# ECUACIONES DIFERENCIALES DIFUSAS

WILLIAM GONZÁLEZ CALDERÓN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

**ECUACIONES DIFERENCIALES DIFUSAS**

**WILLIAM GONZÁLEZ CALDERÓN**

**Trabajo presentado como requisito parcial para optar el título de magister en matemáticas**

**Director**
**Dr. GILBERTO ARENAS DÍAZ, M.Sc.**

**Co-director**
**Dr. ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA, Ph.D.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**ESCUELA DE MATEMÁTICAS**
**MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS**
**BUCARAMANGA**
2010

A LA MEMORIA DE QUIENES HAN SACRIFICADO SUS VIDAS
POR MANTENER ENCENDIDA LA LUZ DE LA VERDAD Y LA JUSTICIA.

# Agradecimientos

Agradezco a Dios Altísimo, por todas las bendiciones que me ha dado en la vida.

Gracias a mi mamá, el ser más especial sobre la tierra. Gracias a mi Noelia y nuestros angelitos, son la razón de mi existencia.

Gracias a los profes que me han acompañado en este proceso de formación. La alta calidad humana de los y las profes de la escuela de matemáticas de la UIS, son testimonio de vida y trabajo, son ejemplo de humanidad, bondad y respeto.

Muchas gracias.

# Tabla de Contenido

# Lista de Figuras

**TITLE**: FUZZY DIFFERENTIAL EQUATIONS*
**AUTHOR**: WILLIAM GONZÁLEZ CALDERÓN**

**KEY WORDS**: Fuzzy Differentiation, Initial Boundary Value Problem, Fuzzy Differential Equation.

## DESCRIPTION

Many outcomes on fuzzy differential equations have been obtained in recent years as the theoretical field as applied. The main subject of this thesis is the initial boundary value problem (IBVP) associated with a first-order-ordinary-differential equation in the fuzzy context.

In particular, it is analyzed the implications of the differentiability on existence and uniqueness of solutions of fuzzy IBVP. It is introduced a new notion of fuzzy differentiability, called $\alpha$-derivative, which allows to generalize results on existence and uniqueness of fuzzy IBVP previously considered. The method of differential inclusions is studied as a tool to solve fuzzy IBVP.

This thesis is organized as follows. In a first chapter, the basic aspects of the Theory of Fuzzy Sets and Fuzzy Multi-valued Analysis are presented. In a second chapter, we make a deep-exhaustive dissertation of the paper "Fuzzy Differential Equations" which was written by Osmo Kaleva in 1987. In a third chapter, it deals mainly with the implications of $\alpha$-derivative at the fuzzy initial value problem in the fuzzy context. The contents of this third chapter are based on the article "A note on the Cauchy problem of fuzzy differential equations". This chapter constitutes our main contribution to the theory of fuzzy differential equations. The fourth chapter deals with the theory of differential inclusions; collecting the main results on this subject and present some examples.

---

*Graduate dissertation

** FACULTY OF SCIENCES, MATHEMATICS SCHOOL, MATHEMATICS MASTER.
Dr. GILBERTO ARENAS DÍAZ, M.Sc., Director.
Dr. ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA, Ph.D., Co-Director.

**TÍTULO**: ECUACIONES DIFERENCIALES DIFUSAS*
**AUTOR**: WILLIAM GONZÁLEZ CALDERÓN**

**PALABRAS CLAVES**: Diferenciación difusa, Problemas de valor inicial, Ecuaciones diferenciales difusas.

**DESCRIPCIÓN**

Muchos trabajos sobre ecuaciones diferenciales difusas han sido elaborados en los últimos años, tanto en el campo teórico como en el aplicado. El tema principal de esta tesis es el problema de valor inicial (PVI) asociado a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en el contexto difuso.

En particular, se analizan las implicaciones que tiene la diferenciabilidad sobre la existencia de soluciones de PVI en el contexto difuso. Se introduce una nueva noción de diferenciabilidad difusa que llamamos $\alpha$-derivada, la cual generaliza resultados sobre existencia y unicidad de PVI publicados previamente. Se estudia el método de las inclusiones diferenciales como una herramienta para resolver PVI difusos.

El presente trabajo ha sido organizado de la siguiente manera. En un primer capítulo, presentamos los aspectos básicos de la teoría de los conjuntos difusos y fundamentos del análisis multívoco difuso. En un segundo capítulo, hacemos una disertación profunda y exhaustiva del artículo “Fuzzy differential equations" elaborado por Osmo Kaleva en 1987. El tercer capítulo trata principalmente sobre las implicaciones de la $\alpha$-derivada en el problema de valor inicial en el contexto difuso. El contenido del tercer capítulo se basa en el artículo “A note on the Cauchy problem of fuzzy differential equations". Este capítulo constituye nuestro principal aporte a la teoría de las ecuaciones diferenciales difusas. El cuarto capítulo trata sobre la teoría de las inclusiones diferenciales; recopilamos los principales resultados sobre este tema y presentamos algunos ejemplos.

---

*Tesis de Grado

** FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE MATEMÁTICAS, MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS.
Dr. GILBERTO ARENAS DÍAZ, M.Sc., DIRECTOR.
Dr. ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA, Ph.D., Co-DIRECTOR.

# Introducción

El auge que ha tenido la teoría de los conjuntos difusos en los últimos años ha sido sorprendente. Sus diversas y múltiples aplicaciones en Ingeniería, Medicina, Economía y otras áreas, demuestran la utilidad y validez de esta teoría. La teoría de las ecuaciones diferenciales difusas (EDF), como un área de estudio e investigación en matemáticas, viene generando grandes expectativas y ha logrado resolver inconvenientes que se presentaban en el modelado matemático a través de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplos de aplicación de las EDF los podemos encontrar en el área de la Ingeniería Mecánica e Ingeniería Civil. Los autores en [6] usan EDF para modelar la fricción estática que se presenta en servos cilíndricos hidráulicos. Ellos sustituyen el modelo ordinario por un modelo difuso, lo que les permite obtener ciertas ventajas, como por ejemplo, la continuidad de la fricción. También en [27] podemos encontrar dos aplicaciones en el campo de la Ingeniería Civil, en el cual se proponen dos modelos difusos, uno para estudiar los movimientos oscilatorios de torres de campanarios y el otro, un modelo difuso de colas para enclaves. Otros ejemplos de aplicación aparecen en [13, 14], donde los autores usan EDF para obtener soluciones aproximadas de modelos poblacionales.

Muchos trabajos sobre ecuaciones diferenciales difusas han sido elaborados en los últimos años, tanto en el campo teórico como en el aplicado. El objetivo de este trabajo es recopilar, analizar y de alguna manera, presentar algunos resultados teóricos relativos a las EDF que mejoren en un sentido apropiado, resultados publicados previamente por otros autores.

Nuestro principal interés es estudiar el problema de valor inicial asociado a una EDF ordinaria de primer orden. En términos generales este problema lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

donde $x_0 \in X$, $t_0 \in T$, $T$ es un intervalo de número reales, $X$ es una clase de conjuntos difusos y $f : T \times X \to X$ es una multifunción difusa, esto es, una función que asigna a cada punto del dominio, un conjunto difuso.

Inicialmente podemos observar que es imprescindible establecer algún sentido a la derivada $x'(t)$ para abordar el problema de valor inicial (1). Una primera noción de derivada difusa fue dada por Puri y Ralescu en [29], en donde los autores generalizan y extienden el concepto de diferenciabilidad de Hukuhara (o $H$-derivada) definida inicialmente en el contexto de multifunciones, al contexto de las multifunciones difusas. Con base en este concepto de diferenciabilidad se dio inicio al desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales difusas, originándose los primeros trabajos en el área, entre los que se destacan los de Kaleva [18], Kloeden [21], Seikkala [34], Kandel y Byatt [20], entre otros.

En el trabajo pionero realizado por Kaleva [18] se construyen las bases del análisis difuso, necesarias para abordar el PVI difuso (1). Kaleva establece los teoremas sobre existencia y unicidad de solución del problema (1) a partir de la noción de $H$-derivada (ver Definición 1.30). Otros resultados de existencia y unicidad de soluciones de EDF han sido obtenidos por diversos autores, entre ellos, los trabajos [12, 25, 26, 28, 35]. Sin embargo, la interpretación del PVI difuso con la $H$-derivada presenta algunas desventajas, por ejemplo, las soluciones obtenidas no generalizan adecuadamente las soluciones del caso clásico. Además, algunas multifunciones difusas relativamente simples, resultan no diferenciables con esta noción de derivada. Para resolver estos inconvenientes, Bede y Gal en [4, 5] y Chalco-Cano en [8, 9] introducen una definición de derivada difusa más amplia que la $H$-derivada. A esta nueva derivada se le suele llamar derivada *generalizada*. Con este nuevo concepto de diferenciabilidad se obtienen nuevas soluciones para una ecuación diferencial difusa.

Avanzando en el mismo sentido, en este trabajo introducimos una definición de derivada difusa aún más general que la derivada generalizada. A esta derivada la llamamos $\alpha$-derivada. La ventaja de la $\alpha$-diferenciabilidad con respecto a las otras derivadas mencionadas antes, es que obtenemos los mismos resultados de existencia y unicidad de un PVI difuso, pero en condiciones más generales. Además, obtenemos otros resultados del cálculo diferencial que involucran esta noción de diferenciabilidad difusa. Estos aportes han sido presentados en el *artículo* [37].

Por otro lado, la teoría de las inclusiones diferenciales es un tema un poco distante de la diferenciación difusa que hemos mencionado, pero es una herramienta efectiva para encontrar la solución a una EDF. La ventaja que tiene este método es que prescinde de la interpretación de la derivada. En ocasiones, la solución obtenida por este método es equivalente a la obtenida mediante la noción de derivada generalizada [7]. Estos aspectos también serán introducidos en este trabajo.

El presente trabajo ha sido organizado de la siguiente manera. En un primer capítulo, presentamos los aspectos básicos de la teoría de los conjuntos difusos y fundamentos del análisis multívoco difuso. En un segundo capítulo, hacemos una disertación profunda y exhaustiva del trabajo elaborado por Kaleva en [18]. El tercer capítulo trata principalmente sobre las implicaciones de la $\alpha$-derivada en el problema de valor inicial difuso. El contenido del tercer capítulo se basa en el *artículo* [37]. Este capítulo constituye nuestro principal aporte a la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Difusas. El cuarto capítulo trata sobre la teoría de las inclusiones diferenciales; recopilamos los principales resultados sobre este tema y presentamos algunos ejemplos.

# Capítulo 1

# Fundamentos del análisis difuso

En este capítulo presentamos los aspectos básicos del análisis multívoco difuso que se requieren para abordar el tema central de este trabajo.

En una primera sección presentamos una síntesis de los aspectos básicos sobre conjuntos difusos. Definimos los espacios métricos sobre los cuales vamos a trabajar y algunas operaciones entre conjuntos difusos. En una segunda sección, presentaremos los principales desarrollos del análisis multívoco, el cual es un paso intermedio entre el análisis clásico vectorial y el análisis difuso. Muchos de los conceptos del análisis difuso son una generalización de los mismos en el análisis multívoco. La última sección, trata en detalle aspectos de medibilidad, integrabilidad y continuidad del análisis difuso, y nos prepara para introducirnos en el tema de interés.

Las demostraciones de los teoremas o proposiciones que aparecen en este capítulo son reconstruidas a partir de los artículos [18, 30, 32]. Los ejemplos son tomados principalmente de [18, 32]. Este capítulo consiste en una síntesis de estos tres trabajos y tiene como objetivo presentarle al lector un cuerpo organizado de conceptos que creemos facilitará la lectura.

## 1.1. Conjuntos difusos sobre $\mathbb{R}^n$

Sea $\mathcal{K}^n$ la colección de todos los subconjuntos compactos, convexos y no vacíos de $\mathbb{R}^n$. Si $A, B \in \mathcal{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces se define la suma y la multiplicación por escalar en $\mathcal{K}^n$ de manera usual,

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}, \qquad \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}. \tag{1.1}$$

Radström [31] demuestra que $\mathcal{K}^n$ es un semigrupo conmutativo bajo la adición, el cual satisface la ley cancelativa. Además, se demuestra que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A, B \in \mathcal{K}^n$ entonces

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \qquad \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)A, \qquad 1A = A$$

y si $\alpha$ y $\beta$ son no negativos, entonces

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

Es bien conocido que se puede definir la métrica de Hausdorff $d$ en $\mathcal{K}^n$ como,

$$d(A, B) = \text{máx}\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a - b\|,\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a - b\|\right\},$$

donde $A, B \in \mathcal{K}^n$ y $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$. También se sabe que $(\mathcal{K}^n, d)$ es un espacio métrico completo [30]. Además, la métrica $d$ verifica las siguientes propiedades.

**Proposición 1.1** ([32])**.** *Para todo $A, B, C, D \in \mathcal{K}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que:*

*i)* $d(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| d(A, B)$,

*ii)* $d(A + C, B + C) = d(A, B)$,

*iii)* $d(A + B, C + D) \leq d(A, C) + d(B, D)$.

El siguiente paso consiste en extender el espacio métrico $(\mathcal{K}^n, d)$ al contexto de los conjuntos difusos.

De manera general, se define un conjunto difuso $u$ sobre un conjunto universo $X$ como una función $u : X \to [0, 1]$. El valor $u(x) \in [0, 1]$ determina el grado de pertenencia del elemento $x \in X$ al conjunto difuso $u$. Cualquier subconjunto $S$ de $X$ también lo podemos considerar como un conjunto difuso, en este caso particular su "función de pertenencia" está dada por la función característica $\chi_S$, la cual toma valores discretos en $\{0, 1\}$.

Consideraremos $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalo cerrado y nos centraremos en el caso $X = \mathbb{R}^n$. Si $u$ es un conjunto difuso en $\mathbb{R}^n$, se define el $\alpha$-nivel de $u$ como $[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \geq \alpha\}$, con $0 < \alpha \leq 1$. Para $\alpha = 0$, se define el soporte de $u$ como el conjunto

$$[u]^0 = \operatorname{supp}(u) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) > 0\}}.$$

Un conjunto difuso $u$ es llamado compacto si todos sus $\alpha$-niveles son compactos en $\mathbb{R}^n$ para $\alpha \in [0, 1]$. De manera similar, un conjunto difuso $u$ es llamado convexo, si $[u]^\alpha$ es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Denotamos por $\mathcal{F}^n$ la colección de todos los conjuntos difusos con $\alpha$-niveles en $\mathcal{K}^n$, es decir con $\alpha$-niveles compactos, convexos y no vacíos de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in [0, 1]$.

A los conjuntos difusos de $\mathcal{F}^1$ se les suele llamar números difusos. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ se puede sumergir en $\mathcal{F}^1$, asignándole su respectiva función característica a cada número real, esto es

$$c \mapsto \chi_{\{c\}}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t = c, \\ 0, & \textit{en otro caso}. \end{cases}$$

En general, podemos sumergir de la misma manera el conjunto $\mathcal{K}^n$ en $\mathcal{F}^n$; asociándole a cada subconjunto compacto, convexo, no vacío $S$ de $\mathcal{K}^n$ su respectiva función característica $\chi_S$, la cual, claramente es un conjunto difuso sobre $\mathbb{R}^n$, es decir, $\chi_S \in \mathcal{F}^n$.

De manera equivalente, se puede definir a $\mathcal{F}^n$ como la colección de todos los conjuntos difusos $u : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ que cumplen las siguientes condiciones:

1. $u$ es normal; esto es, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $u(x_0) = 1$.

2. $u$ es un conjunto difuso convexo.

3. $u$ es semicontinua superiormente, es decir, $[u]^\alpha$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

4. $\operatorname{supp}(u)$ es compacto.

La familia de los $\alpha$-niveles de cualquier conjunto difuso $u$ de $\mathcal{F}^n$, $\{[u]^\alpha \mid \alpha \in [0,1]\} \subseteq \mathcal{K}^n$, satisfacen las siguientes propiedades:

(i) $[u]^0 \supseteq [u]^\alpha \supseteq [u]^\beta \supseteq [u]^1$, para todo $\alpha, \beta$ tales que $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.

(ii) Si $(\alpha_n)$ es una sucesión no decreciente de $[0,1]$ que converge a un $\alpha > 0$, entonces $[u]^\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n}$.

La situación recíproca también la podemos considerar. Si se tiene una familia de conjuntos $N_\alpha$ de $\mathcal{K}^n$ que satisface las condiciones (i)-(ii) dadas anteriormente, el siguiente teorema conocido como el Teorema de representación de Negoita-Ralescu, nos garantiza que podemos encontrar un conjunto difuso en $\mathcal{F}^n$ cuyos $\alpha$-niveles coincidan con $N_\alpha$.

**Teorema 1.2** ([24]). *Sea $\{N_\alpha \mid \alpha \in [0,1]\}$ una familia de subconjuntos de $\mathcal{K}^n$ que satisface las propiedades anteriores (i) y (ii). Entonces existe un único $v \in \mathcal{F}^n$ tal que $[v]^\alpha = N_\alpha$ para todo $\alpha \in (0,1]$,*

$$[v]^0 = \overline{\bigcup_{0<\alpha\leq 1} N_\alpha} \subseteq N_0,$$

*y además, el conjunto difuso $v$ se define como $v(x) = \sup\{\alpha \mid x \in N_\alpha\}$.*

Es claro que si $u, v \in \mathcal{F}^n$ y queremos que $u + v \in \mathcal{F}^n$, no podemos definir la suma de conjuntos difusos ni la multiplicación por escalar como las operaciones usuales entre funciones. La solución a este inconveniente se hace a través del Principio de extensión de Zadeh [38]. Este principio nos permite extender una operación binaria $*:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, al contexto difuso de $*:\mathcal{F}^n\times\mathcal{F}^n\to\mathcal{F}^n$ de la siguiente manera

$$u*v(z)=\sup_{z=x*y}\min\{u(x),v(y)\} \tag{1.2}$$

para $u,v\in\mathcal{F}^n$. Basados en este principio, se definen las operaciones de suma y multiplicación por escalar en $\mathcal{F}^n$ como:

$$(u+v)(x)=\sup_{y+z=x}\min\{u(y),v(z)\},\qquad (\lambda u)(x)=\begin{cases}u(\frac{x}{\lambda}) & \text{si } \lambda\neq 0,\\ \chi_{\{0\}}(x) & \text{si } \lambda=0,\end{cases} \tag{1.3}$$

donde $\lambda\in\mathbb{R}$ y $\chi_{\{0\}}$ es la función característica del elemento $0\in\mathbb{R}^n$.

Mediante el Teorema de representación de Negoita-Ralescu (Teorema 1.2) y el Principio de extensión de Zadeh, las operaciones definidas entre conjuntos difusos se pueden efectuar a través de sus $\alpha$-niveles de la siguiente manera:

$$[u+v]^\alpha=[u]^\alpha+[v]^\alpha,\qquad [\lambda\cdot u]^\alpha=\lambda\cdot[u]^\alpha,\quad \forall\alpha\in[0,1]. \tag{1.4}$$

La métrica de Hausdorff $d$ en $\mathcal{K}^n$ se puede extender a $\mathcal{F}^n$ mediante la métrica

$$D(u,v)=\sup_{\alpha\in[0,1]}d([u]^\alpha,[v]^\alpha).$$

La pareja $(\mathcal{F}^n,D)$ es un espacio métrico completo que no es separable (una prueba de este resultado se da en [32, 33]). La métrica $D$ es invariante por traslación y es homogénea, esto es, si $u,v\in\mathcal{F}^n$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, entonces

$$D(\lambda u,\lambda v)=|\lambda|D(u,v)\qquad \text{y}\qquad D(u+w,v+w)=D(u,v). \tag{1.5}$$

## 1.2. Aspectos básicos del análisis multívoco

Una multifunción es una generalización del concepto de función. Una multifunción se entiende como una función que asigna a cada punto de su dominio, un conjunto diferente de vacío. A su vez, la definición de multifunción difusa, como veremos más adelante, es una generalización del concepto de multifunción. La teoría que estudia las multifunciones se llama análisis multívoco. Esta teoría desarrolla todos los aspectos del análisis que tienen que ver con las multifunciones tales como: medibilidad, integración, continuidad, semicontinuidad, diferenciabilidad, entre otros.

Para establecer una noción de lo que sería una derivada difusa, necesitamos partir del concepto de derivada multívoca. Hukuhara en [15] y Banks y Jacobs en [3] propusieron inicialmente una definición de derivada de multifunciones.

A continuación presentamos algunas definiciones y resultados del análisis multívoco, y al final de esta sección, introduciremos la definición de $H$-derivada para multifunciones (o derivada de Hukuhara). En el siguiente capítulo, se extiende la definición de derivada de Hukuhara al contexto difuso.

**Definición 1.3.** *Sean $X, Y$ conjuntos no vacíos cualesquiera. Denotamos por $\mathcal{P}(Y)\backslash\emptyset$, la familia de todos los subconjuntos no vacíos de $Y$. Una aplicación $F : X \to \mathcal{P}(Y)\backslash\emptyset$ es llamada una multifunción, esto es, una función que asocia a cada punto de un conjunto no vacío $X$, un único subconjunto no vacío de un conjunto $Y$.*

**Ejemplo 1.4.** *Sea $F : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})\backslash\emptyset$ definida por*

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] & si\ x \neq 0, \\ \{0\} & si\ x = 0. \end{cases}$$

*$F$ es una multifunción.*

**Definición 1.5.** *Sea $F : X \to \mathcal{P}(Y)\backslash\emptyset$ una multifunción. La imagen de $F$, denotada por $Im(F)$, está definida por*

$$Im(F) = F(X) = \bigcup_{x\in X} F(x).$$

**Definición 1.6.** *Dada una multifunción $F : X \to \mathcal{P}(Y)\backslash\emptyset$, se define el grafo de $F$ por*

$$graf(F) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}.$$

**Definición 1.7.** *Sea $M \subset Y$ un subconjunto cualquiera y $F : X \to \mathcal{P}(Y)\backslash\emptyset$ una multifunción. La preimagen de $M$ se define por:*

$$F^{-1}(M) = \{x \in X \mid F(x) \cap M \neq \emptyset\}.$$

**Definición 1.8.** *Sea $F : X \to \mathcal{P}(Y)\backslash\emptyset$ una multifunción. Se dice que $F$ posee valores unitarios, si $F(x)$ es un conjunto unitario, esto es, $F(x) = \{f(x)\}$ donde $f : X \to Y$ es una función.*

**Definición 1.9.** *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $F : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\backslash\emptyset$ una multifunción. Se dice que $F$ es medible si*

$$F^{-1}(C) \in \mathcal{A}, \quad \text{para todo cerrado } C \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

**Ejemplo 1.10.** *Sea $f : X \to \mathbb{R}^n$ una función. Si definimos $\widehat{f}(x) = \{f(x)\}$, entonces es claro que $\widehat{f} : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es una multifunción a valores unitarios y además: $\widehat{f}^{-1}(A) = f^{-1}(A)$. Por lo tanto, $f$ es medible en el sentido usual si y sólo si $\widehat{f}$ es medible en el sentido de la Definición 1.9.*

Un camino para estudiar propiedades sobre medibilidad e integrabilidad de multifunciones es a través del concepto de selección.

**Definición 1.11.** *Sea $F : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción. Se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}^n$ es una selección de $F$, si $f(x) \in F(x)$, para todo $x \in X$. Si además $f$ es medible, se dice que $f$ es una selección medible de $F$.*

La existencia de selecciones está garantizada por el Axioma de elección. Un problema difícil es saber cuándo una multifunción admite selecciones medibles. Por ejemplo, en [32], el autor afirma que si $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ es una multifunción medible y con imágenes en conjuntos cerrados en $Y$, $Y$ es un espacio métrico completo y separable (como $\mathbb{R}^n$), entonces $F$ admite una selección medible.

Una definición de medibilidad más fuerte con base en las $\sigma$-álgebras de Borel es la siguiente.

