

Un problema de control óptimo asociado al modelo  
de Rayleigh-Bénard-Marangoni

Diego Armando Rueda Gómez

Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Matemáticas  
Maestría en Matemáticas  
Bucaramanga  
2014

Un problema de control óptimo asociado al modelo  
de Rayleigh-Bénard-Marangoni

Autor

Diego Armando Rueda Gómez

Trabajo de grado como requisito parcial para optar el título de

*Magister en Matemáticas*

Director

Élder Jesús Villamizar Roa, Ph.D.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Matemáticas

Bucaramanga

2014

# Agradecimientos

- ◇ Agradezco a Dios por conducir mi vida y por permitirme alcanzar este gran logro que representa para mí.
- ◇ Agradezco a mis padres: Jesús Rueda y Sandra Gómez, por ser el soporte y la guía de mi vida, y por ser un apoyo incondicional en cada una de las experiencias vividas hasta hoy.
- ◇ Agradezco al profesor Élder por toda su colaboración e interés en mi proyecto, por todas sus recomendaciones y por su dedicación y empeño.
- ◇ Agradezco a todos mis compañeros de maestría por todos los momentos compartidos durante esta etapa.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>10</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>14</b>
1.1. Espacios de Funciones . . . . .	14
1.2. Definiciones y resultados de Análisis Funcional . . . . .	17
1.3. Problema abstracto de control de flujo . . . . .	25
<b>2. El modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni</b>	<b>28</b>
2.1. Modelo Estacionario de Rayleigh-Bénard-Marangoni . . . . .	28
2.2. Formulación débil del modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni . . . . .	36
2.3. Existencia de solución débil al modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni linealizado . . . . .	40
2.4. Existencia de solución débil al modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni . . . . .	46
2.5. Unicidad de la solución débil . . . . .	57
2.6. Problema de Regularidad . . . . .	60
<b>3. Problema de control de borde para el modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni</b>	<b>70</b>
3.1. Formulación del problema de control . . . . .	70
3.2. Existencia de solución óptima . . . . .	75
3.3. Problema de control de parámetros . . . . .	78
<b>4. Condiciones necesarias de optimalidad</b>	<b>83</b>
4.1. Existencia de multiplicadores de Lagrange . . . . .	83
4.2. Sistema de optimalidad . . . . .	100
4.3. Positividad del multiplicador de Lagrange $\lambda_0$ . . . . .	107
<b>Conclusiones</b>	<b>109</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>110</b>

# Índice de figuras

2.1. Celdas de Bénard en cera de ballena derretida. Tomado de Koschmieder [26]. . . . .	30
2.2. Dominio $\Omega$ . . . . .	31
2.3. Dominio $\Omega$ con nuevas dimensiones. . . . .	33
2.4. Identificación de la frontera del dominio $\Omega$ . . . . .	33
2.5. Representación de $\partial\Omega$ . . . . .	60
2.6. División de $\Gamma_2$ . . . . .	65
2.7. División de $\partial\Gamma_2^1$ . . . . .	66
2.8. División de $\partial\Gamma_2^2$ . . . . .	68

**TÍTULO:** UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO ASOCIADO AL MODELO DE RAYLEIGH-BÉNARD-MARANGONI<sup>1</sup>

**AUTOR:** Diego Armando Rueda Gómez<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVE:** Ecuaciones en Derivadas Parciales; Modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni; Problema de control de frontera; Solución óptima; Sistema de optimalidad.

## DESCRIPCIÓN

Los problemas de control óptimo en mecánica de fluidos han formado una importante área de investigación tecnológica y científica debido al alto desempeño de sistemas envolviendo flujo de fluidos en procesos de combustión, interacción de fluido-estructura, diseño de reactores, y un gran número de procesos industriales. En particular, debido a los grandes avances de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, se han sentado las bases de la teoría de control óptimo asociado a las ecuaciones de tipo Navier-Stokes. En este trabajo realizamos un estudio de un problema de control óptimo asociado a ecuaciones de estado dadas por el modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni.

El presente trabajo lo hemos organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo, realizamos una revisión de algunos conceptos y resultados relevantes que serán utilizados en el desarrollo del trabajo, incluyendo una breve descripción de un problema abstracto de control de flujo.

En el segundo capítulo, primero presentamos una breve descripción del modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni; luego, deducimos una formulación débil del problema; posteriormente probamos un teorema de unicidad de la solución débil; y Finalmente, probamos un resultado de regularidad para la temperatura. Esta parte constituye el primer aporte original del trabajo.

En el tercer capítulo, primero planteamos el problema de control óptimo que deseamos abordar, y luego probamos la existencia de una solución óptima para el problema de control planteado. Adicionalmente abordamos un problema de control de parámetros del modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni. Este capítulo constituye el segundo aporte del trabajo.

En el cuarto capítulo, probamos la existencia de multiplicadores de Lagrange para el problema de control óptimo, y partiendo de allí se derivan las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden. Finalmente, se obtienen sistemas de optimalidad, débil y fuerte, asociados al problema de control. Este capítulo constituye el tercer aporte del trabajo.

---

<sup>1</sup>Proyecto de Grado

<sup>2</sup>FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE MATEMÁTICAS.  
DIRECTOR Ph. D. Élder Jesús Villamizar Roa

**TITLE:** A BOUNDARY CONTROL PROBLEM ASSOCIATED TO THE RAYLEIGH-BÉNARD-MARANGONI SYSTEM<sup>1</sup>

**AUTHOR:** Diego Armando Rueda Gómez<sup>2</sup>

**KEY WORDS:** Partial Differential Equations; Rayleigh-Bénard-Marangoni system; Boundary control problem; Optimal solution; Optimality system.

## DESCRIPTION

The optimal control problems in fluid mechanics have formed an important area of scientific and technological research due the high performance of systems wrapping fluid flow in combustion processes, fluid-structure interaction, design reactor, and a large number of industrial processes. In particular, due to the great advances in the theory of nonlinear partial differential equations, have put basis for the optimal control theory associated with the equations of type Navier-Stokes. In this paper we study an optimal control problem associated with equations of state given by Rayleigh-Bénard-Marangoni system.

The present paper have been organized as follows. In the first chapter, we review some concepts and relevant results that will be used in the development of this work, including a brief description of an abstract control problem.

In the second chapter, we first present a brief description of Rayleigh-Bénard-Marangoni system and we derive a weak formulation of problem. Then, we prove a uniqueness theorem of the weak solution, and finally we prove a regularity result for the temperature. This part is the first contribution original of this work.

In the third chapter, we first propose the optimal control problem that we wish to attack, and then we prove the existence of an optimal solution of problem. Additionally we attack a problem of control parameters of Rayleigh-Bénard-Marangoni system. This chapter is the second contribution of this work.

In the fourth chapter, we prove the existence of Lagrange multipliers to the optimal control problem and we derive the necessary conditions optimality of first order. Finally, optimality systems are obtained, strong and weak, associated to the control problem. This chapter is the third contribution of this work.

---

<sup>1</sup>Degree Project

<sup>2</sup>FACULTY OF SCIENCES, SCHOOL OF MATHEMATICS.  
DIRECTOR Ph. D. Elder Jesús Villamizar Roa

# Introducción

Los problemas de control óptimo en mecánica de fluidos han formado una importante área de investigación tecnológica y científica debido al alto desempeño de sistemas envolviendo flujo de fluidos en procesos de combustión, interacción de fluido-estructura, diseño de reactores, y un gran número de procesos industriales. En particular, debido a los grandes avances de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, se han sentado las bases de la teoría de control óptimo asociado a las ecuaciones de tipo Navier-Stokes. En este trabajo realizamos un estudio de un problema de control óptimo asociado a ecuaciones de estado dadas por un modelo de ecuaciones en derivadas parciales que describen el movimiento de fluidos por gradientes de temperatura, sobre condiciones de frontera particulares, de tipo mixto, conocido en la literatura como problema de Rayleigh-Bénard-Marangoni. En términos generales, el problema de control óptimo que deseamos tratar consiste en la minimización de un funcional  $\mathcal{J}(\cdot, \cdot)$  dependiendo de controles actuando sobre partes de la frontera del dominio, y de variables de estado que resuelven la ecuación diferencial, denominada ecuación de estado. El funcional a ser optimizado tiene por objeto minimizar ciertas normas en espacios  $L^p(\Omega)$  que envuelven la velocidad y la temperatura del fluido, con respecto a una velocidad y una temperatura deseada. Más exactamente, dada una velocidad y una temperatura deseadas  $\mathbf{u}_d$  y  $\theta_d$ , respectivamente, queremos hallar una velocidad  $\mathbf{u}$ , una temperatura  $\theta$ , y controles  $\mathbf{g}, \phi_1, \phi_2$ , para la velocidad y temperatura, en ciertos espacios de funciones, tales que se minimice el funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{u}, \theta, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) = & \frac{\gamma_1}{2} \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma_2}{p} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{\gamma_3}{l} \|\theta - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l + \frac{\gamma_4}{2} \|\mathbf{g}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 \\ & + \frac{\gamma_5}{2} \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}^2 + \frac{\gamma_6}{2} \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}^2, \end{aligned}$$

sujeto a que el par  $(\mathbf{u}, \theta)$  sea solución débil del modelo Rayleigh-Bénard-Marangoni, el cual, en forma general, es dado por el siguiente sistema de EDPs:

$$\begin{cases} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = Pr [(b + R\theta) \vec{e}_3 - \nabla p + \Delta \mathbf{u}] & \text{en } \Omega, \\ (\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta = \Delta \theta & \text{en } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con condiciones de frontera

$$\begin{cases} \mathbf{u} |_{\Gamma_0^1} = \mathbf{g}, \\ \mathbf{u} |_{\Gamma_0^2} = \mathbf{u}^0, \\ u_3 |_{\Gamma_1} = 0, \\ \left( \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} + M \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad i = 1, 2, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} = \phi_1, \quad \left( \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} + B\theta \right) \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \theta |_{\{x_3=0\}} = \phi_2, \end{cases}$$

donde  $\Omega = (0, l) \times (0, L) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^3$  denota el dominio del fluido. Además,  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ ,  $R = \frac{g\alpha\theta_u d^3}{\kappa\nu}$  y  $b = -\frac{gd^3}{\kappa\nu}$ , son constantes físicas que determinan las características del fluido y  $g$  es la aceleración debida a la gravedad. Por su parte,  $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \{x_3 = 1\}$  y  $\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$  con  $\partial\Omega$  siendo la frontera de  $\Omega$ . Además,  $\Gamma_0 = \Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2$ . La función  $\mathbf{u}^0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0) \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^2)$  es una condición de tipo Dirichlet para la velocidad  $\mathbf{u}$  sobre la parte  $\Gamma_0^2$  de la frontera  $\partial\Omega$ ; la función  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3) \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)$  es un control de frontera de tipo Dirichlet para  $\mathbf{u}$  sobre la parte  $\Gamma_0^1$ ; la función  $\phi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$  es un control de frontera de tipo Neumann para la temperatura  $\theta$  sobre la parte  $\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}$ , y la función  $\phi_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$  es un control de frontera de tipo Dirichlet para  $\theta$  sobre la parte  $\{x_3 = 0\}$  de la frontera  $\partial\Omega$ . El planteamiento detallado del problema de control óptimo será dado en el Capítulo 3.

Con respecto al desarrollo matemático de la teoría de control en mecánica de fluidos, existe en la literatura un número considerable de trabajos que versan sobre problemas de control óptimo considerando ecuaciones de estado dadas por las ecuaciones de Navier-Stokes clásicas (véase por ejemplo [1, 10, 18, 19, 22, 33, 42], y referencias allí citadas); los resultados que se conocen son bastante completos y abarcan, no solo aspectos teóricos, sino también numéricos y de aplicaciones. Por otro lado, en muchas aplicaciones en mecánica de fluidos, la dinámica está sujeta a efectos de la temperatura, lo que implica la necesidad de acoplar las ecuaciones clásicas de Navier-Stokes, con una ecuación del calor, producto de lo cual, surgen las denominadas Ecuaciones de Boussinesq (véase [11, 28, 39]). En este sentido, de manera natural han surgido los problemas de control que minimizan diversos tipos de funcionales que envuelven campos de velocidad y funciones temperatura,

sujetos a ecuaciones de estado dadas por las Ecuaciones de Boussinesq, con condiciones de frontera (controles) tipo Dirichlet para la velocidad y condiciones de frontera Dirichlet o Neumann (controles) para la temperatura. Algunos resultados en esta línea han sido obtenidos en [3, 4, 29, 30, 31, 32]; sin embargo, para el caso de las ecuaciones que describen el problema de Rayleigh-Bénard-Marangoni, no conocemos resultado alguno sobre el tratamiento de problemas de control de frontera. Más aún, son pocos los resultados conocidos desde el punto de vista de la existencia de soluciones para el modelo Rayleigh-Bénard-Marangoni. En verdad, aunque el modelo Rayleigh-Bénard-Marangoni, al igual que el modelo de Boussinesq, es también un acoplamiento entre las ecuaciones de Navier-Stokes clásicas, con la ecuación del calor, la gran diferencia y a su vez, complejidad, del modelo Rayleigh-Bénard-Marangoni comparado con el sistema de Boussinesq, radica en la naturaleza mixta de las condiciones de frontera. En efecto, un problema abierto relativo a este modelo consiste en la búsqueda de soluciones estacionarias fuertes (en espacios de Sobolev  $H^2$ ) así como también, existencia de soluciones locales fuertes (o globales para datos pequeños) del modelo de evolución asociado. La dificultad de estos problemas radica en la necesidad de abordar problemas de regularidad elíptica en espacios de Sobolev  $W^{k,p}$  para la ecuación de Laplace y la ecuación de Stokes, con condiciones mixtas (Dirichlet, Neumann y Robin), no homogéneas, en dominios poliedros. Los resultados de regularidad elíptica son escasos y dependen fuertemente de la geometría del dominio, véase por ejemplo [16, 17, 21, 35, 36]. El resultado más reciente sobre el modelo Rayleigh-Bénard-Marangoni es debido a Pardo, Herrero y Hoyas [37] en el cual se analiza un problema de bifurcación, en donde, considerando o bien, el número de Rayleigh o bien el número de Prandtl como parámetros de bifurcación, y usando la teoría de bifurcación local de Crandall-Rabinowitz [14], se prueba la existencia de soluciones estacionarias que bifurcan desde un estado básico de conducción de calor. Previo al trabajo [37] en los trabajos [15, 23, 24, 27] se obtuvieron resultados numéricos sobre la existencia de soluciones que bifurcan de estados estacionarios básicos, problemas de inestabilidad, y problemas de formación de patrones, así como también la validación de condiciones iniciales y de frontera.

El presente trabajo lo hemos organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo, realizamos una revisión de algunos conceptos y resultados relevantes que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Iniciamos con una revisión sobre ciertos espacios de funciones, incluyendo principalmente los espacios de Sobolev y algunos resultados relacionados como las inmersiones de Sobolev, el Teorema de la traza y ciertas propiedades de convergencia de sucesiones definidas en espacios de Banach. También, citamos algunos resultados clásicos como el Teorema del punto fijo de Schauder, el Teorema de Lax-Milgram y el Lema de Hopf, los cuales serán necesarios, principalmente, para probar la existencia de solución débil para el modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni. Además, presentamos

los conceptos de derivada en el sentido de Fréchet (o F-derivada) y el operador Fredholm, para seguidamente citar ciertos resultados relacionados con esos conceptos. Posteriormente, realizamos una breve descripción de un problema abstracto de control de flujo, incluyendo una formulación abstracta del problema y la definición de solución óptima del mismo. Finalmente, destacamos el principio de Lagrange, el cual establece las condiciones necesarias que garantizan la existencia de los multiplicadores de Lagrange para el problema de control óptimo, y permite derivar las condiciones necesarias de primer orden y, consecuentemente, un sistema de optimalidad.

En el segundo capítulo, presentamos una breve descripción del modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni, el cual constituirá las ecuaciones de estado del problema de control óptimo que deseamos abordar. Además, deducimos una formulación débil del problema, para la cual, en primera instancia se probará la existencia de una única solución al modelo lineal, y posteriormente, se prueba la existencia de por lo menos una solución del modelo no lineal utilizando el Teorema del punto fijo de Schauder. También, se probará un teorema que establece las condiciones sobre los datos de frontera, o sobre los parámetros, bajo las cuales se garantiza la unicidad de la solución débil. Finalmente, debido a que consideramos las derivadas tangenciales y normal de la temperatura en partes de la frontera, en el sentido de la traza, encontramos la necesidad de probar que la solución débil para la temperatura en  $H^1(\Omega)$  es, de hecho, una solución fuerte, esto es, pertenece al espacio  $H^2(\Omega)$ . Esta parte constituye el primer aporte original del trabajo, es decir, probamos la existencia de soluciones estacionarias (regulares en  $\theta$ ) con condiciones de frontera mixtas y no homogéneas.

En el tercer capítulo, primero planteamos el problema de control óptimo que deseamos abordar; luego probamos algunos resultados preliminares incluyendo la prueba de la semicontinuidad inferior del funcional  $\mathcal{J}$  que va a ser minimizado, y posteriormente demostramos el resultado más importante de este capítulo, el cual garantiza la existencia de una solución óptima para el problema de control planteado. Este capítulo constituye el segundo aporte del trabajo. Adicionalmente abordamos un problema de control de parámetros del modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni, el cual consiste en encontrar coeficientes  $Pr$ ,  $B$ ,  $M$  y  $R$  tales que la velocidad y temperatura asociadas mantengan unas configuraciones deseadas.

En el cuarto capítulo, probamos la existencia de multiplicadores de Lagrange para el problema de control óptimo, y partiendo de allí se derivan las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden. Finalmente, se obtienen sistemas de optimalidad, débil y fuerte, asociados al problema de control. Este capítulo constituye el tercer aporte del trabajo.

Parte de los resultados obtenidos en este trabajo son novedosos y se encuentran plasmados en el preprint [41].

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo haremos una revisión de algunos conceptos y resultados relevantes que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Iniciamos con una revisión sobre ciertos espacios de funciones, incluyendo principalmente los espacios de Sobolev y algunos resultados relacionados como las inmersiones de Sobolev, el Teorema de la traza y ciertas propiedades de convergencia de sucesiones definidas en espacios de Banach. Finalmente, haremos una breve descripción de un problema abstracto de control de flujo.

### 1.1. Espacios de Funciones

Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^n$  con borde  $\partial\Omega$  suficientemente regular. Para  $p \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , el espacio de Banach  $L^p(\Omega)$  es definido como

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : u \text{ es medible y } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\},$$

con norma  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  definida por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En el caso  $p = 2$ , el espacio  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx,$$

y con norma definida por  $\|u\|_{L^2(\Omega)} = (u, u)_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$ . Se muestra fácilmente que si  $p \geq q$ , el espacio  $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ .

El espacio  $L^\infty(\Omega)$  es definido como

$$L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : u \text{ es medible y } |u(x)| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\},$$

con norma definida por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Para  $1 < p < \infty$ , el espacio dual de  $L^p(\Omega)$  denotado por  $(L^p(\Omega))^*$  es dado por

$$(L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega), \text{ donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Para espacios  $L^p$  de funciones vectoriales de dimensión 3, se usará la notación  $\mathbf{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^3$ , es decir,

$$\mathbf{L}^p(\Omega) := \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) : u_i \in L^p(\Omega) \text{ para } i = 1, 2, 3\},$$

y su norma asociada está dada por

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{L^p(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si el borde  $\partial\Omega$  es acotado y regular, se define el espacio traza  $L^q(\partial\Omega)$  como

$$L^q(\partial\Omega) := \{u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n : u \text{ es medible y } \int_{\partial\Omega} |u|^q dS < \infty\},$$

con norma

$$\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} = \left( \int_{\partial\Omega} |u|^q dS \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Para  $k \in \mathbb{N}$  y  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq p \leq \infty$ , los espacios de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  son definidos por

$$W^{k,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ para todo } 0 \leq |\alpha| \leq k\},$$

donde  $D^\alpha$  es el operador diferencial

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

con  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$  y  $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ .

El espacio de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty,$$

$$\|v\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} (\sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|), \quad p = \infty.$$

El espacio  $W^{k,p}(\Omega)$  es separable para  $1 \leq p < \infty$  y reflexivo para  $1 < p < \infty$ . Además, cuando  $p = 2$ ,  $W^{k,2}(\Omega) := H^k(\Omega)$ , el cual es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

y cuya norma es definida por  $\|v\|_{H^m(\Omega)} = (u, u)_{H^m(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$ .

El espacio  $C_0^\infty(\Omega)$  es definido como

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in C^\infty(\Omega) \text{ con soporte compacto en } \Omega\}.$$

El espacio  $H_0^m(\Omega)$  es definido como la clausura de  $C_0^\infty(\Omega)$  en la norma  $H^m(\Omega)$ . En particular,  $H_0^1(\Omega)$  es caracterizado por

$$H_0^1 = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Además, para  $1 \leq p < \infty$ , el espacio dual de  $W^{k,p}(\Omega)$  denotado por  $(W^{k,p}(\Omega))'$  se define como

$$(W^{k,p}(\Omega))' = W^{-k,q}(\Omega), \text{ donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Para espacios  $W^{k,p}$  de funciones vectoriales de dimensión 3, se usará la notación  $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) = (W^{k,p}(\Omega))^3$  y  $\mathbf{H}^m(\Omega) = (H^m(\Omega))^3$ , es decir,

$$\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) := \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) : v_i \in W^{k,p}(\Omega) \text{ para } i = 1, 2, 3\},$$

$$\mathbf{H}^m(\Omega) := \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) : u_i \in H^m(\Omega) \text{ para } i = 1, 2, 3\},$$

y sus respectivas normas asociadas están dadas por

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{W^{k,p}(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^m(\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{H^m(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

respectivamente.

Además, denotamos por  $W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)$  el subespacio de  $L^q(\partial\Omega)$  conformado por funciones  $u$  que satisfacen

$$\|u\|_{1-\frac{1}{q},q(\partial\Omega)} \equiv \|u\|_{q,\partial\Omega} + \left( \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{\|u(x) - u(y)\|^q}{\|x - y\|^{n-2+q}} dS(x) dS(y) \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad (1.1)$$

El espacio  $W^{1-\frac{1}{q},q}(\partial\Omega)$  es separable para  $1 \leq q < \infty$  y reflexivo para  $1 < q < \infty$ .

## 1.2. Definiciones y resultados de Análisis Funcional

En esta sección, se citarán algunas definiciones y resultados del área de Análisis Funcional que serán utilizados en el desarrollo de los capítulos posteriores.

**Proposición 1.2.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^n$  con borde  $\partial\Omega$  de clase  $C^2$ . Entonces,*

1. *Existe un operador lineal y acotado  $\gamma_{\partial\Omega}$  (operador traza) tal que*

$$\begin{aligned} \gamma_{\partial\Omega} : \mathbf{H}^1(\Omega) &\rightarrow \mathbf{L}^2(\partial\Omega) \\ \mathbf{u} &\mapsto \gamma_{\partial\Omega}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}|_{\partial\Omega}, \end{aligned}$$

y verifica

- a) *El  $\text{Ker}(\gamma_{\partial\Omega}) = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ .*
- b) *La imagen de  $\gamma_{\partial\Omega}$ , denotada por  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , es un subespacio denso de  $\mathbf{L}^2(\partial\Omega)$ .*

2. *Existe un operador lineal y continuo  $\gamma_{\Omega}$  (levantamiento) tal que*

$$\begin{aligned} \gamma_{\Omega} : \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) &\rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega) \\ \mathbf{v} &\mapsto \gamma_{\Omega}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}, \text{ donde } \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Véase Girault y Raviart [20]. □

**Definición 1.2.2.** *Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios de Banach. Un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$  se dice que es acotado, si existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Denotamos por  $\mathbf{B}(X, Y)$  el conjunto de todos los operadores lineales y acotados de  $X$  en  $Y$ .

**Observación 1.2.3.** *(Véase Brézis [9]) Un operador lineal  $T$  es continuo si y sólo si es acotado.*

**Definición 1.2.4.** *(Convergencia débil y fuerte) Sean  $X$  un espacio de Banach y  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $X$ .*

1. Se dice que  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge débilmente a  $x \in X$ , si

$$\langle f, x_m \rangle_{X', X} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle f, x \rangle_{X', X}, \text{ para todo } f \in X',$$

y se denota por  $x_m \rightharpoonup x$ .

2. Se dice que  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  converge fuertemente (o en norma) a  $x \in X$ , si

$$\|x_m - x\|_X \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

y se denota por  $x_m \rightarrow x$ .

**Teorema 1.2.5.** Sean  $X$  un espacio de Banach y  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  una sucesión débilmente convergente a  $x \in X$ . Entonces,  $\|x_m\|_X$  es acotada en  $X$  y además,

$$\|x\|_X \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|x_m\|_X.$$

*Demostración.* Véase Brézis [9]. □

**Definición 1.2.6.** Sean  $X$  un espacio de Banach y  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional. Se dice que  $\Phi$  es débilmente semicontinuo inferior si

$$\Phi(x) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \Phi(x_m),$$

para toda sucesión  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset X$  tal que  $x_m \rightharpoonup x$ .

**Lema 1.2.7.** Sean  $n$  un entero positivo y  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{R}$ , tal que  $x_m \geq 0$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\left( \sup_{m \in \mathbb{N}} x_m \right)^n = \sup_{m \in \mathbb{N}} x_m^n, \tag{1.2}$$

$$\left( \inf_{m \in \mathbb{N}} x_m \right)^n = \inf_{m \in \mathbb{N}} x_m^n. \tag{1.3}$$

*Demostración.* Note que  $x_m \leq \left( \sup_{m \in \mathbb{N}} x_m^n \right)^{\frac{1}{n}}$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , entonces  $\sup_{m \in \mathbb{N}} x_m \leq \left( \sup_{m \in \mathbb{N}} x_m^n \right)^{\frac{1}{n}}$ , lo cual implica que

$$\left( \sup_{m \in \mathbb{N}} x_m \right)^n \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} x_m^n. \tag{1.4}$$

Por otro lado,  $\left( \sup_{m \in \mathbb{N}} x_m \right)^n \geq x_m^n$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ , lo cual implica que

$$\left( \sup_{m \in \mathbb{N}} x_m \right)^n \geq \sup_{m \in \mathbb{N}} x_m^n. \tag{1.5}$$

Por lo tanto, de (1.4) y (1.5) se concluye (1.2). La prueba de (1.3) se realiza de manera análoga a la demostración de (1.2). □

**Lema 1.2.8.** Sean  $n$  un entero positivo y  $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\mathbb{R}$ , tal que  $x_m \geq 0$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\left( \liminf_{m \rightarrow \infty} x_m \right)^n = \liminf_{m \rightarrow \infty} x_m^n. \quad (1.6)$$

*Demostración.* Usando la definición de límite inferior, se tiene

$$\left( \liminf_{m \rightarrow \infty} x_m \right)^n = \left( \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq m} x_k \right)^n,$$

y aplicando (1.2) y luego (1.3), se obtiene

$$\left( \liminf_{m \rightarrow \infty} x_m \right)^n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \left( \inf_{k \geq m} x_k \right)^n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq m} x_k^n.$$

Por lo tanto,

$$\left( \liminf_{m \rightarrow \infty} x_m \right)^n = \liminf_{m \rightarrow \infty} x_m^n.$$

□

**Proposición 1.2.9.** Sean  $X, Y$  y  $Z$  espacios de Banach,  $S \in \mathbf{K}(X, Y)$ ,  $T_1 \in \mathbf{B}(Y, Z)$  y  $T_2 \in \mathbf{B}(Z, X)$ . Entonces  $T_1 \circ S \in \mathbf{K}(X, Z)$  y  $S \circ T_2 \in \mathbf{K}(Z, Y)$ .

**Definición 1.2.10.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios de Banach con normas  $\|\cdot\|_X$  y  $\|\cdot\|_Y$  respectivamente, tales que  $X \subseteq Y$ . Diremos que  $X$  está inmerso continuamente en  $Y$ , y lo denotaremos por  $X \hookrightarrow Y$ , si el operador inclusión es continuo, es decir, si existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

El siguiente teorema fue tomado de Galdi [19] y es utilizado en los capítulos posteriores para realizar algunas estimaciones.

**Teorema 1.2.11.** (Teorema de las inmersiones de Sobolev) Sea  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \geq 1$  y  $k \geq 0$ . Si  $kp \leq n$  entonces

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega),$$

para todo  $r \in [p, \frac{np}{n-kp}]$  si  $kp < n$ , y para todo  $r \in [p, \infty)$  si  $kp = n$ . En particular, existen constantes  $c_1, c_2$  que dependen únicamente de  $k, p, r$  y  $n$  tales que para todo  $u \in W^{k,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq c_1 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \text{para todo } r \in [p, \frac{np}{n-kp}], \text{ si } kp < n,$$

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq c_2 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \text{para todo } r \in [p, \infty), \text{ si } kp = n.$$

Finalmente, si  $kp > n$ , cada  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  es igual en c.t.p. en  $\Omega$  a una única función en  $C^l(\overline{\Omega})$ , con  $0 \leq l < k - \frac{n}{p}$  y la siguiente desigualdad se tiene

$$\|u\|_{C^l} \leq c_3 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

**Definición 1.2.12.** (*Inmersión compacta*) Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios de Banach tales que  $X$  es un subespacio vectorial de  $Y$ . Se dice que  $X$  está compactamente inmerso en  $Y$ , si la inclusión de  $X$  en  $Y$  es un operador compacto.

**Teorema 1.2.13.** (*Teorema de compacidad*) Si  $\Omega$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^n$ , entonces las siguientes inmersiones son compactas

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ para todo } q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right), \text{ si } p < n,$$

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega) \text{ para todo } q \in [1, \infty), \text{ si } p \geq n.$$

*Demostración.* Véase Adams [2], Girault y Raviart [20]. □

**Lema 1.2.14.** *La inmersión de  $H^1(\Omega)$  en  $L^2(\partial\Omega)$  es compacta.*

*Demostración.* Véase Amann [6]. □

Las dos desigualdades que se citan a continuación son usadas frecuentemente y sus respectivas demostraciones se encuentran en Brézis [9].

**Lema 1.2.15.** (*Desigualdad de Young*) Sean  $a, b, p, q$  números reales positivos tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces se verifica la siguiente desigualdad

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Lema 1.2.16.** (*Desigualdad de Hölder Generalizada*) Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^n$  y las funciones  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ , con  $p_i, p \geq 1$  y satisfaciendo  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k}$ . Entonces, para  $f = f_1 f_2 \cdots f_{k-1} f_k \in L^p(\Omega)$  se tiene

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_k\|_{p_k}.$$

Los siguientes cuatro resultados son utilizados en el Capítulo 2 para probar la existencia de solución del problema que abordaremos en esta tesis.

**Teorema 1.2.17.** (*Teorema de Lax-Milgram*) Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  un operador bilineal continuo y coercivo, esto es, existen constantes  $\alpha, \beta > 0$  tales que

$$|a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H, \text{ para todo } u, v \in H$$

y

$$a(u, u) \geq \beta \|u\|_H^2, \quad \text{para todo } u \in H.$$

Entonces, para cada  $f \in H'$  existe un único elemento  $u \in H$  tales que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in H.$$

**Lema 1.2.18.** *Sea  $\Sigma$  un subconjunto de  $\partial\Omega$  de medida positiva. Entonces para todo  $u \in W^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 \leq q < \infty$ , la siguiente desigualdad se tiene*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \left( \|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} + \int_{\Sigma} |u| \right), \quad (1.7)$$

donde la constante  $C$  depende de  $n, q, \Omega, \Sigma$ , es decir  $C = C(n, q, \Omega, \Sigma)$ .

*Demostración.* Véase Galdi [19]. □

**Observación 1.2.19.** *Note que si  $u \in W^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , es tal que  $u = 0$  sobre  $\Sigma$ , para algún subconjunto  $\Sigma$  de  $\partial\Omega$  con medida positiva, entonces la desigualdad del Lema 1.2.18 se reduce a*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^q(\Omega)}, \quad (1.8)$$

con  $C = C(n, q, \Omega, \Sigma)$ . Como consecuencia de esto, se deduce que si  $u \in H^1(\Omega)$  es tal que  $u = 0$  sobre  $\Sigma$ , para algún subconjunto  $\Sigma$  de  $\partial\Omega$  de medida positiva, entonces

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.9)$$

y por lo tanto

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.10)$$

con  $C = C(n, q, \Omega, \Sigma)$ .

**Teorema 1.2.20.** *(Teorema del punto fijo de Schauder) Sea  $K$  un conjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo en un espacio de Banach  $X$ . Sea  $T$  un operador continuo y compacto definido sobre  $K$  tal que  $T(K) \subset K$ . Entonces existe por lo menos un elemento  $u_0 \in K$  tal que  $T(u_0) = u_0$ .*

**Lema 1.2.21.** *Sea  $\phi \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  tales que  $\int_{\partial\Omega} \phi \cdot \mathbf{n} dS = 0$ . Entonces, para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe una función  $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  con  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  en  $\Omega$  y  $\mathbf{u}_\varepsilon = \phi$  sobre  $\partial\Omega$ , tal que satisface que para todo*

$\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  con  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ,

$$\left| \int_{\Omega} [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\varepsilon}] \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \right| \leq \varepsilon \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2. \quad (1.11)$$

**Definición 1.2.22.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios de Banach, y  $S$  un subconjunto abierto no vacío de  $X$ . Se dice que un operador  $f : S \rightarrow Y$  es Fréchet diferenciable, en un punto arbitrario  $\tilde{x} \in S$ , en la dirección de  $h \in X$ , si existe un operador lineal y acotado  $A : X \rightarrow Y$  tal que

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|f(\tilde{x} + h) - f(\tilde{x}) - A(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

La derivada de Fréchet del operador  $f$  en el punto arbitrario  $\tilde{x}$ , es el operador  $A := f'(\tilde{x})$ .

