo están relacionadas?

E₁: tienen la misma razón

Figura 42 Relación entre seno de A y coseno de B encontradas por el grupo de estudiantes.

$\boxed{\text{Sen } A = \cos B}$ $\text{Sen} = \frac{\text{c.opuesto}}{\text{hipotenusa.}}$
 $\text{Sen } A = \frac{BC}{AB}$ $\text{C.opuesto } A \text{ equivale a c. Adyacente } B$
 $\cos B = \frac{BC}{AB}$
 4.6 El C.opuesto de A equivale a c.adyacente de B.
 que es $= 90 - A$ y el c.adyacente de A equivale al c. opuesto de B

Cuando el estudiante identifica la igualdad de las definiciones de seno de A y coseno de B, comienza a desarrollar su razonamiento matemático, es capaz de reconocer definiciones equivalentes por medio del uso de las definiciones de las razones del ángulo A y del ángulo B, deduciéndolas en un solo paso.

NIVEL 4

- Formula definiciones equivalentes entre razones trigonométricas

$$\tan(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\cos(A)}$$

Ejemplo. A continuación se muestra la solución de la pregunta 6.1: *¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas $\tan(A)$, $\text{sen}(A)$ y $\cos(A)$?* Los estudiantes formulan una conjetura e intentan verificarla deductivamente.

Figura 43 Relación entre seno, coseno y tangente.

Conjetura
 $\tan \times \cos = \text{sen}$

Los estudiantes producen conjeturas en las cuales aceptan la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto, en este caso expresan definiciones equivalentes entre las razones seno, coseno y tangente ya que comprenden la interacción entre las condiciones necesarias y suficientes para justificar su elección.

5.1.4 PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

NIVEL 1

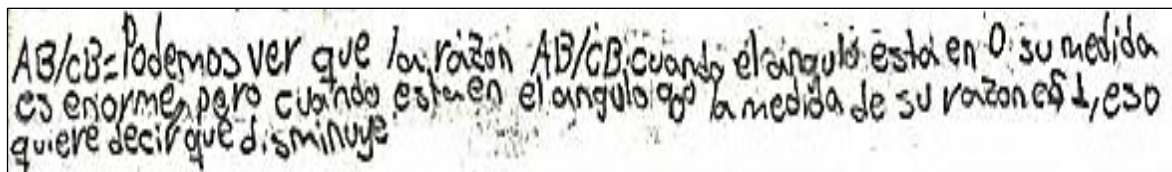
- En este nivel los estudiantes no realizan demostraciones.

NIVEL 2

- Demuestra en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito.

Ejemplo. Para responder la pregunta: *¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo entre 0° y 90° ?* Un estudiante plantea la siguiente conjetura (Figura 44):

Figura 44 Conjetura elaborada por el estudiante



AB/cB: Podemos ver que la razón AB/cB cuando el ángulo está en 0 su medida es enorme, pero cuando estamos en el ángulo 90° la medida de su razón es 1 , eso quiere decir que disminuye.

Posteriormente realiza la siguiente demostración (Figura 45)

Figura 45 Demostración elaborada por el estudiante

AB/CB: Podemos ver que cuando movemos el punto D hacia arriba la longitud de los lados AB y CB son muy similares en su valor numérico por eso cuando hacemos la división estando el ángulo en 90° nos da uno, puesto que la diferencia de valor numérico de los lados es muy mínima. Cuando el ángulo está en 0 el resultado de la división AB/CB es mayor puesto que al estar en 0 el ángulo la medida de el lado BC es 0, y al dividir el valor numérico del lado AB sobre el BC nos va a dar el resultado mayor.

La demostración realizada por el estudiante es un Experimento Crucial Basado en Ejemplo, dado que el estudiante sólo considera los casos extremos (0° y 90°), sin tener en cuenta lo que ocurre entre los valores correspondiente entre estos dos valores. No es empirismo ingenuo debido a que ha seleccionado los ejemplos que él considera “cruciales” para su demostración.

Ejemplo. Para responder la pregunta: *¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo entre 0° y 90° ?* Un estudiante plantea la siguiente conjetura

E₄: “el caso es que este aquí lo tenemos en 90° y en este ángulo la razón AC/AB nos da cero y mirando acá la razón, la razón AC/AB es uno”

Continúa con la demostración:

E₄: pues porque llevando el punto D al ángulo C hasta la línea recta para que el ángulo marque cero lo más acercado que pueda ahí nos da el resultado puesto que ya tenemos la razón

P: así nada más?

E₄: claro porque aquí el programa nos da la oportunidad de sacar las razones de la medida que hay entre la división de dos lados y ahí nos da con más exactitud

La demostración realizada por el estudiante es un ejemplo de Empirismo Ingenuo, el estudiante observa y experimenta los cambios que suceden con la razón AC/AB , pero su justificación está basada en la evidencia que le da el cómputo que hace el software, es decir el estudiante considera que ya no necesita más explicación.

- Demuestra en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente.

Ejemplo. Un estudiante está respondiendo la pregunta 4.4: *¿Qué relaciones existen entre las razones trigonométricas halladas para el ángulo A y el ángulo B?*, se da cuenta que existe relación entre la tangente del ángulo A y la tangente del ángulo B, lo justifica expresándolo de la siguiente manera:

“digamos la tangente de A está como al contrario de la tangente de B y acá en la gráfica pues nos muestra”

El estudiante realiza una demostración empírica ingenua, porque basa sus razonamientos en lo que en ese momento está observando en la pantalla limitándose a describir lo que muestra el archivo, aunque conoce las definiciones no las tiene en cuenta.

- Demuestra en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas:

$$\text{sen}(A) = \cos(90 - A);$$

$$\cos(A) = \text{sen}(90 - A)$$

$$\tan(A) = \cot(90 - A)$$

Ejemplo. Para responder la pregunta 4.6: *¿Es verdad que $\text{sen}(A) = \cos(90 - A)$?*; si tu afirmación es verdadera demuéstrala, en caso contrario da un contraejemplo

(un ejemplo donde se vea que la afirmación sea falsa). Un estudiante explica de la siguiente manera su razonamiento:

E₄: Aquí nos dice: ¿Es verdad que $\sin(A) = \cos(90 - A)$?; si tu afirmación es verdadera demuéstrela, en caso contrario da un contraejemplo (un ejemplo donde se vea que la afirmación sea falsa). Pues aquí yo partí de este ejemplo que el seno de A, $A=46,19^\circ$ eso me da... [el estudiante utiliza la calculadora y encuentra que los resultados son iguales]. Si sería verdadera.

P: ¿sería verdadera?

E₄: si, si porque dándome este número 0.7216394153; ahora hacemos la otra operación que es $90-46,19$ eso me da un igual a 43,81 y entonces le sacamos el coseno a 43,81 y eso me da igual al número que tenemos acá 0.7216394153. Entonces si es verdadera.

El estudiante realiza una demostración empírica ingenua, porque utiliza un ejemplo escogido sin ningún criterio aparente, en este caso escoge un ángulo de $46,19^\circ$, hace las operaciones en su calculadora y considera que puede generalizar su respuesta. Aunque la pregunta solicita la demostración en caso afirmativo, al estudiante le basta un ejemplo para demostrar la veracidad de la afirmación.

NIVEL 3

- Demuestran en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito.

Ejemplo. Con relación a la preguntas 2.2: *¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo entre 0° y 90° ? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura, y 2.3: Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 2.2,* el estudiante justifica su proceso de la siguiente forma.

E₄: aquí cuando el ángulo baja de 90° llegando aproximadamente a 0 pues comienza el valor numérico de CB comienza a estar disminuyendo, la división pues este [se refiere al lado AB] sigue con un valor mayor que el CB la división obviamente va a dar mayor

E₃: al dividir un número mayor sobre un número menor su resultado va a dar mayor.

Figura 46 Conjetura elaborada por el estudiante

2.2
 Podemos ver que si movemos el ángulo A a 0° la razón BC/AB es 0 y cuando movemos el ángulo A hacia 90° la razón nos da de resultado 1

Figura 47 Demostración elaborada por el estudiante.

2.3 la razón BC/AB al dividir el lado BC sobre el lado AB su resultado nos da un número muy pequeño.

La demostración elaborada se considera experimento mental porque el estudiante elabora la conjetura basado en los ejemplos de lo que sucede con las razones en los ángulos 0° y 90°, pero para la demostración de la conjetura deja de lado los ejemplos para utilizar argumentos numéricos fundamentados en operaciones matemáticas (división) para la situación específica en que AB es mayor BC , lo cual considera suficiente para su demostración.

- Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente.

- Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas:

$$\text{sen}(A) = \cos(90 - A);$$

$$\cos(A) = \text{sen}(90 - A)$$

$$\tan(A) = \cot(90 - A)$$

Ejemplo. El estudiante está respondiendo la pregunta 4.4: *¿Qué relaciones existen entre las razones trigonométricas halladas para el ángulo A y el ángulo B?*, mediante el uso del software relaciona $\text{sen}(A)$ y $\cos(90 - A)$, esta situación la sustenta de la siguiente manera:

E₄: el seno de A es ángulo opuesto

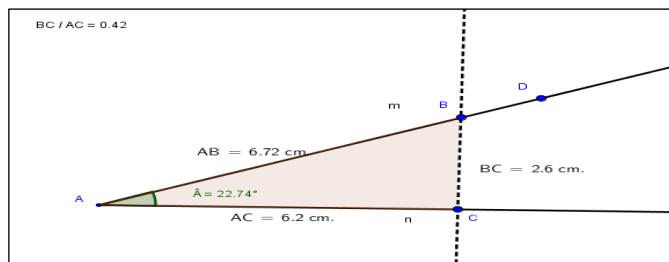
P: ¿ángulo?

E₄: cateto opuesto sobre hipotenusa y el coseno de B cateto adyacente sobre hipotenusa, o sea es lo mismo

E₅: es como están intercalados o sea intercambiados

E₄: por eso es que nos da el ángulo B si, y por eso es que nos da el seno y el coseno; el seno es el cateto opuesto sobre la hipotenusa y el coseno es el cateto adyacente sobre la hipotenusa [*mientras dice esto señala en la pantalla el lado BC como cateto opuesto del ángulo A y cateto adyacente del ángulo B*]

Figura 48 Imagen del archivo Act 1



P: ¿qué es lo que pasa?

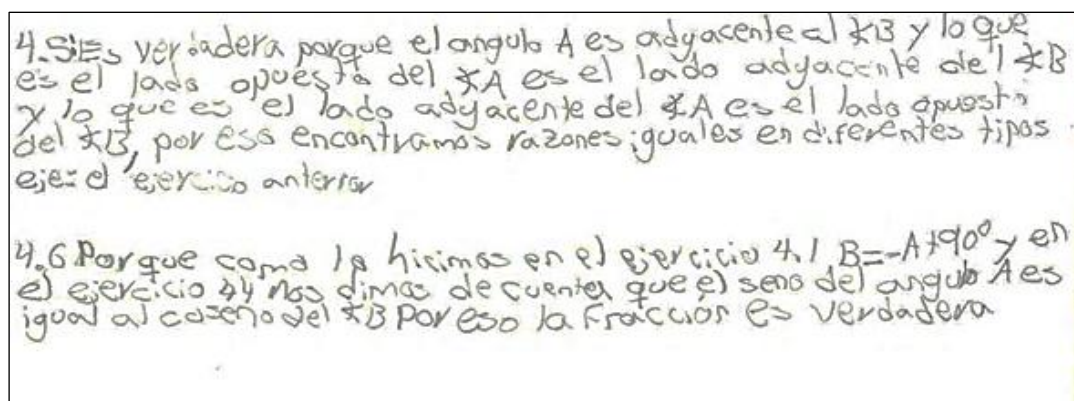
E₄: ahí es la misma fracción sino que lo que pasa es que cambian los ángulos o sea aquí nos dice $A - 90$, en la que hicimos $B = -A + 90$, el coseno de B es cateto adyacente sobre hipotenusa por eso es que nos da igual es la misma sino que aquí cambiaron

E₅: solamente es intercambiada

E₄: o sea aquí tuvimos que hacer la fracción, resolverla para que nos diera el resultado, o sea acordarnos de esta fracción que hicimos acá que $B = -A + 90$ para hallarla.

A continuación esto es lo que reporta en su hoja de trabajo (Figura 49):

Figura 49 Solución dada por el estudiante



En el ejemplo anterior el estudiante utiliza lo que acaba de aprender, para demostrar visualmente en el software y analíticamente con las definiciones de las razones trigonométricas la relación que encuentra entre $\sin(A)$ y $\cos(90 - A)$.

NIVEL 4

- Demuestran en forma deductiva (Deductivas Formales) que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito.
- Demuestran en forma deductiva (Deductivas Formales) que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente.

- Demuestran en forma deductiva (Deductivas Formales) las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas:

$$\text{sen}(A) = \cos(90 - A);$$

$$\cos(A) = \text{sen}(90 - A);$$

$$\tan(A) = \cot(90 - A);$$

- Demuestran en forma deductiva (Deductivas Formales) $\tan(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\cos(A)}$

Ejemplo. A continuación se muestra la demostración de la relación que encuentran los estudiantes para seno, coseno y tangente. La relación que escriben es: $\tan \alpha \cdot \cos \alpha = \text{sen} \alpha$

P: ¿por qué eso es verdadero?

[El estudiante pasa al tablero y escribe las definiciones de tangente y coseno]

P: Explícanos qué es eso

E₁: tangente y coseno

[El estudiante dibuja dos flechas, una para unir los numeradores y otra los denominadores]

P: y esas flechas, ¿para qué son?

E₁: la multiplicación

[...]

E₃: las flechitas indican que se multiplica así en diagonal

E₁: en horizontal

P: se multiplica en forma horizontal

[...]

E₁: si para que quede cateto adyacente sobre cateto adyacente... eso dividimos cateto adyacente sobre cateto adyacente

E₄: ahí también se puede simplificar

[...]

E₄: queda cateto opuesto sobre hipotenusa que es el seno

E₁: entonces queda el seno

Figura 50 Continuación de la explicación por el estudiante

The image shows a chalkboard with handwritten mathematical notes. At the top, it says 'C. Opuesto → C. Ayacente' and 'C. Ayacente → Hipotenusa'. Below this, the equation $\frac{CO}{CA} \times \frac{CA}{h} = \frac{CO}{h} = \text{sen}$ is written, illustrating the derivation of the sine function as the ratio of the opposite side to the hypotenuse.

La demostración elaborada por los estudiantes se basa en las definiciones de las razones trigonométricas: tangente y coseno, y las operaciones matemáticas entre los elementos que conforman dichas definiciones; aunque no anota las argumentaciones en el tablero, se observa que lleva una secuencia lógica que le permite encontrar como resultado la razón seno, por lo cual la demostración es de tipo deductivo.

5.2 SEGUNDA ACTIVIDAD: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

5.2.1 PROCESO DE DESCRIPCIÓN

NIVEL 1

- Representan verbal o gráficamente ángulos en posición normal.

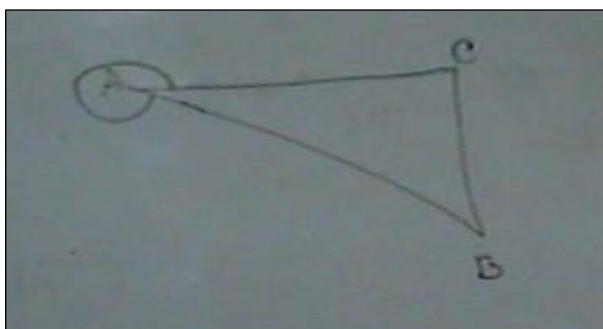
Ejemplo. El estudiante está en el tablero realizando la demostración $\text{sen } A = \cos(A - 90)$ para esto utiliza como ejemplo un ángulo de 320° , elabora el dibujo y lo reconoce como un ángulo en posición normal, el estudiante relaciona su dibujo con el archivo.