**Definición 1.12.** *Sea $F : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción y $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ la $\sigma$-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $F$ es Borel medible si $graf(F) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, donde $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la $\sigma$-álgebra generada en el espacio producto por $\mathcal{A} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

**Observación 1.13** ([32])**.** *Sea $X$ un espacio de medida finita y completo. Si $F : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ es una multifunción Borel medible, entonces $F$ admite una selección medible.*

Con estos conceptos sobre medibilidad podemos continuar con la integrabilidad de multifunciones. Sea $(X, \mu)$ un espacio de medida finita y completo, denotamos por

$$L^1(X, \mathbb{R}^n, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ función integrable}\}.$$

Si no hay peligro de confusión nos referiremos simplemente como $L^1$.

**Definición 1.14.** *Sea $F : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción. Se dice que $f : X \to \mathbb{R}^n$ es una selección integrable de $F$, si $f \in L^1$ y $f(x) \in F(x)$ c.t.p. Denotamos por $S(F)$ al conjunto de todas las selecciones integrables de $F$.*

En la siguiente definición, asumimos la medida $\mu$ como no-atómica*.

**Definición 1.15** ([2])**.** *Sea $F : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una multifunción. Entonces la integral de $F$ en el sentido de Aumann, se define como:*

$$\int_X F d\mu = \left\{ \int_X f d\mu \mid f \in S(F) \right\}.$$

*Se dice que $F$ es integrable si $\int F d\mu \neq \emptyset$.*

---

*Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se dice que $A \in \mathcal{A}$ es un átomo de la medida $\mu$ si:

- $\mu(A) > 0$,
- $B \in \mathcal{A}$ y $B \subseteq A$, entonces $\mu(B) = 0$ ó $\mu(B) = \mu(A)$.

Una medida $\mu$ se dice no-atómica cuando no posee átomos.

Un problema inmediato que sigue después de esta definición es saber cuándo una multifunción es integrable. Para dar respuesta a este interrogante, necesitamos de la siguiente definición.

**Definición 1.16** ([30]). *Sea* $F : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *una multifunción. Se dice que* $F$ *es integralmente acotada si existe una función* $g : X \to \mathbb{R}$ *en* $L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$*, tal que* $\|\omega\| \leq g(x)$, $\forall \omega \in F(x)$ *y* $\forall x \in X$*, donde* $\| \cdot \|$ *es la norma euclidiana en* $\mathbb{R}^n$.

Con esta definición se pueden obtener condiciones suficientes para garantizar la integrabilidad de multifunciones.

**Teorema 1.17** ([2]). *Si* $F : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *es una multifunción Borel medible e integralmente acotada, entonces* $F$ *es integrable.*

La no-atomicidad de la medida $\mu$ permite asegurar propiedades importantes sobre la integral. La convexidad de la integral multívoca de Aumann depende, esencialmente, de la no-atomicidad de la medida $\mu$.

**Teorema 1.18** ([2]). *Si* $F : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *es una multifunción, entonces* $\int F d\mu$ *es un conjunto convexo de* $\mathbb{R}^n$.

Cuando una multifunción es a valores cerrados entonces su integral multívoca de Aumann es un conjunto compacto en $\mathcal{K}^n$.

**Teorema 1.19** ([2]). *Sea* $F : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *una multifunción. Si* $F(x)$ *es cerrado para cada* $x \in X$ *y* $F$ *es integralmente acotada, entonces* $\int F d\mu$ *es un conjunto compacto de* $\mathbb{R}^n$.

El siguiente teorema es una generalización del teorema de convergencia dominada en el contexto multívoco.

**Teorema 1.20** ([30, 32]). *Sean* $F, F_k : X \to \mathcal{K}^n$, $k \in \mathbb{N}$*, una sucesión de multifunciones Borel medibles tales que, para cada* $x \in X$ *se tiene que* $\lim F_k(x) = F(x)$ *c.t.p. (en la métrica* *de Hausdorff), y suponga que cada $F_k$ está acotada por una misma función real integrable $h \in L^1$. Entonces,*

$$\lim_{k\to\infty} \int F_k = \int F.$$

Otras propiedades de la integral de Aumann importantes para comprender aspectos de las integrales de las multifunciones difusas son las siguientes.

**Proposición 1.21.** *Sean $F, G : X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ multifunciones, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces,*

- *Si $F(x) \subseteq G(x)$ c.t.p., entonces $\int F d\mu \subseteq \int G d\mu$.*
- *Si $F(x) = G(x)$ c.t.p., entonces $\int F d\mu = \int G d\mu$.*
- *Si $(\lambda F)(x) = \lambda F(x)$, entonces $\int \lambda F d\mu = \lambda \int F d\mu$.*
- *Si $F, G$ son multifunciones a valores cerrados e integralmente acotadas, entonces*

$$\int (F + G) d\mu = \int F d\mu + \int G d\mu.$$

Insistimos en estos resultados sobre medibilidad e integrabilidad porque vamos a considerar multifunciones con valores en $\mathcal{K}^n$ (conjuntos compactos, convexos y no vacios de $\mathbb{R}^n$) y debemos asegurar las condiciones de suficiencia para que las multifunciones sean integrables. Miremos algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.22.** *Supongamos que $f \in L^1(X, \mathbb{R}, \mu)$ y definamos la multifunción $F(x) = \{f(x)\}$ para toda $x \in X$. Entonces, $F$ es integrable y además,*

$$\int F d\mu = \left\{ \int f d\mu \right\}.$$

**Ejemplo 1.23.** *Sea $X = [0, 1]$, provisto de la medida usual de Lebesgue, la cual, no es atómica. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 < a < b$. Definamos la multifunción $F(x) = \{a, b\}$, para toda $x \in [0, 1]$.*

*Denotamos las selecciones por* $f_1(x) = a$ *y* $f_2(x) = b$*, para todo* $x \in [0,1]$*. Es claro, que* $f_1, f_2 \in S(F)$*, y además,*

$$\int_X f_1 d\mu = a \quad y \quad \int_X f_2 d\mu = b.$$

*Por otro lado, si tomamos cualquier partición en conjuntos medibles de* $[0,1]$ *de la forma* $\{A, B\}$ *y haciendo* $f = f_1\chi_A + f_2\chi_B$*, tenemos que* $f \in S(F)$ *y su integral está dada por*

$$\int_X f d\mu = a\mu(A) + b\mu(B) = \lambda a + (1-\lambda)b, \ \ \lambda \in [0,1].$$

*Por consiguiente,* $\int F = [a, b]$*.*

Lo interesante de este ejemplo es que la multifunción $F$ no es a valores convexos y sin embargo, la integral es convexa. De ahí la importancia de la no-atomicidad de $\mu$, porque esta condición garantiza que la integral multívoca $\int F d\mu$ sea un conjunto convexo.

**Ejemplo 1.24.** *Sea* $X = [0,1]$ *con la medida usual de Lebesgue* $\mathcal{L}$*, pero introduzcamos un átomo en uno de sus extremos. Sea* $\mu(\{1\}) = 3$*. Si* $A \subseteq [0,1]$ *es Lebesgue medible, entonces definimos la siguiente medida:*

$$\mu(A) = \begin{cases} \mathcal{L}(A), & si\ 1 \notin A, \\ 3 + \mu(A \setminus \{1\}), & si\ 1 \in A. \end{cases}$$

*Consideremos la multifunción* $F$ *tal que* $F(x) = \{4, 5\}$ *para todo* $x \in [0,1]$*. Si consideramos todas las particiones de conjuntos medibles de* $X = [0,1]$ *de la forma* $\{A, B, \{1\}\}$*, donde* $B = [0,1] - (A \cup \{1\})$*, podemos observar que dada cualquier selección integrable* $f$ *de* $F$ *ésta debe ser de la forma:*

$$f = 4\chi_A + 5\chi_B + 4\chi_{\{1\}} \ c.t.p.$$

*ó*

$$f = 4\chi_A + 5\chi_B + 5\chi_{\{1\}} \ c.t.p.$$

*En el primer caso obtenemos que*

$$\int_X f d\mu = 4\mu(A) + 5\mu(B) + 12 = 4\lambda + 5(1-\lambda) + 12, \qquad \lambda \in [0,1],$$

*y en el segundo caso,*

$$\int_X f d\mu = 4\mu(A) + 5\mu(B) + 15 = 4\lambda + 5(1-\lambda) + 15, \qquad \lambda \in [0,1].$$

*Por consiguiente, tenemos que*

$$\int_X F d\mu = [16,17] \cup [19,20],$$

*el cual, no es un conjunto convexo. Sin embargo, podemos observar que la integral aún así, es un conjunto compacto.*

La definición de continuidad para multifunciones es la usual para espacios métricos.

**Definición 1.25.** *Sea $F : T \to \mathcal{K}^n$ una multifunción. Se dice que $F$ es continua en $t_0 \in T$, si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que*

$$d(F(t), F(t_0)) < \epsilon, \quad \textit{para todo } t \in T \textit{ con } |t - t_0| < \delta.$$

La definición de multifunciones que satisfacen la condición de Lipschitz, es un concepto que usaremos en este presente trabajo. La definición conserva el sentido usual.

**Definición 1.26.** *Sea $F : T \to \mathcal{K}^n$ una multifunción. Se dice que $F$ es Lipschitz continua, con constante de Lipschitz $L$, si*

$$d(F(t), F(t^*)) \le L|t - t^*| \quad \textit{para todo} \quad t, t^* \in T.$$

Como en el caso clásico, toda multifunción Lipschitz continua es continua, pero la afirmación recíproca no es cierta.

**Ejemplo 1.27.** *Sea $F : [0,1] \to \mathcal{K}$ definida como $F(t) = [\sqrt{t}, 1]$. Entonces*

$$d(F(t), F(t^*)) = d([\sqrt{t}, 1], [\sqrt{t^*}, 1]) = |\sqrt{t} - \sqrt{t^*}| = \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^*}} |t - t^*|.$$

*Suponer que $F$ es una multifunción Lipschitz continua, significa suponer que existe una constante positiva $L$ tal que $\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^*}} \le L$, para todo $t, t^* \in [0,1]$, lo cual es imposible porque $t$ y $t^*$ pueden estar tan cerca de cero como se quiera.*

Para introducir la $H$-derivada entre multifunciones, necesitamos definir una diferencia entre conjuntos de $\mathcal{K}^n$. Para ello, en [3], Banks y Jacobs retoman la diferencia de Hukuhara, la cual está definida de acuerdo con las propiedades entre conjuntos dadas en [31].

**Definición 1.28.** *Sean $A, B \in \mathcal{K}^n$. Se define la diferencia de Hukuhara o $H$-diferencia $A \ominus B$ (si ésta existe) como el conjunto $C \in \mathcal{K}^n$ tal que $A = B + C$.*

**Observación 1.29.** *Notemos que $A \ominus B \neq A + (-B) := A - B$ porque, en general, en $\mathcal{K}^n$ no se tienen todos los inversos aditivos. Por ejemplo, si $A = [-1, 1]$, es claro que $-A = [-1, 1]$ y $A + (-A) = [-2, 2]$.*

Ahora, con base en la diferencia de Hukuhara, los autores de [3, 15] establecen la siguiente definición de diferenciabilidad para multifunciones.

**Definición 1.30** ([3])**.** *Sea $G : T \to \mathcal{K}^n$ una multifunción. Se dice que $G$ es Hukuhara diferenciable ($H$-diferenciable) en $t_0 \in T$, si existe $G'(t_0) \in \mathcal{K}^n$ tal que, para $h > 0$ suficientemente pequeño, las diferencias $G(t_0 + h) \ominus G(t_0)$, $G(t_0) \ominus G(t_0 - h)$ existen, y*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(t_0 + h) \ominus G(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{G(t_0) \ominus G(t_0 - h)}{h} = G'(t_0),$$

*donde el límite es tomado en el espacio métrico $(\mathcal{K}^n, d)$. En los extremos del intervalo $T$ se consideran sólo las derivadas laterales.*

En el artículo de Banks y Jacobs [3] se presentan las propiedades de la $H$-derivada para multifunciones que se pueden deducir de esta definición. Una de ellas es la que tiene que ver con el diámetro de las imágenes de la multifunción.

**Proposición 1.31.** *Si $F : T \to \mathcal{K}^n$ es una multifunción $H$-diferenciable sobre $T$, entonces la función de valor real $t \to \operatorname{diam}(F(t))$, $t \in T$, es no decreciente en $T$.*

**Observación 1.32.** *Debemos señalar que una multifunción $F : T \to \mathcal{K}^n$ Hukuhara diferenciable en un intervalo $T$ y con $\operatorname{diam}(F(t)) > 0$ para todo $t \in T$, no necesariamente* *implica que $F$ es monótona con respecto a la inclusión de conjuntos. Por ejemplo, si $F(t) = [t, 2t]$, con $0 < t < 1$, entonces $F'(t) = [1, 2]$, $0 < t < 1$, y tenemos que $F(t_1) \nsubseteq F(t_2)$ y $F(t_2) \nsubseteq F(t_1)$ para cualquier $t_1, t_2$, $0 < t_1 < t_2 < 1$.*

**Ejemplo 1.33.** *Sea $T = [0, 2\pi]$ y consideremos la multifunción $F(t) = (2 + \operatorname{sen} t)[-1, 1]$, donde $t \in (0, 2\pi)$. Según la Proposición 1.31, $F$ no es Hukuhara diferenciable en $(0, 2\pi)$ puesto que $\operatorname{diam}(F(t)) = 2(2 + \operatorname{sen} t)$ no es no decreciente en $(0, 2\pi)$.*

Pasamos a considerar varios de estos conceptos multívocos en el contexto difuso.

## 1.3. Continuidad, medibilidad e integración de multifunciones difusas

Recordemos que una multifunción es una función donde a cada punto de su dominio le asigna un conjunto. Una multifunción difusa es una función que asocia a cada punto en su dominio, un conjunto difuso. Claramente esta definición es una generalización natural del concepto de multifunción.

**Definición 1.34.** *Sea $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Una multifunción difusa se define como una aplicación $F : T \to \mathcal{F}^n$ donde $F(t) \in \mathcal{F}^n$ para toda $t \in T$. Para cada $\alpha \in [0, 1]$ se puede definir una multifunción $F_\alpha : T \to \mathcal{K}^n$ tal que $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$. Si $F$ es una multifunción de $T$ en $\mathcal{F}^1$, entonces $F_\alpha(t)$ es un intervalo compacto $F_\alpha(t) = [\lambda_\alpha(t), \mu_\alpha(t)]$ en $\mathbb{R}$, donde $\lambda_\alpha(t)$ y $\mu_\alpha(t)$ son funciones reales.*

**Ejemplo 1.35.** *Las multifunciones $F_\alpha : [0, 10] \to \mathcal{K}^1$, $\alpha \in [0, 1]$, dadas por*

$$F_\alpha(t) = [0, 1 - \alpha^t]$$

*definen una multifunción difusa $F : [0, 10] \to \mathcal{F}^1$ dada por $F(0)(x) = \chi_{\{0\}}(x)$ si $t = 0$ y*

$$F(t)(x) = \begin{cases} (1 - x)^{1/t} & x \in [0, 1], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

*para cada $t > 0$. Podemos observar un modelo de las gráficas de las imágenes de $F$ en la Figura 1.1.*

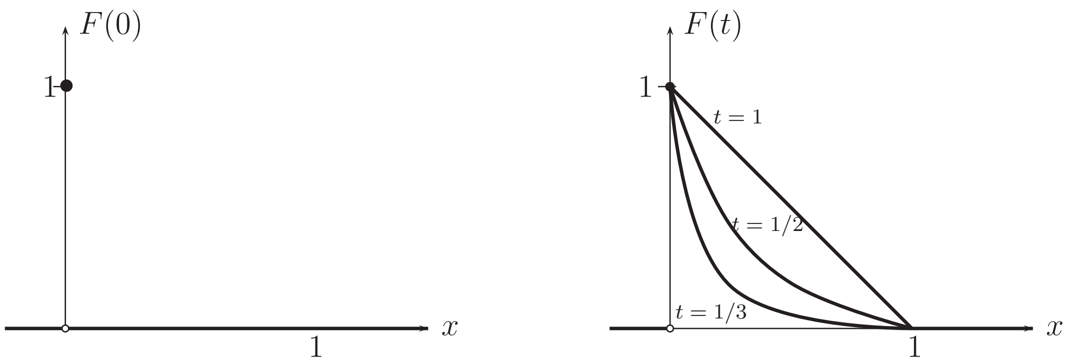



Figura 1.1: Multifunción difusa

Como veremos más adelante, muchas de las definiciones y propiedades de las multifunciones difusas se basan en el hecho de que, una multifunción difusa $F : T \to \mathcal{F}^n$ se expresa como una familia de multifunciones $F_\alpha(t) : T \to \mathcal{K}^n$ indexada por el conjunto $[0, 1]$. Apoyados en el análisis multívoco, si la familia de multifunciones $F_\alpha$ proveniente de una multifunción difusa $F$ cumple ciertas propiedades de medibilidad, integrabilidad, etc., podemos de alguna manera asumir condiciones similares sobre la respectiva multifunción difusa $F$.

El concepto de continuidad de multifunciones difusas es el usual entre espacios métricos.

**Definición 1.36.** *Una multifunción difusa $F : T \to \mathcal{F}^n$ es continua en un punto $t_0 \in T$, si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $D(F(t), F(t_0)) < \epsilon$, para $t \in T$ con $|t - t_0| < \delta$.*

También utilizaremos la siguiente definición de continuidad para multifunciones difusas, la cual generaliza la Definición 1.36.

**Definición 1.37.** *Una multifunción difusa $F : T \to \mathcal{F}^n$ se dice $\alpha$-continua en $t_0 \in T$, si las multifunciones $F_\alpha : T \to \mathcal{K}^n$ definidas por $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ son continuas en $t = t_0$ con respecto a la métrica de Hausdorff $d$ para todo $\alpha \in [0, 1]$; esto es, fijado $\alpha$ y dado $\epsilon > 0$, existe*

*$\delta = \delta(\epsilon, \alpha, t_0) > 0$ tal que $d([F(t)]^\alpha, [F(t_0)]^\alpha) < \epsilon$, para todo $t$ en $T$ con $|t - t_0| < \delta$. Si $F$ es $\alpha$-continua para todo $t \in T$, se dice que $F$ es $\alpha$-continua.*

**Proposición 1.38.** *Si $F$ es una multifunción difusa continua en un punto $t_0$, entonces $F$ es $\alpha$-continua en $t_0$.*

*Demostración.* Sea $\epsilon > 0$ y $t_0 \in T$. Por la continuidad de $F$, existe un $\delta > 0$ tal que $D(F(t), F(t_0)) < \epsilon$ siempre que $|t - t_0| < \delta$. Por definición de la métrica $D$, se tiene que para cada $\alpha \in [0,1]$, $d(F_\alpha(t), F_\alpha(t_0)) < \epsilon$ para todo $t \in T$ tal que $|t - t_0| < \delta$, luego $F_\alpha$ es continua con respecto a la métrica de Hausdorff $d$ en $K^n$. $\square$

Enseguida presentamos algunos preliminares concernientes a la medibilidad e integrabilidad de multifunciones difusas que podemos encontrar en [18]. Éstos son aspectos generales necesarios para abordar el análisis de las ecuaciones diferenciales difusas.

**Definición 1.39.** *Una multifunción difusa $F : T \to \mathcal{F}^n$ es fuertemente medible si para todo $\alpha \in [0,1]$, la multifunción $F_\alpha : T \to \mathcal{K}^n$ definida por $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ es Borel medible (ver Definición 1.12), donde $\mathcal{K}^n$ está dotada con la topología generada por la métrica de Hausdorff.*

**Lema 1.40** ([18])**.** *Si $F : T \to \mathcal{F}^n$ es una multifunción difusa fuertemente medible, entonces $F$ es medible con respecto a la topología generada por $D$.*

**Lema 1.41.** *Si $F : T \to \mathcal{F}^n$ es una multifunción difusa, continua con respecto a la métrica $D$, entonces $F$ es fuertemente medible.*

*Demostración.* Si $F$ es continua, por la Proposición 1.38, $F$ es $\alpha$-continua y sus multifunciones $F_\alpha$ son continuas con respecto a la métrica de Hausdorff $d$. Entonces las $F_\alpha$ son Borel medibles porque para cada $C \in \mathcal{K}^n$, se tiene $F^{-1}(C)$ es cerrado. $\square$

**Lema 1.42.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^1$ fuertemente medible, tal que $F_\alpha(t) = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$ para $\alpha \in [0,1]$. Entonces $f_\alpha(t)$, $g_\alpha(t)$ son medibles.*

De acuerdo con la Definición 1.34, una multifunción difusa con valores en el conjunto de los números difusos $\mathcal{F}^1$, se puede expresar como una familia de multifunciones cuyos valores son intervalos compactos determinados por funciones reales en los extremos. Una propiedad dada sobre la multifunción difusa, significará propiedades similares sobre las funciones reales extremos de los intervalos, como se verá en el contexto de la diferenciabilidad e integrabilidad.

**Definición 1.43.** *Se dice que una multifunción difusa $F : T \to \mathcal{F}^n$ es integralmente acotada si cada multifunción $F_\alpha$ lo es, para $\alpha \in [0, 1]$.*

Kaleva en [18] asume la siguiente definición de multifunción difusa integralmente acotada (Observación 1.44), la cual es una consecuencia de la Definición 1.43.

**Observación 1.44.** *Una multifunción difusa $F : T \to \mathcal{F}^n$ es llamada integralmente acotada si para cada $t \in T$ existe una función real integrable $h$ tal que $\|x\| \leq h(t)$ para todo $x \in F_0(t)$, donde $\|\cdot\|$ es la norma euclideana en $\mathbb{R}^n$.*

**Definición 1.45.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa. La integral de $F$ sobre $T$, denotada $\int_T F(t)dt$ ó $\int_b^a F(t)dt$, es definida a través de los niveles por:*

$$\begin{aligned} \left[\int_T F(t)dt\right]^\alpha &= \int_T F_\alpha(t)dt \\ &= \left\{\int_T f(t)dt \mid f : T \to \mathbb{R}^n \text{ función, } f \in S(F_\alpha)\right\} \end{aligned}$$

*para todo $0 \leq \alpha \leq 1$.*

**Definición 1.46.** *Una multifunción difusa $F : T \to \mathcal{F}^n$ fuertemente medible e integralmente acotada se dice integrable sobre $T$, si $\int_T F(t)dt \in \mathcal{F}^n$.*

De aquí en adelante, las integrales $\int_T F(t)dt$, $\int_T f(t)dt$, etc. se escribirán $\int F$, $\int f$. Cuando la integral se toma sobre un subconjunto $S \subset T$ se escribirá $\int_S F$.

El siguiente teorema proporciona las condiciones de suficiencia para que una multifunción difusa sea integrable.

**Teorema 1.47.** *Si $F : T \to \mathcal{F}^n$ es una multifunción difusa fuertemente medible e integralmente acotada, entonces existe un único conjunto difuso $u \in \mathcal{F}^n$ tal que*

$$[u]^\alpha = \int F_\alpha, \quad \textit{para todo} \quad \alpha \in [0,1].$$

*Demostración.* La idea es mostrar que la familia $\{\int F_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ verifica las hipótesis del Teorema de representación de Negoita-Raluescu (Teorema 1.2).

Parte (i). Si $\alpha \leq \beta$ entonces para toda $t \in T$, tenemos que $F_\beta(t) \subseteq F_\alpha(t)$. Por la Proposición 1.21, se tiene que $\int F_\beta(t) \subseteq \int F_\alpha(t)$.

Parte (ii). Puesto que cada multifunción $F_\alpha$ es medible e integralmente acotada, por el Teorema 1.17, tenemos que $\int F_\alpha \neq \emptyset$. Además, una vez que $F_\alpha$ es una multifunción a valores compactos, entonces por el Teorema 1.19, $\int F_\alpha$ es también un conjunto compacto.

