
Estimación del grado complejo de coherencia a partir de la polarización

Ángel Blanco Puerto

Trabajo de grado para optar por el título de: Físico

Director:

Rafael Ángel Torres Amaris

Co-director:

Cristian Eduardo Hernández Cely

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2025

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a mis padres, por su amor incondicional, y a cada persona con las que he tenido el privilegio de compartir mi vida. Mi corazón y memoria guardan un lugar imborrable por los tíos, primos y amigos que ya no pueden compartir estos momentos conmigo. Soy el fruto de su esfuerzo y brindo por ellos.

También quiero dedicárselo a quienes me dijeron que tomarme en serio la carrera de Física era un error. Hoy brindo por el mejor y más satisfactorio de mis fracasos, porque la física es el amor de mi vida y de las únicas cosas que realmente me gusta hacer.

Agradecimientos

A mis padres

A mis padres, por el esfuerzo incansable que cambió nuestro destino. No partimos con ninguna ventaja, nunca tuvimos una chance justa o siquiera un punto de partida pero gracias a su sacrificio, hoy todos sus hijos somos profesionales. Este logro es la prueba de que su amor y dedicación lo hicieron posible.

A mis mentores

A mi codirector Cristian Eduardo Hernandez Cely, por haberse convertido en un hermano del alma por lo menos para mí, y al profesor Andrés Camilo García Castro, por su invaluable apoyo y por salvarme la vida dos veces. Sus palabras y su guía fueron la luz que me impulsó en el tortuoso inicio de mi propuesta de grado hace un año. No tengo forma de agradecerlo. Finalmente a mi director Rafael Ángel Torres Amaris por haberme inspirado con su forma de ver y hacer física.

A mi familia elegida

A mis compañeros del grupo GOTS, la familia que elegí. Gracias por cada conversación, desde las más profundas reflexiones filosóficas hasta los temas más cotidianos y superfluos. Agradezco los cigarrillos compartidos, las risas, el apoyo y la comida que tan generosamente me brindaron cuando la necesitaba.

A mi amor

A Mariana Angélica Berbeo Flórez, mi amor. Tu llegada a mi vida ha sido una luz de esperanza para este incomprendido. Como alguna vez cantó Víctor Jara, *no creo en nada sino en el calor de tu mano con mi mano.*

Índice general

1. Introducción	1
2. Formalismos y fundamentos de la polarización de la luz	4
2.1. Elipse de polarización	4
2.1.1. Esfera de Poincaré	8
2.2. Vectores y matrices de Jones	10
2.2.1. Cambio de base de estados de polarización	10
2.2.2. Retardadores lineales	11
2.2.3. Rotación de un retardador y sistemas en cascada	13
2.2.4. Matriz de polarización	14
2.3. Transformaciones sobre estados de polarización dinámicos	16
2.3.1. Efecto de un retardador lineal sobre un estado de polarización dinámico	17
2.3.2. Acción de un retardador en una matriz de polarización dinámica y en un vector de Stokes dinámico	18
2.4. Conclusiones	19
3. Descripción estadística de la polarización	21
3.1. Grado de polarización de primer orden	22
3.2. Transformaciones de polarización de haces incoherentes	24
3.3. Despolarización	25
3.3.1. Despolarización de luz elípticamente polarizada a través de un retar- dador con estados propios elípticos	26
3.3.2. Curva de despolarización a partir de un retardador variable	28
3.4. conclusiones	35
4. Fase de la función de coherencia	36
4.1. Teorema de Wiener-Khinchin	36
4.2. Determinación de la fase de coherencia mediante la despolarización	39
4.2.1. Transformada de Hilbert del grado complejo de coherencia	40
4.3. conclusiones	42
Referencias	46

Índice de figuras

2.1.	Elipse de polarización con un ángulo de elipticidad dado χ y la cual está alineada con un sistema de coordenadas (E_x, E_y)	8
2.2.	Elipse de polarización con elipticidad χ y un ángulo de orientación α	8
2.3.	Esfera de Poincaré, es la proyección estereográfica de los parámetros de la elipse α, χ tomando como estados base los estados de polarización circular	9
2.4.	Representación del efecto de un retardador con estados propios elípticos \mathbf{r}_{\pm} y retardancia δ en la esfera de Poincaré. Es un rotación de un ángulo δ alrededor de un eje \mathbf{r} que pasa por los dos estados propios de polarización \mathbf{r}_{\pm} del ratardador.	14
3.1.	a) Representación de un estado de polarización proveniente de una fuente incoherente. Sus parámetros de Stokes son funciones aleatorias del tiempo y describen una trayectoria arbitraria sobre la esfera de Poincaré. b) Representación del estado de polarización promedio. Este es el primer momento asociado con las señales aleatorias que conforman el estado de polarización de una fuente de luz incoherente.	23
3.2.	Esquema experimental usado comúnmente para la medición de la despolarización de un haz parcialmente coherente linealmente polarizado que incide sobre un retardador, dicho retardador es de orden múltiple es decir, el retardo que induce es $\tau = (n + 1/4)\lambda_0$ con estados propios lineales que puede rotar especialmente un ángulo θ	27
3.3.	Orientación de las moléculas de cristal líquido en una celda nemática trenzada (TN-LC) en función del voltaje aplicado, el cual aumenta de izquierda a derecha. La luz se propaga en la dirección vertical (z) y las moléculas están ancladas a los sustratos superior e inferior. (Izquierda) Con 0 V, las moléculas forman una estructura helicoidal de 90° en el plano horizontal. (Centro) Al aumentar el voltaje, las moléculas en el centro de la celda se inclinan con respecto al plano horizontal, reduciendo su contribución al retardo de fase total del dispositivo. A voltajes elevados, la mayoría de las moléculas se alinean con el campo eléctrico (dirección vertical), a excepción de las capas más cercanas a los sustratos, que permanecen ancladas. (Extremo derecho) Gráfica cualitativa que muestra la variación del retardo de fase (magnitud) y la orientación del eje rápido de la celda en función del voltaje aplicado.	29
3.4.	Elipses de polarización de los modos propios para los TN-LC	30

3.5.	Esquema para la despolarización de haz parcialmente coherente con un cristal líquido y placas de ondas. Una vez se llega al menor DOP posible con el cristal líquido con una configuración de retardadores cuarto de onda y media onda se despolariza hasta el mínimo DOP que alcanzó el cristal, luego con una configuración de cuartos de onda o media onda de orden cero se lleva el estado de polarización al estado lineal 45° y se repite el proceso hasta rozar un DOP cercano al cero.	33
3.6.	Curvas de despolarización para las seis potencias de una fuente LED parcialmente coherente la cual se polariza diagonalmente 45° y este se incide sobre una cristal líquido que induce un retardo desde los 0 [nm] a los 4000 [nm] y se extiende por medio de la metodología 3.5 . De color rojo se muestra el ajuste de curvas utilizando una función de coherencia de primer orden combinación lineal de dos gaussianas.	34
4.1.	Espectro de la fuente Diodo LED <i>M625L4-C1</i> que, en azul se encuentran los datos experimentales registrado por medio de un espectrometro (falta referencia del espectrometro) . En rojo se muestra el fiteo realizado a los datos realizado la misma metodología mostrada para la curva de despolarización, se propuso también una combinación de gaussianas de la forma $\sum_{i=1}^n a_i e^{-[(\lambda-b_i)/c_i]^2}$, el eje y de la grafica se encuentra en unidades arbitrarias.	37
4.2.	Función de coherencia normalizada obtenida para el espectro medido en 4.1 en función del retardo. Para	38
4.3.	Fase de la función de coherencia $\phi(L)$ en función del retardo espacial. La relación lineal $\phi(L) = 2\pi L/\lambda_0$, se confirma la simetría impar de la fase y permite verificar independientemente la longitud de onda central $\lambda_0 \approx 633,41nm$. esta grafica corresponde al nivel 6 de potencia del diodo LED	39
4.4.	Representación de la parte real e imaginaria de la función de coherencia obtenida a través del metodo del espectro.	40
4.5.	Fases de coherencia para los seis niveles de potencia de una fuente LED parcialmente coherente, determinadas mediante la transformada de Hilbert aplicada al grado de coherencia complejo obtenido por el método de despolarización (ver ecuación 3.24).	43
4.6.	Representación de las partes reales e imaginarias y como estas modulan el comportamiento comportamiento del grado complejo de coherencia obtenidas bajo el metodo de despolarización.	44
4.7.	Representación tridimensional de la función de coherencia compleja en función del retardo.	45

Índice de tablas

Resumen

Este trabajo propone un método experimental para estimar la función de coherencia compleja en fuentes de luz parcialmente coherentes, basado en la polarización y despolarización controlada mediante un cristal líquido de retardo variable, lo que permite modular el grado de polarización y obtener una curva de despolarización relacionada directamente con la función de coherencia. Utilizando la transformada de Hilbert para estimar su fase y complementando las mediciones de su valor absoluto, el método se valida experimentalmente comparando los resultados con la función de densidad espectral de la fuente, bajo el marco teórico del teorema de Wiener-Khinchin.

Palabras claves: Polarización, despolarización, coherencia, birrefringencia, parámetros de Stokes, Función de coherencia.

Abstract

This work proposes an experimental method to estimate the complex coherence function in partially coherent light sources, based on polarization and controlled depolarization using a variable retardance liquid crystal. This allows modulating the degree of polarization and obtaining a depolarization curve directly related to the coherence function. By using the Hilbert transform to estimate its phase and complementing measurements of its absolute value, the method is experimentally validated by comparing the results with the spectral density function of the source, under the theoretical framework of the Wiener-Khinchin theorem.

Keywords: Polarization, depolarization, coherence, birefringence, Stokes parameters, coherence function.

Capítulo 1

Introducción

La polarización, una de las propiedades fundamentales de las ondas electromagnéticas, se refiere a las oscilaciones de las componentes vectoriales del campo eléctrico, que, en general, describen una figura geométrica elíptica (Born y Wolf, 2013). Para caracterizar este estado en el caso de luz completamente polarizada y coherente, se han desarrollado diversos formalismos matemáticos equivalentes. Entre ellos se encuentran los vectores de Jones, los vectores de Pauli (o matrices de polarización), los cuaterniones y los parámetros de Stokes (Kuntman, Kuntman, Canillas, y Arteaga, 2019; Pellat-Finet, 1984). La elección entre uno u otro depende de la aplicación específica. Los vectores de Jones, por ejemplo, operan con amplitudes y fases complejas, mientras que los parámetros de Stokes se expresan en términos de irradiancias, lo que hace directamente medibles. Formalismos como los cuaterniones y los vectores de Pauli destacan por ofrecer una interpretación geométrica elegante de las transformaciones de polarización, particularmente útil para modelar sistemas complejos de láminas retardadoras, ya que explicitan información fundamental como los estados propios¹ y los retardos, evitando la complejidad de las 16 componentes de una matriz de Mueller sobre todo cuando se trabaja con sistemas de placas retardadoras en cascada (Pabón, Hernandez, y Torres, 2023). Ahora bien, para describir estados de polarización parcial como los de fuentes naturales (Sol, gases excitados, LEDs o fuentes incandescentes), donde el vector campo eléctrico describe una elipse que no es estática, sino que fluctúa aleatoriamente en el tiempo (Brosseau, 1998), el estándar consiste en utilizar los parámetros de Stokes. Estos parámetros, al construirse a partir de promedios temporales de irradiancia, están directamente relacionados con la matriz de auto-coherencia de Wiener-Wolf (Wolf y cols., 2007), proporcionando así el marco adecuado para caracterizar estadísticamente la luz parcialmente polarizada.

Los estados de polarización y la matriz de polarización-coherencia tienen asociada una representación geométrica alterna mediante el uso de la esfera de Poincaré. Cada uno de los parámetros de Stokes puede ordenarse en un vector tridimensional, el cual define un punto en una región ocupada por una esfera. Los estados totalmente polarizados corresponden a un punto ubicado en la superficie de la esfera, es decir, a un vector de radio unitario. Por otra parte, los estados parcialmente polarizados se representan como puntos dentro de la esfera de Poincaré (Goldstein, 2017). Según este criterio, se define el grado de polarización como

¹Autoestado del operador que representa a un birrefringente, el cual coincide con el eje de rotación del birrefringente.

el radio de este vector, el cual es una medida de qué tan polarizada se encuentra una onda electromagnética. El grado de polarización es una medida estadística que brinda información sobre el carácter aleatorio de la fuente, ya que es una cuantificación de la correlación que existe entre las componentes vectoriales de la luz emitida por una fuente luminosa (Al-Qasimi, Korotkova, James, y Wolf, 2007; Makowski y Domański, 2010). De este modo, el grado de polarización de un haz de luz se relaciona directamente con su función de coherencia. Paralelamente, la orientación del vector de estado de polarización en la esfera de Poincaré describe la elipse de polarización promedio alrededor de la cual fluctúa la figura trazada por el vector del campo eléctrico en el transcurso del tiempo. En este contexto, los parámetros de Stokes surgen como una herramienta efectiva para caracterizar, en primera instancia, los estados de polarización de la luz no determinista o parcialmente polarizada. Estos parámetros describen estadísticamente el promedio de las fluctuaciones aleatorias del estado de polarización; sin embargo, no proporcionan información detallada sobre su dinámica temporal, es decir, sobre la forma específica de estas fluctuaciones. Esta limitación se debe a que los parámetros de Stokes están definidos fundamentalmente en términos de correlaciones de segundo orden del campo electromagnético. El estudio de esta dinámica en las fluctuaciones constituye un aspecto central para en la naturaleza del problema del presente trabajo de investigación. Para acceder a un mayor nivel de información estadística como la varianza y otros momentos de orden superior de las fluctuaciones de polarización es necesario recurrir a un formalismo más completo que considere también las funciones de coherencia de cuarto orden.

El formalismo de Stokes-Mueller permite describir cómo ciertos medios afectan el grado de polarización de los haces de luz. Cuando un medio reduce este grado, el fenómeno se conoce como despolarización, y los elementos que provocan dicho efecto se denominan despolarizadores. La principal causa de la despolarización es que estos medios introducen descorrelaciones temporales y espaciales en las componentes del campo eléctrico. Cuando los desfases resultantes son comparables con el tiempo y el área de coherencia de la fuente de luz, el grado de polarización se ve afectado de manera significativa. Los primeros dispositivos que permitieron demostrar este fenómeno fueron dos elementos birrefringentes, cuyos ejes principales estaban orientados entre sí con un ángulo fijo. A estos dispositivos se les conoce como despolarizadores de Lyot (Cieslak y Domanski, 2008; de Sande, Piquero, y Teijeiro, 2012). El uso de estos despolarizadores ha permitido desarrollar aplicaciones en fibras ópticas, ya que su birrefringencia también induce despolarización. Esta característica puede controlarse para su aplicación en sistemas de información cuántica que requieren la manipulación de fotones polarizados y despolarizados (Jeong, Lee, y Kim, 2013; Shaham y Eisenberg, 2011; Temporão, Xavier, y von der Weid, 2012). Además, la despolarización ha sido clave en el desarrollo de técnicas como la tomografía de coherencia óptica (OCT)² (Ge, Chen, Chen, y Liu, 2021), ampliamente utilizada para el estudio de tejidos biológicos, como la piel, los tejidos oculares y el tejido cardíaco, debido a sus propiedades despolarizantes. La OCT ofrece ventajas significativas frente a técnicas de imagen médica convencionales, como la resonancia magnética, la tomografía computarizada y la angiografía fluorescente, ya que proporciona una resolución mucho más alta, es no invasiva, no expone los tejidos a radiación ionizante y permite obtener imágenes en tiempo real de manera rápida (Baumann y cols., 2012; Ortega-Quijano,

²Por sus siglas en inglés, *Optical Coherence Tomography*

Marvdashti, y Ellerbee Bowden, 2016). Se evidencia entonces que la polarización de la luz y la despolarización de fuentes parcialmente coherentes son de las ramas más ampliamente estudiadas debido a sus aplicaciones en telecomunicaciones y sus potenciales usos en métodos para estudiar muestras biológicas, medicina y análisis químico.

En vista de la importancia de estos fenómenos y sus aplicaciones, resulta crucial conocer de manera exacta la función de coherencia compleja de las fuentes de luz, ya que esta guarda una estrecha relación con las dinámicas de despolarización que experimentan los haces al interactuar con diversos medios. Sin embargo, los métodos existentes para obtener la función de coherencia presentan limitaciones significativas. Tradicionalmente, la obtención de esta función requiere conocer la distribución espectral de la fuente y aplicar el teorema de Wiener-Khinchin. Más allá de esto, los métodos actuales se limitan a medir únicamente el valor absoluto (amplitud) del grado de coherencia (Chakraborty, 1986), sin poder determinar su componente de fase. Esta descripción incompleta restringe nuestra capacidad para comprender el comportamiento estadístico real de las fuentes y limita el potencial de aplicaciones avanzadas, como la optimización de la transmisión de información en fibras ópticas, la identificación de mecanismos de decoherencia en sistemas de comunicación cuántica y la mejora de la resolución y el contraste en OCT. La descripción de la dinámica de polarización, especialmente en fuentes aleatorias, a menudo requiere información más allá del primer momento estadístico (parámetros de Stokes promedio), sugiriendo la necesidad de acceder a funciones de coherencia de orden superior para una caracterización completa. Para superar estas limitaciones, este trabajo propone un método experimental para estimar la función de coherencia compleja total en fuentes de luz parcialmente coherentes. El enfoque se basa en la polarización y la despolarización controlada mediante un cristal líquido de retardo variable. Específicamente, a partir de la curva de despolarización obtenida experimentalmente, se determinará la amplitud de la función de coherencia. Posteriormente, se utilizará la transformada de Hilbert para estimar su fase, permitiendo así la caracterización completa de la función de coherencia compleja total. Este método busca una medición directa del grado de coherencia a partir de la despolarización, demostrando que en las dinámicas de despolarización se conservan las propiedades estadísticas más relevantes de las fuentes de luz. La validación experimental de este método se realizará comparando los resultados con la función de densidad espectral de la fuente, en el marco teórico del teorema de Wiener-Khinchin. Este proyecto se alinea con las investigaciones del Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales (GOTS) de la Universidad Industrial de Santander, fortaleciendo la línea de trabajo en óptica estadística y polarimetría.