E₄: tomamos como ejemplo un ángulo de 320° , con ese solo ejemplo podemos deducir que es verdadero, puesto que como lo hicimos en la guía anterior el A

P: ¿cuál es A ?

El estudiante elabora la siguiente gráfica:

Figura 51 Gráfico de un ángulo en posición normal que hace el estudiante.



E₄: aquí vemos que A es un ángulo normal

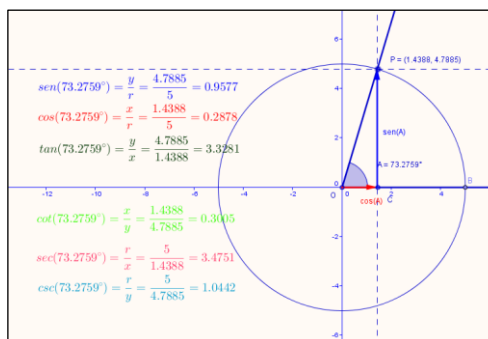
El estudiante identifica la posición del ángulo de 320° , lo reconoce como un ángulo en posición normal, reproduce la imagen de lo que recuerda del archivo y marca el ángulo en el lugar adecuado.

NIVEL 2

- Identifican las razones trigonométricas en relación con el círculo y las coordenadas del punto $P = (x, y)$, sus propiedades y regularidades mediante la observación y la experimentación con el software.

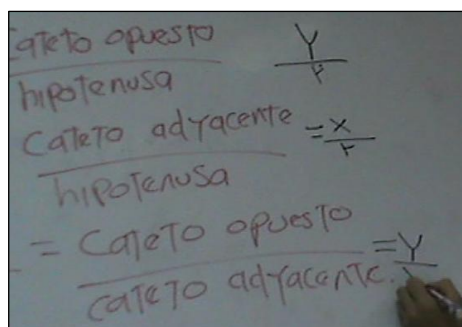
Ejemplo. Al resolver la pregunta 2.1: *Define las razones trigonométricas en el plano cartesiano para el ángulo A* , una estudiante pasa al frente a escribir sus respuestas, en las cuales muestra la relación con las coordenadas del punto P y el radio de la circunferencia, esto sirve para que los demás estudiantes expliquen la diferencia entre el trabajo mostrado por otra persona y el complemento que hace la estudiante. Este listado se basa en el trabajo con el archivo dinámico ACT 2.1 (Figura 52)

Figura 52 Imagen del archivo Act 2.1



[La estudiante pasa al tablero y escribe]

Figura 53 Definiciones de las razones trigonométricas en el plano cartesiano.



P: ¿cuál es la diferencia con lo que ustedes hicieron?

E₅: que ellas lo hicieron en el plano cartesiano

P: ¿cómo así?

E₅: ella dividió sobre el plano cartesiano, x sobre y, r

P: en qué se basaron

E₆: en el plano

P: ¿qué fue lo que utilizaron diferente?

E₂: el radio

P: en lugar de marcar OP como hipotenusa utilizó la r por el radio, pero ¿por qué utiliza la “ x ” y la “ y ”?

E₅: porque es lo que está en el plano cartesiano

E₂: porque es el lado

P: ¿qué son la “x” y la “y”?

E₇: la “x” sería el cateto adyacente, la “r” la hipotenusa y la “y” el cateto opuesto.

La estudiante basa su trabajo en la observación del archivo y sus elementos. Las razones trigonométricas se generalizan deduciéndolas a partir de la experimentación con el software. Al reconocer el carácter dinámico del archivo, identifica como variables las medidas del cateto opuesto y el adyacente las cuales relaciona con las coordenadas del punto P .

- Describen las variaciones de los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante:

Seno positivo en I y II cuadrante; negativo en el III y IV cuadrante

Coseno positivo en I y IV cuadrante; negativo en el II y III cuadrante

Tangente positivo en I y III cuadrante; negativo en el II y IV cuadrante

Ejemplo. Los estudiantes usando el archivo ACT 2.1 responden la pregunta: *Analiza los signos de las tres razones trigonométricas en cada uno de los cuatro cuadrantes del plano cartesiano.* En este caso están analizando los signos de la razón seno:

E₆: En el primer cuadrante el signo de seno es positivo

P: ¿por qué es positivo el seno en el primer cuadrante?

E₆: en el primer cuadrante es positivo porque la “x” y la “y” son positivas, entonces va a dar positiva

P: ¿se necesita saber el signo de la “x” para determinar el signo del seno?

E₆: pues opino que no se necesita

P: ¿por qué solo el de “y”?

E₆: porque esa es la definición de seno

P: “y” cambia de signo cuando se mueve el punto alrededor de la circunferencia

E₆: si

P: ¿y el radio?

E₆: no, el radio permanece constante, la r es la hipotenusa y el radio de la circunferencia

P: la r no cambia de signo porque es la magnitud del radio de la circunferencia, entonces, ¿por qué es positivo el signo?

E₆: porque la “ y ” es positiva y el radio es constante

P: en el segundo cuadrante

[...]

E₆: el seno es positivo

P: ¿por qué es positivo?

E₆: la “ y ” es positiva

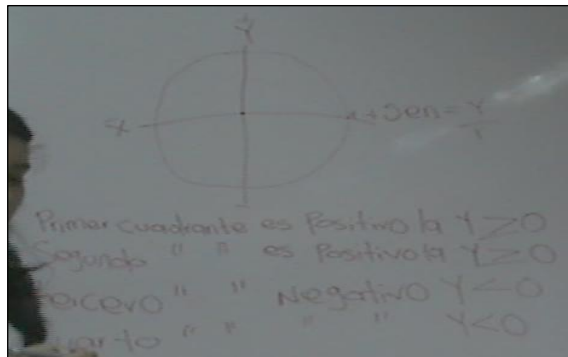
[Tercer cuadrante]

E₆: es negativo porque la “ y ” es negativa

P: y en el cuarto cuadrante

E₆: es negativo porque la “ y ” es negativa

Figura 54 Estudiante en la fase de explicitación.

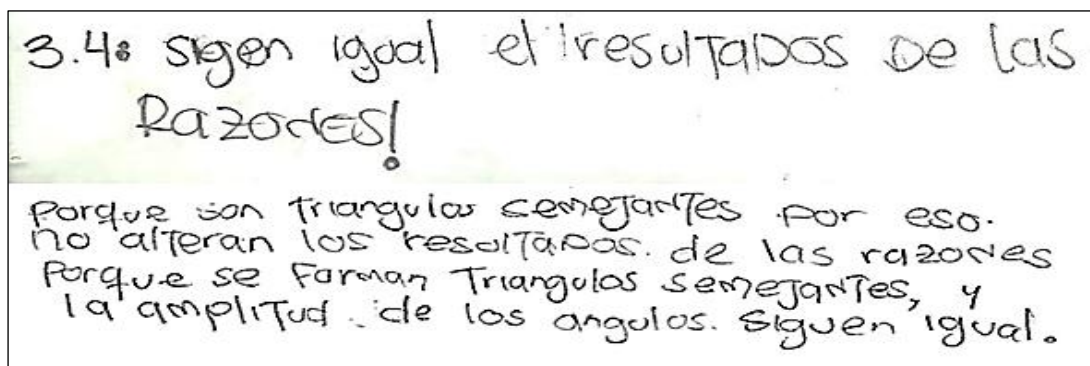


Describen informalmente la variación del signo de la razón seno mediante el análisis de la definición de la razón en cada cuadrante, los estudiantes se basan en la experimentación que realizaron en el software para elaborar sus conclusiones.

- Describen que el valor de las razones trigonométricas no depende de la longitud del radio.

Ejemplo. Los estudiantes analizan la pregunta 3.4: *¿Qué sucede con los valores de las tres razones trigonométricas a medida que varía el radio r ? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado.* A partir de la interacción con el programa, anotan en su hoja de trabajo las conclusiones de lo encontrado:

Figura 55 Fragmento de la anotación de los estudiantes donde concluyen que las razones no dependen del radio.



En este ejemplo se observa que los estudiantes analizan los resultados de las razones trigonométricas cuando varía el radio, se dan cuenta que los valores de las razones no cambian mientras los ángulos sigan con la misma amplitud. Estas conclusiones las deducen de la observación del archivo y las generalizan a partir de la experimentación.

- Cuando $r = 1$, reconoce que $\text{sen } A$ y $\text{cos } A$ equivalen a las coordenadas del punto P respectivamente.

A la pregunta: *¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas $\text{sen } (A)$ y $\text{cos } (A)$ con las coordenadas del punto P cuando el radio de la circunferencia es 1?* Uno de los estudiantes responde:

E₂: El resultado de seno y coseno nos dan las coordenadas del punto P, el coseno es la coordenada de “x” y el seno la coordenada de “y”

Esta respuesta, es el resultado de la observación del archivo por el estudiante, establece una conclusión relacionando las coordenadas del punto P con las razones seno y coseno.

- Describen con ayuda del SGD que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre menos uno y uno; tangente entre menos infinito e infinito.

Ejemplo. En el siguiente diálogo, producto de un momento de explicitación grupal, al responder la pregunta: *¿Qué sucede con el valor de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente a medida que varía el ángulo A?* los estudiantes exponen sus conclusiones sobre la variación de las razones seno, coseno y tangente luego de experimentar con el software:

FUNCIÓN SENO

E₅: En el primer cuadrante aumenta positivo de 0 a 1; en el segundo cuadrante disminuye de 1 a 0; en el tercero aumenta negativo o sea es negativa comenzaba en 0 a 1;

P: si va de 0 a -1, ¿es aumentar?

[*Estudiantes discuten y una estudiante explica que no es aumento sino disminución*]

E₅: bueno en el cuarto cuadrante disminuye negativo de 1 a 0

P: va de -1 a 0,

E₅: aumenta

FUNCIÓN COSENO

E₁: cuando el ángulo está en 0° su valor es 1, cuando aumentamos el ángulo a 90° su valor disminuye a 0, cuando el ángulo está en 180° su valor es -1, cuando el ángulo está en 270° vuelve a 0,

FUNCIÓN TANGENTE

E₁: en el primer cuadrante aumenta, en el segundo disminuye, en el tercero aumenta, en el cuarto disminuye [...]

E₆: En el primer cuadrante; en el recorrido el seno disminuyó, el coseno aumentó y la tangente aumentó

P: ¿cómo fue la variación de la tangente?

E₅: En el primer cuadrante la tangente aumenta de 0 a valores muy grandes, en el segundo cuadrante disminuye de valores muy grandes al mínimo o sea cero;

P: ¿cómo así?

E₅: de valores muy grandes a 0, la tangente es negativa, aumenta.

[Discusión]

E₅: aumenta de valores muy grandes negativos a cero, en el tercer cuadrante aumenta de 0 a infinito pero positivo y en el cuarto disminuye de infinito a 0 negativo

Los estudiantes reconocen las variaciones de las razones trigonométricas mediante la experimentación, observan los cambios que ocurren al arrastrar el punto P y formulan sus propias conclusiones que generalizan a partir de los ejemplos analizados. Realizan la descripción de una manera informal, utilizando un vocabulario apropiado a las variaciones observadas.

5.2.2 PROCESO USO DE DEFINICIONES

NIVEL 1

- Los estudiantes no están en capacidad de usar definiciones.

NIVEL 2

- Usan las definiciones de las razones trigonométricas del ángulo A

$$\text{sen}(A) = \frac{y}{r}$$

$$\text{cos}(A) = \frac{x}{r}$$

$$\text{tan}(A) = \frac{y}{x}; x \neq 0$$

$$\text{cot}(A) = \frac{x}{y}; y \neq 0$$

$$\text{sec}(A) = \frac{r}{x}; x \neq 0$$

$$\text{csc}(A) = \frac{r}{y}; y \neq 0$$

Ejemplo. Cuando los estudiantes analizan los signos de las razones trigonométricas usan las definiciones para comprobar los signos en cada cuadrante tal como se muestra a continuación en el diálogo con un estudiante.

E₃: tangente es $\frac{y}{x}$, en el primer cuadrante es positiva

P: en el segundo cuadrante

[Discusión sobre el signo de la tangente]

A: es negativa, porque “x” es negativa y “y” es positiva

P: en el tercer cuadrante

A: [señalando en el plano el lado negativo del eje “x” y del eje “y”] son negativas

P: y el signo de la tangente

A: negativo por negativo da más.

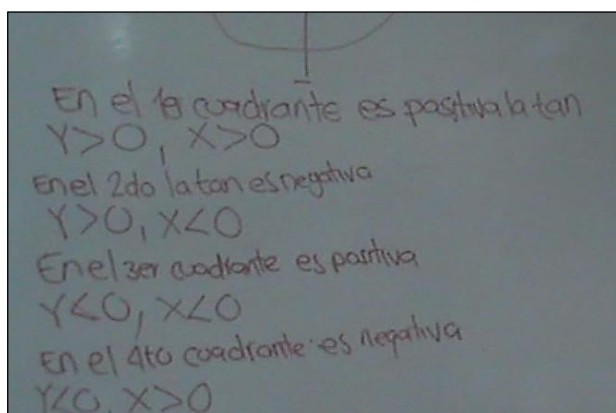
P: en el cuarto cuadrante

A: es positiva

P: revisa

A: es negativa

Figura 56 Explicación del estudiante



Después de arrastrar el punto P alrededor de la circunferencia, el estudiante comprueba el cambio de signo de la razón tangente, cuando generaliza sus conclusiones hace uso de la definición de la razón para analizar el signo en cada uno de los cuatro cuadrantes, tiene en cuenta la ley de signos y la relación de las coordenadas con la razón trigonométrica. Al analizar los cambios en los signos de la razón trigonométrica no tiene en cuenta los casos en los cuales una de las coordenadas es cero.

NIVEL 3

- Relacionan los valores de las razones trigonométricas para ángulos opuestos.

Ejemplo. Una de las preguntas de la segunda actividad indaga por la relación entre ángulos opuestos: *¿Qué relación existe entre $\text{sen}(A)$ y $\text{sen}(-A)$?* Los estudiantes observan varios ejemplos, reconocen la relación entre ambas razones y son capaces de aceptar la equivalencia en la relación encontrada.

E₄: el seno de $-A$ es $\frac{-y}{r}$

P: y cuál sería el seno de A

E₅: $\frac{y}{r}$

P: ¿cuál es la diferencia entre los dos?

E₄: el signo

P: entonces, ¿cuál es la relación?

E₅: el seno de A es $\frac{y}{r}$ y el seno de $(-A)$ es $\frac{-y}{r}$

En esta intervención los estudiantes identifica la relación entre *seno de (A)* y *seno de $(-A)$* , reconociendo que su signos son opuestos a pesar que las magnitudes de los resultados son iguales, los estudiantes no tienen en cuenta el signo de las coordenadas para justificar los resultados; su razonamiento se sigue apoyando en la manipulación del archivo, lo que le permite llegar a una conclusión correcta.

NIVEL 4

- Se admiten definiciones equivalentes de las razones trigonométricas para ángulos en posición normal.

Ejemplo. Cuando los estudiantes resuelven la pregunta 6.2: *¿Qué relación existe entre $\cos(A)$ y $\sin(A - 90^\circ)$?*, la interacción con el software les permite encontrar una relación que los lleva a admitir la equivalencia de definiciones.

P: entonces, ¿cómo es la relación?

E₁: $-\cos(A) = \sin(A - 90^\circ)$

P: ¿cómo lo demuestran?

E₁: el resultado de sus coordenadas son iguales, ahí lo que cambia es el signo uno nos da positivo y el otro nos da negativo

P: ¿qué es coseno?

E₅: adyacente sobre hipotenusa $\frac{x}{r}$

P: y el seno?

E₁: $\frac{y}{r}$

P: y si las definiciones son diferentes ¿por qué da lo mismo con signos diferentes?

E₅: por lo que en uno el cateto opuesto es el adyacente del otro

P: ¿por qué es así?