Debemos demostrar lo siguiente: si $(\alpha_n)$ es una sucesión tal que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots$, donde $\alpha_n \to \alpha$ en $[0,1]$, $\alpha \neq 0$, entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \int F_{\alpha_n} = \int F_\alpha.$$

Sea $t \in T$. Entonces, $F(t) \in \mathcal{F}^n$ y los $\alpha$-niveles $(F_{\alpha_n}(t))$ forman una sucesión decreciente de conjuntos compactos que converge (en la métrica Hausdorff) a su intersección:

$$\lim_{n\to\infty} F_{\alpha_n}(t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\alpha_n}(t) = F_\alpha(t), \quad \forall t \in T.$$

Ahora, tenemos que $F_{\alpha_1}(t) \supseteq F_{\alpha_2}(t) \supseteq \cdots$ y puesto que $F_{\alpha_1}$ es integralmente acotada, existe una función real integrable $h$ tal que $\|f(t)\| \leq h(t)$ para toda $f \in S(F_{\alpha_1})$. Luego, para cualquier selección $g \in S(F_{\alpha_n})$, para toda $n$, se tiene que $g$ está acotada por $h$, esto es, $\|g(t)\| \leq h(t)$, para toda $t \in T$. Entonces, la familia de multifunciones $\{F_{\alpha_n}\}$ está acotada por la misma función integrable.

Por lo tanto, por el Teorema de convergencia dominada de integrales multívocas (Teorema 1.20), tenemos que $\int F_{\alpha_n} \to \int F_\alpha$ en la métrica de Hausdorff.

Notemos que $(\int F_{\alpha_n})$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos, luego ésta debe converger a su intersección, debido a la unicidad del límite, esto es,

$$\int F_{\alpha_n} \to \int F_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} \int F_{\alpha_n}.$$

Por el Teorema de Negoita-Ralescu (Teorema 1.2), el conjunto difuso $u$ está definido como

$$u(x) = \sup \left\{ \alpha \in [0,1] \mid x \in \int F_\alpha \right\},$$

el cual satisface

$$[u]^\alpha = \int F_\alpha, \qquad \alpha \in [0,1]. \qquad \square$$

**Corolario 1.48.** *Si $F : T \to \mathcal{F}^n$ es fuertemente medible e integralmente acotada, entonces $F$ es integrable.*

A partir de los resultados anteriores podemos considerar las siguientes observaciones.

**Observación 1.49** ([18])**.** *Puesto que, para todo $u \in \mathcal{F}^n$, $\lim_{k\to\infty} d([u]^0, [u]^{\alpha_k}) = 0$, donde $(\alpha_k)$ es una sucesión no creciente convergente a cero, entonce se tiene que*

$$\lim_{k\to\infty} d\left(\int_T F_{\alpha_k}, \int_T F_0\right) = 0.$$

*Debido a que*

$$d\left(\left[\int F\right]^0, \int F_0\right) \leq d\left(\left[\int F\right]^0, \int F_{\alpha_k}\right) + d\left(\int F_{\alpha_k}, \int F_0\right),$$

*se concluye que $[\int F]^0 = \int F_0$.*

**Observación 1.50.** *Si $F : T \to \mathcal{F}^1$ es integrable, entonces en vista del Lema 1.42, $\int F$ es obtenida por la integración de los $\alpha$-niveles, esto es,*

$$\left[\int F\right]^\alpha = \left[\int f_\alpha, \int g_\alpha\right],$$

*donde $[F(t)]^\alpha = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$, $\alpha \in [0,1]$.*

**Teorema 1.51.** *Si $F : T = [a,b] \to \mathcal{F}^n$ es continua, entonces $F$ es integrable.*

*Demostración.* Por el Lema 1.41, $F$ es fuertemente medible. Por la Proposición 1.38, cada multifunción $F_\alpha$ es continua con respecto a la métrica de Hausdorff. Por definición de $F$, $F_\alpha(t) \in \mathcal{K}^n$ para todo $t \in T$. Entonces, $\bigcup_{t\in T} F_\alpha(t) = F_\alpha(T)$ es compacto, por ser la imagen continua de un compacto. Luego, $\bigcup_{t\in T} F_\alpha(t)$ es un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$. Entonces existe un $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para toda $x \in F_\alpha(t)$ y $t \in T$. Por lo tanto, $F$ está integralmente acotada por la función real integrable $h(t) = M$, $t \in T$. $\square$

**Corolario 1.52.** *Si $F : T \to \mathcal{F}^n$ es $\alpha$-continua, entonces $F$ es integrable.*

Otras propiedades de la integral de multifunciones difusas que se cumplen en el caso clásico, son dadas en los siguientes resultados:

**Teorema 1.53.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^n$ integrable y $c \in T$. Entonces $\int_b^a F = \int_a^c F + \int_c^b F$.*

*Demostración.* Si $F$ es integrable sobre $T$, lo es también sobre cualquier subintervalo de $T$. Ahora, sea $\alpha \in [0,1]$ y $f \in S(F_\alpha)$. Es claro que $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, entonces tenemos

$$\left[\int_a^b F\right]^\alpha \subseteq \left[\int_a^c F\right]^\alpha + \left[\int_c^b F\right]^\alpha.$$

Por otro lado, sea $h = \int_a^c f_1 + \int_c^b f_2$, donde $f_1 \in S(F_\alpha)$ en el subintervalo $[a,c]$ y $f_2 \in S(F_\alpha)$ en $[c,b]$. Entonces, sea $f$ una selección de $S(F_\alpha)$ en $T$ definida de la siguiente manera:

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si } t \in [a,c], \\ f_2(t) & \text{si } t \in (c,b], \end{cases}$$

y la integral de $f$ en $T$ está dada por

$$\int_a^b f = \int_a^c f_1 + \int_c^b f_2 = h.$$

Por lo tanto,

$$\left[\int_a^c F\right]^\alpha + \left[\int_c^b F\right]^\alpha \subseteq \left[\int_a^b F\right]^\alpha.$$ $\square$

**Corolario 1.54.** *Si $F : T \to \mathcal{F}^n$ es una multifunción difusa continua, entonces $G(t) = \int_a^t F$ es Lipschitz continua sobre $T$.*

*Demostración.* Como $F$ es continua, entonces $F$ es integrable, y así la función $G$ tiene sentido. Sean $t, t^* \in T$ y supongamos que $t < t^*$. Por el Teorema 1.53 y las propiedades (1.5) de la métrica $D$, tenemos que

$$\begin{aligned} D(G(t^*), G(t)) &= D\left(\int_a^{t^*} F, \int_a^t F\right) = D\left(\int_a^{t^*} F + \int_t^{t^*} F, \int_a^t F + \int_t^{t^*} F\right) \\ &= D\left(\int_a^{t^*} F + \int_t^{t^*} F, \int_a^{t^*} F\right) = D\left(\int_t^{t^*} F, \chi_0\right), \end{aligned}$$

donde $\chi_0$ es la función característica de $0 \in \mathbb{R}^n$.

Por la definición de la métrica $D$,

$$D\left(\int_t^{t^*} F, \chi_0\right) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d\left(\left[\int_t^{t^*} F\right]^\alpha, [\chi_0]^\alpha\right) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d\left(\int_t^{t^*} F_\alpha, \{0\}\right). \tag{1.6}$$

Por propiedades de los $\alpha$-niveles de un conjunto difuso se tiene que $F_0(s) \supseteq F_\alpha(s)$, para todo $s \in T$ y para todo $\alpha$. Por la Proposición 1.21, tenemos que $\int_t^{t^*} F_0(s) \supseteq \int_t^{t^*} F_\alpha(s)$, para todo $\alpha$. Luego, la ecuación (1.6) se reduce a

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} d\left(\int_t^{t^*} F_\alpha, \{0\}\right) = d\left(\int_t^{t^*} F_0, \{0\}\right).$$

Pero $F_0$ es una multifunción integralmente acotada (ver demostración del Teorema 1.51), luego existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$, para todo $x \in F_0(s)$ (ver Observación 1.44). Esto implica que

$$D(G(t^*), G(t)) \leq M(t^* - t).$$

□

De acuerdo con la Proposición 1.21 y las propiedades de la métrica $D$, se obtienen los siguientes resultados.

**Teorema 1.55** ([18])**.** *Sean $F, G : T \to \mathcal{F}^n$ integrables y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:*

*1.* $\int_a^b(\lambda F(t)+G(t))dt = \lambda\int_a^b F(t)dt + \int_a^b G(t)dt$.

*2.* $D(F,G)$ *is integrable.*

*3.* $D(\int_a^b F(t)dt, \int_a^b G(t)dt) \leq \int_a^b D(F,G)(t)dt$.

**Teorema 1.56.** *Si $F : T \to \mathcal{F}^n$ es integrable entonces la función*

$$(t,\alpha) \to \operatorname{diam}\left[\int_a^t F\right]^\alpha, \quad t \in T, \quad \alpha \in [0,1].$$

*es no decreciente con respecto a $t$ en $T$ y no creciente con respecto a $\alpha \in [0,1]$.*

*Demostración.* Sean $s,t \in T$, con $s < t$. Por el Teorema 1.53,

$$\left[\int_a^t F\right]^\alpha = \left[\int_a^s F\right]^\alpha + \left[\int_s^t F\right]^\alpha,$$

entonces, claramente, $\operatorname{diam}([\int_a^t F]^\alpha) \geq \operatorname{diam}([\int_a^s F]^\alpha)$.

Ahora, sean $\alpha,\beta \in [0,1]$ con $\alpha \leq \beta$. Entonces para todo $t \in T$ se tiene que $F_\beta(t) \subseteq F_\alpha(t)$. Por la Proposición 1.21,

$$\int F_\beta(t) \subseteq \int F_\alpha(t) \Rightarrow \left[\int F(t)\right]^\beta \subseteq \left[\int F(t)\right]^\alpha.$$

Por lo tanto, $\operatorname{diam}([\int F]^\alpha) \geq \operatorname{diam}([\int F]^\beta)$. □

En [18], el autor desarrolla los dos siguientes ejemplos sobre el cálculo de integrales difusas.

**Ejemplo 1.57.** *Sea $A \in \mathcal{F}^n$ y se define una multifunción difusa $F : T \to \mathcal{F}^n$ por $F(s) = A$ para todo $0 \leq s \leq t$. Entonces*

$$\int_0^t F = tA.$$

**Ejemplo 1.58.** *Definamos $F : T \to \mathcal{F}^n$ por $\alpha$-niveles de la forma*

$$F_\alpha(t) = \prod_{i=1}^n [a_i^\alpha(t), b_i^\alpha(t)], \quad \alpha \in [0,1],$$

*donde* $a_i^\alpha, b_i^\alpha : T \to \mathbb{R}$ *son integrables,* $a_i^\alpha(t) \leq b_i^\alpha(t)$ *para todo* $t \in T$ *y para cada* $t \in T$ *se tiene que* $a_i^\alpha(t), b_i^\alpha(t)$ *son continuas por la izquierda y* $a_i^\alpha(t)$ *es no decreciente (respectivamente* $b_i^\alpha(t)$ *es no creciente) con respecto a* $\alpha$*. Por el Teorema de Negoita-Ralescu (Teorema 1.2),* $F(t) \in \mathcal{F}^n$*. Ahora, para todo* $\alpha \in [0,1]$ *tenemos*

$$\int F_\alpha = \prod_{i=1}^{n} \left[ \int a_i^\alpha, \int b_i^\alpha \right],$$

*y nuevamente por el Teorema de Negoita-Ralescu, se tiene que* $F$ *es integrable. La condición (ii) del Teorema de Negoita-Ralescu se cumple por el Teorema de convergencia dominada (Teorema 1.20) y la condición (i) de Teorema de Negoita-Ralescu es trivial.*

# Capítulo 2

# Ecuaciones diferenciales difusas vía $H$-derivada

En este capítulo estudiamos el problema de valor inicial asociado a una ecuación diferencial difusa ordinaria de primer orden. Recordemos que el estudio de un PVI depende de la forma como interpretemos la derivada. En este contexto, inicialmente introducimos la derivada de Hukuhara (o $H$-derivada) definida por Puri y Ralescu en [29] para multifunciones difusas y desarrollamos todos los resultados del análisis diferencial difuso necesarios para abordar finalmente el PVI difuso.

El concepto de ecuación diferencial difusa (EDF) fue introducido por Kandel y Byatt en [20] y posteriormente, Kaleva en [18] obtuvo los primeros resultados relativos a la existencia y unicidad de la solución para un problema de valor inicial asociado a una EDF. En este sentido, el contenido de este capítulo se basa en una disertación del artículo de Kaleva [18].

## 2.1. Diferenciabilidad difusa

Para introducir la derivada de multifunciones difusas se requiere el concepto de diferencia entre conjuntos difusos de tal modo que la definición de derivada tenga sentido. Apoyados en la diferencia de Hukuhara (o $H$-diferencia) entre conjuntos de $\mathcal{K}^n$, mencionados en el Capítulo 1, hacemos la respectiva extensión al espacio $\mathcal{F}^n$, definiendo de manera natural la diferencia entre conjuntos difusos.

**Definición 2.1.** *Sean $u, v \in \mathcal{F}^n$. Si existe $w \in \mathcal{F}^n$ tal que $u = v + w$, entonces $w$ es llamada la $H$-diferencia entre $u$ y $v$ y lo denotamos por $u \ominus v$. Aquí la suma $v + w$ es como fue definida en (1.3).*

**Definición 2.2** ([29])**.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa. Se dice que $F$ es Hukuhara diferenciable (o $H$-diferenciable) en $t_0 \in T$ si, para $h > 0$ suficientemente pequeño, existen las diferencias $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$, $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$, y existe un elemento $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$ tal que*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0).$$

*Aquí los límites son tomados en el espacio métrico $(\mathcal{F}^n, D)$.*

**Observación 2.3.** *La Definición 2.2 es una generalización de la diferenciabilidad de Hukuhara de una multifunción. Es de anotar que si $F : T \to \mathcal{F}^n$ es $H$-diferenciable en $t_0 \in T$, entonces las multifunciones $F_\alpha(t_0) = [F(t_0)]^\alpha$ son $H$-diferenciables en $t_0$, para todo $\alpha \in [0, 1]$ y su derivada está dada por $[F'(t_0)]^\alpha = F'_\alpha(t_0)$, donde $F'_\alpha(t_0)$ denota la derivada de Hukuhara de $F_\alpha$ para multifunciones. El resultado recíproco no se cumple puesto que la existencia de la diferencia de Hukuhara en los $\alpha$-niveles $[u]^\alpha \ominus [v]^\alpha$ no implica la existencia de la $H$-diferencia de $u \ominus v$ (Observación 3.9). Sin embargo, el siguiente resultado (Observación 2.5) nos muestra las condiciones para encontrar la equivalencia entre estas nociones.*

**Definición 2.4.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa. Se dice que las multifunciones $F_\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, son uniformemente Hukuhara diferenciables con derivada $F'_\alpha$, si para cada $t \in T$ y para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon, t) > 0$ tal que*

$$d((F_\alpha(t + h) \ominus F_\alpha(t))/h, F'_\alpha(t)) < \epsilon \quad y \quad d((F_\alpha(t) \ominus F_\alpha(t - h))/h, F'_\alpha(t)) < \epsilon,$$

*para todo $\alpha \in [0, 1]$ y $0 < h < \delta$.*

**Observación 2.5.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa. Si para cada $t \in T$ existe $\beta > 0$ tal que las diferencias $F(t+h) \ominus F(t)$ y $F(t) \ominus F(t-h)$ existen para todo $0 \leq h < \beta$ y si, además, $F$ es uniformemente $H$-diferenciable, entonces $F$ es $H$-diferenciable y la derivada está dada por $F'_\alpha(t) = [F'(t)]^\alpha$. Este es un resultado probado en [18].*

**Teorema 2.6.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^1$ $H$-diferenciable. Denotamos las multifunciones de $F$ como $F_\alpha(t) = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$, para cada $\alpha \in [0,1]$. Entonces $f_\alpha, g_\alpha$ son funciones de valor real diferenciables y*

$$[F'(t)]^\alpha = [f'_\alpha(t), g'_\alpha(t)].$$

*Demostración.* Por hipótesis, para $h > 0$ suficientemente pequeño y un $\alpha \in [0,1]$ fijo pero arbitrario, las diferencias $F_\alpha(t_0+h) \ominus F_\alpha(t_0)$ y $F_\alpha(t_0) \ominus F_\alpha(t_0-h)$ existen. Primero, notemos que la definición de diferencia de Hukuhara implica

$$\begin{aligned} F_\alpha(t_0+h) \ominus F_\alpha(t_0) &= [f_\alpha(t_0+h), g_\alpha(t_0+h)] \ominus [f_\alpha(t_0), g_\alpha(t_0)] \\ &= [f_\alpha(t_0+h) - f_\alpha(t_0), g_\alpha(t_0+h) - g_\alpha(t_0)]. \end{aligned}$$

Entonces, siendo $h > 0$ y multiplicando por $1/h$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{F_\alpha(t_0+h) \ominus F_\alpha(t_0)}{h} &= \frac{1}{h}[f_\alpha(t_0+h) - f_\alpha(t_0), g_\alpha(t_0+h) - g_\alpha(t_0)] \\ &= \left[\frac{f_\alpha(t_0+h) - f_\alpha(t_0)}{h}, \frac{g_\alpha(t_0+h) - g_\alpha(t_0)}{h}\right]. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $h \to 0^+$, podemos asegurar la existencia de $g'_\alpha(t_0)$, $f'_\alpha(t_0)$. Luego, para todo $\alpha \in [0,1]$, se cumple

$$\begin{aligned} F'_\alpha(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F_\alpha(t_0+h) \ominus F_\alpha(t_0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \Big[\frac{f_\alpha(t_0+h) - f_\alpha(t_0)}{h}, \frac{g_\alpha(t_0+h) - g_\alpha(t_0)}{h}\Big] \\ &= [f'_\alpha(t_0), g'_\alpha(t_0)]. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene

$$\frac{F_\alpha(t_0) \ominus F_\alpha(t_0-h)}{h} = \Big[\frac{f_\alpha(t_0) - f_\alpha(t_0-h)}{h}, \frac{g_\alpha(t_0) - g_\alpha(t_0-h)}{h}\Big],$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} F'_\alpha(t) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F_\alpha(t_0) \ominus F_\alpha(t_0-h)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \left[\frac{f_\alpha(t_0) - f_\alpha(t_0-h)}{h}, \frac{g_\alpha(t_0) - g_\alpha(t_0-h)}{h}\right] \\ &= [f'_\alpha(t_0), g'_\alpha(t_0)]. \end{aligned}$$ □

**Teorema 2.7.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^n$ H-diferenciable sobre $T$. Si $t_1, t_2 \in T$ con $t_1 \leq t_2$, entonces existe un $C \in \mathcal{F}^n$ tal que $F(t_2) = F(t_1) + C$.*

*Demostración.* Es claro que si $F$ es $H$-diferenciable sobre $T$, entonces también lo es en cualquier subintervalo $[t_1, t_2]$. Para cada $s \in [t_1, t_2]$, podemos encontrar un $\delta_s > 0$ tal que las diferencias $F(s+h) \ominus F(s)$ y $F(s) \ominus F(s-h)$ existan para todo $0 \leq h < \delta(s)$. Entonces podemos encontrar una sucesión finita de puntos $t_1 = s_1 \leq s_2 < \cdots < s_n = t_2$ tal que la familia

$$I_{s_i} = \{(s_i - \delta_{s_i}, s_i + \delta_{s_i}) \mid i \in [1.n]\}$$

cubre al intervalo $[t_1, t_2]$ y $I_{s_i} \bigcap I_{s_{i+1}} \neq \emptyset$. Escogemos un $v_i \in I_{s_i} \bigcap I_{s_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, n-1$, tal que $s_i < v_i < s_{i+1}$. Entonces,

$$F(s_{i+1}) = F(v_i) + B_1 = F(s_i) + B_2 + B_1 = F(s_i) + C_i, \qquad i \in [1, n-1]$$

para algunos $B_1, B_2, C_i \in \mathcal{F}^n$. Por lo tanto,

$$F(t_2) = F(t_1) + \sum_{i=1}^{n-1} C_i = F(t_1) + C.$$ □

Una consecuencia inmediata del Teorema 2.7 es dada en el siguiente corolario.

**Corolario 2.8.** *Si $F : T \to \mathcal{F}^n$ es H-diferenciable sobre $T$, entonces para cada $\alpha \in [0,1]$ la función real $t \to \operatorname{diam}[F(t)]^\alpha$ es no decreciente en $T$.*

*Demostración.* La demostración se sigue de la Proposición 1.31. □

Uno de los resultados mínimos esperados dentro de las propiedades de la definición de derivada es que ésta implique continuidad. En el caso del análisis difuso el resultado también se cumple con la $H$-derivada.

**Teorema 2.9.** *Si $F : T \to \mathcal{F}^n$ es $H$-diferenciable sobre $T$, entonces $F$ es continua.*

*Demostración.* Sea $t, t+h \in T$ y $h > 0$. Siendo $F$ una multifunción $H$-diferenciable, existe $F'(t) \in \mathcal{F}^n$ y existen las $H$-diferencias $F(t+h) \ominus F(t)$ para $h > 0$ suficientemente pequeño. Entonces, por las propiedades (1.5) de la métrica $D$ tenemos que

$$\begin{aligned} D(F(t+h), F(t)) &= D(F(t) + F(t+h) \ominus F(t), F(t)) \\ &= D(F(t+h) \ominus F(t), \chi_0(t)) \\ &\leq hD\left(\frac{F(t+h) \ominus F(t)}{h}, F'(t)\right) + hD(F'(t), \chi_0(t)). \end{aligned}$$

Como el límite lateral por el lado derecho de la $H$-derivada de $F$ existe y es igual a $F'(t)$, tenemos que $D(F(t+h), F(t))$ tiende a cero cuando $h \to 0^+$, y por lo tanto, $F$ es continua por la derecha.

La continuidad por el lado izquierdo de $F$ se demuestra de manera análoga. La diferenciabilidad de $F$ nos garantiza la existencia de las $H$-diferencias $F(t) \ominus F(t-h)$ para $h > 0$ suficientemente pequeño y el otro límite lateral de la $H$-derivada de $F$ muestra la continuidad por la izquierda de $F$. □

El siguiente teorema demuestra la linealidad de la $H$-derivada.

**Teorema 2.10.** *Si $F, G : T \to \mathcal{F}^n$ son $H$-diferenciables sobre $T$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces*

$$(F+G)'(t) = F'(t) + G'(t) \quad \text{y} \quad (\lambda F)'(t) = \lambda F'(t).$$

*Demostración.* La demostración es directa. Se usan las propiedades (1.5) de la métrica $D$. □

En análisis difuso con la $H$-derivada, podemos obtener un teorema fundamental del cálculo, análogo al caso clásico.

**Teorema 2.11.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^n$ continua. Entonces, la integral $G(t) = \int_a^t F$ es H-diferenciable para todo $t \in T$ y $G'(t) = F(t)$.*

*Demostración.* Según el Teorema 1.51, $F$ es integrable. Por el Teorema 1.53, para $h > 0$, tenemos que

$$G(t+h) = \int_a^t F + \int_t^{t+h} F = G(t) + \int_t^{t+h} F,$$

es decir,

$$G(t+h) \ominus G(t) = \int_t^{t+h} F.$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Entonces, por las propiedades (1.5) de la métrica $D$, el Ejemplo 1.57, el Teorema 1.55 y la continuidad de $F$ tenemos que

$$\begin{aligned} D\left(\frac{G(t+h) \ominus G(t)}{h}, F(t)\right) &= \frac{1}{h} D\left(G(t+h) \ominus G(t), hF(t)\right) \\ &= \frac{1}{h} D\left(\int_t^{t+h} F(s)ds, \int_t^{t+h} F(t)ds\right) \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} D(F(s), F(t))ds \leq \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $h > 0$ suficientemente pequeño. Por lo tanto,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(t+h) \ominus G(t)}{h} = F(t)$$

y de manera similar, podemos llegar a que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(t) \ominus G(t-h)}{h} = F(t).$$

□

**Teorema 2.12.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^n$ H-diferenciable y asuma que la derivada $F'$ es integrable sobre $T$. Entonces para cada $s \in T$ se tiene que*

$$F(s) = F(a) + \int_a^s F'.$$

*Demostración.* Sea $\alpha \in [0, 1]$ fijo arbitrario. Se debe demostrar que

$$F_\alpha(s) = F_\alpha(a) + \int_a^s F'_\alpha, \tag{2.1}$$

donde $F'_\alpha$ es la derivada de Hukuhara de la multifunción $F_\alpha$.