Capítulo 2

Formalismos y fundamentos de la polarización de la luz

El estudio formal de la polarización de la luz tiene su fundamento en la teoría de las ondas electromagnéticas. Históricamente, esta propiedad fue de crucial importancia para la consolidación del modelo electromagnético de la luz (Goldstein, 2017). Un hito fundamental en este proceso fue la explicación, por parte de H. Lorentz y P. Zeeman en 1902, de la separación y polarización de las líneas espectrales del sodio bajo un campo magnético, utilizando para ello la teoría electromagnética de Maxwell. Este episodio demostró de manera contundente el poder predictivo de la teoría y la íntima relación entre la luz y los fenómenos electromagnéticos.

Desde la perspectiva del formalismo de Maxwell, la polarización es una manifestación directa del carácter vectorial de la radiación electromagnética el cual posee la estructura matemática de un espinor, ideal para describir rotaciones y rotaciones hiperbólicas en el espacio. Su relevancia es también tecnológica. En el ámbito de la óptica cuántica, se comprende que la polarización emerge del momento angular de espín del fotón (Saito, 2023), conocimiento que ha impulsado el desarrollo de tecnologías disruptivas como la computación cuántica y las comunicaciones cuánticas. Paralelamente, en el campo del diagnóstico médico y el análisis de tejidos, técnicas como la microscopía de polarización y la tomografía de coherencia óptica sensible a la polarización aprovechan esta propiedad para obtener información estructural y funcional crítica.

Por todo lo anterior, el objetivo de esta sección es doble: primero, presentar la estructura matemática que describe de manera más completa el estado de polarización de la luz, introduciendo para ello el formalismo moderno de los parámetros de Stokes y la esfera de Poincaré. Segundo, y en estrecha relación, se introducirá el concepto de espinor, una herramienta matemática poderosa y ubicua en la física contemporánea, cuyo entendimiento es esencial para comprender las aplicaciones tecnológicas más avanzadas de la polarización.

2.1. Elipse de polarización

Comenzaremos definiendo el estado de polarización de un haz de luz para ello vamos a suponer que tenemos un medio isotrópico y homogéneo, por lo cual, el campo eléctrico y

magnético van a seguir las siguientes ecuaciones de onda vectoriales

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.2)$$

donde el campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ y el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ no son campos independientes, estos están ligados a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.6)$$

Las soluciones de las ecuaciones de onda no necesariamente satisfacen las ecuaciones de Maxwell. Para encontrar las soluciones que coinciden con campos eléctricos y magnéticos físicos debemos tomar las soluciones de la ecuación de onda y usar las ecuaciones de Maxwell. Al momento de considerar las soluciones particulares de las ecuaciones 2.1 y 2.2, que corresponden con una función vectorial equivalente a una onda plana armónica

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.8)$$

su substitución en las ecuaciones de Maxwell conduce a relaciones específicas entre los campos y el vector de onda. De estas se deduce que los campos eléctrico y magnético son mutuamente ortogonales ($\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{B}_0$) y, a su vez, transversales a la dirección de propagación \mathbf{k} . Adicionalmente, se encuentra que la magnitud del campo eléctrico está relacionada con la del campo magnético mediante $|\mathbf{E}_0| = C|\mathbf{B}_0|$, donde C es la velocidad de la luz en el vacío. Esta relación implica que, en general, el campo eléctrico tiene una contribución dominante en la interacción de la radiación con la materia, aunque en algunos fenómenos como aquellos que involucran campos magnéticos débiles pero críticos el papel del campo magnético puede ser determinante. No obstante, en el presente trabajo nos centraremos principalmente en el estudio del campo eléctrico. Cabe destacar que estos resultados son válidos para la propagación en el vacío o en medios lineales homogéneos; en medios con otras propiedades o bajo condiciones de frontera diferentes, las conclusiones pueden variar. Un tratamiento detallado de estos aspectos puede consultarse en textos clásicos de electromagnetismo (Born y Wolf, 2013; Zangwill, 2013). Dada la naturaleza del problema abordado en este documento, no será necesario profundizar más en los fundamentos de la teoría electromagnética.

Expresando la solución particular para la ecuación 2.7 de manera vectorial tenemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{0x} e^{i\phi_x} \\ \mathcal{E}_{0y} e^{i\phi_y} \\ \mathcal{E}_{0z} e^{i\phi_z} \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \quad (2.9)$$

Notaremos a la cantidad vectorial \mathbf{E}_0 como **polarización** y esta corresponde al lugar geométrico que describe el campo eléctrico en un punto \mathbf{r} , en el instante de tiempo t , Podemos escoger ahora un sistema de coordenadas rectangulares en el la onda plana se propaga hacia nosotros $\mathbf{k} = (0, 0, k)^T$, es decir, la dirección e propagación coincide con el eje z . En este caso, la ecuación anterior toma la siguiente forma

$$\mathbf{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x e^{i\phi_x} \\ \mathcal{E}_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}, \quad (2.10)$$

la cual corresponde con las ecuaciones parametricas de una hiperelipse en el hiperplano complejo \mathbb{C}^2 al que pertenece el campo eléctrico, para demostrarlo comencemos con las siguientes cantidades

$$\frac{E_x}{\mathcal{E}_x} e^{-i\phi_y} = e^{i(kz-\omega t)} e^{i\Delta\phi} \quad \text{y} \quad \frac{E_y}{\mathcal{E}_y} e^{-i\phi_x} = e^{i(kz-\omega t)} e^{-i\Delta\phi}, \quad (2.11)$$

donde $\Delta\phi = \phi_x - \phi_y$, y operando tenemos

$$\left(\frac{E_x}{\mathcal{E}_x} e^{-i\phi_y} - \frac{E_y}{\mathcal{E}_y} e^{-i\phi_y} \right) \overline{\left(\frac{E_x}{\mathcal{E}_x} e^{-i\phi_y} - \frac{E_y}{\mathcal{E}_y} e^{-i\phi_y} \right)},$$

lo que nos permite obtener finalmente:

$$\frac{|E_x|^2}{\mathcal{E}_x^2} + \frac{|E_y|^2}{\mathcal{E}_y^2} - 2 \frac{\text{Re}\{E_x \overline{E_y}\}}{\mathcal{E}_x \mathcal{E}_y} \cos \Delta\phi = \sin^2 \Delta\phi, \quad (2.12)$$

la ecuación de una hiperelipse en el espacio hipergeométrico \mathbb{C}^2 al que pertenece el campo electrico $\mathbf{E}(z, t)$. Si se toma la parte real o imaginaria de del campo electrico, la ecuación 2.12 se le conoce como **elipse de polarización** y es el lugar geometrico que describe la parte real del vector campo electrico.

En la ecuación 2.12 podemos ver que la forma y la orientación de la elipse de polarización depende solamente de las amplitudes \mathcal{E}_{0x} , \mathcal{E}_{0y} y de la diferencia de la fase $\Delta\phi$ por lo tanto, *estado de polarización de una onda electromagnética se puede definir como un vector normalizado*

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_x^2 + \mathcal{E}_y^2}} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x e^{i\phi_x} \\ \mathcal{E}_y e^{i\phi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x e^{i\phi_x} \\ \epsilon_y e^{i\phi_y} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

que pertenece también a un espacio complejo \mathbb{C}^2 . Además, el estado de polarización permanece invariante bajo el producto de fases y amplitudes globales, es decir

$$\Lambda e^{i\theta} \hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}. \quad (2.14)$$

Se cumple porque una amplitud global simplemente cambia el tamaño de la elipse pero mantiene las proporcional y la fase global desfase ambas componentes en la misma cantidad y

como el estado de polarización depende solamente de la diferencia de fases estas fases globales se restarán. Este vector se encuentra expresado en una base de estados de polarización lineal horizontal y vertical respectivamente, por

$$\hat{\mathbf{e}} = E_x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + E_y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Sin embargo, este vector se puede expresar en otras bases diferentes a los estados lineales debido a la naturaleza de su estructura matemática, pero esto lo discutiremos más adelante. Lo que vamos a hacer es mostrar que este objeto matemático en realidad tiene una estructura matemática conocida como espinor.

Como ya se mostró en la ecuación 2.12, el estado de polarización, en general, corresponde con una elipse que traza el vector campo eléctrico a medida que se propaga en todos los puntos de su frente de onda. Esta elipse, en general, la podemos describir con dos ángulos χ, α , conocidos como *ángulo de elipticidad* y *ángulo de orientación*, respectivamente como se ilustra en las figuras 2.1 y 2.2t. Podemos ver entonces que, matemáticamente, el ángulo de elipticidad responde a la siguiente ecuación

$$\tan\chi = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}, \quad (2.16)$$

y el ángulo de orientación α es el ángulo entre el eje x del sistema coordenado y el eje mayor de la elipse.

Por facilidad algebraica y de interpretación física de los estados de polarización, es útil expresar el estado de polarización $\hat{\mathbf{e}} = |\epsilon_i, \phi_i\rangle$ ya no en términos de las amplitudes y fases sino en términos de los ángulos característicos de la elipse de polarización $\hat{\mathbf{e}} = |\alpha, \chi\rangle$.

Para encontrar la relación matemática entre $|\epsilon_i, \phi_i\rangle$ y $|\alpha, \chi\rangle$ vamos a partir de un estado de polarización cuya elipse está alineada con respecto a los ejes principales y en sentido horario, como se muestra en la figura 2.1. Primero, notemos que para un estado de polarización elíptico como el que se representa ahí debe cumplirse que la amplitud en x sea mayor que la amplitud en y es decir $\epsilon_x > \epsilon_y$ y que su diferencia de fases es $\phi_y - \phi_x = \pi/2$. Podemos partir de un caso sencillo, el caso cuando $\mathbf{E}(t = 0) = E_y \hat{\mathbf{j}}$ para encontrar el valor de las fases ϕ_i , esto se cumple cuando $\phi_x = 0$ y $\phi_y = \pi/2$. Para las amplitudes, poner descomponer polarmente el vector de polarización en términos del ángulo de elipticidad χ , es decir $\epsilon_x = \cos\chi$ y $\epsilon_y = \sin\chi$. Así, podemos expresar el estado de polarización con una elipticidad χ y con un ángulo de orientación $\alpha = 0$ de la siguiente manera

$$\hat{\mathbf{e}} = |0, \chi\rangle = \begin{bmatrix} \cos\chi \\ i\sin\chi \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Como queremos encontrar la expresión para el estado de polarización para cualquier ángulo de orientación α dado, podemos hacer una transformación de coordenadas. En nuestro caso, una rotación del sistema de coordenadas como podemos ver en la figura 2.2, desde el álgebra podemos escribir esto como:

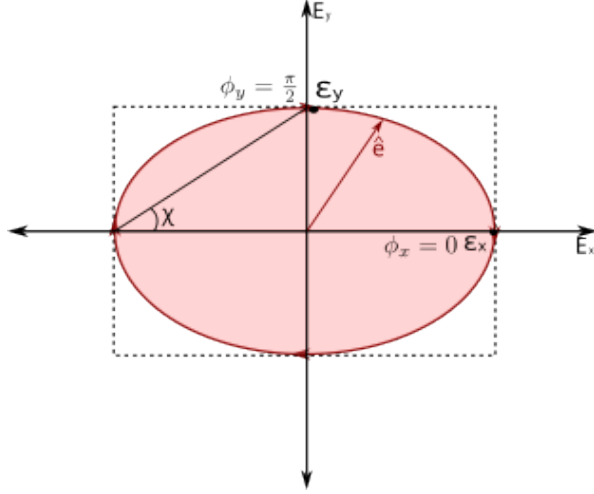


Figura 2.1: Elipse de polarización con un ángulo de elipticidad dado χ y la cual está alineada con un sistema de coordenadas (E_x, E_y) .

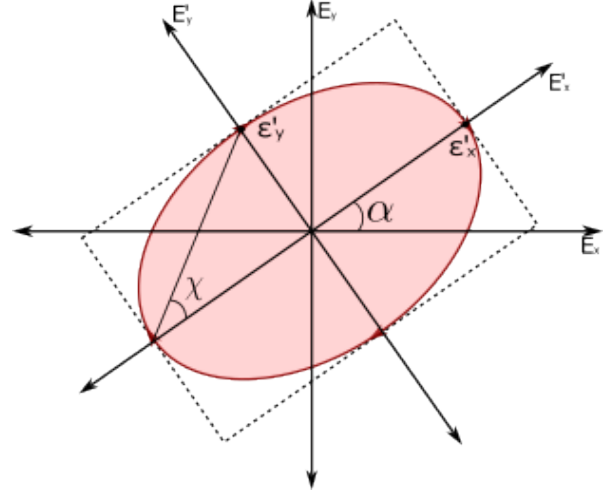


Figura 2.2: Elipse de polarización con elipticidad χ y un ángulo de orientación α .

$$\hat{\mathbf{e}} = \hat{R}^{-1}(\alpha)\hat{\mathbf{e}}', \quad (2.18)$$

donde \hat{R}^{-1} es la matriz de rotación del sistema de coordenadas primado al sistema de coordenadas donde la elipse de polarización está orientada un ángulo α . De esta manera, el estado de polarización, en general, se calcula de la siguiente forma

$$|\alpha, \chi\rangle = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} |0, \chi\rangle = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\chi - i\text{sen}\alpha\text{sen}\chi \\ \text{sen}\alpha\cos\chi + i\cos\alpha\text{sen}\chi \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

este es el estado de polarización en términos de los ángulos principales de la elipse para un sistema de coordenadas cartesiano (de estados de polarización lineales). Estos ángulos permiten visualizar geoméricamente los estados $|\alpha, \chi\rangle$ ya que se pueden ver como los asociados a un sistema de coordenadas esférico con un vector de radio unitario; esto porque se cumple que $\langle\alpha, \chi|\alpha, \chi\rangle = 1$.

2.1.1. Esfera de Poincaré

Históricamente, la esfera de Poincaré se construyó mediante proyecciones estereográficas. Cuando se elige una base de estados de polarización circular, se obtiene una representación en la que los polos corresponden a los estados circulares base, mientras que el ecuador contiene todos los estados de polarización lineal. En esta representación, la latitud de un punto sobre la esfera está relacionada con el ángulo de elipticidad mediante 2χ , y su azimut con el ángulo de orientación a través de 2α .

De este modo, cada estado de polarización $\hat{\mathbf{e}}$ puede asociarse de forma única con un vector $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$ de norma unitaria, ubicado sobre la superficie de la esfera, cuyas componentes están dadas por:

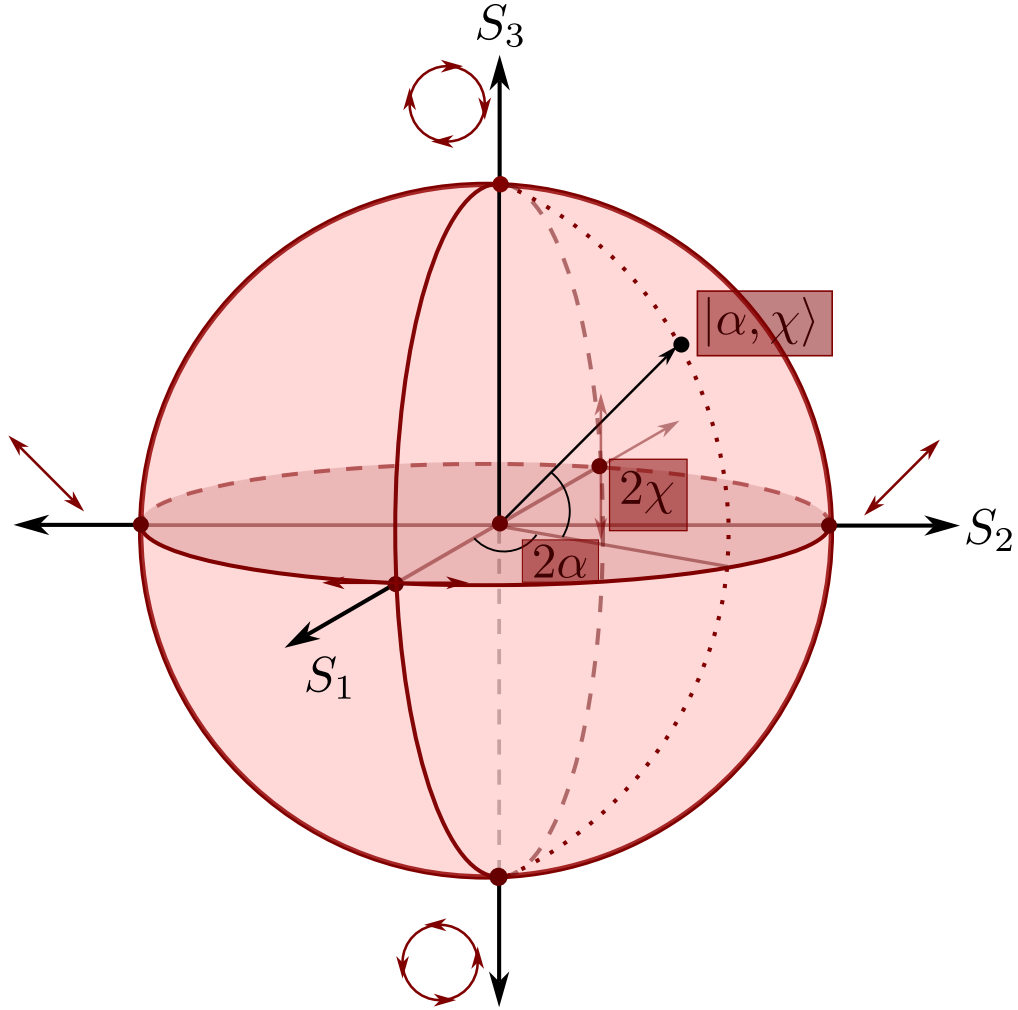


Figura 2.3: Esfera de Poincaré, es la proyección estereográfica de los parámetros de la elipse α, χ tomando como estados base los estados de polarización circular

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) \cos(2\chi) \\ \sin(2\alpha) \cos(2\chi) \\ \sin(2\chi) \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

y satisface la relación $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = s_0^2$. Estas cuatro cantidades s_i (para $i = 0, 1, 2, 3$) se denominan **parámetros de Stokes** y constituyen una herramienta fundamental para la descripción y el análisis de los estados de polarización y sus transformaciones. Una visualización de la esfera de Poincaré se presenta en la figura 2.3. Por convención, los ejes coordenados de esta representación se etiquetan como s_1 , s_2 y s_3 , correspondiendo s_3 al eje vertical que atraviesa los polos de la esfera.