**Ejemplo 1.2.23.** Sea  $u_d \in L^p(\Omega)$  un elemento fijo y  $\tilde{\mathcal{J}}$  un operador definido por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}} : L^p(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \tilde{\mathcal{J}}(u) = \|u - u_d\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Entonces el operador  $\tilde{\mathcal{J}}$  es derivable en el sentido de Fréchet, en un punto arbitrario  $\hat{u} \in L^p(\Omega)$  en la dirección de  $h \in L^p(\Omega)$ . Además, la derivada de Fréchet de  $\tilde{\mathcal{J}}$  es el operador  $\tilde{\mathcal{J}}'(\hat{u}) : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\tilde{\mathcal{J}}'(\hat{u})h = \langle p|\hat{u} - u_d|^{p-1} \operatorname{sgn}(\hat{u} - u_d), h \rangle = \int_{\Omega} p|\hat{u} - u_d|^{p-1} \operatorname{sgn}(\hat{u} - u_d) \cdot h \, d\Omega. \quad (1.12)$$

*Demostración.* Consideremos el operador  $g : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ , donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , definido por

$$g(u) = \begin{cases} \frac{|u - u_d|^p - |\hat{u} - u_d|^p}{u - \hat{u}} & \text{si } u \neq \hat{u}, \\ \operatorname{sgn}(\hat{u} - u_d) p|\hat{u} - u_d|^{p-1} & \text{si } u = \hat{u}, \end{cases} \quad (1.13)$$

para cada  $u \in L^p(\Omega)$ , donde  $\operatorname{sgn}(\hat{u} - u_d)$  indica el signo de  $(\hat{u} - u_d)$ . No es difícil verificar que  $\lim_{u \rightarrow \hat{u}} g(u) = \operatorname{sgn}(\hat{u} - u_d) p|\hat{u} - u_d|^{p-1}$ , y por lo tanto, tenemos que  $g$  es continuo en  $\hat{u}$ . Además, se puede verificar que para cada  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $g(u) \in L^q(\Omega)$ . En efecto, notemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g(u)|^q &= \int_{\Omega} \left| \frac{|u - u_d|^p - |\hat{u} - u_d|^p}{u - \hat{u}} \right|^q \\ &\leq C \int_{\Omega} \frac{(|u - u_d| - |\hat{u} - u_d|)(|u - u_d|^{p-1} + |\hat{u} - u_d|^{p-1})^q}{|u - \hat{u}|^q} \\ &\leq C \int_{\Omega} \frac{|u - u_d - (\hat{u} - u_d)|^q (|u - u_d|^{p-1} + |\hat{u} - u_d|^{p-1})^q}{|u - \hat{u}|^q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C \int_{\Omega} (|u - u_d|^{p-1} + |\hat{u} - u_d|^{p-1})^q \\
&\leq C_q \int_{\Omega} |u - u_d|^{(p-1)q} + |\hat{u} - u_d|^{(p-1)q} \\
&= C_q \int_{\Omega} |u - u_d|^p + C_q \int_{\Omega} |\hat{u} - u_d|^p < \infty,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

ya que  $u$ ,  $\hat{u}$  y  $u_d$  son elementos de  $L^p(\Omega)$ . Así concluimos que  $g(u) \in L^q(\Omega)$  para todo  $u \in L^p(\Omega)$ . Ahora notemos que para cada  $h \in L^p(\Omega)$ , con  $h \neq 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{J}}(\hat{u}+h) - \tilde{\mathcal{J}}(\hat{u}) - \langle g(\hat{u}+h), h \rangle &= \int_{\Omega} |\hat{u}+h-u_d|^p - |\hat{u}-u_d|^p \, d\Omega - \int_{\Omega} \left( \frac{|\hat{u}+h-u_d|^p - |\hat{u}-u_d|^p}{\hat{u}+h-\hat{u}} \right) h \, d\Omega \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Definamos ahora  $\varphi : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$  por

$$\varphi(h) = g(\hat{u} + h) - g(\hat{u}), \quad \forall h \in L^p(\Omega), \tag{1.16}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(h), h \rangle &= \langle g(\hat{u} + h) - g(\hat{u}), h \rangle \\
&= \langle g(\hat{u} + h), h \rangle - \langle g(\hat{u}), h \rangle,
\end{aligned} \tag{1.17}$$

para cada  $h \in L^p(\Omega)$ . En consecuencia, usando (1.17) en (1.15) deducimos que

$$\tilde{\mathcal{J}}(\hat{u} + h) - \tilde{\mathcal{J}}(\hat{u}) - \langle g(\hat{u}), h \rangle = \langle \varphi(h), h \rangle, \quad \forall h \in L^p(\Omega), \, h \neq 0, \tag{1.18}$$

y así llegamos a que

$$\frac{|\tilde{\mathcal{J}}(\hat{u} + h) - \tilde{\mathcal{J}}(\hat{u}) - \langle g(\hat{u}), h \rangle|}{\|h\|_{L^p(\Omega)}} = \frac{|\langle \varphi(h), h \rangle|}{\|h\|_{L^p(\Omega)}}, \quad \forall h \in L^p(\Omega), \, h \neq 0. \tag{1.19}$$

Finalmente, observe que como  $g$  es continuo en  $\hat{u}$ , tenemos que

$$g(\hat{u} + h) \rightarrow g(\hat{u}), \quad \text{cuando } h \rightarrow 0,$$

de lo cual, teniendo en cuenta (1.16), obtenemos que

$$\varphi(h) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } h \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, como  $\varphi(h) \in L^q(\Omega)$  para cada  $h \in L^p(\Omega)$ , encontramos que

$$\frac{|\langle \varphi(h), h \rangle|}{\|h\|_{L^p(\Omega)}} \leq \frac{\|\varphi(h)\|_{L^q(\Omega)} \|h\|_{L^p(\Omega)}}{\|h\|_{L^p(\Omega)}} = \|\varphi(h)\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0, \text{ cuando } h \rightarrow 0. \quad (1.20)$$

En consecuencia, usando (1.20) en (1.19) llegamos a

$$\lim_{\|h\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0} \frac{|\tilde{\mathcal{J}}(\hat{u} + h) - \tilde{\mathcal{J}}(\hat{u}) - \langle g(\hat{u}), h \rangle|}{\|h\|_{L^p(\Omega)}} = \lim_{\|h\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0} \frac{|\langle \varphi(h), h \rangle|}{\|h\|_{L^p(\Omega)}} = 0, \quad (1.21)$$

donde  $\langle g(\hat{u}), h \rangle = \langle p|\hat{u} - u_d|^{p-1} \operatorname{sgn}(\hat{u} - u_d), h \rangle$ , y concluimos (4.13).  $\square$

**Definición 1.2.24.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Hilbert y  $F \in \mathbf{B}(X, Y)$ .

1. Se dice que  $F$  es semi-Fredholm por la izquierda si existe un operador  $B_1 \in \mathbf{B}(Y, X)$  y un operador  $K_1 \in \mathbf{K}(X, X)$  tales que

$$B_1 \circ F = id_X + K_1.$$

2. Se dice que  $F$  es semi-Fredholm por la derecha si existe un operador  $B_2 \in \mathbf{B}(Y, X)$  y un operador  $K_2 \in \mathbf{K}(Y, Y)$  tales que

$$F \circ B_2 = id_Y + K_2.$$

3. Se dice que  $F$  es un operador de Fredholm si es semi-Fredholm por la izquierda y por la derecha, simultáneamente.

**Lema 1.2.25.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Hilbert y  $F \in \mathbf{B}(X, Y)$  tal que

$$F = B + K, \quad (1.22)$$

donde el operador  $B : X \rightarrow Y$  es un isomorfismo y el operador  $K \in \mathbf{K}(X, Y)$ . Entonces,  $F$  es un operador de Fredholm.

*Demostración.* Como el operador  $B : X \rightarrow Y$  es un isomorfismo, entonces existe el operador  $B^{-1} \in \mathbf{B}(Y, X)$  tal que, aplicando  $B^{-1}$  por la izquierda en (1.22) se tiene

$$B^{-1} \circ F = id_X + B^{-1} \circ K, \quad (1.23)$$

de donde, por la Proposición 1.2.9,  $B^{-1} \circ K \in \mathbf{K}(X, X)$ .

Similarmente, aplicando  $B^{-1}$  por la derecha en (1.22) se tiene

$$F \circ B^{-1} = id_Y + K \circ B^{-1}, \quad (1.24)$$

con  $K \circ B^{-1} \in \mathbf{K}(Y, Y)$ . Por lo tanto, de (1.23) y (1.24) y de la Definición 1.2.24 se concluye que  $F$  es un operador de Fredholm.  $\square$

**Proposición 1.2.26.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios de Banach y  $F \in \mathbf{B}(X, Y)$ . Entonces  $F$  es un operador de Fredholm si y sólo si

1. El  $\text{Ker}(F)$  es de dimensión finita.
2. El rango de  $F$  denotado por  $R(F)$  es cerrado y de codimensión finita, esto es,  $\dim(Y/R(F)) < \infty$ .

*Demostración.* Véase Conway [13].  $\square$

**Teorema 1.2.27.** Sean  $X$  un espacio de Hilbert y  $G \subset X$  un subespacio convexo, cerrado y no vacío. Entonces para todo  $v \in X$ , existe un único  $u \in G$  tal que

$$\|v - u\|_X = \min_{w \in G} \|v - w\|_X. \quad (1.25)$$

Además,  $u$  es caracterizado por la propiedad

$$(u - v, w - u)_X \geq 0, \quad \text{para todo } w \in G, \quad (1.26)$$

y se tiene que  $u$  es la proyección de  $v$  sobre  $G$ , esto es,  $u = \text{Proy}_G v$ .

*Demostración.* Véase Brézis [9].  $\square$

### 1.3. Problema abstracto de control de flujo

Un problema de control de flujo consta de tres componentes: un *objetivo*, razón por la que se quiere controlar el flujo (por ejemplo minimizar la turbulencia); los *controles*, que son parámetros de los cuales se dispone para alcanzar el objetivo (control de borde, control distributivo, etc.), y las *restricciones*, las cuales determinan el tipo de flujo que se desea controlar, y son expresadas matemáticamente como un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (por ejemplo, las ecuaciones de Rayleigh-Bénard-Marangoni), cuyas variables involucradas son llamadas variables de estado.

#### Formulación del problema

Con el propósito de formular un problema abstracto de control de flujo, se darán las siguientes especificaciones:

1. Sean  $X, Y$  y  $Z$  espacios de Banach reflexivos y  $\mathcal{U} \subset Z$  un subconjunto convexo, cerrado y no vacío.
2. El objetivo será representado por el funcional  $\mathcal{J} : X \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ .
3. La restricción es dada por el operador  $\mathcal{F} : X \times \mathcal{U} \rightarrow Y$ .

Sobre las suposiciones (1) - (3), un problema de control de flujo consiste en hallar un par  $(u^*, g^*) \in X \times \mathcal{U}$  tal que minimice el funcional

$$\mathcal{J} : X \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.27)$$

sujeto a

$$\mathcal{F}(u, g) = 0. \quad (1.28)$$

El conjunto de soluciones admisibles del problema de control óptimo (1.27) - (1.28) es definido por

$$\mathcal{Z}_{ad} = \{(u, g) \in X \times \mathcal{U} : \mathcal{J}(u, g) < \infty \text{ y } (u, g) \text{ satisface (1.28)}\},$$

y se tiene la siguiente definición.

**Definición 1.3.1.** (*Solución óptima*) Un par  $(\hat{u}, \hat{g}) \in \mathcal{Z}_{ad}$  es llamado *solución óptima* de (1.27) - (1.28), si

$$\mathcal{J}(\hat{u}, \hat{g}) = \inf_{(u, g) \in \mathcal{Z}_{ad}} \mathcal{J}(u, g).$$

### Existencia de multiplicadores de Lagrange

El principio de Lagrange es un método que permite derivar un sistema de optimalidad, desde el cual pueden ser obtenidos estados y controles óptimos. Este método reduce el problema de minimizar un funcional de  $m$  variables sujeto a  $k$  restricciones, a un problema de minimizar un funcional auxiliar (funcional de Lagrange) sin restricciones de  $m + k$  variables. Estas nuevas  $k$  variables desconocidas, una para cada restricción, son llamadas multiplicadores de Lagrange o variables adjuntas.

Con las notaciones anteriores sobre los espacios  $X, Y$  y el conjunto  $\mathcal{U}$ , el siguiente teorema establece las condiciones necesarias que garantizan la existencia de multiplicadores de Lagrange.

**Teorema 1.3.2** ([25]). *Sea  $(\hat{u}, \hat{g}) \in \mathcal{Z}_{ad}$  una solución óptima de (1.27) - (1.28). Además, asuma que existe una vecindad  $V \subset X$  de  $\hat{u}$  tal que*

- (a) *Para cada  $g \in \mathcal{U}$  y  $u \in V$ , las aplicaciones  $u \mapsto \mathcal{J}(u, g)$  y  $u \mapsto \mathcal{F}(u, g)$  son Fréchet diferenciables en  $u = \hat{u}$ .*

(b) Para cada  $u \in V$ , las aplicaciones  $u \mapsto \mathcal{J}(u, g)$  y  $u \mapsto \mathcal{F}(u, g)$  satisfacen la siguiente condición de convexidad: Para cada  $g_1, g_2 \in \mathcal{U}$  y  $\alpha \in [0, 1]$ , existe  $g \in \mathcal{U}$  tal que

$$\mathcal{F}(u, g) = \alpha \mathcal{F}(u, g_1) + (1 - \alpha) \mathcal{F}(u, g_2),$$

$$\mathcal{J}(u, g) \leq \alpha \mathcal{J}(u, g_1) + (1 - \alpha) \mathcal{J}(u, g_2),$$

(c) El rango del operador  $\mathcal{F}_u(\hat{u}, \hat{g}) : X \rightarrow Y$  es cerrado y de codimensión finita, donde  $\mathcal{F}_u(\hat{u}, \hat{g})$  denota la derivada de Fréchet de  $\mathcal{F}$  con respecto a  $u$ .

Entonces, existen  $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  y  $\lambda \in Y'$  no simultáneamente nulos tales que

$$\mathcal{L}_u(\hat{u}, \hat{g}, \lambda_0, \lambda)h = \lambda_0 \mathcal{J}_u(\hat{u}, \hat{g})h - \langle \lambda, \mathcal{F}_u(\hat{u}, \hat{g})h \rangle = 0, \quad \forall h \in X, \quad (1.29)$$

y se satisface el principio del mínimo

$$\mathcal{L}(\hat{u}, \hat{g}, \lambda_0, \lambda) = \min_{g \in \mathcal{U}} \mathcal{L}(\hat{u}, g, \lambda_0, \lambda). \quad (1.30)$$

donde

$$\mathcal{L}(u, g, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 J(u, g) - \langle \lambda, F(u, g) \rangle \quad (1.31)$$

es el funcional de Lagrange para el problema (1.27) - (1.28) y  $\mathcal{J}_u(\hat{u}, \hat{g})$ ,  $\mathcal{F}_u(\hat{u}, \hat{g})$  denotan respectivamente la derivada de Fréchet de  $\mathcal{J}$  y  $\mathcal{F}$  con respecto a  $u$ .

### Condiciones necesarias de primer orden y sistema de optimalidad

Las ecuaciones (1.29) y (1.30) son las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden, desde donde se deriva un sistema de optimalidad asociado a el problema de control (1.27) - (1.28). El sistema de optimalidad está constituido por las *ecuaciones de estado*, las cuales son determinadas a partir de  $\mathcal{L}_\lambda(\hat{u}, \hat{g}, \lambda_0, \lambda) = 0$ ; las *ecuaciones adjuntas*, las cuales se obtienen desde la igualdad (1.29), esto es,  $\mathcal{L}_u(\hat{u}, \hat{g}, \lambda_0, \lambda) = 0$  y la *condición de optimalidad*, la que es deducida del principio del mínimo dado en (1.30).

## Capítulo 2

# El modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni

El modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni constituye un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de fluidos por gradientes de temperatura, con condiciones de frontera particulares de tipo mixto (Dirichlet, Neumann y Robin), donde las variables involucradas son la velocidad, la temperatura y la presión del fluido.

En este capítulo será introducido el modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni en estado estacionario, el cual constituirá las *restricciones* (o ecuaciones de estado) para el problema de control que deseamos abordar. Una vez planteado el modelo se realizará la deducción de la formulación débil, para la cual se probará la existencia de solución. Finalmente, abordamos el problema de la regularidad de la solución débil lo cual requiere un análisis pormenorizado de problemas de regularidad elíptica con condiciones de frontera de tipo mixto (Dirichlet, Neumann y Robin) en dominios tridimensionales convexos, incluyendo dominios poliedros.

### 2.1. Modelo Estacionario de Rayleigh-Bénard-Marangoni

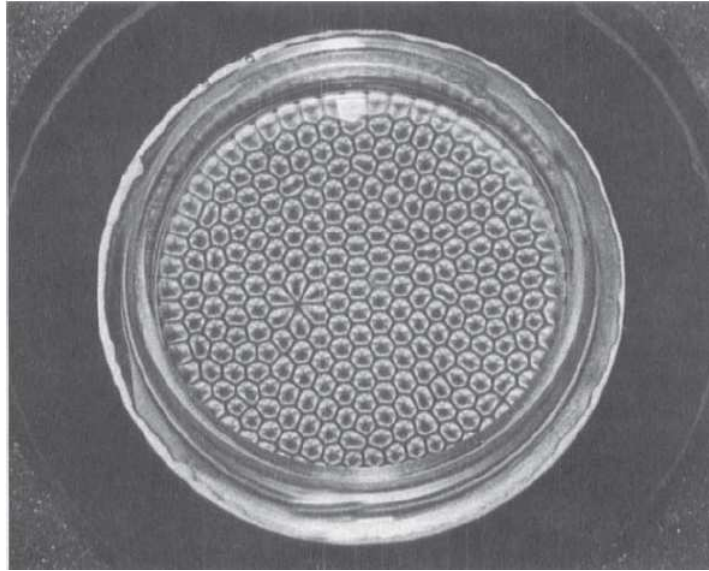
El movimiento de fluidos por gradientes de temperatura, también llamado convección térmica, es un proceso familiar e importante en la naturaleza. Aunque su principal aplicación en la industria es el crecimiento de cristales semiconductores, es la base para la interpretación de varios fenómenos naturales como el movimiento de las placas terrestres, la actividad solar, las circulaciones a gran escala de los océanos, la circulación en la atmósfera, entre otros. Un modelo de interés particular

consiste en una capa de líquido, confinado en un recipiente con fondo horizontal y paredes verticales rígidas, que está libre al ambiente en la parte superior, y sobre el cual se mantiene un gradiente de temperatura por calentamiento desde la parte inferior. Debido al calentamiento, el líquido en la parte inferior se expande y llega a ser mas ligero que el líquido en la parte superior, haciendo que, por efecto del empuje vertical, el líquido sea potencialmente inestable. Debido a la inestabilidad, existirá una tendencia a redistribuirse, sin embargo, esta tendencia natural será controlada por su propia viscosidad. Por otro lado, la superficie libre experimenta cambios en su tensión superficial debido a gradientes de temperatura superficial. Se espera entonces que el gradiente de temperatura mantenido deba exceder un valor crítico, a partir del cual la inestabilidad pueda manifestarse.

Los primeros experimentos en demostrar de forma definitiva el inicio de la inestabilidad térmica en fluidos, fueron los desarrollados por Henri Bénard en 1900 (véase Bénard [7]). En sus experimentos, Bénard consideró una capa muy delgada de líquido, de alrededor de  $1\text{ mm}$  de profundidad, en un plato metálico mantenido a una temperatura constante. La superficie superior era usualmente libre y estaba en contacto con el aire, que estaba a menor temperatura. Bénard experimentó con una variedad de líquidos de diferentes características físicas, interesado principalmente en el efecto de la viscosidad sobre la convección, usando como líquidos de alta viscosidad cera de ballena derretida y parafina. En todos los casos, Bénard encontró que cuando la temperatura del plato se incrementaba gradualmente, en un cierto instante la capa perdía la estabilidad y formaba patrones de celdas hexagonales, todas iguales y correctamente alineadas (véase Figura 2.1).

Una primera interpretación teórica de la convección térmica fue proporcionada por Lord Rayleigh en 1916 (véase Rayleigh [40]), cuyo análisis fue inspirado por los experimentos de Bénard. Rayleigh asumió que el fluido estaba confinado entre dos platos horizontales conductores térmicos y que el fluido estaba siendo calentado desde abajo. Desde el punto de vista de Rayleigh, el efecto de la flotación es el único responsable del inicio de la inestabilidad, y teóricamente los resultados coincidieron con los reportados por Bénard, dando la impresión que su modelo era correcto.

Sin embargo se conoce actualmente que la teoría de Rayleigh no es adecuada para explicar el mecanismo convectivo observado por Bénard; de hecho en los experimentos de Bénard, la superficie libre que está en contacto con el aire hace que se genere una tensión superficial, que debido a los gradientes de temperatura puede tener una gran influencia sobre el inicio del flujo, y Rayleigh al usar un plato en la superficie superior eliminó los efectos de la tensión superficial, y por lo tanto sus resultados no coincidían con los experimentos.

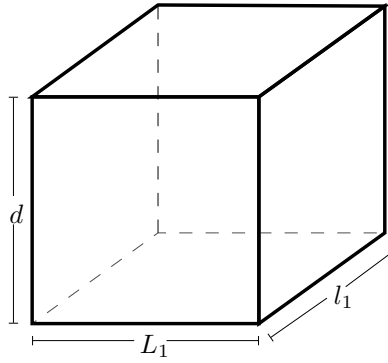


**Figura 2.1** – Celdas de Bénard en cera de ballena derretida. Tomado de Koschmieder [26].

Debe tenerse en cuenta que la tensión superficial no es constante y que puede depender de la temperatura o de contaminantes en la superficie. Esta dependencia es llamada *capilaridad* o *efecto Marangoni*, en honor al físico italiano Carlo Marangoni, quien lo estudió por primera vez (véase [28, 34]). La importancia de este efecto en los experimentos de Bénard solo fue establecida más de 40 años después del artículo de Rayleigh, por Myron Block en 1956 desde un punto de vista experimental (véase Block [8]), y luego por J.R.A Pearson en 1958 desde un punto de vista teórico (véase Pearson [38]). Actualmente se admite que el efecto Marangoni es el principal causante de la inestabilidad y convección en los experimentos originales de Bénard. Experimentos realizados en vuelos espaciales para eliminar el efecto de la gravedad, y por lo tanto el efecto de flotación así lo confirman.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, la situación física que consideramos consiste de un líquido confinado en un contenedor cúbico de altura  $d$  (coordenada  $x_3$ ), de largo  $L$  (coordenada  $x_2$ ) y ancho  $l$  (coordenada  $x_1$ ). El fondo del contenedor y las caras laterales son rígidas y la superficie superior está libre a la atmósfera. Con el objetivo de describir el sistema, se utilizan las aproximaciones de Oberbeck-Boussinesq (véase Chandrasekhar [11]), las cuales establecen que todos los coeficientes termodinámicos (viscosidad, capacidad calorífica, conductividad, etc.) son considerados constantes, salvo el caso de la densidad en el término de flotación ( $\rho\vec{g}$ ), que es considerada como una función lineal de la temperatura, y está dada por  $\rho_0 [1 - \alpha (\theta - \theta_a)]$ , donde  $\rho_0$  es la densidad medida a la temperatura ambiente  $\theta_a$ , y  $\alpha$  es el coeficiente de expansión volumétrico, que es positivo

para la mayoría de los líquidos. Además, se asume que la tensión superficial es una función de la temperatura, y es aproximada por  $\sigma = \sigma_0 - \gamma(\theta - \theta_a)$ , donde  $\sigma_0$  es la tensión superficial medida a  $\theta_a$ , y  $\gamma$  es la razón de cambio de la tensión superficial con la temperatura, que es positiva para la mayoría de los líquidos. También suponemos que la superficie libre no se distorsiona, es decir que la componente vertical de la velocidad en la superficie libre siempre será nula. Consideramos entonces que el dominio en donde está confinado el fluido es dado por  $\Omega = (0, l_1) \times (0, L_1) \times (0, d)$  (ver Figura 2.2). Sin embargo, el análisis desarrollado en este trabajo permite considerar un dominio  $\Omega$  con geometrías mas generales, más específicamente, podemos considerar  $\Omega = \hat{\Omega} \times (0, d)$  siendo  $\hat{\Omega}$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^2$  con frontera  $\partial\hat{\Omega}$  de tipo Lipschitz.



**Figura 2.2** – Dominio  $\Omega$ .

Así el Problema de Rayleigh–Bénard–Marangoni consiste en un acoplamiento de las ecuaciones de Navier-Stokes originadas a partir de la ley de conservación del momento lineal y la conservación de masa, con la ecuación de energía, asumiendo que la única fuerza de cuerpo sobre el sistema es la debida a la flotación (véase Chorin y Marsden [12]). Entonces se tiene el siguiente sistema de EDPs:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{u} = \rho_0 [1 - \alpha (\theta - \theta_a)] \vec{g} \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T). \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho_0 \hat{C}_p (\mathbf{u} \cdot \nabla \theta) = K \Delta \theta \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (2.3)$$

La ecuación (2.1) corresponde a un sistema no lineal de tres ecuaciones correspondientes a la ley de conservación del momento lineal, la ecuación (2.2) es una transcripción de la ley de conservación de masa y la ecuación (2.3) corresponde a la ecuación de la energía. Las incógnitas son  $\theta(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t)) \in \mathbb{R}^3$  y  $p(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ , con  $\mathbf{x} \in \Omega$  y  $t \in (0, T)$ , las cuales representan la temperatura, el campo de velocidades y la presión hidrostática del fluido, respectivamente. La constante  $\hat{C}_p$  representa la capacidad calorífica por unidad de masa del fluido,  $\mu$  su viscosidad y

$K$  la conductividad térmica.  $(0, T)$  denota el intervalo de tiempo.

Para efectos de cálculo y análisis es común expresar las variables del sistema en forma adimensional para lo cual hacemos los siguientes cambios de variables:

$$x'_1 = \frac{x_1}{d}, \quad x'_2 = \frac{x_2}{d}, \quad x'_3 = \frac{x_3}{d}, \quad u'_1 = \frac{du_1}{\kappa}, \quad u'_2 = \frac{du_2}{\kappa},$$

$$u'_3 = \frac{du_3}{\kappa}, \quad \theta' = \frac{\theta - \theta_a}{\theta_u}, \quad p' = \frac{d^2 p}{\rho_0 \nu \kappa}, \quad t' = \frac{\kappa t}{d^2},$$

donde  $\theta_c$  es la temperatura del fondo del recipiente,  $\theta_u = \theta_c - \theta_a$ ,  $\kappa = \frac{K}{\rho_0 \hat{C}_p}$  y  $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ .

Al realizar los anteriores cambios de variable en las ecuaciones (2.1)-(2.2) y omitir las “primas” se llega al siguiente sistema:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = Pr [(b + R\theta) \vec{e}_3 - \nabla p + \Delta \mathbf{u}] \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (2.4)$$

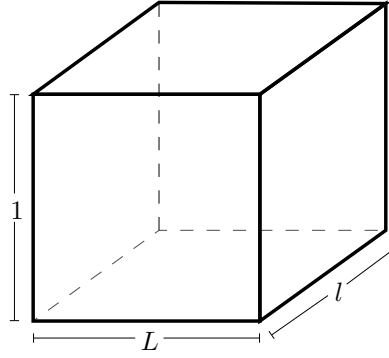
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \Delta \theta \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (2.5)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \quad (2.6)$$

con  $\Omega = (0, l) \times (0, L) \times (0, 1)$  (véase Figura 2.3), donde  $l = \frac{l_1}{d}$  y  $L = \frac{L_1}{d}$ . Además  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ ,  $R = \frac{g\alpha\theta_u d^3}{\kappa\nu}$  y  $b = -\frac{gd^3}{\kappa\nu}$ . El número  $R$  se conoce como el número de Rayleigh y mide el efecto de la flotación;  $Pr$  es conocido como el número de Prandtl<sup>1</sup>, y representa la relación entre la velocidad de difusión de cantidad de movimiento y la velocidad de difusión de calor en el fluido, y  $g$  es la aceleración debida a la gravedad.

---

<sup>1</sup>Ludwig Prandtl (1875 – 1953) fue un físico alemán quien realizó importantes trabajos pioneros en el campo de la aerodinámica, y durante la década de 1920 desarrolló la base matemática que da sustento a los principios fundamentales de la aerodinámica subsónica. El número de Prandtl, que desempeña un importante papel en el análisis de problemas de fluidos, ha sido nombrado en su honor.



**Figura 2.3** – Dominio  $\Omega$  con nuevas dimensiones.

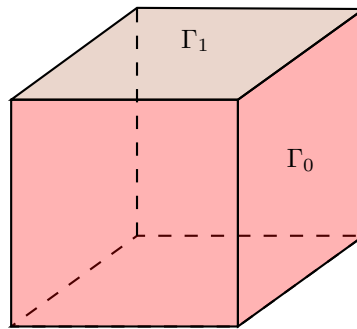
Denotando por  $\Gamma_1 = \partial\Omega \cap \{x_3 = 1\}$  y  $\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$  como se muestra en la Figura 2.4, se imponen las siguientes condiciones de frontera:

$$u_i |_{\Gamma_0} = 0, \quad i = 1, 2, \quad u_3 |_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{en } (0, T), \quad (2.7)$$

$$\left( \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} + M \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{en } (0, T), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} = 0, \quad \left( \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} + B\theta \right) \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \theta |_{\{x_3=0\}} = \theta_c \quad \text{en } (0, T), \quad (2.9)$$

donde  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  es el vector normal exterior,  $M = \frac{\gamma \theta_{ud}}{\rho_0 \nu k}$ ,  $B = \frac{hd}{K}$ , y  $h$  es el coeficiente de intercambio de calor de la superficie con la atmósfera. Cabe recordar que  $Pr$  y  $B$  son constantes positivas.



**Figura 2.4** – Identificación de la frontera del dominio  $\Omega$ .

Las condiciones de frontera para la velocidad en (2.7) indican que no existe deslizamiento del líquido en las superficies rígidas y que no hay deformación en la superficie libre. La condición (2.8) tiene en cuenta el efecto Marangoni el cual representa la transferencia de masa en una interfase

entre dos fluidos debido a un gradiente de tensión superficial . Las condiciones para la temperatura en (2.9) dicen que en las superficies laterales no hay flujo de calor (adiabáticas), en la superficie libre se permite el flujo de calor, y la superficie inferior se mantiene a la temperatura  $\theta_c$  (isotérmica).

Desde el punto de vista de existencia de solución para el problema de Rayleigh-Bénard-Marangoni, recientemente en Pardo, Herrero y Hoyas [37] se analizó un problema de bifurcación, en el cual, considerando o bien, el número de Rayleigh o bien el número de Prandtl como parámetros de bifurcación, y usando la teoría de bifurcación local de Crandall-Rabinowitz [14], se mostró la existencia de soluciones estacionarias para el problema (2.4) - (2.9) que bifurcan desde un estado básico de conducción de calor. Por estado básico se entiende a una solución exacta del problema (2.4) - (2.9), la cual es dada por

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{0}, \quad \theta_b = \theta_c - \frac{\theta_c B}{1+B} x_3 \quad \text{y} \quad p_b = p_1 x_3 + p_2 x_3^2. \quad (2.10)$$

La existencia de la solución básica se obtiene a través de simple inspección, es decir, iniciamos considerando un campo de velocidad  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , luego lo reemplazamos en (2.4) - (2.9), y el sistema resultante se reduce a un sistema de EDOs de fácil resolución, obteniendo así (2.10). Previo al trabajo Pardo, Herrero y Hoyas [37] en los trabajos [15, 23, 24, 27] se obtuvieron resultados numéricos sobre la existencia de soluciones que bifurcan de estados estacionarios básicos, inestabilidad y problemas de formación de patrones y validación de condiciones iniciales y de frontera. Sin embargo, desde el punto de vista teórico, no se conocen más resultados en la literatura. En efecto, aunque el modelo Rayleigh-Bénard-Marangoni, también es un acoplamiento entre las ecuaciones de Navier-Stokes clásicas, con la ecuación del calor, la gran diferencia y a su vez, complejidad, del modelo Rayleigh-Bénard-Marangoni comparado con el sistema de Boussinesq, radica en la naturaleza mixta de las condiciones de frontera (2.9). De hecho, un problema abierto relativo a este modelo consiste en la búsqueda de soluciones estacionarias fuertes (en espacios de Sobolev  $H^2$ ) así como también, existencia de soluciones locales fuertes (o globales para datos pequeños) del modelo de evolución asociado. La dificultad de estos problemas radica en la necesidad de abordar problemas de regularidad elíptica en espacios de Sobolev  $W^{k,p}$  para la ecuación de Laplace y Stokes, con condiciones mixtas (Dirichlet, Neumann y Robin), no homogéneas, en dominios poliedros. Los resultados de regularidad elíptica son escasos y dependen fuertemente de la geometría del dominio, véase por ejemplo [16, 17, 21, 35, 36]. Por otra parte, contrario a lo que sucede con las ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes, desde el punto de vista de problemas de control óptimo, no se conoce ningún resultado en el cual el funcional objetivo esté sujeto a ecuaciones de estado regidas por el modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni. Se conocen algunos resultados sobre Teoría de control óptimo

asociados a las Ecuaciones de Boussinesq, las cuales también envuelven las variables velocidad y temperatura, como por ejemplo [3, 4, 5, 29, 30, 31, 32], pero que se diferencian sustancialmente en el tipo de condiciones de frontera.

Para el planteamiento del problema de control que deseamos abordar, consideramos el modelo estacionario relacionado con (2.4)-(2.9) el cual es dado por el siguiente sistema de EDPs

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = Pr [(b + R\theta) \vec{e}_3 - \nabla p + \Delta \mathbf{u}] \quad \text{en } \Omega, \quad (2.11)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta = \Delta \theta \quad \text{en } \Omega, \quad (2.12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.13)$$

sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$\mathbf{u} |_{\Gamma_0^1} = \mathbf{g}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{u} |_{\Gamma_0^2} = \mathbf{u}^0, \quad (2.15)$$

$$u_3 |_{\Gamma_1} = 0, \quad (2.16)$$

$$\left( \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} + M \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} = \phi_1, \quad \left( \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} + B\theta \right) \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \theta |_{\{x_3=0\}} = \phi_2, \quad (2.18)$$

donde  $\Gamma_0 = \Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2$ ; la función  $\mathbf{u}^0 = (u_1^0, u_2^0, u_3^0) \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^2)$  es una condición de tipo Dirichlet para la velocidad  $\mathbf{u}$  sobre la parte  $\Gamma_0^2$  de la frontera  $\partial\Omega$ ; la función  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3) \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)$  es una función dada la cual denotará un control de frontera de tipo Dirichlet para  $\mathbf{u}$  sobre la parte  $\Gamma_0^1$ ; la función  $\phi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$  es una función dada la cual representará un control de frontera de tipo Neumann para la temperatura  $\theta$  sobre la parte  $\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}$ , y la función  $\phi_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$  es una función que denotará un control de frontera de tipo Dirichlet para  $\theta$  sobre la parte  $\{x_3 = 0\}$  de la frontera  $\partial\Omega$ . El planteamiento completo del problema de control óptimo será mostrado en el Capítulo 3.

## 2.2. Formulación débil del modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni

El objetivo de esta sección es formular en un sentido débil el problema (2.11) - (2.18). Para ello, iniciamos definiendo los espacios de funciones con los que vamos a trabajar. En primer lugar, definimos el espacio de Hilbert

$$\mathbf{X} := \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, u_3 = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\}, \quad (2.19)$$

con la norma inducida de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ; así, si  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$ ,

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En segundo lugar definimos el subespacio  $\mathbf{X}_0$  de  $\mathbf{X}$  dado por

$$\mathbf{X}_0 := \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{X} : u_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_0; i = 1, 2, 3\}. \quad (2.20)$$

En tercer lugar consideremos el espacio de Hilbert

$$Y := \{W \in H^1(\Omega) : W = 0 \text{ sobre } \{x_3 = 0\}\}, \quad (2.21)$$

con la norma inducida de  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ . Recordemos que las negrillas en la definición de los espacios funcionales, denotan espacios y elementos con componentes vectoriales.

Sea  $\mathbf{X}_0^*$  el espacio dual (topológico) de  $\mathbf{X}_0$ , es decir, el espacio de todos los funcionales lineales acotados sobre  $\mathbf{X}_0$ . Dado  $f \in \mathbf{X}_0^*$ , se define la norma

$$\|f\|_{\mathbf{X}_0^*} = \sup \left\{ \langle f, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{X}_0^*, \mathbf{X}_0} \mid \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} \leq 1 \right\}.$$

Sea  $Y^*$  el espacio dual (topológico) de  $Y$ . Dado  $g \in Y^*$ , se define la norma

$$\|g\|_{Y^*} = \sup \left\{ \langle g, W \rangle_{Y^*, Y} \mid W \in Y, \|W\|_{H^1(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

En cuarto lugar, definimos el espacio de Banach

$$\mathbf{Z} := \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{L}^4(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, v_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, i = 1, 2, 3, v_3 = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\}, \quad (2.22)$$

con la norma inducida de  $\mathbf{L}^4(\Omega)$ ; así, si  $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}$ ,

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{Z}} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para formular débilmente el problema (2.11) -(2.18), iniciamos recordando el siguiente resultado auxiliar debido a Pardo, Herrero y Hoyas [37].