Para esta demostración recurrimos al funcional soporte $\sigma_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $A \in \mathcal{K}^n$, definido de la siguiente manera

$$\sigma_A(x) = \sup_{a \in A} \langle x, a \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar euclidiano de $a$ y $x$. Además, por propiedades del funcional $\sigma_A$ se tiene siempre que $\sigma_A(x) < \infty$ si $A \in \mathcal{K}^n$. Las propiedades del funcional soporte son tomadas de [32].

Si $A, B \in \mathcal{K}^n$, entonces la distancia entre ellos se puede calcular a través de la siguiente ecuación

$$d(A, B) = \sup_{||x||=1} \{|\sigma_A(x) - \sigma_B(x)|\}. \tag{2.2}$$

De esta manera podemos definir la función real

$$\begin{aligned} \sigma_{F_\alpha(\cdot)}(x) : T &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \sigma_{F_\alpha(t)}(x), \end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, fijo y $x \neq 0$. Por propiedades del funcional $\sigma_A$ sobre los conjuntos compactos, convexos y no vacíos $A$, se tienen las siguientes igualdades:

- $\sigma_{\lambda A + \beta B}(x) = \lambda \sigma_A(x) + \beta \sigma_B(x)$, si $\lambda, \beta > 0$,
- $\sigma_{A \ominus B}(x) = \sigma_A(x) - \sigma_B(x)$, si existe la diferencia de Hukuhara $A \ominus B$ entre $A, B \in \mathcal{K}^n$,
- $A = B \Longleftrightarrow \sigma_A = \sigma_B$.

Ahora, sean $t, t + h \in T$ con $h > 0$ suficientemente pequeño de modo que se garantice que las diferencias $F(t + h) \ominus F(t)$ existan. Entonces, por propiedades de $\sigma_A$ tenemos que

$$\sigma_{F_\alpha(t+h) \ominus F_\alpha(t)}(x) = \sigma_{F_\alpha(t+h)}(x) - \sigma_{F_\alpha(t)}(x)$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in [0,1]$. Luego,

$$\sigma_{\frac{F_\alpha(t+h)\ominus F_\alpha(t)}{h}}(x) = \frac{\sigma_{F_\alpha(t+h)}(x) - \sigma_{F_\alpha(t)}(x)}{h}. \tag{2.3}$$

Por la diferenciabilidad de las multifunciones $F_\alpha$ y por las ecuaciones (2.2) y (2.3), se tiene que la función $\sigma_{F_\alpha(\cdot)}(x)$ es diferenciable por la derecha y su derivada es igual a $\sigma_{F'_\alpha(\cdot)}(x)$, donde $x$ es un elemento arbitrario de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$.

Aplicando un razonamiento similar podemos demostrar la diferenciabilidad de la multifunción $F_\alpha$ por la izquierda de $\sigma_{F_\alpha(\cdot)}(x)$ y concluir que $\sigma_{F_\alpha(t)}(x)$ es diferenciable sobre $T$ para todo $x$ de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$ y además,

$$\sigma_{F'_\alpha(t)}(x) = \frac{d}{dt}\sigma_{F_\alpha(t)}(x). \tag{2.4}$$

El funcional soporte $\sigma_A$ tiene unas propiedades muy útiles para el cálculo de integrales cuando una multifunción $\Gamma$ es a valores convexos y compactos (ver [32]), como es el caso nuestro con las multifunciones $F_\alpha$ y $F'_\alpha$. Siendo así, tenemos que

$$\sigma_{\int \Gamma(\cdot)d\mu}(y) = \int \sigma_{\Gamma(\cdot)}(y)d\mu \qquad \text{para } y \in \mathbb{R}^n.$$

Por otro lado, si $A \in \mathcal{K}^n$ y $\sigma_A$ es su función soporte, entonces

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, z\rangle \leq \sigma_A(z),\ \forall z \in \mathbb{R}^n\}.$$

Este último resultado nos permite recuperar al conjunto $A$ a partir de su función soporte, lo que resulta muy útil en nuestro caso si consideramos a $\int F'_\alpha = A_\alpha$; además, si $A = \int \Gamma d\mu$ tenemos que $\sigma_A = \sigma_{\int \Gamma d\mu}$.

Por lo tanto, aplicando todas estas propiedades y (2.4), llegamos a la siguiente conclusión:

$$\sigma_{\int_a^s F'_\alpha(t)dt}(x) = \int_a^s \sigma_{F'_\alpha(t)}(x)dt = \int_a^s \left[\frac{d}{dt}\sigma_{F_\alpha(t)}(x)\right]dt = \sigma_{F_\alpha(t)}(x)\Big|_{t=a}^{t=s},$$

entonces,

$$\sigma_{\int_a^s F'_\alpha(t)dt}(x) = \sigma_{F_\alpha(s)}(x) - \sigma_{F_\alpha(a)}(x),$$

lo que equivale a

$$\int_a^s F'_\alpha(t)dt = F_\alpha(s) \ominus F_\alpha(a).$$

Así queda demostrada la ecuación (2.1). $\square$

**Ejemplo 2.13.** *Sean $A \in \mathcal{F}^n$ un conjunto difuso fijo y $f : T \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial $H$-diferenciable. Sea $F : T \to \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa definida de la siguiente manera: $F(t) = \chi_{\{f(t)\}} + A$, donde a cada punto $t \in T$ se le asigna la respectiva función característica del vector real $f(t)$ sumado con el conjunto difuso $A$. Es claro que $F$ es $H$-diferenciable y la derivada está dada por $F'(t) = \chi_{\{f'(t)\}}$. Además, por el Teorema 1.51, una multifunción difusa continua es integrable, entonces tenemos que $\int F = \chi_{\{\int f\}} + (b-a)A$ (ver Ejemplo 1.57).*

El Teorema 2.12 nos permite deducir un teorema del valor medio para multifunciones difusas.

**Teorema 2.14.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^n$ continuamente $H$-diferenciable sobre $T$. Entonces*

$$D(F(b), F(a)) \leq (b-a) \sup_{t \in T} D(F'(t), \chi_{\{0\}}).$$

*Demostración.* Por medio de las propiedades (1.5) y el Teorema 1.55 de la métrica $D$ y el Teorema 2.12, se tiene que

$$\begin{aligned} D(F(b), F(a)) &= D\left(F(b) + \int_a^b F', F(a) + \int_a^b F'\right) \\ &= D\left(F(b) + \int_a^b F', F(b)\right) \\ &= D\left(\int_a^b F', \chi_{\{0\}}\right) \leq \int_a^b D(F', \chi_{\{0\}}) \\ &\leq (b-a) \sup_{t \in T} D(F', \chi_{\{0\}}). \end{aligned}$$

$\square$

El Teorema de Rolle también se cumple para multifunciones difusas $F : T \to \mathcal{F}^1$.

**Teorema 2.15.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^1$ $H$-diferenciable sobre $T$. Si $F(a) = F(b)$ entonces existe un $t_0 \in T$ tal que $F'(t_0) = \chi_{\{0\}}$.*

*Demostración.* Por el Teorema 2.7, existe un $C(t) \in \mathcal{F}^1$ tal que $F(t) = F(a) + C(t)$. Por hipótesis tenemos que $F(a) = F(b)$; esto implica que los diámetros de todos los $\alpha$-niveles son iguales; es decir, $\text{diam}[F_\alpha(a)] = \text{diam}[F_\alpha(b)]$, para todo $\alpha \in [0, 1]$. Entonces, por el Corolario 2.8, el $\text{diam}[F_\alpha(t)]$ debe ser constante debido a que $F$ es $H$-diferenciable.

Por todo lo anterior, el $\text{diam}[C_\alpha(t)] = 0$ y por lo tanto, $C(t) = \chi_{\{s(t)\}}$ para alguna función real $s : T \to \mathbb{R}$. Es claro que si $F$ es $H$-diferenciable, entonces también lo es $s$ en $T$. Además, por el Teorema de Rolle en cálculo de una variable, existe un $t_0 \in T$ tal que $s'(t_0) = 0$. Por el Ejemplo 2.13, tenemos que $F'(t_0) = \chi_{\{0\}}$. $\square$

## 2.2. Ecuaciones diferenciales difusas

Sea $T = [a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y $t_0 \in [a, b]$. Sea $f : T \times \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa continua. Consideremos el problema de valor inicial difuso

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{2.5}$$

De los Teoremas 2.9, 2.11 y 2.12 podemos establecer una equivalencia entre el problema (2.5) y una ecuación integral.

**Lema 2.16.** *Una multifunción difusa $x : T \to \mathcal{F}^n$ es una solución al problema (2.5) si y sólo si $x$ es continua y satisface la ecuación integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \qquad \textit{para todo } t \in T. \tag{2.6}$$

*Demostración.* La demostración sigue un proceso similar al caso clásico. Supongamos que $x$ sea una solución del problema (2.5), entonces tenemos que $x'$ es continua porque $x' = f$.

Por el Teorema 1.51, $x'$ es integrable. Entonces, por el Teorema 2.12, obtenemos la ecuación integral (2.6). Además, por el Teorema 2.9, tenemos que $x$ es continua.

Recíprocamente, suponemos que $f$ es una multifunción difusa continua. Definimos $g(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$, entonces, por el Teorema 2.11, $g$ es $H$-diferenciable y $g'(t) = f(t, x(t))$. Consecuentemente, tenemos que $x(t) = x_0 + g(t)$ por (2.6), lo que implica que $x$ es $H$-diferenciable y así se verifica (2.5). $\square$

**Observación 2.17.** *Notemos que el Lema 2.16 no se puede extender para valores de $t < t_0$, porque si $x(t)$ satisface (2.6), entonces el* $\operatorname{diam}[x_\alpha(t)] \geq \operatorname{diam}[x_0]^\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, *y de acuerdo con el Corolario 2.8, $x(t)$ no sería $H$-diferenciable con $t \leq t_0$.*

Si $f$ es una multifunción difusa Lipschitz continua, entonces el problema (2.5) tiene única solución en el intervalo $T$. Además, la solución depende continuamente del valor inicial.

**Teorema 2.18.** *Sea $f : T \times \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa continua y suponga que existe una constante $k > 0$ tal que*

$$D(f(t, x), f(t, y)) \leq kD(x, y)$$

*para toda $t \in T$, $x, y \in \mathcal{F}^n$. Entonces el problema (2.5) tiene solución única en $T$.*

*Demostración.* Sea $C(J, \mathcal{F}^n)$ el conjunto de todas las funciones continuas de $J$ a $\mathcal{F}^n$, donde $J$ es un intervalo en $\mathbb{R}$. Dotamos a $C(J, \mathcal{F}^n)$ de una métrica dada por $D$, esto es,

$$H(x, y) = \sup_{t \in J} D(x(t), y(t))$$

para $x, y \in C(J, \mathcal{F}^n)$. Puesto que $(\mathcal{F}^n, D)$ es un espacio métrico completo, se puede demostrar siguiendo la prueba clásica, que $C(J, \mathcal{F}^n)$ también es completo.

Ahora, sea $(t_0, x_0) \in T \times \mathcal{F}^n$ un punto fijo arbitrario y sea $\eta > 0$ tal que $\eta k < 1$. Se desea mostrar que el PVI

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.7}$$

tiene única solución en el intervalo $I = [t_0, t_0 + \eta]$.

Sea $x \in C(I, \mathcal{F}^n)$. Definimos el siguiente operador $G(x)$ en $I$ de la siguiente manera

$$G(x(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Por el Corolario 1.54, tenemos que $G(x) \in C(I, \mathcal{F}^n)$. Además, por el Teorema 1.55 y por la continuidad Lipschitz de $f$ tenemos:

$$\begin{aligned} H(Gx, Gy) &= \sup_{t \in I} D\left(\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right) \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+\eta} D(f(s, x(s)), f(s, y(s)))ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t_0+\eta} kD(x(s), y(s))ds \leq \eta k H(x, y), \end{aligned}$$

para todo $x, y \in C(I, \mathcal{F}^n)$. Entonces, por el teorema de punto fijo de Banach, $G$ tiene un único punto fijo, el cual, por el Lema 2.16, es la solución deseada para el problema (2.7).

El razonamiento anterior nos garantiza la existencia de una solución única para el problema (2.7) en cada intervalo $I_i$. Si unimos todas las soluciones obtenemos la única solución del problema (2.5) en todo el intervalo $T$. $\square$

Miremos algunos ejemplos.

**Ejemplo 2.19.** *Sean $u, v \in \mathcal{F}^1$ multifunciones difusas continuas. Definimos $f : T \times \mathcal{F}^1 \to \mathcal{F}^1$ como*

$$f(t, x) = u(t)x(t) + v(t),$$

*donde la multiplicación de números difusos $u(t)x(t)$ en $\mathcal{F}^1$ es una operación binaria definida según el Principio de extensión de Zadeh (1.2) aplicado al producto en $\mathbb{R}$. Esto es, si $u_\alpha(t) = [u_1^\alpha(t), u_2^\alpha(t)]$ y $x_\alpha(t) = [x_1^\alpha(t), x_2^\alpha(t)]$, entonces*

$$[u(t)x(t)]^\alpha = [\min\{u_i^\alpha(t)x_j^\alpha(t)\}, \max\{u_i^\alpha(t)x_j^\alpha(t)\}], \qquad i, j \in \{1, 2\}.$$

*Por la demostración del Teorema 1.51, las funciones $|u_1^\alpha|$ y $|u_2^\alpha|$ están acotadas en el intervalo $T$ por una constante $k$, independiente de $\alpha$. Mediante un cálculo sencillo obtenemos que $f(t,x)$ satisface las condiciones del Teorema 2.18, luego el problema de valor inicial*

$$x'(t) = u(t)x(t) + v(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

*tiene solución única en $T$.*

**Ejemplo 2.20.** *Consideramos la ecuación diferencial de decrecimiento exponencial en el contexto difuso con un valor inicial difuso*

$$x'(t) = -\lambda x(t), \qquad \lambda > 0, \qquad x(0) = X_0 \in \mathcal{F}^1, \tag{2.8}$$

*donde $X_0$ es un número difuso triangular simétrico con soporte $[-a,a]$. Es decir,*

$$[X_0]^\alpha = [-(1-\alpha)a, (1-\alpha)a].$$

*Por el Ejemplo 2.19, la ecuación (2.8) tiene solución única. Ahora, siendo $x$ una multifunción difusa definida en un intervalo de tiempo $T$ con valores en $\mathcal{F}^1$, podemos escribir los $\alpha$-niveles de la solución $x$ de (2.8) como*

$$x_\alpha(t) = [u_\alpha(t), v_\alpha(t)].$$

*Si $x'(t)$ es la $H$-derivada, por el Teorema 2.6, tenemos que $x'_\alpha(t) = [u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)]$. Luego, el problema (2.8) se puede escribir como*

$$x'_\alpha(t) = [u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)] = -\lambda[u_\alpha(t), v_\alpha(t)] = -\lambda x_\alpha(t),$$

*esto es,*

$$[u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)] = [-\lambda v_\alpha(t), -\lambda u_\alpha(t)],$$

*lo que nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\begin{aligned} u'_\alpha(t) &= -\lambda v_\alpha(t), \qquad u_\alpha(0) = -a(1-\alpha), \\ v'_\alpha(t) &= -\lambda u_\alpha(t), \qquad v_\alpha(0) = a(1-\alpha). \end{aligned}$$

*Las soluciones de este sistema están dadas por*

$$u_\alpha(t) = -a(1-\alpha)e^{\lambda t} \qquad y \qquad v_\alpha(t) = a(1-\alpha)e^{\lambda t}.$$

*Luego, la solución del problema (2.8) tiene $\alpha$-niveles*

$$[x(t)]^\alpha = [-a(1-\alpha)e^{\lambda t}, a(1-\alpha)e^{\lambda t}], \qquad t \in T.$$

**Ejemplo 2.21.** *Consideramos el problema de valor inicial asociado*

$$x'(t) = -x(t) + t + 1, \qquad x(0) = C, \tag{2.9}$$

*donde $C$ es un intervalo difuso, esto es, todos sus $\alpha$-niveles están dados por el intervalo $C^\alpha = [c_1, c_2]$. Por el Ejemplo 2.19, el problema (2.9) tiene solución única.*

*De la misma forma como en el Ejemplo 2.20, siendo $x$ una multifunción difusa definida en un intervalo de tiempo $T$ con valores en $\mathcal{F}^1$, podemos escribir los $\alpha$-niveles de la solución $x$ de (2.9) como $x_\alpha(t) = [u_\alpha(t), v_\alpha(t)]$. Si $x'(t)$ es la $H$-derivada, por el Teorema 2.6, tenemos que $x'_\alpha(t) = [u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)]$. Luego, el problema (2.9) se puede escribir como*

$$[u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)] = -[u_\alpha(t), v_\alpha(t)] + t + 1 = [-v_\alpha(t) + t + 1, -u_\alpha(t) + t + 1],$$

*lo que nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\begin{aligned} u'_\alpha(t) &= -v_\alpha(t) + t + 1, \qquad u_\alpha(0) = c_1, \\ v'_\alpha(t) &= -u_\alpha(t) + t + 1, \qquad v_\alpha(0) = c_2. \end{aligned}$$

*Las soluciones de este sistema están dadas por*

$$u_\alpha(t) = \frac{(c_1 + c_2)}{2}e^{-t} + \frac{c_1 - c_2}{2}e^t + t \qquad y \qquad v_\alpha = \frac{(c_1 + c_2)}{2}e^{-t} + \frac{c_2 - c_1}{2}e^t + t.$$

*Luego, la solución del problema (2.9) es dada por*

$$x(t) = t + \frac{(c_1 + c_2)}{2}e^{-t} + \frac{e^t}{2}[C + (-C)], \qquad t \in T.$$

*Observe que si $C$ es un número difuso triangular simétrico, la solución se reduce a:*

$$x(t) = t + Ce^t.$$

**Observación 2.22.** *Consideremos el siguiente PVI para una ecuación diferencial ordinaria*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.10}$$

*donde $f : \mathbb{R} \times X \to X$ es continua y $X$ es un espacio de Banach.*

*El Teorema clásico de Peano establece que si $X$ es finito dimensional, entonces el PVI (2.10) tiene al menos una solución local. Aunque la continuidad de $f$ es suficiente para garantizar la existencia de solución de (2.10), ella no implica unicidad. En este sentido, para asegurar la existencia y unicidad, además de la continuidad de $f$, se requiere imponer condiciones adicionales, como por ejemplo la lipschitzianidad de $f$, lo que nos remonta en el conocido Teorema de Picard.*

*Sin embargo, si $X$ no es localmente compacto, en particular, si $X$ no es finito dimensional, es posible construir funciones continuas $f$ tales que el problema (2.10) no tiene solución. Consecuentemente, algunas condiciones adicionales deben ser satisfechas por $f$ (ver [21, 23]).*

*Hemos visto en este Capítulo que cuando $f$ satisface una cierta condición de Lipschitz, se garantiza la unicidad de la solución para el problema de valor inicial difuso (PVIF), asumiendo la derivada de $x$ en el sentido de Hukuhara. Sin embargo, sería interesante saber si sólo con la continuidad de $f$ se garantiza la existencia de la solución para PVIF. La respuesta es negativa. En verdad, aunque $(\mathcal{F}^n, D)$ no es un espacio vectorial, puede ser considerado como un cono en un espacio de Banach (ver [21, 23]). Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales difusas pueden ser consideradas como ecuaciones diferenciales en espacios de Banach, y en consecuencia, el Teorema de existencia de Peano no es válido una vez que $(\mathcal{F}^n, D)$ es un espacio métrico que no es localmente compacto. En este caso la condición de continuidad de $f$ no es suficiente para garantizar la existencia de solución.*

*No obstante, una pregunta que sigue abierta hasta el momento es saber bajo qué condiciones sobre $f$ se garantiza la existencia de solución. Sobre este aspecto algunos resultados parciales han sido dados en los últimos años. De hecho, el Teorema 2.18 es uno de ellos. También, en [19] se ha establecido un teorema de tipo Peano restringiendo $f$ a un conjunto de aplicaciones* *definidas sobre ciertos subconjuntos localmente compactos de* $(\mathcal{F}^n, D)$. *Posteriormente, Nieto en [26], probó una versión del Teorema de Peano para un PVIF usando el Teorema de Arselá-Ascoli, mostrando, formalmente hablando, que el PVIF tiene solución sobre* $(\mathcal{F}^n, D)$ *si* $f$ *es continua y acotada. Note que si* $f$ *es acotada no implica que* $f$ *cumple la condición de Lipschitz.*

*Los anteriores resultados han sido plasmados considerando la derivada de* $x$ *en el sentido de Hukuhara. En el siguiente capítulo nos enfrascamos en la búsqueda de resultados de tipo [18], pero asumiendo la derivada de* $x$ *en un sentido más general.*

# Capítulo 3

# Ecuaciones diferenciales difusas vía $\alpha$-diferenciabilidad

La definición de derivada difusa (ver Definición 2.2) dada por Puri y Ralescu en [29] presenta algunos inconvenientes cuando queremos tratar el problema de valor inicial difuso. Recordemos que en el Ejemplo 2.20, consideramos la ecuación diferencial difusa

$$x'(t) = -\lambda x(t), \qquad \lambda > 0, \qquad x(0) = X_0, \tag{3.1}$$

siendo $X_0$ un número difuso triangular simétrico con soporte $[-a, a]$. En este ejemplo, interpretamos el problema con la $H$-derivada, donde obtuvimos como solución

$$[x(t)]^\alpha = [-a(1-\alpha)e^{\lambda t}, a(1-\alpha)e^{\lambda t}], \qquad t \in T.$$

Notemos que una desventaja en esta solución es que el $\mathrm{diam}(\mathrm{supp}(x(t))) = \mathrm{diam}[-ae^{\lambda t}, ae^{\lambda t}]$ el cual no es acotado cuando $t \to \infty$, lo que muestra que la interpretación del problema de valor inicial difuso (2.5) con la $H$-derivada no generaliza en forma apropiada al caso clásico.

Sin embargo, Bede y Gal en [5] resuelven este inconveniente introduciendo una definición de derivada difusa más amplia que la $H$-derivada. A esta nueva derivada se le suele llamar derivada generalizada, con la cual, obtienen una solución del Ejemplo 2.20 que generaliza en forma apropiada el caso clásico. En este capítulo, introducimos una noción de derivada difusa aún más general que la derivada generalizada. Esta derivada difusa la llamaremos $\alpha$-diferenciabilidad.

Otro inconveniente de la definición de $H$-derivada es que es una noción muy restrictiva, en el sentido que algunas multifunciones difusas "sencillas" no serían $H$-diferenciables. Por ejemplo, una observación hecha por Bede en [5], muestra que si se considera un número difuso $c$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función real diferenciable en $t_0 \in (a, b)$ con $g'(t_0) \leq 0$, entonces la multifunción difusa $f(x) = cg(x)$ no es $H$-diferenciable en $t_0$.

Para resolver este otro inconveniente, los autores de [5] utilizan la noción de derivada generalizada (definición más fuerte que la $\alpha$-derivada) considerando los otros tipos de límites laterales de $H$-derivada, como sigue:

**Definición 3.1** ([5, 8]). *Sea $F : T \to \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa. Se dice que $F$ es diferenciable en $t_0 \in T$, en el sentido generalizado, si cumple alguna de las dos siguientes condiciones:*

1. *para $h > 0$ suficientemente pequeño, existen las diferencias $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$, $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$, y existe $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$ tal que*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0), \tag{3.2}$$

*o*

2. *para $h < 0$ suficientemente pequeño, existen las diferencias $F(t_0 + h) \ominus F(t_0)$, $F(t_0) \ominus F(t_0 - h)$, y existe $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$ tal que*

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(t_0 + h) \ominus F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{F(t_0) \ominus F(t_0 - h)}{h} = F'(t_0), \tag{3.3}$$

*donde los límites son tomados en el espacio métrico $(\mathcal{F}^n, D)$. En los extremos del intervalo $T$ se consideran solo las derivadas laterales.*

**Observación 3.2.** *Si la multifunción difusa $F$ es diferenciable en el sentido generalizado según la forma (3.2), se dice que $F$ es diferenciable en el sentido generalizado en la primera forma. De manera análoga, si $F$ es diferenciable en el sentido generalizado según la forma (3.3), se dice que $F$ es diferenciable en el sentido generalizado en la segunda forma. Observemos que la primera forma corresponde a la derivada de Hukuhara dada en la Definición 2.2.*

Con la Definición 3.1 se amplía la clase de multifunciones difusas diferenciables. Tal es el caso de la multifunción $f(x) = cg(x)$, donde $c$ es un número difuso y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función real diferenciable en $t_0 \in (a, b)$ con $g'(t_0) \leq 0$, es una multifunción difusa diferenciable en la segunda forma. Del mismo modo, la multifunción difusa $f(x) = cg(x)$, donde $c$ es un número difuso y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función real diferenciable en $t_0 \in (a, b)$ con $g'(t_0) \geq 0$, no es diferenciable en la segunda forma, pero si lo es en la primera.