2.2. Vectores y matrices de Jones

Como se estableció en la sección anterior, el estado de polarización $\hat{\mathbf{e}}$, definido en la ecuación 2.13, constituye un espinor conocido como **vector de Jones**. Este objeto matemático representa una elipse de polarización específica y, a su vez, se corresponde con un punto sobre la esfera de Poincaré. A continuación, examinaremos cómo las transformaciones lineales aplicadas a estos vectores modelan procesos físicos que afectan a los haces de luz durante su propagación en diversos medios, y cómo dichas transformaciones se visualizan geoméricamente en la esfera de Poincaré.

En primer lugar, definamos el producto interno entre vectores de Jones. Dado que pertenecen a un espacio \mathbb{C}^2 , el producto interno se define como:

$$\langle \hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}} \rangle = a_1 b_1^* + a_2 b_2^*. \quad (2.21)$$

Esta definición permite demostrar que dos puntos diametralmente opuestos (antipodales) en la esfera de Poincaré corresponden a estados de polarización ortogonales, es decir, cuyo producto interno es nulo. Consideremos un vector de Jones arbitrario expresado en la base de estados lineales:

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \chi - i \sin \alpha \sin \chi & \sin \alpha \cos \chi + i \cos \alpha \sin \chi \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

El estado diametralmente opuesto $\hat{\mathbf{a}}_-$ en la esfera de Poincaré se obtiene mediante las transformaciones $\alpha_- = \alpha$ y $\chi_- = -\pi/2$, resultando en:

$$\hat{\mathbf{a}}_- = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) - i \sin \alpha \sin \left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) & \sin \alpha \cos \left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) + i \cos \alpha \sin \left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

lo que significa que

$$\hat{\mathbf{a}}_- = \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \chi + i \sin \alpha \cos \chi \\ \sin \alpha \sin \chi - i \cos \alpha \cos \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia_2^* \\ -ia_1^* \end{pmatrix}.$$

Calculando el producto interno entre $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\mathbf{a}}_-$:

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_- = ia_1 a_2 - ia_2 a_1 = 0, \quad (2.23)$$

lo cual confirma que los estados son ortogonales. Así, todo estado de polarización $\hat{\mathbf{e}}$ y su antipodal en la esfera de Poincaré representado por $\hat{\mathbf{a}}_-$ forman una base ortonormal del espacio de estados de polarización (Baylis, Bonenfant, Derbyshire, y Huschilt, 1993; Gori y cols., 1997). Esta propiedad resulta fundamental para la descripción de transformaciones de polarización y su representación en el formalismo de Jones.

2.2.1. Cambio de base de estados de polarización

Como se ha establecido, cualquier par de estados de polarización ortogonales, correspondientes a puntos antipodales en la esfera de Poincaré, constituye una base ortonormal. Si bien hasta ahora hemos utilizado la base canónica de estados lineales horizontal y vertical, en muchas situaciones resulta conveniente e incluso necesario expresar los estados de polarización

en una base elíptica genérica $\hat{\mathbf{a}}_+$, $\hat{\mathbf{a}}_-$, caracterizados por los ángulos α y χ . Para realizar este cambio de base, debe encontrarse la matriz de transformación \hat{T}_\pm que relaciona la base de estados lineales con la base elíptica deseada. Esta matriz se construye a partir de los estados $|\alpha, \chi\rangle$ y $|\alpha, \chi - \pi/2\rangle$, que son mutuamente ortogonales, y adopta la forma:

$$\hat{T}_\pm = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\chi - i \sin\alpha \sin\chi & \cos\alpha \sin\chi + i \sin\alpha \cos\chi \\ \sin\alpha \cos\chi + i \cos\alpha \sin\chi & \sin\alpha \sin\chi - i \cos\alpha \cos\chi \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Una vez definida esta transformación, las componentes de un estado de polarización arbitrario en la nueva base elíptica se obtienen aplicando la matriz inversa \hat{T}_\pm^{-1} al vector expresado en la base lineal:

$$\begin{bmatrix} E_+ \\ E_- \end{bmatrix} = \hat{T}_\pm^{-1} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Este procedimiento permite adaptar la descripción del estado de polarización a simetrías particulares del sistema físico en estudio, por ejemplo una base de especial interés es la de estados circulares, los cuales se identifican con $\chi = \pm 45^\circ$, para este caso se tiene la siguiente matriz de transformación

$$\hat{T}_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

y procediendo de manera homonima a como se muestra en 2.25 se obtendrá la expresión del vector de Jones en una base de estados circulares:

$$\begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos\chi - \sin\chi)e^{i\alpha} \\ (\cos\chi + \sin\chi)e^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

2.2.2. Retardadores lineales

El estado de polarización puede modificarse mediante diversos mecanismos, siendo los más comunes la reflexión y la transmisión. No obstante, para una manipulación controlada de la polarización se emplean dispositivos conocidos como *medios birrefringentes*. Estos materiales introducen una diferencia de fase (o retardo) $\delta = \delta_1 - \delta_2$ entre las dos componentes ortonormales de la base de polarización, cualquiera que esta sea. La acción de un medio birrefringente sobre un estado de polarización inicial $\hat{\mathbf{e}}$ se modela mediante una transformación lineal sobre los vectores de Jones, específicamente como una rotación perteneciente al grupo especial unitario $SU(2)$ (Shen, Wang, Fu, Naidoo, y Forbes, 2020).

Un retardador o placa de onda es un material (cristal) birrefringente al que se le ha realizado un corte transversal con respecto a sus ejes ópticos principales. Usualmente es una lámina con un espesor l y una birrefringencia $\Delta n = n_1 - n_2$, que es la diferencia entre los dos índices de refracción del material. Así, un retardador cuyos ejes principales de polarización coinciden con la base de estados en la que se está expresando el estado de polarización $\hat{\mathbf{e}}$, tiene la siguiente forma diagonal

$$\hat{R}_\delta = \begin{bmatrix} e^{i\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

donde

$$\delta_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_i l, \quad (2.29)$$

y

$$\delta\delta_1 - \delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta n l, \quad (2.30)$$

es el retardo, siendo Δn la birrefringencia del material y l la longitud que recorre el haz de luz dentro del material. El retardo de la lámina birrefringente entonces depende de la longitud de onda en el vacío y el camino óptico $\Delta n l$ que recorre el haz de luz dentro del material. Una conclusión esencial e inmediata que podemos deducir de la forma del operador \hat{R}_δ es que, debido a que es diagonal, sus estados propios coinciden con los dos estados ortonormales elípticos arbitrarios $\hat{\mathbf{a}}_1$ y $\hat{\mathbf{a}}_2$ que conforman una base del estado de polarización. Por lo tanto, el operador diagonal \hat{R}_δ representa un **retardador con estados propios elípticos** que equivalen a la base de estados de polarización que se esté utilizando.

Aplicar la matriz \hat{R}_δ a un estado de polarización expresado en una base de estados circulares el efecto resultante será el de cambiar el ángulo de orientación $\alpha \rightarrow \alpha + \delta/2$ lo que equivale a una rotación de un ángulo δ al rededor del eje s_3 en la representación de la esfera de Poincaré. De esta misma forma, si aplicamos la matriz \hat{R}_δ a un estado de polarización expresado en una base de estados lineal horizontal y vertical, entonces la matriz tendrá el efecto de rotar el estado un ángulo δ al rededor del eje s_1 de la esfera de Poincaré. De esta manera observamos que las operaciones del grupo $SU(2)$ equivalen a operaciones del grupo $SO(3)$, es decir, operaciones de rotación sobre un vector de \mathbb{C}^2 equivalen a una rotación de un vector en \mathbb{R}^3 .

En general, el operador \hat{R}_δ puede sufrir una transformación de cambio de base. Esto se hace con el objetivo de encontrar la representación de un retardador con estados propios elípticos que son diferentes a la base escogida. Para hacer esto, operamos la matriz \hat{R}_δ con una matriz de cambio de base \hat{T} entre dos bases cualesquiera, de esta forma

$$\hat{R}_{\mathbf{r}_\pm, \delta} = \hat{T}^{-1} \hat{R}_\delta \hat{T}, \quad (2.31)$$

donde el subíndice \mathbf{r}_\pm representa los estados propios del retardador expresados en la otra base.

Para obtener una expresión explícita que ejemplifique el concepto de un retardador con estados propios elípticos, intentemos encontrar la expresión para el operador de un retardador con estados propios elípticos arbitrarios en la base de estados lineales horizontal y vertical. Para ello, se toma la matriz de transformación \hat{T}_\pm dada por la ecuación 2.24 y se realiza el cambio de base sobre el operador \hat{R}_δ , el cual lleva al siguiente resultado

$$\hat{R}_{\mathbf{r}, \delta} = \hat{T}_\pm^{-1} \hat{R}_\delta \hat{T}_\pm = \begin{bmatrix} \cos\delta/2 + i(\cos 2\alpha \cos 2\chi) \text{sen}\delta/2 & (i\cos 2\alpha \text{sen} 2\chi - \text{sen} 2\chi) \text{sen}\delta/2 \\ (i\cos 2\alpha \text{sen} 2\chi + \text{sen} 2\chi) \text{sen}\delta/2 & \cos\delta/2 - i(\cos 2\alpha \cos 2\chi) \text{sen}\delta/2 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

y utilizando la ecuación 2.20 podremos escribir la matriz $\hat{R}_{\mathbf{r},\delta}$ en términos de las proyecciones del estado propio \mathbf{r} del retardador en los ejes coordenados de la esfera de Poincaré, es decir, sus parámetros de Stokes asociados

$$\hat{R}_{\mathbf{r},\delta}\hat{R}_{\mathbf{r},\delta} = \hat{T}_{\pm}^{-1}\hat{R}_{\delta}\hat{T}_{\pm} = \begin{bmatrix} \cos\delta/2 + ir_1\text{sen}\delta/2 & (ir_2 - r_3)\text{sen}\delta/2 \\ (ir_2 + r_3)\text{sen}\delta/2 & \cos\delta/2 - ir_1\text{sen}\delta/2 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Esta matriz puede ser expandida en términos de unas matrices base, las matrices de Pauli, así

$$\hat{R}_{\mathbf{r},\delta} = \cos\delta/2 \hat{\sigma}_0 + i\text{sen}\delta/2 (r_1\hat{\sigma}_1 + r_2\hat{\sigma}_2 + r_3\hat{\sigma}_3) = \cos\delta/2 \sigma_0 + i\text{sen}\delta/2 \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.34)$$

donde las matrices $\hat{\sigma}_i$ están definidas como:

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Lo interesante, es que el operador $\hat{R}_{\mathbf{r},\delta}$ de la ecuación 2.34 se puede expresar de la siguiente forma (Tudor, 2008) $\hat{R}_{\mathbf{r},\delta} = e^{i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \frac{\delta}{2}}$, el cual es un resultado que evidencia que el formalismo de la polarización puede ser escrito en cuaterniones y vectores de Pauli. Estas son unas de las representaciones equivalentes del estado de polarización que son virtud de la estructura de álgebra geométrica que posee la polarización.

El efecto de un retardador elíptico $\hat{R}_{\mathbf{r},\delta}$ sobre un estado de polarización inicial $|\alpha, \chi\rangle$ se calcula algebraicamente de la siguiente manera:

$$|\alpha', \chi'\rangle = \hat{R}_{\mathbf{r},\delta} |\alpha, \chi\rangle, \quad (2.36)$$

y su representación en la esfera de Poincaré se puede observar en la figura 2.4. Aquí se ve como el efecto de un retardador sobre el estado de polarización se representa como un rotación con respecto de un eje en la esfera de Poincaré. Este eje pasa por los dos estados de polarización diametralmente opuestos que coinciden con los estados propios del operador $\hat{R}_{\mathbf{r},\delta}$ del retardador.

2.2.3. Rotación de un retardador y sistemas en cascada

A nivel experimental, las rotaciones físicas de un retardador alrededor del eje de propagación se traducen en una transformación de coordenadas del operador, la cual se expresa mediante la siguiente relación:

$$\hat{R}_{\mathbf{r},\delta}(\theta) = \hat{R}^{-1}(\theta)\hat{R}_{\mathbf{r},\delta}\hat{R}(\theta), \quad (2.37)$$

donde la matriz de rotación de coordenadas $\hat{R}(\theta)$ está dada por:

$$\hat{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

De forma general, dentro de este formalismo, para determinar la transformación del estado de polarización de un haz de luz que atraviesa N láminas birrefringentes rotantes, es necesario

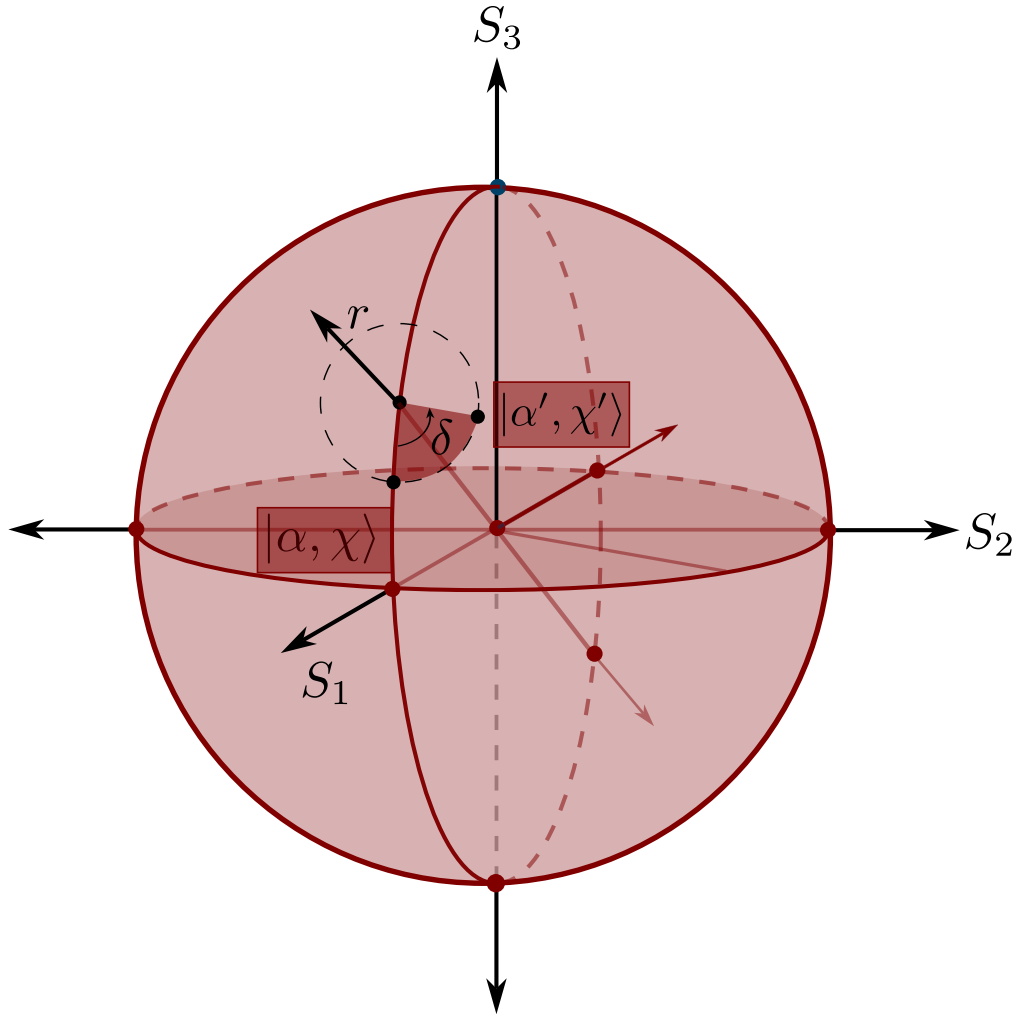


Figura 2.4: Representación del efecto de un retardador con estados propios elípticos \mathbf{r}_{\pm} y retardancia δ en la esfera de Poincaré. Es un rotación de un ángulo δ alrededor de un eje \mathbf{r} que pasa por los dos estados propios de polarización \mathbf{r}_{\pm} del retardador.

aplicar la composición de los operadores correspondientes a cada elemento. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$|\alpha', \chi'\rangle = \prod_{i=1}^N \hat{R}_{\mathbf{r}_i, \delta_i}(\theta_i) |\alpha, \chi\rangle. \quad (2.39)$$

Este tipo de configuraciones, compuestas por múltiples retardadores en serie, se denominan sistemas en cascada o placas de onda compuestas. Estos sistemas serán de especial relevancia en la realización de la metodología del presente trabajo.

2.2.4. Matriz de polarización

Como se ha visto, resulta muy intuitivo y de utilizad representar los estados de polarización y sus transformaciones en la esfera de Poincaré. Por lo tanto, es necesario encontrar una forma de, partiendo de los vectores de Jones, extraer los parámetros de Stokes de este.