E₁: por lo que en el seno el cateto opuesto equivale al adyacente en el coseno

P: es decir

E₁: los catetos coinciden, tienen la misma medida

P: ¿por qué nos damos cuenta de eso?

E₁: (muestra las coordenadas del punto P en la pantalla) esta es la “x” y esta es la “y”

P: y en el otro triángulo es igual

E₅: en el otro al revés por lo que aquí la “x” corresponde a “y”, y lo contrario.

Los estudiantes identifican las propiedades que se deben cumplir para que las definiciones sean equivalentes, esto lo hacen basados en las definiciones seno y coseno en el plano cartesiano lo que los lleva a entender la igualdad de los valores absolutos de los resultados, pero opuestos en signo. Vale la pena aclarar que los estudiantes habían visto que los triángulos eran congruentes, por tanto las medidas de los catetos e hipotenusa son iguales.

5.2.3 PROCESO FORMULACIÓN DE DEFINICIONES

NIVEL 1

- Los estudiantes no están en capacidad de formular definiciones.

NIVEL 2

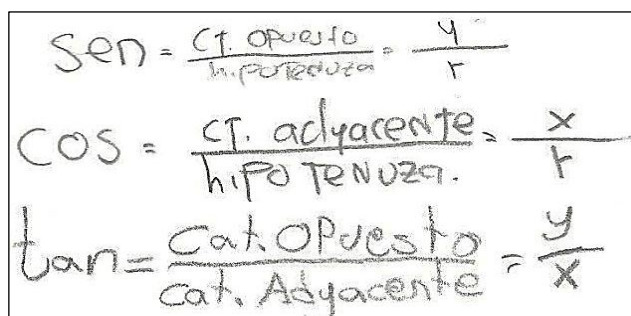
- Definen las razones trigonométricas para un ángulo en posición normal

$$\text{sen}(A) = \frac{y}{r} \quad \cos(A) = \frac{x}{r} \quad \tan(A) = \frac{y}{x}; x \neq 0$$

$$\cot(A) = \frac{x}{y}; y \neq 0 \quad \sec(A) = \frac{r}{x}; x \neq 0 \quad \csc(A) = \frac{r}{y}; y \neq 0$$

Ejemplo. Los estudiantes establecen las definiciones de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente luego de trabajar con el archivo Act 2.1.

Figura 57 Definiciones de las razones trigonométricas formuladas por los estudiantes.



$$\begin{aligned} \text{Sen} &= \frac{\text{ct. opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r} \\ \text{Cos} &= \frac{\text{ct. adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r} \\ \text{Tan} &= \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. adyacente}} = \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Las definiciones son elaboradas por los propios estudiantes relacionando las coordenadas del punto P y el radio con las razones trigonométricas, aunque todavía no comprenden su necesidad o la misión de las mismas.

NIVEL 3

- Definen las razones trigonométricas para los ángulos A , $A - 90$, $90 - A$.

Ejemplo. En la segunda actividad los estudiantes para resolver las preguntas de la sexta parte deben conocer las definiciones de las razones trigonométricas para los ángulos A , $A - 90$, $90 - A$. En el diálogo a continuación, los estudiantes expresan las definiciones de las razones de acuerdo con lo experimentado en el archivo dinámico.

E₄: $\text{sen}(A)$ es $\frac{y}{r}$

P: ¿y $\cos(A - 90^\circ)$?

E₄: $\cos(A - 90^\circ)$ es $\frac{x}{r}$ [...]

P: ¿y qué es $\tan(A - 90)$?

E₃: $\frac{y}{x}$ que es cateto opuesto sobre adyacente

P: ¿y $\tan(90 - A)$?

E₃: $\frac{y}{x}$ tienen las mismas coordenadas pero lo que pasa es que la x es la misma, y la “ y ” en uno es positivo y en el otro negativo

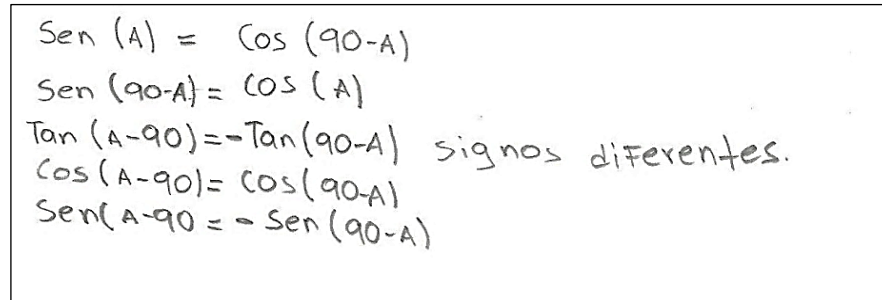
En el ejemplo vemos que los estudiantes se encuentran en capacidad de formular definiciones de las razones trigonométricas para ángulos diferentes al ángulo A , son capaces además de utilizarlas de inmediato y de identificar los signos de las razones de acuerdo con la posición del ángulo.

- Formulan relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos A , $A - 90$, $90 - A$.

Ejemplo. En la sexta parte de la segunda actividad se pide a los estudiantes: *Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos*

A , $A - 90$, $90 - A$. Las relaciones encontradas y formuladas por los dos grupos investigados se muestran a continuación:

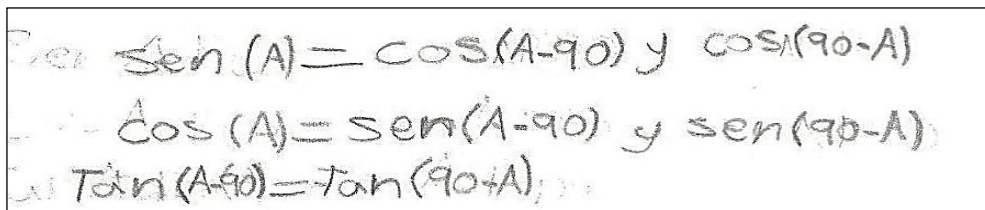
Figura 58 Relaciones entre las razones trigonométricas para los ángulos A , $A-90$ y $90-A$ del primer grupo de estudiantes



Handwritten mathematical relationships for the first group of students:

$$\begin{aligned} \text{Sen}(A) &= \cos(90-A) \\ \text{Sen}(90-A) &= \cos(A) \\ \text{Tan}(A-90) &= -\text{Tan}(90-A) \quad \text{signos diferentes.} \\ \cos(A-90) &= \cos(90-A) \\ \text{Sen}(A-90) &= -\text{Sen}(90-A) \end{aligned}$$

Figura 59 Relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos A , $A-90$ y $90-A$ del segundo grupo



Handwritten mathematical relationships for the second group of students:

$$\begin{aligned} \text{Sen}(A) &= \cos(A-90) \text{ y } \cos(90-A) \\ \cos(A) &= \text{Sen}(A-90) \text{ y } \text{Sen}(90-A) \\ \text{Tan}(A-90) &= \text{Tan}(90-A) \end{aligned}$$

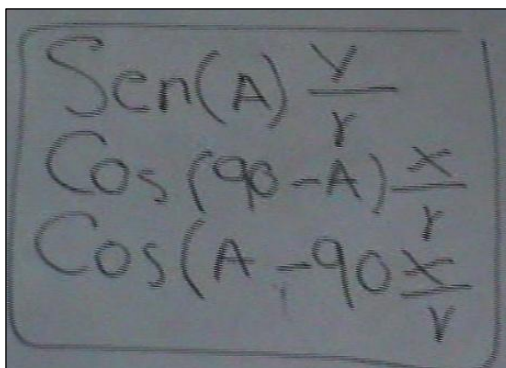
Se observa que los estudiantes son capaces de reconocer relaciones entre las razones trigonométricas para los ángulos A , $A - 90$, $90 - A$ por medio de la utilización y verificación en las representaciones del archivo. Además en el primer caso expresan relaciones correctas y las formulan en forma matemática, en el segundo caso encontraron algunas relaciones correctas, pero en la relación $\cos(A) = \text{sen}(A - 90^\circ)$ no observaron la diferencia de signos, por lo que consideraron que existía una relación de igualdad entre $\text{sen}(90^\circ - A) = \text{sen}(A - 90^\circ)$, lo cual es incorrecto; en este grupo no expresaron en forma adecuada las relaciones encontradas.

NIVEL 4

- Comprende definiciones equivalentes de las razones trigonométricas para ángulos en posición normal.

Ejemplo. En la fase de explicitación grupal, los estudiantes explican que durante el proceso de buscar relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos A , $A - 90$, $90 - A$; ellos encuentran que $\text{sen } A$, $\text{cos } (90 - A)$ y $\text{cos } (A - 90)$ son iguales. A continuación se muestra lo que anotan en el tablero y el diálogo que se sostiene al respecto.

Figura 60 Relación entre $\text{sen } A$, $\text{cos } (90 - A)$ y $\text{cos } (A - 90)$



The image shows a chalkboard with three lines of handwritten text. The first line is $\text{Sen}(A) \frac{y}{r}$. The second line is $\text{Cos}(90 - A) \frac{x}{r}$. The third line is $\text{Cos}(A - 90) \frac{x}{r}$. The handwriting is in capital letters and the fractions are written with a horizontal line.

E₅: profe nosotros medimos los tamaños de los lados de los 3 triángulos **E₆:** si vea usamos LLL

E₃: el cateto opuesto del ángulo A es el cateto adyacente del ángulo $90 - A$

P: ¿por qué?

E₃: son triángulos semejantes

P: semejantes o congruentes

Coro: congruentes

Los estudiantes son capaces de aceptar la equivalencia entre las definiciones de $\sin A$, $\cos(90 - A)$ y $\cos(A - 90)$, ellos han establecido la congruencia de los triángulos y se apoyan en esto para establecer la relación de igualdad, utilizan el archivo como una forma de verificar sus deducciones; aunque sus razonamientos son lógicos se siguen apoyando en la manipulación del archivo.

5.2.4 PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

NIVEL 1

- Los estudiantes no están en capacidad de elaborar demostraciones.

NIVEL 2

- Realizan demostraciones empíricas de las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico)
- Demuestran que $\sin(A)$ y $\cos(A)$ equivalen a las coordenadas del punto P respectivamente, cuando $r = 1$.

Ejemplo. A continuación se muestra el diálogo de los estudiantes con la docente, en este, ellos demuestran que el valor de las razones seno y coseno equivale a las coordenadas del punto P cuando el radio vale 1.

Figura 61 Imagen del archivo Act 2.1 luego que los estudiantes ubican el radio en 1



P: ¿qué sucede con las razones seno, coseno y las coordenadas del punto?

E₄: dan de igual manera

E₃: cuando uno divide un número da lo mismo [*se refiere a que la división se hace entre uno*]

E₄: al estar el radio en 1, el divisor es 1 porque dice que es el lado “y” con el radio, se hace la división en este caso sería 0,8966 sobre 1. ¿Qué relación existe? Las dos dan el mismo número que tiene en el dividendo, el resultado. Al ver que el radio está en 1 da la misma división por eso es que da el mismo resultado del dividendo

P: ¿qué tiene que ver eso con las coordenadas del punto *P*?

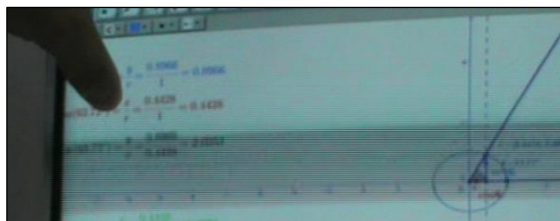
E₄: son las mismas

P: ¿cómo así?

E₄: las mismas coordenadas que tiene aquí el punto *P* son las mismas que acá cuando el radio está en 1 [*El estudiante señala el punto P en la vista gráfica y luego señala las razones trigonométricas para mostrar que los resultados corresponden a las coordenadas*]

E₄: por ejemplo aquí nos dicen las coordenadas del punto *P*, al lado “*x*” es 0,4428 y la “*y*” es 0,8966 y aquí nos dice que la “*y*” dividida por el radio nos da 0,8966 [*el estudiante vuelve a mostrar tanto el punto como las divisiones que indican las razones*]

Figura 62 El estudiante señala la razón en la pantalla



E₄: y la “x” dividida por el radio nos da 0,4428 que es igual a las coordenadas del punto P

P: entonces ¿cómo es la relación?

E₄: cuando el radio está en 1, el seno y el coseno son las coordenadas del punto P

P: ¿cuáles coordenadas?

E₄: el seno es la coordenada “y”

P: ¿y el coseno?

E₃: la “x”

En este caso los estudiantes realizan una demostración de tipo empirismo ingenuo, para hacerlo usan como ejemplo el punto de coordenadas (0.4428, 0.8966) que fue escogido sin ningún criterio definido, las argumentaciones se basan en operaciones matemáticas que realizan con los valores de las coordenadas y el radio en el ejemplo.

- Demuestran en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) los valores de las razones trigonométricas cuando los ángulos miden 0°, 90°, 180°, 270°, 360°.

Ejemplo. A continuación se muestra parte de la respuesta de los estudiantes a la pregunta: *¿Qué ocurre cuando el ángulo A es igual a 0°, 90°, 180°, 270° y 360°? Explica lo que ocurre justificando con argumentos matemáticos.*

Figura 63 Valores de las razones trigonométricas para ángulos cuadrantales.

3.10
(sen 0°) = 0 (y=0) y (r=5) al hacer la división el resultado es 0
(cos 0°) = 1 (x=5) y (r=5) al hacer la división el resultado es 1
(tan 0°) = 0 (y=0) y (x=5) al hacer la división el resultado es 0
(sen 90°) = 1 (y=5) y (r=5) al hacer la división el resultado es 1
(cos 90°) = 0 (x=0) y (r=5) al hacer la división el resultado es 0
(tan 90°) = indefinido (y=5) y (x=0) al hacer la división el resultado es indefinido

La demostración elaborada corresponde a un empirismo ingenuo ya que los estudiantes, toman 5 como radio, a pesar de haber trabajado en otras preguntas con radios diferentes, es decir vuelven al valor inicial del radio en el archivo; con este valor hacen las operaciones y estructuran sus conclusiones.

- Demuestran en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante.
- Demuestran en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) las siguientes relaciones:

$$\text{sen}(A) = -\text{sen}(-A)$$

$$\text{cos}(A) = \text{cos}(-A)$$

$$\text{sen}(90 - A) = \text{cos}(A)$$

$$\text{tan}(A) = -\text{tan}(-A)$$

$$\text{cos}(A) = -\text{sen}(A - 90)$$

$$\text{cos}(A - 90) = \text{sen}(A)$$

$$\text{tan}(A) = -\text{cot}(A - 90)$$

Ejemplo. Para resolver la actividad 5.5: ¿Qué relación existe entre $\text{tan}(A)$ y $\text{tan}(-A)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura. Los estudiantes utilizaron demostraciones empíricas como se muestran a continuación:

a) Demostración de la relación entre *tangente de A* y *tangente de -A*

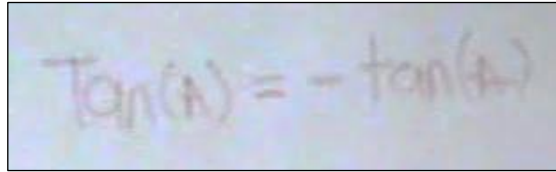
E₁: sus razones comparten la misma magnitud pero no el signo

E₆: igual magnitud pero diferente signo

E₇: en un ángulo de 50° la tangente es positiva y la tangente de -A es negativa

E₁: cuando el ángulo está en 70° su valor es 3 y cuando está en -70° su valor es -3

Figura 64 Escritura del estudiante en el tablero.