Una definición análoga de derivada en el sentido generalizado se cumple para el caso de las multifunciones con valores en $\mathcal{K}^n$, no en $\mathcal{F}^n$ como en el caso difuso.

**Definición 3.3.** *Sea $G : T \to \mathcal{K}^n$ una multifunción. Se dice que $G$ es diferenciable en $t_0 \in T$, en el sentido generalizado, si cumple alguna de las dos siguientes condiciones:*

1. *para $h > 0$ suficientemente pequeño, existen las diferencias $G(t_0 + h) \ominus G(t_0)$ y $G(t_0) \ominus G(t_0 - h)$, y existe $G'(t_0) \in \mathcal{K}^n$ tal que*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{G(t_0 + h) \ominus G(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{G(t_0) \ominus G(t_0 - h)}{h} = G'(t_0), \tag{3.4}$$

*o*

2. *para $h < 0$ suficientemente pequeño, existen las diferencias $G(t_0 + h) \ominus G(t_0)$ y $G(t_0) \ominus G(t_0 - h)$, y existe $G'(t_0) \in \mathcal{K}^n$ tal que*

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{G(t_0 + h) \ominus G(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{G(t_0) \ominus G(t_0 - h)}{h} = G'(t_0), \tag{3.5}$$

*donde los límites son tomados en el espacio métrico $(\mathcal{K}^n, d)$. En los extremos del intervalo $T$ se considera solo las derivadas laterales. Si $G$ verifica (3.4) (respectivamente (3.5)) se dice que $G$ es diferenciable, en el sentido generalizado, en el primera forma (respectivamente, $G$ es diferenciable, en el sentido generalizado, en la segunda forma).*

En [28, 35], los autores introducen la siguiente noción de derivada, más general que la Definición 2.2, donde consideran la $H$-derivada de las respectivas multifunciones definidas a través de los $\alpha$-niveles.

**Definición 3.4** ([28, 35])**.** *Una multifunción difusa $F : T \to \mathcal{F}^n$ es diferenciable en el punto $t_0 \in T$, si para cada $\alpha \in [0, 1]$, la multifunción $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ es Hukuhara diferenciable en el punto $t_0$ de acuerdo con la Definición 1.30 y la familia $\{F'_\alpha(t) \mid \alpha \in [0, 1]\}$ define un conjunto difuso $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$.*

**Observación 3.5.** *La Definición 3.1 no generaliza la Definición 3.4.*

En este capítulo introducimos una definición de derivada difusa aún más general que la derivada en el sentido generalizado de la Definición 3.1 y que derivada de la Definición 3.4. La $\alpha$-diferenciabilidad hace parte de nuestro aporte a la teoría de las ecuaciones diferenciales difusas. La ventaja de considerar la definición de $\alpha$-diferenciabilidad es que obtenemos los mismos resultados de existencia y unicidad para un problema de valor inicial difuso, pero en condiciones más generales. Los resultados desarrollados a partir de la noción de $\alpha$-diferenciabilidad aparecen en el *artículo* [37]. Este capítulo se basa principalmente en el artículo [37]. Mostraremos que esta noción preserva propiedades clásicas del cálculo diferencial y posteriormente usamos esta noción para el análisis de las soluciones del problema de valor inicial difuso.

## 3.1. $\alpha$-diferenciabilidad

Con la noción de la $\alpha$-derivada se amplía la clase de multifunciones difusas diferenciables de acuerdo con la Definición 3.1 y la Definición 3.4. La $\alpha$-diferenciabilidad de una multifunción difusa $F$ se fundamenta en la derivada en el sentido generalizado de las respectivas multifunciones $F_\alpha$ (ver Definición 3.3), definidas mediante los $\alpha$-niveles. Más exactamente, tenemos la siguiente definición.

**Definición 3.6.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa. Se dice que $F$ es $\alpha$-diferenciable en $t_0 \in T$, si para todo $\alpha \in [0,1]$, las multifunciones $F_\alpha : T \to \mathcal{K}^n$ definidas por $F_\alpha(t) = [F(t)]^\alpha$ son diferenciables en el punto $t_0$ en el sentido generalizado, y adicionalmente, la familia $\{F'_\alpha(t_0) : \alpha \in [0,1]\}$ define un conjunto difuso $F'(t_0) \in \mathcal{F}^n$ de acuerdo con las condiciones del Teorema de Negoita-Ralescu (Teorema 1.2). Si $F$ es $\alpha$-diferenciable en $t_0 \in T$, entonces el conjunto difuso $F'(t_0)$ es la derivada de $F(t)$ en $t_0$.*

**Observación 3.7.** *Si para cada $\alpha \in [0,1]$, la multifunción $F_\alpha$ es diferenciable en el sentido generalizado de acuerdo con (3.4) (respectivamente (3.5)) en la Definición 3.3, entonces se dice que $F$ es $\alpha$-diferenciable en la primera forma (respectivamente, segunda forma).*

**Observación 3.8.** *La Definición 3.6, además de generalizar la $H$-derivada, también es una generalización de la noción de diferenciabilidad introducida por Seikkala [34] para procesos difusos. Ésta también generaliza la Definición 3.4 introducida en [28, 35].*

**Observación 3.9.** *De la Definición 3.6 se sigue que si $F$ es diferenciable en el sentido generalizado de acuerdo con la Definición 3.1, entonces $F$ es $\alpha$-diferenciable (diferenciable en el sentido de la Definición 3.6). Notemos que el resultado recíproco no es cierto, puesto que la existencia de las diferencias de Hukuhara $[u]^\alpha \ominus [v]^\alpha, \alpha \in [0,1]$, no implican la existencia de $u \ominus v$. En efecto, consideremos los conjuntos difusos $u : \mathbb{R} \to [0,1]$ y $v : \mathbb{R} \to [0,1]$, definidos* *por*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; t \in [-1,1], \\ 0 & en \; otro \; caso. \end{cases} \qquad v(t) = \begin{cases} -t+1 & si \;\; t \in [0,1], \\ t+1 & si \;\; t \in [-1,0], \\ 0 & en \; otro \; caso. \end{cases}$$

*Note que existen las diferencias de Hukuhara entre los $\alpha$-niveles de $u$ y $v$, esto es,*

$$[u]^\alpha \ominus [v]^\alpha = [-1,1] \ominus [-1+\alpha, 1-\alpha] = [-\alpha, \alpha],$$

*pero no existe la diferencia de Hukuhara $u \ominus v$ puesto que la familia $[-\alpha, \alpha]$, con $\alpha \in [0,1]$, no satisface las condiciones del Teorema de Negoita-Ralescu (Teorema 1.2), por lo tanto no existe tal conjunto difuso.*

El siguiente ejemplo nos muestra que la $\alpha$-derivada generaliza las derivadas definidas en [5, 8, 18, 28, 34, 35].

**Ejemplo 3.10.** *Sea $F : [-1,1] \to \mathcal{F}^1$ un número difuso definido como*

$$F(t)(x) = \chi_{[-1,1]}(x), \qquad si \quad t \in [-1,0], \; x \in \mathbb{R},$$

*y*

$$F(t)(x) = \begin{cases} \frac{1}{t^2}(x+1) & si \; x \in [-1, -1+t^2], \\ -\frac{1}{t^2}(x-1) & si \; x \in [1, 1-t^2], \\ 0 & si \; x \notin (-1,1), \\ 1 & si \; x \in [-1+t^2, 1-t^2], \end{cases} \qquad si \quad t \in (0,-1].$$

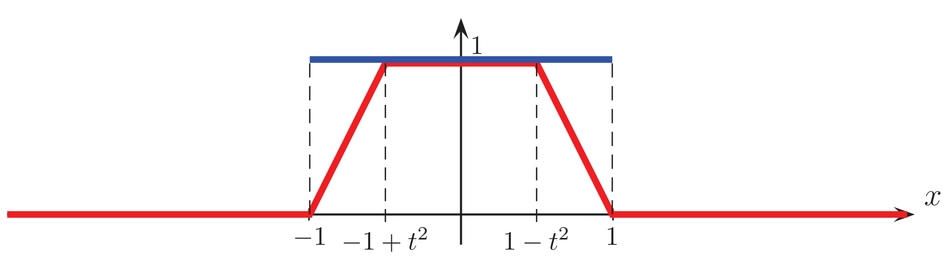



Figura 3.1: Representación gráfica de la multifunción $F(t)$.

*Es claro que las diferencias $F(0) \ominus F(0-h)$ no existen (ver Observación 3.9). Por lo tanto, $F$ no es diferenciable en $t_0 = 0$ en el sentido generalizado de acuerdo con la Definición 3.1. Por otro lado, la familia de multifunciones $F_\alpha$, asociada a la multifunción difusa $F$, están dadas por*

$$F_\alpha(t) = \begin{cases} [-1,1] & \text{si } t \in [-1,0], \\ [-1+\alpha t^2, 1-\alpha t^2] & \text{si } t \in (0,1]. \end{cases}$$

*$F$ no es diferenciable en $t_0 = 0$ de acuerdo con la Definición 3.4 porque existe la $\alpha$-derivada de $F$ en la segunda forma en $t_0 = 0$. Luego,*

$$\begin{aligned} \frac{F_\alpha(0) \ominus F_\alpha(0-h)}{h} &= \frac{[-1,1] \ominus [-1+\alpha h^2, 1-\alpha h^2]}{h} = \frac{[-\alpha h^2, \alpha h^2]}{h} = \frac{h^2[-\alpha,\alpha]}{h} \\ &= h[-\alpha,\alpha] \xrightarrow{h\to 0^-} \{0\}. \end{aligned}$$

*Por otro lado,*

$$\frac{F_\alpha(0+h) \ominus F_\alpha(0)}{h} = \frac{[-1,1] \ominus [-1,1]}{h} = \{0\} \xrightarrow{h\to 0^-} \{0\}.$$

*Entonces $F'_\alpha(0) = \{0\}$, para todo $\alpha \in [0,1]$. Por lo tanto, $F$ es $\alpha$-diferenciable en $t_0 = 0$ y su $\alpha$-derivada está dada por $F'(0) = \chi_{\{0\}}$.*

La $\alpha$-diferenciabilidad de multifunciones difusas con valores en números difusos pueden ser caracterizadas de una manera fácil y práctica.

**Teorema 3.11.** *Sea $F : T \to \mathcal{F}^1$ una multifunción difusa con valores en los números difusos y denotemos por $F_\alpha(t) = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$ la respectiva multifunción definida mediante los $\alpha$-niveles. Entonces,*

*(i) Si $F$ es $\alpha$-diferenciable en $t_0$ en la primera forma, entonces $f_\alpha$ y $g_\alpha$ son diferenciables y $[F'(t_0)]^\alpha = [f'_\alpha(t_0), g'_\alpha(t_0)]$,*

*o*

*(ii) Si $F$ es $\alpha$-diferenciable en $t_0$ en la segunda forma, entonces $f_\alpha, g_\alpha$ son diferenciables y* $[F'(t_0)]^\alpha = [g'_\alpha(t_0), f'_\alpha(t_0)]$.

*Demostración.* La parte $(i)$ fue demostrada en el Teorema 2.6. Entonces, demostraremos la parte $(ii)$. Por hipótesis, para $h < 0$ suficientemente pequeño y dado $\alpha \in [0,1]$ fijo pero arbitrario, las diferencias $F_\alpha(t_0+h) \ominus F_\alpha(t_0)$ y $F_\alpha(t_0) \ominus F_\alpha(t_0-h)$ existen. Primeramente notemos que la definición de la diferencia de Hukuhara implica

$$\begin{aligned} F_\alpha(t_0+h) \ominus F_\alpha(t_0) &= [f_\alpha(t_0+h), g_\alpha(t_0+h)] \ominus [f_\alpha(t_0), g_\alpha(t_0)] \\ &= [f_\alpha(t_0+h) - f_\alpha(t_0), g_\alpha(t_0+h) - g_\alpha(t_0)]. \end{aligned}$$

Entonces, siendo $h < 0$ y multiplicando por $1/h$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{F_\alpha(t_0+h) \ominus F_\alpha(t_0)}{h} &= \frac{1}{h}[f_\alpha(t_0+h) - f_\alpha(t_0), g_\alpha(t_0+h) - g_\alpha(t_0)] \\ &= \Big[\frac{g_\alpha(t_0+h) - g_\alpha(t_0)}{h}, \frac{f_\alpha(t_0+h) - f_\alpha(t_0)}{h}\Big]. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $h \to 0^-$ uno puede asegurar la existencia de $g'_\alpha(t_0)$, $f'_\alpha(t_0)$, y para todo $\alpha \in [0,1]$ se cumple

$$\begin{aligned} F'_\alpha(t) = \lim_{h \to 0^-} \frac{F_\alpha(t_0+h) \ominus F_\alpha(t_0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \Big[\frac{g_\alpha(t_0+h) - g_\alpha(t_0)}{h}, \frac{f_\alpha(t_0+h) - f_\alpha(t_0)}{h}\Big] \\ &= [g'_\alpha(t_0), f'_\alpha(t_0)]. \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene

$$\frac{F_\alpha(t_0) \ominus F_\alpha(t_0-h)}{h} = \Big[\frac{g_\alpha(t_0) - g_\alpha(t_0-h)}{h}, \frac{f_\alpha(t_0) - f_\alpha(t_0-h)}{h}\Big],$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} F'_\alpha(t) = \lim_{h \to 0^-} \frac{F_\alpha(t_0) \ominus F_\alpha(t_0-h)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \Big[\frac{g_\alpha(t_0) - g_\alpha(t_0-h)}{h}, \frac{f_\alpha(t_0) - f_\alpha(t_0-h)}{h}\Big] \\ &= [g'_\alpha(t_0), f'_\alpha(t_0)]. \end{aligned}$$

□

La noción de $\alpha$-diferenciabilidad, como debe de esperarse, implica continuidad.

**Teorema 3.12.** *Si $F : T \to \mathcal{F}^n$ es $\alpha$-diferenciable, entonces es $\alpha$-continua.*

*Demostración.* La demostración en la primera forma es inmediata del Teorema 2.9, aplicando el mismo razonamiento a las respectivas multifunciones. Enseguida demostraremos para el caso donde $F$ es $\alpha$-diferenciable en la segunda forma.

Sea $t, t+h \in T$ con $h < 0$, $h$ suficientemente pequeño y $\alpha \in [0,1]$. Por hipótesis, la diferencia $F_\alpha(t+h) \ominus F_\alpha(t)$ existe. Ahora, por la propiedades de la métrica $d$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(F_\alpha(t+h), F_\alpha(t)) &= d(F_\alpha(t) + F_\alpha(t+h) \ominus F_\alpha(t), F_\alpha(t)) \\ &= d(F_\alpha(t+h) \ominus F_\alpha(t), \{0\}) \\ &= |h| d\left( \frac{F_\alpha(t+h) \ominus F_\alpha(t)}{h}, \{0\} \right) \\ &\leq |h| d\left( \frac{F_\alpha(t+h) \ominus F_\alpha(t)}{h}, F'_\alpha(t) \right) + |h| d\left(F'_\alpha(t), \{0\}\right). \end{aligned}$$

Como $F$ es $\alpha$-diferenciable en la segunda forma, entonces si $h \to 0^-$, el lado derecho de esta última desigualdad tiende a cero y por lo tanto $F$ es $\alpha$-continua por la izquierda. De manera análoga, con base en la otra diferencia $F_\alpha(t) \ominus F_\alpha(t-h)$, se puede probar que $F$ es $\alpha$-continua por la derecha. □

La definición de $\alpha$-diferenciabilidad conserva las propiedades de linealidad.

**Teorema 3.13.** *Si $F, G : T \to \mathcal{F}^n$ son $\alpha$-diferenciables en un punto $t_0 \in T$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $(F+G)'(t_0) = F'(t_0) + G'(t_0)$ y $(\lambda F)'(t_0) = \lambda F'(t_0)$.*

*Demostración.* La prueba sigue de las propiedades de la métrica $d$. □

**Teorema 3.14.** *Sea $F : T = [a,b] \to \mathcal{F}^n$ una multifunción difusa $\alpha$-continua. Entonces*

*(i) $G(t) = \int_a^t F$ es $\alpha$-diferenciable en la primera forma y $G'(t) = F(t)$, para todo $t \in T$;*

*(ii) $H(t) = \int_t^b F$ es $\alpha$-diferenciable en la segunda forma y $H'(t) = -F(t)$, para todo $t \in T$.*

*Demostración.* Si $F$ es $\alpha$-continua, por el Corolario 1.52, tenemos que $F_\alpha$ es integrable, y por lo tanto, las multifunciones difusas $G$ y $H$ están bien definidas.

La demostración para el caso $(i)$ es muy similar a la demostración del Teorema 2.11, pero considerando los respectivos $\alpha$-niveles.

Ahora probaremos la parte $(ii)$. Sea $h < 0$ suficientemente pequeño tal que $a \leq t+h < t \leq b$. Por el Teorema 1.53

$$\int_{t+h}^{t} F_\alpha + \int_{t}^{b} F_\alpha = \int_{t+h}^{b} F_\alpha,$$

y de acuerdo con la definición de $H$,

$$\int_{t+h}^{t} F_\alpha + H_\alpha(t) = H_\alpha(t+h);$$

esto es,

$$H_\alpha(t+h) \ominus H_\alpha(t) = \int_{t+h}^{t} F_\alpha.$$

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Entonces, por propiedades conocidas de la métrica $d$ en $\mathcal{K}^n$, Ejemplo 1.57 (para el caso de $\mathcal{K}^n$) y la continuidad de $F_\alpha$, tenemos que

$$\begin{aligned} d\left(\frac{H_\alpha(t+h) \ominus H_\alpha(t)}{h}, -F_\alpha(t)\right) &= \frac{1}{|h|} d\left(H_\alpha(t+h) \ominus H_\alpha(t), -hF_\alpha(t)\right) \\ &= \frac{1}{|h|} d\left(\int_{t+h}^{t} F_\alpha(s)ds, \int_{t+h}^{t} F_\alpha(t)ds\right) \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_{t+h}^{t} d(F_\alpha(s), F_\alpha(t))ds \leq \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $h < 0$ suficientemente pequeño. Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{H_\alpha(t+h) \ominus H_\alpha(t)}{h} = -F_\alpha(t),$$

y de manera similar, podemos llegar a que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{H_\alpha(t) \ominus H_\alpha(t-h)}{h} = -F_\alpha(t).$$

□

Un segundo teorema fundamental del cálculo es obtenido para multifunciones difusas con valores en números difusos.

**Teorema 3.15.** *Sea $F : T = [a, b] \to \mathcal{F}^1$ una multifunción difusa tal que $F_\alpha(t) = [f_\alpha(t), g_\alpha(t)]$ es la respectiva multifunción definida mediante sus $\alpha$-niveles. Si $F$ es $\alpha$-diferenciable en la segunda forma en el intervalo $T$, con $F'$ tal que $[F'(t)]^\alpha = [g'_\alpha(t), f'_\alpha(t)]$ donde $g'_\alpha(t), f'_\alpha(t)$ son funciones continuas sobre $T$. Entonces para cada $s \in T$ se tiene*

$$F(s) = F(a) \ominus (-1) \int_a^s F'. \tag{3.6}$$

**Observación 3.16.** *En el Teorema 3.15, en el caso cuando $F$ es $\alpha$-diferenciable en la primera forma en el intervalo $T$, uno puede probar que $F(s) = F(a) + \int_a^s F'$. (ver Teorema 2.12).*

*Demostración.* Como $F$ es $\alpha$-diferenciable en la segunda forma, entonces a partir del Teorema 3.11, parte $(ii)$, se tiene que $[F'(t)]^\alpha = [g'_\alpha(t), f'_\alpha(t)]$. Ahora, usando la Observación 1.50, para cada $\alpha \in [0, 1]$, se tiene que

$$\left[\int_a^s F'\right]^\alpha = \int_a^s F'_\alpha = \left[\int_a^s g'_\alpha(t)dt, \int_a^s f'_\alpha(t)dt\right] = [g_\alpha(s) - g_\alpha(a), f_\alpha(s) - f_\alpha(a)].$$

Multiplicando por el número difuso $-1$, obtenemos

$$\begin{aligned}(-1)\int_a^s [F'(t)]^\alpha\,dt = [f_\alpha(a) - f_\alpha(s), g_\alpha(a) - g_\alpha(s)] &= [f_\alpha(a), g_\alpha(a)] \ominus [f_\alpha(s), g_\alpha(s)]\\ &= F_\alpha(a) \ominus F_\alpha(s) = [F(a)]^\alpha \ominus [F(s)]^\alpha.\end{aligned}$$

Entonces, para todo $\alpha \in [0, 1]$, tenemos

$$[F(a)]^\alpha = [F(s)]^\alpha + (-1)\int_a^s [F'(t)]^\alpha,$$

esto es,

$$[F(s)]^\alpha = [F(a)]^\alpha \ominus (-1)\int_a^s [F'(t)]^\alpha.$$

Por lo tanto, (3.6) es demostrado. $\square$

## 3.2. El problema de Cauchy en el contexto difuso

El interés de esta sección es analizar la existencia y la unicidad de soluciones del problema de valor inicial

$$x'(t) = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0, \tag{3.7}$$

donde $x_0 \in \mathcal{F}^1$, $f : T \times \mathcal{F}^1 \to \mathcal{F}^1$ es $\alpha$-continua y $x'$ denota la $\alpha$-derivada de la función $x$. Impondremos la condición de continuidad sobre la función $f$.

**Definición 3.17.** *Sea $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Una función $f : T \times \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^n$ es llamada $\alpha$-continua en un punto $(t_0, x_0) \in T \times \mathcal{F}^n$ si y sólo si para cualquier $\alpha \in [0, 1]$ fijo y para cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta(\alpha, \epsilon) > 0$ tal que*

$$d([f(t, x)]^\alpha, [f(t_0, x_0)]^\alpha) < \epsilon \tag{3.8}$$

*donde $|t - t_0| < \delta(\epsilon, \alpha)$ y $d([x]^\alpha, [x_0]^\alpha) < \delta(\alpha, \epsilon),\ t \in T, x \in \mathcal{F}^n$.*

El siguiente teorema convierte la ecuación diferencial difusa en una ecuación integral.

**Teorema 3.18.** *Sea $f : T \times \mathcal{F}^1 \to \mathcal{F}^1$ una multifunción difusa $\alpha$-continua y $x_0 \in \mathcal{F}^1$. Una multifunción $x : T \to \mathcal{F}^1$ es una solución de (3.7) si y sólo si $x$ es $\alpha$-continua y verifica la ecuación integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,\ \forall t \in T, \tag{3.9}$$

*o*

$$x(t) = x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,\ \forall t \in T, \tag{3.10}$$

*dependiendo de la $\alpha$-diferenciabilidad considerada, primera o segunda forma, respectivamente.*

*Demostración.* Si la $\alpha$-diferenciabilidad es considerada en la primera forma, en [35] (empleando los argumentos de [18]), demuestran que una multifunción $x : T \to \mathcal{F}^1$ es una solución de (3.7) si y sólo si $x$ es $\alpha$-continua y verifica la ecuación integral (3.9).