Para lograr esto, como ya vimos en la ecuación 2.34, podemos utilizar las matrices de Pauli como la conexión entre los vectores de Jones y las coordenadas de la esfera de Poincaré. Para lograr esto, debemos elevar a estatus de matriz el vector de Jones. Esto significa que se pasará de una representación de los estados de polarización como un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (espinor de Pauli o vector de Jones) al de un tensor de tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ conocido como un *vector de Pauli*. Este vector de Pauli es el producto punto entre el vector de \mathbb{R}^3 que se construye con los parámetros de Stokes y el vector σ que se construye con las matrices de Pauli (?). La matriz de polarización \mathbf{J} se construye mediante el producto tensorial del vector de Jones consigo mismo [Baylis y cols. \(1993\)](#), así

$$\mathbf{J} = |\alpha, \chi\rangle \langle \alpha, \chi| = [E_1] [E_1^* E_2^*] = \begin{bmatrix} E_1 E_1^* & E_1 E_2^* \\ E_2 E_1^* & E_2 E_2^* \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

esta matriz también guarda toda la información relacionada con la polarización de la radiación electromagnética, pero lo más importante quizás es que la polarización ahora está expresada en términos de intensidades lo que permite la medición experimental de los estados de polarización en un laboratorio. En particular, se puede extraer la intensidad total, que es la traza de la matriz de polarización

$$I = \text{tr}\{\mathbf{J}\} = E_1 E_1^* + E_2 E_2^*. \quad (2.41)$$

Ahora, esta matriz se puede entender como un vector llamado **vector de Pauli**, eso implica que tiene como base las matrices de Pauli. Entonces, si se intenta expandir la matriz \mathbf{J} en las matrices de pauli obtenemos lo siguiente:

$$\mathbf{J} = \sum_{i=0}^3 \frac{1}{2} s_i \hat{\sigma}_i \quad (2.42)$$

y para determinar los coeficientes de expansión si, los cuales coinciden con los parámetros de Stokes, se usa la siguiente expresión $s_i = \text{Tr}\{\hat{\sigma}_i \mathbf{J}\}$, esto nos indica que la relación entre los parámetros de Stokes y los elementos de la matriz de polarización es la siguiente

$$s_0 = J_{11} + J_{22}, \quad (2.43)$$

$$s_1 = J_{11} - J_{22}, \quad (2.44)$$

$$s_2 = J_{12} + J_{21}, \quad (2.45)$$

$$s_3 = i(J_{21} - J_{12}). \quad (2.46)$$

De esta manera, podemos encontrar el vector conformado por los parámetros de Stokes, y por lo tanto, el punto sobre la esfera de Poincaré asociado a un estado de polarización en la representación de los vectores de Jones.

La matriz de polarización también puede ser construida por un vector de Jones que es operado por una transformación lineal como las que hemos estudiado. Tomemos un vector de Jones \hat{e} el cual mediante una transformación lineal arbitraria \hat{T} se transforma en el vector

$\hat{\mathbf{e}}' = \hat{T}\hat{\mathbf{e}}$ y haciendo el producto tensorial consigo misma, tendremos que la nueva matriz de polarización \mathbf{J}' es

$$\mathbf{J}' = \hat{\mathbf{e}}' \otimes \hat{\mathbf{e}}' = \hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}}'^{\dagger} = (\hat{T}\hat{\mathbf{e}}) (\hat{T}\hat{\mathbf{e}})^{\dagger}, \quad (2.47)$$

operando tenemos

$$\mathbf{J}' = \hat{T} (\hat{\mathbf{e}} \otimes \hat{\mathbf{e}}) \hat{T}^{\dagger} = \hat{T}\mathbf{J}\hat{T}^{\dagger}, \quad (2.48)$$

notamos que $\hat{\mathbf{e}} \otimes \hat{\mathbf{e}}$ es la matriz de polarización \mathbf{J} asociada con el vector $\hat{\mathbf{e}}$ que no ha sufrido la transformación. De esta manera, las matrices de Polarización o los vectores de Pauli son una representación que permite representar los estados de polarización y también sus transformaciones.

2.3. Transformaciones sobre estados de polarización dinámicos

En esta sección dejaremos el formalismo para estados de polarización estáticos y se dará el primer paso para aportar a una de las problemáticas presentadas en la introducción del presente trabajo. Hasta ahora hemos tratado con estados de polarización estacionarios, es decir, que no dependen del tiempo debido a que toda la teoría se ha construido con base e ondas electromagnéticas monocromáticas o armónicas y se ignoró la solución más general de la función de onda; la superposición lineal de ondas armónicas. En esta sección se explorará la descripción del estado de polarización de este tipo de ondas mediante un vector de Jones dependiente del tiempo. Se estudiarán sus transformaciones y su representación en la esfera de Poincaré.

La solución general de la función de onda para el campo eléctrico se puede expresar como una combinación lineal de ondas planas monocromáticas $\mathbb{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{E}_{0i} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)}$, esta representa una onda policromática con frente de onda arbitrario. Nos concentraremos en la parte temporal que es la de interés en esta sección, además de imponer la condición de frente de onda plano, es decir

$$\mathbb{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{E}_{0i} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)}. \quad (2.49)$$

Y si de la misma manera buscamos una ecuación geométrica para las amplitudes y fases del campo eléctrico, es decir, de la polarización entendida como el lugar geométrico en donde vive el vector de campo eléctrico dinámico obtendremos

$$\frac{|E_x|^2}{\mathcal{E}_x^2(t)} + \frac{|E_y|^2}{\mathcal{E}_y^2(t)} - 2 \frac{\text{Real}\{E_x E_y^*\}}{\mathcal{E}_x(t)\mathcal{E}_y(t)} \cos \Delta\phi(t) = \text{sen}^2 \Delta\phi(t). \quad (2.50)$$

Observamos una ecuación análoga a la ecuación 2.12 pero con ciertas diferencial, y es que debido a la dependencia temporal de las amplitudes \mathcal{E}_i y la diferencia de fase $\nabla\phi(t)$ implica que las ondas policromáticas tienen un estado de polarización que cambia en el tiempo, esto se puede interpretar como que existe una elipse de polarización para cada tiempo t y en un tiempo $t + \delta t$ evoluciona a otra elipse siguiente la ecuación 2.50. A este cambio del estado

de polarización que sufre una fuente de luz policromática con frente de onda plano se le denomina **dinámica de la polarización** de una fuente de luz.

De esta manera, podemos imponer todo el formalismo de las secciones anteriores para el estudio de la polarización para luz policromática y definir un estado de dinámico $\hat{\mathbf{e}}(t)$ de la siguiente manera

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_x^2(t) + \mathcal{E}_y^2(t)}} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ \mathcal{E}_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ \epsilon_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

También, se puede expresar el estado de polarización en la representación de los ángulos característicos de la elipse en una base arbitraria. Por ejemplo, en la base circular así:

$$|\alpha(t), \chi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} [\cos\chi(t) - \text{sen}\chi(t)] e^{i\alpha(t)} \\ [\cos\chi(t) + \text{sen}\chi(t)] e^{-i\alpha(t)} \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Equivalentemente, se representa este estado de polarización sobre la esfera de Poincaré como un vector de Stokes dinámico que describe trayectorias sobre la esfera. Los estados de polarización que presentan una dinámica temporal se denominan como estados **parcialmente polarizados**.

2.3.1. Efecto de un retardador lineal sobre un estado de polarización dinámico

Los estados de polarización dinámicos pueden describirse mediante el formalismo de los vectores de Jones. Para abordar el problema con generalidad, consideremos el operador \hat{R}_δ de un retardador elíptico expresado en la base de sus estados propios, y apliquémoslo sobre un estado de polarización dinámico escrito en la misma base:

$$\hat{R}_\delta \hat{\mathbf{e}}(t) = \begin{bmatrix} E_1(t)e^{i\delta} \\ E_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Algebraicamente, el resultado es análogo al caso estático; sin embargo, la diferencia fundamental radica en que las componentes $E_i(t)$ ahora son funciones no armónicas del tiempo. Por lo tanto, la multiplicación por el factor $e^{i\delta}$ no introduce directamente un desfase constante como en el caso de luz completamente coherente. Para comprender el efecto de esta operación, es crucial recordar que, incluso en el caso policromático, el campo eléctrico puede representarse como una señal analítica, siempre que se consideren únicamente frecuencias positivas, lo cual asegura la existencia de su transformada de Fourier (Goodman, 2015). Expresando el producto en el dominio de la frecuencia:

$$e^{i\delta} E_i(t) d\nu = e^{i\delta} \int E_i(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = \int E_i(\nu) e^{i2\pi\nu(t + \frac{\Delta n l}{c})} d\nu, \quad (2.54)$$

donde se ha introducido la relación $\delta = 2\pi\nu\tau$, con $\tau = \Delta n l/c$, bajo la suposición de que el espectro es estrecho, hipótesis razonable en el rango del espectro visible. La expresión final

en la ecuación 2.54 corresponde a la transformada de Fourier de $E_i(\nu)$ evaluada en un tiempo desplazado $t + \tau$, es decir:

$$\int E_i(\nu) e^{i2\pi\nu(t + \frac{\Delta nl}{c})} d\nu = E_i\left(t + \frac{\Delta nl}{c}\right). \quad (2.55)$$

Por lo tanto, el factor $e^{i2\pi\nu\tau}$ actúa como un operador de desplazamiento

$$e^{i2\pi\nu\tau} E_i(t) = E_i(t + \tau), \quad (2.56)$$

donde $\tau = \frac{\Delta nl}{c}$ siendo $\Delta n = n_1 - n_2$ la birrefringencia del material, es la diferencia de tiempo que tarda la componente de la onda electromagnética E_1 en propagarse por una lámina retardadora lineal de grosor l e índice de refracción n_1 con respecto a la componente E_2 que se propaga con un índice de refracción n_2 . De esta forma, la ecuación 2.56 muestra que **el efecto de un operador de fase $e^{i\delta}$ sobre una señal analítica, es el de realizar una traslación temporal de dicha señal**. Resultado de gran importancia para abordar los problemas centrales del presente trabajo.

Usando el resultado de la ecuación 2.56 se puede expresar la transformación de un estado de polarización dinámico o parcialmente polarizado a través de un retardador

$$\hat{\mathbf{e}}'(t) = \hat{R}_\delta \begin{bmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1(t + \tau) \\ E_2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Donde se observa que el efecto de un retardador \hat{R}_δ sobre un estado de polarización dinámico es una traslación temporal entre las componentes del campo eléctrico. A partir de esta regla de transformación para los vectores de Jones dinámicos se pueden encontrar las equivalencias en las demás representaciones como en las matrices de polarización, el formalismo de Stokes-Mueller y en los cuaterniones.

2.3.2. Acción de un retardador en una matriz de polarización dinámica y en un vector de Stokes dinámico

Para las matrices de polarización, aplicamos la regla de transformación establecida en la ecuación 2.48, la cual generaliza el efecto de un elemento óptico sobre la representación matricial del estado de polarización. Así, la operación correspondiente se expresa como:

$$\mathbf{J}'(t) = \hat{R}_\delta \begin{bmatrix} E_1(t)E_1^*(t) & E_1(t)E_2^*(t) \\ E_2(t)E_1^*(t) & E_1(t)E_2^*(t) \end{bmatrix} \hat{R}_\delta^\dagger = \begin{bmatrix} E_1(t)E_1^*(t) & E_1(t)E_2^*(t)e^{i\delta} \\ E_2(t)E_1^*(t)e^{-i\delta} & E_2(t)E_2^*(t) \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Ahora utilizando la ecuación del operador de traslación temporal 2.56 encontramos la regla de transformación de un retardador para la matriz de polarización dinámica

$$\mathbf{J}'(t) = \hat{R}_\delta \mathbf{J} \hat{R}_\delta^\dagger = \begin{bmatrix} E_1(t)E_1^*(t) & E_1(t)E_2^*(t + \tau) \\ E_2(t)E_1^*(t - \tau) & E_2(t)E_2^*(t) \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

A partir de esta transformación, podemos obtener los parámetros de Stokes dinámicos utilizando la relación entre la matriz de coherencia y las matrices de Pauli y, por lo tanto, obtener así la representación de los estados dinámicos de polarización sobre la esfera de Poincaré.

Este procedimiento también se puede realizar en el formalismo de Stokes-Mueller. Para ello vamos a usar la matriz de Mueller de un retardador lineal.

$$\mathbf{S}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) & \frac{1}{2i}(e^{i\delta} - e^{-i\delta}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{2i}(e^{-i\delta} - e^{i\delta}) & \frac{1}{2}(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0(t) \\ s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Resolviendo el producto tendremos

$$\mathbf{S}'(t) = \begin{bmatrix} s_0(t) \\ s_1(t) \\ \frac{s_2(t)}{2}(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) + \frac{s_3(t)}{2i}(e^{i\delta} - e^{-i\delta}) \\ \frac{s_3(t)}{2}(e^{i\delta} + e^{-i\delta}) - \frac{s_2(t)}{2i}(e^{i\delta} - e^{-i\delta}) \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Para encontrar el efecto de los operadores de fase sobre los parámetros de Stokes dinámicos, utilizaremos la relación entre estos y los elementos de la matriz de Polarización

$$s_0(t) = J_{11}(t) + J_{22}(t) = E_1(t)E_1^*(t) + E_2(t)E_2^*(t) \quad (2.62)$$

$$s_1(t) = J_{11}(t) - J_{22}(t) = E_1(t)E_1^*(t) - E_2(t)E_2^*(t) \quad (2.63)$$

$$s_2(t) = J_{12}(t) + J_{21}(t) = E_1(t)E_2^*(t) + E_2(t)E_1^*(t) \quad (2.64)$$

$$s_3(t) = i[J_{12}(t) - J_{21}(t)] = i[E_1(t)E_2^*(t) - E_2(t)E_1^*(t)]. \quad (2.65)$$

En donde se obtiene el vector de Stokes dinámico transformado

$$\mathbf{S}'(t) = \hat{R}_\delta \begin{bmatrix} s_0(t) \\ s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0(t) \\ s_1(t) \\ E_1(t)E_2^*(t + \tau) + E_2(t)E_1^*(t - \tau) \\ i[E_1(t)E_2^*(t + \tau) - E_2(t)E_1^*(t - \tau)] \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Este formalismo de estados de polarización dinámicos será utilizado para analizar fuentes reales, las cuales emiten estados parcialmente polarizados cuya evolución temporal constituye un proceso estocástico. La transformación de estos estados a través de elementos ópticos como retardadores genera fenómenos de despolarización en la luz emitida por dichas fuentes. Mediante la aplicación de la teoría de coherencia al formalismo de estados de polarización dinámicos, será posible estudiar cuantitativamente los procesos de despolarización utilizando tanto el enfoque de matrices de polarización y vectores de Pauli, como el formalismo de Stokes-Mueller a través de las matrices de Mueller equivalentes.

2.4. Conclusiones

El formalismo algebraico para describir el estado de polarización 2D de haces de luz es completamente aplicable a estados de polarización dinámicos. En general, las fuentes de luz policromática emiten radiación asociada a un estado de polarización dinámico, que puede interpretarse como una elipse de polarización cuyos parámetros de amplitud, orientación

y elipticidad varían temporalmente. Como consecuencia, estos estados dinámicos pueden representarse mediante un vector de Jones cuyas componentes son funciones del tiempo, lo que a su vez permite su descripción mediante una matriz de polarización dinámica y un vector de Stokes dinámico.

El principal desafío al utilizar el formalismo de Jones para estados dinámicos consistió en determinar el efecto de operadores lineales, previamente definidos para el caso estático. En particular, se estudió el comportamiento de los retardadores, descritos por el operador \hat{R}_δ , sobre dichos estados. Se demostró que la fase introducida por estos elementos en las componentes del campo eléctrico se traduce en una traslación temporal de las funciones que describen su evolución, en una cantidad equivalente al retardo asociado a la placa de onda. De este modo, se estableció un método algebraico para caracterizar las transformaciones de haces de luz con estados de polarización dinámicos al propagarse a través de múltiples láminas retardadoras, las cuales, en general, poseen estados propios elípticos.

En este capítulo se evidenciaron las conexiones entre los distintos formalismos algebraicos utilizados para describir la polarización de la luz. Se demostró su equivalencia en el caso de luz totalmente polarizada, gracias a la existencia de un morfismo que garantiza la representación de la misma elipse de polarización. Asimismo, se extendió esta equivalencia al caso de fuentes de luz con estados de polarización dinámicos o parcialmente polarizados. Por lo tanto, la metodología desarrollada para adaptar los vectores de Jones, las matrices de polarización y los parámetros de Stokes, junto con sus operadores, a la descripción de estados dinámicos, puede aplicarse de manera análoga a los vectores de Pauli y los cuaterniones, aprovechando así sus ventajas algebraicas en el tratamiento de fuentes de luz policromáticas.

Capítulo 3

Descripción estadística de la polarización

En las secciones anteriores se propuso la metodología para describir la luz parcialmente polarizada y sus transformaciones al propagarse a través de medios birrefringentes. Sin embargo, este enfoque resulta adecuado únicamente para fuentes de luz cuya dinámica de polarización es determinista; es decir, cuando las funciones temporales que describen sus parámetros de Stokes o las componentes del campo eléctrico son conocidas de manera explícita. Para extender la aplicabilidad del modelo a fuentes de luz incoherentes, cuya dinámica de polarización es de naturaleza indeterminista y, por tanto, está descrita por señales aleatorias (Khrennikov, 2008), es necesario incorporar la teoría de la coherencia y el análisis de procesos estocásticos. La adaptación metodológica consiste en aplicar dichas herramientas al marco de polarización dinámica desarrollado previamente, lo que permitirá caracterizar de manera rigurosa el comportamiento estadístico de la luz parcialmente polarizada en situaciones realistas.

Para construir la matriz de polarización de un campo eléctrico aleatorio se debe determinar el vector de Jones asociado en una base de estados de polarización arbitraria

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

donde $E_1(t)$ y $E_2(t)$ son señales aleatorias, lo que implica directamente, que el vector de Jones $\hat{\mathbf{e}}$ es un vector unitario con componentes aleatorias. En principio, para cada instante de tiempo el estado de polarización corresponde con una elipse diferente. La forma en cómo cambia esta elipse en función del tiempo depende de la aleatoriedad y naturaleza de la fuente de luz que emitió el campo eléctrico, es decir, depende de la función de densidad de probabilidad que caracteriza las fluctuaciones aleatorias del campo eléctrico. En el presente trabajo no me adentraré en los detalles concernientes a esto, me concentraré en los observables que se pueden obtener de este vector de Jones aleatorios.