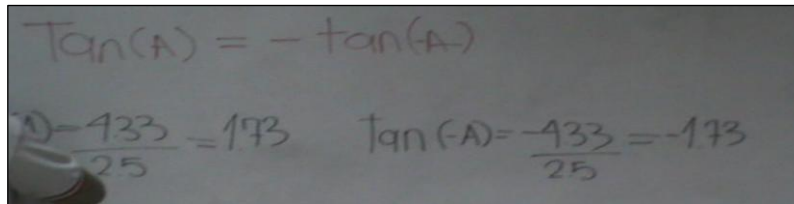


A photograph of a whiteboard with the handwritten equation $\text{Tan}(A) = -\text{tan}(A)$ in red marker.

En este ejemplo la demostración se basa en ejemplos de los valores las razones trigonométricas de los ángulos 50° , -50° , 70° y -70° , estos ángulos fueron escogidos sin ningún criterio, los estudiantes observan los resultados de los valores en cada caso y sacan una conclusión general. Es un caso de demostración empirismo ingenuo inductivo.

b) Demostración de $\tan A = -\tan(-A)$

Figura 65 Demostración de tipo empírico ingenuo



A photograph of a whiteboard showing the handwritten equation $\text{Tan}(A) = -\text{tan}(A)$ at the top. Below it, two calculations are shown: $\frac{10-433}{25} = 173$ and $\text{Tan}(-A) = \frac{-433}{25} = -173$.

Eg: que aquí la tangente de A da el mismo resultado, pero como cambia el signo por eso la otra nos da negativo

P: ¿por qué cambia el signo?

Eg: por “ y ” y “ x ”

P: ¿cómo así?

Eg: por la ley de signos, tangente es cateto opuesto sobre cateto adyacente

P: ¿cómo lo definimos en el plano?

Eg: $\frac{y}{x}$, acá “ y ” es positiva y “ x ” es positiva, en cambio acá “ y ” es negativa y “ x ” es positiva

Este ejemplo corresponde a empirismo ingenuo inductivo, la demostración se basó en la escogencia de un ángulo observado en la pantalla, se anotaron los valores de las coordenadas y se estableció una conclusión general sin analizar ningún otro caso particular ni experimentar con el archivo.

NIVEL 3

- Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) que $\text{sen}(A)$ y $\text{cos}(A)$ equivalen a las coordenadas del punto P respectivamente, cuando $r = 1$.
- Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) los valores de las razones trigonométricas para ángulos cuadrantales.
- Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante.
- Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) las relaciones:

$$\text{sen}(A) = -\text{sen}(-A)$$

$$\text{cos}(A) = \text{cos}(-A)$$

$$\text{sen}(90 - A) = \text{cos}(A)$$

$$\text{tan}(A) = -\text{tan}(-A)$$

$$\text{cos}(A) = -\text{sen}(A - 90)$$

$$\text{cos}(A - 90) = \text{sen}(A)$$

$$\text{tan}(A) = -\text{cot}(A - 90)$$

NIVEL 4

- Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) que $\text{sen}(A)$ y $\text{cos}(A)$ equivalen a las coordenadas del punto P respectivamente, cuando $r = 1$.

Ejemplo. Los estudiantes elaboraron demostraciones deductivas para resolver la pregunta: *¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas $\sin(A)$ y $\cos(A)$ con las coordenadas del punto P cuando el radio de la circunferencia es 1? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.* A continuación se muestra el diálogo y la demostración elaborada por los estudiantes.

E₄: se parte de que seno es el lado “y” sobre el radio y coseno el lado “x” sobre el radio

P: explícalo con el seno, de qué partimos

E₄: de que el radio es 1

P: ¿qué más debemos saber?

E₃: a qué equivale el seno, o sea cateto opuesto sobre hipotenusa

P: ¿y en el plano cartesiano?

E₃: el seno es “y” sobre r

P: ¿y del radio qué es lo que sabemos?

E₃: es uno

P: ¿entonces?

E₄: falta el valor de y

P: y ¿cuál valor puede tomar?

E₄: indefinido porque se mueve alrededor de la circunferencia

P: ¿cómo queda la división?

E₄: indefinido sobre 1

P: no

E₄: variante

P: la variable

E₄: $\frac{y}{1}$

P: ¿cuál es la respuesta?

E₄: “y”

P: ¿por qué?

E₄: porque toda división por 1 da el mismo resultado

Figura 66 Demostración elaborada por los estudiantes cuando el radio es 1.

3.7= partimos de que el $r=1$; $\text{sen} = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}$
 $\text{sen} = \frac{y}{1}$ puesto que y no tiene un valor indefinido.
 Por eso: $\text{sen} = p(y)$. porque toda división por 1 da el mismo resultado.

$\text{cos} = \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1}$ puesto que x no tiene valor definido. por eso: $\text{cos} = p(x)$, porque al hacer la división por 1 da el mismo resultado.

La demostración elaborada por el estudiante se considera deductiva formal estructural ya que utiliza secuencias lógicas derivadas de la pregunta inicial, usa las definiciones de las razones trigonométricas seno y coseno, toma 1 como radio, sus argumentos están basados en operaciones matemáticas; además no usa ejemplos para justificar sus procedimientos. En su lenguaje todavía no usan la palabra variable, la cambian por definido o indefinido como si fueran sinónimos.

- Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) los valores de las razones trigonométricas para ángulos cuadrantales.
- Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante.
- Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) las relaciones:

$$\text{sen}(A) = -\text{sen}(-A)$$

$$\text{cos}(A) = \text{cos}(-A)$$

$$\text{sen}(90 - A) = \text{cos}(A)$$

$$\text{tan}(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\text{cos}(A)}$$

$$\cos(A) = -\sin(A - 90)$$

$$\cos(A - 90) = \cos(90 - A)$$

$$\tan(A) = -\cot(A - 90)$$

Ejemplo. Para demostrar la conjetura de la pregunta 6.2: *¿Qué relación existe entre $\cos(A)$ y $\sin(A - 90^\circ)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura,* los estudiantes elaboran demostraciones que se consideran deductivas:

Los estudiantes escriben la siguiente conjetura: $\sin(A - 90) = -\cos(A)$

E₆: Uno es negativo y el otro positivo,

E₇: por las razones

E₈: el *coseno de A* es cateto adyacente sobre hipotenusa y el *seno de A - 90* es cateto opuesto sobre hipotenusa y el resultado es el mismo

P: ¿cuáles son las definiciones en el plano?

E₇: seno es $\frac{y}{r}$ coseno es $\frac{x}{r}$

P: pero, ¿si las definiciones son diferentes cómo es posible que los resultados numéricos sean iguales?

E₈: es que uno está en un cuadrante negativo y otro en un cuadrante positivo

P: ¿cómo así?

E₈: el *seno de A - 90* está en el cuadrante negativo

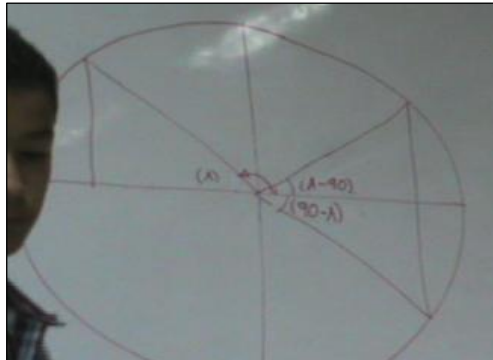
P: explique, en el archivo habían 3 triángulos, ¿cómo eran?

[...]

E₄: lo que sucede es que cuando el triángulo que tiene el ángulo de $A - 90$ está en un cuadrante el triángulo del ángulo A está en otro cuadrante

P: ¿puedes graficarlo?

Figura 67 Gráfico del estudiante.



P: ok, pero todavía no sabemos por qué $\cos(A)$ y $\sin(A - 90)$ son iguales

E₄: bueno yo sé que coseno es $\frac{x}{r}$ y el seno que es $\frac{y}{r}$, nos podemos fijar en este ejemplo, aquí vemos que el coseno sería este que es “x” sobre “r” que es este [señala en la gráfica el cateto adyacente del ángulo y el radio] vemos en este caso que la “x” está del lado negativo, y el seno es cateto opuesto sobre hipotenusa [señala el cateto correspondiente al ángulo A-90 y el radio], acá la “y” está positiva por eso nos dan signos opuestos

P: eso con relación a los signos, pero ¿por qué son iguales las magnitudes?

E₈: porque son congruentes

P: pero a simple vista no parecen congruentes, ¿cómo nos damos cuenta de esa propiedad?

E₄: porque utilizamos los criterios de congruencia

P: pero a pesar de ser congruentes no pareciera así, ¿por qué se diferencian?

[Silencio]

E₉: uno se llama A y otro A - 90

E₈: es que cambian de posición

E₈: lo voltean [mueve la mano en señal de que se realiza una transformación al triángulo]

La demostración elaborada por los estudiantes corresponde a una demostración deductiva porque en su desarrollo se basan en las definiciones de las razones trigonométricas en el plano cartesiano y criterios de congruencia que les permiten explicar con certeza sus argumentos. Se aclara que se considera la respuesta como demostración deductiva por la secuencia de los planteamientos, el tiempo que duró la experiencia, y por el paso que se dio del tratamiento geométrico al analítico.

Ejemplo. Para demostrar la conjetura de la pregunta 6.2: *¿Qué relación existe entre $\cos(A - 90^\circ)$ y $\cos(90^\circ - A)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.* El otro grupo elaboró la siguiente demostración.

E₂: si movemos el punto P vemos que la razón $\cos(90^\circ - A)$ es igual al $\cos$ de $A - 90$ es verdadera porque la “x” es la misma para los dos

P: ¿cómo iniciarían la demostración?

E₂: usando la congruencia

P: ¿para qué nos sirve la congruencia?

E₂: para ver si los triángulos son congruentes, iguales

P: ¿en este caso?

E₂: son iguales

E₅: la “x” es la misma para los dos

P: ¿solo la x da la congruencia?

E₂: un ángulo, y otro lado, lado por ángulo por lado

[...]

E₂: los triángulos comparten un lado, es el mismo, es la “x”

P: entonces ¿por qué el $\cos(90^\circ - A)$ es igual al $\cos$ de $(A - 90)$?

E₂: coseno es $\frac{x}{r}$

P: me puedes mostrar en la gráfica

[El estudiante señala cateto e hipotenusa en la gráfica]

P: en el otro triángulo

E₂: es lo mismo

P: ¿por qué dices que es lo mismo?

E₂: porque es la misma razón

P: explique

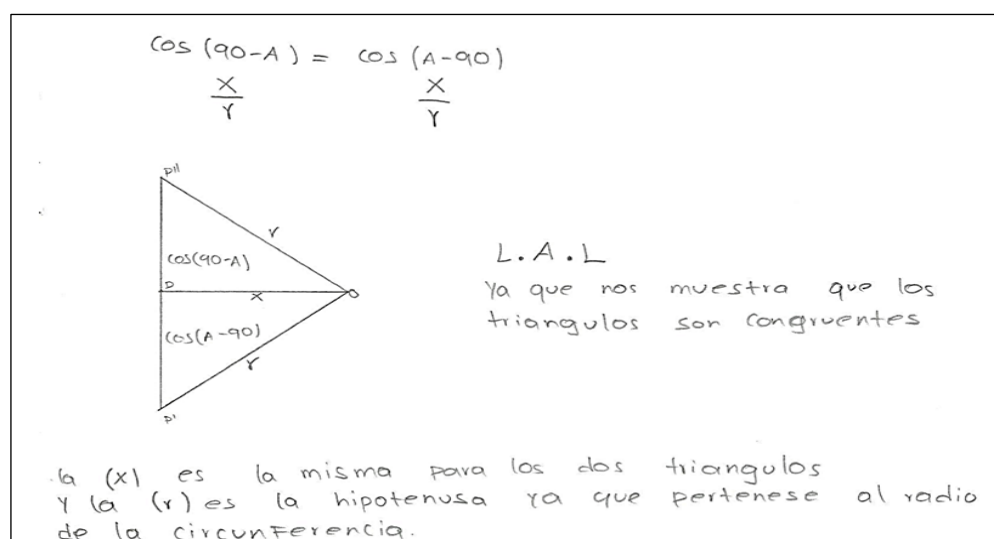
E₅: porque los dos triángulos están unidos, tienen la misma medida y son congruentes [señalan el lado que comparten]

E₂: tienen todo lo mismo

E₅: es como si fuera un solo triángulo que está dividido en dos

E₂: porque la "x" es la misma en los dos y la r también porque es la hipotenusa de los dos

Figura 68 Demostración de $\cos(A-90)=\cos(90-A)$



La demostración elaborada por los E₂ y E₅ corresponde a una demostración deductiva porque en su desarrollo se basan en la definición de la razón coseno en el plano cartesiano y los criterios de congruencia que les permiten formular la conjetura y justificar sus procedimientos. Se aclara que se considera la respuesta como demostración deductiva por la secuencia de los planteamientos, el tiempo que duró la experiencia, y por el paso que se dio del tratamiento geométrico al analítico.

6. CONCLUSIONES

Las diferentes formas de razonar de los estudiantes muestran que dependiendo de las actividades propuestas, los procesos matemáticos de descripción, definición y demostración están presentes en sus actuaciones y en los trabajos elaborados. Los procedimientos desarrollados, mediante la implementación de las actividades, permitieron a los estudiantes avanzar en sus niveles de razonamiento, se pudo observar que mediante la descripción de los archivos, los estudiantes fueron generalizando propiedades y usando definiciones que los llevaron a adquirir habilidades en la demostración. A pesar que las actividades no se pudieron desarrollar en su totalidad, debido a que el proceso de aprendizaje y de desarrollo de habilidades de descripción, definición y demostración se hizo en un contexto de clase normal de una institución de carácter oficial, en donde la mayoría de estudiantes tiene deficiencias en los conceptos y procesos pre-requisitos para el estudio de las razones trigonométricas, los estudiantes mostraron importantes avances en sus razonamientos si se compara con anteriores cursos en los cuales no habían recibido la formación necesaria en Geometría, ni habían desarrollado los procesos que se trabajaron.

Inicialmente los estudiantes mostraron algunas dificultades en el análisis de los archivos, debido a que trataban de justificar sus procedimientos basados en argumentos visuales, pero en la medida que avanzaron en la realización de las actividades se concientizaron de la necesidad de usar definiciones y argumentar de manera lógica las situaciones planteadas. Durante la ejecución de la segunda actividad se observaron debilidades en conocimientos básicos de semejanza de triángulos lo cual influyó en el desarrollo de las actividades y en el avance en el proceso de demostración, razón por la cual solo se cumplieron las dos primeras actividades de las cuatro planteadas.

Por otra parte, se puede concluir que el uso de la tecnología favoreció el análisis, la generalización, la deducción, y en especial, la relación entre conceptos y la generación de ideas, ya que los archivos se convirtieron en una herramienta de aprendizaje, lo cual facilitó la reflexión y comunicación de ideas entre estudiantes y, entre estudiantes y profesor; este último, enfocando a los estudiantes a la construcción de los conocimientos matemáticos. Esto permitió enfatizar la elaboración de descripciones, definiciones, construcción y validación de conjeturas y demostraciones y el descubrimiento de propiedades. Pero sobre todo, se rescató una idea, que el estudiante es responsable de su propio aprendizaje; de manera que el valor de la herramienta se incrementó en la medida que se empleaba, al hacer posible un rango mayor de ideas matemáticas, con más formas para representarlas y manipularlas. Este hecho también se acomodó a las diferentes formas de aprendizaje, debido a que los estudiantes podían utilizar las diversas representaciones que les ofrecía el software; esto les ayudó a desarrollar distintas maneras de pensar acerca de las tareas propuestas e independizarse de la tecnología.