Probaremos la segunda equivalencia. Inicialmente, vemos que si $x$ es una solución de (3.7) considerando la $\alpha$-derivada de $x$ en la segunda forma, se sigue del Teorema 3.12 que $x$ es $\alpha$-continua. Además, el Teorema 3.15 implica que, para todo $t \in T$, tenemos

$$x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds = x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^{t} x'(s)ds = x(t).$$

Por otro lado, como $f$ es $\alpha$-continua, entonces por el Corolario 1.52, $f$ es integrable y por lo tanto, la integral en (3.10) está bien definida. Además, si $x$ es $\alpha$-continua y verifica la ecuación integral (3.10), usando la Observación 1.50, los $\alpha$-niveles de $x$ (denotados mediante $[x(t)]^\alpha = [x^1_\alpha(t), x^2_\alpha(t)]$) verifica

$$\begin{aligned}
[x(t)]^\alpha = [x^1_\alpha(t), x^2_\alpha(t)] &= [x_0]^\alpha \ominus (-1) \left[\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds\right]^\alpha \\
&= [x^1_\alpha(t_0), x^2_\alpha(t_0)] \ominus (-1) \int_{t_0}^{t} [f(s, x(s))]^\alpha ds \\
&= [x^1_\alpha(t_0), x^2_\alpha(t_0)] \ominus (-1) \left[\int_{t_0}^{t} f^1_\alpha(s, x(s))ds, \int_{t_0}^{t} f^2_\alpha(s, x(s))ds\right] \\
&= [x^1_\alpha(t_0), x^2_\alpha(t_0)] \ominus \left[-\int_{t_0}^{t} f^2_\alpha(s, x(s))ds, -\int_{t_0}^{t} f^1_\alpha(s, x(s))ds\right],
\end{aligned}$$

donde $f^1_\alpha, f^2_\alpha$ están definidas de tal forma que $[f(s, x(s))]^\alpha = [f^1_\alpha(s, x(s)), f^2_\alpha(s, x(s))]$.

Entonces

$$[x^1_\alpha(t_0), x^2_\alpha(t_0)] = \left[-\int_{t_0}^{t} f^2_\alpha(s, x(s))ds, -\int_{t_0}^{t} f^1_\alpha(s, x(s))ds\right] + [x^1_\alpha(t), x^2_\alpha(t)],$$

y por lo tanto,

$$x^1_\alpha(t) = x^1_\alpha(t_0) + \int_{t_0}^{t} f^2_\alpha(s, x(s))ds \qquad \text{y} \qquad x^2_\alpha(t) = x^2_\alpha(t_0) + \int_{t_0}^{t} f^1_\alpha(s, x(s))ds.$$

Luego,

$$(x^1_\alpha)'(t) = f^2_\alpha(t, x(t)) \qquad \text{y} \qquad (x^2_\alpha)'(t) = f^1_\alpha(t, x(t)),$$

o equivalentemente,

$$[x'(t)]^\alpha = [(x^2_\alpha)'(t), (x^1_\alpha)'(t)] = [f^1_\alpha(t, x(t)), f^2_\alpha(t, x(t))] = [f(t, x(t))]^\alpha,\ \forall \alpha \in [0, 1]$$

lo cual prueba que $x$ es solución del problema diferencial (3.7). $\square$

El siguiente teorema da condiciones de existencia (y en algún sentido de unicidad) de soluciones para un problema de valor inicial cuando consideramos la noción de $\alpha$-diferenciabilidad.

**Teorema 3.19.** *Sea* $R_0 = \{t : |t - t_0| \leq \delta \leq a\} \times \{x \in \mathcal{F}^1 : D(x, x_0) \leq b\}$, *donde* $a, b, \delta > 0$. *Suponemos que las siguientes condiciones se cumplen:*

1. $f : R_0 \to \mathcal{F}^1$ *es* $\alpha$*-continua y* $x_0 \in \mathcal{F}^1$.

2. *Existe* $K > 0$ *tal que para todo* $(t, x), (t, y) \in R_0$, $d([f(t, x)]^\alpha, [f(t, y)]^\alpha) \leq K d([x]^\alpha, [y]^\alpha)$, *para cada* $\alpha \in [0, 1]$.

3. *Existe* $q > 0$ *tal que para cualquier* $t$ *con* $|t - t_0| \leq q$, *la sucesión*

$$\tilde{x}_n(t) = x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}_{n-1}(s)) ds$$

   *está definida para cualquier* $n \in \mathbb{N}$.

*Entonces el problema de valor inicial (3.7) tiene dos (únicas) soluciones* $x, \tilde{x}$, *con* $x$ *siendo* $\alpha$*-diferenciable en la primera forma,* $\tilde{x}$ *siendo* $\alpha$*-diferenciable en la segunda forma y definidas en el intervalo* $\{t : |t - t_0| \leq \delta\}$ *donde*

$$\delta = \text{mín}\left\{a, \frac{b}{M}, q\right\}, \tag{3.11}$$

$M = D(f(t, x), \hat{0})$ *para todo* $(t, x) \in R_0$ *y* $\hat{0} \in \mathcal{F}^1$ *es el número difuso definido por*

$$\hat{0}(t) = \begin{cases} 1 & si\ t = 0, \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

*Además,*

$$D(x_n, x) \to 0, \quad D(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \to 0,\ si \quad |t - t_0| \leq \delta, \quad cuando\ n \to \infty, \tag{3.12}$$

*donde* $x_n, \tilde{x}_n$ *son las respectivas aproximaciones sucesivas dadas por*

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_{n-1}(s)) ds,\ n = 1, 2, \ldots \tag{3.13}$$

$$\tilde{x}_n(t) = x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}_{n-1}(s))ds, \; n = 1, 2, \ldots \tag{3.14}$$

**Observación 3.20.** *La importancia de este teorema radica en que además de garantizar existencia y unicidad en el problema de valor inicial de acuerdo a la forma que asumamos la derivada, generaliza resultados obtenidos en trabajos similares anteriores [5, 8, 18, 28, 35] y nos brinda las bases de la implementación de un método numérico para obtener dichas soluciones.*

**Observación 3.21.** *Una pregunta interesante que surge de las hipótesis del Teorema 3.19, es cómo garantizar la existencia de la sucesión $(\tilde{x}_n(t))$ dada por (3.14).*

*Demostración.* Para el caso de la $\alpha$-diferenciabilidad en la primera forma, en [28] los autores obtienen la existencia de una solución única $x$ verificando $D(x_n, x) \to 0$ y con $x_n$ dada en la forma (3.13).

Ahora, para el caso de $\alpha$-diferenciabilidad en la segunda forma, si $t \in \{t : |t - t_0| \leq \delta \leq a\}$, entonces para $n = 1$ tenemos:

$$\tilde{x}_1(t) = x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)ds$$

y por lo tanto, del Teorema 3.18, la función $\tilde{x}_1$ es $\alpha$-continua en el intervalo $|t - t_0| \leq \delta$. Además, para todo $\alpha \in [0, 1]$, usando (1.4) y las propiedades de la métrica $d$ en $\mathcal{K}^n$, tenemos

$$\begin{aligned} d([\tilde{x}_1(t)]^\alpha, [x_0]^\alpha) &= d\left([\tilde{x}_1]^\alpha, [\tilde{x}_1]^\alpha + (-1)\left[\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)ds\right]^\alpha\right) \\ &= d\left(\left[\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)ds\right]^\alpha, 0\right). \end{aligned}$$

Consecuentemente, tomando el supremo para todo $\alpha$ en $[0, 1]$ obtenemos

$$\begin{aligned} D(\tilde{x}_1(t), x_0) &= D\left(\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)ds, \hat{0}\right) \\ &\leq \int_{t_0}^{t} D\left(f(s, x_0), \hat{0}\right) ds \end{aligned}$$

$$\leq M|t-t_0| \leq M\delta \leq b,$$

bajo la condición $|t-t_0| \leq \delta$, donde $M = D(f(t,x),\widehat{0})$, para cualquier $(t,x) \in R_0$. Por inducción, asumimos que $\tilde{x}_{n-1}(t)$ es $\alpha$-continua en $|t-t_0| \leq \delta$ y

$$D(\tilde{x}_{n-1}(t), x_0) \leq M|t-t_0| \leq M\delta \leq b,$$

bajo la condición $|t-t_0| \leq \delta$. Usando (3.14) se tiene que $\tilde{x}_n(t)$ es $\alpha$-continua para todo $t$ en $\{t : |t-t_0| \leq \delta\}$ y

$$D(\tilde{x}_n(t), x_0) \leq M|t-t_0| \leq M\delta \leq b.$$

Por lo tanto, $(\tilde{x}_n(t))_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones las cuales son $\alpha$-continuas en $\{t : |t-t_0| \leq \delta\}$ y $(t, \tilde{x}_n(t)) \in R_0$, con $|t-t_0| \leq \delta$ , $n = 1, 2, \ldots$

Mostraremos que existe una multifunción difusa $\tilde{x} : \{t : |t-t_0| \leq \delta \leq a\} \to \mathcal{F}^1$ tal que $D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}(t)) \to 0$ uniformemente en $\{t : |t-t_0| \leq \delta\}$, cuando $n \to \infty$. Nótese que por la definición de la diferencia de Hukuhara se tiene que

$$x_0 = (-1)\int_{t_0}^{t} f(s, x_0)ds + \tilde{x}_1(t)$$

y

$$x_0 = (-1)\int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}_1(s))ds + \tilde{x}_2(t).$$

Entonces, de las propiedades de la métrica de Hausdorff $d$ (incluida la invarianza con respecto a las traslaciones), se tiene que para cualquier $\alpha \in [0,1]$ se verifica

$$\begin{aligned}
&d([\tilde{x}_2(t)]^\alpha, [\tilde{x}_1(t)]^\alpha) \leq \cdots \\
&\quad \leq d\Big([\tilde{x}_2(t)]^\alpha + \Big[(-1)\int_{t_0}^{t} f(s,\tilde{x}_1(s))ds\Big]^\alpha, [\tilde{x}_1(t)]^\alpha + \Big[(-1)\int_{t_0}^{t} f(s,x_0)ds\Big]^\alpha\Big) \\
&\qquad + d\Big([\tilde{x}_2(t)]^\alpha + \Big[(-1)\int_{t_0}^{t} f(s,\tilde{x}_1(s))ds\Big]^\alpha, [\tilde{x}_2(t)]^\alpha + \Big[(-1)\int_{t_0}^{t} f(s,x_0)ds\Big]^\alpha\Big) \\
&\quad = d([x_0]^\alpha, [x_0]^\alpha) + d\left(\Big[\int_{t_0}^{t} f(s,\tilde{x}_1(s))ds\Big]^\alpha, \Big[\int_{t_0}^{t} f(s,x_0)ds\Big]^\alpha\right) \\
&\quad \leq \int_{t_0}^{t} d([f(s,\tilde{x}_1(s))]^\alpha, [f(s,x_0)]^\alpha)ds
\end{aligned}$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} Kd([\tilde{x}_1(s)]^\alpha, [x_0]^\alpha)ds.$$

Consecuentemente,

$$D(\tilde{x}_2(t), \tilde{x}_1(t)) = K\int_{t_0}^{t} D(\tilde{x}_1(s), x_0)ds \leq MK\frac{|t-t_0|^2}{2!} \leq MK\frac{\delta^2}{2!}.$$

Asumamos que

$$D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}_{n-1}(t)) \leq MK^{n-1}\frac{|t-t_0|^n}{n!} \leq MK^{n-1}\frac{\delta^n}{n!}.$$

y probaremos por inducción matemática que

$$D(\tilde{x}_{n+1}(t), \tilde{x}_n(t)) \leq MK^n\frac{|t-t_0|^{n+1}}{n!} \leq MK^n\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{3.15}$$

En efecto, como antes, para todo $\alpha \in [0,1]$, tenemos que

$$\begin{aligned} d([\tilde{x}_{n+1}(t)]^\alpha, [\tilde{x}_n(t)]^\alpha) &\leq d\left(\left[\int_{t_0}^{t} f(s,\tilde{x}_n(s))ds\right]^\alpha, \left[\int_{t_0}^{t} f(s,\tilde{x}_{n-1}(s))ds\right]^\alpha\right) \\ &\leq \int_{t_0}^{t} d([f(s,\tilde{x}_n(s))]^\alpha, [f(s,\tilde{x}_{n-1}(s))]^\alpha)ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} Kd([\tilde{x}_n(s)]^\alpha, [\tilde{x}_{n-1}(s)]^\alpha)ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D(\tilde{x}_{n+1}(t), \tilde{x}_n(t)) &\leq K\int_{t_0}^{t} D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}_{n-1}(t))ds \\ &\leq MK^n\int_{t_0}^{t} \frac{|s-t_0|^n}{n!} \leq MK^n\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Consecuentemente, del criterio de convergencia de Weierstrass se sigue de (3.15) que

$$D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}_{n-1}(t)) \to 0$$

uniformemente en $\{t : |t-t_0| \leq \delta\}$, cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, existe una multifunción difusa $\tilde{x} : \{t : |t-t_0| \leq \delta \leq a\} \to \mathcal{F}^1$ tal que $D(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}(t)) \to 0$, uniformemente en $\{t : |t-t_0| \leq \delta\}$, cuando $n \to \infty$.

También $D(f(t,\tilde{x}_n(t)), f(t,\tilde{x}(t))) \leq KD(\tilde{x}_n(t), \tilde{x}_{n-1}(t)) \to 0$ uniformemente en $\{t : |t-t_0| \leq \delta\}$, cuando $n \to \infty$, con lo cual se tiene que

$$\tilde{x}(t) = x_0 \ominus (-1) \int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}(s))ds.$$

Finalmente se probará la unicidad. Usando la $\alpha$-diferenciabilidad en la primera forma, en [28] se probó que existe una aplicación única $x(t)$ definida en $\{t : |t-t_0| \leq \delta\}$ la cual verifica (3.9).

Ahora, consideremos la $\alpha$-diferenciabilidad en la segunda forma y supongamos que existe otra multifunción difusa $\tilde{y}(t)$, definida en $\{t : |t-t_0| \leq \delta\}$ tal que $\tilde{y}(t)$ verifica (3.10). Tenemos que mostrar que $D(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = 0$ para todo $t$ tal que $|t-t_0| \leq \delta$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $\tilde{x}_n$ definido como en (3.14). Para todo $\alpha \in [0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned} d([\tilde{y}(t)]^\alpha, [\tilde{x}_n(t)]^\alpha) &\leq d\left( \left[\int_{t_0}^{t} f(s,\tilde{y}(s))ds\right]^\alpha, \left[\int_{t_0}^{t} f(s,\tilde{x}_{n-1}(s))ds\right]^\alpha \right) \\ &\leq \int_{t_0}^{t} Kd([\tilde{y}(s)]^\alpha, [\tilde{x}_{n-1}(s)]^\alpha)ds. \end{aligned}$$

Por consiguiente, para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos

$$D([\tilde{y}(t)]^\alpha, [\tilde{x}_n(t)]^\alpha) \leq K \int_{t_0}^{t} D(\tilde{y}(s), \tilde{x}_{n-1}(s))ds.$$

Nótese que $D(\tilde{y}(t), x_0) \leq b$ en $\{t : |t-t_0| \leq \delta\}$. Por lo tanto, $D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_1(t)) \leq bK|t-t_0|$, en $\{t : |t-t_0| \leq \delta\}$. Por inducción matemática, si asumimos que

$$D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_n(t)) \leq bK^n \frac{|t-t_0|^n}{n!},$$

en $\{t : |t-t_0| \leq \delta\}$, obtenemos

$$D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_{n+1}(t)) \leq bK^{n+1} \frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Entonces, $D(\tilde{y}(t), \tilde{x}(t)) \leq D(\tilde{y}(t), \tilde{x}_{n+1}(t)) + D(\tilde{x}(t), \tilde{x}_{n+1}(t)) \to 0$, cuando $n \to \infty$ y se cumple para todo $t$ tal que $|t-t_0| \leq \delta$. □

**Observación 3.22.** *Para un problema de valor inicial difuso basado en la $\alpha$-diferenciabilidad, la existencia de dos soluciones en una vecindad de un punto genera una forma de elegir qué tipo de diferenciabilidad es esperada para la solución. Si en un intervalo esperamos una solución con soporte creciente, entonces encontraremos una solución $\alpha$-diferenciable en la primera forma; si esperamos una solución con soporte decreciente entonces encontraremos una solución $\alpha$-diferenciable en la segunda forma.*

Mostramos con el siguiente ejemplo la ventaja que tiene la $\alpha$-derivada en la segunda forma con respecto a la $H$-derivada.

**Ejemplo 3.23.** *En el Ejemplo 2.20, utilizando la $H$-derivada, se resolvió la ecuación diferencial difusa*

$$x'(t) = -\lambda x(t), \quad \lambda > 0, \quad x(0) = X_0, \tag{3.16}$$

*donde $X_0$ es un número difuso triangular simétrico con soporte $[-a, a]$. Para multifunciones con valores en números difusos, la $H$-derivada es equivalente a la $\alpha$-derivada en la primera forma. Vamos a resolver (3.16), interpretando la derivada de la ecuación según la $\alpha$-derivada en su segunda forma.*

*Teniendo en cuenta que la ecuación (3.16) satisface las condiciones de existencia y unicidad del Teorema 3.19, procederemos a encontrar la solución, asumiendo la $\alpha$-derivada en la segunda forma.*

*Si $x$ es una multifunción difusa definida en un intervalo de tiempo $T$ con valores en $\mathcal{F}^1$, podemos escribir los $\alpha$-niveles de la solución $x$ de (3.16) como $x_\alpha(t) = [u_\alpha(t), v_\alpha(t)]$. Si $x'(t)$ es la $\alpha$-derivada en la segunda forma, por el Teorema 3.11, tenemos que $x'_\alpha(t) = [v'_\alpha(t), u'_\alpha(t)]$. Entonces, el problema (3.16) se puede escribir como*

$$x'_\alpha(t) = [v'_\alpha(t), u'_\alpha(t)] = -\lambda[u_\alpha(t), v_\alpha(t)] = -\lambda x_\alpha(t),$$

*esto es,*

$$[v'_\alpha(t)), u'_\alpha(t] = [-\lambda v_\alpha(t), -\lambda u_\alpha(t)],$$

*lo que nos conduce al siguiente sistema*

$$u'_\alpha(t) = -\lambda u_\alpha(t), \qquad u_\alpha(0) = -a(1-\alpha),$$
$$v'_\alpha(t) = -\lambda v_\alpha(t), \qquad v_\alpha(0) = a(1-\alpha).$$

*Las soluciones de este sistema son*

$$u_\alpha(t) = -a(1-\alpha)e^{-\lambda t} \qquad y \qquad v_\alpha(t) = a(1-\alpha)e^{-\lambda t}.$$

*Luego, la solución del problema (3.16) tiene $\alpha$-niveles*

$$[x(t)]^\alpha = [-a(1-\alpha)e^{-\lambda t}, a(1-\alpha)e^{-\lambda t}], \qquad t \in T.$$

*Observemos que esta solución obtenida con la $\alpha$-derivada en la segunda forma, corresponde con la solución del caso clásico.*

**Ejemplo 3.24.** *Consideramos la ecuación diferencial difusa del Ejemplo 2.21 dada por*

$$x'(t) = -x(t) + t + 1, \qquad x(0) = C, \tag{3.17}$$

*donde $C$ es un intervalo difuso. Teniendo en cuenta que la ecuación (3.17) satisface las condiciones de existencia y unicidad del Teorema 3.19, procederemos a encontrar la solución de la misma, asumiendo la $\alpha$-derivada en la segunda forma.*

*Siendo $x$ una multifunción difusa definida en un intervalo de tiempo $T$ con valores en $\mathcal{F}^1$, podemos escribir los $\alpha$-niveles de la solución $x$ de (3.17) como $x_\alpha(t) = [u_\alpha(t), v_\alpha(t)]$. Si $x'(t)$ es la $\alpha$-derivada en su segunda forma, por el Teorema 3.11 tenemos que $x'_\alpha(t) = [v'_\alpha(t), u'_\alpha(t)]$. Luego, el problema (3.17) se puede escribir como*

$$[u'_\alpha(t), v'_\alpha(t)] = -[u_\alpha(t), v_\alpha(t)] + t + 1 = [-v_\alpha(t) + t + 1, -u_\alpha(t) + t + 1],$$

*lo que nos conduce al siguiente sistema*

$$u'_\alpha(t) = -u_\alpha(t) + t + 1, \qquad u_\alpha(0) = c_1,$$

$$v'_\alpha(t) = -v_\alpha(t) + t + 1, \qquad v_\alpha(0) = c_2.$$

*Las soluciones de este sistema son*

$$u_\alpha(t) = t + c_1 e^{-t} \qquad y \qquad v_\alpha(t) = t + c_2 e^{-t}.$$

*Luego, la solución del problema (3.17) es dada por*

$$x(t) = t + Ce^{-t}, \qquad t \in T.$$

*Observe que la solución de la ecuación (3.17) obtenida con $\alpha$-derivada en su segunda forma, generaliza de manera adecuada el caso clásico; distinto a la solución obtenida usando la $H$-derivada en el Ejemplo 2.21.*

El Teorema 3.18 sugiere un procedimiento numérico para la búsqueda de las soluciones de un problema de valor inicial difuso, basándose justamente en el uso de las sucesiones de multifunciones difusas $(x_n)$ y $(\tilde{x}_n)$. En el siguiente ejemplo ilustramos este hecho.

**Ejemplo 3.25.** *Sea*

$$x'(t) = -x(t), \quad x(0) = X_0, \tag{3.18}$$

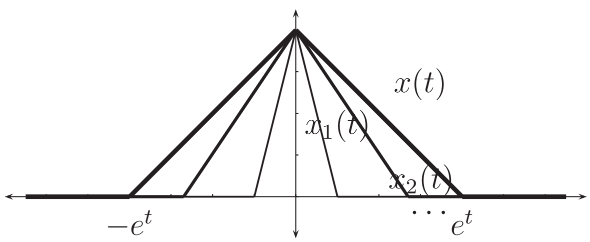
*donde $X_0$ es un número difuso triangular simétrico con soporte $[-1, 1]$, es decir, sus $\alpha$-niveles están dados por $[X_0]^\alpha = [-(1-\alpha), (1-\alpha)]$. Primero usamos la $\alpha$-diferenciabilidad en su primera forma para hallar la solución de (3.18). Para ello procedemos a calcular las respectivas sucesiones $x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_{n-1}(s))ds,\ n = 1, 2, \ldots$ Por ejemplo,*

$$\begin{aligned}
x_1^\alpha(t) &= x_0^\alpha + \int_0^t f_\alpha(s, x_0)ds = [-(1-\alpha), (1-\alpha)] + \int_0^t -[-(1-\alpha), (1-\alpha)]ds \\
&= [-1 + \alpha + (-1+\alpha)t, 1 - \alpha + (1-\alpha)t] = (1+t)[-1+\alpha, 1-\alpha], \\
x_2^\alpha(t) &= x_0^\alpha + \int_0^t f_\alpha(s, x_1(s))ds = [-(1-\alpha), (1-\alpha)] + \int_0^t -(1+s)[-1+\alpha, 1-\alpha]ds \\
&= \left[-1 + \alpha + (-1+\alpha)(t + \frac{t^2}{2}), 1 - \alpha + (1-\alpha)(t + \frac{t^2}{2})\right] \\
&= \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)[-1+\alpha, 1-\alpha].
\end{aligned}$$

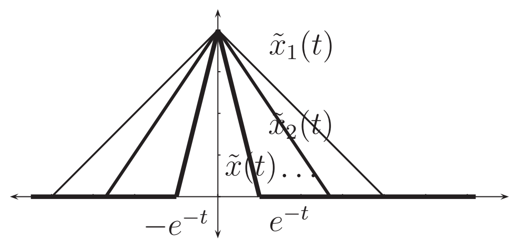
*De igual forma, obtenemos que*

$$x_3^{\alpha}(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right)[-1+\alpha, 1-\alpha].$$

*Siguiendo este mismo procedimiento para $n$ suficientemente grande se puede ver que $x_n^{\alpha}$ se aproxima a $[x(t)]^{\alpha} = e^t[-1+\alpha, 1-\alpha]$. En la Figura 3.2(a), podemos observar como las multifunciones difusas se aproximan a la solución.*




$(a)$. $\alpha$-derivada en la primera forma




$(b)$. $\alpha$-derivada en la segunda forma

Figura 3.2: $\alpha$-derivada en la primera y segunda forma

*Ahora bien, para hallar la solución de la ecuación (3.18) según la $\alpha$-diferenciabilidad en su segunda forma, procedemos a calcular las sucesiones $\tilde{x}_n(t) = x_0 \ominus (-1)\int_{t_0}^{t} f(s, \tilde{x}_{n-1}(s))ds$, $n = 1, 2, \ldots$ Esto es,*

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_1^{\alpha}(t) &= x_0^{\alpha} \ominus -\int_0^t f_{\alpha}(s, x_0)ds = [-(1-\alpha), (1-\alpha)] \ominus -\int_0^t -[-(1-\alpha), (1-\alpha)]ds \\
&= [-(1-\alpha), (1-\alpha)] \ominus \int_0^t [-(1-\alpha), (1-\alpha)]ds \\
&= [-1+\alpha-(-1+\alpha)t, 1-\alpha-(1-\alpha)t] = (1-t)[-1+\alpha, 1-\alpha], \\
\tilde{x}_2^{\alpha}(t) &= x_0^{\alpha} \ominus -\int_0^t f_{\alpha}(s, \tilde{x}_1(s))ds = [-(1-\alpha), (1-\alpha)] \ominus -\int_0^t -(1-s)[-1+\alpha, 1-\alpha]ds \\
&= [-(1-\alpha), (1-\alpha)] \ominus \int_0^t (1-s)[-1+\alpha, 1-\alpha]ds \\
&= [-(1-\alpha), (1-\alpha)] \ominus \left(t - \frac{t^2}{2}\right)[-1+\alpha, 1-\alpha] \\
&= \left[-1+\alpha-(-1+\alpha)(t-\frac{t^2}{2}), 1-\alpha-(1-\alpha)(t-\frac{t^2}{2})\right] \\
&= (1-t+\frac{t^2}{2})[-1+\alpha, 1-\alpha].
\end{aligned}$$

*De la misma manera, obtenemos que*

$$\tilde{x}_3^{\alpha}(t) = \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right)[-1+\alpha, 1-\alpha].$$

*Siguiendo este mismo procedimiento para* $n$ *suficientemente grande, se puede ver que* $\tilde{x}_n^{\alpha}$ *se aproxima a* $[\tilde{x}(t)]^{\alpha} = e^{-t}[-1+\alpha, 1-\alpha]$*. En la Figura 3.2(b), podemos observar como las multifunciones difusas se aproximan a la solución* $\tilde{x}(t)$*.*

# Capítulo 4

# Ecuaciones diferenciales difusas vía inclusiones diferenciales

En este capítulo se presentan los conceptos básicos referentes a la teoría de las inclusiones diferenciales e inclusiones diferenciales difusas, y se presentan algunos resultados que garantizan la existencia de soluciones para una inclusión diferencial difusa. Al final del capítulo, se emplean las inclusiones diferenciales para resolver ecuaciones diferenciales difusas.