La matriz de polarización asociada al vector de Jones Aleatorio es una matriz o vector de Pauli:

$$\mathbf{J}(t, t') = \begin{pmatrix} E_1(t) E_1^*(t') & E_1(t) E_2^*(t') \\ E_2(t) E_1^*(t') & E_2(t) E_2^*(t') \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Cada uno de los elementos de la matriz 3.2 son funciones aleatorias. Por razones físicas sujetas a la capacidad de medición de la intensidad de luz en un laboratorio de óptica, se ha de asumir que estas funciones aleatorias son ergódicas, es decir, que su promedio de ensamble se asume igual a su promedio temporal. Adicionalmente, cuando las fuentes de luz aleatorias se encienden y emiten radiación durante una cierta cantidad de tiempo, la fuente de luz y la radiación emitida alcanzan un estado termodinámico de equilibrio. Esto se traduce en que las funciones aleatorias que describen al campo eléctrico de dicha radiación son, por lo menos, estadísticamente estacionarias en el sentido débil (sus dos primeros momentos estadísticos son independientes del tiempo). De esta manera, la matriz de polarización $\mathbf{J}(t)$ representa un estado de polarización instantáneo aleatorio que cumple con la hipótesis de ergodicidad y es débilmente estacionario.

3.1. Grado de polarización de primer orden

De los observables más importantes, al estudiar la estadística de una fuente o cualquier fenómeno aleatorio, es su valor promedio, este se calcula a través del promedio de ensamble de la señal. Pero, como hemos asumido una hipótesis ergódica, el promedio de ensamble coincidirá con el promedio temporal (Wolf y cols., 2007), es decir

$$E\{\mathbf{J}(t)\} = \langle \mathbf{J}(t) \rangle = \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \langle E_1(t)E_1^*(t') \rangle & \langle E_1(t)E_2^*(t') \rangle \\ \langle E_2(t)E_1^*(t') \rangle & \langle E_2(t)E_2^*(t') \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

donde las componentes $\langle E_i(t)E_j^*(t') \rangle$ de la matriz $\langle \mathbf{J}(t) \rangle$ son las funciones de correlación de segundo orden para las componentes cruzadas del campo eléctrico y, por lo tanto, esta matriz contiene toda la información estadística de segundo orden asociada con la dinámica de la polarización de una fuente de luz aleatoria. Por facilidad del lenguaje llamaremos a esta matriz como matriz de polarización promedio o **matriz de coherencia** de segundo orden $\mathbf{\Gamma}$. Este nombre no es en vano, ya que cada elemento de la matriz ahora son funciones de correlación asociadas al producto de las señales $E_i(t)$ y $E_j(t)$, es decir, campos eléctricos al cuadrado.

Esta matriz de coherencia de segundo orden $\mathbf{\Gamma}$ puede ser expresada de la siguiente manera (Wolf y cols., 2007):

$$\Gamma_{ij} = \langle E_i(t)E_j^*(t') \rangle = \langle E_i \rangle \langle E_j \rangle^* \gamma(t - t'), \quad (3.4)$$

donde $\langle E_i \rangle$ es la amplitud promediada de cada componente del campo y $\gamma(t - t')$ es el grado complejo de coherencia de segundo orden, el cual satisface $0 < |\gamma(t - t')| \leq 1$. En el caso de que el grado complejo de coherencia sea igual a 1 y, por tanto, la función de correlación es igual al producto de los promedios, o sea

$$\langle E_i E_j^*(t') \rangle = \langle E_i \rangle \langle E_j^* \rangle$$

implica un estado polarizado, si esta tiene el valor de 0 el estado es completamente no polarizado, y cualquier valor intermedio implica un estado parcialmente polarizado.

$$\langle E_i E_j^*(t') \rangle = 0$$

Ahora, es necesario tratar con una cantidad asociada con la matriz de coherencia que nos permita hablar y distinguir de estados polarizados y estados parcialmente polarizados. Para ello, vamos a revisar que el estado de polarización medio $\langle \mathbf{J}(t) \rangle = \mathbf{\Gamma}$ tiene unos parámetros de Stokes promedio asociados, es decir:

$$\langle s_i(t) \rangle = Tr \{ \sigma_i \mathbf{\Gamma} \}, \quad (3.5)$$

los cuales están asociados con un punto dentro de la esfera de Poincaré. Esto se debe a que el promedio de un vector unitario aleatorio da como resultado, desde la estadística direccional, un vector con módulo menor que la unidad cuya dirección corresponde con la dirección media del vector aleatorio (Jammalamadaka, 2004; Mardia y Jupp, 2009). El módulo del vector de Stokes medio viene dado por la siguiente expresión

$$|\langle \mathbf{s}(t) \rangle| = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 \langle s_i(t) \rangle^2}{\langle s_0(t) \rangle^2}} \leq 1, \quad (3.6)$$

donde alcanza el valor de 1 cuando el vector de Stokes aleatorio $\mathbf{s}(t)$ mantiene la misma dirección a lo largo del tiempo; esto indica un estado totalmente polarizado. Por otro lado, es menor que la unidad cuando su dirección varía; esto es un estado parcialmente polarizado. De esta manera, el valor $|\langle \mathbf{S}(t) \rangle|$ es una medida estadística que indica el grado de polarización de un haz de luz.

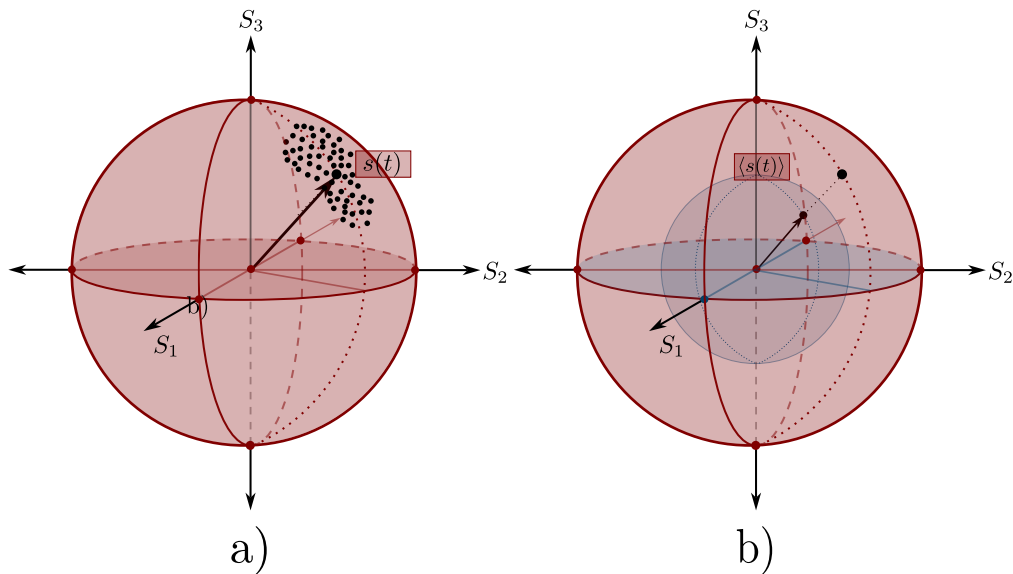


Figura 3.1: a) Representación de un estado de polarización proveniente de una fuente incoherente. Sus parámetros de Stokes son funciones aleatorias del tiempo y describen una trayectoria arbitraria sobre la esfera de Poincaré. b) Representación del estado de polarización promedio. Este es el primer momento asociado con las señales aleatorias que conforman el estado de polarización de una fuente de luz incoherente.

El módulo del vector de Stokes promedio también puede ser expresado en términos de los elementos de la matriz de polarización. Emil Wolf encontró una expresión para el grado de

polarización en términos de la matriz de coherencia de segundo orden, en donde se obtiene (Wolf y cols., 2007)

$$|\langle \mathbf{s}(t) \rangle| = P = \sqrt{1 - \frac{4\det\{\Gamma\}}{\text{Tr}\{\Gamma\}^2}}. \quad (3.7)$$

El módulo del vector de Stokes promedio también puede ser expresado en términos de los elementos de matriz de polarización. Para ello se toman las expresiones dadas en 2.43 y se introducen en la ecuación 3.7. El objetivo de esta manipulación matemática es encontrar una expresión del grado de polarización en términos de la matriz de coherencia de segundo orden; esta fue previamente encontrada por E. Wolf (Wolf y cols., 2007). Haciendo dicho procedimiento se obtiene:

$$|s(t)| = \sqrt{\frac{\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{11}\Gamma_{22} + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 + 2\Gamma_{12}\Gamma_{21} - \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2 + 2\Gamma_{12}\Gamma_{21}}{\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}.$$

Completando cuadrados y manipulando el numerados obtenemos la siguiente expresión

$$|s(t)| = \sqrt{1 + \frac{-4\Gamma_{11}\Gamma_{22} + 4\Gamma_{12}\Gamma_{21}}{\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{11}\Gamma_{22}}}.$$

Donde el numerador de la expresión anterior coincide con el determinante de Γ y el denominador con $\text{Tr}\{\Gamma\}^2$ y así se obtiene una expresión para el grado de polarización en función de la matriz de coherencia Γ

$$|s(t)| = P = \sqrt{1 - \frac{4\det\{\Gamma\}}{\text{Tr}\{\Gamma\}^2}}. \quad (3.8)$$

Nótese que el grado de polarización P es invariante ante transformaciones de cambio de base sobre la matriz de coherencia, ya que está dado en términos de su determinante y su traza (Wolf, 1959). En la mayor parte de la literatura se da por sentado que el formalismo de Jones, o el de las matrices de polarización, no son adecuados para describir la despolarización de la luz o, en general, las transformaciones de luz parcialmente polarizada. Sin embargo, basándose en los resultados de la sección anterior sobre las transformaciones de estados de polarización dinámicos, se propondrá un método para describir las transformaciones de luz parcialmente coherente y parcialmente polarizada usando el formalismo de las matrices de polarización y la matriz de coherencia.

3.2. Transformaciones de polarización de haces incoherentes

Si un estado de polarización inicial arbitrario $\mathbf{J}(t)$ asociado con un campo eléctrico incoherente se propaga a través de múltiples elementos ópticos y sufre varias transformaciones en su estado de polarización que se puede expresar como una matriz \hat{T}_i , la matriz de coherencia transformada $\langle \mathbf{J}'(t) \rangle$ del estado de polarización final está dado por

$$\mathbf{\Gamma}' = \langle \mathbf{J}'(t) \rangle = \left\langle \prod_{i=N}^1 \hat{T}_i \mathbf{J}(t) \prod_{i=1}^N \hat{T}_i^\dagger \right\rangle. \quad (3.9)$$

A partir de esta matriz de coherencia se pueden extraer los parámetros de Stokes promedio y visualizar en la representación de la esfera de Poincaré el cambio del estado de polarización de una fuente incoherente y el cambio en su grado de polarización. Veamos ahora un caso particular, por ejemplo, queremos calcular la transformación de la matriz de coherencia bajo la influencia de un retardador con un operador \hat{R}_δ tendremos:

$$\mathbf{\Gamma}' = \langle \hat{R}_\delta \mathbf{J} \hat{R}_\delta^\dagger \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} E_1(t)E_1^*(t') & E_1(t)E_2^*(t' + \tau) \\ E_2(t)E_1^*(t' - \tau) & E_2(t)E_2^*(t') \end{bmatrix} \right\rangle, \quad (3.10)$$

Cuando se efectúa el promedio temporal de cada de las componentes de la matriz $\mathbf{J}'(t)$ se obtienen las funciones de coherencia de segundo orden pero ahora evaluadas en el retardo temporal que haya sufrido cada elemento de la matriz inicial, de una manera mas compacta podemos escribir

$$\Gamma'_{ij} = \langle E_i(t) \overline{E_j(t' + \epsilon_{ijk}\tau)} \rangle = \langle E_i \overline{E_j} \rangle \gamma(t - t' + \epsilon_{ijk}\tau). \quad (3.11)$$

Notamos entonces que para este caso $\langle E_i \rangle \langle E_j \rangle \gamma(t - t') = \Gamma_{ij}(t - t')$ son las amplitudes de las componentes de la matriz de coherencia inicial $\mathbf{\Gamma} = \langle \mathbf{J}(t) \rangle$. Considerando esto podemos escribir la transformación como

$$\Gamma'_{ij} = \Gamma_{ij}(t - t') e^{i\epsilon_{ijk}\delta} = \Gamma_{ij}(t - t' + \epsilon_{ijk}\tau). \quad (3.12)$$

Finalmente podemos decir que la regla de transformación dada por la ecuación 3.9, es semejante a la siguiente transformación

$$\mathbf{\Gamma}' = \prod_i \hat{T}_i \mathbf{\Gamma}(t - t') \prod_i \hat{T}_i^\dagger. \quad (3.13)$$

Gracias a la forma en la que opera sobre la matriz de coherencia, la transformación dada por los operadores lineales $\prod_i \hat{T}_i$ altera el grado de polarización, es por esta razón que utilizamos esta metodología para estudiar la despolarización.

3.3. Despolarización

Una fuente de luz temporalmente incoherente emite radiación cuya polarización fluctúa aleatoriamente en el tiempo, lo que se describe como un estado de polarización parcial. A pesar de esta naturaleza estocástica, es posible imponer un estado de polarización definido a la luz emitida mediante un polarizador lineal. Estos dispositivos, comúnmente fabricados con materiales dicroicos para el espectro visible, operan absorbiendo selectivamente una de las componentes vectoriales ortogonales del campo eléctrico y transmitiendo la componente perpendicular. La eficiencia de este proceso se cuantifica mediante la relación de extinción, que para películas dicroicas alcanza valores típicos de 1000 : 1, mientras que para polarizadores cristalinos de alta calidad, como los de tipo Glan-Thompson, puede llegar hasta 100000 : 1. Considerando incluso la relación de extinción más modesta, la luz emergente del polarizador

puede considerarse, con una excelente aproximación, como un campo linealmente polarizado. Esto se traduce en un grado de polarización (P) de primer orden, P , prácticamente unitario $P = 0,999 \approx 1$. Es crucial entender, sin embargo, que aunque el estado de polarización esté casi completamente definido, como un estado lineal, no significa que el haz haya perdido su aleatoriedad. Las fluctuaciones estocásticas en la amplitud y fase del campo eléctrico, originadas en los procesos de emisión de la fuente, persisten tras el paso por el polarizador. De manera más general, es posible preparar cualquier estado de polarización elíptica partiendo de una fuente incoherente. Para lograrlo, se puede emplear una configuración que incluya un polarizador lineal seguido de un retardador lineal rotante, como una lámina de cuarto de onda ($\lambda/4$). Es fundamental que el retardo introducido por esta lámina sea de orden cero es decir, que el retardo nominal de $\lambda/4$ sea preciso para la longitud de onda central de la fuente y significativamente menor que su ancho espectral para generar estados de polarización. La combinación de rotar estos dos elementos genera todos los posibles estado $|\alpha, \chi\rangle$ pero de nuevo, estos elementos ópticos no eliminan la aleatoriedad intrínseca de la fuente, sino que imponen una correlación determinista entre las componentes ortogonales del campo eléctrico, $E_1(t)$ y $E_2(t)$. Específicamente, fuerzan una relación sobre las fases $\phi_i(t)$ definida entre las fluctuaciones de ambas componentes, de manera que el vector de campo eléctrico resultante describa, en promedio temporal, una elipse y así, un estado de polarización bien definido. En otras palabras el resultado es un haz de luz con un estado de polarización bien definido y un grado de polarización de primer orden que se aproxima a la unidad $P \approx 1$. Sin embargo, el escenario ideal descrito anteriormente depende de una condición crítica: que la lámina retardadora sea de orden cero. En la práctica, las láminas retardadoras son de orden múltiple, lo que significa que el retardo total es un múltiplo entero de la longitud de onda (que en nuestro caso de retardador cuarto de onda el retardo inducido es de $(n + 1/4)\lambda$), y por tanto, es comparable con el ancho espectral de la fuente o, con el ancho de su función de coherencia temporal asociada. En este caso, el haz de luz, previamente polarizado linealmente, ya no se transformará en otro estado elíptico totalmente polarizado sino sufrirá un proceso de despolarización, en el que el haz emergente al retardador tiene un estado parcialmente polarizado con un grado de polarización menor que la unidad. Inicialmente, se tratará el problema de describir el proceso de despolarización de un haz de luz incoherente cuando es transformado por una o múltiples láminas retardadoras usando el formalismo algebraico para el primer momento estadístico del estado de polarización.

3.3.1. Despolarización de luz elípticamente polarizada a través de un retardador con estados propios elípticos

Examinemos el caso de la despolarización que sufre un haz de luz, inicialmente elípticamente polarizado (grado de polarización de primer orden $P = 1$), cuando se propaga por una lámina retardadora cuyos estados propios de polarización son en general elípticos. Parte de la solución a este problema fue planteado en el capítulo anterior. Inicialmente se debe tomar la matriz de coherencia Γ asociada con un estado totalmente polarizado, en la base de estados elípticos que corresponden con los estados propios del retardador. Lo siguiente es realizar la transformación de esta matriz con la del retardador de estados propios elípticos \hat{R}_δ . Esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$\Gamma'_{ij} = \Gamma_{ij}(0)e^{i\epsilon_{ijk}\delta} = \Gamma_{ij}(\epsilon_{ijk}\tau) = \langle E_i E_j^* \rangle \gamma(\epsilon_{ijk}\tau), \quad (3.14)$$

donde $\tau = \nabla nl/c$ es el retardo que introduce el retardador y $\langle E_i \rangle$ y $\langle E_j \rangle$ son números complejos que serán igual a la representación del vector de Jones en la base de estados elípticos seleccionado. Estos se pueden hallar de acuerdo al cambio de base descrito en la sección 2.2.1. A modo de ejemplo, si los estados bases son lineales entonces $\langle E_i \rangle$ y $\langle E_j \rangle$ serán igual a las componentes del vector de Jones dadas por la ecuación 2.19, y si los estados base son circulares entonces serán igual a las componentes del vector de Jones dado por la ecuación 2.27. De esta manera, solo basta con saber la base de estados de polarización con la que se está trabajando, los parámetros físicos de la lámina retardadora y la coherencia de la fuente para, a partir de la matriz de coherencia final Γ' , se obtengan los observables que se esperan medir en el laboratorio como los parámetros de Stokes o el grado de polarización.