Con los resultados encontrados se confirma que la tecnología por sí misma no logra el objetivo, es el docente quien enfoca al estudiante para que mediante la observación, el análisis, la producción de conjeturas y la elaboración de demostraciones, avance en su nivel de razonamiento. De ahí que si un estudiante se encuentra en el primer nivel de razonamiento, se queda en la parte estática del archivo, pero si el profesor lo motiva y cuestiona adecuadamente, entonces es capaz de analizar los cambios en la parte dinámica, puede progresar y observar la necesidad del uso y la formulación de la teoría en la búsqueda de las justificaciones teóricas para la solución de los problemas propuestos. Esta forma de utilizar la tecnología requiere una correcta preparación de los docentes para diseñar y aplicar actividades en las cuales se busca desarrollar procesos y ayudar a los estudiantes a avanzar en sus niveles de razonamiento.

De acuerdo con lo expresado en el párrafo anterior, esta investigación tendrá un impacto en la Educación Matemática en lo siguiente: a) Dar a conocer una propuesta innovadora para la enseñanza por procesos y niveles de razonamiento de las Razones Trigonométricas; b) Que los docentes en ejercicio tengan acceso a la propuesta para que la implementen en el aula de clase y puedan cumplir con los requerimientos de los lineamientos curriculares relacionados con la utilización de propuestas de enseñanza centradas en el desarrollo de las competencias matemáticas de forma que involucren procesos generales; c) Que a partir de las conclusiones (descriptores de niveles) los docentes puedan reflexionar sobre sus prácticas pedagógicas, con el fin de colaborar con sus estudiantes en la construcción de su propio conocimiento y en avance en su nivel de razonamiento. En síntesis, este trabajo pretende aportar las bases para posteriores aplicaciones de la unidad de enseñanza que permitan perfeccionar los descriptores de los procesos de descripción, definición y demostración cuando se estudian las razones trigonométricas, además se sientan las bases para posteriores estudios en los cuales se indague por otros procesos generales.

Producto de este trabajo no solo se elaboró la caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración para el estudio de las razones trigonométricas como era el objetivo planteado, sino que además, con la organización de la unidad de enseñanza según las fases del Modelo, permitió al docente comprender cómo se debían orientar las actividades respecto a cada proceso y a las actuaciones de los estudiantes para motivar a los que necesitaban mayor asesoría a su vez que identificar a los que estaban avanzando más rápidamente. Se resalta que la fase de orientación dirigida enfocada al desarrollo de los procesos fue básica para que los estudiantes lograran desarrollar los contenidos y para que estructuraran su trabajo de modo que se hicieran visibles las descripciones, definiciones y demostraciones elaboradas y la fase de explicitación que también contribuyó al logro de los objetivos de aprendizaje y se constituyeron en una nueva fuente de

motivación y participación para los integrantes del grupo gracias al compromiso de cada uno en la realización de las tareas propuestas; además la fase de explicitación fue clave para que los estudiantes observaran y comprendieran otras formas de demostración, aprendieran vocabulario, aumentaran sus intervenciones y mejoraran en la producción de sus argumentaciones.

Los descriptores propuestos en el estudio están planteados de acuerdo a la unidad de enseñanza de las Razones Trigonométricas que se basa en el uso de SGD, es probable que para otra propuesta de enseñanza éstos pudieran cambiar, pero algunos son independientes de la propuesta. La experimentación permitió confirmar en su gran mayoría el listado de descriptores inicialmente propuestos para dos actividades (Razones trigonométricas para triángulos rectángulos y Razones trigonométricas para ángulos en posición normal), con algunas modificaciones debido a los descriptores emergentes que surgieron de las actividades.

Se hace necesario aclarar que por falta de tiempo en la experimentación los descriptores de las actividades 3 y 4 no se pudieron analizar, pero se dejan propuestos los planteados para ser verificados y ampliados en futuras investigaciones.

Algunas de las limitaciones que surgieron con el desarrollo de la investigación fueron:

- ✓ Los estudiantes presentaron problemas con conocimientos relacionados con la semejanza y congruencia de triángulos, lo cual dificultó el desarrollo de las actividades sobre todo en la parte de las demostraciones, ya que al no poseer los conocimientos adecuados no podían construir justificaciones teóricas a las preguntas planteadas.
- ✓ No todos los estudiantes aprovechaban el trabajo con el archivo dinámico más bien se restringieron a usar los ejemplos observados o trabajar en un solo cuadrante.

Producto de la investigación, se considera para futuros estudios:

- ✓ La investigación ha permitido avanzar en la caracterización de los descriptores para el estudio de las razones trigonométricas, esto se convertirá en una base fundamental para aquellas investigaciones en las que se continúe el estudio del Modelo de Van Hiele y procesos, las cuales podrán aplicar las actividades en su totalidad.
- ✓ Proponer la aplicación del Modelo en otros temas de Matemáticas en bachillerato como una forma de apoyar el trabajo colaborativo de profesores e investigadores en educación matemática.
- ✓ Otro posible estudio es el referente al tratamiento de dificultades que surgen de la aplicación de la unidad de enseñanza con software de geometría dinámica.

A continuación se detalla la relación de los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas que se han elaborado y verificado con la aplicación de la unidad de enseñanza de las razones trigonométricas. La relación de los descriptores, además de ser el principal objetivo de esta investigación, se convierte en un aporte novedoso del trabajo al tomar en cuenta los modos de razonamiento de los estudiantes cuando se estudian las razones trigonométricas específicamente para un entorno de geometría dinámica.

PROCESO DE DESCRIPCIÓN

NIVEL 1

- Describe elementos y propiedades de los triángulos rectángulos, e identifica los ángulos internos y externos del triángulo por medio de consideraciones visuales o la referencia a prototipos visuales para caracterizar elementos,

propiedades o ángulos. Puede incluir atributos irrelevantes en sus descripciones.

- Tanto en la producción oral como escrita, el estudiante describe la construcción dinámica en forma estática, limitándose a los datos que en ese momento observa en la pantalla (su descripción se basa en características visuales). No reconocen explícitamente las propiedades matemáticas de las razones trigonométricas.
- Identifica las seis razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y las describe como “cocientes” entre los lados del triángulo rectángulo. Analiza el concepto básico de razón como el resultado de la división entre las longitudes de los lados del triángulo, no considera explícitamente las propiedades de las razones.
- Representa verbal o gráficamente ángulos en posición normal. El estudiante identifica la posición normal de cualquier ángulo y lo representa, reproduce la imagen de lo que recuerda del archivo y marca el ángulo en el lugar adecuado.
- Describe elementos geométricos presentes en la construcción, tiene en cuenta el carácter dinámico del archivo para generalizar sus resultados, relaciona las coordenadas del punto P y el radio de la circunferencia con las razones trigonométricas, aspecto esencial en la elaboración de definiciones de las razones trigonométricas para ángulos en posición normal.

NIVEL 2

- Por medio de la observación y la experimentación con el software, el estudiante percibe las propiedades necesarias para describir la dependencia de las razones trigonométricas de la amplitud de los ángulos.
- Al experimentar con el archivo, el estudiante se hace consciente de la variación de las razones trigonométricas así: seno y coseno varían entre cero y uno;

tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito, esto le permite describir de una manera informal el cambio en las razones, utilizando un lenguaje cotidiano para expresar sus justificaciones.

- Reconoce que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente.
- Describe el cambio en los valores de las razones trigonométricas producto de la observación y la experimentación con el software, esto les permite generalizar el cambio por medio de descripciones en las que utilizan explícitamente las características observadas en algunos ángulos. No usan un lenguaje apropiado. Su vocabulario es impreciso.
- Describe los ángulos agudos del triángulo rectángulo como complementarios. Los estudiantes son conscientes que los ángulos A y B suman 90° , la experimentación con el software les permite entender que mientras la medida de uno de los ángulos aumenta la del otro disminuye, con lo cual generalizan su conclusión, presentan un vocabulario impreciso.
- Identifica en las razones trigonométricas su relación con el círculo, sus propiedades y regularidades mediante la observación y la experimentación con el software.
- Describe informalmente las variaciones de los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante mediante el análisis de la definiciones de las razones, se basa en la experimentación que realizó en el software para elaborar sus conclusiones así:

Seno positivo en I y II cuadrante; negativo en el III y IV cuadrante

Coseno positivo en I y IV cuadrante; negativo en el II y III cuadrante

Tangente positivo en I y III cuadrante; negativo en el II y IV cuadrante,

- El estudiante reconoce que el valor de las razones trigonométricas no depende de la longitud del radio, analiza los resultados de las razones trigonométricas cuando varía el radio, la observación lo lleva a deducir y concluir que los valores de las razones no cambian mientras los ángulos sigan con la misma amplitud, las conclusiones son generalizadas a partir de la experimentación.
- La exploración y análisis del archivo lo lleva a relacionar el seno y el coseno del ángulo A con las coordenadas del punto P , la experimentación le permite concluir que: Cuando $r = 1$, *seno de A* y *coseno de A* equivalen a las coordenadas del punto P respectivamente.
- Con ayuda del SGD analizan los cambios que ocurren al arrastrar el punto P con relación a la variación de las razones; formulan sus propias conclusiones que generalizan a partir de los ejemplos analizados así: las razones trigonométricas seno y coseno varían entre menos uno y uno; tangente entre menos infinito e infinito. Realizan la descripción de las variaciones de las razones de una manera informal, utilizando un vocabulario apropiado a sus observaciones.

PROCESO USO DE DEFINICIONES

NIVEL 1

- Los estudiantes no están en capacidad de usar definiciones

NIVEL 2

- Usa las definiciones de las razones trigonométricas del triángulo rectángulo para identificar los lados correspondientes de las razones trigonométricas.
- Usa las definiciones de las razones trigonométricas para ángulos en posición normal:

$$\text{sen}(A) = \frac{y}{r}$$

$$\text{cos}(A) = \frac{x}{r}$$

$$\text{tan}(A) = \frac{y}{x}; x \neq 0$$

$$\cot(A) = \frac{x}{y}; y \neq 0 \qquad \sec(A) = \frac{r}{x}; x \neq 0 \qquad \csc(A) = \frac{r}{y}; y \neq 0$$

Las definiciones de las razones trigonométricas le sirven con ayuda del SGD para identificar las razones de cualquier ángulo, para describir el cambio de signo de las razones en cada cuadrante y para describir la variación de las razones.

NIVEL 3

- Relaciona las definiciones de las razones en trigonométricas en el triángulo rectángulo como cociente y como relación entre magnitudes reales positivas.
- La manipulación del archivo lo lleva a relacionar los valores de las razones trigonométricas para ángulos opuestos. Por medio de la observación y experimentación comprueba la igualdad o diferencia de signos o magnitudes de los resultados de las razones, en algunos casos no tienen en cuenta el signo de las coordenadas para justificar los resultados; aunque sus conclusiones sean correctas.
- Relaciona las definiciones de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo y en el plano cartesiano cuando las necesita para demostrar propiedades del tema.

NIVEL 4

- El estudiante usa las definiciones de las razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente de los ángulos A y B para identificar relaciones que le permiten aceptar equivalencias entre dichas definiciones, sus argumentos están basados en el uso de las definiciones de cada razón, por ejemplo, admite las relaciones:

$$\sin(A) = \cos(90 - A);$$

$$\cos(A) = \sin(90 - A)$$

$$\tan(A) = \cot(90 - A)$$

- Admite definiciones equivalentes de las razones trigonométricas para ángulos en posición normal. Identifica propiedades que se cumplen para que las definiciones sean equivalentes, se basa en las definiciones de seno y coseno en el plano cartesiano para entender la igualdad de los valores absolutos de los resultados, pero opuestos en signo. Acepta definiciones equivalentes tales como:

$$\text{sen}(A) = -\text{sen}(-A)$$

$$\cos(A) = \cos(-A)$$

$$\tan(A) = -\tan(-A)$$

$$\text{sen}(90 - A) = -\text{sen}(A - 90)$$

$$\cos(A) = -\text{sen}(A - 90)$$

$$\cos(A - 90) = \cos(90 - A)$$

$$\tan(A) = -\cot(A - 90)$$

PROCESO FORMULACIÓN DE DEFINICIONES

NIVEL 1

- Los estudiantes no están en capacidad de formular definiciones.

NIVEL 2

- Usa las definiciones:

$$\text{sen}(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\cot(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

$$\sec(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$$

$$\csc(A) = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}}$$

Los estudiantes comparan la definición de las razones trigonométricas con los elementos del triángulo ABC para aplicarlas al archivo dinámico.

- Define las razones trigonométricas para un ángulo en posición normal

$$\text{sen}(A) = \frac{y}{r}$$

$$\cos(A) = \frac{x}{r}$$

$$\tan(A) = \frac{y}{x}; x \neq 0$$

$$\cot(A) = \frac{x}{y}; y \neq 0$$

$$\sec(A) = \frac{r}{x}; x \neq 0$$

$$\csc(A) = \frac{r}{y}; y \neq 0$$

Las definiciones son elaboradas por los propios estudiantes relacionando las coordenadas del punto P y el radio con las razones trigonométricas, aunque todavía no comprenden su necesidad o la importancia de las mismas.

NIVEL 3

- Utilizan las definiciones de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo para identificar, formular y demostrar relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos A y $90-A$, tales como: $\text{sen}(A) = \text{cos}(90 - A)$; $\text{cos}(A) = \text{sen}(90 - A)$; $\text{tan}(A) = \text{cot}(90 - A)$.
- Formula relaciones entre las razones trigonométricas de los ángulos A , $A - 90$, $90 - A$. El estudiante es capaz de reconocer relaciones entre las razones trigonométricas para los ángulos A , $A - 90$, $90 - A$. Expresan relaciones correctas entre las razones trigonométricas y las formulan en forma matemática.

NIVEL 4

- El estudiante produce conjeturas en las cuales acepta la existencia de definiciones equivalentes del mismo concepto, está en capacidad de formular definiciones equivalentes entre las razones seno, coseno y tangente, tal como:
$$\text{tan}(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\text{cos}(A)}.$$
- Comprende definiciones equivalentes de las razones trigonométricas para ángulos en posición normal. Acepta la equivalencia entre las definiciones de las razones trigonométricas para los ángulos A , $A - 90$ y $90 - A$, se basa en criterios de congruencia de triángulos para establecer relaciones de igualdad, utiliza el archivo como una forma de verificar sus deducciones; aunque sus razonamientos son lógicos se sigue apoyando en la manipulación del archivo.

PROCESO DE DEMOSTRACIÓN

NIVEL 1

- En este nivel los estudiantes no realizan demostraciones.

NIVEL 2

- Demuestra en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito; elabora sus demostraciones por medio del análisis informal de los ejemplos que obtiene a partir de la interacción con el software los cuales le permiten hacer generalizaciones sobre la variación de las razones.
- Demuestra en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente, el estudiante basa sus razonamientos en lo que observa en la pantalla limitándose a describir lo que muestra el archivo. Aunque conoce las definiciones no las tiene en cuenta.
- Demuestra en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas:

$$\text{sen}(A) = \cos(90 - A);$$

$$\cos(A) = \text{sen}(90 - A)$$

$$\tan(A) = \cot(90 - A)$$

Sus justificaciones se basan en relaciones observadas en la pantalla, utilizando ejemplos que escoge sin ningún criterio, ejemplos que considera decisivos o ejemplos que pueden ser representantes de una clase.

- Realiza demostraciones empíricas de las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) tales como: $\text{sen}(90 - A) = \cos(A)$, $\tan(A) = \frac{\text{sen}(A)}{\cos(A)}$, $\cos(A) = \text{sen}(90 - A)$, $\cos(A - 90) = \text{sen}(A)$; reconoce

propiedades de las razones trigonométricas deducidas de la observación de ejemplos las cuales generaliza con la experimentación, es decir comprueba sus conjeturas por medio de la experimentación en el software.