Iniciamos presentando una corta introducción sobre la teoría de las inclusiones diferenciales clásicas. Una referencia importante para el estudio de inclusiones diferenciales es el libro de Aubin y Cellina [1]. En esta referencia, los autores estudiaron la existencia y propiedades de soluciones para inclusiones diferenciales de la forma $x'(t) \in F(x(t))$ o $x'(t) \in F(t, x(t))$, llamadas, respectivamente, inclusión diferencial autónoma y no autónoma.

## 4.1. Inclusiones diferenciales en el sentido clásico

El objetivo de esta sección es presentar una breve introducción sobre la teoría clásica de las inclusiones diferenciales, incluyendo algunas motivaciones que justifican la conveniencia de introducir el concepto de inclusión diferencial, así como también, presentar algunas definiciones y aspectos teóricos generales, que sirvan de base para introducirnos en el campo de las inclusiones diferenciales difusas.

Comencemos con la siguiente motivación proveniente de la teoría de control. El objeto de estudio de la teoría de control de sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales es, en términos generales, controlar el comportamiento de tales sistemas. Supongamos por ejemplo que estamos en presencia de un proceso sometido a control, modelado a través de la ecuación diferencial

$$x'(t) = f(t, x(t), v(t)), \tag{4.1}$$

donde $f : [0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ representa una función con algún grado de regularidad. La función $v : [0, T) \to \mathbb{R}^k$ es el *control*, la cual debe satisfacer algunas condiciones mínimas de regularidad y algunas restricciones de tipo geométrico, como por ejemplo, suponer que para todo $t \in [0, T)$, se verifica $v(t) \in U$, donde $U$ es un conjunto dado. Usualmente el conjunto $U$ está ligado a condiciones de tipo físico, económico, etc., de los dispositivos de control. Además, en (4.1), el control debe ser escogido de manera que la solución $x$ verifique ciertas condiciones deseadas. Por ejemplo, que $x$ minimice un cierto funcional (teoría de control óptimo), tome un valor dado para $t = T$ (Controlabilidad), satisfaga adecuadas restricciones geométricas (teoría de la viabilidad), etc.

Es imprescindible entender la dependencia de la trayectoria $x = x(t)$ del control $v$. Para ello, supongamos que el gráfico de una solución $x$ de (4.1) pasa por el punto $(t_0, x_0) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$. En este punto, la pendiente de la tangente a la trayectoria es $f(t_0, x_0, w)$ para algún $w \in U$; en este sentido, la trayectoria debe elegir su velocidad en el conjunto de velocidades permitidas

$$\mathcal{F}(t_0, x_0) = \{h \in \mathbb{R}^n : \exists w \in U \text{ tal que } h = f(t, x, w)\}. \tag{4.2}$$

Por tanto, cualquier solución de (4.1) asociada a un control $v$ satisface la *inclusión* *diferencial*

$$x' \in F(t, x).$$

Este hecho nos introduce de forma natural en la formulación del siguiente problema matemático.

Dada una multifunción $F : [0, T) \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, (esto es, una relación que a cada punto $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$ le asigna un conjunto no vacío $F(t, x)$ en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, partes de $\mathbb{R}^n$), fijado el punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, hallar una solución definida en $[0, T)$ del problema

$$\begin{cases} x' \in F(t, x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{4.3}$$

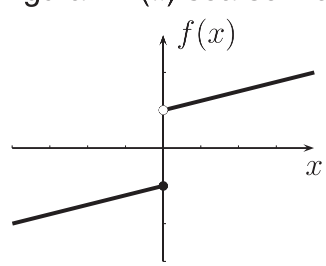
El problema (4.3) se denomina *problema de valor inicial para una inclusión diferencial*; en este caso, la inclusión diferencial es dada por la relación $x' \in F(t, x)$ y $x(0) = x_0$ es la condición inicial. En (4.3) la función $x : [0, T) \to \mathbb{R}^n$ describe el estado del sistema y $x'$ denota la derivada de la función $x$ con respecto al tiempo $t$.

El problema (4.3) claramente es una generalización del problema de valor inicial de ecuaciones diferenciales ordinarias, en el sentido de que estas últimas son inclusiones diferenciales particulares correspondientes a multifunciones univaluadas.

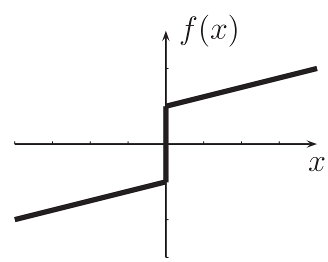
Consecuentemente, todas las cuestiones pertinentes a las ecuaciones diferenciales ordinarias, como por ejemplo la existencia, prolongabilidad, acotamiento de las soluciones, la dependencia continua respecto de datos iniciales y parámetros, la teoría de bifurcación de soluciones, la existencia y estabilidad de puntos de equilibrio y órbitas especiales, la estabilidad global, el comportamiento asintótico, etc., también lo son para las inclusiones diferenciales.

No obstante, para una inclusión diferencial dada, existe en general toda una familia de trayectorias que comienzan en cada punto inicial $x_0$. En otras palabras, con $F$ multívoca, es previsible que el problema (4.3) posea más de una solución. Esta propiedad de no unicidad conduce a cuestiones que son especificas para sistemas diferenciales multivaluados, relativos a la convexidad de la familia de soluciones, la existencia de soluciones extremales, la selección de soluciones con propiedades dadas, etc. En cualquier caso, una pregunta preliminar es qué se entiende por solución de una inclusión diferencial. Una respuesta preliminar es la siguiente: una solución de (4.3) es una función $x : T \to \mathbb{R}^n$ absolutamente continua que verifica $x'(t) \in F(t, x(t))$ en casi todo punto $t \in T$. Recordemos que toda función absolutamente continua es diferenciable en casi todo punto de su intervalo de definición.

Hemos visto cómo un sistema controlable de la forma (4.1) puede ser visto como un problema de inclusiones diferenciables. Éste no es el único caso; de hecho, existe una amplia gama de fenómenos que también pueden ser descritos a través de problemas de inclusiones diferenciales. Uno de esos fenómenos surge en el tratamiento de ecuaciones diferenciales $x' = f(t, x)$ con $f$ una función discontinua en la variable $x$. En este caso podemos transformar la ecuación diferencial ordinaria $x' = f(t, x)$ en una inclusión diferencial reemplazando la función $f$, por una multifunción que a los puntos de discontinuidad de $f$ le asignamos un conjunto de puntos, como ilustramos en la Figura 4.1. En la Figura 4.1($a$). podemos observar una función escalar con una discontinuidad de salto en $x = 0$ en donde $f(0) = f(0^-) \neq f(0^+)$. En la Figura 4.1($a$), al punto $x = 0$ le asignamos como imagen el intervalo $[f(0^-), f(0^+)]$. Notamos que al incluir los límites por la izquierda y por derecha de la función en la imagen de $x = 0$, aseguramos que la multifunción $f$ dada en la Figura 4.1($a$) sea semicontinua superiormente.




$(a)$. Función discontinua




$(b)$. Multifunción

Figura 4.1: Pasando de una función discontinua a una multifunción.

Pueden presentarse más ejemplos pero no hacemos una descripción de éstos por limitaciones de espacio; simplemente concluimos que la teoría de las inclusiones diferenciales procura extraer lo que es común a todas ellas y proporciona resultados relativos a la existencia y otras propiedades de las soluciones. Veamos algunos detalles teóricos sobre la teoría de existencia de soluciones para un problema de valor inicial asociado a una inclusión diferencial.

Recordemos que, en el caso de una EDO, es necesario un cierto grado de regularidad del segundo término (por ejemplo la continuidad) para garantizar, vía el Teorema de Peano-Picard, la existencia de soluciones. Por otra parte, una multifunción $F = F(t,x)$ puede ser pensada como una función usual $F : [0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$; luego, para garantizar la existencia de una solución de (4.3) parece adecuado extender las nociones de regularidad usuales (continuidad, medibilidad, Lipschitz, etc.) a las funciones con valores en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora bien, disponiendo incluso de estas herramientas, una pregunta natural que surge es cómo podríamos proseguir y probar la existencia de una solución de (4.3). Sobre este aspecto, existen esencialmente dos tipos de condiciones sobre la naturaleza de la multifunción $F$: condiciones de regularidad sobre $F$ (varios tipos de continuidad y semicontinuidad) y condiciones topológicas o geométricas (tales como: compacidad, convexidad, entre otras) sobre la imagen de la multifunción (para detalles ver [1]).

Una forma bastante natural para estudiar el problema de existencia de la solución de una inclusión diferencial para el problema de valor inicial (4.3) es cuando el problema es reducido a ecuaciones diferenciales ordinarias. En este caso, se pueden obtener soluciones de (4.3) a través de la llamada técnica de selección. Suponga que exista una función $f : [0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con la siguiente propiedad

$$f(t,x) \in F(t,x), \ \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n.$$

En este caso se dice que $f$ es una selección de una multifunción de $F$. Recordemos que, por el Axioma de elección, si $F(t,x) \neq \emptyset$, para todo $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$, entonces $F$ siempre tiene una selección; luego, si $F$ tiene una selección $f$, entonces cualquier solución del siguiente problema de Cauchy, cuya existencia está garantizada por el Teorema de Carathéodory,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.4}$$

será solución de (4.3).

El argumento anterior induce a la siguiente pregunta de carácter general, bajo qué condiciones sobre la multifunción $F$ la misma admite una selección con algunas propiedades extras, tales como continuidad, medibilidad, etc. Una alternativa para responder a esta pregunta es suponer que la multifunción $F$ es semicontinua inferiormente con valores en conjuntos convexos y cerrados; bajo estas hipótesis, existe un resultado conocido como Teorema de Michael que garantiza la existencia de selecciones continuas (ver [1]).

Consideremos multifunciones $F$ con valores en $\mathcal{K}^n$. Se dice que una multifunción $F : [0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}^n$ es *semicontinua inferiormente* si para cada $(t_0, x_0) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ y $\max\{|t - t_0|, \|x - x_0\|\} \leq \delta$, entonces

$$F(t,x) \cap F(t_0,x_0)_\epsilon \neq \emptyset, \tag{4.5}$$

donde $F(t_0,x_0)_\epsilon$ denota una bola de radio $\epsilon$ y centro $F(t_0,x_0)$.

De otra parte, una multifunción $F : [0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}^n$ es *semicontinua superiormente* si para cada $(t_0, x_0) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ y $\max\{|t - t_0|, \|x - x_0\|\} \leq \delta$, entonces

$$F(t,x) \subset F(t_0,x_0)_\epsilon. \tag{4.6}$$

En el marco de la medibilidad, el resultado más conocido que garantiza la existencia de selecciones se debe a Kuratowski y Ryll-Nerdzewski (ver [20]). Combinando la existencia de selecciones continuas y el Teorema de Carathéodory, se deduce el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.** *Supongamos que en el problema (4.3), la multifunción* $F : [0, T) \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}^n$ *es semicontinua superiormente y* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*. Entonces el problema (4.3) posee al menos una solución en* $[0, T^*)$ *para algún* $T^*$ *maximal que verifica* $0 < T^* \leq T$*.*

Tal y como fue comentado al inicio de esta sección, existen varias formas de abordar el problema de la existencia de solución del problema de valor inicial para una inclusión diferencial. En efecto, además de la técnica de selección, existe la técnica de punto fijo. En este caso, dada la inclusión diferencial, se introduce la multifunción integral

$$\mathcal{Y} : C^0([0, T); \mathbb{R}^n) \to C^0([0, T); \mathbb{R}^n),$$

tal que para cada $h \in C^0([0, T); \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{Y}(h)$ consiste del conjunto de funciones $x : [0, T) \to \mathbb{R}^n$ absolutamente continuas que verifican $x'(t) \in F(t, h(t))$ para casi todo $t \in [0, T)$ y $x(0) = x_0$.

Luego, una función $x \in C^0([0, T); \mathbb{R}^n)$ es solución de (4.3) si y sólo si $x \in \mathcal{Y}(x)$, es decir, $x$ es un punto fijo de la multifunción $\mathcal{Y}$.

## 4.2. Inclusiones diferenciales difusas

Los sistemas deterministas parecen ser restrictivos para describir la evolución de una gran cantidad de fenómenos. Frecuentemente, se presentan problemas con características que tienen la connotación de “fuzzines”. Algunas de estas características son:

- Desconocimiento del medio ambiente futuro del sistema.
- Falta de determinismo (lo que hace en algunos casos imposible describir de forma completa la dinámica).
- Desconocimiento exacto de la manera en la que el estado del sistema depende de los posibles parámetros de control.

- Múltiples dinámicas “admisibles”.

Un ejemplo es la dinámica de poblaciones. Los modelos determinísticos formulados para estudios del comportamiento evolutivo de poblaciones consideran invariablemente, parámetros constantes o temporales, obtenidos como promedio de situaciones analizadas. Tales modelos no consideran subjetividades que son inherentes al proceso de variación poblacional. Los individuos son considerados homogéneos y suponen que todos poseen las mismas características de evolución.

Por otro lado, la dinámica poblacional puede ser también influenciada por características independientes de variables de estado tales como: vivienda, salario, ambiente de trabajo, violencia, etc. El valor específico de estas características no siempre puede ser evaluado o medido en el sentido tradicional, éstas son “incertidumbres” que solamente se puede conjeturar intuitivamente. Por lo tanto, el modelo de poblaciones debe afrontar hechos que no están completamente de acuerdo con la teoría clásica:

- Los individuos pueden exhibir algunas estrategias o preferencias, tales como elección de alimentos, la huida de depredadores, etc.
- Pueden existir restricciones adicionales que el sistema debe satisfacer, tales como: limitaciones de espacio, nutrientes, toxinas inducidas, etc. Frecuentemente, éstas no pueden considerarse en un sistema diferencial “estándar”.
- Puede haber indefiniciones en la dinámica debidas a ruidos ambientales (producidos en el medio) o ruidos demográficos (actitudes individuales distintas).

Consideremos para esta situación un modelo determinista con una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$x'(t) = f_0(t, x(t)), \tag{4.7}$$

donde $f_0 : T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada con cierto grado de regularidad. Se puede modelar la indefinición o el ruido en la evolución de la población, introduciendo un “parámetro” $v$ donde $v$ es una función que toma valores en $U \subset \mathbb{R}$. El sistema resultante es de la forma

$$x'(t) = f(t, x(t), v(t)), \tag{4.8}$$

donde $f : T \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ es una función tal que $f(t, x, 0) = f_0(t, x)$.

Existen en la literatura al menos dos formas distintas de llegar a sistemas de este tipo:

a) Si aceptamos que el carácter de la indefinición es aleatoria, lo más adecuado es utilizar una ecuación diferencial estocástica. En este caso, debido a las dificultades técnicas, se suele suponer que la perturbación afecta linealmente a la dinámica, esto es,

$$x'(t) = f_0(t, x) + f_1(t, x)v,$$

donde $v$ es lo que llaman un “ruido blanco”, que es la derivada estocástica de un movimiento Browniano.

b) Si por el contrario, no parece adecuado suponer que el ruido tenga carácter aleatorio debido a que las preferencias de los individuos son subjetivas, parece más conveniente utilizar la teoría difusa [22].

Como se mencionó, una forma adecuada de reescribir el problema (4.8) es utilizar una inclusión diferencial

$$x'(t) \in F(t, x), \tag{4.9}$$

donde $F$ es una multifunción determinada por $f$ de (4.8) y donde $v$ debe tomar valores en el conjunto $U$.

Según las metodologías propuestas en trabajos previos, una generalización razonable de (4.7) para modelar sistemas dinámicos con indefiniciones, es admitir una multifunción difusa $F$ en el problema (4.9). Recordemos que una multifunción $F$ es difusa, si sus imágenes $F(t, x)$ son conjuntos difusos. A partir de la noción de multifunción difusa, se extiende la definición de inclusiones diferenciales al contexto difuso, esto es, inclusiones diferenciales difusas.

Rao y Zhu en [36] introdujeron las inclusiones diferenciales difusas de la siguiente manera. Dada una multifunción difusa $F : T \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}^n$, una función $\alpha : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ y $T \subset \mathbb{R}$ un intervalo; podemos considerar el siguiente problema: hallar una función $x : T \to \mathbb{R}^n$ absolutamente continua tal que

$$x'(t) \in [F(t, x(t))]^{\alpha(x(t))}, \;\; t \in T \; c.t.p. \tag{4.10}$$

Se dice que (4.10) es una inclusión diferencial difusa.

Recordemos, por la definición de $\alpha$-nivel, que $x'(t) \in [F(t,x(t))]^{\alpha(x(t))}$ significa que $F(t,x(t))(x'(t)) \geq \alpha(x(t))$, es decir, la multifunción $F(t,x(t)) \in \mathcal{F}^n$ evaluada en $(x'(t))$ debe ser mayor o igual que $\alpha(x(t))$. Como podemos observar, una inclusión diferencial difusa está determinada por las funciones $F$ y $\alpha$.

Supongamos que $F$ toma valores en $\mathcal{K}^n$, esto es, $F : T \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}^n$ es una multifunción "clásica". Si hacemos $\widetilde{F}(t,x) = \chi_{F(t,x)}$, para todo $(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n$, entonces la inclusión diferencial (4.10) se reduce a la inclusión diferencial clásica $x' \in F(t,x)$.

En [36], los autores demuestran algunos resultados que garantizan la existencia de solución para una inclusión diferencial difusa (4.10), imponiendo ciertas condiciones sobre las funciones $\alpha$ y $F$. A continuación consideramos un problema de valor inicial asociado a una inclusión diferencial difusa en un contexto más general.

*Sea $X$ un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$, $\Omega$ un conjunto abierto en $\mathbb{R} \times X$ y $(t_0, x_0) \in \Omega$. Sean $\alpha : X \to [0,1]$ una función y $\Gamma : \Omega \to \mathcal{F}(X)$ una multifunción difusa, en donde $\mathcal{F}(X)$ denota la colección de los conjuntos difusos sobre $X$. Sea $J$ un intervalo de $\mathbb{R}$ y denotamos por $C(J, X)$ el conjunto de funciones continuas definidas sobre $J$ con valores en $X$. Consideraremos el siguiente problema de valor inicial asociado a una inclusión* *diferencial difusa. Encontrar* $x \in C(J, X)$ *tal que*

$$x'(t) \in [\Gamma(t, x(t))]^{\alpha(x(t))}, \qquad x(t_0) = x_0. \tag{4.11}$$

A continuación anunciamos los teoremas de existencia dados en [36], los cuales fueron abordados mediante técnicas de punto fijo.

**Definición 4.2.** *Una multifunción difusa* $F : \Omega \to \mathcal{F}(X)$ *es llamada convexa, si para todo* $(t, x) \in \Omega$*,* $y, z \in X$ *y* $\lambda \in [0, 1]$*, tenemos*

$$F(t, x)(\lambda y + (1 - \lambda)z) \geq \text{mín}\{F(t, x)(y), F(t, x)(z)\}.$$

**Definición 4.3.** *Una multifunción difusa* $F : \Omega \to \mathcal{F}(X)$ *es llamada cerrada, si para cada* $(t, x) \in \Omega$*, la función* $F(t, x)(y)$ *es semicontinua superior para todo* $y \in X$*, en el sentido usual de una función ordinaria real.*

**Definición 4.4.** *Sea* $F : \Omega \to \mathcal{F}(X)$ *una multifunción difusa y* $\alpha : X \to [0, 1]$ *una función. Se dice que* $F$ *es* $\alpha$*-Lipschitz, si existe una constante* $L > 0$ *tal que*

$$d([F(t, x_1)]^{\alpha(x_1)}, [F(t, x_2)]^{\alpha(x_2)}) \leq L||x_1 - x_2||$$

*para todo* $(t, x_1), (t, x_2) \in \Omega$*, donde* $d$ *denota la métrica de Hausdorff.*

**Teorema 4.5** ([36])**.** *Sea* $\Omega$ *un conjunto abierto en* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *con* $(t_0, x_0) \in \Omega$*, y* $F : \Omega \to \mathcal{F}^n$ *una multifunción cerrada convexa. Suponga que* $\alpha : \mathbb{R}^n \to (0, 1]$ *es una función semicontinua inferior tal que* $[F(t, x)]^{\alpha(x(t))}$ *es no vacío para cada* $(t, x) \in \Omega$*. Si existe una vecindad* $V$ *de* $(t_0, x_0)$ *tal que* $\bigcup_{(t,x)\in V}[F(t, x)]^{\alpha(x(t))}$ *es un conjunto acotado en* $\mathbb{R}^n$*, entonces existe un intervalo* $I$ *tal que el problema (4.11) tiene una solución* $x(t)$ *definida en* $I$*.*

Rao y Zhu en [36] demuestran el siguiente teorema con el fin de obtener una solución del problema (4.11) en espacios de Banach.