**Lema 2.2.1.** *Asuma que  $\Omega$  es un dominio acotado con frontera de Lipschitz  $\partial\Omega$ , y tal que  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  con  $\Gamma_1 \subseteq \{x_3 = cte\}$ . Si  $\theta \in H^2(\Omega)$ , entonces*

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial\theta}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x_2} v_2 dS = \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_3} d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0.$$

Teniendo en cuenta los espacios de funciones anteriormente definidos y el Lema 2.2.1, vamos a construir la formulación débil del problema. En primer lugar multiplicamos la ecuación (2.11) por una función de prueba  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$ , integramos por partes el resultado y obtenemos

$$\begin{aligned} Pr \int_{\Omega} \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{v} d\Omega - Pr \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} d\Omega - Pr \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} d\Omega \\ + Pr \int_{\partial\Omega} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} Pr (b + R\theta) \vec{e}_3 \cdot \mathbf{v} d\Omega. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Pero, teniendo en cuenta que  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$ , usando la condición de frontera (2.17), y aplicando el Lema 2.2.1 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dS &= \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} dS \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_1}{\partial\mathbf{n}} v_1 + \frac{\partial u_2}{\partial\mathbf{n}} v_2 + \frac{\partial u_3}{\partial\mathbf{n}} v_3 dS \\ &= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_1}{\partial\mathbf{n}} v_1 + \frac{\partial u_2}{\partial\mathbf{n}} v_2 dS \\ &= -M \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\theta}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial\theta}{\partial x_2} v_2 dS \\ &= -M \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_3} d\Omega. \end{aligned}$$

Además, como  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$  deducimos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Gamma_0} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Gamma_1} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{\Gamma_1} p (v_1, v_2, v_3) \cdot (0, 0, 1) dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma_1} p v_3 dS \\
&= 0,
\end{aligned}$$

y también como  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  obtenemos que

$$\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} d\Omega = 0.$$

Así de (2.23) llegamos a

$$Pr \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega + PrM \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} d\Omega + \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_{\Omega} Pr (b + R\theta) \vec{e}_3 \cdot \mathbf{v} d\Omega. \quad (2.24)$$

En segundo lugar, multiplicamos la ecuación (2.12) por una función de prueba  $W \in Y$ , integramos por partes el resultado y obtenemos

$$\int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta] \cdot W d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla W d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \cdot W dS = 0. \quad (2.25)$$

Pero, teniendo en cuenta que  $W \in Y$ , y usando las condiciones de frontera (2.18), tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \cdot W dS &= \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \cdot W dS + \int_{\{x_3=0\}} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \cdot W dS + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \cdot W dS \\
&= \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \cdot W dS + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \cdot W dS \\
&= \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \phi_1 \cdot W d\Omega - \int_{\Gamma_1} B\theta \cdot W dS.
\end{aligned}$$

Así de (2.25) llegamos a

$$\int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta] \cdot W d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla W d\Omega - \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \phi_1 \cdot W dS + \int_{\Gamma_1} B\theta \cdot W dS = 0. \quad (2.26)$$

Consideramos ahora las siguientes formas bilineales y trilineales continuas para la velocidad y la temperatura  $a : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $c : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $a_1 : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $c_1 : \mathbf{X} \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ; y  $b_1 : H^1(\Omega) \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\Omega, \quad c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) = \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{z} d\Omega,$$

$$\begin{aligned}
a_1(\theta, W) &= \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla W \, d\Omega, & b_1(\theta, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \, d\Omega, \\
c_1(\mathbf{u}, \theta, W) &= \int_{\Omega} [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta] \cdot W \, d\Omega.
\end{aligned}$$

A partir de la desigualdad de Hölder y el Teorema de inmersiones de Sobolev (véase Teorema 1.2.11) sin dificultad se verifica que  $a$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c$  y  $c_1$  son continuas en los respectivos espacios de definición. Además  $c$  y  $c_1$  verifican las siguientes propiedades:

**Lema 2.2.2.** *Las siguientes relaciones se tienen para  $c$  y  $c_1$ :*

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) = -c(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{v}), \quad c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{Z}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{z} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (2.27)$$

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = -c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}), \quad c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{z} \in \mathbf{X}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (2.28)$$

$$c_1(\mathbf{u}, \theta, W) = -c_1(\mathbf{u}, W, \theta), \quad c_1(\mathbf{u}, \theta, \theta) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{Z}, \quad \forall \theta, W \in H^1(\Omega), \quad (2.29)$$

$$c_1(\mathbf{u}, \theta, W) = -c_1(\mathbf{u}, W, \theta), \quad c_1(\mathbf{u}, W, W) = 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{X}}, \quad \forall \theta \in H^1(\Omega), \quad \forall W \in Y, \quad (2.30)$$

donde los espacios  $\mathbf{X}$ ,  $Y$ ,  $\mathbf{Z}$  y  $\tilde{\mathbf{X}}$  se definen en (2.19), (2.21) y (2.22) y (2.101) respectivamente.

*Demostración.* Probemos (2.27). Considerando que  $\mathbf{u} \in \mathbf{Z}$ , es decir,  $\mathbf{u} = 0$  sobre  $\Gamma_0$ ,  $u_3 = 0$  sobre  $\Gamma_1$  and  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , y además teniendo en cuenta que el vector normal  $\mathbf{n}$  sobre  $\Gamma_1$  es  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ , obtenemos que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ .

Por un lado, observemos que

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega.$$

Aplicando primero integración por partes, y luego teniendo en cuenta que  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  y  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , tenemos

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dS \right] = 0. \quad (2.31)$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{z} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{z} + \nabla \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) \, d\Omega.
\end{aligned}$$

Aplicando primero integración por partes, y luego teniendo en cuenta que  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  y  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , tenemos

$$c(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0. \quad (2.32)$$

Así, de (2.31) y (2.32), concluimos (2.27). La prueba de (2.28), (2.29) y (2.30) se realiza de manera análoga a la demostración de (2.27).  $\square$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (2.24) y (2.26), la formulación débil del problema consiste en encontrar funciones  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$  y  $\theta \in H^1(\Omega)$  tales que

$$Pr a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\theta, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle f(\theta), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (2.33)$$

$$c_1(\mathbf{u}, \theta, W) + a_1(\theta, W) + \langle B\theta, W \rangle_{\Gamma_1} = \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y, \quad (2.34)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g^0 \text{ sobre } \Gamma_0 \quad \text{y} \quad \theta = \phi_2 \text{ sobre } \{x_3 = 0\}, \quad (2.35)$$

donde  $\langle f(\theta), \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} Pr (b + R\theta) \vec{e}_3 \cdot \mathbf{v} \, d\Omega$ ;  $\langle B\theta, W \rangle_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} B\theta \cdot W \, dS$ ;  $\mathbf{u}_g^0$  es la función tal que  $\mathbf{u}_g^0 = \mathbf{g}$  sobre  $\Gamma_0^1$  y  $\mathbf{u}_g^0 = \mathbf{u}^0$  sobre  $\Gamma_0^2$ , y  $\langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} = \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \phi_1 \cdot W \, dS$ .

### 2.3. Existencia de solución débil al modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni linealizado

Para esta sección, consideramos el caso en el cual  $\mathbf{u}_g^0 = 0$  sobre  $\Gamma_0$  y  $\phi_2 = 0$  sobre  $\{x_3 = 0\}$ . Sea  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{Z}$  una función dada. Por lo tanto, la formulación débil del problema lineal análogo a (2.33) - (2.35), consiste en encontrar una dupla  $(\mathbf{u}, \theta) \in \mathbf{X}_0 \times Y$  que satisfaga

$$Pr a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\theta, \mathbf{v}) + c(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle f(\theta), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (2.36)$$

$$c_1(\tilde{\mathbf{u}}, \theta, W) + a_1(\theta, W) + \langle B\theta, W \rangle_{\Gamma_1} = \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y. \quad (2.37)$$

Para encontrar las soluciones débiles al problema lineal planteado, en primer lugar consideramos las formas bilineales:  $\hat{a} : \mathbf{X}_0 \times \mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\hat{a}_1 : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , dadas por

$$\hat{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = Pr a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = Pr \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} [(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0,$$

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1(\theta, W) &= c_1(\tilde{\mathbf{u}}, \theta, W) + a_1(\theta, W) + \langle B\theta, W \rangle_{\Gamma_1} \\
&= \int_{\Omega} [(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\theta] \cdot W \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \nabla W \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} B\theta \cdot W \, dS, \quad \forall \theta, W \in Y.
\end{aligned}$$

Así, reescribimos (2.36) y (2.37) como

$$\hat{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle f(\theta), \mathbf{v} \rangle - Pr M b_1(\theta, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (2.38)$$

$$\hat{a}_1(\theta, W) = \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y. \quad (2.39)$$

Veamos que  $\phi_1 \in Y^*$ . Observemos que si  $W \in Y$  entonces

$$\langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} = \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \phi_1 \cdot W \, dS.$$

Notemos también que si  $W, Q \in Y$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned}
\langle \phi_1, \alpha W + Q \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} &= \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \phi_1 \cdot (\alpha W + Q) \, dS \\
&= \alpha \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \phi_1 \cdot W \, dS + \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \phi_1 \cdot Q \, dS \\
&= \alpha \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} + \langle \phi_1, Q \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\phi_1$  es un operador lineal. Además, utilizando la desigualdad de Hölder (véase Lema 1.2.16) y teniendo en cuenta que  $\phi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}) \subseteq L^2(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$  tenemos que

$$\begin{aligned}
|\langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}| &= \left| \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \phi_1 \cdot W \, dS \right| \\
&\leq \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} |\phi_1 \cdot W| \, dS \\
&\leq \|\phi_1\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} \|W\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} \\
&\leq C \|W\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} \\
&\leq C \|W\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Así,  $\phi_1$  es un operador continuo en  $Y$ , y concluimos que  $\phi_1 \in Y^*$ .

**Observación 2.3.1.** *De aquí en adelante hasta el final de esta tesis, la letra  $C$  denotará una constante genérica que tomará diferentes valores según sea el caso.*

Notemos que  $\hat{a}_1$  es un operador bilineal, ya que es una suma de operadores bilineales. Veamos que  $\hat{a}_1$  es un operador continuo y coercivo en  $Y$ . Usando (2.29), y luego la desigualdad de Poincaré (véase Lema 1.2.18 y Observación 1.2.19), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1(\theta, \theta) &= c_1(\tilde{\mathbf{u}}, \theta, \theta) + a_1(\theta, \theta) + \langle B\theta, \theta \rangle_{\Gamma_1} \\
&= 0 + \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \nabla\theta \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} B\theta \cdot \theta \, dS \\
&= \|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + B \|\theta\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\
&\geq \|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geq C \|\theta\|_{H^1(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\hat{a}_1(\theta, \theta) \geq C \|\theta\|_{H^1(\Omega)}^2$ , para todo  $\theta \in Y$ . Así,  $\hat{a}_1$  es un operador coercivo en  $Y$ . Además aplicando la desigualdad de Hölder y el Teorema de las inmersiones Sobolev (véase Teorema 1.2.11) deducimos que

$$\begin{aligned}
|\hat{a}_1(\theta, W)| &= |c_1(\tilde{\mathbf{u}}, \theta, W) + a_1(\theta, W) + \langle B\theta, W \rangle_{\Gamma_1}| \\
&= \left| \int_{\Omega} [(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\theta] \cdot W \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \nabla W \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} B\theta \cdot W \, dS \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |[(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\theta] \cdot W| \, d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla\theta \cdot \nabla W| \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} |B\theta \cdot W| \, dS \\
&\leq \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)} \|W\|_{L^4(\Omega)} + \|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla W\|_{L^2(\Omega)} + B \|\theta\|_{L^2(\Gamma_1)} \|W\|_{L^2(\Gamma_1)} \\
&\leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\theta\|_{H^1(\Omega)} \|W\|_{H^1(\Omega)} + \|\theta\|_{H^1(\Omega)} \|W\|_{H^1(\Omega)} + C B \|\theta\|_{H^1(\Omega)} \|W\|_{H^1(\Omega)} \\
&= (C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + 1 + C B) \|\theta\|_{H^1(\Omega)} \|W\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Consecuentemente,  $|\hat{a}_1(\theta, W)| \leq C \|\theta\|_{H^1(\Omega)} \|W\|_{H^1(\Omega)}$ , para todo  $\theta, W \in Y$ , lo que muestra que  $\hat{a}_1$  es un operador bilineal y continuo sobre  $Y$ .

Siendo  $\hat{a}_1$  un operador lineal continuo y coercivo en  $Y$  y  $\phi_1 \in Y^*$ , entonces por el Teorema de Lax-Milgram (véase Teorema 1.2.17), existe una única  $\theta \in Y$  que satisface la ecuación (2.39). Además observemos que como  $\theta$  que satisface (2.39) entonces

$$\hat{a}_1(\theta, W) = \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y. \quad (2.40)$$

Así, reemplazando  $\theta$  por  $W$  en (2.40) y usando (2.29), obtenemos

$$a_1(\theta, \theta) + \langle B\theta, \theta \rangle_{\Gamma_1} = \langle \phi_1, \theta \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}. \quad (2.41)$$

Ahora, usando la desigualdad de Hölder en el lado derecho de (2.41) obtenemos

$$\|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + B\|\theta\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq \|\phi_1\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} \|\theta\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})},$$

y por la desigualdad de Poincaré encontramos que

$$C\|\theta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + B\|\theta\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} \|\theta\|_{H^1(\Omega)}.$$

Así, tenemos que la siguiente estimativa para  $\theta$  es válida

$$\|\theta\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}, \quad (2.42)$$

donde  $C$  es una constante que NO depende de  $\tilde{\mathbf{u}}, \phi_1, f$ .

Determinada  $\theta$  e insertada en la ecuación (2.38) reescribimos el correspondiente problema en la siguiente forma: Encontrar  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_0$  tal que

$$\hat{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle l_\theta, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (2.43)$$

donde  $\langle l_\theta, \mathbf{v} \rangle = \langle f(\theta), \mathbf{v} \rangle - Pr M b_1(\theta, \mathbf{v})$ .

Verifiquemos que  $l_\theta \in \mathbf{X}_0^*$ . Observemos que si  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{X}_0$  entonces

$$\begin{aligned} \langle l_\theta, \mathbf{v} \rangle &= \langle f(\theta), \mathbf{v} \rangle - Pr M b_1(\theta, \mathbf{v}) \\ &= \int_{\Omega} Pr (b + R\theta) \vec{e}_3 \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - Pr M \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} Pr (b + R\theta) v_3 \, d\Omega - Pr M \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \, d\Omega. \end{aligned}$$

Entonces, si  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{X}_0$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \langle l_\theta, \alpha \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle &= \int_{\Omega} Pr (b + R\theta) (\alpha v_3 + w_3) \, d\Omega - Pr M \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \frac{\partial(\alpha \mathbf{v} + \mathbf{w})}{\partial x_3} \, d\Omega \\ &= \alpha \int_{\Omega} Pr (b + R\theta) v_3 \, d\Omega + \int_{\Omega} Pr (b + R\theta) w_3 \, d\Omega - \alpha Pr M \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \, d\Omega - Pr M \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_3} \, d\Omega \\ &= \alpha \left[ \int_{\Omega} Pr (b + R\theta) v_3 \, d\Omega - Pr M \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \, d\Omega \right] + \left[ \int_{\Omega} Pr (b + R\theta) w_3 \, d\Omega - Pr M \int_{\Omega} \nabla\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_3} \, d\Omega \right] \\ &= \alpha \langle l_\theta, \mathbf{v} \rangle + \langle l_\theta, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $l_\theta$  es un operador lineal. Además, utilizando la desigualdad de Hölder (véase Lema

1.2.16) y aplicando el Teorema de las inmersiones de Sobolev (véase Teorema 1.2.11), deducimos que

$$\begin{aligned}
|\langle l_\theta, \mathbf{v} \rangle| &= \left| \int_{\Omega} Pr (b + R\theta) v_3 \, d\Omega - Pr M \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \, d\Omega \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} Pr b v_3 \, d\Omega + \int_{\Omega} Pr R \theta v_3 \, d\Omega - Pr M \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \, d\Omega \right| \\
&\leq \left| \int_{\Omega} Pr b v_3 \, d\Omega \right| + \left| \int_{\Omega} Pr R \theta v_3 \, d\Omega \right| + \left| Pr M \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \, d\Omega \right| \\
&\leq |Pr b| \int_{\Omega} |v_3| \, d\Omega + |Pr R| \int_{\Omega} |\theta v_3| \, d\Omega + |Pr M| \int_{\Omega} \left| \nabla \theta \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \right| \, d\Omega \\
&\leq |Pr b| \|v_3\|_{L^1(\Omega)} + |Pr R| \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \|v_3\|_{L^2(\Omega)} + |Pr M| \|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq |Pr b| \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} + |Pr R| \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + |Pr M| \|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&\leq C|Pr b| \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + C|Pr R| \|\theta\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + |Pr M| \|\theta\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&\leq (C|Pr b| + C|Pr R| \|\theta\|_{H^1(\Omega)} + |Pr M| \|\theta\|_{H^1(\Omega)}) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&= (C|Pr b| + C|Pr R| \|\theta\|_{H^1(\Omega)} + |Pr M| \|\theta\|_{H^1(\Omega)}) \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}. \tag{2.44}
\end{aligned}$$

Así,  $l_\theta$  es un operador lineal y continuo en  $\mathbf{X}_0$ , y concluimos que  $l_\theta \in \mathbf{X}_0^*$ .

Además, observemos que  $\hat{a}$  es un operador bilineal, ya que es una suma de operadores bilineales. Veamos que  $\hat{a}$  es un operador continuo y coercivo en  $\mathbf{X}_0$ . Usando (2.27), y luego la desigualdad de Poincaré (véase Lema 1.2.18 y Observación 1.2.19), encontramos que

$$\begin{aligned}
\hat{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= Pr a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + c(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \\
&= Pr \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + 0 \\
&= Pr \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\
&\geq Pr C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \\
&= Pr C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\hat{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq Pr C \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}^2$ , para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$ . Así,  $\hat{a}$  es un operador coercivo en  $\mathbf{X}_0$ . También aplicando el Teorema de las inmersiones Sobolev (véase Teorema 1.2.11) obtenemos

$$|Pr \hat{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| = |a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + c(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{v})|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| Pr \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} [(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \right| \\
&\leq Pr \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}| \, d\Omega + \int_{\Omega} |[(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v}| \, d\Omega \\
&\leq Pr \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \\
&\leq Pr \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&= (Pr + C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&= (Pr + C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}.
\end{aligned}$$

Luego,  $|\hat{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}}$ , para todo  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$ . Así,  $\hat{a}$  es un operador continuo en  $\mathbf{X}_0$ .

Por lo tanto, como  $\hat{a}$  es un operador bilineal continuo y coercivo en  $\mathbf{X}_0$  y  $l_{\theta} \in \mathbf{X}_0^*$ , entonces por el Teorema de Lax-Milgram (véase Teorema 1.2.17), existe una única  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_0$  que satisface la ecuación (2.43). Además, como  $\mathbf{u}$  que satisface (2.43) entonces

$$\hat{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle l_{\theta}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0. \quad (2.45)$$

Así, reemplazando  $\mathbf{u}$  por  $\mathbf{v}$  en (2.45) y usando (2.27) llegamos a

$$Pr a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \langle l_{\theta}, \mathbf{u} \rangle. \quad (2.46)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta el procedimiento realizado en (2.44), y aplicándolo al lado derecho de (2.46) obtenemos

$$Pr \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq (C|Pr b| + C|Pr R| \|\theta\|_{H^1(\Omega)} + |Pr M| \|\theta\|_{H^1(\Omega)}) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}}. \quad (2.47)$$

Además, aplicando la desigualdad de Poincaré al lado izquierdo de (2.47) tenemos que

$$\begin{aligned}
Pr C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 &\leq Pr \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\
&\leq (C|Pr b| + C|Pr R| \|\theta\|_{H^1(\Omega)} + |Pr M| \|\theta\|_{H^1(\Omega)}) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Finalmente aplicando (2.42) obtenemos que la siguiente estimativa para  $\mathbf{u}$  es válida

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C|Pr b| + C|Pr R| \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + C|Pr M| \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}, \quad (2.48)$$

donde las constantes " $C''$ " no dependen de  $\tilde{\mathbf{u}}$  ni de  $\phi_1$ . Como resultado de esta sección obtenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.3.2.** *Sea  $\phi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$ . Entonces existe una única solución  $(\mathbf{u}, \theta) \in \mathbf{X}_0 \times Y$*

para el problema lineal (2.36) - (2.37). Además, la solución verifica las estimativas (2.42) y (2.48).

## 2.4. Existencia de solución débil al modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni

El objetivo de esta sección es probar la existencia de solución débil del problema (2.33) - (2.35). Consideremos primero el caso en el cual  $\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0 = 0$  sobre  $\Gamma_0$  y  $\phi_2 = 0$  sobre  $\{x_3 = 0\}$ . Para probar la existencia de una solución  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_0$  y  $\theta \in Y$  de (2.33) y (2.34), introducimos la función  $T : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  tal que para cada  $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}$ ,  $T(\mathbf{k}) = \mathbf{z}$ , siendo  $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_0 \subseteq \mathbf{Z}$  y  $\theta \in Y$  la solución al siguiente problema lineal:

$$Pr a(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\theta, \mathbf{v}) + c(\mathbf{k}, \mathbf{z}, \mathbf{v}) = \langle f(\theta), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (2.49)$$

$$c_1(\mathbf{k}, \theta, W) + a_1(\theta, W) + \langle B\theta, W \rangle_{\Gamma_1} = \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y. \quad (2.50)$$

La aplicación  $T$  está bien definida. En efecto, de la Proposición 2.3.2 tenemos que para cada vector  $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}$ , existe un único  $\theta = \theta_{\mathbf{k}} \in Y$  que satisface (2.50) y la estimativa (2.42). Luego, insertando  $\mathbf{k}$  y  $\theta_{\mathbf{k}}$  en (2.49) tenemos que existe una única solución  $\mathbf{z} \in \mathbf{X}_0$  de (2.49) que satisface la estimativa (2.48) para  $\mathbf{u} = \mathbf{z}$  y  $\theta = \theta_{\mathbf{k}}$ .

La estimativa (2.48) y la inmersión continua  $\mathbf{X}_0 \hookrightarrow \mathbf{Z}$  implican que:

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathbf{Z}} \leq C \|\mathbf{z}\|_{\mathbf{X}} \leq CK, \quad (2.51)$$

donde  $K = C|Pr b| + C|Pr R| \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + C|Pr M| \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}$  y las constantes  $C$  son independientes de  $\mathbf{k}$ .

Considere ahora la bola  $\mathbf{B}_r = \{\mathbf{k} \in \mathbf{Z} : \|\mathbf{k}\|_{\mathbf{Z}} \leq r\} \subset \mathbf{Z}$ , con  $r = CK$ . Claramente  $\mathbf{B}_r$  es convexa, no vacía, cerrada y acotada en  $\mathbf{Z}$ . Además, si restringimos  $T$  a  $\mathbf{B}_r \subseteq \mathbf{Z}$ , tenemos que

$$T|_{\mathbf{B}_r} : \mathbf{B}_r \rightarrow \mathbf{B}_r,$$

ya que  $\|T(\mathbf{k})\|_{\mathbf{Z}} \leq CK = r$ , para todo  $\mathbf{k} \in \mathbf{B}_r$ .

Veamos que  $T$  es un operador continuo. Sean  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \in \mathbf{Z}$ . De la Proposición 2.3.2 se sigue que existen

$\theta_1, \theta_2 \in Y$  and  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbf{X}_0$  tales que

$$Pr a(\mathbf{z}_1, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\theta_1, \mathbf{v}) + c(\mathbf{k}_1, \mathbf{z}_1, \mathbf{v}) = \langle f(\theta_1), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (2.52)$$

$$Pr a(\mathbf{z}_2, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\theta_2, \mathbf{v}) + c(\mathbf{k}_2, \mathbf{z}_2, \mathbf{v}) = \langle f(\theta_2), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (2.53)$$

$$c_1(\mathbf{k}_1, \theta_1, W) + a_1(\theta_1, W) + \langle B\theta_1, W \rangle_{\Gamma_1} = \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y, \quad (2.54)$$

$$c_1(\mathbf{k}_2, \theta_2, W) + a_1(\theta_2, W) + \langle B\theta_2, W \rangle_{\Gamma_1} = \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y. \quad (2.55)$$

Restando las ecuaciones (2.54) y (2.55) obtenemos

$$a_1(\theta_1 - \theta_2, W) + \langle B(\theta_1 - \theta_2), W \rangle_{\Gamma_1} = -c_1(\mathbf{k}_2, \theta_1 - \theta_2, W) - c_1(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \theta_1, W), \quad \forall W \in Y.$$

Sustituyendo  $W$  por  $(\theta_1 - \theta_2) \in Y$  en la última ecuación y usando (2.29), la desigualdad de Hölder y la inmersión continua  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$  llegamos a

$$\begin{aligned} \|\nabla(\theta_1 - \theta_2)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\nabla(\theta_1 - \theta_2)\|_{L^2(\Omega)} + B \|\theta_1 - \theta_2\|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\leq C \|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\theta_1\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Así usando (2.42) y la desigualdad de Poincaré encontramos que

$$\begin{aligned} \|\theta_1 - \theta_2\|_{H^1(\Omega)} &\leq C \|\nabla(\theta_1 - \theta_2)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ahora, restando las ecuaciones (2.52) and (2.53) deducimos que

$$Pr a(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2, \mathbf{v}) + c(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \mathbf{z}_2, \mathbf{v}) + c(\mathbf{k}_1, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2, \mathbf{v}) = -Pr M b_1(\theta_1 - \theta_2, \mathbf{v}) + \int_{\Omega} Pr R(\theta_1 - \theta_2) v_3, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0.$$

Sustituyendo  $\mathbf{v}$  por  $(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) \in \mathbf{X}_0$  en la última ecuación, y luego usando (2.27) y la desigualdad de Hölder llegamos a

$$\begin{aligned} Pr \|\nabla(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &= -c(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) - Pr M b_1(\theta_1 - \theta_2, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) + \int_{\Omega} Pr R(\theta_1 - \theta_2)(z_{13} - z_{23}) \\ &\leq \|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\mathbf{z}_2\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + |Pr M| \|\theta_1 - \theta_2\|_{H^1(\Omega)} + C |Pr R| \|\theta_1 - \theta_2\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Así, usando (2.51), (2.56) y la desigualdad de Poincaré tenemos que

$$\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq CK \|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + C \|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}. \quad (2.57)$$

Por lo tanto  $\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C \|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}$ , donde  $C$  es una constante que depende de la norma  $\|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}$ . Así, concluimos que  $T$  es un operador continuo.

Ahora veamos que  $T$  es un operador compacto. Para esto, debemos probar que si  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{B}_r$  es una sucesión acotada, entonces existe  $(\mathbf{x}_{n_r})_{r \in \mathbb{N}} \subseteq (\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $(T(\mathbf{x}_{n_r}))_{r \in \mathbb{N}}$  converge en  $\mathbf{B}_r \subseteq \mathbf{Z}$ .

Sea  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{B}_r$  una sucesión acotada. Note que como  $T$  envía a  $\mathbf{B}_r$  en un conjunto acotado  $M \subseteq \mathbf{X}_0$ , y como  $\mathbf{X}_0$  es una inmersión compacta en  $\mathbf{L}^4(\Omega)$ , entonces el operador inclusión  $i$  de  $\mathbf{X}_0$  en  $\mathbf{L}^4(\Omega)$  es compacto. Por lo tanto, tomando la composición de  $i$  con  $T$  obtenemos  $i \circ T: \mathbf{B}_r \rightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$ , la cual está dada por  $i \circ T(\mathbf{w}) = i(T(\mathbf{w})) = i(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ . Además observe que como  $(T(\mathbf{x}_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{B}_r$ , entonces  $(T(\mathbf{x}_n))_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada. Por lo tanto, como  $i$  es compacta, existe  $(\mathbf{x}_{n_r})_{r \in \mathbb{N}} \subseteq (\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que  $i(T(\mathbf{x}_{n_r}))_{r \in \mathbb{N}}$  converge en  $\mathbf{L}^4(\Omega)$ , pero como  $i(T(\mathbf{x}_{n_r}))_{r \in \mathbb{N}} = (T(\mathbf{x}_{n_r}))_{r \in \mathbb{N}}$ , entonces tenemos que  $(T(\mathbf{x}_{n_r}))_{r \in \mathbb{N}}$  converge en  $\mathbf{B}_r$ , lo que demuestra que  $T$  es un operador compacto.

Por lo anterior, estamos en condiciones de usar el Teorema del Punto Fijo de Schauder (véase Teorema 1.2.20), del cual concluimos que  $T$  tiene un punto fijo  $\mathbf{u} = T(\mathbf{u}) \in \mathbf{X}_0$ . Este punto  $\mathbf{u}$ , junto con la correspondiente función  $\theta = \theta_{\mathbf{u}} \in Y$ , solucionan el problema (2.49),(2.50) para  $\mathbf{k} = \mathbf{u}$ , y esta es la solución deseada para el problema (2.33), (2.34).

Resumimos este resultado en el siguiente teorema:

**Teorema 2.4.1.** *Sea  $\phi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$ . Entonces, existe por lo menos una solución  $(\mathbf{u}, \theta) \in \mathbf{X}_0 \times Y$  para el problema (2.33) - (2.35), con  $\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0 = 0$  sobre  $\Gamma_0$  y  $\phi_2 = 0$  sobre  $\{x_3 = 0\}$ . Además, la solución verifica las estimativas (2.42) y (2.48).*

Para probar la existencia de una solución al problema (2.33), (2.34) y (2.35) en el caso general, esto es, cuando  $\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0 \neq 0$  y  $\phi_2 \neq 0$ , reducimos el problema a un problema con condiciones homogéneas para la velocidad  $\mathbf{u}$  sobre  $\Gamma_0$  y la temperatura  $\theta$  sobre  $\{x_3 = 0\}$ . Para este fin, consideramos la siguiente

función:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0 = \begin{cases} \mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0 & \text{sobre } \Gamma_0; \\ 0 & \text{sobre } \Gamma_1. \end{cases} \quad (2.58)$$

Veamos que  $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0 \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Note que como  $\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0 \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ , entonces por la definición del espacio  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  (véase (1.1) para  $q = 2$ ), tenemos que

$$\|\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0\|_{\frac{1}{2}, 2(\Gamma_0)} = \|\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0\|_{2, \Gamma_0} + \left( \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \frac{\|\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0(x) - \mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0(y)\|^2}{\|x - y\|^3} dS(x) dS(y) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la forma como se definió  $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0\|_{\frac{1}{2}, 2(\partial\Omega)} &= \|\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0\|_{2, \partial\Omega} + \left( \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0(x) - \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0(y)\|^2}{\|x - y\|^3} dS(x) dS(y) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0\|_{2, \Gamma_0} + \left( \int_{\Gamma_0} \int_{\Gamma_0} \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0(x) - \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0(y)\|^2}{\|x - y\|^3} dS(x) dS(y) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0\|_{\frac{1}{2}, 2(\Gamma_0)} < \infty. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Así, concluimos que  $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0 \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Por lo tanto, usando el Lema de Hopf (véase Lema 1.2.21), consideramos una función  $\mathbf{u}_{\varepsilon} = (u_{\varepsilon_1}, u_{\varepsilon_2}, u_{\varepsilon_3})$  la cual satisface las condiciones

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\varepsilon} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon} = 0 \text{ en } \Omega, \quad \mathbf{u}_{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0 \text{ sobre } \partial\Omega, \\ |c(\mathbf{v}, \mathbf{u}_{\varepsilon}, \mathbf{v})| \leq \varepsilon \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Para garantizar la existencia de  $\mathbf{u}_{\varepsilon}$ , suponemos que  $\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0$  satisface la siguiente condición de compatibilidad, la cual proviene del Teorema de Green y la condición  $\operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon} = 0$  en  $\Omega$ :

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{g}}^0 \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

lo cual se cumple siempre que

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0 \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Además, construimos una función  $\theta_\delta \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta\theta_\delta = 0 & \text{en } \Omega, \\ \theta_\delta = \phi_2 & \text{sobre } \{x_3 = 0\}, \\ \frac{\partial\theta_\delta}{\partial\mathbf{n}} + B\theta_\delta = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \frac{\partial\theta_\delta}{\partial\mathbf{n}} = \phi_1 & \text{sobre } \Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}. \end{cases} \quad (2.61)$$

A continuación se verifica la existencia de  $\theta_\delta$ . Sea  $\tilde{\phi}_2$  sobre  $\partial\Omega$  definida de la siguiente manera

$$\tilde{\phi}_2 = \begin{cases} \phi_2 & \text{sobre } \{x_3 = 0\}; \\ 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \{x_3 = 0\}. \end{cases} \quad (2.62)$$

Teniendo en cuenta que  $\phi_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$ , de manera análoga a (2.59) se prueba que  $\tilde{\phi}_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Por lo tanto, como  $\tilde{\phi}_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subseteq L^2(\partial\Omega)$ , por el Teorema 1.2.1, existe  $\Phi_2 \in H^1(\Omega)$  tal que  $\gamma(\Phi_2) = \tilde{\phi}_2$  y existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|\Phi_2\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\tilde{\phi}_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}. \quad (2.63)$$

Luego aplicando (2.59) al lado derecho de (2.63) llegamos a

$$\|\Phi_2\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}. \quad (2.64)$$

Sea  $\theta_1 = \theta_\delta - \Phi_2$ . Entonces, teniendo en cuenta que  $\theta_\delta$  satisface el sistema (2.61), y la forma como se definió  $\tilde{\phi}_2$  en (2.62), tenemos que

$$\begin{cases} -\Delta\theta_1 = -\Delta\theta_\delta + \Delta\Phi_2 = \Delta\Phi_2 & \text{en } \Omega, \\ \theta_1 = \theta_\delta - \Phi_2 = \phi_2 - \phi_2 = 0 & \text{sobre } \{x_3 = 0\}, \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{n}} + B\tilde{\theta} = \frac{\partial\theta_\delta}{\partial\mathbf{n}} + B\theta_\delta - \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{n}} - B\Phi_2 = -\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{n}} & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial\theta_\delta}{\partial\mathbf{n}} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{n}} = \phi_1 - 0 = \phi_1 & \text{sobre } \Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}. \end{cases}$$

Así, el problema de la existencia de  $\theta_\delta$  se reduce a garantizar la existencia de  $\theta_1 \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta\theta_1 = \Delta\Phi_2 & \text{en } \Omega, \\ \theta_1 = 0 & \text{sobre } \{x_3 = 0\}, \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{n}} + B\theta_1 = -\frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{n}} & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{n}} = \phi_1 & \text{sobre } \Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}. \end{cases} \quad (2.65)$$

Multiplicando la primera ecuación de (2.65) por una función de prueba  $W \in Y$  e integrando por partes obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla\theta_1 \cdot \nabla W \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS + \int_{\Omega} \nabla\Phi_2 \cdot \nabla W \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS = 0. \quad (2.66)$$

Así, teniendo en cuenta que  $W \in Y$  y usando las condiciones de frontera de (2.65), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS &= \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS + \int_{\{x_3=0\}} \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS \\ &= \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\theta_1}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS \\ &= \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \phi_1 \cdot W \, dS - \int_{\Gamma_1} B\theta_1 \cdot W \, dS - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS. \end{aligned}$$

Además como  $W \in Y$  y teniendo en cuenta (2.62) llegamos a

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS &= \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS + \int_{\{x_3=0\}} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS \\ &= \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS. \end{aligned}$$

Por lo tanto de (2.66) obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla\theta_1 \cdot \nabla W \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} B\theta_1 \cdot W \, dS = \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \phi_1 \cdot W \, dS - \int_{\Omega} \nabla\Phi_2 \cdot \nabla W \, d\Omega + \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\mathbf{n}} \cdot W \, dS, \quad \forall W \in Y. \quad (2.67)$$

La existencia de una única solución  $\theta_1 \in Y$  de la ecuación (2.67) se sigue del Teorema de Lax-Milgram (véase Teorema 1.2.17). Por lo tanto, tomando  $\theta_\delta = \theta_1 + \Phi_2$ , tenemos que  $\theta_\delta \in H^1(\Omega)$  y

$\theta_\delta$  satisface, en forma débil, el sistema (2.61).