- Demuestra que $\text{sen}(A)$ y $\text{cos}(A)$ equivalen a las coordenadas del punto P respectivamente, cuando $r = 1$. Utiliza ejemplos escogidos sin ningún criterio definido, las argumentaciones se basan en operaciones matemáticas que realizan con los valores de las coordenadas y el radio en el ejemplo.
- Demuestra en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) los valores de las razones trigonométricas para ángulos que miden 0° , 90° , 180° , 270° , 360° . Basa sus demostraciones en ejemplos a partir de los cuales observan propiedades, argumentan y estructuran sus conclusiones.
- Justifica en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) la variación de los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante. Sus argumentaciones se basan en lo que observa en la pantalla a medida que arrastra el punto P alrededor de la circunferencia, generaliza los resultados que observa en los ejemplos escogidos.
- Demuestra en forma empírica (Empírica Ingenua, Experimento crucial, Ejemplo Genérico Analítico) las siguientes relaciones:

$$\text{sen}(A) = -\text{sen}(-A)$$

$$\text{cos}(A) = \text{cos}(-A)$$

$$\text{tan}(A) = -\text{tan}(-A)$$

$$\text{sen}(90 - A) = \text{cos}(A)$$

$$\text{cos}(A) = \text{sen}(90 - A)$$

$$\text{cos}(A - 90) = \text{sen}(A)$$

$$\text{tan}(A) = -\text{cot}(A - 90)$$

Sus justificaciones se basan en relaciones observadas en la pantalla, utilizando ejemplos que escoge sin ningún criterio, ejemplos que considera decisivos o

ejemplos que pueden ser representantes de una clase, esto lo lleva a generalizar conclusiones para las razones trigonométricas de los ángulos A , $-A$, $A - 90$ y $90 - A$.

NIVEL 3

- Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito. En sus demostraciones, el estudiante recuerda propiedades conocidas que le permiten usar ejemplos representantes de una clase, dichos ejemplos son utilizados como una forma de apoyar y verificar sus conjeturas sobre la variación de las razones más que como un medio para elaborar la demostración, durante el proceso hace referencia a las definiciones de las razones.
- Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente: comprende las definiciones de las razones y las usa en sus justificaciones, lo cual los lleva a aceptar definiciones equivalentes entre ellas; es decir, razona por medio de deducciones informales que se apoyan en la manipulación del software.
- Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas:

$$\text{sen}(A) = \cos(90 - A);$$

$$\cos(A) = \text{sen}(90 - A)$$

$$\tan(A) = \cot(90 - A)$$

Utiliza reglas lógicas en las que usa las definiciones de las razones trigonométricas de los ángulos A y $90 - A$, que le permiten aceptar la equivalencia de definiciones por medio de deducciones informales.

- Cuando $r = 1$, demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) que $\text{sen}(A)$ y $\text{cos}(A)$ equivalen a las coordenadas del punto P respectivamente. Utiliza la modificación del radio en el archivo para encontrar ejemplos que son utilizados como una forma de apoyar y verificar sus conjeturas sobre la variación de las razones más que como un medio para elaborar la demostración, durante el proceso hace referencia a las definiciones.
- Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) que las razones seno y coseno varían entre -1 y 1, tangente entre menos infinito e infinito. Razona por medio de deducciones informales que se apoyan en la manipulación del software para encontrar los valores de las razones trigonométricas de ángulos cuadrantales; ejemplos encontrados, definiciones de las razones y operaciones matemáticas son utilizadas en sus justificaciones.
- Justifica en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante. Comprende las definiciones de las razones y las usa para justificar los signos de las razones en ejemplos específicos en cada cuadrante; es decir apoya sus deducciones en la experimentación con el software.
- Demuestra en forma empírica (Ejemplo Genérico Intelectual) o en forma deductiva (Experimento Mental) las relaciones:

$$\text{sen}(A) = -\text{sen}(-A)$$

$$\text{cos}(A) = \text{cos}(-A)$$

$$\text{sen}(90 - A) = \text{cos}(A)$$

$$\text{tan}(A) = -\text{tan}(-A)$$

$$\cos(A) = -\sin(A - 90)$$

$$\cos(A - 90) = \cos(90 - A)$$

$$\tan(A) = -\cot(A - 90)$$

Utiliza reglas lógicas en las que usa las definiciones de las razones trigonométricas de los ángulos A , $-A$, $A - 90$ y $90 - A$, que le permiten aceptar la equivalencia de definiciones por medio de deducciones informales.

NIVEL 4

- Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) que las razones trigonométricas seno y coseno varían entre cero y uno; tangente y cotangente entre cero e infinito; secante y cosecante entre uno e infinito: elabora conjeturas sobre la variación de las razones y las demuestra deductivamente dando argumentos basados en definiciones y operaciones matemáticas, no hace uso de ejemplos específicos.
- Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) que seno y cosecante; coseno y secante; tangente y cotangente son recíprocas respectivamente, para elaborar sus demostraciones utiliza argumentos deductivos basados en las definiciones de las razones, operaciones matemáticas o secuencias lógicas producto de la observación y experimentación con el software.
- Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) las propiedades reconocidas de las razones trigonométricas:
 $\sin(A) = \cos(90 - A)$; $\cos(A) = \sin(90 - A)$; $\tan(A) = \cot(90 - A)$;
- Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) que $\tan(A) = \frac{\sin(A)}{\cos(A)}$. Se basa en las definiciones de las razones trigonométricas: tangente y coseno, y las operaciones matemáticas entre los elementos que conforman dichas definiciones, lleva una secuencia lógica que le permite encontrar resultados adecuados.

- Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) que $\text{sen}(A)$ y $\text{cos}(A)$ equivalen a las coordenadas del punto P respectivamente, cuando $r = 1$. Utiliza secuencias lógicas derivadas de la situación inicial planteada con relación a la relación existente entre las coordenadas del punto P y las razones cuando el radio es igual a 1.
- Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) los valores de las razones trigonométricas para ángulos cuadrantales; para elaborar sus demostraciones utiliza argumentos deductivos basados en las definiciones de las razones, operaciones matemáticas o secuencias lógicas.
- Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante, realiza demostraciones analíticas con las definiciones de las razones trigonométricas de los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante.
- Demuestra en forma deductiva (Deductivas Formales) las relaciones:

$$\begin{aligned}\text{sen}(A) &= -\text{sen}(-A) \\ \text{cos}(A) &= \text{cos}(-A) \\ \text{sen}(90 - A) &= \text{cos}(A) \\ \text{sen}(A) &= \text{cos}(90 - A) \\ \text{tan}(A) &= -\text{tan}(-A) \\ \text{cos}(A) &= -\text{sen}(A - 90) \\ \text{cos}(A - 90) &= \text{sen}(A) \\ \text{tan}(A) &= -\text{cot}(A - 90)\end{aligned}$$

En sus demostraciones se basan en las definiciones de las razones trigonométricas de los ángulos A , $-A$, $A - 90$ y $90 - A$ y criterios de congruencia que le permiten formular la conjetura, justificar sus procedimientos y explicar con certeza sus argumentos por medio de una secuencia lógica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Angulo, F. (2009). De la geometría de Euclides a la geometría “a la Euclides”: Procesos demostrativos mediados por Cabri Géomètre. *Memorias del Décimo Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Pasto, Colombia.
- Araya, A., Monge, A. y Morales, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: Niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 7(2), 1-31. Recuperado de: http://revista.inie.ucr.ac.cr/uploads/tx_magazine/compren.pdf
- Bedoya, D., Esteban, P., Salazar, L. (2013). Situaciones que involucran estructuras de tipo aditivo en estudiantes del grado Tercero. *Revista Científica Edición Especial octubre de 2013*, (18), 296-300. Recuperado de: <http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/4760/6464>
- Brown, S. (2006). The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine. *Proceeding of the 30th PME International Conference*, 1, 1-228.
- Burger, W. y Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48
- Camargo, L, Leguizamón, C., Samper, C. (2002). La construcción de conceptos: Una actividad importante para Desarrollar razonamiento en geometría. *Revista Ema*, 7(3), 293-309. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1538/1/90_Samper2002La_RevEMA.pdf
- Carmona, J. (2011). *La Circunferencia. Una propuesta didáctica usando Modelo de Van Hiele y Geometría Dinámica*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C.
- Ceballos, L. y López, A. (2003). Relaciones y funciones: conceptos clave para el aprendizaje del cálculo, y una propuesta para la aplicación del modelo de

- van Hiele. *Educación y Pedagogía*, volumen XV (35), 131-140. Recuperado de: <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/revistaeyp/article/view/5948/5358>
- Corberán, R., Gutiérrez, Á., Huerta, M., Jaime, J., Peñas, A. y otros (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. España: Ministerio de Educación y ciencia.
- Crowley, M. (1987) The Van Hiele model of the development of geometric thought, en N.C.T.M. (Ed.), *Learning and teaching geometry, K-12 (1987 Yearbook)* (pp. 1-16). N.C.T.M.: Reston, USA.
- De la Torre, A. (2000). La Modelización del espacio y del tiempo. *Divulgaciones Matemáticas, Volumen 8*, 57-68. Recuperado de: <http://www.emis.de/journals/DM/v81/art7.pdf>
- De Villiers, M. (1998). El futuro de la Geometría en la escuela secundaria. (Trad. de Víctor Larios Osorio). Recuperado de: http://www.fing.edu.uy/imerl/didactica_matematica/Documentos_2008/futuro%20de%20la%20geometria%20deVilliers.pdf
- Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Processes. En D. Tall. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-40). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.
- Esteban, M., Ibañez, M., Ortega, T. (1998). *Trigonometría*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Tesis de Doctorado. Universidad de Valencia, España.
- Fiallo, J. (1996). *El modelo de Van Hiele en la enseñanza de los deslizamientos en el plano de la geometría de sexto grado*. Tesis de Maestría. Universidad Industrial de Santander, Colombia.

- Freudenthal, H. (2001). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (L. Puig, Trans.), E. Sánchez (Ed.), *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. (Textos seleccionados) (2ª edición)*. México D.F.: Departamento de Matemática Educativa.
- Goldin, G. (1983). *Performance Difficulties Reported by first year Public school Science and Mathematics Teachers in Illinois*. Reporte de investigación sin publicar, Northern Illinois Univ., De Kalb.
- Gualdrón, E. (2011). *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas*. Tesis de doctorado. Universidad de Valencia, España.
- Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. Tesis de doctorado. Universidad de Valencia, España.
- Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: Describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática* 16(3), 103-125.
- Gutiérrez, A. (2007a). Procesos matemáticos en la enseñanza/aprendizaje de la geometría. Conferencia llevada a cabo en el XVI Congreso Nacional de Matemáticas, Medellín, Colombia.
- Gutiérrez, A. (2007b) El papel de la geometría dinámica (G.D.) en el proceso de la enseñanza/aprendizaje. Recuperado de <http://www.authorstream.com/Presentation/Elliott-15610-Intergeo-07-El-papel-de-la-geometria-dinamica-GD-en-proceso-enseanza-aprendizaje-presentazione-estetismo-Entertainment-ppt-powerpoint/>
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M. Sánchez (Eds.). *Teoría y práctica en educación matemática*. (pp. 295-384) Sevilla, España.

- Jaime, A y Gutiérrez, A. (1996). Uso de Definiciones e Imágenes de Conceptos Geométricos por los Estudiantes de Magisterio. En Giménez, J; Llinares, S.; Sánchez, M.V. (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (colección "Mathema" n° 8) Granada: Ed. Comares.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. y Strässer, R. (2006). Teaching and learning Geometry with Technology. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 275-304). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.
- Mariotti, M. (2006). Proof and Proving in Mathematics Educations. En A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.
- Markel, W. (1982). Trigonometry Forgotten and abused. *School Science and Mathematics*, 82, 548-551.
- Martínez, G. (2012). Concepciones y Matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 15(1), 35-62.
- Ministerio de Educación Nacional MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales*. Colombia: M.E.N.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN), (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas ciencias y ciudadanía*. Colombia: M.E.N.
- Montiel, G. (2005) *Estudio socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de doctorado. CICATA del IPN, México.

- Noss, R. y Hoyles, C. (1993). Deconstructing Microworlds. En D. Ferguson (Ed), *Advanced Educational Technologies for Mathematics and Science* (pp. 415-438) NATO ASI series.
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.
- Tall, D. (2002). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-40). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.
- Van Hiele, P.M. (1957). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)*. Tesis doctoral. Universidad de Utrecht, Utrecht (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991).
- Vinner, S. (2002). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-40). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.

ANEXO A: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRIÁNGULOS
RECTÁNGULOS

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012 VERSIÓN: 03

ASIGNATURA		GRADO		NUMERO	
M	T	1	0	0	2

Nombre del Docente: _____ Área: _____ Fecha _____

Nombre del Estudiante _____ Grado _____

Actividad 1

1.1. En un triángulo rectángulo las medidas de sus catetos son iguales a 8cm y 10cm.

- ¿Cuál es la medida de la hipotenusa? JUSTIFICA TU RESPUESTA.
- ¿Cuáles son las medidas de sus ángulos? JUSTIFICA TU RESPUESTA.
- ¿Existen otros triángulos rectángulos con medidas de sus catetos 8cm y 10cm y medida de ángulos diferentes? JUSTIFICA TU RESPUESTA

1.2. En un triángulo rectángulo un cateto mide 6cm y el ángulo adyacente a este cateto mide 32° .

- ¿Cuál es la medida del otro cateto y de la hipotenusa? JUSTIFICA TU RESPUESTA.
- ¿Cuáles son las medidas de sus ángulos? JUSTIFICA TU RESPUESTA.
- ¿Existen otros triángulos rectángulos con medida del ángulo igual a 32° y medida de sus catetos e hipotenusa diferentes? JUSTIFICA TU RESPUESTA.

1.3. En un triángulo rectángulo la medida de la hipotenusa es el doble de la medida de uno de sus catetos.

- ¿Cuáles son las medidas de sus catetos e hipotenusa? JUSTIFICA TU RESPUESTA.
- ¿Cuáles son las medidas de sus ángulos? JUSTIFICA TU RESPUESTA.
- ¿Existen otros triángulos rectángulos con diferentes medidas de su hipotenusa y sus catetos y medidas de ángulos iguales que cumplan la condición? JUSTIFICA TU RESPUESTA.
- ¿Existen otros triángulos rectángulos con diferentes medidas de su hipotenusa y sus catetos y medidas de ángulos diferentes que cumplan la condición? JUSTIFICA TU RESPUESTA.
- ¿Qué tienen en común todos los triángulos que cumplen la condición? JUSTIFICA TU RESPUESTA.

1.4. Discute con tus compañeros y docente las soluciones de los anteriores problemas y escribe una conclusión al respecto.

Actividad 2

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012
		VERSIÓN: 03

2.1 *Explorando:*

Abre el archivo ACT 1, elabora una descripción de lo que observas en este archivo y halla las razones entre los lados del triángulo ABC . Nombra cada razón con su respectivo cociente entre los lados del triángulo, por ejemplo BC/AB .

2.2 *Conjeturando:*

¿Qué sucede con los valores de las razones cuando varía el ángulo entre 0° y 90° ? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.3 *Demostrando:*

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 2.2

2.4 *Conjeturando:*

¿Qué valores toma cada una de las razones a medida que varía el ángulo A entre 0° y 90° ? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.5 *Demostrando:*

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 2.4

2.6 *Conjeturando:*

¿Qué relaciones existen entre las razones cuando el ángulo A varía entre 0° y 90° ? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.7 *Demostrando:*

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 2.6

Actividad 3

3.1 *Discutiendo y comunicando*

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones de la actividad anterior.

Actividad 4

4.1 *Midiendo y calculando:*

Abre el archivo ACT.1 y mide el ángulo B .
 Calcula las razones trigonométricas del ángulo B
 Nombra cada razón con su respectivo nombre ($\text{sen } B$, $\text{cos } B$, $\text{tan } B$)

4.2 *Conjeturando:*

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012
		VERSIÓN: 03

¿Qué relación existe entre la medida de los ángulos A y B? Expresa B en términos de A.

4.3 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 4.2

4.4 Conjeturando:

¿Qué relaciones existen entre las razones trigonométricas halladas para el ángulo A y el ángulo B? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

4.5 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 4.4

4.6 Conjeturando y demostrando:

¿Es verdad que $\sin(A) = \cos(90 - A)$?; si tu afirmación es verdadera demuéstrela, en caso contrario da un contraejemplo (un ejemplo donde se vea que la afirmación sea falsa).