A partir de este resultado se pueden calcular los parámetros de Stokes transformados, en donde la transformación asociada es

$$\begin{bmatrix} \langle S'_0(t) \rangle \\ \langle S'_1(t) \rangle \\ \langle S'_2(t) \rangle \\ \langle S'_3(t) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Real}\{\gamma(\tau)\} & \text{Imag}\{\gamma(\tau)\} \\ 0 & 0 & -\text{Imag}\{\gamma(\tau)\} & \text{Real}\{\gamma(\tau)\} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

en donde la matriz de transformación corresponde con la matriz de Mueller equivalente que tiene en cuenta los efectos de un retardador sobre la función de coherencia de una fuente. Vamos a ver la despolarización a través de un retardador lineal rotante.

Consideremos un haz de luz parcialmente coherente al cual polarizamos linealmente y posteriormente este incide sobre un retardador lineal que tiene la libertad de rotar espacialmente un ángulo θ como se muestra en la figura 3.2.

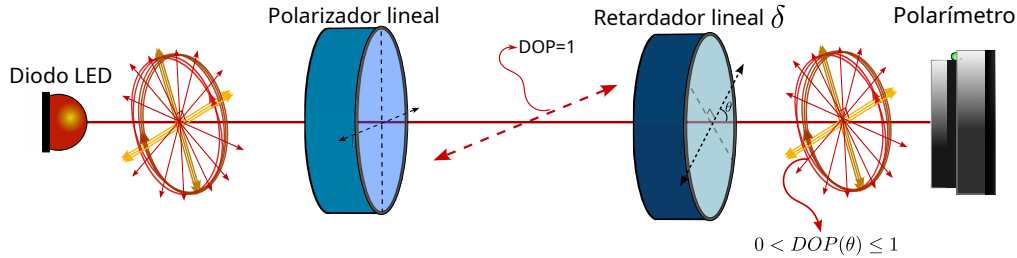


Figura 3.2: Esquema experimental usado comúnmente para la medición de la despolarización de un haz parcialmente coherente linealmente polarizado que incide sobre un retardador, dicho retardador es de orden múltiple es decir, el retardo que induce es $\tau = (n + 1/4)\lambda_0$ con estados propios lineales que puede rotar espacialmente un ángulo θ .

Para hacer esto primero vamos a tomar el operador del retardador lineal \hat{R}_δ y transformarlo a un sistema de coordenadas rotado usando la matriz de rotación $\hat{R}(\theta)$

$$\hat{W} = \hat{R}(\theta)^{-1} \hat{R}_\delta \hat{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \text{sen}^2\theta + e^{i\delta} \text{cos}^2\theta & (e^{i\delta} - 1) \text{cos}\theta \text{sen}\theta \\ (e^{i\delta} - 1) \text{cos}\theta \text{sen}\theta & e^{i\delta} \text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta. \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Ahora se debe transformar la matriz de coherencia utilizando la matriz \hat{W} para un haz linealmente polarizado:

$$\mathbf{\Gamma}' = \hat{W} \begin{bmatrix} \Gamma_{xx}(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{W}^\dagger. \quad (3.17)$$

Utilizando la librería de cálculo simbólico de Python *sympy* se hicieron estas transformaciones teniendo en cuenta que $\Gamma_{xx}(0) = \langle E_x \rangle^2$, y recordemos que tenemos normalización $\langle E_x \rangle^2 = 1$ obtenemos entonces que el vector de Stokes transformado es

$$\langle \mathbf{S}' \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(\text{Re}\{\gamma(\tau) - 1\}(\cos 4\theta - 1)) + 1 \\ -\frac{1}{2}(\text{Re}\{\gamma(\tau) - 1\} \text{sen} 4\theta) \\ \text{Imag}\{\gamma(\tau)\} \text{sen} 2\theta \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

si el estado incidente es vertical entonces la matriz de coherencia tiene forma

$$\mathbf{\Gamma}' = \hat{W} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{yy} \end{bmatrix} \hat{W}^\dagger \quad (3.19)$$

y el vector de Stokes emergente es el mismo que 3.18 pero con el signo opuesto en todos los parámetros excepto el primer, es decir:

$$\langle \mathbf{S}' \rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\text{Re}\{\gamma(\tau) - 1\}(\cos 4\theta - 1)) - 1 \\ \frac{1}{2}(\text{Re}\{\gamma(\tau) - 1\} \text{sen} 4\theta) \\ -\text{Imag}\{\gamma(\tau)\} \text{sen} 2\theta \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Donde el vector promedio $\langle \mathbf{s}' \rangle$ que representa el estado de polarización sobre la esfera de Poincaré ya no es un vector unitario sobre la esfera sino que su módulo ahora es menor que uno, lo cual hace que estos estados se manifiesten sobre la esfera de Poincaré como trayectorias dentro de esta.

3.3.2. Curva de despolarización a partir de un retardador variable

El formalismo desarrollado en las secciones anteriores ha establecido cómo un retardo de fase fijo, introducido por elementos como las placas de onda, puede inducir despolarización en un haz de luz. En esta sección, se extiende dicho análisis al caso más general de un retardo de fase que puede variar. Se investigará la dinámica de la despolarización modulando de forma continua el retardo, δ , introducido en el haz y midiendo el grado de polarización (DOP) resultante, P . La relación funcional $P(\delta)$, que en adelante denominaremos la *curva de despolarización*, constituye la herramienta central de este capítulo. El propósito es demostrar que la dinámica de esta curva encapsula información fundamental sobre las propiedades de coherencia de la fuente emisora; específicamente, se mostrará su vínculo directo con el grado complejo de coherencia temporal. Para la implementación práctica de un retardador variable, se recurre a tecnologías brindadas por los cristales líquidos, los cuales son los dispositivos empleados en este trabajo para generar el retardo variable de manera controlada.

Cristales líquidos

Los cristales líquidos (LC) son materiales compuestos por múltiples moléculas birrefringentes, generalmente con forma alargada y seleccionadas por su momento dipolar (Chipman, Lam, y Young, 2018). Estas moléculas exhiben una orientación preferencial que puede ser manipulada externamente. Al aplicar un campo eléctrico, las moléculas de cristal líquido rotan, lo que permite modular la birrefringencia efectiva del material y, por consiguiente, el retardo de fase que introduce la celda. Un ejemplo común es la celda de cristal líquido nemático trenzado (TN-LC), cuya orientación molecular bajo diferentes voltajes se ilustra en la Figura 3.3. Cuando una celda de LC se sitúa entre dos polarizadores, su función principal es actuar como un modulador de intensidad controlado por voltaje.

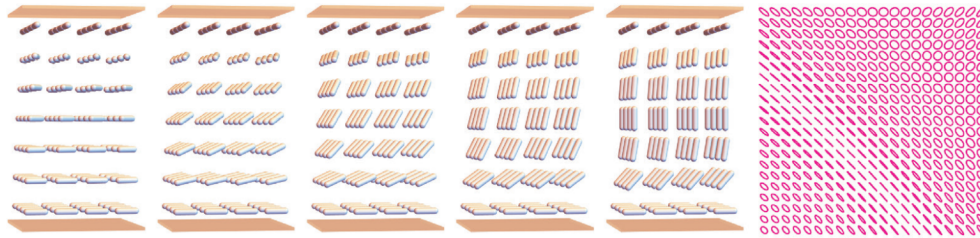


Figura 3.3: Orientación de las moléculas de cristal líquido en una celda nemática trenzada (TN-LC) en función del voltaje aplicado, el cual aumenta de izquierda a derecha. La luz se propaga en la dirección vertical (z) y las moléculas están ancladas a los sustratos superior e inferior. **(Izquierda)** Con 0 V, las moléculas forman una estructura helicoidal de 90° en el plano horizontal. **(Centro)** Al aumentar el voltaje, las moléculas en el centro de la celda se inclinan con respecto al plano horizontal, reduciendo su contribución al retardo de fase total del dispositivo. A voltajes elevados, la mayoría de las moléculas se alinean con el campo eléctrico (dirección vertical), a excepción de las capas más cercanas a los sustratos, que permanecen ancladas. **(Extremo derecho)** Gráfica cualitativa que muestra la variación del retardo de fase (magnitud) y la orientación del eje rápido de la celda en función del voltaje aplicado.

Cristales líquidos nemáticos

La respuesta de una celda nemática trenzada (TN) al voltaje no es lineal. Partiendo de $0V$, es necesario superar un voltaje umbral, típicamente alrededor de $1V$, para que el torque inducido por el campo eléctrico venza las fuerzas de atracción intermoleculares y las moléculas comiencen a rotar. A medida que el voltaje continúa aumentando, las moléculas en la capa central de la celda se inclinan progresivamente hasta alinearse con la dirección del campo eléctrico (vertical). Este efecto se propaga a las capas adyacentes, haciendo que la mayor parte del volumen del cristal líquido se comporte ópticamente de manera similar a una lámina cuyo eje óptico es perpendicular a la superficie. En el límite de alto voltaje ($5v$), la mayoría de las moléculas están orientadas verticalmente, con la excepción de las capas delgadas ancladas a los sustratos, que no son libres de rotar.

Desde una perspectiva óptica, la compleja estructura helicoidal del cristal líquido se describe mediante sus estados propios de polarización (llamados comúnmente como modo ordinario y modo extraordinario). Estos son los dos únicos estados de polarización ortogonales que atraviesan la celda sin modificar su forma. Para una celda TN, estos autoestados son, en general, elípticos. Físicamente, la estructura de la celda puede modelarse como una pila de retardadores lineales delgados cuya orientación rota progresivamente. La combinación de retardadores lineales no alineados genera un retardo con carácter circular, lo que explica la naturaleza elíptica de los autoestados. El retardo de fase total de la celda, o retardancia, corresponde al desfase acumulado entre estos dos autoestados.

Es crucial entender que tanto los autoestados como el retardo de fase dependen de la longitud de onda y del ángulo de incidencia. Debido a la dispersión cromática del material, la modulación del retardo es más pronunciada para longitudes de onda cortas que para longitudes de onda largas, un efecto directamente responsable de la despolarización cromática (Dicroísmo).

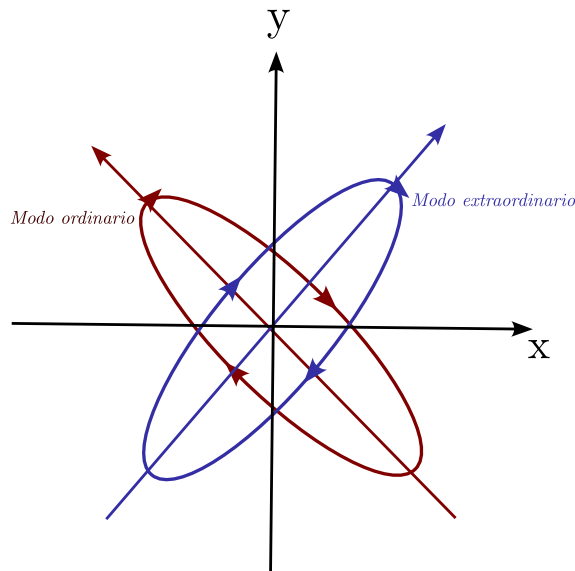


Figura 3.4: Elipses de polarización de los modos propios para los TN-LC

Matriz de Jones de un cristal líquido

Para modelar teóricamente la propagación de la luz a través de una celda de cristal líquido, cuya estructura birrefringente varía a lo largo del eje de propagación, se emplea el método de los vectores de Jones. Este enfoque se fundamenta en la discretización del medio continuo del cristal líquido. La celda, con su estructura helicoidal, se aproxima como una secuencia de N capas delgadas y uniformes, apiladas a lo largo del eje de propagación, z . Cada capa individual se trata como un retardador lineal (Yang y Wu, 2014), pero con una orientación de su eje óptico que varía progresivamente de una capa a la siguiente para emular la torsión dentro del cristal líquido.

El cálculo se realiza de la siguiente manera: se considera un rayo de luz propagándose a través de la celda y se define un plano transversal (x, y) para la formulación de la matriz de

Jones. Para una capa infinitesimal de espesor Δz , se asume que el director del cristal líquido es perpendicular a la dirección de propagación, condición bajo la cual la birrefringencia es máxima y está dada por $\Delta n = n_e - n_o$. Si para esta capa en particular, el director presenta un ángulo de torsión ϕ con respecto al eje x , su comportamiento óptico puede ser descrito por la matriz de Jones de un retardador lineal. La matriz que describe esta capa elemental es:

$$\mathbf{J}(\phi) = \mathbf{R}(\phi) \cdot \mathbf{L}_R \cdot \mathbf{R}(-\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_o} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

LR es una matriz de Jones de un retardador lineal donde la fase de la componente ordinaria cambia en $\theta_o = 2\pi n_o \Delta t / \lambda$ a través de la capa, y la fase extraordinaria cambia en $\theta_e = 2\pi n_e \Delta t / \lambda$. Si el director está inclinado un ángulo θ con respecto al rayo ($\pi/2 - \theta$ con respecto al plano transversal), el índice de refracción efectivo del modo extraordinario, $n_e(\theta)$, polarizado en el plano del director, se reduce desde su valor máximo n_e a $n_e(\theta)$.

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} \quad (3.22)$$

La birrefringencia experimentada por el rayo, expresada como $n_o - n_e(\theta)$, se proyecta sobre el plano transversal a su dirección de propagación. Para cada capa del material, se calcula una matriz de Jones equivalente de retardador, tomando en cuenta el espesor correspondiente. Cuando la luz se propaga a lo largo del director ($\theta = 0$), no se produce birrefringencia ni retardo; en cambio, cuando la propagación es perpendicular al director ($\theta = \pi/2$), la birrefringencia es máxima, igual a $n_o - n_e$. La matriz de Jones total de la celda se determina mediante el producto de las matrices de Jones asociadas a cada capa individual.

Es importante mencionar que el comportamiento final de los cristales líquidos, y en particular de sus índices de refracción, está influenciado por diversos parámetros, entre los cuales destacan los cambios de temperatura ΔT inducidos por el láser o por condiciones ambientales. Físicamente, estas variaciones térmicas pueden originarse a partir de múltiples fuentes. Un mecanismo relevante es la absorción de radiación láser mediante transiciones electrónicas (asociadas a fotones del espectro visible) o vibracionales (asociadas a fotones infrarrojos), seguida de procesos de relajación no radiativa que disipan la energía absorbida.

En la fase nemática, los índices de refracción n_\perp y n_\parallel presentan una fuerte dependencia de la temperatura, mediada por su relación con el parámetro de orden Q . Un incremento o decremento térmico ΔT se traduce en una variación del índice de refracción Δn (ya sea para n_\perp o n_\parallel) a través de la expresión:

$$\Delta n = \frac{dn}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dT}, \Delta T. \quad (3.23)$$

Adicionalmente, los cambios de temperatura inducen modificaciones en la densidad del material debido al acoplamiento termoelástico (expansión térmica). Cabe destacar que las variaciones de densidad también pueden surgir como consecuencia del desplazamiento de las moléculas del cristal líquido hacia regiones de mayor intensidad del campo aplicado.

Para el desarrollo del presente trabajo, se empleó un cristal líquido nemático *LCC2415-VIS/M* comercializado por *Thorlabs Inc.*, el cual incorpora electrodos de óxido de indio y estaño (ITO, por sus siglas en inglés). Este dispositivo presenta un tamaño de pixel inferior a $2\mu\text{m}$ y permite introducir retardos en un rango de 0 a 4000nm con una resolución de 1nm , siendo controlable mediante conexión USB a través del software específico del fabricante. Si bien los parámetros físicos que afectan el comportamiento del cristal líquido como los cambios térmicos y sus efectos en los índices de refracción discutidos anteriormente son relevantes, en este estudio no se tendrán en cuenta ya que se ha trabajado dentro de los rangos de temperatura operativos ($0 - 70^\circ$) y de calibración ($20 - 30^\circ$) reportados por el fabricante.

En general, cuando un haz de luz polarizada se propaga a través de un medio birrefringente, como una lámina de onda caracterizada por una birrefringencia Δn y un espesor l , se introduce una diferencia de camino óptico $\Delta n \cdot l$ entre las componentes ortogonales (x e y) de la luz incidente. Este desfase resultante altera el estado de polarización del haz. Sin embargo, cuando se trata de fuentes de luz parcialmente coherentes donde la diferencia de camino óptico $\Delta n \cdot l$ es comparable a su longitud de coherencia- el cambio de polarización va acompañado de un proceso de despolarización. En estos casos, no solo se modifican la elipticidad y la orientación de la elipse de polarización como se mencionó en secciones anteriores, sino también el grado de polarización (P), el cual depende del grado de coherencia cruzada γ_{xy} entre las componentes del campo eléctrico y de sus amplitudes respectivas Γ_i .

Teniendo en cuenta estos fundamentos, se presentan a continuación los resultados de la despolarización de una fuente parcialmente coherente al incidir sobre un cristal líquido de retardo variable. El esquema experimental utilizado se ilustra en la figura 3.2, con la particularidad de que el polarizador se posiciona de modo que el estado incidente sea lineal a 45° . Esta configuración se elige para alcanzar la despolarización máxima, la cual ocurre cuando $\Gamma_{xx} = \Gamma_{yy}$, condición que puede lograrse con luz circularmente polarizada o linealmente polarizada a 45° . Bajo esta condición, el grado de polarización dado por la ecuación 3.7 se reduce a:

$$P = |\gamma_{xy}(\tau)| \quad (3.24)$$

La elección del estado de polarización lineal no es arbitraria. Como se estableció previamente (ver 3.4), el modo propio de un cristal líquido es en general elíptico. No obstante, mediciones experimentales realizadas en el laboratorio determinaron que el cristal líquido utilizado en este trabajo presenta un modo propio ligeramente elíptico, pero muy cercano a los estados lineales. Por consiguiente, en nuestro análisis asumiremos que los modos propios del cristal líquido se aproximan a estados lineales.