**Observación 2.4.2.** *Note que como  $\theta_1$  satisface (2.67), entonces reemplazando  $W$  por  $\theta_1$  en (2.67), y aplicando la desigualdad de Hölder, el Lema 1.2.14, la desigualdad de Poincaré y el Teorema de Inmersiones de Sobolev obtenemos*

$$\begin{aligned} \|\nabla\theta_1\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\nabla\theta_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + B \|\theta_1\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\ &\leq \|\theta_1\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} \|\phi_1\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\nabla\theta_1\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\Phi_2\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|\nabla\theta_1\|_{L^2(\Omega)} \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\nabla\theta_1\|_{L^2(\Omega)} \|\Phi_2\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\nabla\theta_1\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\Phi_2\|_{H^1(\Omega)}.$$

Así, como  $\theta_1 \in Y$ , por la desigualdad de Poincaré tenemos que  $\|\theta_1\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\nabla\theta_1\|_{L^2(\Omega)}$  y llegamos a

$$\|\theta_1\|_{H^1(\Omega)} \leq C [\|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\Phi_2\|_{H^1(\Omega)}]. \quad (2.68)$$

Finalmente, como  $\theta_\delta = \theta_1 + \Phi_2$ , entonces por la desigualdad triangular tenemos que  $\|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\theta_1\|_{H^1(\Omega)} + \|\Phi_2\|_{H^1(\Omega)}$ , y de (2.64) y (2.68) obtenemos

$$\|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} \leq C [\|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}]. \quad (2.69)$$

**Observación 2.4.3.** *Note que dado  $\delta > 0$ , podemos construir  $\theta_\delta \in H^1(\Omega)$  que verifique el sistema (2.61) y*

$$\|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} \leq \delta. \quad (2.70)$$

En efecto, considere una función  $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  que verifique

$$\varphi_\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } d(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon/2; \\ 0 & \text{si } d(x, \partial\Omega) \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Así, dado  $\delta > 0$ , redefinimos la función  $\theta_\delta$  construida en el procedimiento anterior, como  $\theta_\delta := \varphi_\varepsilon \theta_\delta$ . En primer lugar, veamos que  $\theta_\delta = \varphi_\varepsilon \theta_\delta$  satisface las condiciones de frontera de (2.61), es decir,

$$\varphi_\varepsilon \theta_\delta = \phi_2 \text{ sobre } \{x_3 = 0\}, \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial(\varphi_\varepsilon \theta_\delta)}{\partial \mathbf{n}} + B(\varphi_\varepsilon \theta_\delta) = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial(\varphi_\varepsilon\theta_\delta)}{\partial\mathbf{n}} = \phi_1 \text{ sobre } \Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}. \quad (2.73)$$

Teniendo en cuenta que  $\varphi_\varepsilon = 1$  sobre  $\partial\Omega$ , tenemos que

$$\varphi_\varepsilon\theta_\delta = \phi_2 \text{ sobre } \{x_3 = 0\}, \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial(\varphi_\varepsilon\theta_\delta)}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial\theta_\delta}{\partial\mathbf{n}} = \phi_1 \text{ sobre } \Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}, \quad (2.75)$$

y

$$\frac{\partial(\varphi_\varepsilon\theta_\delta)}{\partial\mathbf{n}} + B(\varphi_\varepsilon\theta_\delta) = \frac{\partial\theta_\delta}{\partial\mathbf{n}} + B\theta_\delta = 0 \text{ sobre } \Gamma_1. \quad (2.76)$$

Además, observemos que

$$\begin{aligned} \|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} &\leq \|\varphi_\varepsilon\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \|\varphi_\varepsilon\|_{L^{12}(\Omega)} \|\theta_\delta\|_{L^6(\Omega)} \\ &\leq C \|\varphi_\varepsilon\|_{L^{12}(\Omega)} \|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Luego, dado  $\delta > 0$ , tomando  $\varepsilon$  arbitrariamente pequeño podemos garantizar que  $\|\varphi_\varepsilon\|_{L^{12}(\Omega)} \leq \frac{\delta}{C\|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)}}$ . Así concluimos que

$$\|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} \leq \delta. \quad (2.77)$$

Como conclusión de las Observaciones 2.4.2 y 2.4.3 tenemos el siguiente lema:

**Lema 2.4.4.** Sean  $\phi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$  y  $\phi_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$ . Entonces para cada  $\delta > 0$ , existe  $\theta_\delta \in H^1(\Omega)$  que resuelve el sistema (2.61) y satisface las estimativas (2.69) y (2.77).

Ahora, buscando una solución  $(\mathbf{u}, \theta)$  al problema (2.33)-(2.35) en la forma  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{u}}$  y  $\theta = \theta_\delta + \widehat{\theta}$ , con  $\widehat{\mathbf{u}} \in \mathbf{X}_0$  y  $\widehat{\theta} \in Y$  nuevas funciones desconocidas, obtenemos una ecuación no lineal para su determinación. Reemplazando  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{u}}$  y  $\theta = \theta_\delta + \widehat{\theta}$  en (2.33)-(2.35) obtenemos:

$$Pr a(\mathbf{u}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\theta_\delta + \widehat{\theta}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \langle f(\theta_\delta + \widehat{\theta}), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (2.78)$$

$$c_1(\mathbf{u}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{u}}, \theta_\delta + \widehat{\theta}, W) + a_1(\theta_\delta + \widehat{\theta}, W) + \langle B(\theta_\delta + \widehat{\theta}), W \rangle_{\Gamma_1} = \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y, \quad (2.79)$$

$$\widehat{\mathbf{u}} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, \quad (2.80)$$

$$\widehat{\theta} = 0 \text{ sobre } \{x_3 = 0\}. \quad (2.81)$$

Como puede verse, el problema se redujo a otro con condiciones de frontera homogéneas para la

velocidad  $\widehat{\mathbf{u}}$  sobre  $\Gamma_0$  y la temperatura  $\widehat{\theta}$  sobre  $\{x_3 = 0\}$ . Así que aplicando un procedimiento similar al realizado en la primera parte de esta sección (véase Teorema 2.4.1), se prueba la existencia de solución  $\widehat{\mathbf{u}} \in \mathbf{X}_0$  y  $\widehat{\theta} \in Y$  para (2.78)-(2.81) aplicando el teorema del punto fijo de Schauder. Por lo tanto, tomando  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{u}}$  y  $\theta = \theta_\delta + \widehat{\theta}$ , tenemos que  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}$ ,  $\theta \in H^1(\Omega)$ , y  $(\mathbf{u}, \theta)$  satisface (2.33) - (2.35).

Además, notemos que como  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{u}}$  y  $\theta = \theta_\delta + \widehat{\theta}$  satisfacen (2.33) y (2.34), entonces

$$Pr a(\mathbf{u}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\theta_\delta + \widehat{\theta}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \langle f(\theta_\delta + \widehat{\theta}), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (2.82)$$

$$c_1(\mathbf{u}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{u}}, \theta_\delta + \widehat{\theta}, W) + a_1(\theta_\delta + \widehat{\theta}, W) + \langle B(\theta_\delta + \widehat{\theta}), W \rangle_{\Gamma_1} = \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y. \quad (2.83)$$

Aplicando el hecho de que los operadores  $a$ ,  $a_1$  y  $b_1$  son bilineales y que  $c$  y  $c_1$  son trilineales, reescribimos las ecuaciones (2.82) y (2.83) como

$$\begin{aligned} Pr a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + Pr a(\widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\theta_\delta, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\widehat{\theta}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ + c(\widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) + c(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} Pr(b + R\theta_\delta)v_3 d\Omega + \int_{\Omega} Pr(b + R\widehat{\theta})v_3 d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} c_1(\mathbf{u}_\varepsilon, \theta_\delta, W) + c_1(\mathbf{u}_\varepsilon, \widehat{\theta}, W) + c_1(\widehat{\mathbf{u}}, \theta_\delta, W) + c_1(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\theta}, W) + a_1(\theta_\delta, W) + a_1(\widehat{\theta}, W) \\ + \langle B\theta_\delta, W \rangle_{\Gamma_1} + \langle B\widehat{\theta}, W \rangle_{\Gamma_1} = \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Reemplazando  $\mathbf{v}$  por  $\widehat{\mathbf{u}}$  y  $W$  por  $\widehat{\theta}$  en las ecuaciones (2.84) y (2.85) respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} Pr a(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{u}}) + c(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{u}}) = -Pr a(\mathbf{u}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{u}}) - Pr M b_1(\theta_\delta, \widehat{\mathbf{u}}) - Pr M b_1(\widehat{\theta}, \widehat{\mathbf{u}}) - c(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{u}}) - c(\mathbf{u}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{u}}) \\ - c(\widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{u}}) + \int_{\Omega} Pr(b + R\theta_\delta)\widehat{u}_3 d\Omega + \int_{\Omega} Pr(b + R\widehat{\theta})\widehat{u}_3 d\Omega, \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} a_1(\widehat{\theta}, \widehat{\theta}) + \langle B\widehat{\theta}, \widehat{\theta} \rangle_{\Gamma_1} = -c_1(\mathbf{u}_\varepsilon, \theta_\delta, \widehat{\theta}) - c_1(\mathbf{u}_\varepsilon, \widehat{\theta}, \widehat{\theta}) - c_1(\widehat{\mathbf{u}}, \theta_\delta, \widehat{\theta}) - c_1(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\theta}, \widehat{\theta}) \\ - a_1(\theta_\delta, \widehat{\theta}) - \langle B\theta_\delta, \widehat{\theta} \rangle_{\Gamma_1} + \langle \phi_1, \widehat{\theta} \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Ahora, teniendo en cuenta que  $\widehat{\mathbf{u}} \in \mathbf{X}_0 \subset \mathbf{Z}$ , usando (2.27) y (2.29) tenemos que  $c(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{u}}) = 0$  y  $c_1(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\theta}, \widehat{\theta}) = 0$  respectivamente. Además, si suponemos que  $\mathbf{u}_\mathbf{g}^0 \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}$ , usando (2.28) y (2.30), deducimos que  $c(\mathbf{u}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{u}}) = 0$  y  $c_1(\mathbf{u}_\varepsilon, \widehat{\theta}, \widehat{\theta}) = 0$  respectivamente. Por lo tanto, las ecuaciones (2.86) y (2.87) se reducen a

$$\begin{aligned} Pr a(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{u}}) = -Pr a(\mathbf{u}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{u}}) - Pr M b_1(\theta_\delta, \widehat{\mathbf{u}}) - Pr M b_1(\widehat{\theta}, \widehat{\mathbf{u}}) - c(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{u}}) \\ - c(\widehat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{u}}) + \int_{\Omega} Pr(b + R\theta_\delta)\widehat{u}_3 d\Omega + \int_{\Omega} Pr(b + R\widehat{\theta})\widehat{u}_3 d\Omega, \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned}
a_1(\widehat{\theta}, \widehat{\theta}) + \left\langle B\widehat{\theta}, \widehat{\theta} \right\rangle_{\Gamma_1} &= -c_1(\mathbf{u}_\varepsilon, \theta_\delta, \widehat{\theta}) - c_1(\widehat{\mathbf{u}}, \theta_\delta, \widehat{\theta}) - a_1(\theta_\delta, \widehat{\theta}) \\
&\quad - \left\langle B\theta_\delta, \widehat{\theta} \right\rangle_{\Gamma_1} + \left\langle \phi_1, \widehat{\theta} \right\rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}. \tag{2.89}
\end{aligned}$$

De (2.88), aplicando la desigualdad de Hölder y (2.60) llegamos a

$$\begin{aligned}
Pr \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &\leq |Pr M| \|\nabla \widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + |Pr| \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&\quad + |Pr M| \|\nabla \theta_\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \varepsilon \|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}^2 \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + C \|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} \\
&\quad + |Pr R| \|\theta_\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + |Pr R| \|\widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \tag{2.90}
\end{aligned}$$

Además, aplicando el Teorema de Inmersiones de Sobolev y la desigualdad de Poincaré al lado derecho de la ecuación (2.90) obtenemos

$$\begin{aligned}
Pr \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 &\leq C \|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + C \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + C \|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&\quad + C \varepsilon \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + C \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + C \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + C \|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&\quad + C \|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
Pr \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq C \|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)} + C \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + C \|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} + C \varepsilon \|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + C \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \\
&\quad + C + C \|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} + C \|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Además teniendo en cuenta que  $\varepsilon$  es un número arbitrariamente pequeño, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\nabla \widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} &\leq C \|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)} + C \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + C \|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} + C \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \\
&\quad + C + C \|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} + C \|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.91}
\end{aligned}$$

Así aplicando la desigualdad de Poincaré al lado izquierdo de (2.91) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} &\leq C \|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)} + C \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + C \|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} + C \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \\
&\quad + C + C \|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} + C \|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.92}
\end{aligned}$$

Por lo tanto teniendo en cuenta (2.69) y (2.92) llegamos a

$$\|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C(\|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}). \tag{2.93}$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad de Hölder al lado derecho de la ecuación (2.89) deducimos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla\widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\nabla\widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + B\|\nabla\widehat{\theta}\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\
&\leq \|\nabla\theta_\delta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)} + B\|\theta_\delta\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\widehat{\theta}\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla\widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} \\
&\quad + \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla\widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} + \|\phi_1\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} \|\widehat{\theta}\|_{L^2(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}. \quad (2.94)
\end{aligned}$$

Además, aplicando el Teorema de Inmersiones de Sobolev y la desigualdad de Poincaré al lado derecho de la ecuación (2.94) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\nabla\widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla\widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)} + C\|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla\widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)} + C\|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\nabla\widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} \\
&\quad + C\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\nabla\widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} + C\|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} \|\nabla\widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\|\nabla\widehat{\theta}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C\|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} + C\|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} + C\|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} \\
&\quad + C\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} + C\|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}. \quad (2.95)
\end{aligned}$$

Por lo tanto aplicando la desigualdad de Poincaré al lado izquierdo de (2.95) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)} &\leq C\|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} + C\|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} \\
&\quad + C\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} + C\|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}. \quad (2.96)
\end{aligned}$$

Usando (2.93) en (2.96) encontramos que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)} &\leq C\|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} + C\|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} (\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}) \\
&\quad + C\|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} + C\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} + C\|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}. \quad (2.97)
\end{aligned}$$

Luego como por el Lema 2.4.4 tenemos que  $\|\theta_\delta\|_{L^4(\Omega)} < \delta$ , donde  $\delta$  es un número arbitrariamente pequeño, llegamos a

$$\|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}). \quad (2.98)$$

De igual manera, de (2.93) y (2.98) obtenemos

$$\|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C(\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}). \quad (2.99)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{u}}$  y  $\theta = \theta_\delta + \widehat{\theta}$ , de la desigualdad triangular tenemos que  $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\widehat{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$  y  $\|\theta\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\theta_\delta\|_{H^1(\Omega)} + \|\widehat{\theta}\|_{H^1(\Omega)}$ . Así de (2.69), (2.98) y

(2.99) obtenemos que las soluciones  $\mathbf{u}$  y  $\theta$  de (2.33) - (2.35), satisfacen la siguiente estimativa:

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\theta\|_{H^1(\Omega)} \leq C[\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}], \quad (2.100)$$

donde  $\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$  es una constante que depende de  $\|\mathbf{u}_g^0\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}$ . A continuación establecemos este resultado como un teorema.

**Teorema 2.4.5.** *Sean  $\phi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$ ,  $\phi_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$  y  $\mathbf{u}_g^0 \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$  tales que  $\int_{\Gamma_0} \mathbf{u}_g^0 \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$  y  $\mathbf{u}_g^0 \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}$ . Entonces el problema (2.33) - (2.35) tiene por lo menos una solución  $(\mathbf{u}, \theta) \in \mathbf{X} \times H^1(\Omega)$ . Además, la solución  $(\mathbf{u}, \theta)$  satisface la estimativa (2.100).*

Finalmente, definimos los siguientes espacios de funciones

$$\tilde{\mathbf{X}} := \left\{ \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{X} : \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0, \text{ y } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\} \right\}, \quad (2.101)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := \{\gamma|_{\partial\Omega}(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{X}}\}, \quad (2.102)$$

con las normas inducidas de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  y  $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  respectivamente. Teniendo en cuenta estos espacios, reescribimos el Teorema 2.4.5 de la siguiente manera:

**Teorema 2.4.6.** *Sean  $\phi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$ ,  $\phi_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$  y  $\mathbf{u}_g^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ . Entonces el problema (2.33) - (2.35) tiene por lo menos una solución  $(\mathbf{u}, \theta) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega)$ . Además, la solución  $(\mathbf{u}, \theta)$  satisface la estimativa (2.100).*

## 2.5. Unicidad de la solución débil

El propósito de esta sección es determinar condiciones bajo las cuales podemos garantizar que la solución débil  $(\mathbf{u}, \theta) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega)$  del sistema (2.33) - (2.35) es única. Recordamos que la unicidad de soluciones estacionarias para el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes se tiene bajo condiciones de pequeñez de los datos (véase Villamizar *et al* [43]). Para el caso del modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni, el cual involucra condiciones de frontera particulares, queremos determinar la relación entre los parámetros y los datos de frontera que garantizan la unicidad de la solución débil. El análisis de la unicidad de la solución débil será fundamental para el estudio de un problema de control de parámetros, el cual será analizado en la Sección 3.3. Con este fin, suponemos en primer lugar que existen soluciones  $(\mathbf{u}_1, \theta_1) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega)$  y  $(\mathbf{u}_2, \theta_2) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega)$  del sistema (2.33) - (2.35).

Entonces,

$$Pr a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\theta_1, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} Pr (b + R\theta_1) v_3 d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (2.103)$$

$$c_1(\mathbf{u}_1, \theta_1, W) + a_1(\theta_1, W) + \langle B\theta_1, W \rangle_{\Gamma_1} = \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y, \quad (2.104)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_g^0 \text{ sobre } \Gamma_0 \quad \text{y} \quad \theta_1 = \phi_2 \text{ sobre } \{x_3 = 0\}, \quad (2.105)$$

y

$$Pr a(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\theta_2, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} Pr (b + R\theta_2) v_3 d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (2.106)$$

$$c_1(\mathbf{u}_2, \theta_2, W) + a_1(\theta_2, W) + \langle B\theta_2, W \rangle_{\Gamma_1} = \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y, \quad (2.107)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_g^0 \text{ sobre } \Gamma_0 \quad \text{y} \quad \theta_2 = \phi_2 \text{ sobre } \{x_3 = 0\}. \quad (2.108)$$

Restando (2.106) de (2.103), (2.107) de (2.104), (2.108) de (2.105), y tomando  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$  y  $\theta = \theta_1 - \theta_2$ , obtenemos que

$$Pr a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\theta, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} Pr R \theta \cdot v_3 d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (2.109)$$

$$c_1(\mathbf{u}, \theta_1, W) + c_1(\mathbf{u}_2, \theta, W) + a_1(\theta, W) + \langle B\theta, W \rangle_{\Gamma_1} = 0, \quad \forall W \in Y, \quad (2.110)$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \quad \text{y} \quad \theta = 0 \text{ sobre } \{x_3 = 0\}. \quad (2.111)$$

Reemplazando  $\mathbf{v}$  por  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_0$  en (2.109),  $W$  por  $\theta \in Y$  en (2.110), usando (2.28), (2.30) y la desigualdad de Hölder, deducimos que

$$Pr \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq |Pr M| \|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla \mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega)} + |Pr R| \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.112)$$

$$\|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + B \|\theta\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \theta_1\|_{L^2(\Omega)} \|\theta\|_{L^4(\Omega)}. \quad (2.113)$$

Por lo tanto, usando la desigualdad de Poincaré (Ver Lema 1.2.18 y Observación 1.2.19), de (2.112) y (2.113) llegamos a

$$Pr \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq |Pr M| \|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)} + C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega)} + C |Pr R| \|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.114)$$

$$\|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \theta_1\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.115)$$

Usando (2.115) en (2.114), encontramos que

$$Pr\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq (C|PrM| + C\|\nabla\theta_1\|_{L^2(\Omega)} + C\|\nabla\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega)} + C|PrR|\|\nabla\theta_1\|_{L^2(\Omega)})\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.116)$$

Pero como  $(\mathbf{u}_1, \theta_1)$  y  $(\mathbf{u}_2, \theta_2)$  son soluciones del sistema (2.33) - (2.35), entonces por el Teorema 2.4.6,  $(\mathbf{u}_1, \theta_1)$  y  $(\mathbf{u}_2, \theta_2)$  satisfacen la estimativa (2.100), lo que implica que

$$Pr\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq (C|PrM| + C_1 + C|PrR|)[\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}]\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)},$$

donde la constante  $C_1$  es obtenida de la estimativa (2.100) y depende linealmente de los parámetros  $M$ ,  $B$  y  $R$ . Por lo tanto,

$$Pr\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} - (C|PrM| + C_1 + C|PrR|)[\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}]\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq 0.$$

En consecuencia, si se satisface que

$$Pr - (C|PrM| + C_1 + C|PrR|)[\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}] > 0,$$

concluimos que  $\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} = 0$ , lo que implica que  $\nabla\mathbf{u} = 0$ , y por lo tanto  $\mathbf{u}$  es constante. Pero como de (2.111) tenemos que  $\mathbf{u} = 0$  sobre  $\Gamma_0$ , deducimos que  $\mathbf{u} = 0$ , y así  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ . Además, teniendo en cuenta que  $\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} = 0$ , de (2.115) obtenemos que  $\|\nabla\theta\|_{L^2(\Omega)} = 0$ , lo que implica que  $\theta$  es constante. Pero como de (2.111) tenemos que  $\theta = 0$  sobre  $\{x_3 = 0\}$ , deducimos  $\theta = 0$ , y así  $\theta_1 = \theta_2$ . A continuación establecemos este resultado como un teorema.

**Teorema 2.5.1.** Sean  $\phi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$ ,  $\phi_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$  y  $\mathbf{u}_g^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ . Si  $Pr - (C|PrM| + C_1 + C|PrR|)[\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}] > 0$ , entonces el problema (2.33) - (2.35) tiene solución única  $(\mathbf{u}, \theta) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega)$ . Además, la solución  $(\mathbf{u}, \theta)$  satisface la estimativa (2.100).

**Observación 2.5.2.** Observe que la condición

$$Pr - (C|PrM| + C_1 + C|PrR|)[\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}] > 0$$

se verifica si las funciones  $\mathbf{u}_\varepsilon$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son pequeñas o si los coeficientes  $M$ ,  $R$  y  $B$  son pequeños. En particular, si tomamos  $\mathbf{u}_g^0 = 0$ ,  $\phi_1 = 0$  y  $\phi_2 = 1$ , estamos en el problema original estudiado en [37]. En este caso la condición que determina la unicidad depende del tamaño de los parámetros  $Pr$ ,  $R$ ,  $M$  y  $B$ . Además como  $(\mathbf{u}_b, \theta_b, p_b)$  dada por (2.10) es solución del modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni con datos de frontera  $\mathbf{u}_g^0 = 0$ ,  $\phi_1 = 0$  y  $\phi_2 = \theta_c$ , tenemos que para pequeños valores de

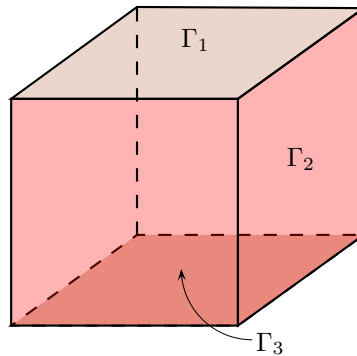
$R$ ,  $M$  y  $B$ , la única solución del modelo es  $(\mathbf{u}_b, \theta_b, p_b)$ . Este hecho motiva el estudio del problema de bifurcación analizado en [37].

## 2.6. Problema de Regularidad

En la sección anterior se probó la existencia de una solución débil  $(\mathbf{u}, \theta) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega)$  del problema (2.33) - (2.35); pero debido a que consideramos las derivadas tangenciales y normal de la temperatura en partes de la frontera, en el sentido de la traza, encontramos la necesidad de probar que la solución débil para la temperatura en  $H^1(\Omega)$  es, de hecho, una solución fuerte, esto es, pertenece al espacio  $H^2(\Omega)$ . Por esta razón, en esta sección abordamos el siguiente problema de regularidad para la solución débil  $\theta \in H^1(\Omega)$ : Hallar  $\theta \in H^2(\Omega)$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta\theta = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\theta & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} + B\theta = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = \phi_1 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \theta = \phi_2 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.117)$$

donde  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  como se muestra en la Figura 2.5.



**Figura 2.5** – Representación de  $\partial\Omega$ .

De los resultados de la sección 2.4 sabemos que existe una solución débil  $\theta \in W^{1,2}(\Omega)$  del sistema (2.117). Para probar que  $\theta \in W^{2,2}(\Omega)$ , usamos un procedimiento de regularidad elíptica el cual se evidencia en la prueba de la siguiente proposición:

**Proposición 2.6.1.** Sean  $\phi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ ,  $\phi_2 \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_3)$  y  $f \in L^p(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ . Entonces el

siguiente sistema

$$\begin{cases} -\Delta\theta = f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} + B\theta = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = \phi_1 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \theta = \phi_2 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.118)$$

tiene una solución  $\theta \in W^{2,p}(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ .

*Demostración.* En primer lugar considere  $\eta(x_3)$  y  $\tilde{\theta}$  definidos por:

$$\eta(x_3) = \exp[B(2x_3 - \frac{1}{2}x_3^2)] \quad \text{y} \quad \tilde{\theta} = \eta\theta. \quad (2.119)$$

Observe que como  $x_3 = 0$  en  $\Gamma_3$  y  $x_3 = 1$  en  $\Gamma_1$  tenemos que

$$\tilde{\theta}|_{\Gamma_3} = \eta(0)\theta|_{\Gamma_3} = \phi_2, \quad (2.120)$$

y

$$\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial(\eta\theta)}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_1} = \theta\frac{\partial\eta}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_1} + \eta\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_1} = \theta B(2 - x_3)\eta|_{\Gamma_1} - \eta B\theta|_{\Gamma_1} = 0. \quad (2.121)$$

Además, teniendo en cuenta que  $\nabla\eta \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\Gamma_2$  obtenemos

$$\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial(\eta\theta)}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_2} = \eta\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_2} + \theta\frac{\partial\eta}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\Gamma_2} = \eta\phi_1. \quad (2.122)$$

Así el problema (2.118) se redujo a encontrar  $\tilde{\theta} \in W^{2,p}(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ , tal que

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{\theta} = \tilde{f} & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\mathbf{n}} = \tilde{\phi}_1 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \tilde{\theta} = \phi_2 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.123)$$

donde  $\tilde{f} = -\theta\eta'' - 2\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\eta' + \eta f$  y  $\tilde{\phi}_1 = \eta\phi_1$ . Definimos ahora la función  $\tilde{\phi}_2$  dada por

$$\tilde{\phi}_2 = \begin{cases} \phi_2 & \text{sobre } \Gamma_3, \\ 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \Gamma_3. \end{cases} \quad (2.124)$$

Teniendo en cuenta que  $\phi_2 \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_3)$ , de manera análoga a (2.59) se prueba que  $\tilde{\phi}_2 \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ . Por lo tanto como  $\tilde{\phi}_2 \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ , por el Teorema 1.2.1 existe  $\Phi_2 \in H^2(\Omega)$  tal que  $\gamma(\Phi_2) = \tilde{\phi}_2$ . Considere  $\hat{\theta} = \tilde{\theta} - \Phi_2$ . Notemos que

$$\hat{\theta}|_{\Gamma_3} = \tilde{\theta}|_{\Gamma_3} - \Phi_2|_{\Gamma_3} = \phi_2 - \phi_2 = 0, \quad (2.125)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} = 0 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} = - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1}, \quad (2.126)$$

y

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2} = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2} = \tilde{\phi}_1 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2}. \quad (2.127)$$

Así el problema (2.123) se redujo a encontrar  $\hat{\theta} \in W^{2,p}(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ , tal que

$$\begin{cases} -\Delta \hat{\theta} = \hat{f} & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \mathbf{n}} = \phi_3 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \mathbf{n}} = \hat{\phi}_1 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \hat{\theta} = 0 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.128)$$

donde  $\hat{f} = \tilde{f} + \Delta \Phi_2$ ,  $\phi_3 = - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1}$  y  $\hat{\phi}_1 = \tilde{\phi}_1 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2}$ .

Ahora descomponemos la solución  $\hat{\theta}$  de (2.128) como la suma  $\hat{\theta} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ , donde  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$  resuelven respectivamente los siguientes problemas:

$$\begin{cases} -\Delta \theta_1 = \hat{f} & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \theta_1 = 0 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.129)$$

$$\begin{cases} -\Delta \theta_2 = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{n}} = \hat{\phi}_1 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \theta_2 = 0 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.130)$$

$$\begin{cases} -\Delta\theta_3 = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\theta_3}{\partial\mathbf{n}} = \phi_3 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \frac{\partial\theta_3}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \theta_3 = 0 & \text{sobre } \Gamma_3. \end{cases} \quad (2.131)$$

**Observación 2.6.2.** Si verificamos que existen  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in W^{2,p}(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$  que resuelven (2.129), (2.130) y (2.131) respectivamente, entonces tomando  $\hat{\theta} = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$  tenemos que  $\hat{\theta} \in W^{2,p}(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ , soluciona el sistema (2.128). Luego tomando  $\tilde{\theta} = \hat{\theta} + \Phi_2$  obtenemos que  $\tilde{\theta} \in W^{2,p}(\Omega)$  satisface (2.123), para  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ . Finalmente considerando  $\theta = \frac{1}{\eta}\tilde{\theta}$  concluimos que  $\theta \in W^{2,p}(\Omega)$  resuelve el problema (2.118) con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ , y con esto se concluiría la prueba del Lema.

Para probar la existencia de  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in W^{2,p}(\Omega)$ , requerimos del siguiente resultado preliminar:

**Teorema 2.6.3.** Si  $F \in L^p(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p < \infty$  entonces la solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta\omega = F & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ \omega = 0 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.132)$$

pertenece al espacio  $W^{2,p}(\Omega)$ .

*Demostración.* La demostración se sigue del Teorema 1 y de la Sección 5 de Dauge [16]. Véase también Dauge [17].  $\square$

Así por el Teorema 2.6.3, si  $\hat{f} \in L^p(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p < \infty$  entonces el sistema (2.129) tiene solución  $\theta_1 \in W^{2,p}(\Omega)$ . Recuerde que  $\hat{f} = -\theta\eta'' - 2\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\eta' + \eta f + \Delta\Phi_2$ . Observe que como  $\theta \in H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  entonces  $\frac{\partial\theta}{\partial x_3} \in L^2(\Omega)$ . Además, como por definición tenemos que

$$\eta(x_3) = \exp[B(2x_3 - \frac{1}{2}x_3^2)],$$

entonces

$$\eta' = B(2 - x_3)\eta$$

y

$$\eta'' = -B\eta + B^2(2 - x_3)^2\eta.$$

Por lo tanto como en  $\Omega$  tenemos que  $0 \leq x_3 \leq 1$ , entonces no es difícil verificar que  $\eta$ ,  $\eta'$  y  $\eta''$  pertenecen a  $L^2(\Omega)$ . Finalmente, como  $\Phi_2 \in H^2(\Omega)$ ,  $\Delta\Phi_2 \in L^2(\Omega)$ , y como por hipótesis inicial del lema tenemos que  $f \in L^p(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ , concluimos que  $\hat{f} \in L^p(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ . Así el sistema (2.129) tiene solución  $\theta_1 \in W^{2,p}(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ .

Por otro lado observe que para encontrar  $\theta_2, \theta_3 \in W^{2,p}(\Omega)$  soluciones de (2.130) y (2.131) respectivamente, no podemos utilizar directamente el Teorema 2.6.3 ya que estos sistemas no tienen condiciones de frontera homogéneas. Por lo tanto para resolver el problema (2.130), en primer lugar dividimos  $\Gamma_2$  en cuatro partes  $\Gamma_2^i$  con  $i = 1, 2, 3, 4$ , como se muestra en la figura 2.6 y descomponemos la solución  $\theta_2$  como la suma  $\theta_2 = \theta_{2_1} + \theta_{2_2} + \theta_{2_3} + \theta_{2_4}$ , donde  $\theta_{2_1}$ ,  $\theta_{2_2}$ ,  $\theta_{2_3}$  y  $\theta_{2_4}$  resuelven respectivamente los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} -\Delta\theta_{2_1} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\theta_{2_1}}{\partial\mathbf{n}} = \hat{\phi}_1^1 & \text{sobre } \Gamma_2^1, \\ \frac{\partial\theta_{2_1}}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \cup (\Gamma_2 \setminus \Gamma_2^1), \\ \theta_{2_1} = 0 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.133)$$

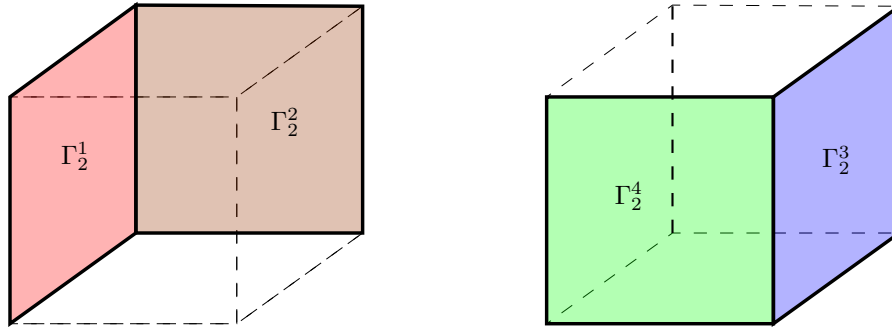
$$\begin{cases} -\Delta\theta_{2_2} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\theta_{2_2}}{\partial\mathbf{n}} = \hat{\phi}_1^2 & \text{sobre } \Gamma_2^2, \\ \frac{\partial\theta_{2_2}}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \cup (\Gamma_2 \setminus \Gamma_2^2), \\ \theta_{2_2} = 0 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.134)$$

$$\begin{cases} -\Delta\theta_{2_3} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\theta_{2_3}}{\partial\mathbf{n}} = \hat{\phi}_1^3 & \text{sobre } \Gamma_2^3, \\ \frac{\partial\theta_{2_3}}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \cup (\Gamma_2 \setminus \Gamma_2^3), \\ \theta_{2_3} = 0 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.135)$$

$$\begin{cases} -\Delta\theta_{24} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial\theta_{24}}{\partial\mathbf{n}} = \hat{\phi}_1^4 & \text{sobre } \Gamma_2^4, \\ \frac{\partial\theta_{24}}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \cup (\Gamma_2 \setminus \Gamma_2^4), \\ \theta_{24} = 0 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.136)$$

donde  $\hat{\phi}_1^i$  con  $i = 1, 2, 3, 4$ , es definida de la siguiente manera

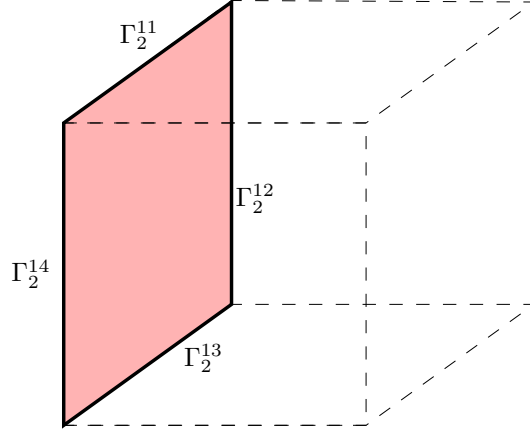
$$\hat{\phi}_1^i = \begin{cases} \phi_1|_{\Gamma_2^i} & \text{sobre } \Gamma_2^i, \\ 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \Gamma_2^i. \end{cases} \quad (2.137)$$



**Figura 2.6** – División de  $\Gamma_2$ .

Para resolver el problema (2.133) dividimos la frontera de  $\Gamma_2^1$ , denotada por  $\partial\Gamma_2^1 = \Gamma_2^{11} \cup \Gamma_2^{12} \cup \Gamma_2^{13} \cup \Gamma_2^{14}$  como se muestra en la figura 2.7, y construimos una función  $\psi_1$  como una solución de la ecuación de calor, con la variable  $x_2$  correspondiente al tiempo:

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} = \Delta\psi_1 & \text{en } \Gamma_2^1 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_2^{1i} \times (0, \infty), \quad i = 1, 2, 4, \\ \psi_1 = 0 & \text{sobre } \Gamma_2^{13} \times (0, \infty), \\ \psi_1(x_1, 0, x_3) = \phi_1(x_1, x_3) & \text{sobre } \Gamma_2^1. \end{cases} \quad (2.138)$$



**Figura 2.7** – División de  $\partial\Gamma_2^1$ .

Note que aplicando el conocido método de Galerkin a la ecuación lineal del calor (2.138), se muestra que existe una solución  $\psi_1 \in H^2(\Omega)$  del problema (2.138).

Así, considere para  $(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_2^1 \times (0, \infty)$ :

$$T_1(x_1, x_2, x_3) = - \left[ (x_2^2 - 1) \int_{x_2}^L \psi_1(x_1, z, x_3) dz + x_2^2 \frac{(L^2 - 1)}{2L} \psi_1(x_1, L, x_3) \right]. \quad (2.139)$$

Observe que como  $\psi_1 \in H^2(\Omega)$  entonces  $T_1 \in H^2(\Omega)$ . Ahora veamos que  $T_1$  satisface las condiciones de frontera en (2.133). En primer lugar note que sobre  $\Gamma_2^1$  tenemos que  $x_2 = 0$  y el vector normal exterior es  $\mathbf{n} = (0, -1, 0)$ , así

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2^1} &= \nabla T_1 \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_2^1} \\ &= 2x_2 \int_{x_2}^L \psi_1(x_1, z, x_3) dz - (x_2^2 - 1) \psi_1(x_1, x_2, x_3) + 2x_2 \frac{(L^2 - 1)}{2L} \psi_1(x_1, L, x_3) \\ &= -[-\psi_1(x_1, 0, x_3)] \\ &= \hat{\phi}_1^1. \end{aligned} \quad (2.140)$$

En segundo lugar teniendo en cuenta que sobre  $\Gamma_1$  el vector normal exterior es  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ , y como por (2.138) tenemos que  $\psi_{1,x_3} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} = 0$ , entonces

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_1} = \nabla T_1 \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_1}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[ (x_2^2 - 1) \int_{x_2}^L \psi_{1_{x_3}}(x_1, z, x_3) dz + x_2^2 \frac{(L^2 - 1)}{2L} \psi_{1_{x_3}}(x_1, L, x_3) \right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.141}$$

En tercer lugar observe que sobre  $\Gamma_2^2$ ,  $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ , y además como por (2.138),  $-\psi_{1_{x_1}} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2^2} = 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2^2} &= \nabla T_1 \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_2^2} \\
&= (x_2^2 - 1) \int_{x_2}^L \psi_{1_{x_1}}(x_1, z, x_3) dz + x_2^2 \frac{(L^2 - 1)}{2L} \psi_{1_{x_1}}(x_1, L, x_3) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.142}$$

En cuarto lugar teniendo en cuenta que sobre  $\Gamma_2^4$ ,  $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ , y como por (2.138),  $\psi_{1_{x_1}} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2^4} = 0$ , llegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2^4} &= \nabla T_1 \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_2^4} \\
&= - \left[ (x_2^2 - 1) \int_{x_2}^L \psi_{1_{x_1}}(x_1, z, x_3) dz + x_2^2 \frac{(L^2 - 1)}{2L} \psi_{1_{x_1}}(x_1, L, x_3) \right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.143}$$

En quinto lugar note que sobre  $\Gamma_2^3$  tenemos que  $x_2 = L$  y el vector normal exterior es  $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$ , así

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma_2^3} &= \nabla T_1 \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_2^3} \\
&= - \left[ 2x_2 \int_{x_2}^L \psi_1(x_1, z, x_3) dz - (x_2^2 - 1) \psi_1(x_1, x_2, x_3) + 2x_2 \frac{(L^2 - 1)}{2L} \psi_1(x_1, L, x_3) \right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.144}$$

Finalmente como por (2.138),  $\psi_1 = 0$  sobre  $\Gamma_3$ , entonces deducimos que

$$T_1 \Big|_{\Gamma_3} = 0. \tag{2.145}$$

Por lo tanto de (2.140) - (2.145) concluimos que  $T_1$  satisface las condiciones de frontera en (2.133). Además como  $T_1 \in H^2(\Omega)$  entonces  $-\Delta T_1 \in L^2(\Omega)$  y por consiguiente  $-\Delta T_1 \in L^p(\Omega)$  para  $\frac{6}{5} < p \leq$

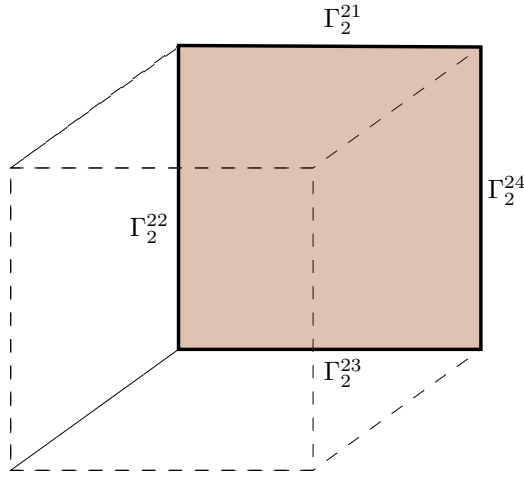
2; así por el Teorema 2.6.3, la solución  $T_1$  del sistema

$$\begin{cases} \Delta \tilde{T}_1 = -\Delta T_1 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ \tilde{T}_1 = 0 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.146)$$

pertenece al conjunto  $W^{2,p}(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ . En conclusión tomando  $\theta_{2_1} = T_1 + \tilde{T}_1$  tenemos que  $\theta_{2_1} \in W^{2,p}(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ , y  $\theta_{2_1}$  satisface el sistema (2.133).

De igual manera, para resolver el problema (2.134) dividimos la frontera de  $\Gamma_2^2$ , denotada por  $\partial\Gamma_2^2$ , en  $\partial\Gamma_2^2 = \Gamma_2^{21} \cup \Gamma_2^{22} \cup \Gamma_2^{23} \cup \Gamma_2^{24}$  como se muestra en la figura 2.8, construimos una función  $\psi_2 \in H^2(\Omega)$  como una solución de la ecuación de calor, con la variable  $x_1$  correspondiente al tiempo:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} = \Delta \psi_2 & \text{en } \Gamma_2^2 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_2^{2i} \times (0, \infty), \quad i = 1, 2, 4, \\ \psi_2 = 0 & \text{sobre } \Gamma_2^{23} \times (0, \infty), \\ \psi_2(0, x_2, x_3) = \phi_1(x_2, x_3) & \text{sobre } \Gamma_2^2, \end{cases} \quad (2.147)$$



**Figura 2.8** – División de  $\partial\Gamma_2^2$ .

y consideramos para  $(x_1, x_2, x_3) \in \Gamma_2^2 \times (0, \infty)$ :

$$T_2(x_1, x_2, x_3) = - \left[ (x_1^2 - 1) \int_{x_1}^l \psi_2(z, x_2, x_3) dz + x_1^2 \frac{(l^2 - 1)}{2l} \psi_2(l, x_2, x_3) \right]. \quad (2.148)$$

Un proceso similar al realizado en el caso de  $T_1$  permite verificar que  $T_2 \in H^2(\Omega)$  y cumple las condiciones de frontera de en (2.134). Además como  $-\Delta T_2 \in L^p(\Omega)$  para  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ , por el Teorema 2.6.3 el siguiente sistema

$$\begin{cases} \Delta \tilde{T}_2 = -\Delta T_2 & \text{sobre } \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{T}_2}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \Gamma_2 \cup \Gamma_1, \\ \tilde{T}_2 = 0 & \text{sobre } \Gamma_3, \end{cases} \quad (2.149)$$

tiene solución  $\tilde{T}_2 \in W^{2,p}(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ . En conclusión tomando  $\theta_{2_2} = T_2 + \tilde{T}_2$  tenemos que  $\theta_{2_2} \in W^{2,p}(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ , y  $\theta_{2_2}$  satisface el sistema (2.134).

De manera análoga a los dos procesos anteriores encontramos soluciones  $\theta_{2_3}, \theta_{2_4}$  y  $\theta_3$  en  $W^{2,p}(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$ , para los problemas (2.135), (2.136) y (2.131) respectivamente. Así, tomando  $\theta_2 = \theta_{2_1} + \theta_{2_2} + \theta_{2_3} + \theta_{2_4}$  tenemos que  $\theta_2 \in W^{2,p}(\Omega)$  con  $\frac{6}{5} < p \leq 2$  soluciona el sistema (2.130). Por lo tanto queda probada la existencia de  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in W^{2,p}(\Omega)$  que resuelven (2.129), (2.130) y (2.131) respectivamente, y por la Observación 2.6.2 el Lema queda probado.  $\square$

Teniendo en cuenta el Lema anterior, a continuación enunciamos el resultado más importante de esta sección.

**Teorema 2.6.4.** Sean  $\phi_1 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ ,  $\phi_2 \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_3)$ ,  $\mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{X}}$  y  $\theta \in H^1(\Omega)$  solución débil del sistema

$$\begin{cases} -\Delta \theta = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = \phi_1 & \text{sobre } \Gamma_2, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} + B\theta = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \theta = \phi_2 & \text{sobre } \Gamma_3. \end{cases} \quad (2.150)$$

Entonces el problema (2.150) tiene solución  $\theta \in H^2(\Omega)$ .

*Demostración.* En primer lugar observe que como  $\mathbf{u} \in \tilde{\mathbf{X}} \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$  entonces por el Teorema de inmersiones de Sobolev tenemos que  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^6(\Omega)$ . Además, como  $\theta \in H^1(\Omega)$ ,  $\nabla \theta \in L^2(\Omega)$  y así concluimos que  $-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ . Por lo tanto por la Proposición 2.6.1 concluimos que el problema (2.150) tiene solución  $\theta \in W^{2, \frac{3}{2}}(\Omega)$ . En segundo lugar, como  $\theta \in W^{2, \frac{3}{2}}(\Omega)$ ,  $\nabla \theta \in W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega)$ , y así como por el Teorema de inmersiones de Sobolev tenemos que  $W^{1, \frac{3}{2}}(\Omega) \hookrightarrow L^3(\Omega)$  entonces  $\nabla \theta \in L^3(\Omega)$ . Por lo tanto,  $-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta \in L^2(\Omega)$  y por la Proposición 2.6.1 concluimos que el problema (2.150) tiene solución  $\theta \in W^{2,2}(\Omega) = H^2(\Omega)$ .  $\square$

## Capítulo 3

# Problema de control de borde para el modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni

En este capítulo se estudiará un problema de control de borde, en el cual las ecuaciones estacionarias de Rayleigh-Bénard-Marangoni son consideradas como las restricciones, y las funciones de control actúan como condiciones de borde de tipo Dirichlet y Neumann aplicadas a la velocidad y la temperatura.

### 3.1. Formulación del problema de control

Aquí asumiremos las siguientes condiciones generales:

(H1) La función  $\mathbf{u}^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^2)$ , la función  $\mathbf{g} \in \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)$  y la función  $\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0 \in \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$  es definida por

$$\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0 = \begin{cases} \mathbf{g} & \text{sobre } \Gamma_0^1, \\ \mathbf{u}^0 & \text{sobre } \Gamma_0^2. \end{cases}$$

(H2) Alguna de las siguientes dos condiciones es válida:

- (i)  $\gamma_i \geq 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, 6$ , y  $\mathbf{U}_1 \subset \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)$ ,  $\mathcal{U}_2 \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$  y  $\mathcal{U}_3 \subset H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$  son conjuntos no vacíos, acotados, cerrados y convexos, o

(ii)  $\gamma_i \geq 0$  para  $i = 1, 2, 3$ ,  $\gamma_j > 0$  para  $j = 4, 5, 6$  y  $\mathbf{U}_1 \subset \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)$ ,  $\mathcal{U}_2 \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$  y  $\mathcal{U}_3 \subset H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$  son conjuntos no vacíos, cerrados y convexos.

(H3) La velocidad deseada  $\mathbf{u}_d \in L^p(\Omega)$  y la temperatura requerida  $\theta_d \in L^l(\Omega)$ , donde  $2 \leq p \leq 6$  y  $2 \leq l \leq 6$ .

Nos planteamos el siguiente problema de control óptimo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } (\mathbf{u}, \theta, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega) \times \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3 \text{ tal que, para } 2 \leq p \leq 6 \text{ y } 2 \leq l \leq 6, \text{ se} \\ \text{minimice el funcional} \\ \mathcal{J}(\mathbf{u}, \theta, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) = \frac{\gamma_1}{2} \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma_2}{p} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{\gamma_3}{l} \|\theta - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l + \frac{\gamma_4}{2} \|\mathbf{g}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 \\ \quad + \frac{\gamma_5}{2} \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}^2 + \frac{\gamma_6}{2} \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}^2, \\ \text{sujeto a que } (\mathbf{u}, \theta, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) \text{ sea solución de (2.33) - (2.35).} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Definimos el conjunto de soluciones admisibles,  $\mathcal{Z}_{ad}$ , por:

$$\mathcal{Z}_{ad} := \{\mathbf{z} = (\mathbf{u}, \theta, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega) \times \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3 : \mathcal{J}(\mathbf{z}) < \infty \text{ y } \mathbf{z} \text{ satisface (2.33) - (2.35)}\}.$$

Antes de probar el teorema mas importante de este capítulo, el cual garantiza la existencia de una solución óptima del problema de control (3.1), enunciamos y demostramos algunos resultados preliminares.

**Lema 3.1.1.** Sean  $a$ ,  $a_1$  y  $b_1$  los operadores lineales definidos en la Sección 2.2 y  $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \tilde{\mathbf{X}}$ ,  $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset H^1(\Omega)$  y  $(\phi_{1_m})_{m \in \mathbb{N}} \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$  sucesiones tales que  $\mathbf{u}_m$  converge débilmente a  $\mathbf{u}^*$  en  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ ,  $\theta_m$  converge débilmente a  $\theta^*$  en  $H^1(\Omega)$  y  $\phi_{1_m}$  converge débilmente a  $\phi_1^*$  en  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$ . Entonces,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Pr a(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}) = Pr a(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}), \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (3.2)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Pr M b_1(\theta_m, \mathbf{v}) = Pr M b_1(\theta^*, \mathbf{v}), \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (3.3)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_1(\theta_m, W) = a_1(\theta^*, W), \text{ para todo } W \in Y, \quad (3.4)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle B\theta_m, W \rangle_{\Gamma_1} = \langle B\theta^*, W \rangle_{\Gamma_1}, \text{ para todo } W \in Y, \quad (3.5)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle f(\theta_m), \mathbf{v} \rangle = \langle f(\theta^*), \mathbf{v} \rangle, \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (3.6)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \phi_{1_m}, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} = \langle \phi_1^*, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \text{ para todo } W \in Y. \quad (3.7)$$

*Demostración.* Fijemos  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$ . Defina  $f_{\mathbf{v}} : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por:

$$\langle f_{\mathbf{v}}, \mathbf{u} \rangle = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

En primer lugar veamos que  $f_{\mathbf{v}}$  es un operador lineal. Sean  $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \langle f_{\mathbf{v}}, \mathbf{u} + \alpha \mathbf{w} \rangle &= \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} + \alpha \nabla \mathbf{w}) \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + \alpha \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \\ &= \langle f_{\mathbf{v}}, \mathbf{u} \rangle + \alpha \langle f_{\mathbf{v}}, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

Luego,  $f_{\mathbf{v}}$  es un operador lineal. Veamos ahora, que  $f_{\mathbf{v}}$  es continuo. Sea  $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \langle f_{\mathbf{v}}, \mathbf{w} \rangle &= \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \\ &\leq \|\nabla \mathbf{w}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\ &= K \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Así,  $f_{\mathbf{v}}$  es continuo, lo cual, junto con la linealidad, implica que  $f_{\mathbf{v}} \in (\mathbf{H}^1(\Omega))^*$ . Por lo tanto, de (3.39) tenemos que

$$\langle f_{\mathbf{v}}, \mathbf{u}_m \rangle \rightarrow \langle f_{\mathbf{v}}, \mathbf{u}^* \rangle.$$

Luego,

$$Pr \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \rightarrow Pr \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega,$$

lo que implica que

$$Pr a(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}) \rightarrow Pr a(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}),$$

y así (3.2) queda demostrado. La prueba de (3.3) - (3.7) se realiza de manera análoga a la demostración de (3.2).  $\square$

**Lema 3.1.2.** Sean  $c$  y  $c_1$  los operadores lineales definidos en la Sección 2.2 y  $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  y  $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}}$

sucesiones que satisfacen las hipótesis del Lema 3.1.1. Entonces existen subsucesiones de  $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  y  $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , aun denotadas por  $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  y  $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}}$  respectivamente, tales que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_1(\mathbf{u}_m, \theta_m, W) = c_1(\mathbf{u}^*, \theta^*, W), \text{ para todo } W \in Y, \quad (3.8)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) = c_1(\mathbf{u}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}), \text{ para todo } \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0. \quad (3.9)$$

*Demostración.* Sea  $W \in Y$ . En primer lugar observemos que como las inmersiones  $\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$  y  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$  son compactas, entonces existen subsucesiones de  $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  y  $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , aun denotadas por  $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}}$  y  $(\theta_m)_{m \in \mathbb{N}}$  respectivamente, tales que  $\mathbf{u}_m$  converge fuertemente a  $\mathbf{u}^*$  en  $\mathbf{L}^4(\Omega)$  y  $\theta_m$  converge fuertemente a  $\theta^*$  en  $L^4(\Omega)$ . Además, como  $\theta_m$  converge débilmente a  $\theta^*$  en  $H^1(\Omega)$ ,  $\theta_m$  es acotada, es decir, existe una constante  $C$  tal que  $\|\theta_m\|_{H^1(\Omega)} \leq C$ .

Ahora, por (2.30), para demostrar (3.8) basta probar que  $\lim_{m \rightarrow \infty} -c_1(\mathbf{u}_m, W, \theta_m) = -c_1(\mathbf{u}^*, W, \theta^*)$ . Observemos que

$$\begin{aligned} |-c_1(\mathbf{u}_m, W, \theta_m) - (-c_1(\mathbf{u}^*, W, \theta^*))| &= \left| -\int_{\Omega} \mathbf{u}_m \cdot \nabla W \cdot \theta_m \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla W \cdot \theta^* \, d\Omega \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla W \cdot \theta^* - \mathbf{u}_m \cdot \nabla W \cdot \theta_m \, d\Omega \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\mathbf{u}^* \cdot \nabla W \cdot \theta^* - \mathbf{u}_m \cdot \nabla W \cdot \theta_m| \, d\Omega \\ &\leq \int_{\Omega} |\mathbf{u}^* \cdot \nabla W \cdot (\theta^* - \theta_m)| \, d\Omega + \int_{\Omega} |(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_m) \cdot \nabla W \cdot \theta_m| \, d\Omega \\ &\leq \|\mathbf{u}^*\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla W\|_{L^2(\Omega)} \|\theta^* - \theta_m\|_{L^4(\Omega)} \\ &\quad + \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_m\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla W\|_{L^2(\Omega)} \|\theta_m\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq K_1 \|\mathbf{u}^*\|_{H^1(\Omega)} \|\nabla W\|_{L^2(\Omega)} \|\theta^* - \theta_m\|_{L^4(\Omega)} \\ &\quad + K_2 \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_m\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla W\|_{L^2(\Omega)} \|\theta_m\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|-c_1(\mathbf{u}_m, W, \theta_m) - (-c_1(\mathbf{u}^*, W, \theta^*))| \rightarrow 0, \text{ cuando } m \rightarrow \infty,$$

y concluimos que  $\lim_{m \rightarrow \infty} -c_1(\mathbf{u}_m, W, \theta_m) = -c_1(\mathbf{u}^*, W, \theta^*)$ . La prueba de (3.9) se realiza de manera análoga a la demostración de (3.8).  $\square$

**Lema 3.1.3.** *El funcional  $\mathcal{J}$  definido en (3.1) es débilmente semicontinuo inferior sobre  $\mathcal{Z}_{ad}$ .*

*Demostración.* Sea  $(\mathbf{u}_m, \theta_m, \mathbf{g}_m, \phi_{1_m}, \phi_{2_m})_{m \in \mathbb{N}} \subset Z_{ad}$  una sucesión débilmente convergente a  $(\mathbf{u}, \theta, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega) \times \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3$ . Por lo tanto, cuando  $m \rightarrow \infty$  tenemos que

$$\mathbf{u}_m \rightarrow \mathbf{u} \text{ débilmente en } \tilde{\mathbf{X}}, \quad (3.10)$$

$$\theta_m \rightarrow \theta \text{ débilmente en } H^1(\Omega), \quad (3.11)$$

$$\mathbf{g}_m \rightarrow \mathbf{g} \text{ débilmente en } \mathbf{U}_1, \quad (3.12)$$

$$\phi_{1_m} \rightarrow \phi_1 \text{ débilmente en } \mathcal{U}_2, \quad (3.13)$$

$$\phi_{2_m} \rightarrow \phi_2 \text{ débilmente en } \mathcal{U}_3. \quad (3.14)$$

Así, como  $\tilde{\mathbf{X}} \subset \mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)$  para  $2 \leq p \leq 6$ ,  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^l(\Omega)$  para  $2 \leq l \leq 6$ , y  $\mathbf{u}_d \in L^p(\Omega)$  y  $\theta_d \in L^l(\Omega)$  para  $2 \leq p \leq 6$  y  $2 \leq l \leq 6$ , entonces de (3.10) y (3.11) deducimos que

$$\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_d \rightarrow \mathbf{u} - \mathbf{u}_d \text{ débilmente en } \mathbf{L}^p(\Omega), \quad (3.15)$$

$$\theta_m - \theta_d \rightarrow \theta - \theta_d \text{ débilmente en } L^l(\Omega), \quad (3.16)$$

para  $2 \leq p \leq 6$  y  $2 \leq l \leq 6$ . Además, de (3.10) concluimos que

$$\nabla \mathbf{u}_m \rightarrow \nabla \mathbf{u} \text{ débilmente en } L^2(\Omega), \quad (3.17)$$

y así

$$\text{rot } \mathbf{u}_m \rightarrow \text{rot } \mathbf{u} \text{ débilmente en } L^2(\Omega). \quad (3.18)$$

Por la Proposición 1.2.5, de (3.12) - (3.16) y (3.18), obtenemos

$$\|\mathbf{g}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}_m\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}, \quad (3.19)$$

$$\|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\phi_{1_m}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}, \quad (3.20)$$

$$\|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\phi_{2_m}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}, \quad (3.21)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}, \quad (3.22)$$

$$\|\theta - \theta_d\|_{L^l(\Omega)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\theta_m - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}, \quad (3.23)$$

$$\|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\text{rot } \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.24)$$

Por lo tanto, aplicando el Lema 1.2.8 para  $2 \leq n \leq 6$  en (3.19) - (3.24), llegamos a

$$\|\mathbf{g}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 \leq \left( \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}_m\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} \right)^2 = \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}_m\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2, \quad (3.25)$$

$$\|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}^2 \leq \left( \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\phi_{1m}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} \right)^2 = \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\phi_{1m}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}^2, \quad (3.26)$$

$$\|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}^2 \leq \left( \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\phi_{2m}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})} \right)^2 = \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\phi_{2m}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}^2, \quad (3.27)$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \leq \left( \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \right)^p = \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_m - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p, \quad (3.28)$$

$$\|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left( \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\text{rot } \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 = \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\text{rot } \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.29)$$

$$\|\theta - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l \leq \left( \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\theta_m - \theta_d\|_{L^l(\Omega)} \right)^l = \liminf_{m \rightarrow \infty} \|\theta_m - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l, \quad (3.30)$$

para  $2 \leq p \leq 6$  y  $2 \leq l \leq 6$ . Por lo tanto, de (3.25) - (3.30) y de la definición del funcional  $\mathcal{J}$ , concluimos que

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}, \theta, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\mathbf{u}_m, \theta_m, \mathbf{g}_m, \phi_{1m}, \phi_{2m}), \quad (3.31)$$

y en consecuencia se concluye que  $\mathcal{J}$  es débilmente semicontinuo inferior.  $\square$

## 3.2. Existencia de solución óptima

El objetivo de esta sección es demostrar el teorema principal de este capítulo, el cual garantiza la existencia de una solución óptima para el problema de control (3.1).

**Teorema 3.2.1.** *Suponga que las condiciones (H1) y (H3) son satisfechas. Entonces el problema de control óptimo (3.1) admite una solución óptima  $\mathbf{z}^* = (\mathbf{u}^*, \theta^*, \mathbf{g}^*, \phi_1^*, \phi_2^*) \in \mathcal{Z}_{ad}$ , esto es*

$$\mathcal{J}(\mathbf{z}^*) = \inf_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{ad}} \mathcal{J}(\mathbf{z}). \quad (3.32)$$

**Observación 3.2.2.** *Sea  $(\mathbf{u}_b, \theta_b)$  la solución básica del problema (2.4) - (2.9) dada por (2.10). Por el Teorema 3.2.1, podemos obtener la existencia de controles  $(\mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) \in \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_3$  y una solución débil  $(\mathbf{u}, \theta) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega)$  tal que se minimice el funcional (3.1), para  $\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_b$  y  $\theta_d = \theta_b$ .*

*Demostración.* En primer lugar, usando el Teorema 2.4.5 tenemos que  $\mathcal{Z}_{ad} \neq \emptyset$ . Además, notemos que como  $\mathcal{J}(\mathbf{z}) \geq 0$  para todo  $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{ad}$ , entonces  $\mathcal{J}$  es acotado inferiormente, y por lo tanto, el

$\inf_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{ad}} \mathcal{J}(\mathbf{z})$  existe. Así, existe una sucesión  $(\mathbf{z}_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}_{ad}$  tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\mathbf{z}_m) = \inf_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{ad}} \mathcal{J}(\mathbf{z}). \quad (3.33)$$

Note que si uno de los grupos de condiciones en **(H2)** se cumple, entonces existen constantes  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  tales que

$$\|\mathbf{g}_m\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} \leq C_1, \quad (3.34)$$

$$\|\phi_{1_m}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} \leq C_2, \quad (3.35)$$

$$\|\phi_{2_m}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})} \leq C_3. \quad (3.36)$$

En efecto, si suponemos que (i) en **(H2)** es válido, entonces  $\mathbf{U}_1 \subset \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)$ ,  $\mathcal{U}_2 \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$  y  $\mathcal{U}_3 \subset H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$  son conjuntos acotados, y además como  $(\mathbf{z}_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}_{ad}$  entonces  $(\mathbf{g}_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{U}_1$ ,  $(\phi_{1_m})_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_2$  y  $(\phi_{2_m})_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_3$ . Así, se concluye (3.34), (3.35) y (3.36). Por otro lado, suponiendo que (ii) en **(H2)** se cumple, entonces como  $(\mathcal{J}(\mathbf{z}_m))_{m \in \mathbb{N}}$  es convergente, tenemos que  $(\mathcal{J}(\mathbf{z}_m))_{m \in \mathbb{N}}$  es acotada, es decir, existe una constante  $C$  tal que  $|\mathcal{J}(\mathbf{z}_m)| \leq C$ . Así, como  $\gamma_i \geq 0$  para  $i = 1, 2, 3$  y  $\gamma_j > 0$  para  $j = 4, 5, 6$ , se concluyen (3.34), (3.35) y (3.36).

Por lo tanto, por la estimativa (2.100) del Teorema 2.4.5, tenemos que existen constantes  $C_4$  y  $C_5$  tales que

$$\|\mathbf{u}_m\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq C_4, \quad (3.37)$$

$$\|\theta_m\|_{H^1(\Omega)} \leq C_5. \quad (3.38)$$

En consecuencia, de (3.34) - (3.38) y teniendo en cuenta que los conjuntos  $\mathbf{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$  son cerrados, tenemos que existe una subsucesión de  $(\mathbf{z}_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{Z}_{ad}$ , aún denotada por  $(\mathbf{z}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , que converge débilmente a un elemento  $\mathbf{z}^* \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3$ , es decir,

$$\mathbf{u}_m \rightarrow \mathbf{u}^* \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ débilmente en } \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (3.39)$$

$$\theta_m \rightarrow \theta^* \in H^1(\Omega) \text{ débilmente en } H^1(\Omega), \quad (3.40)$$

$$\mathbf{g}_m \rightarrow \mathbf{g}^* \in \mathbf{U}_1 \text{ débilmente en } \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1), \quad (3.41)$$

$$\phi_{1_m} \rightarrow \phi_1^* \in \mathcal{U}_2 \text{ débilmente en } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}), \quad (3.42)$$

$$\phi_{2_m} \rightarrow \phi_2^* \in \mathcal{U}_3 \text{ débilmente en } H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\}). \quad (3.43)$$

Pero como las inmersiones  $\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$ ,  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$  y  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$  son compactas, tenemos que

$$\mathbf{u}_m \rightarrow \mathbf{u}^* \text{ fuertemente en } \mathbf{L}^4(\Omega), \quad (3.44)$$

$$\theta_m \rightarrow \theta^* \text{ fuertemente en } L^4(\Omega), \quad (3.45)$$

$$\mathbf{g}_m \rightarrow \mathbf{g}^* \text{ fuertemente en } \mathbf{L}^2(\Gamma_0^1), \quad (3.46)$$

$$\phi_{1_m} \rightarrow \phi_1^* \text{ fuertemente en } L^2(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}), \quad (3.47)$$

$$\phi_{2_m} \rightarrow \phi_2^* \text{ fuertemente en } L^2(\{x_3 = 0\}), \quad (3.48)$$

Veamos que  $\mathbf{z}^*$  satisface las ecuaciones de estado (2.33) - (2.35). Note que  $\mathbf{z}_m$  satisface (2.33) - (2.34) para todo  $m \in \mathbb{N}$ , es decir,

$$Pr a(\mathbf{u}_m, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\theta_m, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}) = \langle f(\theta_m), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (3.49)$$

$$c_1(\mathbf{u}_m, \theta_m, W) + a_1(\theta_m, W) + \langle B\theta_m, W \rangle_{\Gamma_1} = \langle \phi_{1_m}, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y. \quad (3.50)$$

Por lo tanto, tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$  en (3.49) y (3.50), y aplicando los Lemas 3.1.1 y 3.1.2, concluimos que  $\mathbf{z}^*$  satisface (2.33) - (2.34).

Además, como  $\mathbf{z}_m$  satisface las condiciones de frontera (2.35) para todo  $m \in \mathbb{N}$ , es decir,  $\gamma|_{\Gamma_0^1} \mathbf{u}_m = \mathbf{g}_m$ ,  $\gamma|_{\Gamma_0^2} \mathbf{u}_m = \mathbf{u}^0$  y  $\gamma|_{\{x_3=0\}} \theta_m = \phi_{2_m}$ , por la continuidad del operador traza tenemos que

$$\gamma|_{\Gamma_0^1} \mathbf{u}^* = \gamma|_{\Gamma_0^1} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{u}_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma|_{\Gamma_0^1} \mathbf{u}_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{g}_m = \mathbf{g}^*, \quad (3.51)$$

$$\gamma|_{\Gamma_0^2} \mathbf{u}^* = \gamma|_{\Gamma_0^2} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{u}_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma|_{\Gamma_0^2} \mathbf{u}_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0, \quad (3.52)$$

y

$$\gamma|_{\{x_3=0\}} \theta^* = \gamma|_{\{x_3=0\}} \lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma|_{\{x_3=0\}} \theta_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi_{2_m} = \phi_2^*. \quad (3.53)$$

Así, concluimos que  $\mathbf{z}^*$  satisface las restricciones (2.33) - (2.35). Ahora verifiquemos que  $\mathbf{u}^* \in \tilde{\mathbf{X}}$ , es decir, debemos verificar que  $u_3^* = 0$  sobre  $\Gamma_1$ ,  $\text{div } \mathbf{u}^* = 0$ ,  $\int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} dS = 0$  y  $\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}$ . Por un lado, como  $(\mathbf{u}_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \tilde{\mathbf{X}}$ , entonces la tercera componente de  $\mathbf{u}_m$  denotada por  $u_{m_3}$  es igual a 0 sobre  $\Gamma_1$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Así, por la continuidad del operador traza obtenemos que

$$\gamma|_{\Gamma_1} u_3^* = \gamma|_{\Gamma_1} \lim_{m \rightarrow \infty} u_{m_3} = \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma|_{\Gamma_1} u_{m_3} = 0.$$

Por otro lado, por (3.39) tenemos que  $\text{div } \mathbf{u}_m \rightarrow \text{div } \mathbf{u}^*$  débilmente en  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ , y como  $\text{div } \mathbf{u}_m = 0$  se tiene que  $\text{div } \mathbf{u}^* = 0$ . Además, como  $\mathbf{u}^* = \mathbf{g}^*$  sobre  $\Gamma_0^1$ ,  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^0$  sobre  $\Gamma_0^2$  y  $\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\Gamma_1$ , deducimos que  $\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$  y  $\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}$ . Así concluimos que  $\mathbf{u}^* \in \tilde{\mathbf{X}}$ .