4.7 Conjeturando y demostrando:

¿Es verdad que $\cos(A) = \sin(90 - A)$?; si tu afirmación es verdadera demuéstrela, en caso contrario da un contraejemplo (un ejemplo donde se vea que la afirmación sea falsa).

Actividad 5

5.1 Discutiendo y comunicando

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones de la actividad 4.

Actividad 6

6.1 Conjeturando:

¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas $\tan(A)$, $\sin(A)$ y $\cos(A)$?

Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

6.2 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 6.1

6.3 ¿Qué significa que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$? JUSTIFICA TU RESPUESTA

6.4 ¿Es posible que el coseno de un ángulo sea $\frac{3}{2}$? JUSTIFICA TU RESPUESTA

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012
		VERSIÓN: 03

6.5 ¿Se puede construir un triángulo rectángulo con un ángulo de 40° y que su hipotenusa sea el doble de uno de sus catetos? JUSTIFICA TU RESPUESTA

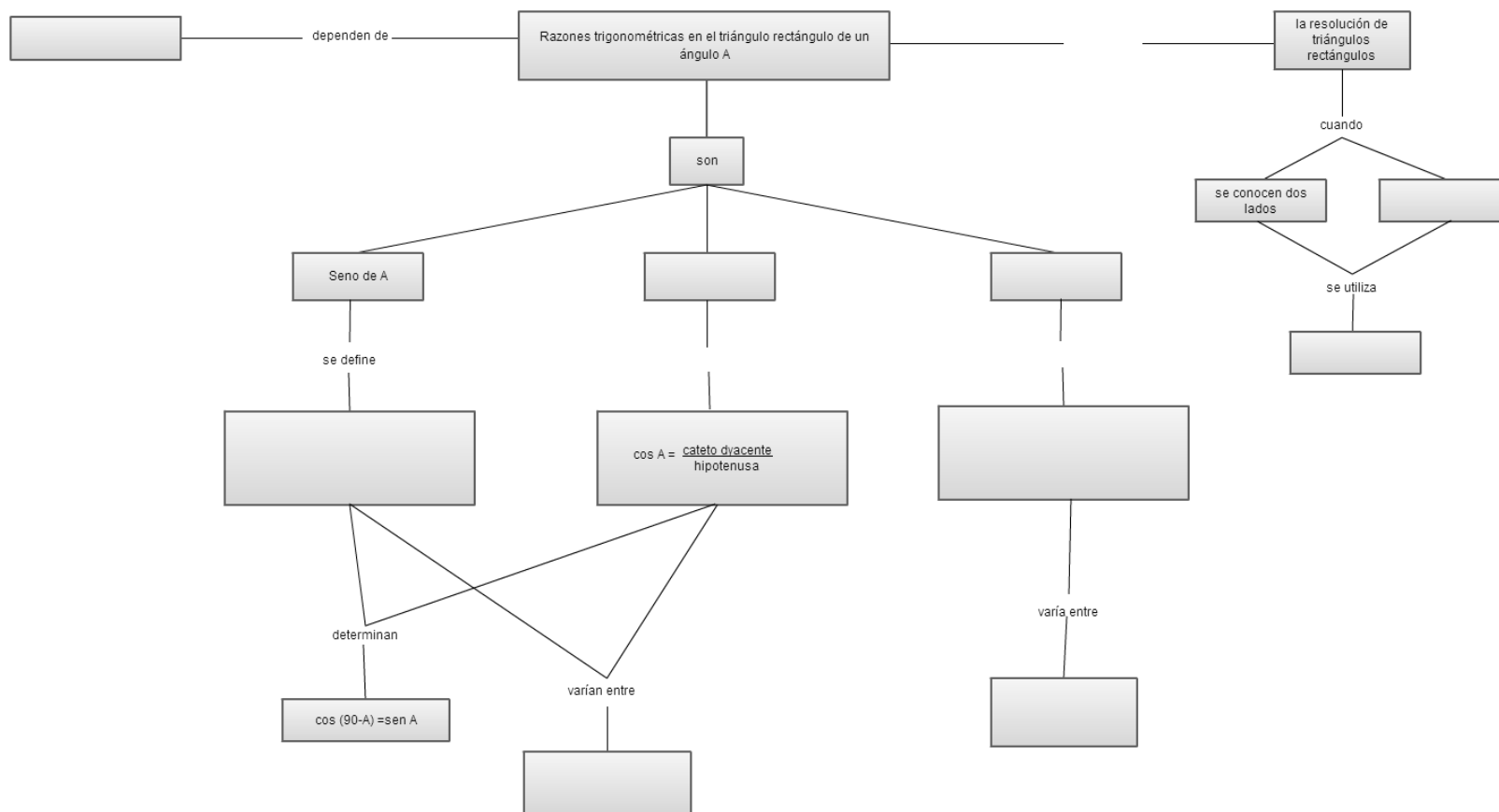
Actividad 7

Completa el mapa conceptual, en donde relaciones todas las definiciones, características y propiedades encontradas en las razones trigonométricas de tal manera que tus compañeros entiendan a través de él todo lo que has aprendido.

Actividades tomadas de:

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonómicas en un ambiente de Geometría Dinámica*. (Tesis de Doctorado) Universidad de Valencia, España

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO		CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION		FECHA: Agosto 13 de 2012 VERSIÓN: 03



ANEXO B: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS EN
POSICIÓN NORMAL

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012
		VERSIÓN: 03

ASIGNATURA		GRADO		NUMERO	
M	T	1	0	0	2

Nombre del docente _____ Área _____ Fecha _____

Nombre del Estudiante _____ Grado _____

Actividad 1

1.5. Conjeturando y demostrando

¿Es verdad que $\sin(A) = \cos(A - 90)$ para todo ángulo entre 0° y 360° ? si tu afirmación es verdadera demuéstrela, en caso contrario da un contraejemplo (un ejemplo donde se vea que la afirmación sea falsa).

1.6. Conjeturando y demostrando

¿Es verdad que $\cos(A) = \sin(A - 90)$ para todo ángulo entre 0° y 360° ? si tu afirmación es verdadera demuéstrela, en caso contrario da un contraejemplo (un ejemplo donde se vea que la afirmación sea falsa).

Actividad 2

2.1. Aprendiendo

Abre el archivo ACT 2.1, mueve el punto P alrededor de la circunferencia y ten en cuenta la siguiente información:

Observa que el ángulo A está determinado por el eje positivo de las x, que llamaremos lado inicial del ángulo, y la semirrecta AP, que llamaremos lado final del ángulo. A estos ángulos los llamaremos **ángulos en posición normal**. Por convenio, si la semirrecta que determina el lado final del ángulo A gira desde el lado inicial en sentido contrario a las manecillas del reloj, decimos que el ángulo es positivo y si gira desde el lado inicial en sentido de las manecillas del reloj, decimos que es negativo.

Si A es un ángulo en posición normal, $P(x, y)$ es cualquier punto sobre su lado final, diferente de (0, 0), y $r = AP = \sqrt{x^2 + y^2}$, **define las razones trigonométricas para el ángulo A.**

2.2. Explorando:

¿Qué elementos geométricos encuentras en la construcción? **Descríbelos.**

¿Qué relaciones encuentras entre estos elementos geométricos? **Justifica tus respuestas.**

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012
		VERSIÓN: 03

Actividad 3

3.1 Conjeturando:

¿Qué sucede con el valor de las razones trigonométricas **seno**, **coseno** y **tangente** a medida que varía el ángulo **A**? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.2 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 3.1

3.3 Conjeturando y demostrando:

Analiza los signos de las tres razones trigonométricas en cada uno de los cuatro cuadrantes del plano cartesiano. Plantea una conjetura al respecto y explica por qué es verdadera.

3.4 Conjeturando:

¿Qué **sucede** con los valores de las tres razones trigonométricas a medida que varía el radio **r** ? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.5 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 3.4

3.6 Conjeturando:

¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas **sen (A)** y **cos (A)** con las coordenadas del punto P cuando el **radio** de la circunferencia es 1? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.7 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 3.6

3.8 Conjeturando:

¿Qué valores toma cada una de las razones trigonométricas a medida que varía el ángulo **A**? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

3.9 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 3.8

3.10 Conjeturando y demostrando:

¿Qué ocurre cuando el ángulo **A** es igual a 0° , 90° , 180° , 270° y 360° ? Explica lo que ocurre justificando con argumentos matemáticos.

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012
		VERSIÓN: 03

Actividad 4

4.1 Discutiendo y comunicando

Discute lo encontrado en la actividad 3 con tus compañeros de clase y el profesor.

Actividad 5

5.1 Conjeturando

¿Qué relación existe entre $\sin(A)$ y $\sin(-A)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

5.2 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 5.1

5.3 Conjeturando

¿Qué relación existe entre $\cos(A)$ y $\cos(-A)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

5.4 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 5.3

5.5 Conjeturando

¿Qué relación existe entre $\tan(A)$ y $\tan(-A)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

5.6 Demostrando:

Explica por **qué** es verdadera tu conjetura planteada en 5.5

Actividad 6

Abre el archivo ACT.2.2

6.1 Explorando, Conjeturando y demostrando

Busca relaciones entre los valores de las razones trigonométricas para los ángulos A , $A-90^\circ$, $90^\circ-A$. **Demuéstralas** utilizando propiedades matemáticas.

6.2 Conjeturando

¿Qué relación existe entre $\cos(A)$ y $\sin(A-90^\circ)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

6.3 Demostrando:

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012
		VERSIÓN: 03

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 6.2

6.4 Conjeturando

¿Qué relación existe entre $\sin(A)$ y $\cos(90^\circ - A)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. **Describe** todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

6.5 Demostrando:

Explica por qué es **verdadera** tu conjetura planteada en 6.4

6.6 Conjeturando

¿Qué relación existe entre $\sin(90^\circ - A)$ y $\sin(A - 90^\circ)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

6.7 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 6.6

Actividad 7

7.1 Discute lo encontrado en las actividades 5 y 6 con tus compañeros de clase y el profesor.

Actividad 8

8.1 ¿Las propiedades encontradas en la actividad 1 para las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo se cumplen para los ángulos en posición normal. ¿Por qué?

8.2 Conjeturando

¿Qué relación existe entre $\cos(90^\circ - A)$ y $\cos(A - 90^\circ)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

8.3 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 8.2

8.4 Encuentra los valores de las otras razones trigonométricas si se sabe que $\cos A = \frac{-4}{5}$ y $\tan(A)$ es positiva. ¿Cuál es el valor del ángulo A? **Justifica tus respuestas.**

8.5 Encuentra el valor de las razones coseno y tangente si se sabe que $\sin A = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. ¿Cuál es el valor del ángulo A? **Justifica tus respuestas.**

8.6 Si $P(x, y)$ es un punto del plano cartesiano en donde $x > 0$, $y < 0$. ¿Cuáles son los posibles valores que toman A y $\tan(A)$. **Justifica tus respuestas.**

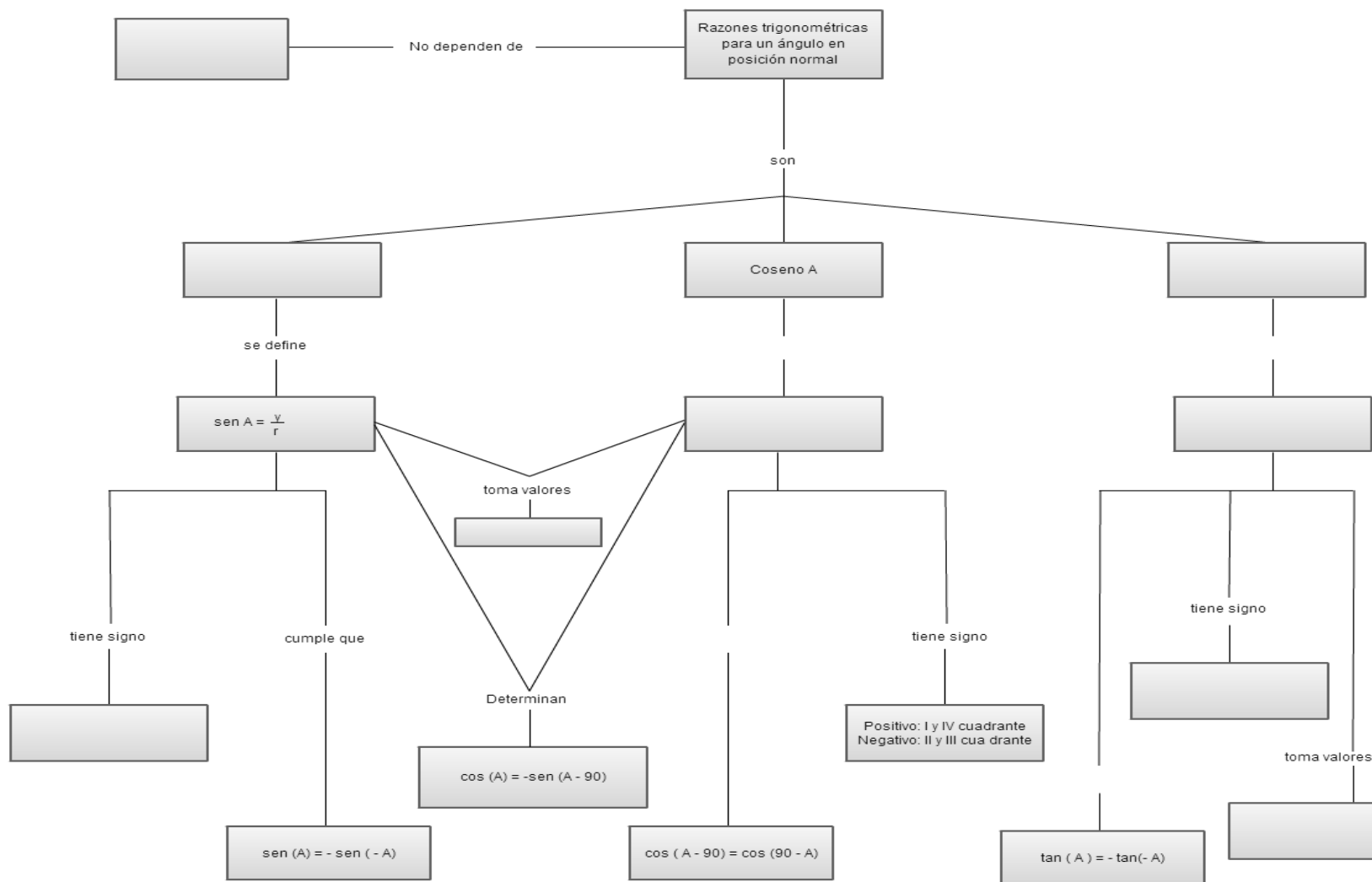
Actividad 9

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012
		VERSIÓN: 03

Completa el mapa conceptual, en donde relaciones todas las definiciones, características y propiedades encontradas en las razones trigonométricas de tal manera que tus compañeros entiendan a través de él todo lo que has aprendido.