Para caracterizar el comportamiento del retardador variable electrónico (*LCC2415-VIS/M*), se varió el retardo inducido desde 0 nm hasta 4000 nm en incrementos de 100 ± 1 nm. No obstante, la efectividad de este rango para despolarizar la luz depende fundamentalmente de la longitud de coherencia de la fuente utilizada. En este caso, la fuente LED *M625L4-C1* de 625 nm (fabricada por *Thorlabs Inc.*) cuenta con un sistema electrónico que permite ajustar su potencia mediante seis niveles discretos. Esta fuente presenta un ancho espectral $\Delta\lambda \approx 17$ nm, lo que implica una longitud de coherencia $l_c \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \approx 20\mu\text{m}$. Dado que esta longitud de coherencia supera el retardo máximo que se induce con el cristal líquido, el rango de retardos disponible resulta insuficiente para aplicar una despolarización significativa a la señal.

Para resolver esta limitación, se diseñó un nuevo esquema experimental (ver 3.5) que aprovecha la configuración de placas de onda en cascada descrita en secciones anteriores. Este sistema permite extender el retardo efectivo hasta aproximadamente 12000 nm, lo que garantiza la despolarización de la fuente hasta valores de grado de polarización (DOP) del orden de 7%. La metodología empleada asegura así la despolarización controlada de fuentes parcialmente polarizadas en rangos ajustables, permitiendo construir la curva de polarización en función del retardo inducido, la cual ahora se extiende hasta 12000 nm en lugar de los 4000 nm iniciales.

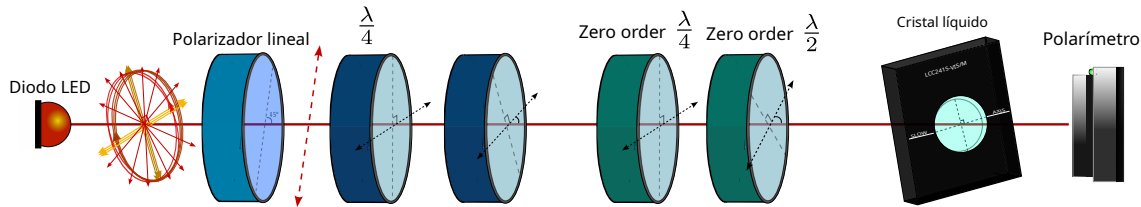


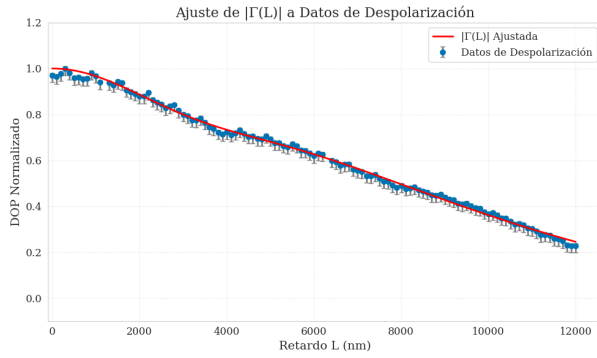
Figura 3.5: Esquema para la despolarización de haz parcialmente coherente con un cristal líquido y placas de ondas. Una vez se llega al menor DOP posible con el cristal líquido con una configuración de retardadores cuarto de onda y media onda se despolariza hasta el mínimo DOP que alcanzó el cristal, luego con una configuración de cuartos de onda o media onda de orden cero se lleva el estado de polarización al estado lineal 45° y se repite el proceso hasta rozar un DOP cercano al cero.

Mediante esta metodología se consigue extender el rango de la curva de despolarización, permitiendo observar el efecto del cristal líquido sobre un haz parcialmente coherente. Gracias a la relación establecida en la ecuación 3.24, se demuestra que este enfoque constituye una alternativa viable para determinar el grado complejo de coherencia de una fuente dada, superando las limitaciones experimentales asociadas a los métodos interferométricos convencionales.

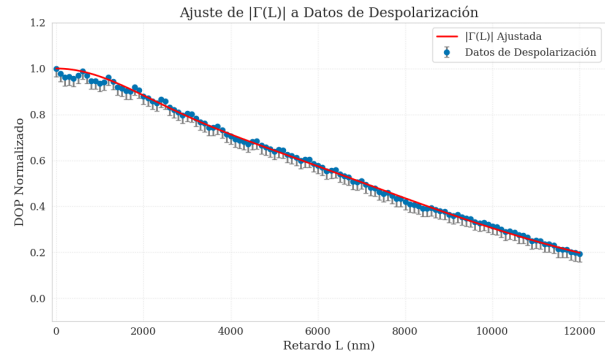
En la figura 3.6 se presentan seis curvas de despolarización correspondientes a los seis niveles de intensidad del diodo LED *M625L4-C1* de 625 nm. Cada punto representa el promedio de 100 mediciones realizadas con el polarímetro *PAX5710VIS-T-TXP* de *Thorlabs Inc.*, utilizando incrementos de retardo de 100 ± 10 nm. El ajuste de las curvas se realizó mediante una combinación lineal de funciones gaussianas de la forma $\sum_{i=1}^n a_i e^{-[(\lambda-b_i)/c_i]^2}$, donde la implementación de ventanas adaptativas en el algoritmo *curve fit* de la librería *scipy.optimize* de Python permitió una adaptación precisa para todos los niveles de intensidad del LED con el fiteo de solo dos gaussianas.

En primer lugar, se confirma que la función de coherencia seleccionada proporciona un ajuste preciso y consistente para todas las curvas de despolarización representadas en la figura 3.6. Al examinar dichas curvas, se identifica claramente la existencia de dos regímenes distintos en función del nivel de potencia del LED. El primer régimen, correspondiente a potencias inferiores (niveles 1 a 4), se caracteriza por presentar oscilaciones más pronunciadas y pseudo periódicas en la dinámica de despolarización. Por el contrario, en el segundo régimen (potencias 5 y 6), estas oscilaciones se atenúan notablemente. Esta divergencia refleja un cambio sustancial en la estadística subyacente de la fuente entre ambos regímenes.

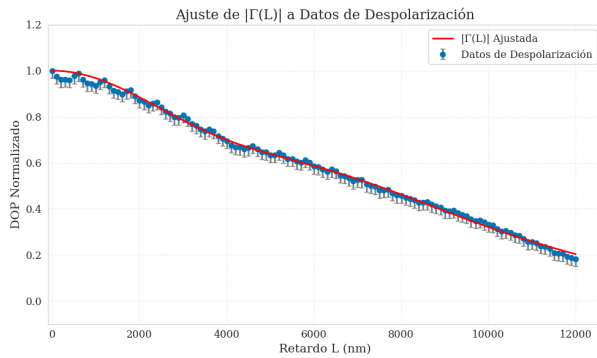
El análisis de los valores mínimos del grado de polarización (DOP) refuerza esta dualidad. Para las potencias más altas (5 y 6), se registran los DOP mínimos más bajos: 16,67% en el



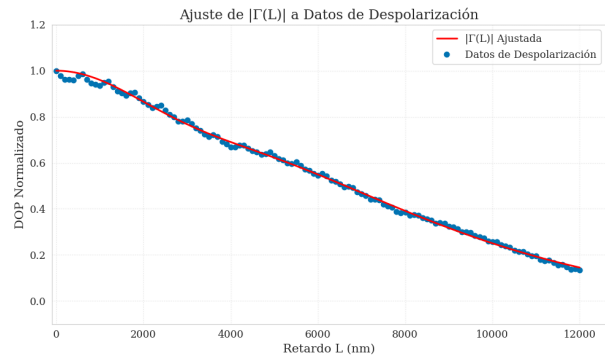
(a) Curva de despolarización para el primer nivel de potencia.



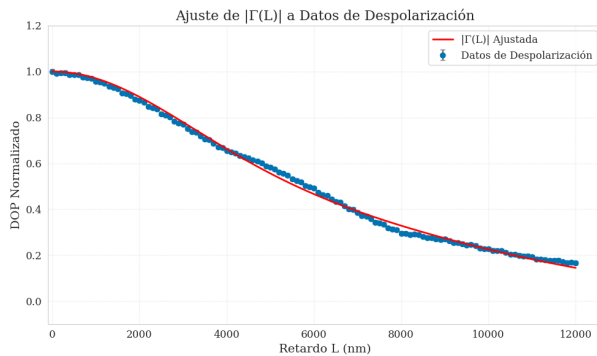
(b) Curva de despolarización para el segundo nivel de potencia.



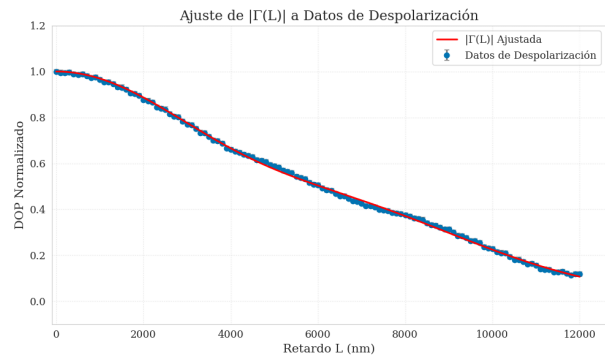
(c) Curva de despolarización para el tercer nivel de potencia.



(d) Curva de despolarización para el cuarto nivel de potencia.



(e) Curva de despolarización para el quinto nivel de potencia.



(f) Curva de despolarización para el sexto nivel de potencia.

Figura 3.6: Curvas de despolarización para las seis potencias de una fuente LED parcialmente coherente la cual se polariza diagonalmente 45° y este se incide sobre una cristal líquido que induce un retardo desde los 0 [nm] a los 4000 [nm] y se extiende por medio de la metodología 3.5. De color rojo se muestra el ajuste de curvas utilizando una función de coherencia de primer orden combinación lineal de dos gaussianas.

nivel 5 y 11,44% en el nivel 6. En cambio, en el primer régimen, el DOP mínimo aumenta progresivamente desde el nivel 1 (26,18%) hasta el nivel 4(16,9%), lo que evidencia una menor eficiencia en la despolarización a bajas potencias. Esta discrepancia sugiere que, a mayores potencias, el LED tiende a adoptar un comportamiento similar al de una fuente térmica, la cual, al ser inherentemente menos coherente, responde de manera más sensible a los desfases introducidos en el esquema experimental. Por tanto, los resultados demuestran una transición clara desde un comportamiento típico de diodo LED (más coherente) a bajas potencias, hacia uno de tipo térmico (menos coherente) a potencias elevadas mostrando así que las propiedades estadísticas de la fuente se modifican con la potencia de excitación de la misma.

En lo que respecta a las oscilaciones observadas, la información proporcionada por el grado de coherencia de primer orden resulta limitada. Se presume que para elucidar el origen de este fenómeno sería necesario recurrir a un análisis de coherencia de segundo orden, el cual permitiría caracterizar de manera más completa las propiedades estadísticas de la fuente. Esta aproximación constituye en sí misma un problema de investigación abierto, que podría ser abordado por lectores interesados y en el cual el autor aspira a profundizar en trabajos futuros. No obstante, la información obtenida mediante el grado de coherencia de primer orden ofrece un punto de partida valioso para aproximarse a la comprensión del comportamiento de las fuentes estudiadas.

3.4. conclusiones

Se estudió el formalismo de las matrices de Jones para las transformaciones de los estados de polarización en haces incoherentes. Se observó que dichas fuentes pueden ser despolarizadas mediante múltiples mecanismos, como placas de cuarto y media onda, además de elementos capaces de introducir retardos variables, como los cristales líquidos. Se realizó una breve descripción de estos elementos, los cuales son clave para la metodología de despolarización planteada.

Se evidencia que las fuentes parcialmente coherentes pueden ser despolarizadas, y que esta dinámica de polarización puede revelarnos información sobre las propiedades estadísticas de la fuente, tan importantes como el grado complejo de coherencia de primer orden. Precisamente, esta estrecha relación entre la curva de despolarización y el grado de coherencia constituye una medición alternativa de este último, diferente a los métodos interferométricos y espectrométricos.

Además, se demostró que el esquema experimental desarrollado permite caracterizar la evolución del grado de polarización en función del retardo inducido, validando la utilidad del formalismo matricial para describir sistemas ópticos complejos. Los resultados obtenidos sientan las bases para futuras investigaciones orientadas a explotar esta relación en aplicaciones de metrología óptica o caracterización de materiales, donde la despolarización controlada pueda utilizarse como herramienta de diagnóstico.

Capítulo 4

Fase de la función de coherencia

En la sección anterior se determinó el módulo del grado de coherencia compleja para una fuente parcialmente coherente. Sin embargo, este parámetro representa únicamente una de las dos componentes que constituyen la función de coherencia compleja completa. Dicha función, por su naturaleza compleja, puede expresarse como $\gamma(\tau) = |\gamma(\tau)| \exp i\phi(\tau)$, donde el módulo $|\gamma(\tau)|$ caracteriza el grado de coherencia temporal y la fase $\phi(\tau)$ contiene información crucial sobre las propiedades y estadísticas de la fuente. En esta sección se abordará la metodología que apartir de la despolarización nos permita determinar experimentalmente la fase $\phi(\tau)$ de la función de coherencia, así como algunos fenómenos físicos donde esta creemos que esta desempeña un papel fundamental en la dinámica de polarización de la luz.

4.1. Teorema de Wiener-Khinchin

Una de las propiedades más importantes de la función de autocorrelación es su relación fundamental con la densidad espectral de potencia. Para un proceso estacionario al menos en sentido amplio¹, la función de autocorrelación $\Gamma_U(\tau)$ y la densidad espectral de potencia $S_U(\nu)$ forman un par de transformadas de Fourier:

$$S_U(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_U(\tau) e^{j2\pi\nu\tau} d\tau \quad (4.1)$$

$$\Gamma_U(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_U(\nu) e^{-j2\pi\nu\tau} d\nu. \quad (4.2)$$

La relevancia de las funciones de autocorrelación radica en dos aspectos principales. En primer lugar, en el campo de la espectroscopía de Fourier, la función de autocorrelación puede medirse experimentalmente de manera directa, proporcionando así un método para determinar la densidad espectral de potencia de una señal. La función de autocorrelación obtenida experimentalmente se procesa mediante transformada de Fourier para obtener la distribución de potencia óptica en el dominio de la frecuencia.

En segundo lugar, la función de autocorrelación constituye una conexión entre el dominio de tiempo y la frecuencia, para señales aleatorias, es posible que la transformada de Fourier

¹Un proceso aleatorio estacionario en el sentido amplio implica que Γ_u solo depende de la diferencia temporal $\tau = t_2 - t_1$

no exista. Sin embargo, la densidad espectral de potencia, que se obtiene de la función de autocorrelación, sí existe.

Utilizaremos el teorema de Wiener-Khinchin para calcular la función de coherencia de la fuente LED *M625L4-C1*, lo cual servirá como referencia para comparar con los resultados obtenidos mediante el método de despolarización.

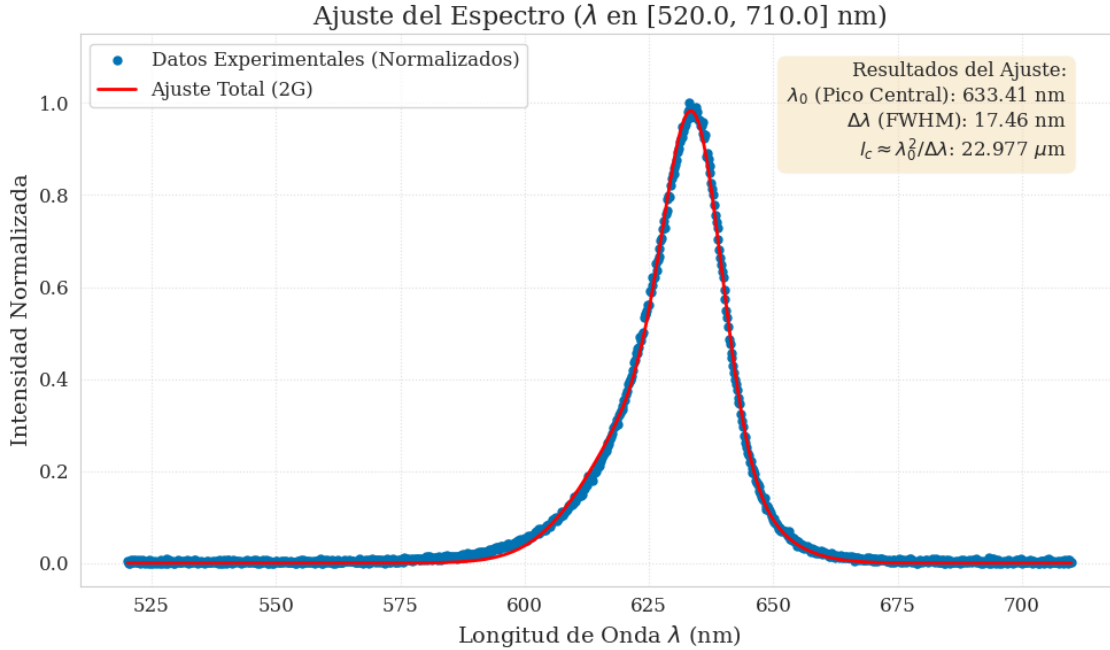


Figura 4.1: Espectro de la fuente Diodo LED *M625L4-C1* que, en azul se encuentran los datos experimentales registrado por medio de un espectrometro (falta referencia del espectrometro) . En rojo se muestra el fiteo realizado a los datos realizado la misma metodología mostrada para la curva de despolarización, se propuso tambien una combinacion de gaussianas de la forma $\sum_{i=1}^n a_i e^{-[(\lambda-b_i)/c_i]^2}$, el eje y de la grafica se encuentra en unidades arbitrarias.

Una vez obtenido el espectro y realizado el ajuste, aplicamos el teorema de Wiener-Khinchin para calcular la transformada inversa de Fourier del espectro de potencia. Esta operación nos permite determinar la función de coherencia, que cuantifica las correlaciones temporales del campo eléctrico emitido por la fuente.

La Figura 4.2 muestra la función de coherencia normalizada en función del retardo espacial L . Esta representación facilita la comparación directa con la función de coherencia derivada de la curva de despolarización, ya que ambas se construyen en términos del retardo inducido por el cristal líquido. La elección del retardo como variable independiente permite una evaluación coherente de ambos métodos.