En consecuencia  $\mathbf{z}^* \in \mathcal{Z}_{ad}$  y entonces

$$\mathcal{J}(\mathbf{z}^*) \geq \inf_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{ad}} \mathcal{J}(\mathbf{z}). \quad (3.54)$$

Además, teniendo en cuenta que  $\mathbf{z}_m \rightarrow \mathbf{z}^*$  débilmente en  $\tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega) \times \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3$ , y como por el Lema 3.1.3 el funcional  $\mathcal{J}$  es débilmente semicontinuo inferior sobre  $\mathcal{Z}_{ad}$ , tenemos que

$$\mathcal{J}(\mathbf{z}^*) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\mathbf{z}_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\mathbf{z}_m),$$

y teniendo en cuenta (3.33) llegamos a

$$\mathcal{J}(\mathbf{z}^*) \leq \inf_{\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_{ad}} \mathcal{J}(\mathbf{z}). \quad (3.55)$$

Por lo tanto, de (3.54) y (3.55) concluimos (3.32).  $\square$

### 3.3. Problema de control de parámetros

En esta sección deseamos abordar un problema de control, el cual consiste en encontrar coeficientes  $R$ ,  $Pr$ ,  $M$  y  $B$  tales que las correspondientes velocidad  $\mathbf{u}$  y temperatura  $\theta$  del fluido tengan unas configuraciones deseadas  $\mathbf{u}_d$  y  $\theta_d$ . Por lo tanto, únicamente esta sección  $\mathbf{g}$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  no denotarán controles, sino funciones dadas sobre las respectivas partes de frontera  $\partial\Omega$ . Así, consideremos el siguiente problema de control:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } \lambda^* := (R^*, Pr^*, M^*, B^*) \in \mathbf{M} := [0, l_1] \times [0, l_2] \times [0, l_3] \times [0, l_4] \text{ tal que} \\ \mathcal{I}(\lambda^*) = \min\{\mathcal{I}(\lambda) : \lambda \in \mathbf{M}\}, \end{cases} \quad (3.56)$$

donde el funcional  $\mathcal{I} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es definido por

$$\mathcal{I}(\lambda) = \|\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p + \|\theta_\lambda - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l, \quad 2 \leq p \leq 6, \quad 2 \leq l \leq 6, \quad (3.57)$$

con  $(\mathbf{u}_\lambda, \theta_\lambda) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega)$  la única solución de (2.33) - (2.35), garantizada por el Teorema 2.5.1, y  $(\mathbf{u}_d, \theta_d) \in \mathbf{L}^p(\Omega) \times L^l(\Omega)$  es un par de funciones deseadas. Aquí, las constantes  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  y  $l_4$  satisfacen que si  $R, Pr, M, B \in \mathbf{M}$ , se verifica la condición de pequeñez expresada en el Teorema 2.5.1, esto es,

$$Pr - (C|PrM| + C_1 + C|PrR|)(\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}) > 0. \quad (3.58)$$

Recordamos aquí que la constante  $C_1$  también depende linealmente de los parámetros  $R$ ,  $M$  y  $B$ .

**Teorema 3.3.1.** *El problema de control (3.56) tiene por lo menos una solución.*

*Demostración.* En primer lugar, probemos que el funcional  $\mathcal{I}$  es continuo.

Sea  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} = (R_n, Pr_n, M_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{M}$  una sucesión que converge a un elemento  $\lambda_0 \in \mathbf{M}$ . Denotaremos por  $(\mathbf{u}_n, \theta_n) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega)$  la única solución de (2.33) - (2.35) correspondiente a  $\lambda_n$ , y por  $(\mathbf{u}_0, \theta_0) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega)$  la única solución de (2.33) - (2.35) correspondiente a  $\lambda_0$ . Veamos que  $(\mathcal{I}(\lambda_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  converge al elemento  $\mathcal{I}(\lambda_0) \in \mathbb{R}$ , es decir,

$$|\mathcal{I}(\lambda_n) - \mathcal{I}(\lambda_0)| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.59)$$

Observe que

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}(\lambda_n) - \mathcal{I}(\lambda_0)| &= \left| \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p + \|\theta_n - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l - \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p - \|\theta_0 - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l \right| \\ &\leq \left| \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p - \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \right| + \left| \|\theta_n - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l - \|\theta_0 - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l \right|. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Usando la desigualdad  $a^p - b^p \leq C(a - b)(a^{p-1} + b^{p-1})$  en el lado derecho de (3.60), tenemos que

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}(\lambda_n) - \mathcal{I}(\lambda_0)| &\leq \left| \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p - \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^p \right| + \left| \|\theta_n - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l - \|\theta_0 - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l \right| \\ &\leq |C(\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} - \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}) (\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^{p-1} + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^{p-1})| \\ &\quad + |C(\|\theta_n - \theta_d\|_{L^l(\Omega)} - \|\theta_0 - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}) (\|\theta_n - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^{l-1} - \|\theta_0 - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^{l-1})| \\ &\leq C\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} (\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^{p-1} + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^{p-1}) \\ &\quad + C\|\theta_n - \theta_0\|_{L^l(\Omega)} (\|\theta_n - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^{l-1} + \|\theta_0 - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^{l-1}). \end{aligned}$$

Ahora, como  $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_n \in \tilde{\mathbf{X}} \hookrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)$ , para  $2 \leq p \leq 6$ , y  $\mathbf{u}_d \in L^p(\Omega)$ , deducimos que  $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^{p-1} + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_d\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}^{p-1} < \infty$ . De igual manera, como  $\theta_0, \theta_n \in H^1(\Omega) \hookrightarrow L^l(\Omega)$ , para  $2 \leq l \leq 6$ , y  $\theta_d \in L^l(\Omega)$ , concluimos que  $\|\theta_n - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^{l-1} + \|\theta_0 - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^{l-1} < \infty$ . Por lo tanto, para probar (3.59) y por consiguiente la continuidad del funcional  $\mathcal{I}$ , solo basta probar que

$$\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \mathbf{L}^p(\Omega), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad 2 \leq p \leq 6, \quad (3.61)$$

y

$$\theta_n \rightarrow \theta_0 \quad \text{en } L^l(\Omega), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad 2 \leq l \leq 6. \quad (3.62)$$

Notemos que, como  $(\mathbf{u}_n, \theta_n), (\mathbf{u}_0, \theta_0) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega)$  satisfacen (2.33) - (2.35) para los coeficientes  $\lambda_n$

y  $\lambda_0$  respectivamente, entonces

$$Pr_n \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + Pr_n M_n \int_{\Omega} \nabla \theta_n \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} Pr_n (b_n + R_n \theta_n) v_3 \, d\Omega, \quad (3.63)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_n \cdot \nabla \theta_n \cdot W \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \theta_n \cdot \nabla W \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} B_n \theta_n \cdot W \, dS = \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \phi_1 \cdot W \, dS, \quad (3.64)$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_g^0 \text{ sobre } \Gamma_0 \quad \text{y} \quad \theta_n = \phi_2 \text{ sobre } \{x_3 = 0\}, \quad (3.65)$$

y

$$Pr_0 \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + Pr_0 M_0 \int_{\Omega} \nabla \theta_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} Pr_0 (b_0 + R_0 \theta_0) v_3 \, d\Omega, \quad (3.66)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \theta_0 \cdot W \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \theta_0 \cdot \nabla W \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} B_0 \theta_0 \cdot W \, dS = \int_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \phi_1 \cdot W \, dS, \quad (3.67)$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_g^0 \text{ sobre } \Gamma_0 \quad \text{y} \quad \theta_0 = \phi_2 \text{ sobre } \{x_3 = 0\}, \quad (3.68)$$

para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$  y todo  $W \in Y$ . Tomando  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_0$  y  $\theta = \theta_n - \theta_0$ , de (3.63) - (3.68) obtenemos que el par  $(\mathbf{u}, \theta) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega)$  resuelve el siguiente sistema

$$\begin{aligned} & (Pr_n - Pr_0) \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + Pr_0 \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega + (Pr_n M_n - Pr_0 M_0) \int_{\Omega} \nabla \theta_n \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \, d\Omega \\ & + Pr_0 M_0 \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} (Pr_n b_n - Pr_0 b_0) v_3 \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (Pr_n R_n - Pr_0 R_0) \theta_n v_3 \, d\Omega + \int_{\Omega} Pr_0 R_0 \theta \cdot v_3 \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_n \cdot W \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \theta \cdot W \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \theta \cdot \nabla W \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} (B_n - B_0) \theta_n \cdot W \, dS \\ & + \int_{\Gamma_1} B_0 \theta \cdot W \, dS = 0, \quad \forall W \in Y, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \quad \text{y} \quad \theta = 0 \text{ sobre } \{x_3 = 0\}. \quad (3.71)$$

Notemos que como  $(\mathbf{u}_n, \theta_n)$  es solución débil del sistema (2.33) - (2.35), para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

por el Teorema 2.4.6, el par  $(\mathbf{u}_m, \theta_m)$  satisface la estimativa (2.100), para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto,

$$\|\nabla \mathbf{u}_n\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C[\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} + \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}], \quad (3.72)$$

donde la constante  $C$  depende de los parámetros  $Pr$ ,  $M$ ,  $B$  y  $R$ . Además, observe que la condición de frontera (3.71) implica que el par  $(\mathbf{u}, \theta) \in \mathbf{X}_0 \times Y$ . En consecuencia, reemplazando  $\mathbf{v}$  por  $\mathbf{u}$  en (3.69),  $W$  por  $\theta$  en (3.70), usando (2.28), (2.30) y la desigualdad de Hölder, llegamos a

$$\begin{aligned} Pr_0 \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq |Pr_n - Pr_0| \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + |Pr_n M_n - Pr_0 M_0| \|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + |Pr_0 M_0| \|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + |Pr_n b_n - Pr_0 b_0| \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} + |Pr_n R_n - Pr_0 R_0| \|\theta_n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad |Pr_0 R_0| \|\theta\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

y

$$\|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)}^2 + B_0 \|\theta\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega)} \|\theta\|_{L^4(\Omega)} + |B_n - B_0| \|\theta_n\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\theta\|_{L^2(\Gamma_1)}. \quad (3.74)$$

De (3.73) y (3.74), usando el Lema 1.2.14 y la desigualdad de Poincaré tenemos que

$$\begin{aligned} Pr_0 \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} &\leq |Pr_n - Pr_0| \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{L^2(\Omega)} + |Pr_n M_n - Pr_0 M_0| \|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + |Pr_0 M_0| \|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{L^2(\Omega)} + |Pr_n b_n - Pr_0 b_0| \\ &\quad + |Pr_n R_n - Pr_0 R_0| \|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega)} + |Pr_0 R_0| \|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

y

$$\|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega)} + |B_n - B_0| \|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.76)$$

Usando (3.76) en (3.75), encontramos que

$$\begin{aligned} Pr_0 \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} &\leq |Pr_n - Pr_0| \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{L^2(\Omega)} + |Pr_n M_n - Pr_0 M_0| \|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + |Pr_0 M_0| (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega)} + |B_n - B_0| \|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\quad + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}_n\|_{L^2(\Omega)} + |Pr_n b_n - Pr_0 b_0| + |Pr_n R_n - Pr_0 R_0| \|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + |Pr_0 R_0| (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega)} + |B_n - B_0| \|\nabla \theta_n\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Observemos que de la condición de pequeñez (3.58) expresada en las hipótesis del problema de

control (3.56), y teniendo en cuenta que  $\lambda_n$  converge a  $\lambda_0$ , concluimos que

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad (3.78)$$

lo que implica que

$$\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{u}_0 \text{ en } \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.79)$$

Por lo tanto, usando (3.79) en (3.76), y teniendo en cuenta que  $\lambda_n$  converge a  $\lambda_0$ , obtenemos que

$$\|\nabla \theta\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty, \quad (3.80)$$

y en consecuencia

$$\theta_n \rightarrow \theta_0 \text{ en } H^1(\Omega), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (3.81)$$

Así, teniendo en cuenta que  $\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^p(\Omega)$  para  $2 \leq p \leq 6$ , y  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^l(\Omega)$  para  $2 \leq l \leq 6$ , de (3.79) y (3.81) deducimos (3.61) y (3.62). En consecuencia, concluimos que el funcional  $\mathcal{I}$  es continuo. Por lo tanto, como  $\mathcal{I}$  es continuo y  $\mathbf{M}$  es un conjunto compacto, por el teorema clásico de Weierstrass concluimos que existe  $\lambda^* \in \mathbf{M}$  que satisface (3.56).  $\square$

## Capítulo 4

# Condiciones necesarias de optimalidad

En este capítulo probamos la existencia de multiplicadores de Lagrange para el problema de control óptimo (3.1), y partiendo de allí se derivan las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden. Finalmente, se obtiene un sistema de optimalidad asociado al problema de control (3.1), el cual está conformado por las ecuaciones de estado, las ecuaciones adjuntas y la condición de optimalidad.

### 4.1. Existencia de multiplicadores de Lagrange

Durante el desarrollo de este capítulo denotaremos por  $\mathbf{G}$  el espacio de Hilbert  $\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega)$ , siendo  $\tilde{\mathbf{X}}$  el espacio definido en (2.101). Dotamos a  $\mathbf{G}$  de la norma:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{G}} = (\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{X}}}^2 + \|\theta\|_{H^1(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ para } \mathbf{x} = (\mathbf{u}, \theta) \in \mathbf{G}. \quad (4.1)$$

Ahora, con el propósito de aplicar el método de Lagrange, observando (2.33) - (2.35) consideramos los siguientes operadores:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 : \mathbf{G} \times \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3 &\rightarrow \mathbf{X}_0^*, \\ \mathcal{F}_2 : \mathbf{G} \times \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3 &\rightarrow Y^*, \\ \mathcal{F}_3 : \mathbf{G} \times \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3 &\rightarrow \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0), \\ \mathcal{F}_4 : \mathbf{G} \times \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3 &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\}), \end{aligned}$$

definidos en cada punto  $\mathbf{z} := (\mathbf{x}, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) = (\mathbf{u}, \theta, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2)$  por:

$$\langle \mathcal{F}_1(\mathbf{z}), \mathbf{v} \rangle = Pr a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + Pr M b_1(\theta, \mathbf{v}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle f(\theta), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (4.2)$$

$$\langle \mathcal{F}_2(\mathbf{z}), W \rangle = c_1(\mathbf{u}, \theta, W) + a_1(\theta, W) + \langle B\theta, W \rangle_{\Gamma_1} - \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}}, \quad \forall W \in Y, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{F}_3(\mathbf{z}) = \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{F}_4(\mathbf{z}) = \gamma|_{\{x_3=0\}} \theta - \phi_2, \quad (4.5)$$

Así, el problema de control (3.1) es equivalente a minimizar el funcional

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{z}) = & \frac{\gamma_1}{2} \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma_2}{p} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{\gamma_3}{l} \|\theta - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l + \frac{\gamma_4}{2} \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 \\ & + \frac{\gamma_5}{2} \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}^2 + \frac{\gamma_6}{2} \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

sujeto a:

$$\langle \mathcal{F}_1(\mathbf{z}), \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \langle \mathcal{F}_2(\mathbf{z}), W \rangle = 0, \quad \mathcal{F}_3(\mathbf{z}) = 0, \quad \mathcal{F}_4(\mathbf{z}) = 0, \quad (4.7)$$

para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$  y  $W \in Y$ . Para garantizar la existencia de multiplicadores de Lagrange, mediante los siguientes lemas se probará que el problema de control óptimo (4.6) - (4.7) satisface las condiciones del Teorema 1.3.2.

**Lema 4.1.1.** *El funcional  $\mathcal{J}$  definido en (4.6) y los operadores  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$  definidos en (4.2) - (4.5) son Fréchet diferenciables con respecto a  $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \theta) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega) = \mathbf{G}$  en un punto arbitrario  $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\theta}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \in \tilde{\mathbf{X}} \times H^1(\Omega) \times \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_3$  en la dirección de  $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) \in \mathbf{G}$ . Además,*

1. *La derivada de Fréchet de  $\mathcal{J}$  es el funcional  $\mathcal{J}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{z}}) : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por*

$$\mathcal{J}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{z}})\mathbf{h} = \gamma_1(\text{rot } \hat{\mathbf{u}}, \text{rot } \mathbf{h}_1)_{L^2(\Omega)} + \gamma_2 \int_{\Omega} |\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d|^{p-1} \text{sgn}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d) \cdot \mathbf{h}_1 d\Omega + \gamma_3 \int_{\Omega} |\hat{\theta} - \theta_d|^{l-1} \text{sgn}(\hat{\theta} - \theta_d) \cdot \mathbf{h}_2 d\Omega. \quad (4.8)$$

2. *La derivada de Fréchet de  $\mathcal{F}_1$  es el operador  $\mathcal{F}_{1\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{z}}) : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{X}_0^*$ , definido por*

$$\langle \mathcal{F}_{1\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{z}})\mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle = Pr a(\mathbf{h}_1, \mathbf{v}) + Pr M b_1(h_2, \mathbf{v}) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{h}_1, \mathbf{v}) + c(\mathbf{h}_1, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - Pr R(h_2, v_3)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0. \quad (4.9)$$

3. *La derivada de Fréchet de  $\mathcal{F}_2$  es el operador  $\mathcal{F}_{2\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{z}}) : \mathbf{G} \rightarrow Y^*$ , definido por*

$$\langle \mathcal{F}_{2\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{z}})\mathbf{h}, W \rangle = c_1(\hat{\mathbf{u}}, h_2, W) + c_1(\mathbf{h}_1, \hat{\theta}, W) + a_1(h_2, W) + \langle B h_2, W \rangle_{\Gamma_1}, \quad \forall W \in Y. \quad (4.10)$$

4. La derivada de Fréchet de  $\mathcal{F}_3$  es el operador  $\mathcal{F}_{3\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{z}}) : \mathbf{G} \rightarrow \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ , definido por

$$\mathcal{F}_{3\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{z}})\mathbf{h} = \gamma|_{\Gamma_0}\mathbf{h}_1. \quad (4.11)$$

5. La derivada de Fréchet de  $\mathcal{F}_4$  es el operador  $\mathcal{F}_{4\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{z}}) : \mathbf{G} \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$ , definido por

$$\mathcal{F}_{4\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{z}})\mathbf{h} = \gamma|_{\{x_3=0\}}h_2. \quad (4.12)$$

*Demostración.* 1. Prueba de (4.8).

En primer lugar, probemos que si  $\hat{\mathcal{J}}$  un operador definido por

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{J}} : \tilde{\mathbf{X}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{u} &\mapsto \hat{\mathcal{J}}(\mathbf{u}) = \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

entonces  $\hat{\mathcal{J}}$  es derivable en el sentido de Fréchet, en un punto arbitrario  $\hat{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathbf{X}}$  en la dirección de  $\mathbf{h}_1 \in \tilde{\mathbf{X}}$ . Además, la derivada de Fréchet de  $\hat{\mathcal{J}}$  es el operador  $\hat{\mathcal{J}}'(\hat{\mathbf{u}}) : \tilde{\mathbf{X}} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\hat{\mathcal{J}}'(\hat{\mathbf{u}})\mathbf{h}_1 = 2(\text{rot } \hat{\mathbf{u}}, \text{rot } \mathbf{h}_1)_{L^2(\Omega)}. \quad (4.13)$$

En efecto, de la definición de  $\hat{\mathcal{J}}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{h}_1) - \tilde{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{u}}) &= \|\text{rot } \hat{\mathbf{u}} + \text{rot } \mathbf{h}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\text{rot } \hat{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= 2(\text{rot } \hat{\mathbf{u}}, \text{rot } \mathbf{h}_1)_{L^2(\Omega)} + \|\text{rot } \mathbf{h}_1\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

y por lo tanto obtenemos que

$$|\tilde{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{h}_1) - \tilde{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{u}}) - 2(\text{rot } \hat{\mathbf{u}}, \text{rot } \mathbf{h}_1)_{L^2(\Omega)}| = \|\text{rot } \mathbf{h}_1\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.14)$$

Teniendo en cuenta que  $\|\text{rot } \mathbf{h}_1\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\mathbf{h}_1\|_{H^1(\Omega)}$ , de (4.14) llegamos a

$$|\tilde{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{h}_1) - \tilde{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{u}}) - 2(\text{rot } \hat{\mathbf{u}}, \text{rot } \mathbf{h}_1)_{L^2(\Omega)}| \leq C\|\mathbf{h}_1\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (4.15)$$

lo que implica que

$$\frac{|\tilde{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{h}_1) - \tilde{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{u}}) - 2(\text{rot } \hat{\mathbf{u}}, \text{rot } \mathbf{h}_1)_{L^2(\Omega)}|}{\|\mathbf{h}_1\|_{\tilde{\mathbf{X}}}} \leq C\|\mathbf{h}_1\|_{\tilde{\mathbf{X}}}, \quad (4.16)$$

y en consecuencia, encontramos que

$$\lim_{\|\mathbf{h}_1\|_{\tilde{\mathbf{X}}} \rightarrow 0} \frac{|\tilde{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{h}_1) - \tilde{\mathcal{J}}(\hat{\mathbf{u}}) - 2(\text{rot } \hat{\mathbf{u}}, \text{rot } \mathbf{h}_1)_{L^2(\Omega)}|}{\|\mathbf{h}_1\|_{\tilde{\mathbf{X}}}} = 0, \quad (4.17)$$

y concluimos (4.13).

Por lo tanto, teniendo en cuenta (4.13), y siguiendo como en el Ejemplo 1.2.23, concluimos (4.8).

## 2. Prueba de (4.9).

Aplicando la definición de  $\mathcal{F}_1$  dada en (4.2) tenemos que para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$ ,

$$\langle \mathcal{F}_1(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2), \mathbf{v} \rangle = \text{Pr } a(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{h}_1, \mathbf{v}) + \text{Pr } M b_1(\hat{\theta} + h_2, \mathbf{v}) + c(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{h}_1, \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{h}_1, \mathbf{v}) - \langle f(\hat{\theta} + h_2), \mathbf{v} \rangle$$

y

$$\langle \mathcal{F}_1(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2), \mathbf{v} \rangle = \text{Pr } a(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \text{Pr } M b_1(\hat{\theta}, \mathbf{v}) + c(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - \langle f(\hat{\theta}), \mathbf{v} \rangle,$$

luego deducimos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}_1(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2), \mathbf{v} \rangle - \langle \mathcal{F}_1(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2), \mathbf{v} \rangle &= \text{Pr } a(\mathbf{h}_1, \mathbf{v}) + \text{Pr } M b_1(h_2, \mathbf{v}) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{h}_1, \mathbf{v}) \\ &\quad + c(\mathbf{h}_1, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{v}) - \text{Pr } R(h_2, v_3)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

y por lo tanto obtenemos que

$$\|\mathcal{F}_1(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - \mathcal{F}_1(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - A_1(\mathbf{h})\|_{\mathbf{X}_0^*} = \|c(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1, \cdot)\|_{\mathbf{X}_0^*}, \quad (4.18)$$

donde  $\langle A_1(\mathbf{h}), \mathbf{v} \rangle = \text{Pr } a(\mathbf{h}_1, \mathbf{v}) + \text{Pr } M b_1(h_2, \mathbf{v}) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{h}_1, \mathbf{v}) + c(\mathbf{h}_1, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - \text{Pr } R(h_2, v_3)_{L^2(\Omega)}$ , para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$ . Para el lado derecho de (4.18), usando la definición de  $\|\cdot\|_{\mathbf{X}_0^*}$  tenemos que

$$\|c(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1, \cdot)\|_{\mathbf{X}_0^*} = \sup_{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_0} \leq 1} |c(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{v})|. \quad (4.19)$$

Aplicando la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta que  $\mathbf{X}_0 \subset \tilde{\mathbf{X}} \subset \mathbf{H}^1(\Omega) \leftrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$  deducimos que

$$|c(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{h}_1\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla \mathbf{h}_1\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leq C \|\mathbf{h}_1\|_{\tilde{\mathbf{X}}}^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_0}. \quad (4.20)$$

Usando (4.20) en (4.19) y teniendo en cuenta (4.1), obtenemos que

$$\|c(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1, \cdot)\|_{\mathbf{X}_0^*} \leq C \sup_{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_0} \leq 1} \|\mathbf{h}_1\|_{\tilde{\mathbf{X}}}^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_0} \leq C \|\mathbf{h}_1\|_{\tilde{\mathbf{X}}}^2 \leq C \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{G}}^2. \quad (4.21)$$

Por lo tanto al sustituir (4.21) en (4.18), llegamos a

$$\|\mathcal{F}_1(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - \mathcal{F}_1(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - A_1(\mathbf{h})\|_{\mathbf{x}_0^*} \leq C \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{G}}^2, \quad (4.22)$$

lo cual implica que

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|_{\mathbf{G}} \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{F}_1(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - \mathcal{F}_1(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - A_1(\mathbf{h})\|_{\mathbf{x}_0^*}}{\|\mathbf{h}\|_{\mathbf{G}}} = 0, \quad (4.23)$$

y concluimos (4.9).

### 3. Prueba de (4.10).

Aplicando la definición de  $\mathcal{F}_2$  dada en (4.3) tenemos que para todo  $W \in Y$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}_2(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2), W \rangle &= c_1(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{h}_1, \hat{\theta} + h_2, W) + a_1(\hat{\theta} + h_2, W) + \langle B(\hat{\theta} + h_2), W \rangle_{\Gamma_1} \\ &\quad - \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \end{aligned}$$

y

$$\langle \mathcal{F}_2(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2), W \rangle = c_1(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\theta}, W) + a_1(\hat{\theta}, W) + \langle B\hat{\theta}, W \rangle_{\Gamma_1} - \langle \phi_1, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}},$$

luego deducimos que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}_2(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2), W \rangle - \langle \mathcal{F}_2(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2), W \rangle &= c_1(\hat{\mathbf{u}}, h_2, W) + c_1(\mathbf{h}_1, \hat{\theta}, W) + c_1(\mathbf{h}_1, h_2, W) \\ &\quad + a_1(h_2, W) + \langle Bh_2, W \rangle_{\Gamma_1}, \end{aligned}$$

y por lo tanto obtenemos que

$$\|\mathcal{F}_2(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - \mathcal{F}_2(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - A_2(\mathbf{h})\|_{Y^*} = \|c_1(\mathbf{h}_1, h_2, \cdot)\|_{Y^*}, \quad (4.24)$$

donde  $\langle A_2(\mathbf{h}), W \rangle = c_1(\hat{\mathbf{u}}, h_2, W) + c_1(\mathbf{h}_1, \hat{\theta}, W) + a_1(h_2, W) + \langle Bh_2, W \rangle_{\Gamma_1}$ , para todo  $W \in Y$ .

Para el lado derecho de (4.24), usando la definición de  $\|\cdot\|_{Y^*}$  tenemos que

$$\|c_1(\mathbf{h}_1, h_2, \cdot)\|_{Y^*} = \sup_{\|W\|_Y \leq 1} |c_1(\mathbf{h}_1, h_2, W)|. \quad (4.25)$$

Aplicando la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta que  $Y \subset H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$  y  $\tilde{\mathbf{X}} \subset \mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$  llegamos a

$$|c_1(\mathbf{h}_1, h_2, W)| \leq \|\mathbf{h}_1\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla h_2\|_{L^2(\Omega)} \|W\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|\mathbf{h}_1\|_{\tilde{\mathbf{X}}} \|h_2\|_{H^1(\Omega)} \|W\|_Y. \quad (4.26)$$

Usando (4.26) en (4.25) deducimos que

$$\|c_1(\mathbf{h}_1, h_2, \cdot)\|_{Y^*} \leq C \sup_{\|W\|_Y \leq 1} \|\mathbf{h}_1\|_{\tilde{\mathbf{X}}} \|h_2\|_{H^1(\Omega)} \|W\|_Y \leq C \|\mathbf{h}_1\|_{\tilde{\mathbf{X}}} \|h_2\|_{H^1(\Omega)}. \quad (4.27)$$

Aplicando la desigualdad de Young (véase Lema 1.2.15), tenemos que

$$C \|\mathbf{h}_1\|_{\tilde{\mathbf{X}}} \|h_2\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{h}_1\|_{\tilde{\mathbf{X}}}^2 + \frac{1}{2} \|h_2\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) = \frac{1}{2} C \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{G}}^2. \quad (4.28)$$

Usando (4.28) en (4.27) obtenemos que

$$\|c_1(\mathbf{h}_1, h_2, \cdot)\|_{Y^*} \leq \frac{1}{2} C \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{G}}^2. \quad (4.29)$$

Por lo tanto al sustituir (4.29) en (4.24), resulta

$$\|\mathcal{F}_2(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - \mathcal{F}_2(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - A_2(\mathbf{h})\|_{Y^*} \leq \frac{1}{2} C \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{G}}^2, \quad (4.30)$$

lo cual implica que

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|_{\mathbf{G}} \rightarrow 0} \frac{\|\mathcal{F}_2(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - \mathcal{F}_2(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - A_2(\mathbf{h})\|_{Y^*}}{\|\mathbf{h}\|_{\mathbf{G}}} = 0, \quad (4.31)$$

y concluimos (4.10).

#### 4. Prueba de (4.11).

Aplicando la definición de  $\mathcal{F}_3$  dada en (4.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - \mathcal{F}_3(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) &= \gamma|_{\Gamma_0}(\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{h}_1) - \mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0 - (\gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0) \\ &= \gamma|_{\Gamma_0} \hat{\mathbf{u}} + \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{h}_1 - \mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0 - \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{u} + \mathbf{u}_{\mathbf{g}}^0 \\ &= \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{h}_1. \end{aligned}$$

de lo cual

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|_X \rightarrow 0} \frac{\left\| \mathcal{F}_3(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - \mathcal{F}_3(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{h}_1 \right\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}}{\|\mathbf{h}\|_X} = 0,$$

y concluimos (4.11).

#### 5. Prueba de (4.12).

Aplicando la definición de  $\mathcal{F}_4$  dada en (4.5) deducimos que

$$\mathcal{F}_4(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - \mathcal{F}_4(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) = \gamma|_{\{x_3=0\}}(\hat{\theta} - h_2) - \phi_2 - (\gamma|_{\{x_3=0\}} \hat{\theta} - \phi_2)$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma|_{\{x_3=0\}}\hat{\theta} - \gamma|_{\{x_3=0\}}h_2 - \phi_2 - \gamma|_{\{x_3=0\}}\hat{\theta} + \phi_2 \\
&= \gamma|_{\{x_3=0\}}h_2.
\end{aligned}$$

de lo cual

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|_X \rightarrow 0} \frac{\left\| \mathcal{F}_4(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{h}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - \mathcal{F}_4(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) - \gamma|_{\{x_3=0\}}h_2 \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}}{\|\mathbf{h}\|_X} = 0,$$

y concluimos (4.12). □

**Lema 4.1.2.** *El funcional  $\mathcal{J}$  definido en (4.6) y los operadores  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$ ,  $\mathcal{F}_3$  y  $\mathcal{F}_4$  satisfacen la condición de convexidad.*

*Demostración.* 1. Convexidad del funcional  $\mathcal{J}$ .

Para probar que el funcional  $\mathcal{J}$  satisface la condición de convexidad, debemos probar que  $\mathcal{J}$  es convexo con respecto a  $\mathbf{g} \in \mathbf{U}_1 \subset \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)$ ,  $\phi_1 \in \mathcal{U}_2 \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$  y  $\phi_2 \in \mathcal{U}_3 \subset H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$ , con  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathcal{U}_2$  y  $\mathcal{U}_3$  conjuntos convexos. Veamos en primer lugar que  $\mathcal{J}$  es convexo con respecto a  $\mathbf{g} \in \mathbf{U}_1$ , es decir, debemos probar que para todo  $\alpha \in [0, 1]$  y todo  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathbf{U}_1$ , se verifica que

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{g}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{g}_2, \phi_1, \phi_2) \leq \alpha \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_1, \phi_1, \phi_2) + (1 - \alpha) \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_2, \phi_1, \phi_2). \quad (4.32)$$

Observe que como  $\mathbf{U}_1$  es un conjunto convexo, dados  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathbf{U}_1$  y  $\alpha \in [0, 1]$  tenemos que

$$\alpha \mathbf{g}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{g}_2 \in \mathbf{U}_1.$$

Por lo tanto, de la definición de  $\mathcal{J}$  en (4.6), deducimos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{g}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{g}_2, \phi_1, \phi_2) &= \frac{\gamma_1}{2} \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma_2}{p} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{\gamma_3}{l} \|\theta - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l \\
&+ \frac{\gamma_4}{2} \|\alpha \mathbf{g}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{g}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 + \frac{\gamma_5}{2} \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}^2 \\
&+ \frac{\gamma_6}{2} \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}^2. \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad triangular obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|\alpha \mathbf{g}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{g}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 &\leq (\|\alpha \mathbf{g}_1\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} + \|(1 - \alpha) \mathbf{g}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)})^2 \\
&= (\alpha \|\mathbf{g}_1\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} + (1 - \alpha) \|\mathbf{g}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)})^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^2 \|\mathbf{g}_1\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 + (1-\alpha)^2 \|\mathbf{g}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 \\
&\quad + 2\alpha(1-\alpha) \|\mathbf{g}_1\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} \|\mathbf{g}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} \\
&= \alpha \|\mathbf{g}_1\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 + (1-\alpha) \|\mathbf{g}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 \\
&\quad - \alpha(1-\alpha) (\|\mathbf{g}_1\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 + \|\mathbf{g}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 - 2\|\mathbf{g}_1\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} \|\mathbf{g}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}) \\
&= \alpha \|\mathbf{g}_1\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 + (1-\alpha) \|\mathbf{g}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 \\
&\quad - \alpha(1-\alpha) (\|\mathbf{g}_1\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} - \|\mathbf{g}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)})^2 \\
&\leq \alpha \|\mathbf{g}_1\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 + (1-\alpha) \|\mathbf{g}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la desigualdad (4.34) en (4.33) llegamos a

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{g}_1 + (1-\alpha) \mathbf{g}_2, \phi_1, \phi_2) &\leq \frac{\gamma_1}{2} \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma_2}{p} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_d\|_{L^p(\Omega)}^p + \frac{\gamma_3}{l} \|\theta - \theta_d\|_{L^l(\Omega)}^l \\
&\quad + \frac{\gamma_4}{2} \alpha \|\mathbf{g}_1\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 + \frac{\gamma_4}{2} (1-\alpha) \|\mathbf{g}_2\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 \\
&\quad + \frac{\gamma_5}{2} \|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}^2 + \frac{\gamma_6}{2} \|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}^2 \\
&= \alpha \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_1, \phi_1, \phi_2) + (1-\alpha) \mathcal{J}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_2, \phi_1, \phi_2),
\end{aligned}$$

y concluimos (4.32). La prueba de que  $\mathcal{J}$  es convexo con respecto a  $\phi_1 \in \mathcal{U}_2$  y  $\phi_2 \in \mathcal{U}_3$  se realiza de manera análoga a la demostración de (4.32).

## 2. Operador $\mathcal{F}_1$ .

Note que como  $\mathcal{F}_1$  NO depende de ninguno de los controles, entonces  $\mathcal{F}_1$  satisface trivialmente la condición de convexidad.