Actividades tomadas de:

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonómicas en un ambiente de Geometría Dinámica*. (Tesis de Doctorado) Universidad de Valencia, España



ANEXO C: REPRESENTACIÓN LINEAL Y VISUALIZACIÓN DE LAS
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012 VERSIÓN: 03

ASIGNATURA	GRADO	NUMERO
M	T	1 0 0 3

Nombre del Docente _____ Área _____ Fecha _____

Nombre del Estudiante _____ Grado _____

Actividad 1

1.1. Sin usar la calculadora, halla las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo de 150° , 225° y 300° . **Justifica tus respuestas.**

1.2. Conjeturando

¿Qué relación existe entre $\cos(A)$ y $\cos(180^\circ - A)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

1.3 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 3.2

1.4 Conjeturando

¿Qué relación existe entre $\sin(A)$ y $\sin(180^\circ + A)$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

1.5 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 1.4

Actividad 2

2.1 Explorando y aprendiendo

Abre el archivo ACT 3.1, mueve suavemente el punto B sobre la circunferencia hasta completar una vuelta, observa con atención los vectores que están representando las razones trigonométricas y ten en cuenta lo siguiente

Cada razón está representada por un vector en donde: la longitud del vector representa el valor absoluto del producto del radio de la circunferencia por la razón representada; el *sentido del vector* determina el valor positivo o negativo de la razón. Consideramos que la razón es: **positiva** cuando el vector representante apunta *hacia la derecha, hacia arriba o hacia fuera del punto O* (origen del sistema coordenado) y **negativa** cuando apunta *hacia la izquierda, hacia abajo o hacia el punto O*
Por convenio, llamamos "*lados trigonométricos*" del ángulo θ a los siguientes vectores:

Lado seno : El vector AB (azul), *lado seno* = $r \sin\theta$

Lado coseno : El vector OA (rojo), *lado coseno* = $r \cos\theta$

Lado tangente : El vector CD, o D'C' (verde oscuro), *lado tangente* = $r \tan\theta$

Lado cotangente : El vector EF, O E'F' (verde claro), *lado cotangente* = $r \cot\theta$

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012 VERSIÓN: 03

Lado secante : El vector OD o $D'O$ (rosado), *lado secante* = $r \sec \theta$

Lado cosecante : El vector OF o $F'O$ (celeste), *lado cosecante* = $r \csc \theta$

Nota: Los lados trigonométricos no solo están definidos para ángulos en posición normal sino para cualquier ángulo que o esté necesariamente en posición normal, pero teniendo en cuenta la definición que involucra la relación con la circunferencia de radio r . (figura 1)

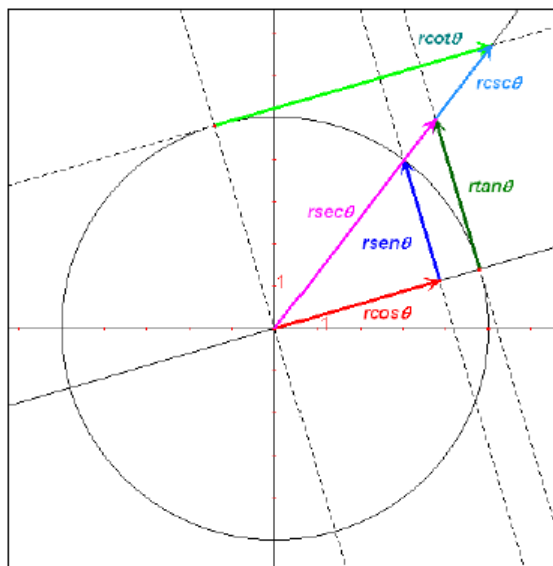


Figura 69: Lados trigonométricos para un ángulo en cualquier posición

2.2 Explorando, analizando y aprendiendo:

Mueve suavemente el punto B sobre la circunferencia hasta completar una vuelta, observa, analiza y memoriza lo escrito en el recuadro anterior

2.3 Explorando, analizando y relacionando:

Busca objetos en el diagrama dinámico, descríbelos y analiza las relaciones entre ellos.

Actividad 3

3.1 Demostrando

Para visualizar la demostración y los vectores mencionados a continuación ten en cuenta el archivo ACT. 3.1 de Geogebra.

Vamos a demostrar con propiedades matemáticas que el lado tangente de θ (segmento CD o $C'D'$) está relacionado con la razón tangente de θ : $CD = r \cdot \tan \theta$, si $0^\circ < \theta < 90^\circ$, o, $270^\circ < \theta < 360^\circ$, y $C'D' = r \cdot \tan \theta$, si $90^\circ < \theta < 270^\circ$.

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012
		VERSIÓN: 03

Veamos el caso del segmento CD ($0^\circ < \theta < 90^\circ$, o, $270^\circ < \theta < 360^\circ$):

Sabemos que $\tan \theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} = \frac{CD}{OC}$

El segmento OC = r, por lo tanto, $\tan \theta = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{r}$, entonces $\tan \theta = \frac{CD}{r}$, por lo tanto, $CD = r \tan \theta$

De manera análoga, para el segmento C'D' ($90^\circ < \theta < 270^\circ$):

$\tan \theta = \frac{C'D'}{OC'}$, el segmento OC' = r, por lo tanto, $\tan \theta = \frac{C'D'}{OC'} = \frac{C'D'}{r}$, entonces, $\tan \theta = \frac{C'D'}{r}$, por lo tanto, $C'D' = r \tan \theta$

3.2 Demostrando:

Demuestra que el segmento AB (si $0^\circ < \theta < 360^\circ$) está relacionado con el seno de θ .

3.3 Demostrando:

Demuestra que el segmento OA (si $0^\circ < \theta < 360^\circ$) está relacionado con el coseno de θ .

Actividad 4

4.1 Explorando, analizando y conjeturando:

Abre el archivo ACT 3.2 y analiza las relaciones entre los ángulos θ y α en cada cuadrante (toma como referencia los ángulos 0° , 90° , 180° y 360°)

- ¿Cuál es el máximo valor de θ ? ¿de α ?
- ¿Qué relación existe entre un ángulo θ que esté en el primer cuadrante y el ángulo α ? Explica tu respuesta.
- ¿Qué relación existe entre un ángulo θ que esté en el segundo cuadrante y el ángulo α ? Explica tu respuesta.
- ¿Qué relación existe entre un ángulo θ que esté en el tercer cuadrante y el ángulo α ? Explica tu respuesta.
- ¿Qué relación existe entre un ángulo θ que esté en el cuarto cuadrante y el ángulo α ? Explica tu respuesta.
- ¿Qué ocurre cuando θ es mayor de 360° ? Explica tu respuesta.

4.2 Analizando y aprendiendo

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012 VERSIÓN: 03

Si has analizado, cada ángulo en posición normal (θ) tiene como referencia un ángulo (α), que se forma con respecto al eje x, y que nos sirve para hallar el valor de las razones del ángulo θ en función de ese ángulo α , difiriendo, en algunos casos, solamente en su signo, estos ángulos se llaman, **ángulos de referencia**.

4.3 Aprendiendo y explicando

Observa que el ángulo de referencia de 120° es 60° ,
 $\text{sen}(120^\circ) = \text{sen}(60^\circ)$ y $\text{cos}(120^\circ) = -\text{cos}(60^\circ)$, $\text{tan}(120^\circ) = -\text{tan}(60^\circ)$. **¿Por qué?**

4.4 Aprendiendo y explicando

Observa que el ángulo de referencia de 210° es 30° ,
 $\text{sen}(210^\circ) = -\text{sen}(30^\circ)$ y $\text{cos}(210^\circ) = -\text{cos}(30^\circ)$, $\text{tan}(210^\circ) = \text{tan}(30^\circ)$. **¿Por qué?**

Actividad 5

5.1 Discutiendo y comunicando

Discute con tus compañeros de clase y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones de las actividad 4.

Actividad 6

6.1 Conjeturando:

¿Qué relación existe entre $\text{sen}(180 - \alpha)$ y $\text{sen } \alpha$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

6.2 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 6.1

6.3 Conjeturando:

¿Qué relación existe entre $\text{tan}(180 - \alpha)$ y $\text{tan } \alpha$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

6.4 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 6.3

6.5 Conjeturando:

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012
		VERSIÓN: 03

¿Qué relación existe entre $\sin(180 + \alpha)$ y $\sin \alpha$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

6.6 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 6.5

6.7 Conjeturando:

¿Qué relación existe entre $\cos(180 + \alpha)$ y $\cos \alpha$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

6.8 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 6.7

6.9 Conjeturando:

¿Qué relación existe entre $\tan(360 - \alpha)$ y $\tan \alpha$? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

6.10 Demostrando:

Explica por qué es verdadera tu conjetura planteada en 6.9

Actividad 7

7.1 Discutiendo y comunicando

Discute con tus compañeros de clase y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones de las actividades 4.7.

Actividad 8

8.1 Demostrando:

¿Es verdad que $\cos 180 - \alpha = \cos \alpha$? Si la igualdad es cierta demuéstrela, si es falsa refútala y encuentra una verdadera y demuéstrela.

8.2 Demostrando:

¿Es verdad que $\sin 180 + \alpha = \sin \alpha$? Si la igualdad es cierta demuéstrela, si es falsa refútala y encuentra una verdadera y demuéstrela.

8.3 Demostrando:

Intenta demostrar de forma diferente las conjeturas 8.1 y 8.2

8.4 ¿Puede ocurrir que existan dos o más ángulos cuyo coseno sea igual? Explica tu respuesta.

8.5 ¿Puede ocurrir que el seno y el coseno de un ángulo coincidan? Explica tu respuesta.

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012
		VERSIÓN: 03

8.6 ¿Si conocemos el coseno de un ángulo queda determinado dicho ángulo? Explica tu respuesta

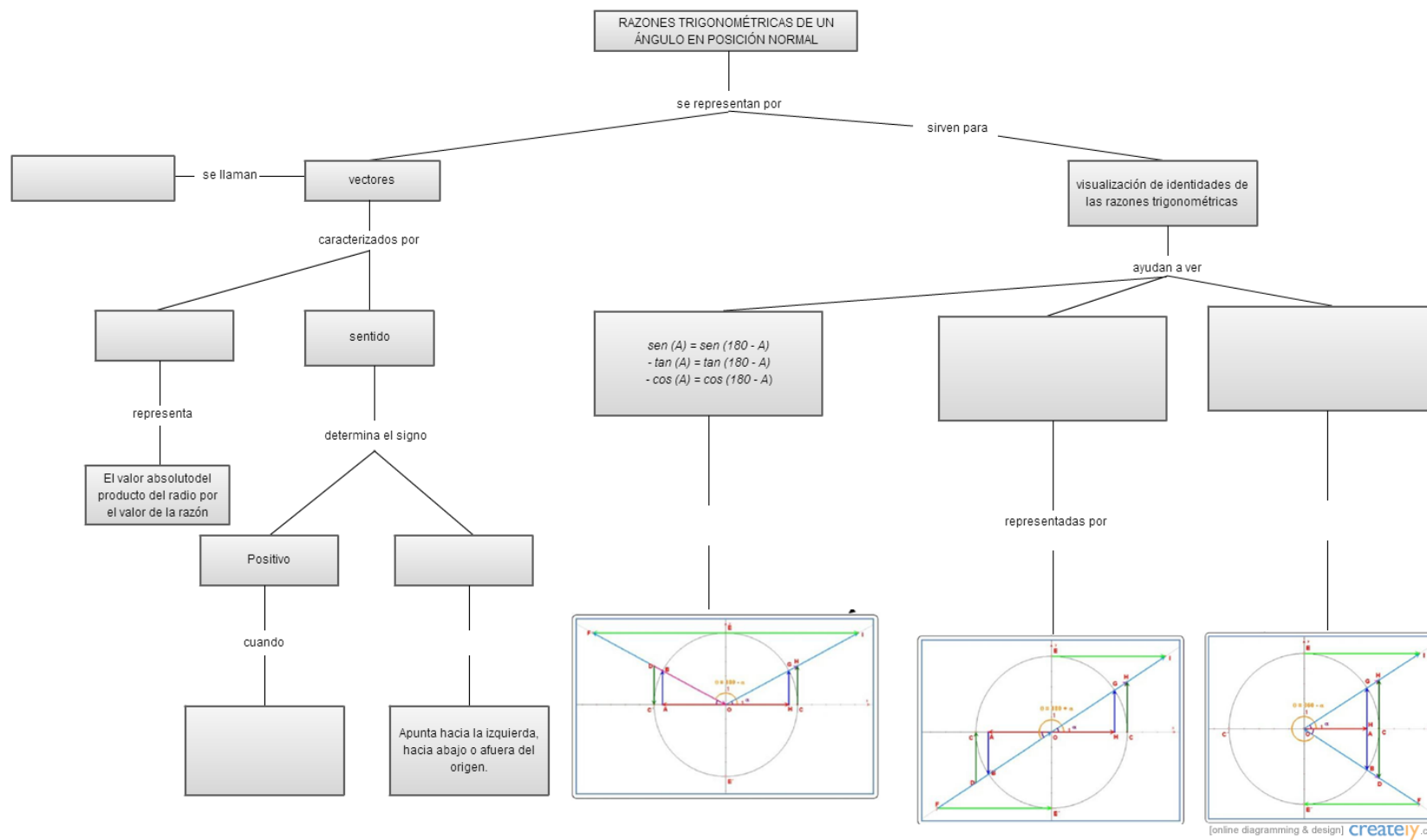
Actividad 9

Completa el mapa conceptual, en donde relaciones todas las definiciones, características y propiedades encontradas en las razones trigonométricas de tal manera que tus compañeros entiendan a través de él todo lo que has aprendido.

VoBo Coordinación

Actividades tomadas de:

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonómicas en un ambiente de Geometría Dinámica*. (Tesis de Doctorado) Universidad de Valencia, España.



ANEXO D: IDENTIDADES PITAGÓRICAS

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012 VERSIÓN: 03

ASIGNATUR		GRADO		NUMERO	
A					
M	T	1	0	0	4

Nombre del Docente: _____ Área: _____ Fecha _____
Nombre del Estudiante _____ Grado _____

Actividad 1

1.1 Halla coseno del ángulo θ si se sabe que: $\text{sen } \theta = \frac{8.996}{10.727}$.

1.2 Expresa la razón trigonométrica coseno en función de la razón trigonométrica seno.

Actividad 2

2.1 Explorando, analizando y conjeturando.

Abre el archivo de Cabri ACT.4.2, explora la construcción y analiza las relaciones de los elementos del diagrama dinámico.

¿Qué relación existe entre el radio de la circunferencia y las razones trigonométricas seno y coseno? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

2.2 Demostrando

Demuestra tu conjetura planteada en 4.2.1.

Actividad 3

3.1 Discutiendo y comunicando

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones de la actividad 4.2.

Actividad 4

4.1 Conjeturando

¿Qué relación existe entre el radio de la circunferencia y las razones trigonométricas tangente y secante? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

4.2 Demostrando

Demuestra tu conjetura planteada en 4.4.1.

4.3 Conjeturando

¿Qué relación existe entre el radio de la circunferencia y las razones trigonométricas cotangente y cosecante? Escribe en tu hoja de trabajo una conjetura de lo encontrado. Describe todo lo que pensaste e hiciste para el planteamiento de tu conjetura.

	INSTITUCION EDUCATIVA LUIS CARLOS GALAN SARMIENTO	CODIGO : PAC-FO-20
	INSTRUMENTO DE MEDIACION	FECHA: Agosto 13 de 2012
		VERSIÓN: 03

4.4 Demostrando

Demuestra tu conjetura planteada en 4.4.3.

4.5 ¿Existen otras formas de demostrar las conjeturas planteadas en 4.4.1 y 4.4.3? **Explica tu respuesta.**

Actividad 5

- 5.1 Sin hallar el valor del ángulo θ halla $\sen \theta$ si se sabe que: $\cos \theta = 0.6427$.
- 5.2 Expresa la razón trigonométrica seno en función de la razón trigonométrica coseno. **Explica tu respuesta.**
- 5.3 Expresa la razón trigonométrica tangente en función de la razón trigonométrica secante. **Explica tu respuesta.**
- 5.4 Expresa la razón trigonométrica coseno en función de la razón trigonométrica tangente. **Explica tu respuesta.**

Actividad 6

- 6.1 Realiza un mapa conceptual, en donde relaciones todas las definiciones, características y propiedades encontradas en la actividad 4 de tal manera que tus compañeros entiendan a través de él todo lo que has aprendido.

Actividad 7

7.1 Discutiendo y comunicando

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y demostraciones y mapas conceptuales de las actividades 4 a 6.