**Teorema 4.6** ([36]). *Sea $X$ espacio de Banach y $\Omega$ un conjunto abierto en $\mathbb{R} \times X$ con $(t_0, x_0) \in \Omega$. Sea $F : \Omega \to \mathcal{F}(X)$ una multifunción difusa cerrada, $\alpha$-Lipschitz con constante $L$ y $\alpha : X \to (0,1]$ una función semicontinua inferiormente tal que $[F(t,x)]^{\alpha(x(t))}$ es no vacío para cada $(t,x) \in \Omega$. Si existe una vecindad $D$ de $(t_0, x_0)$ tal que $\bigcup_{(t,x)\in D}[F(t,x)]^{\alpha(x(t))}$ es compacto en $X$, entonces existe un intervalo $I$ tal que el problema (4.11) tiene una solución $x(t)$ definida en $I$.*

**Ejemplo 4.7.** *Sea $\Gamma : (0,1) \to \mathcal{F}^1$ una multifunción difusa definida por $\alpha$-niveles como*

$$\Gamma_\alpha(x) = [\Gamma(x)]^\alpha = (1-\alpha)[-1,1]x, \qquad \forall x \in (0,1).$$

*Luego para cada $x \in (0,1)$, $\Gamma(x)$ define un conjunto difuso triangular isósceles con soporte $[-x,x]$ en $\mathcal{F}^1$. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to [0,1]$ una función definida por*

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1-x, & x \in [0,1], \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

*Por consiguiente, la inclusión diferencial difusa definida en (4.11) tiene la forma*

$$x' \in \Gamma_{\alpha(x)}(x) = [-1,1]x^2, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{4.12}$$

*Podemos observar que la multifunción $\Gamma$ satisface todas las condiciones del Teorema 4.5, lo que nos garantiza la existencia de una solución para el problema (4.12).*

*De acuerdo con la condición inicial $x(0) = x_0$, el problema (4.12) lo podemos escribir de manera tal que cada solución de (4.12) sea una solución de la ecuación diferencial*

$$x' = ax^2, \quad x(0) = x_0, \tag{4.13}$$

*con $a \in [-1,1]$. Luego, el conjunto de soluciones del problema (4.12) con $J = [0,1)$ es dado por*

$$\left\{ -\frac{x_0}{at-1} : a \in [-1,1] \right\}.$$

**Ejemplo 4.8.** *Sea* $\Gamma : (0,1) \to \mathcal{F}^1$ *una multifunción difusa definida por*

$$\Gamma(x)(t) = \begin{cases} \frac{2t}{x}, & 0 \leq t \leq \frac{x}{2} \\ 1, & \frac{x}{2} \leq t \leq 1, \\ 0, & t \notin [0,1]. \end{cases}$$

*Es fácil ver que* $\Gamma_\alpha(x) = [\Gamma(x)]^\alpha = [\frac{\alpha x}{2}, 1]$, *para cada* $\alpha \in [0,1]$. *Sea* $\alpha : \mathbb{R} \to [0,1]$ *una función como en el Ejemplo 4.7. Por lo tanto, la inclusión diferencial difusa está dada por*

$$x' \in \Gamma_{\alpha(x)}(x) = \left[\frac{(1-x)x}{2}, 1\right]. \tag{4.14}$$

*Como en el Ejemplo 4.7, la multifunción* $\Gamma$ *satisface todas las condiciones del Teorema 4.5, garantizándose la existencia de una solución para (4.14).*

*Para obtener una solución del problema (4.14), con la condición inicial* $x(0) = x_0$, *podemos usar la técnica de selección para multifunciones; por ejemplo, la función* $f(x) = \frac{x}{2}$ *es una selección de* $\Gamma(x) = \left[\frac{(1-x)x}{2}, 1\right]$, *para todo* $x \in (0,1)$. *Por consiguiente, una solución de (4.14) está dada por* $x(t) = x_0 e^{t/2}$. *En este caso, no se puede determinar fácilmente todas las soluciones de (4.14) como se hizo en el Ejemplo 4.7, donde las soluciones de la inclusión diferencial difusa fueron obtenidas resolviendo la ecuación diferencial (4.13).*

## 4.3. Solución de ecuaciones diferenciales difusas vía inclusiones diferenciales

En esta sección estudiaremos la técnica desarrollada por Hüllermeier en [16] para resolver ecuaciones diferenciales difusas. El autor en [16] interpreta el problema de valor inicial difuso como una familia de inclusiones diferenciales "clásicas" y prescinde del sentido de la derivada difusa que pueda dársele al problema (4.15). Esta técnica planteada por Hüllermeier es formalizada posteriormente por Diamond en [11, 12].

Si el problema de valor inicial

$$x'(t) = F(t, x(t)), \qquad x(t_0) = X_0, \tag{4.15}$$

lo interpretamos en un contexto difuso, entonces podemos considerar diferentes nociones de diferenciabilidad para la multifunción difusa $x$. En los Capítulos 2 y 3, intentamos darle un significado al problema (4.15) estableciendo, respectivamente, la $H$-derivada y la $\alpha$-derivada.

Sin embargo, como vimos en el Capítulo 2, la interpretación del problema (4.15) con la $H$-derivada presenta algunas desventajas, porque la solución obtenida tiene la propiedad que el $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}(x(t)))$ es no acotado cuando $t$ tiende al infinito. Por esta razón, Hüllermeier [16] sugiere una formulación diferente del problema de valor inicial difuso.

Se parte de una inclusión diferencial la cual es una generalización del PVI “clásico”,

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \in X_0, \end{cases} \tag{4.16}$$

donde $F : [t_0, t_0+a] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}^n$ es una multifunción y $X_0 \in \mathcal{K}^n$. Una función $x : [t_0, t_0+a] \to \mathbb{R}^n$ con condición inicial $x_0 \in X_0$ es una solución de (4.16) en el intervalo $[t_0, t_0 + a]$, si $x$ es absolutamente continua y satisface (4.16) para casi todo $t \in [t_0, t_0 + a]$.

Para cada tiempo $t$, la derivada no es conocida precisamente, porque la derivada $x'(t)$ es un elemento del conjunto $F(t, x)$. De esta manera, los autores en [1] definen los siguientes conjuntos. Sea $\Sigma(t, X_0)$ el conjunto de todas las soluciones del problema (4.16). El conjunto alcanzable en el tiempo $t \in [t_0, t_0 + a]$ asociado al problema (4.16) es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathcal{A}(t, X_0) = \{x(t, x_0) : x(\cdot, x_0) \in \Sigma(t, X_0), \text{ con } x_0 \in X_0\}.$$

$\mathcal{A}(t, X_0)$ representa el conjunto de todos los posibles estados del sistema en el tiempo $t$. El conocimiento de los conjuntos alcanzables $\mathcal{A}(t, X_0)$ es importante para caracterizar el comportamiento del sistema.

Una generalización natural del problema (4.16) se obtiene al sustituir la multifunción $F$ en

(4.16) por una multifunción difusa. Luego el problema de valor inicial (4.16) sería

$$\begin{cases} x'(t) = F(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0 \in X_0, \end{cases} \tag{4.17}$$

donde $F : [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{F}^n$ es una multifunción difusa y $X_0 \in \mathcal{F}^n$.

De acuerdo con [16], el PVIF (4.15) es interpretado como una familia de inclusiones diferenciales basados en los $\alpha$-niveles de $F$ y $X_0$; esto es, para cada $\alpha \in [0, 1]$, se tiene el siguiente problema

$$\begin{cases} x'(t) \in [F(t, x(t))]^\alpha, \\ x(t_0) = x_0 \in [X_0]^\alpha, \end{cases} \tag{4.18}$$

donde $[F(t, x(t))]^\alpha$ y $[X_0]^\alpha$ son los $\alpha$-niveles de $F$ y $X_0$, respectivamente. Además, la multifunción $[F(t, x(t))]^\alpha : [t_0, t_0+a] \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}^n$ es de la forma dada en (4.16). Claramente, los problemas (4.18) son inclusiones diferenciales y por lo tanto, para cada $\alpha$, una función $x : [t_0, t_0 + a] \to \mathbb{R}^n$ puede ser considerada como una $\alpha$-solución de (4.18).

De esta forma definimos para cada $\alpha \in [0, 1]$, los siguientes conjuntos. Sea $\Sigma_\alpha(t, X_0)$ el conjunto de todas las $\alpha$-soluciones de (4.18). Denotamos por $\mathcal{A}_\alpha(t, [X_0]^\alpha) = \{x(t, x_0) : x(\cdot, x_0) \in \Sigma_\alpha(t, X_0),$ con $x_0 \in [X_0]^\alpha\}$, $t_0 \leq t \leq t_0 + a$, el conjunto alcanzable de las $\alpha$-soluciones.

Según Diamond [11, 12], el conjunto de todas las $\alpha$-soluciones $\Sigma_\alpha(t, X_0)$ sería el $\alpha$-nivel de un conjunto difuso $\Sigma(t, X_0)$ en el sentido que todos los conjuntos alcanzables $\mathcal{A}_\alpha(t, [X_0]^\alpha)$ son los $\alpha$-niveles de un conjunto difuso $\mathcal{A}(t, X_0)$ en $\mathbb{R}^n$. Diamond utiliza el Teorema de representación de Negoita-Ralescu (Teorema 1.2) para probar este hecho y afirmar que $\Sigma(t, X_0)$ es la solución de la ecuación diferencial (4.17).

**Ejemplo 4.9.** *En el Ejemplo 2.20, consideramos la ecuación diferencial difusa*

$$x'(t) = -\lambda x(t), \quad \lambda > 0, \quad x(0) = X_0, \tag{4.19}$$

*donde $X_0$ es un número difuso triangular simétrico con soporte $[-a, a]$.*

*Como vimos, la solución de (4.19) usando la derivada de Hukuhara (H-derivada) está dada, por $\alpha$-niveles, por*

$$x_\alpha(t) = (1-\alpha)e^{\lambda t}[-a, a], \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

*Recordemos que* $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\ x(t)) = 2ae^{\lambda t}$ *no está acotado cuando* $t \to \infty$*, demostrando que esta interpretación no generaliza el caso clásico. Sin embargo, si (4.19) lo interpretamos como una familia de inclusiones diferenciales de la forma*

$$x'_\alpha(t) \in -\lambda x_\alpha(t),$$

$$x_\alpha(0) \in X_0^\alpha = (1-\alpha)[-1, 1], \qquad 0 \leq \alpha \leq 1, \tag{4.20}$$

*podemos obtener un resultado más intuitivo. Puesto que* $-\lambda x_\alpha(t) = \{-\lambda x_\alpha(t)\}$ *es un "singleton" en* $\mathcal{K}$*, de (4.20) tendremos que*

$$x'_\alpha(t) = -\lambda x_\alpha(t), \qquad x_\alpha(0) \in X_0^\alpha = (1-\alpha)[-1, 1],$$

*el cual tiene como conjunto solución* $\Sigma_\alpha(t, X_0)$ *en un intervalo* $T$ *a las funciones*

$$x_\alpha(t) = x_\alpha(0)e^{-\lambda t}, \quad x_\alpha(0) \in X_\alpha.$$

*Por consiguiente,* $\Sigma_\alpha(t, X_0) = (1-\alpha)e^{-\lambda t}[-1, 1]$.

*Luego,* $x(t)$ *es interpretada como una multifunción difusa con valores en números difusos triangulares simétricos cuyos $\alpha$-niveles son* $[x(t)]^\alpha = \Sigma_\alpha(t, X_0) = (1-\alpha)e^{-\lambda t}[-1, 1]$*. Esta solución es más intuitiva para (4.19) que la solución vía H-derivada dada en el Ejemplo 2.20, puesto que en éste caso* $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\ x(t)) \to 0$ *cuando* $t \to \infty$*.*

*Recordemos que en el Capítulo 3, Ejemplo 3.23, usando la $\alpha$-diferenciabilidad en su segunda forma, obtuvimos esta misma solución para el problema (4.19).*

Diamond formaliza el procedimiento del Ejemplo 4.9 en [11, 12] mediante el siguiente teorema.

Consideremos la siguiente inclusión diferencial

$$x'(t) \in H(t, x(t)), \ \ x(0) = x_0. \tag{4.21}$$

Se dice que (4.21) tiene una solución $y(t)$ en un intervalo $T$ si $y(\cdot)$ es absolutamente continua, $y(0) = x_0$ y adicionalmente $y(\cdot)$ satisface la inclusión (4.21) en $T$.

Decimos que, las hipótesis de acotamiento se cumplen, si existen $b, Y, M > 0$ tales que:

- El conjunto $Q = T \times (x_0 + (b + MT)B^n) \subset \Omega$, donde $B^n$ es la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$.
- $H$ aplica $Q$ en la bola de radio $M$.

Denotemos el conjunto de todas las soluciones de (4.21) en $T$ con $\Sigma(t, x_0)$ y el conjunto alcanzable con $\mathcal{A}(t, x_0) = \{x(t) : x(\cdot) \in \Sigma(t, x_0)\}$ y escribimos $\mathcal{Z}_T(\mathbb{R}^n) = \{x(\cdot) \in C(T; \mathbb{R}^n) : x'(\cdot) \in L^\infty(T; \mathbb{R}^n)\}$.

**Teorema 4.10** ([11, 12])**.** *Sea $X_0 \in \mathcal{F}^n$ y $\Omega$ un abierto en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ que contiene a $\{0\} \times \text{supp}(X_0)$. Supongamos que la multifunción $G : \Omega \to \mathcal{F}^n$ es semicontinua superiormente y escribimos $F(t, x; \alpha) = [G(t, x)]^\alpha \in \mathcal{K}^n$ para todo $(t, x, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]$. Suponemos que las hipótesis de acotamiento con constantes $b, M, T$ se cumplen para todo $x_0 \in \text{supp}(X_0)$ y para la inclusión diferencial*

$$x'(t) \in F(t, x; 0), \qquad x(0) \in \text{supp}(X_0).$$

*Entonces los conjuntos alcanzables $\mathcal{A}_\alpha(t, [X_0]^\alpha)$, $\alpha \in [0, 1]$, de la familia de inclusiones*

$$x'_\alpha(t) \in F(t, x; \alpha), \qquad x(0) \in X_\alpha = [X_0]^\alpha, \ \forall \alpha \in [0, 1] \tag{4.22}$$

*son los $\alpha$-niveles de un conjunto difuso $\mathcal{A}(t, X_0) \in \mathcal{F}^n$. Los conjuntos de las $\alpha$-solución $\Sigma_\alpha(t, [X_0]^\alpha)$ de (4.22) son los $\alpha$-niveles de un conjunto difuso $\Sigma(t, X_0)$ definido en $\mathcal{Z}_T(\mathbb{R}^n)$.*

**Ejemplo 4.11.** *Consideremos la ecuación diferencial difusa en $\mathbb{R}^+$,*

$$y'(t) = -y(t) + W \cos t$$

*donde $W$ es un número difuso trapezoidal.*

*Si interpretamos la EDF como una familia de inclusiones diferenciales, tenemos que*

$$x'_\alpha(t) \in -x_\alpha(t) + \cos t[W]^\alpha, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

*esto es,*

$$x'_\alpha(t) = -x_\alpha(t) + w_\alpha \cos t, \qquad w_\alpha \in [W]^\alpha,$$

*lo que se reduce a una EDO lineal de primer orden*

$$x'_\alpha(t) + x_\alpha(t) = w_\alpha \cos t, \qquad w_\alpha \in [W]^\alpha,$$

*cuya solución está dada por*

$$x_\alpha(t) = \frac{w_\alpha}{2}(\cos t + sent) + ce^{-t}.$$

*Consideremos la condición inicial $x_\alpha(0) \in [X_0]^\alpha$, es decir, $x_\alpha(0) = x_0^\alpha \in [X_0]^\alpha$. Para hallar el valor de la constante $c$, tenemos que $x_\alpha(0) = \frac{w_\alpha}{2} + c = x_0^\alpha$, entonces, $c = x_0^\alpha - \frac{w_\alpha}{2}$.*

*De hecho, el conjunto solución es dado para $t \geq 0$ y $x(0) \in X_0$ como*

$$x_\alpha(t) \in \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t + \cos t)[W]^\alpha + \left([X_0]^\alpha - \frac{1}{2}[W]^\alpha\right) e^{-t} = [\Sigma(t, [X_0])]^\alpha.$$

*Claramente, el conjunto alcanzable $\mathcal{A}(t, X_0)$ se aproxima al conjunto difuso*

$$E = \{W(\operatorname{sen} t + \cos t)/2 : t \geq 0\} = \sqrt{2}W/2.$$

**Ejemplo 4.12.** *Consideremos el siguiente problema de valor inicial difuso*

$$x'(t) = x^2(t), \qquad x(0) = X_0, \tag{4.23}$$

*donde $X_0$ es un número difuso definido de la siguiente manera*

$$X_0(z) = \begin{cases} 3 - z, & 2 \leq z \leq 3, \\ z - 1, & 1 \leq z \leq 2, \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

*Si (4.23) lo interpretamos como una familia de inclusiones diferenciales de la forma*

$$x'_\alpha(t) \in x^2_\alpha(t)$$

$$x_\alpha(0) \in X_0^\alpha = [1+\alpha, 3-\alpha], \qquad 0 \le \alpha \le 1. \tag{4.24}$$

*Puesto que* $x^2_\alpha(t) = \{x^2_\alpha(t)\}$ *es un "singleton" en* $\mathcal{K}$*, de (4.24) tendremos que*

$$x'_\alpha(t) = x^2_\alpha(t), \qquad x_\alpha(0) \in X_0^\alpha = [1+\alpha, 3-\alpha],$$

*el cual tiene como conjunto solución* $\Sigma_\alpha(t, X_0)$ *en un intervalo* $T$ *a las funciones*

$$x_\alpha(t) = \frac{1}{c_\alpha + t}, \qquad x_\alpha(0) = \frac{1}{c_\alpha} \in [1+\alpha, 3-\alpha].$$

*Luego,*

$$c_\alpha \in \left[\frac{1}{3-\alpha}, \frac{1}{1+\alpha}\right].$$

*Por lo tanto,*

$$x_\alpha(t) \in \frac{1}{[\frac{1}{3-\alpha}, \frac{1}{1+\alpha}] - t} = \left[\frac{1}{\frac{1}{1+\alpha} - t}, \frac{1}{\frac{1}{3-\alpha} - t}\right] = \left[\frac{1+\alpha}{1-t-t\alpha}, \frac{3-\alpha}{1-3t+t\alpha}\right] = \Sigma_\alpha(t, X_0).$$

# Conclusiones

- En este trabajo se realizó una revisión de los principales resultados sobre la teoría de las ecuaciones diferenciales difusas; en particular, se analizaron las implicaciones que tiene la diferenciabilidad sobre la existencia de soluciones de problemas de valor inicial en el contexto difuso.

- Adicionalmente, se presentó una generalización de la diferenciabilidad de multifunciones difusas, y con ella se obtuvieron algunos resultados de existencia y unicidad de soluciones de problemas de valor inicial difuso. Estos resultados hacen parte del *artículo* [37].

- En el Capítulo 4 se presenta una introducción al método de las inclusiones diferenciales como una herramienta para resolver problemas de valor inicial asociados a ecuaciones diferenciales difusas.

# Trabajos futuros

A lo largo del desarrollo de este trabajo de maestría fueron quedando algunas preguntas las cuales pueden ser analizadas en trabajos futuros, a saber:

- Es de revelante importancia estudiar la teoría de ecuaciones diferenciales de orden superior en el contexto difuso con el uso de la $\alpha$-derivada generalizada.
- Estudiar ecuaciones diferenciales parciales difusas y sus aplicaciones.
- Dado las múltiples aplicaciones que tienen las ecuaciones diferenciales difusas en ramas de las ciencias e ingenierías, una forma de abordar tales problemas es utilizar métodos numéricos para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales difusas.
- Introducirnos en el estudio de los métodos numéricos sobre inclusiones diferenciales.

# Bibliografía


[1] Aubin J.P. & Cellina A. *Differential Inclusions*, Springer, Berlin, 1984.

[2] Aumann R.J. *Integrals of set-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. **12** (1965), 1-12.

[3] Banks H.T. & Jacobs Q. *A differential calculus for multifunctions*, J. Math. Anal. Appl. **29** (1970), 246-272.

[4] Bede B. & Gal SG. *Almost periodic fuzzy-number-valued functions*, Fuzzy Set and System **147** (2004), 385-403.

[5] Bede B. & Gal SG. *Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equations*, Fuzzy Set and System, **151** (2005), 581-99.

[6] Bencsik A., Bede B., Tar J. & Fodor J. *Fuzzy differential equations in modeling hydraulic differential servo cylinders*, Third Romanian-Hungarian joint symposium on applied computational intelligence (SACI), Timisoara, Romania, (2006).

[7] Chalco-Cano Y. & Román-Flores H. *Comparation between some approaches to solve fuzzy differential equations*, Fuzzy Set and Systems **160** (2009) 1517-1527.

[8] Chalco-Cano Y. & Román-Flores H. *On the new solution of fuzzy differential equations*, Chaos, Solitons and Fractals **38** (2008), 112-119.

[9] Chalco-Cano Y., Rojas-Medar M.A. & Román-Flores H. *Una nota sobre la existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales difusas*, Actas del XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, Cedya-(2007), Sevilla, España.

[10] Chalco-Cano Y., Rojas-Medar M.A. & Román-Flores H. *Sobre ecuaciones diferenciales difusas*, J. Math. Anal. Appl. **41** (2007), 91-99.

[11] Diamond P. *Time-dependent differential inclusions, cocycle attractors and fuzzy differential equations*, IEEE Trans. Fuzzy System **7** (1999) 734-740.

[12] Diamond P. *Stability and periodicity in fuzzy differential equations*, IEEE Trans. Fuzzy System **8** (2000) 583-590.

[13] Guo M. & Li R. *Impulsive functional differential inclusions and fuzzy populations models*, Fuzzy Set Systems **138** (2003), 601-615.

[14] Guo M., Xue X. & Li R. *The oscillation of delay differential inclusions and fuzzy biodynamics models*, Math Comput Model **37** (2003), 651-658.

[15] Huhuhara M. *Intégration des applications mesurables dont la valuer est un compact convexe*, Funkcial. Ekvac. **10** (1967), 205-223.

[16] Hüllermeier E. *An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems*, Int.J.Uncertainty, Fuziness Knoeledge-Bases Syst. **5** (1997), no. 2, 117-137.

[17] Kaleva O. *A note on fuzzy differential equations*, Nonlinear Anal **64** (2006), 895-900.

[18] Kaleva O. *Fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems **24** (1987), 301-317.

[19] Kaleva O. *The Cauchy problem for fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems **35** (1990), 389-396.

[20] Kandel A. & Byatt, W.J. *Fuzzy differential equations,* Proceedings of the International Conference on Cybernetics and Society, Tokyo, November 1978, 1213-1216.

[21] Kloeden P.E. *Remarks on Peano-Like theorems for fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems **44** (1991), 161-163.

[22] Krivan V. & Colombo G. *A non-stochastic approach for modelling uncertainty in population dinamic*, Bull. Math. Biology **60** (1998), 721-751.

[23] Lakshmikantham V. & Leela S. *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon Press, Oxford, 1981.

[24] Negoita C.V. & Ralescu D.A. *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*, Wiley, New York, (1975), 12-31.

[25] Nieto J.J. & Rodriguez-López R. *Bounded solutions for fuzzy differential and integral equations*. Chaos, Solitons and Fractals **27** (2006), 1376-1386.

[26] Nieto J.J. *The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations*, Fuzzy Set and Systems **102** (1999), 259-262.

[27] Oberguggenberger M. & Pittschmann S. *Differential equations with fuzzy parameters*, Math. Mod. Systems **5** (1999), 181-202.

[28] Park J. & Han H. *Existence and uniqueness theorem for a solutions of fuzzy diferential equations*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **22** (1999), 271-279.

[29] Puri M.L. & Ralescu D.A. *Differential and fuzzy functions*, J. Math. Anal. Appl. **91** (1983), 552-558.

[30] Puri M.L. & Ralescu D.A. *Fuzzy radom variables*, J. Math. Anal. Appl. **114** (1986), 409-422.

[31] Radström H. *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 165-169.

[32] Rojas-Medar M.A. *Análisis Multívoco*, Universidad estadual de Campinas.

[33] Román-Flores H. & Rojas-Medar M.A. *Embedding of level-continuos fuzzy sets on Banach spaces*, Inform Sciences **144** (2003), 227-247.

[34] Seikkala S. *On the fuzzy initial value problem*, Fuzzy Sets and Systems **24** (1987), 319-330.

[35] Song S. & Wu C. *Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy diferential equations*, Fuzzy Set and Systems **110** (2000), 55-67.

[36] Zhu Y. & Rao L. *Differential Inclusions for Fuzzy Maps*, Fuzzy Sets and Systems **112** (2000) 257-261.

[37] Villamizar-Roa E.J. & González-Calderón W. *On the Cauchy problem of fuzzy differential equations*, (Artículo aceptado para su publicación) (2010).

[38] Zadeh L.A. *Fuzzy sets*, Information and Control **8** (1965), 338-353.