## 3. Operador $\mathcal{F}_2$ .

Teniendo en cuenta la definición de  $\mathcal{F}_2$  dada en (4.3), debemos probar que para todo  $\alpha \in [0, 1]$  y todo  $\phi_{11}, \phi_{12} \in \mathcal{U}_2 \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\})$ , con  $\mathcal{U}_2$  convexo, se verifica que

$$\langle \mathcal{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{g}, \alpha \phi_{11} + (1-\alpha) \phi_{12}, \phi_2), W \rangle = \alpha \langle \mathcal{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{g}, \phi_{11}, \phi_2), W \rangle + (1-\alpha) \langle \mathcal{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{g}, \phi_{12}, \phi_2), W \rangle, \tag{4.35}$$

para todo  $W \in Y$ . Observe que como  $\mathcal{U}_2$  es un conjunto convexo, dados  $\phi_{11}, \phi_{12} \in \mathcal{U}_2$  y  $\alpha \in [0, 1]$  tenemos que

$$\alpha \phi_{11} + (1-\alpha) \phi_{12} \in \mathcal{U}_2.$$

Por lo tanto, para todo  $W \in Y$ , obtenemos que

$$\langle \mathcal{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{g}, \alpha \phi_{11} + (1-\alpha) \phi_{12}, \phi_2), W \rangle = c_1(\mathbf{u}, \theta, W) + a_1(\theta, W) + \langle B\theta, W \rangle_{\Gamma_1}$$

$$\begin{aligned}
& - \langle \alpha \phi_{1_1} + (1 - \alpha) \phi_{1_2}, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \\
& = \alpha [c_1(\mathbf{u}, \theta, W) + a_1(\theta, W) + \langle B\theta, W \rangle_{\Gamma_1}] \\
& \quad - \alpha \langle \phi_{1_1}, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \\
& \quad + (1 - \alpha) [c_1(\mathbf{u}, \theta, W) + a_1(\theta, W) + \langle B\theta, W \rangle_{\Gamma_1}] \\
& \quad - (1 - \alpha) \langle \phi_{1_2}, W \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \\
& = \alpha \mathcal{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{g}, \phi_{1_1}, \phi_2) + (1 - \alpha) \mathcal{F}_2(\mathbf{x}, \mathbf{g}, \phi_{1_2}, \phi_2),
\end{aligned}$$

y concluimos (4.35).

#### 4. Operador $\mathcal{F}_3$ .

Teniendo en cuenta la definición de  $\mathcal{F}_3$  dada en (4.4), debemos probar que para todo  $\alpha \in [0, 1]$  y todo  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \mathbf{U}_1 \subset \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)$ , con  $\mathbf{U}_1$  convexo, se verifica que

$$\mathcal{F}_3(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{g}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{g}_2, \phi_1, \phi_2) = \alpha \mathcal{F}_3(\mathbf{x}, \mathbf{g}_1, \phi_1, \phi_2) + (1 - \alpha) \mathcal{F}_3(\mathbf{x}, \mathbf{g}_2, \phi_1, \phi_2). \quad (4.36)$$

Observemos que

$$\mathbf{u}_{\alpha \mathbf{g}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{g}_2}^0 = \begin{cases} \alpha \mathbf{g}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{g}_2 & \text{sobre } \Gamma_0^1, \\ \mathbf{u}^0 & \text{sobre } \Gamma_0^2, \end{cases} \quad (4.37)$$

$$= \begin{cases} \alpha \mathbf{g}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{g}_2 & \text{sobre } \Gamma_0^1, \\ \alpha \mathbf{u}^0 + (1 - \alpha) \mathbf{u}^0 & \text{sobre } \Gamma_0^2, \end{cases} \quad (4.38)$$

$$= \alpha \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}^0 + (1 - \alpha) \mathbf{u}_{\mathbf{g}_2}^0. \quad (4.39)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{g}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{g}_2, \phi_1, \phi_2) & = \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\alpha \mathbf{g}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{g}_2}^0 \\
& = \alpha \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{u} + (1 - \alpha) \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{u} - (\alpha \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}^0 + (1 - \alpha) \mathbf{u}_{\mathbf{g}_2}^0) \\
& = \alpha (\gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathbf{g}_1}^0) + (1 - \alpha) (\gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathbf{g}_2}^0) \\
& = \alpha \mathcal{F}_3(\mathbf{x}, \mathbf{g}_1, \phi_1, \phi_2) + (1 - \alpha) \mathcal{F}_3(\mathbf{x}, \mathbf{g}_2, \phi_1, \phi_2),
\end{aligned}$$

y concluimos (4.36).

#### 5. Operador $\mathcal{F}_4$ .

Teniendo en cuenta la definición de  $\mathcal{F}_4$  dada en (4.5), debemos probar que para todo  $\alpha \in [0, 1]$

y todo  $\phi_{2_1}, \phi_{2_2} \in \mathcal{U}_3 \subset H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$ , con  $\mathcal{U}_3$  convexo, se verifica que

$$\mathcal{F}_4(\mathbf{x}, \mathbf{g}, \phi_1, \alpha\phi_{2_1} + (1 - \alpha)\phi_{2_2}) = \alpha\mathcal{F}_4(\mathbf{x}, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_{2_1}) + (1 - \alpha)\mathcal{F}_4(\mathbf{x}, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_{2_2}). \quad (4.40)$$

Observe que como  $\mathcal{U}_3$  es un conjunto convexo, dados  $\phi_{2_1}, \phi_{2_2} \in \mathcal{U}_3$  y  $\alpha \in [0, 1]$  tenemos que

$$\alpha\phi_{2_1} + (1 - \alpha)\phi_{2_2} \in \mathcal{U}_3.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4(\mathbf{x}, \mathbf{g}, \phi_1, \alpha\phi_{2_1} + (1 - \alpha)\phi_{2_2}) &= \gamma|_{\{x_3=0\}}\theta - (\alpha\phi_{2_1} + (1 - \alpha)\phi_{2_2}) \\ &= (1 - \alpha)\gamma|_{\{x_3=0\}}\theta + \alpha\gamma|_{\{x_3=0\}}\theta - \alpha\phi_{2_1} - (1 - \alpha)\phi_{2_2} \\ &= \alpha(\gamma|_{\{x_3=0\}}\theta - \alpha\phi_{2_1}) + (1 - \alpha)(\gamma|_{\{x_3=0\}}\theta - \phi_{2_2}) \\ &= \alpha\mathcal{F}_4(\mathbf{x}, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_{2_1}) + (1 - \alpha)\mathcal{F}_4(\mathbf{x}, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_{2_2}), \end{aligned}$$

y concluimos (4.40). □

Por simplicidad en la notación, considere el espacio  $\mathbb{M} = \mathbf{X}_0^* \times Y^* \times \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \times H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$ . Observando las definiciones de los operadores  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  y  $\mathcal{F}_4$  dadas en (4.2) - (4.5) respectivamente, se tiene el operador

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4) : \mathbf{G} \times \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3 \rightarrow \mathbb{M},$$

definido, para cada  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$  y cada  $W \in Y$ , por

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{F}_1(\mathbf{z}), \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathcal{F}_2(\mathbf{z}), W \rangle \\ \mathcal{F}_3(\mathbf{z}) \\ \mathcal{F}_4(\mathbf{z}) \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

el cual por el Lema 4.1.1 es Fréchet diferenciable con respecto a  $\mathbf{x} \in \mathbf{G}$  en la dirección de  $\mathbf{h} \in \mathbf{G}$ . De (4.9) - (4.12) se tiene que la derivada de Fréchet de  $F$  con respecto a  $\mathbf{x}$  en un punto arbitrario  $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2)$  es el operador

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{z}}) : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{M},$$

definido de la siguiente manera: para cada  $(\mathbf{v}, W) \in \mathbf{X}_0 \times Y$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{z}})\mathbf{h}, (\mathbf{v}, W) \rangle &= \begin{pmatrix} \langle \mathcal{F}_{1_{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{z}})\mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathcal{F}_{2_{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{z}})\mathbf{h}, W \rangle \\ \mathcal{F}_{3_{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{z}})\mathbf{h} \\ \mathcal{F}_{4_{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{z}})\mathbf{h} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Pr a(\mathbf{h}_1, \mathbf{v}) + Pr Mb_1(h_2, \mathbf{v}) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{h}_1, \mathbf{v}) + c(\mathbf{h}_1, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - Pr R(h_2, v_3)_{L^2(\Omega)} \\ c_1(\hat{\mathbf{u}}, h_2, W) + c_1(\mathbf{h}_1, \hat{\theta}, W) + a_1(h_2, W) + \langle Bh_2, W \rangle_{\Gamma_1} \\ \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{h}_1 \\ \gamma|_{\{x_3=0\}} h_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.42)$$

**Lema 4.1.3.** *Sea  $\mathbf{z}^* = (\mathbf{x}^*, \mathbf{g}^*, \phi_1^*, \phi_2^*) \in \mathcal{Z}_{ad}$  una solución óptima del problema (4.6) - (4.7), entonces el rango del operador  $\mathcal{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^*)$  definido en (4.42) es cerrado y de codimensión finita.*

*Demostración.* En primer lugar definiendo los operadores

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathbf{G} &\rightarrow \mathbb{M} \\ \mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, h_2) &\mapsto \begin{pmatrix} Pr a(\mathbf{h}_1, \mathbf{v}) + Pr Mb_1(h_2, \mathbf{v}) - Pr R(h_2, v_3)_{L^2(\Omega)} \\ a_1(h_2, W) + \langle Bh_2, W \rangle_{\Gamma_1} \\ \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{h}_1 \\ \gamma|_{\{x_3=0\}} h_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.43)$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}} : \mathbf{G} &\rightarrow \mathbb{M} \\ \mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, h_2) &\mapsto \begin{pmatrix} c(\mathbf{u}^*, \mathbf{h}_1, \mathbf{v}) + c(\mathbf{h}_1, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}) \\ c_1(\mathbf{u}^*, h_2, W) + c_1(\mathbf{h}_1, \theta^*, W) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

para cada  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$  y  $W \in Y$ , la igualdad (4.42) es equivalente a

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^*)\mathbf{h} = \mathcal{I}(\mathbf{h}) + \tilde{\mathcal{I}}(\mathbf{h}), \quad (4.45)$$

donde  $\mathcal{I}$  es un isomorfismo e  $\tilde{\mathcal{I}}$  es un operador compacto. En efecto,

- (i)  $\mathcal{I}$  es un isomorfismo.

Observe que claramente  $\mathcal{I}$  es un operador lineal (véase Sección 2.2). Probemos que  $\mathcal{I}$  es inyectivo. Para este fin, veamos que si  $\mathcal{I}(\hat{\mathbf{h}}) = \mathcal{I}(\tilde{\mathbf{h}})$  con  $\hat{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{h}} \in \mathbf{G}$ , entonces  $\hat{\mathbf{h}} = \tilde{\mathbf{h}}$ . Notemos que si  $\mathcal{I}(\hat{\mathbf{h}}) = \mathcal{I}(\tilde{\mathbf{h}})$  entonces, de (4.43), deducimos que

$$\begin{aligned} & Pr a(\hat{\mathbf{h}}_1, \mathbf{v}) + Pr Mb_1(\hat{h}_2, \mathbf{v}) - Pr R(\hat{h}_2, v_3)_{L^2(\Omega)} \\ &= Pr a(\tilde{\mathbf{h}}_1, \mathbf{v}) + Pr Mb_1(\tilde{h}_2, \mathbf{v}) - Pr R(\tilde{h}_2, v_3)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$a_1(\hat{h}_2, W) + \langle B\hat{h}_2, W \rangle_{\Gamma_1} = a_1(\tilde{h}_2, W) + \langle B\tilde{h}_2, W \rangle_{\Gamma_1}, \quad (4.47)$$

$$\gamma|_{\Gamma_0} \hat{\mathbf{h}}_1 = \gamma|_{\Gamma_0} \tilde{\mathbf{h}}_1, \quad (4.48)$$

$$\gamma|_{\{x_3=0\}} \hat{h}_2 = \gamma|_{\{x_3=0\}} \tilde{h}_2, \quad (4.49)$$

para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$  y  $W \in Y$ . Tomando  $\mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}} - \tilde{\mathbf{h}}$ , tenemos que  $\mathbf{h}_1 = \hat{\mathbf{h}}_1 - \tilde{\mathbf{h}}_1$  y  $h_2 = \hat{h}_2 - \tilde{h}_2$ , y así de (4.46) - (4.49) obtenemos

$$Pr a(\mathbf{h}_1, \mathbf{v}) + Pr Mb_1(h_2, \mathbf{v}) - Pr R(h_2, v_3)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (4.50)$$

$$a_1(h_2, W) + \langle Bh_2, W \rangle_{\Gamma_1} = 0, \quad \forall W \in Y, \quad (4.51)$$

$$\gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{h}_1 = 0, \quad (4.52)$$

$$\gamma|_{\{x_3=0\}} h_2 = 0. \quad (4.53)$$

De (4.53) tenemos que  $h_2 \in Y$ , por lo tanto reemplazando  $W$  por  $h_2$  en (4.51) se tiene

$$a_1(h_2, h_2) + \langle Bh_2, h_2 \rangle_{\Gamma_1} = \|\nabla h_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + B\|h_2\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 = 0, \quad (4.54)$$

y así concluimos que  $\|\nabla h_2\|_{L^2(\Omega)} = 0$ , lo que implica que  $\nabla h_2 = 0$ , y por lo tanto  $h_2$  es constante. Pero como  $h_2 \in Y$ , es decir  $\gamma(h_2) = 0$  sobre  $\{x_3 = 0\}$ , concluimos que  $h_2 = 0$  y deducimos que  $\hat{h}_2 = \tilde{h}_2$ .

Por otro lado observe que como  $h_2 = 0$  entonces de (4.50) se obtiene

$$Pr a(\mathbf{h}_1, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0. \quad (4.55)$$

Además como de (4.52) tenemos que  $\mathbf{h}_1 \in \mathbf{X}_0$ , reemplazando  $\mathbf{v}$  por  $\mathbf{h}_1$  en (4.55) llegamos a

$$Pr a(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1) = \|\nabla \mathbf{h}_1\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0, \quad (4.56)$$

lo que implica que  $\nabla \mathbf{h}_1 = 0$ , y por lo tanto  $\mathbf{h}_1$  es constante. Pero como  $\mathbf{h}_1 \in \mathbf{X}_0$ , es decir

$\gamma(\mathbf{h}_1) = 0$  sobre  $\Gamma_0$ , concluimos que  $\mathbf{h}_1 = 0$  y se deduce que  $\hat{\mathbf{h}}_1 = \tilde{\mathbf{h}}_1$ . En consecuencia obtenemos que  $\hat{\mathbf{h}} = \tilde{\mathbf{h}}$  y se concluye que  $\mathcal{I}$  es inyectivo.

Probemos ahora que  $\mathcal{I}$  es sobreyectivo. Sea  $(g, i, \mathbf{j}, l) \in \mathbb{M}$ . Veamos que existe  $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, h_2) \in \mathbf{G}$  tal que

$$Pr a(\mathbf{h}_1, \mathbf{v}) + Pr Mb_1(h_2, \mathbf{v}) - Pr R(h_2, v_3)_{L^2(\Omega)} = \langle g, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_0, \quad (4.57)$$

$$a_1(h_2, W) + \langle Bh_2, W \rangle_{\Gamma_1} = \langle i, W \rangle, \quad \forall W \in Y, \quad (4.58)$$

$$\gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{h}_1 = \mathbf{j}, \quad (4.59)$$

$$\gamma|_{\{x_3=0\}} h_2 = l. \quad (4.60)$$

Definimos la función  $\hat{\mathbf{j}}$  dada por

$$\hat{\mathbf{j}} = \begin{cases} \mathbf{j} & \text{sobre } \Gamma_0, \\ 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \Gamma_0. \end{cases} \quad (4.61)$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{j} \in \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ , de manera análoga a (2.59) se puede verificar que  $\hat{\mathbf{j}} \in \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Entonces usando el Lema de Hopf (véase Lema 1.2.21), consideramos una función  $\tilde{\mathbf{j}} = (\tilde{j}_1, \tilde{j}_2, \tilde{j}_3)$  la cual satisface las condiciones

$$\tilde{\mathbf{j}} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad \text{div } \tilde{\mathbf{j}} = 0 \text{ en } \Omega, \quad \text{y } \tilde{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Definimos ahora la función  $\hat{l}$  dada por

$$\hat{l} = \begin{cases} l & \text{sobre } \{x_3 = 0\}, \\ 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \{x_3 = 0\}. \end{cases} \quad (4.62)$$

Teniendo en cuenta que  $l \in H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$ , de manera análoga a (2.59) se prueba que  $\hat{l} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Por lo tanto como  $\hat{l} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , por el Teorema 1.2.1 existe  $\tilde{l} \in H^1(\Omega)$  tal que  $\gamma(\tilde{l}) = \hat{l}$ . Ahora, buscando una solución  $(\mathbf{h}_1, h_2)$  al problema (4.57)-(4.60) en la forma  $\mathbf{h}_1 = \tilde{\mathbf{h}}_1 + \tilde{\mathbf{j}}$  y  $h_2 = \tilde{h}_2 + \tilde{l}$ , con  $\tilde{\mathbf{h}}_1 \in \mathbf{X}_0$  y  $\tilde{h}_2 \in Y$  nuevas funciones desconocidas, obtenemos una ecuación lineal para su determinación. Reemplazando  $\mathbf{h}_1 = \tilde{\mathbf{h}}_1 + \tilde{\mathbf{j}}$  y  $h_2 = \tilde{h}_2 + \tilde{l}$  en (4.57)-(4.60) obtenemos:

$$\begin{aligned} & Pr a(\tilde{\mathbf{h}}_1, \mathbf{v}) + Pr Mb_1(\tilde{h}_2, \mathbf{v}) - Pr R(\tilde{h}_2, v_3)_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle g, \mathbf{v} \rangle - Pr a(\tilde{\mathbf{j}}, \mathbf{v}) - Pr Mb_1(\tilde{l}, \mathbf{v}) + Pr R(\tilde{l}, v_3)_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$a_1(\tilde{h}_2, W) + \langle B\tilde{h}_2, W \rangle_{\Gamma_1} = \langle i, W \rangle - a_1(\tilde{k}, W) - \langle B\tilde{k}, W \rangle_{\Gamma_1}, \quad (4.64)$$

$$\gamma|_{\Gamma_0} \tilde{\mathbf{h}}_1 = 0, \quad (4.65)$$

$$\gamma|_{\{x_3=0\}} \tilde{h}_2 = 0, \quad (4.66)$$

para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$  y  $W \in Y$ . Como puede verse, el problema se redujo a otro con condiciones de frontera homogéneas para  $\tilde{\mathbf{h}}_1$  sobre  $\Gamma_0$  y  $\tilde{h}_2$  sobre  $\{x_3 = 0\}$ . Así que aplicando un procedimiento similar al realizado en la Sección 2.3 (véase Proposición 2.3.2), se prueba la existencia de solución  $\tilde{\mathbf{h}}_1 \in \mathbf{X}_0$  y  $\tilde{h}_2 \in Y$  para (4.63)-(4.66) aplicando el teorema de Lax Milgram (véase Teorema 1.2.17). En consecuencia tomando  $\mathbf{h}_1 = \tilde{\mathbf{h}}_1 + \tilde{\mathbf{j}}$  y  $h_2 = \tilde{h}_2 + \tilde{l}$ , tenemos que  $\mathbf{h}_1 \in \tilde{\mathbf{X}}$ ,  $h_2 \in H^1(\Omega)$ , y  $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, h_2) \in \mathbf{G}$  satisface (4.57)-(4.60). Así concluimos que  $\mathcal{I}$  es sobreyectivo, y por lo tanto  $\mathcal{I}$  es un isomorfismo.

(ii)  $\tilde{\mathcal{I}}$  es un operador compacto.

Observemos que

$$\tilde{\mathcal{I}} = (\tilde{\mathcal{I}}_1, \tilde{\mathcal{I}}_2, 0, \tilde{0}) : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{M},$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}_1 : \mathbf{G} &\rightarrow \mathbf{X}_0^* \\ \mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, h_2) &\mapsto \langle \tilde{\mathcal{I}}_1(\mathbf{h}), \mathbf{v} \rangle := c(\mathbf{u}^*, \mathbf{h}_1, \mathbf{v}) + c(\mathbf{h}_1, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}_2 : \mathbf{G} &\rightarrow Y^* \\ \mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, h_2) &\mapsto \langle \tilde{\mathcal{I}}_2(\mathbf{h}), W \rangle := c_1(\mathbf{u}^*, h_2, W) + c_1(\mathbf{h}_1, \theta^*, W), \end{aligned} \quad (4.68)$$

0 representa al operador idénticamente nulo de  $\mathbf{G}$  en  $\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$  y  $\tilde{0}$  representa al operador idénticamente nulo de  $\mathbf{G}$  en  $H^{\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$ . Así, probar que  $\tilde{\mathcal{I}}$  es un operador compacto es equivalente a probar que  $\tilde{\mathcal{I}}_1$  y  $\tilde{\mathcal{I}}_2$  lo son.

Veamos que  $\tilde{\mathcal{I}}_1$  y  $\tilde{\mathcal{I}}_2$  son operadores compactos. Sea  $(\mathbf{h}_m)_{m \in \mathbb{N}} = (\mathbf{h}_{1_m}, h_{2_m})_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbf{G}$  una sucesión tal que cuando  $m \rightarrow \infty$

$$\mathbf{h}_m \rightarrow \mathbf{h} \text{ débilmente en } \mathbf{G},$$

esto es,

$$\mathbf{h}_{1_m} \rightarrow \mathbf{h}_1 \text{ débilmente en } \tilde{\mathbf{X}}, \quad (4.69)$$

$$h_{2_m} \rightarrow h_2 \text{ débilmente en } H^1(\Omega). \quad (4.70)$$

Observe que como  $\tilde{\mathbf{X}} \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ , y las inmersiones  $\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$  y  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$  son compactas, entonces de (4.69) y (4.70) existen subsucesiones de  $(\mathbf{h}_{1_m})_{m \in \mathbb{N}}$  y  $(h_{2_m})_{m \in \mathbb{N}}$ , aun denotadas por  $(\mathbf{h}_{1_m})_{m \in \mathbb{N}}$  y  $(h_{2_m})_{m \in \mathbb{N}}$  respectivamente, tales que

$$\mathbf{h}_{1_m} \rightarrow \mathbf{h}_1 \text{ fuertemente en } \mathbf{L}^4(\Omega). \quad (4.71)$$

$$h_{2_m} \rightarrow h_2 \text{ fuertemente en } L^4(\Omega). \quad (4.72)$$

Por un lado, notemos que para  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}_0$  tenemos que

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{\mathcal{I}}_1(\mathbf{h}_m) - \tilde{\mathcal{I}}_1(\mathbf{h}), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0^*}| &= |c(\mathbf{u}^*, \mathbf{h}_{1_m}, \mathbf{v}) + c(\mathbf{h}_{1_m}, \mathbf{u}^*, \mathbf{v}) - c(\mathbf{u}^*, \mathbf{h}_1, \mathbf{v}) - c(\mathbf{h}_1, \mathbf{u}^*, \mathbf{v})| \\ &\leq |c(\mathbf{u}^*, \mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1, \mathbf{v})| + |c(\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1, \mathbf{u}^*, \mathbf{v})|. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Entonces de la definición de  $\|\cdot\|_{\mathbf{X}_0^*}$  y de (4.73) obtenemos

$$\|\tilde{\mathcal{I}}_1(\mathbf{h}_m) - \tilde{\mathcal{I}}_1(\mathbf{h})\|_{\mathbf{X}_0^*} \leq \sup_{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_0} \leq 1} |c(\mathbf{u}^*, \mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1, \mathbf{v})| + |c(\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1, \mathbf{u}^*, \mathbf{v})|. \quad (4.74)$$

En primer lugar, observemos que aplicando la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta que  $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$  deducimos que

$$\begin{aligned} |c(\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1, \mathbf{u}^*, \mathbf{v})| &\leq \|\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}^*\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \\ &\leq C \|\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\mathbf{u}^*\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_0}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Además, usando (2.28), la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta que  $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$  tenemos que

$$\begin{aligned} |c(\mathbf{u}^*, \mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1, \mathbf{v})| &= |c(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}, \mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1)| \\ &\leq \|\mathbf{u}^*\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \\ &\leq C \|\mathbf{u}^*\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_0} \|\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Así, aplicando (4.75) y (4.76) en (4.74) llegamos a

$$\|\tilde{\mathcal{I}}_1(\mathbf{h}_m) - \tilde{\mathcal{I}}_1(\mathbf{h})\|_{\mathbf{X}_0^*} \leq C \sup_{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_0} \leq 1} \|\mathbf{u}^*\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}_0} \|\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}. \quad (4.77)$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que  $\mathbf{u}^* \in \tilde{\mathbf{X}} \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ , observando la convergencia (4.71),

y tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$  en (4.77), se obtiene

$$\|\tilde{\mathcal{I}}_1(\mathbf{h}_m) - \tilde{\mathcal{I}}_1(\mathbf{h})\|_{\mathbf{X}_0^*} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad (4.78)$$

lo que implica que  $\tilde{\mathcal{I}}_1$  es un operador compacto.

Por otro lado, notemos que para  $W \in Y$  tenemos que

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{\mathcal{I}}_2(\mathbf{h}_m) - \tilde{\mathcal{I}}_2(\mathbf{h}), W \rangle_{Y, Y^*}| &= |c_1(\mathbf{u}^*, h_{2_m}, W) + c_1(\mathbf{h}_{1_m}, \theta^*, W) - c_1(\mathbf{u}^*, h_2, W) - c_1(\mathbf{h}_1, \theta^*, W)| \\ &\leq |c_1(\mathbf{u}^*, h_{2_m} - h_2, W)| + |c_1(\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1, \theta^*, W)|. \end{aligned} \quad (4.79)$$

De la definición de  $\|\cdot\|_{Y^*}$  y de (4.79) obtenemos

$$\|\tilde{\mathcal{I}}_2(\mathbf{h}_m) - \tilde{\mathcal{I}}_2(\mathbf{h})\|_{Y^*} \leq \sup_{\|W\|_Y \leq 1} |c_1(\mathbf{u}^*, h_{2_m} - h_2, W)| + |c_1(\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1, \theta^*, W)|. \quad (4.80)$$

Aplicando la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta que  $Y \subset H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ , deducimos que

$$\begin{aligned} |c_1(\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1, \theta^*, W)| &\leq \|\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla \theta^*\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|W\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \\ &\leq C \|\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\mathbf{u}^*\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|W\|_Y. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Además, usando (2.30), la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta que  $\mathbf{H}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\Omega)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} |c_1(\mathbf{u}^*, h_{2_m} - h_2, W)| &= |c_1(\mathbf{u}^*, W, h_{2_m} - h_2)| \\ &\leq \|\mathbf{u}^*\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \|\nabla W\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|h_{2_m} - h_2\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C \|\mathbf{u}^*\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|W\|_Y \|h_{2_m} - h_2\|_{L^4(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Así, aplicando (4.81) y (4.82) en (4.80), llegamos a

$$\|\tilde{\mathcal{I}}_2(\mathbf{h}_m) - \tilde{\mathcal{I}}_2(\mathbf{h})\|_{Y^*} \leq C \sup_{\|W\|_Y \leq 1} [\|\mathbf{u}^*\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|W\|_Y (\|\mathbf{h}_{1_m} - \mathbf{h}_1\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} + \|h_{2_m} - h_2\|_{L^4(\Omega)})] \quad (4.83)$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que  $\mathbf{u}^* \in \tilde{\mathbf{X}} \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ , observando las convergencias (4.71) y (4.72), y tomando el límite cuando  $m \rightarrow \infty$  en (4.83), obtenemos

$$\|\tilde{\mathcal{I}}_2(\mathbf{h}_m) - \tilde{\mathcal{I}}_2(\mathbf{h})\|_{Y^*} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad (4.84)$$

lo que implica que  $\tilde{\mathcal{I}}_2$  es un operador compacto. Por lo tanto, concluimos que  $\tilde{\mathcal{I}}$  es un operador

compacto.

Así, de (i), (ii) y el Lema 1.2.25, se sigue que  $\mathcal{F}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^*)$  es un operador de Fredholm y por lo tanto, de la Proposición 1.2.26 se tiene que su rango es cerrado y de codimensión finita.  $\square$

Denotamos  $\eta := (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R} \times \mathbf{X}_0 \times Y \times (\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^* \times H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$  y  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) \in \mathbf{G} \times \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3$ . Con las definiciones dadas en (4.6) y (4.2) - (4.5) introducimos el funcional de Lagrange

$$\mathcal{L} : \mathbf{G} \times \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3 \times \mathbb{R} \times \mathbf{X}_0 \times Y \times (\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^* \times H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\}) \rightarrow \mathbb{R}$$

asociado al problema de control (4.6) - (4.7), se define como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{z}, \eta) &= \lambda_0 \mathcal{J}(\mathbf{z}) - \langle \mathcal{F}_1(\mathbf{z}), \lambda_1 \rangle_{\mathbf{X}_0^*, \mathbf{X}_0} - \langle \mathcal{F}_2(\mathbf{z}), \lambda_2 \rangle_{Y^*, Y} - \langle \lambda_3, \mathcal{F}_3(\mathbf{z}) \rangle_{(\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^*, \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \\ &\quad - \langle \lambda_4, \mathcal{F}_4(\mathbf{z}) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3=0\}), H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}, \end{aligned} \quad (4.85)$$

el cual, por Lema 4.1.1, es Fréchet diferenciable con respecto a  $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \theta) \in \mathbf{G}$  en la dirección de  $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, h_2) \in \mathbf{G}$ . La derivada de Fréchet de  $\mathcal{L}$  con respecto a  $\mathbf{x}$  en un punto arbitrario  $(\mathbf{z}, \eta)$  es el funcional

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}, \eta) : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{R},$$

definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}, \eta) \mathbf{h} &= \lambda_0 \mathcal{J}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) \mathbf{h} - \langle \mathcal{F}_{1_{\mathbf{x}}}(\mathbf{z}) \mathbf{h}, \lambda_1 \rangle_{\mathbf{X}_0^*, \mathbf{X}_0} - \langle \mathcal{F}_{2_{\mathbf{x}}}(\mathbf{z}) \mathbf{h}, \lambda_2 \rangle_{Y^*, Y} \\ &\quad - \langle \lambda_3, \mathcal{F}_{3_{\mathbf{x}}}(\mathbf{z}) \mathbf{h} \rangle_{(\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^*, \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} - \langle \lambda_4, \mathcal{F}_{4_{\mathbf{x}}}(\mathbf{z}) \mathbf{h} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3=0\}), H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}, \end{aligned} \quad (4.86)$$

para todo  $\mathbf{h} \in \mathbf{G}$ , con  $\mathcal{J}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ ,  $\mathcal{F}_{1_{\mathbf{x}}}(\mathbf{z})$ ,  $\mathcal{F}_{2_{\mathbf{x}}}(\mathbf{z})$ ,  $\mathcal{F}_{3_{\mathbf{x}}}(\mathbf{z})$  y  $\mathcal{F}_{4_{\mathbf{x}}}(\mathbf{z})$  definidos en (4.8) - (4.12).

El resultado principal de esta sección es dado en el siguiente teorema:

**Teorema 4.1.4.** *(Condiciones necesarias de primer orden) Sea  $\mathbf{z}^* = (\mathbf{x}^*, \mathbf{g}^*, \phi_1^*, \phi_2^*) \in \mathcal{Z}_{ad}$  solución óptima del problema (3.1), entonces existe un multiplicador de Lagrange no nulo  $\eta := (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbf{X}_0 \times Y \times (\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^* \times H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$ , tal que*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^*, \eta) \mathbf{h} = 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbf{G}, \quad (4.87)$$

y se satisface el principio del mínimo

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \mathbf{g}^*, \phi_1^*, \phi_2^*, \eta) = \min_{(\mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) \in \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2, \eta), \quad (4.88)$$

donde  $\mathcal{L}(\mathbf{z}, \eta)$  y  $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}^*, \eta)\mathbf{h}$  representan el funcional de Lagrange y su derivada de Fréchet, definidos en (4.85) y (4.86) respectivamente.

*Demostración.* Por Lema 4.1.1, Lema 4.1.2 y Lema 4.1.3 se tiene que las hipótesis (a), (b) y (c) del Teorema 1.3.2 son satisfechas, por lo tanto existe un multiplicador de Lagrange no nulo  $\eta := (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbf{X}_0 \times Y \times (\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^* \times H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$  que satisface (4.87) y (4.88).  $\square$

**Observación 4.1.5.** Las ecuaciones (4.87) y (4.88) las llamaremos condiciones necesarias de primer orden del problema de control óptimo (3.1).

## 4.2. Sistema de optimalidad

En esta sección, a partir de las condiciones necesarias de primer orden dadas en (4.87) y (4.88), se derivará el sistema de optimalidad para el problema de control (3.1). Este sistema está conformado por las ecuaciones de estado, las ecuaciones adjuntas y una condición conocida como *condición de optimalidad*.

Por un lado, de (4.87) podemos derivar ecuaciones que son satisfechas por  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$ . Usando (4.86) y (4.8) - (4.12), reescribimos (4.87) como

$$\lambda_0 \left[ \begin{aligned} & \gamma_1 (\text{rot } \mathbf{u}^*, \text{rot } \mathbf{h}_1)_{L^2(\Omega)} + \gamma_2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d|^{p-1} \text{sgn}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d) \cdot \mathbf{h}_1 \, d\Omega + \gamma_3 \int_{\Omega} |\theta^* - \theta_d|^{l-1} \text{sgn}(\theta^* - \theta_d) \cdot h_2 \, d\Omega \\ & - Pr \, a(\mathbf{h}_1, \lambda_1) - Pr \, M \, b_1(h_2, \lambda_1) - c(\mathbf{u}^*, \mathbf{h}_1, \lambda_1) - c(\mathbf{h}_1, \mathbf{u}^*, \lambda_1) + Pr \, R \, (h_2, \lambda_{13})_{L^2(\Omega)} - c_1(\mathbf{u}^*, h_2, \lambda_2) \\ & - c_1(\mathbf{h}_1, \theta^*, \lambda_2) - a_1(h_2, \lambda_2) - \langle B h_2, \lambda_2 \rangle_{\Gamma_1} - \langle \lambda_3, \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{h}_1 \rangle_{(\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^*, \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \\ & - \langle \lambda_4, \gamma|_{\{x_3=0\}} h_2 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3=0\}), H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})} = 0, \end{aligned} \right] \quad (4.89)$$

para todo  $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, h_2) \in \mathbf{G}$ . Tomando en primer lugar  $h_2 = 0$  y luego  $\mathbf{h}_1 = 0$  en (4.89) obtenemos

$$\lambda_0 \gamma_1 (\text{rot } \mathbf{u}^*, \text{rot } \mathbf{h}_1)_{L^2(\Omega)} + \lambda_0 \gamma_2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d|^{p-1} \text{sgn}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d) \cdot \mathbf{h}_1 \, d\Omega - Pr \, a(\mathbf{h}_1, \lambda_1) - c(\mathbf{u}^*, \mathbf{h}_1, \lambda_1) \\ - c(\mathbf{h}_1, \mathbf{u}^*, \lambda_1) - c_1(\mathbf{h}_1, \theta^*, \lambda_2) - \langle \lambda_3, \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{h}_1 \rangle_{(\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^*, \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} = 0, \quad \forall \mathbf{h}_1 \in \tilde{\mathbf{X}}, \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} & \lambda_0 \gamma_3 \int_{\Omega} |\theta^* - \theta_d|^{l-1} \operatorname{sgn}(\theta^* - \theta_d) \cdot h_2 \, d\Omega - Pr M b_1(h_2, \lambda_1) + Pr R(h_2, \lambda_{13})_{L^2(\Omega)} - c_1(\mathbf{u}^*, h_2, \lambda_2) \\ & - a_1(h_2, \lambda_2) - \langle Bh_2, \lambda_2 \rangle_{\Gamma_1} - \langle \lambda_4, \gamma|_{\{x_3=0\}} h_2 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3=0\}), H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})} = 0, \quad \forall h_2 \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Por otro lado, observe que el principio del mínimo (4.88) es equivalente a

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \mathbf{g}^*, \phi_1^*, \phi_2^*, \eta) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2, \eta), \quad \forall (\mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) \in \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3 \quad (4.92)$$

Además teniendo en cuenta que los controles  $\mathbf{g}$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  entran explícitamente en las expresiones para  $\mathcal{F}_2$ ,  $\mathcal{F}_3$  y  $\mathcal{F}_4$ , y usando la definición de  $\mathcal{L}$  dada en (4.85), reescribimos (4.92) como

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{F}_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) - \mathcal{F}_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{g}^*, \phi_1^*, \phi_2^*), \lambda_2 \rangle_{Y^*Y} + \langle \lambda_3, \mathcal{F}_3(\mathbf{x}^*, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) - \mathcal{F}_3(\mathbf{x}^*, \mathbf{g}^*, \phi_1^*, \phi_2^*) \rangle_{(\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^*, \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \\ & + \langle \lambda_4, \mathcal{F}_4(\mathbf{x}^*, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) - \mathcal{F}_4(\mathbf{x}^*, \mathbf{g}^*, \phi_1^*, \phi_2^*) \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3=0\}), H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})} \\ & \leq \lambda_0 [\mathcal{J}(\mathbf{x}^*, \mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*, \mathbf{g}^*, \phi_1^*, \phi_2^*)], \end{aligned} \quad (4.93)$$

para todo  $(\mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) \in \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3$ . Considerando las definiciones de los operadores  $\mathcal{F}_2$ ,  $\mathcal{F}_3$  y  $\mathcal{F}_4$  dadas en (4.3), (4.4) y (4.5) respectivamente, y la definición del funcional  $\mathcal{J}$  en (3.1), de (4.93) llegamos a

$$\begin{aligned} & \langle \phi_1^* - \phi_1, \lambda_2 \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} + \langle \lambda_3|_{\Gamma_0^1}, \mathbf{g}^* - \mathbf{g} \rangle_{(\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1))^*, \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} + \langle \lambda_4, \phi_2^* - \phi_2 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3=0\}), H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})} \\ & \leq \frac{\lambda_0 \gamma_4}{2} (\|\mathbf{g}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 - \|\mathbf{g}^*\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2) + \frac{\lambda_0 \gamma_5}{2} (\|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}^2 - \|\phi_1^*\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}^2) \\ & + \frac{\lambda_0 \gamma_6}{2} (\|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}^2 - \|\phi_2^*\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}^2), \quad \forall (\mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) \in \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_0 \gamma_4}{2} (\|\mathbf{g}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 - \|\mathbf{g}^*\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2) + \frac{\lambda_0 \gamma_5}{2} (\|\phi_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}^2 - \|\phi_1^*\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}^2) \\ & + \frac{\lambda_0 \gamma_6}{2} (\|\phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}^2 - \|\phi_2^*\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}^2) + \langle \phi_1 - \phi_1^*, \lambda_2 \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \\ & + \langle \lambda_3|_{\Gamma_0^1}, \mathbf{g} - \mathbf{g}^* \rangle_{(\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1))^*, \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} + \langle \lambda_4, \phi_2 - \phi_2^* \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3=0\}), H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})} \geq 0. \end{aligned}$$

Así, usando la igualdad  $2(\hat{v} - v, \hat{v})_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \|\hat{v}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}^2 - \|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}^2 + \|v - \hat{v}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}^2$ , deducimos que

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_0 \gamma_4}{2} (\|\mathbf{g} - \mathbf{g}^*\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}^2 + 2(\mathbf{g} - \mathbf{g}^*, \mathbf{g}^*)_{\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)}) + \frac{\lambda_0 \gamma_5}{2} (\|\phi_1 - \phi_1^*\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}^2 + 2(\phi_1 - \phi_1^*, \phi_1^*)_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})}) \\ & + \frac{\lambda_0 \gamma_6}{2} (\|\phi_2 - \phi_2^*\|_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}^2 + 2(\phi_2 - \phi_2^*, \phi_2^*)_{H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})}) + \langle \phi_1 - \phi_1^*, \lambda_2 \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} \end{aligned}$$

$$+ \langle \lambda_3|_{\Gamma_0^1}, \mathbf{g} - \mathbf{g}^* \rangle_{(\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1))^*, \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} + \langle \lambda_4, \phi_2 - \phi_2^* \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3=0\}), H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})} \geq 0.$$

Entonces, una *condición de optimalidad* es dada por

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_3|_{\Gamma_0^1} + \lambda_0 \gamma_4 \mathbf{g}^*, \mathbf{g} - \mathbf{g}^* \rangle_{\tilde{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1), \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} + \langle \lambda_2 + \lambda_0 \gamma_5 \phi_1^*, \phi_1 - \phi_1^* \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\})} \\ & + \langle \lambda_4 + \lambda_0 \gamma_6 \phi_2^*, \phi_2 - \phi_2^* \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3=0\}), H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})} \geq 0, \quad \forall (\mathbf{g}, \phi_1, \phi_2) \in \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3. \end{aligned} \quad (4.95)$$

A partir de lo anterior hemos probado el siguiente teorema, el cual determina el *sistema de optimalidad* para el problema de control óptimo (3.1) en un sentido débil. El término “*sentido débil*” hace referencia a que las ecuaciones diferenciales que verifican los multiplicadores de Lagrange, (4.90) y (4.91), son dadas en un sentido débil.

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $\mathbf{z}^* = (\mathbf{x}^*, \mathbf{g}^*, \phi_1^*, \phi_2^*) \in \mathcal{Z}_{ad}$  solución óptima del problema (3.1), entonces existe un multiplicador de Lagrange no nulo  $\eta := (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \times \mathbf{X}_0 \times Y \times (\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^* \times H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$ , el cual satisface las ecuaciones (4.90) - (4.91), y la condición de optimalidad (4.95).*

El *sistema de optimalidad*, en un sentido débil, está dado por las ecuaciones de estado (2.33) - (2.35), junto con las relaciones (4.90) - (4.91) (ecuaciones diferenciales que verifican los multiplicadores de Lagrange) y la condición de optimalidad (4.95).

En relación con el teorema anterior, surge la pregunta acerca de cual debería ser el sistema de ecuaciones diferenciales que satisface el conjunto de multiplicadores de lagrange  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , así como también, el tipo de condiciones de frontera asociadas a dicho sistema diferencial. Resolver este problema comprende probar la existencia de un sistema de optimalidad en un sentido fuerte. Esta búsqueda depende esencialmente de dos factores; en primer lugar, de la regularidad de los multiplicadores de Lagrange, y en segundo lugar, del tipo de funcional que está siendo minimizado.

Para comenzar, introducimos los siguientes operadores lineales continuos

$$\begin{aligned} \widehat{A} : \tilde{\mathbf{X}} & \rightarrow \mathbf{X}_0^* \\ \mathbf{h}_1 & \mapsto \langle \widehat{A}\mathbf{h}_1, \lambda_1 \rangle = Pr a(\mathbf{h}_1, \lambda_1) + c(\mathbf{u}^*, \mathbf{h}_1, \lambda_1), \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} \widehat{A}_1 : H^1(\Omega) & \rightarrow Y^* \\ h_2 & \mapsto \langle \widehat{A}_1 h_2, \lambda_2 \rangle = c(\mathbf{u}^*, h_2, \lambda_2) + a_1(h_2, \lambda_2) + \langle B h_2, \lambda_2 \rangle_{\Gamma_1}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\widehat{B} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{X}_0^*$$

$$h_2 \mapsto \langle \widehat{B}h_2, \lambda_1 \rangle = PrR(h_2, \lambda_{13})_{L^2(\Omega)}, \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} \widehat{B}_1 : H^1(\Omega) &\rightarrow \mathbf{X}_0^* \\ h_2 &\mapsto \langle \widehat{B}_1 h_2, \lambda_1 \rangle = PrM b_1(h_2, \lambda_1), \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \widehat{C} : \widetilde{\mathbf{X}} &\rightarrow \mathbf{X}_0^* \\ \mathbf{h}_1 &\mapsto \langle \widehat{C}\mathbf{h}_1, \lambda_1 \rangle = c(\mathbf{h}_1, \mathbf{u}^*, \lambda_1), \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \widehat{C}_1 : \widetilde{\mathbf{X}} &\rightarrow Y^* \\ \mathbf{h}_1 &\mapsto \langle \widehat{C}_1 \mathbf{h}_1, \lambda_2 \rangle = c(\mathbf{h}_1, \theta^*, \lambda_2). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Entonces, los correspondientes operadores adjuntos de (4.96) - (4.101), se definen como

$$\begin{aligned} \widehat{A}^* : \mathbf{X}_0 &\rightarrow (\widetilde{\mathbf{X}})^* \\ \lambda_1 &\mapsto \langle \widehat{A}^* \lambda_1, \mathbf{h}_1 \rangle, \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} \widehat{A}_1^* : Y &\rightarrow (H^1(\Omega))^* \\ \lambda_2 &\mapsto \langle \widehat{A}_1^* \lambda_2, h_2 \rangle, \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} \widehat{B}^* : \mathbf{X}_0 &\rightarrow (H^1(\Omega))^* \\ \lambda_1 &\mapsto \langle \widehat{B}^* \lambda_1, h_2 \rangle, \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} \widehat{B}_1^* : \mathbf{X}_0 &\rightarrow (H^1(\Omega))^* \\ \lambda_1 &\mapsto \langle \widehat{B}_1^* \lambda_1, h_2 \rangle, \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} \widehat{C}^* : \mathbf{X}_0 &\rightarrow (\widetilde{\mathbf{X}})^* \\ \lambda_1 &\mapsto \langle \widehat{C}^* \lambda_1, \mathbf{h}_1 \rangle, \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} \widehat{C}_1^* : Y &\rightarrow (\widetilde{\mathbf{X}})^* \\ \lambda_2 &\mapsto \langle \widehat{C}_1^* \lambda_2, \mathbf{h}_1 \rangle. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Por lo tanto, usando (4.102) - (4.107), reescribimos (4.90) y (4.91) como

$$\langle \lambda_0 \mathcal{J}_{\mathbf{u}}(\mathbf{z}^*) - \widehat{A}^* \lambda_1 - \widehat{C}^* \lambda_1 - \widehat{C}_1^* \lambda_2, \mathbf{h}_1 \rangle - \langle \lambda_3, \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{h}_1 \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{h}_1 \in \widetilde{\mathbf{X}}, \quad (4.108)$$

$$\langle \lambda_0 \mathcal{J}_{\theta}(\mathbf{z}^*) - \widehat{B}_1^* \lambda_1 + \widehat{B}^* \lambda_1 - \widehat{A}_1^* \lambda_2, h_2 \rangle - \langle \lambda_4, \gamma|_{\{x_3=0\}} h_2 \rangle = 0, \quad \forall h_2 \in H^1(\Omega), \quad (4.109)$$

donde  $\mathcal{J}_{\mathbf{u}}(\mathbf{z}^*)$  y  $\mathcal{J}_{\theta}(\mathbf{z}^*)$  representan las derivadas de Fréchet del funcional  $\mathcal{J}$  con respecto a  $\mathbf{u}$  y  $\theta$  respectivamente, en un punto arbitrario  $\mathbf{z}^*$ . Además, introducimos los operadores lineales  $S_{\mathbf{H}}$  :

$(\tilde{\mathbf{X}})^* \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$  y  $S_I : (H^1(\Omega))^* \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  por las fórmulas

$$\langle S_{\mathbf{H}} \mathbf{l}, \mathbf{h}_1 \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}_0^1(\Omega)} = \langle \mathbf{l}, \mathbf{h}_1 \rangle_{(\tilde{\mathbf{X}})^*, \tilde{\mathbf{X}}}, \quad \forall \mathbf{h}_1 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \subset \tilde{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{l} \in (\tilde{\mathbf{X}})^*, \quad (4.110)$$

$$\langle S_I l, h_2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \langle l, h_2 \rangle_{(H^1(\Omega))^*, H^1(\Omega)}, \quad \forall h_2 \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega), \quad l \in (H^1(\Omega))^*. \quad (4.111)$$

Observemos que de (4.102) y (4.110), aplicando integración por partes obtenemos que para cada  $\mathbf{h}_1 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \langle S_{\mathbf{H}} \widehat{A}^* \lambda_1, \mathbf{h}_1 \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}_0^1(\Omega)} &= \langle \widehat{A}^* \lambda_1, \mathbf{h}_1 \rangle_{(\tilde{\mathbf{X}})^*, \tilde{\mathbf{X}}} \\ &= Pr \int_{\Omega} \nabla \mathbf{h}_1 \nabla \lambda_1 \, d\Omega + c(\mathbf{u}^*, \mathbf{h}_1, \lambda_1) \\ &= -Pr \int_{\Omega} \mathbf{h}_1 \Delta \lambda_1 \, d\Omega - c(\mathbf{u}^*, \lambda_1, \mathbf{h}_1) \\ &= -Pr \langle \Delta \lambda_1, \mathbf{h}_1 \rangle - ((\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \lambda_1, \mathbf{h}_1). \end{aligned} \quad (4.112)$$

Además, de (4.106), (4.107) y (4.110) tenemos que para todo  $\mathbf{h}_1 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \langle S_{\mathbf{H}} \widehat{C}^* \lambda_1, \mathbf{h}_1 \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}_0^1(\Omega)} &= \langle \widehat{C}^* \lambda_1, \mathbf{h}_1 \rangle_{(\tilde{\mathbf{X}})^*, \tilde{\mathbf{X}}} \\ &= c(\mathbf{h}_1, \mathbf{u}^*, \lambda_1) \\ &= -c(\mathbf{h}_1, \lambda_1, \mathbf{u}^*) \\ &= -((\mathbf{h}_1 \cdot \nabla) \lambda_1, \mathbf{u}^*) \\ &= ((\nabla \mathbf{u}^*)^T \cdot \lambda_1, \mathbf{h}_1), \end{aligned} \quad (4.113)$$

y

$$\begin{aligned} \langle S_{\mathbf{H}} \widehat{C}_1^* \lambda_2, \mathbf{h}_1 \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}_0^1(\Omega)} &= \langle \widehat{C}_1^* \lambda_2, \mathbf{h}_1 \rangle_{(\tilde{\mathbf{X}})^*, \tilde{\mathbf{X}}} \\ &= c_1(\mathbf{h}_1, \theta^*, \lambda_2) \\ &= (\lambda_2 \nabla \theta^*, \mathbf{h}_1). \end{aligned} \quad (4.114)$$

También, notemos que para todo  $\mathbf{h}_1 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \langle S_{\mathbf{H}} \mathcal{J}_{\mathbf{u}}(\mathbf{z}^*), \mathbf{h}_1 \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}_0^1(\Omega)} &= \langle \mathcal{J}_{\mathbf{u}}(\mathbf{z}^*), \mathbf{h}_1 \rangle_{(\tilde{\mathbf{X}})^*, \tilde{\mathbf{X}}} \\ &= \gamma_1 \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{u}^* \cdot \text{rot } \mathbf{h}_1 \, d\Omega + \gamma_2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d|^{p-1} \text{sgn}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d) \cdot \mathbf{h}_1 \, d\Omega \\ &= -\gamma_1 \int_{\Omega} \text{rot}(\text{rot } \mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{h}_1 \, d\Omega + \gamma_2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d|^{p-1} \text{sgn}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d) \cdot \mathbf{h}_1 \, d\Omega \\ &= \langle -\gamma_1 \text{rot}(\text{rot } \mathbf{u}^*) + \gamma_2 |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d|^{p-1} \text{sgn}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d), \mathbf{h}_1 \rangle. \end{aligned}$$

Además, de (4.103) y (4.111), integrando por partes deducimos que para todo  $h_2 \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned}
\langle S_I \widehat{A}_1^* \lambda_2, h_2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &= \langle \widehat{A}_1^* \lambda_2, h_2 \rangle_{(H^1(\Omega))^*, H^1(\Omega)} \\
&= c_1(\mathbf{u}^*, h_2, \lambda_2) + \int_{\Omega} \nabla h_2 \nabla \lambda_2 \, d\Omega + \langle B h_2, \lambda_2 \rangle_{\Gamma_1} \\
&= -c_1(\mathbf{u}^*, \lambda_2, h_2) - \int_{\Omega} h_2 \Delta \lambda_2 \, d\Omega \\
&= -(\mathbf{u}^* \nabla \lambda_2, h_2) - \langle \Delta \lambda_2, h_2 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.115}$$

También, de (4.104), (4.105) y (4.111), tenemos que para todo  $h_2 \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned}
\langle S_I \widehat{B}^* \lambda_1, h_2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &= \langle \widehat{B}^* \lambda_1, h_2 \rangle_{(H^1(\Omega))^*, H^1(\Omega)} \\
&= \langle Pr R \lambda_{1,3}, h_2 \rangle,
\end{aligned} \tag{4.116}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle S_I \widehat{B}_1^* \lambda_1, h_2 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &= \langle \widehat{B}_1^* \lambda_1, h_2 \rangle_{(H^1(\Omega))^*, H^1(\Omega)} \\
&= Pr M b_1(h_2, \lambda_1) \\
&= Pr M \int_{\Omega} \nabla h_2 \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_3} \, d\Omega \\
&= -Pr M \int_{\Omega} h_2 \cdot \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_3} \right) \, d\Omega \\
&= -\langle Pr M \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_3} \right), h_2 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.117}$$

Además observemos que todo  $h_2 \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned}
\langle S_I \mathcal{J}_\theta(\mathbf{z}^*), h_2 \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega), \mathbf{H}_0^1(\Omega)} &= \langle \mathcal{J}_\theta(\mathbf{z}^*), h_2 \rangle_{(\tilde{\mathbf{X}})^*, \tilde{\mathbf{X}}} \\
&= \gamma_3 \int_{\Omega} |\theta^* - \theta_d|^{l-1} \operatorname{sgn}(\theta^* - \theta_d) \cdot h_2 \, d\Omega \\
&= \langle \gamma_3 |\theta^* - \theta_d|^{l-1} \operatorname{sgn}(\theta^* - \theta_d), h_2 \rangle.
\end{aligned} \tag{4.118}$$

Por lo tanto, considerando las restricciones de los funcionales del lado izquierdo de (4.108) y (4.109) a  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  y  $H_0^1(\Omega)$  respectivamente, y usando (4.112) - (4.118), obtenemos las siguientes ecuaciones que son satisfechas por  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ :

$$\begin{aligned}
&Pr \Delta \lambda_1 + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \lambda_1 - (\nabla \mathbf{u}^*)^T \cdot \lambda_1 - \lambda_2 \nabla \theta^* \\
&= \lambda_0 \gamma_1 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{u}^*) - \lambda_0 \gamma_2 |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d|^{p-1} \operatorname{sgn}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d) \text{ en } \mathbf{H}^{-1}(\Omega),
\end{aligned} \tag{4.119}$$

$$\mathbf{u}^* \lambda_2 + \Delta \lambda_2 + Pr M \operatorname{div} \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_3} \right) + Pr R \lambda_{1_3} = -\lambda_0 \gamma_3 |\theta^* - \theta_d|^{l-1} \operatorname{sgn}(\theta^* - \theta_d) \text{ en } H^{-1}(\Omega). \quad (4.120)$$

Si además suponemos que  $\mathbf{u}^*, \lambda_1 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$  y  $\lambda_2 \in H^2(\Omega)$ , entonces de (4.90), (4.91), (4.119) y (4.120) podemos obtener las relaciones de frontera. Multiplicando (4.119) y (4.120) por funciones  $\mathbf{h}_1 \in \tilde{\mathbf{X}}$  y  $h_2 \in H^1(\Omega)$  respectivamente, e integrando por partes el resultado sobre  $\Omega$ , obtenemos

$$\begin{aligned} & -Pr \int_{\Omega} \nabla \lambda_1 \cdot \nabla \mathbf{h}_1 \, d\Omega + Pr \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{h}_1 \, dS - \int_{\Omega} [(\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{h}_1] \cdot \lambda_1 \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{h}_1 \nabla \mathbf{u}^* \lambda_1 \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{h}_1 \cdot \nabla \theta^* \lambda_2 \, d\Omega \\ = & -\lambda_0 \gamma_1 \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u}^* \cdot \operatorname{rot} \mathbf{h}_1 \, d\Omega + \lambda_0 \gamma_1 \int_{\partial\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u}^* \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{h}_1 \, dS - \lambda_0 \gamma_2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d|^{p-1} \operatorname{sgn}(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_d) \cdot \mathbf{h}_1 \, d\Omega, \end{aligned} \quad (4.121)$$

y

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla h_2 \cdot \lambda_2 \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla h_2 \cdot \nabla \lambda_2 \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \mathbf{n}} \cdot h_2 \, dS - Pr M \int_{\Omega} \nabla h_2 \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_3} \, d\Omega \\ + Pr M \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_3} \right) \cdot h_2 \, dS + \int_{\Omega} Pr R \lambda_{1_3} \cdot h_2 \, d\Omega = & -\lambda_0 \gamma_3 \int_{\Omega} |\theta^* - \theta_d|^{l-1} \operatorname{sgn}(\theta^* - \theta_d) \cdot h_2 \, d\Omega, \end{aligned} \quad (4.122)$$

para todo  $\mathbf{h}_1 \in \tilde{\mathbf{X}}$  y  $h_2 \in H^1(\Omega)$  respectivamente. Ahora, restando (4.121) de (4.90), y (4.122) de (4.91), llegamos a

$$\langle \lambda_3, \gamma|_{\Gamma_0} \mathbf{h}_1 \rangle_{(\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^*, \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} + Pr \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{h}_1 \, dS = \lambda_0 \gamma_1 \int_{\partial\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u}^* \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{h}_1 \, dS, \quad \forall \mathbf{h}_1 \in \tilde{\mathbf{X}}, \quad (4.123)$$

y

$$\begin{aligned} & \langle Bh_2, \lambda_2 \rangle_{\Gamma_1} + \langle \lambda_4, \gamma|_{\{x_3=0\}} h_2 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3=0\}), H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \mathbf{n}} \cdot h_2 \, dS \\ & + Pr M \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_3} \right) \cdot h_2 \, dS = 0, \quad \forall h_2 \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.124)$$

Por lo tanto, de (4.123) y (4.124) tenemos las siguientes relaciones de frontera

$$\lambda_3 = \lambda_0 \gamma_1 (\operatorname{rot} \mathbf{u}^* \times \mathbf{n}) - Pr (\nabla \lambda_1 \cdot \mathbf{n}) \text{ sobre } \Gamma_0, \quad (4.125)$$

$$\lambda_0 \gamma_1 (\operatorname{rot} \mathbf{u}^* \times \mathbf{n}) - Pr (\nabla \lambda_1 \cdot \mathbf{n}) = 0 \text{ sobre } \Gamma_1, \quad (4.126)$$

$$\lambda_4 = - \left( \nabla \lambda_2 + Pr M \nabla \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_3} \right) \right) \cdot \mathbf{n} \text{ sobre } \{x_3 = 0\}, \quad (4.127)$$

$$B\lambda_2 + \left( \nabla\lambda_2 + PrM\nabla \left( \frac{\partial\lambda_1}{\partial x_3} \right) \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_1, \quad (4.128)$$

$$\left( \nabla\lambda_2 + PrM\nabla \left( \frac{\partial\lambda_1}{\partial x_3} \right) \right) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \setminus \{x_3 = 0\}. \quad (4.129)$$

Así, suponiendo que  $\mathbf{u}^*, \lambda_1 \in \mathbf{H}^2(\Omega)$  y  $\lambda_2 \in H^2(\Omega)$ , llegamos a que el conjunto de multiplicadores de Lagrange satisface el sistema de ecuaciones diferenciales (4.119) y (4.120), junto con las condiciones de frontera (4.125) - (4.129) y la condición de optimalidad (4.95).

### 4.3. Positividad del multiplicador de Lagrange $\lambda_0$

Regresando al Teorema 4.1.4, observe que dependiendo del valor de  $\lambda_0$  en el multiplicador de Lagrange  $\eta = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ , podemos distinguir esencialmente dos casos diferentes:  $\lambda_0 > 0$  y  $\lambda_0 = 0$ . Notemos que en el primer caso, reemplazando  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  por  $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \frac{\lambda_2}{\lambda_0}, \frac{\lambda_3}{\lambda_0}$  y  $\frac{\lambda_4}{\lambda_0}$  respectivamente, en las ecuaciones (4.87) y (4.88), podemos asumir que  $\lambda_0 = 1$  en el planteamiento del Teorema 4.1.4. En el segundo caso, (4.87) toma la forma

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{F}_{1_{\mathbf{x}}}(\mathbf{z}^*)\mathbf{h}, \lambda_1 \rangle_{\mathbf{X}_0^*, \mathbf{X}_0} + \langle \mathcal{F}_{2_{\mathbf{x}}}(\mathbf{z}^*)\mathbf{h}, \lambda_2 \rangle_{Y^*, Y} + \langle \lambda_3, \mathcal{F}_{3_{\mathbf{x}}}(\mathbf{z}^*)\mathbf{h} \rangle_{(\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^*, \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \\ & + \langle \lambda_4, \mathcal{F}_{4_{\mathbf{x}}}(\mathbf{z}^*)\mathbf{h} \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3=0\}), H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})} = 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbf{G}. \end{aligned} \quad (4.130)$$

Por lo tanto, el caso  $\lambda_0 = 0$  proporciona poca información y no es interesante, ya que en este caso la ecuación (4.130), teniendo el sentido de una condición necesaria de primer orden para un mínimo local de (3.1), no envuelve el funcional  $\mathcal{J}$ . Así, es interesante encontrar condiciones sobre  $\mathbf{z}^* = (\mathbf{u}^*, \theta^*, \mathbf{g}^*, \phi_1^*, \phi_2^*)$  y sobre los conjuntos  $\mathbf{U}_1, \mathcal{U}_2$  y  $\mathcal{U}_3$ , bajo las cuales garanticemos que  $\lambda_0 > 0$ .

Siguiendo como en Alekseev [3], diremos que el conjunto  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \mathcal{U}_3$  posee la propiedad  $C$  en un punto  $\mathbf{z}^* = (\mathbf{u}^*, \theta^*, \mathbf{g}^*, \phi_1^*, \phi_2^*)$ , si para cada solución no nula (multiplicador de Lagrange)  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbf{X}_0 \times Y \times (\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))^* \times H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3 = 0\})$  de la ecuación (4.130), existe un elemento  $(\mathbf{g}^0, \phi_1^0, \phi_2^0) \in \mathbf{U}$  tal que

$$\begin{aligned} & \langle \phi_1^* - \phi_1^0, \lambda_2 \rangle_{\Gamma_0 \setminus \{x_3=0\}} + \langle \lambda_3|_{\Gamma_0^1}, \mathbf{g}^* - \mathbf{g}^0 \rangle_{(\tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1))^*, \tilde{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^1)} \\ & + \langle \lambda_4, \phi_2^* - \phi_2^0 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\{x_3=0\}), H^{\frac{1}{2}}(\{x_3=0\})} > 0. \end{aligned} \quad (4.131)$$

No es difícil verificar que si el conjunto  $\mathbf{U}$  posee la propiedad  $C$  en el punto  $\mathbf{z}^*$ , entonces necesariamente  $\lambda_0 > 0$ . En efecto, si suponemos lo contrario, esto es, que existe un multiplicador de Lagrange

$(0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ , entonces por el Teorema 4.1.4, la ecuación (4.130) y la desigualdad (4.94) se satisfacen para  $\lambda_0 = 0$ . Pero esto contradice (4.131).

# Conclusiones

- ◇ Se estudió un problema de control de borde, en el cual las ecuaciones estacionarias de Rayleigh-Bénard-Marangoni fueron consideradas como las restricciones, y las funciones de control actuando como condiciones de borde de tipo mixto (Dirichlet, Neumann y Robin) aplicadas a la velocidad y la temperatura del fluido.
- ◇ Se probó la existencia de una solución “*débil - fuerte*” para el modelo de Rayleigh-Bénard-Marangoni con controles sobre algunas partes de la frontera. La expresión “*débil - fuerte*” hace referencia a que la solución para la velocidad es en un sentido débil, mientras que para la temperatura es en un sentido fuerte. Además se probó un teorema que establece las condiciones sobre los datos de frontera  $\mathbf{g}$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , o sobre los coeficientes  $Pr$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $B$ , bajo las cuales se garantiza la unicidad de las soluciones débiles.
- ◇ Como aporte a la Teoría de control, se probó la existencia de una solución óptima para el problema de control planteado. También, se probó la existencia de un sistema de optimalidad “*débil - fuerte*” para el problema de control con condiciones de frontera no homogéneas.
- ◇ Se estudió un problema de control de parámetros del modelo estacionario de Rayleigh-Bénard-Marangoni, el cual consistió en garantizar la existencia de parámetros  $R$ ,  $Pr$ ,  $M$  y  $B$  tales que las correspondientes velocidad y temperatura del fluido mantuvieran unas configuraciones deseadas.

# Bibliografía

- [1] F. Abergel and R. Temam. On some control problems in fluid mechanics. *Theoret. Comput. Fluid Dynam.* 1 (1990), 303-325.
- [2] R. Adams. Sobolev Spaces. *Academic Press*. New York, (1975).
- [3] G. V. Alekseev. Solvability of stationary boundary control problems for heat convection equations. *Siberian Mathematical Journal.* 39 (1998), 982-998.
- [4] G. V. Alekseev and E. A. Adomavichus. Theoretical analysis of inverse extremal problems of admixture diffusion in viscous fluids. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 9 (2001), 435-468.
- [5] G. V. Alekseev and D. A. Tereshko. Extremum problems of boundary control for steady equations of thermal convection. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* 51 (2010), 510-520.
- [6] H. Amann. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov Spaces. *Glasnik Matematicki.* 35 (2000), 161-277.
- [7] H. Bénard. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Gén. Sci. Pures Appl.* 11 (1900), 1261–1271 and 1309–1328.
- [8] M. J. Block. Surface tension as the cause of Bénard cells and surface deformation of a liquid film. *Nature.* 178 (1956), 650–651.
- [9] H. Brézis. Análisis funcional, Teoría y aplicaciones. Alianza Editorial, Madrid, (1984).
- [10] E. Casas. An optimal control problem governed by the evolution Navier-Stokes equations. *In Optimal control of viscous flows, Frontiers in applied mathematics.* (S. S. Sritharan, eds.), SIAM, Philadelphia, (1983).
- [11] S. Chandrasekhar. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. *Oxford University Press.* (1961).

- [12] A. J. Chorin and J. E. Marsden. A mathematical introduction to fluid mechanics. Third edition. Texts in Applied Mathematics, 4. Springer-Verlag, New York, (1993).
- [13] J. Conway. A Course in Functional Analysis. Second Edition, Springer-Verlaq. (1990).
- [14] M. G. Crandall and P.H. Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalues. *J. Funct. Anal.* 8 (1971), 321-340.
- [15] P. C. Dauby and G. Lebon. Bénard-Marangoni instability in rigid rectangular containers. *J. Fluid Mech.* 329 (1996), 25-64.
- [16] M. Dauge. Problèmes mixtes pour le laplacien dans des domaines polyédraux courbes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 309 (1989), 553-558.
- [17] M. Dauge. Neumann and mixed problems on curvilinear polyhedra. *Integral Equations Operator Theory.* 15 (1992), 227-261.
- [18] A. Fursikov. Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications. *Trans. Math. Monographs.* 187 (2000).
- [19] G. P. Galdi. An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. *Springer*, (2011).
- [20] V. Girault and P. Raviart, Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations. Springer-Verlaq, (1979).
- [21] P. Grisvard. Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. *Monogr. Stud. in Math.* vol. 24, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, (1985).
- [22] M. D. Gunzburger and S. Manservigi. The velocity tracking problem for Navier-Stokes flows with bounded distributed controls. *SIAM J. Control Optim.* 37 (1999), 1913-1945.
- [23] S. Hoyas. Estudio teorico y numérico de un problema de conveccion de Bénard-Marangoni en un anillo. PhD thesis, U. Complutense de Madrid, (2003).
- [24] S. Hoyas, H. Herrero and A. M. Mancho. Thermal convection in a cylindrical annulus heated laterally. *J. Phys. A.* 35 (2002), 4067-4083.
- [25] A. Iofee and V. Tikhomorov. Extremal Problems. North Holland, Amsterdam, (1979).
- [26] E. L. Koschmieder. Bénard convection. *Advances in Chemical Physics.* 26 (1974), 177-212.
- [27] A. M. Kvarving, T. Bjøntegaard and E. M. Rønquist. On pattern selection in three-dimensional Bénard-Marangoni flows. *Commun. Comput. Phys.* 11 (2012), 893-924.

- [28] M. Lappa. Thermal Convection: Patterns, Evolution and Stability Naples. *Wiley*, (2010).
- [29] H.-C. Lee. Analysis and computational methods of Dirichlet boundary optimal control problems for 2D Boussinesq equations. *Adv. Comput. Math.* 19 (2003), 255-275.
- [30] H.-C. Lee. Optimal control problems for the two dimensional Rayleigh-Bénard type convection by a gradient method. *Japan J. Indust. Appl. Math.* 26 (2009), 93-121.
- [31] H.-C. Lee and O. Y. Imanuvilov. Analysis of Neumann boundary optimal control problems for the stationary Boussinesq equations including solid media. *SIAM J. Control Optim.* 39 (2000), 457-477.
- [32] H.-C. Lee and S. Kim. Finite element approximation and computations of optimal Dirichlet boundary control problems for the Boussinesq equations. *J. Korean Math. Soc.* 41 (2004), 681-715.
- [33] J. L. Lions et E. Magenes. Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications. Dunod, Paris, (1968).
- [34] C. Marangoni. Sull'espansione delle gocce di un liquido galleggianti sulla superficie di altro liquido. *Pavia: Tipografia dei fratelli Fusi*, (1965) and *Ann. Phys. Chem.* 143 (1871), 337-354.
- [35] V. Maz'ya and J. Rossmann.  $L^p$  estimates of solutions to mixed boundary value problems for the Stokes system in polyhedral domains. *Math. Nachr.* 280 (2007), 751-793.
- [36] V. Maz'ya and J. Rossmann. Mixed boundary value problems for the stationary Navier-Stokes system in polyhedral domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 194 (2009), 669-712.
- [37] R. Pardo, S. Herrero and S. Hoyas. Theoretical study of a Bénard-Marangoni problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 376 (2011), 231-246.
- [38] J. R. A. Pearson. On convection cells induced by surface tension. *J. Fluid Mech.* 4 (1958), 489.
- [39] J. Pedlosky. Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, (1987).
- [40] L. Rayleigh. On convection currents in horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *Philos. Mag. Ser. 6* 32(192), (1916), 529-546.
- [41] D. A. Rueda-Gómez and E. J. Villamizar-Roa. An optimal control problem for Rayleigh-Bénard-Marangoni model. (Preprint 2014).
- [42] R. Temam. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. North-Holland. New York, (1979).

- [43] E. J. Villamizar-Roa, M. A. Rodríguez-Bellido and M. A. Rojas-Medar. Some properties of a class of abstract stationary equations. *Nonlinear Anal.* 64 (2006), 2203-2214.