La transformación del espectro a la función de coherencia se realizó mediante la implementación analítica del teorema de Wiener-Khinchin, donde se definieron explícitamente los términos correspondientes a la envolvente gaussiana y la fase lineal. Este enfoque presenta ventajas significativas sobre una implementación numérica directa mediante FFT: permite una extrapolación perfecta para cualquier valor de retardo, facilita la exploración más allá

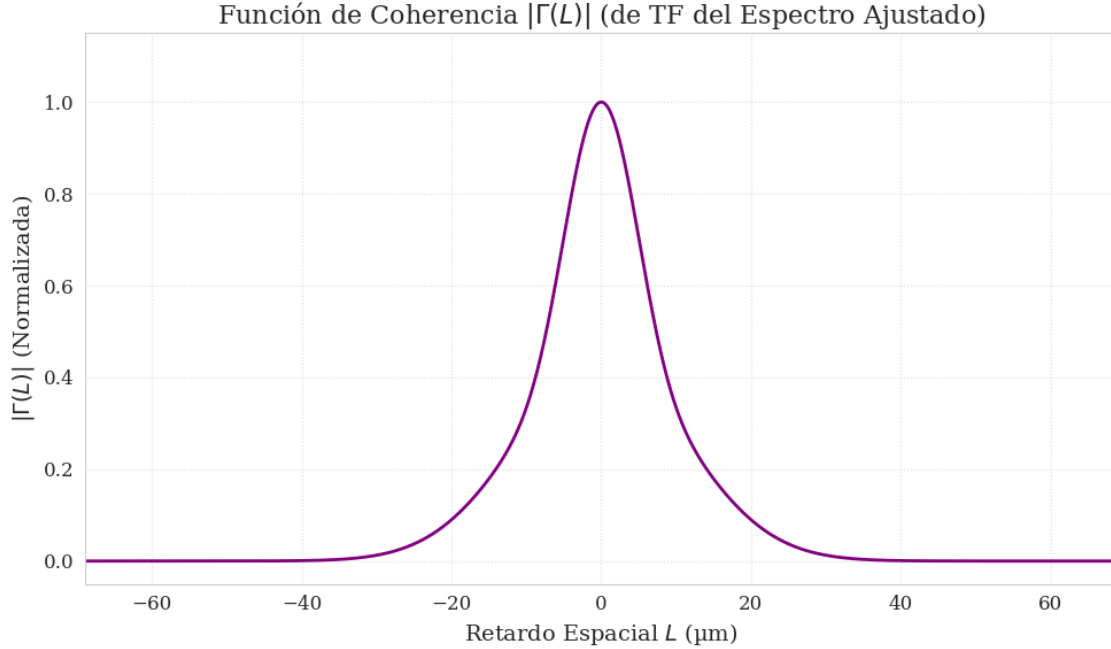


Figura 4.2: Función de coherencia normalizada obtenida para el espectro medido en 4.1 en función del retardo. Para

del rango experimental de retardos, y filtra eficazmente el ruido experimental inherente a las mediciones espectrales.

Para obtener la fase de la función de coherencia (fig. 4.3), se aplicó la función *np.angle* al resultado complejo de la transformada analítica. Sin embargo, dado que esta función devuelve la fase en el rango principal $[-\pi, \pi]$, se implementó un procedimiento de desenrollamiento (phase unwrapping) mediante *np.unwrap* para restaurar la continuidad de la fase acumulada. Adicionalmente,

Los valores de fase obtenidos, que alcanzan aproximadamente ± 654 radianes para retardos de $\pm 66\mu\text{m}$, son consistentes con el comportamiento lineal esperado para una fuente cuasi-monocromática: $\phi(L) = 2\pi L/\lambda_0$, donde $\lambda_0 \approx 633,41\text{nm}$ es la longitud de onda central del LED.

Para las demás potencias del diodo LED se obtuvo el mismo resultado y comportamiento en la fase de la función de coherencia, excepto en el nivel de potencia 1, donde, debido a la baja intensidad y principalmente a errores en la medición, el espectrómetro no pudo registrar los datos. Para las potencias 2, 3, 4, 5 y 6, se observaron únicamente leves variaciones en la segunda y tercera cifra significativa de los parámetros característicos de la función de densidad espectral, como el ancho espectral y la longitud de coherencia.

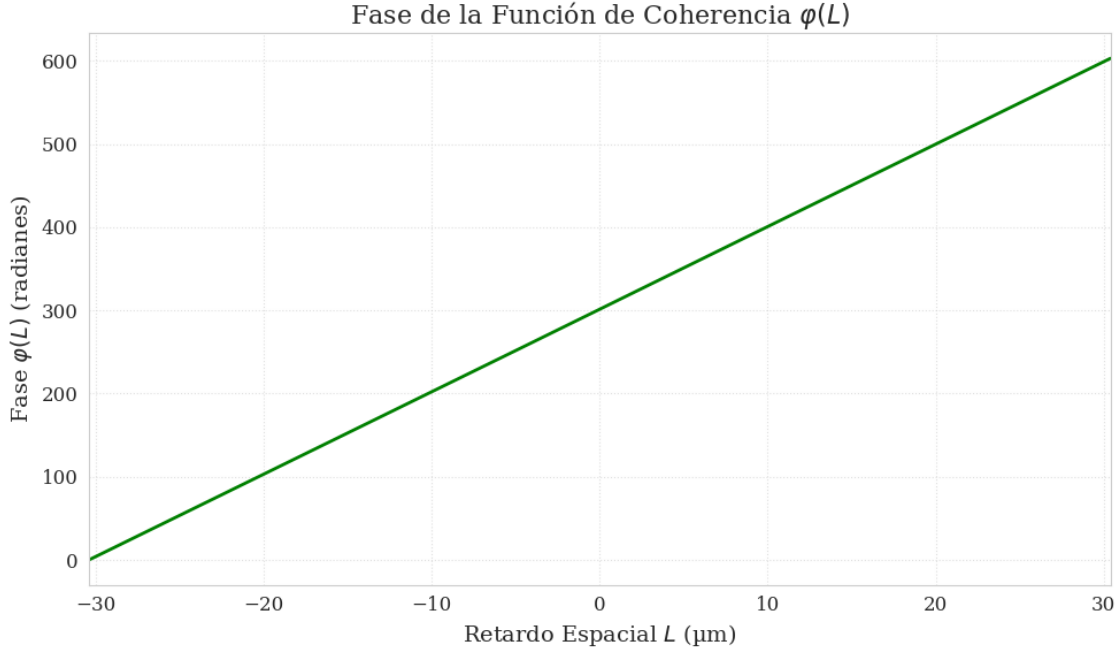


Figura 4.3: Fase de la función de coherencia $\phi(L)$ en función del retardo espacial. La relación lineal $\phi(L) = 2\pi L/\lambda_0$, se confirma la simetría impar de la fase y permite verificar independientemente la longitud de onda central $\lambda_0 \approx 633,41nm$. esta grafica corresponde al nivel 6 de potencia del diodo LED

4.2. Determinación de la fase de coherencia mediante la despolarización

Retomemos algunos aspectos del método espectral presentado en la sección anterior. Para obtener la función de coherencia mediante el teorema de Wiener-Khinchin, es necesario considerar que el espectro de la fuente, el cual suponemos de banda estrecha, se encuentra centrado en una frecuencia alta. El primer paso consiste en desplazar este espectro a una frecuencia central $\tilde{\nu}$ mediante una convolución con un delta de Dirac en el dominio de la frecuencia. Aplicando el teorema de convolución, se tiene:

$$S(\nu) = \tilde{S}(\nu) * \delta(\nu - \tilde{\nu})$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{S(\nu)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{S}(\nu)\} \mathcal{F}^{-1}\{\delta(\nu - \tilde{\nu})\},$$

lo que conduce a la expresión:

$$\Gamma(\tau) = \gamma(\tau)e^{i\tilde{\nu}\tau}. \quad (4.3)$$

Ahora, como $\gamma(\tau)$ es una señal analítica, puede expresarse en términos de su módulo y fase como $\gamma(\tau) = |\gamma(\tau)|e^{i\phi(\tau)}$. Por lo tanto, la función de coherencia completa se escribe:

$$\Gamma(\tau) = |\gamma(\tau)|e^{i\phi(\tau)}e^{-i2\pi\tilde{\nu}\tau}. \quad (4.4)$$

En la expresión anterior se distinguen dos componentes de fase: la fase de la envolvente compleja $\phi(\tau)$, que varía lentamente, y la fase de la portadora $e^{-i2\pi\bar{\nu}t}$, que oscila rápidamente. La fase $\phi(\tau)$, denominada fase de la coherencia, actúa modulando la fase portadora. Si bien la transformada de Fourier permite acceder a la función de coherencia, este enfoque no logra separar ambas fases, ya que se encuentran mezcladas en el proceso numérico. Adicionalmente, la fase portadora, debido a su rápida oscilación, puede enmascarar la contribución de la fase de la coherencia como se observa en la figura 4.4, dificultando su estudio. Por lo tanto, en esta sección se introduce un método alternativo para aislar la fase de la coherencia y evidenciar su relevancia en procesos físicos, especialmente aquellos relacionados con la despolarización. Para ello, se requiere establecer una relación entre la amplitud de coherencia y su fase.

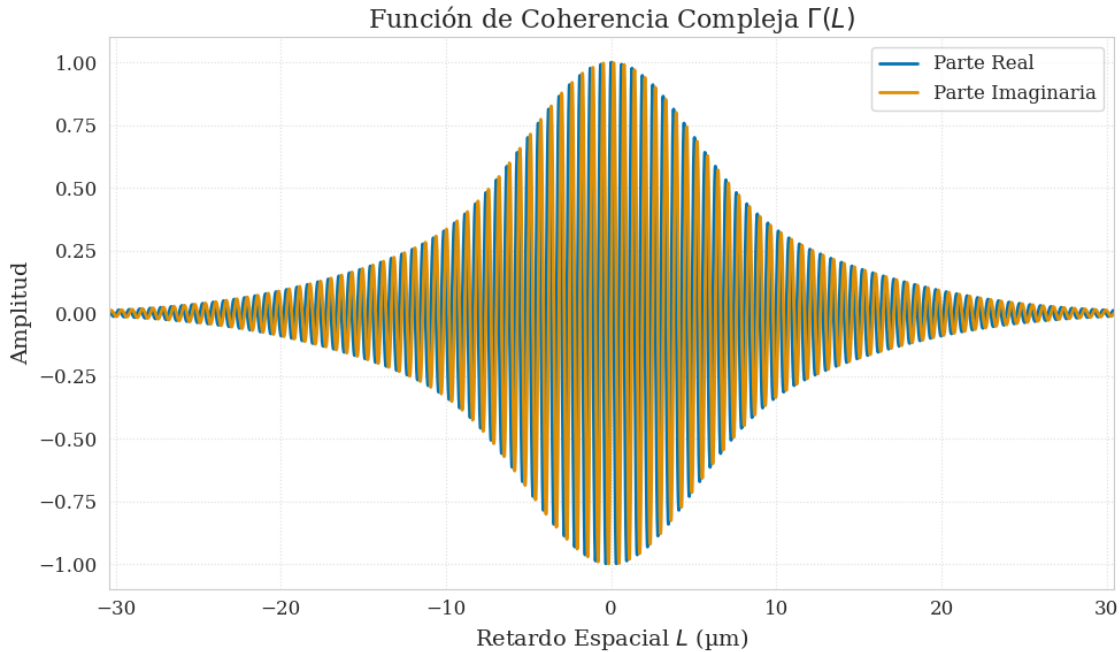


Figura 4.4: Representación de la parte real e imaginaria de la función de coherencia obtenida a través del método del espectro.

4.2.1. Transformada de Hilbert del grado complejo de coherencia

Para una señal analítica arbitraria $V(t) = \frac{1}{2} [V^{(r)}(t) + iV^{(i)}(t)]$, las partes real e imaginaria están relacionadas mediante la transformada de Hilbert (Klauder y Sudarshan, 2006):

$$V^{(i)}(t) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(r)}(t')}{t' - t} dt', \quad (4.5)$$

$$V^{(r)}(t) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(i)}(t')}{t' - t} dt'. \quad (4.6)$$

Consideremos ahora como función analítica la función de coherencia compleja:

$$\gamma(\tau) = |\gamma(\tau)|e^{i\phi(\tau)}. \quad (4.7)$$

Como se estableció en la ecuación 3.7, el objetivo es utilizar el grado complejo de coherencia para determinar la función de fase $\phi(\tau)$. Si asumimos que $\gamma(\tau)$ no posee ceros en el semiplano inferior complejo, podemos aplicar el logaritmo complejo:

$$\ln(\gamma(\tau)) = \ln(|\gamma(\tau)|) + i\phi(\tau), \quad (4.8)$$

lo cual mantiene la analiticidad de la función. Mediante la relación de Hilbert dada en (4.5), es posible relacionar las partes real e imaginaria para obtener la fase:

$$\phi(\tau) = \frac{1}{\pi}, \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\gamma(\tau')|}{\tau' - \tau}, d\tau'. \quad (4.9)$$

La resolución analítica de esta integral representa un desafío considerable, dado que el logaritmo de una suma de gaussianas como el ajuste utilizado para el espectro no es trivial y constituye por sí mismo un problema de investigación independiente. Por esta razón, se optó por una solución numérica, implementando mejoras al algoritmo *hilbert* de la librería *scipy.signal*. Este algoritmo se basa en la transformada rápida de Fourier (FFT), y se optimizó para manejar las singularidades en el denominador de la integral. Cabe recordar que, en nuestra metodología, el grado complejo de coherencia se determina directamente a partir de la curva de despolarización, lo que permite obtener la fase de la función de coherencia como la transformada de Hilbert de su amplitud.

La Figura 4.5 presenta las fases de coherencia obtenidas mediante el método de despolarización para los diferentes niveles de intensidad del diodo LED. Como se estableció en los capítulos iniciales, las variaciones de fase influyen directamente en la evolución del valor medio del vector de Stokes. Si solo estuviera presente la fase rápida de la portadora, la transformación seguiría el patrón de una onda monocromática; sin embargo, la presencia adicional de la fase de coherencia modifica este comportamiento, introduciendo una dependencia explícita de las propiedades de coherencia de la fuente. Este hecho subraya la relevancia de medir la fase de coherencia, ya que proporciona información completa sobre el comportamiento estadístico de la fuente, información que no puede obtenerse directamente al menos en nuestro enfoque numérico mediante el método espectral.

El efecto de la fase mencionado se manifiesta con mayor claridad en la Figura ??, donde se observan ondulaciones atribuibles directamente a las contribuciones de las fases. Proponemos que las oscilaciones presentes en la curva de despolarización son características inherentes de la fuente, las cuales están determinadas por la fase de la función de coherencia. Esta relación sugiere que la fase no solo modula la dinámica de polarización, sino que también impone firmas específicas en la respuesta óptica del sistema.

Esta última hipótesis respecto al origen de las oscilaciones podría abordarse mediante la extensión del formalismo de coherencia de segundo orden, lo cual constituye un problema de investigación independiente que merece un estudio posterior. Sin embargo, resulta fundamental destacar el papel del grado de coherencia de primer orden, ya que, en el contexto actual, parece capaz de capturar las oscilaciones presentes en la dinámica de despolarización y manifestarlas igualmente en la fase de coherencia.

Otro aspecto que demuestra la importancia de la fase es su influencia en los patrones de interferencia. En dichos patrones, la fase modifica la separación entre los máximos y mínimos de interferencia. Para una onda monocromática o un perfil gaussiano ideal, el espaciamiento entre franjas sería homogéneo, presentando una distribución equidistante. Sin embargo, la presencia de la fase de coherencia introduce una modulación en este espaciamiento, generando una distribución no uniforme que varía conforme la fase evoluciona. Este efecto evidencia cómo la fase de coherencia altera la estructura del patrón de interferencia, reflejando las características estadísticas de la fuente luminosa.

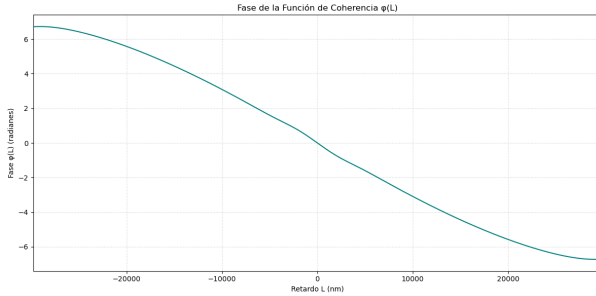
Finalmente, para representar la forma completa de la función de coherencia compleja, se realizó una visualización tridimensional que incluye las partes real e imaginaria de dicha función. Recordemos que estas componentes están construidas en función del retardo inducido por el cristal líquido, de modo que, por ejemplo, para un retardo cero, la amplitud alcanza su valor máximo mientras que la fase es nula. A partir de los valores de amplitud y fase correspondientes a cada punto de retardo, es posible reconstruir las trayectorias mostradas en la figura 4.7.

4.3. conclusiones

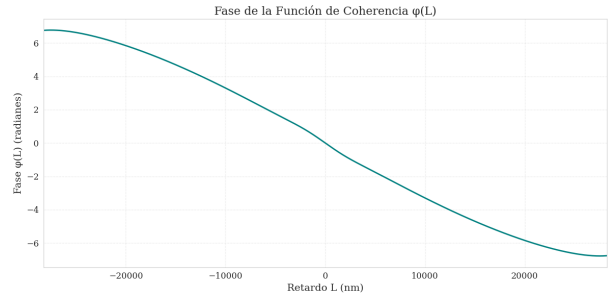
La transformada de Hilbert se ha establecido como una herramienta efectiva para obtener la fase de la función de coherencia a partir de su módulo, validando así la relación integral que conecta ambas componentes. Esta metodología supera las limitaciones del enfoque espectral convencional, el cual no permite separar adecuadamente la fase de coherencia de la fase portadora.

Los resultados demuestran que la fase de coherencia exhibe un comportamiento modulador que influye directamente en la dinámica de polarización. Las oscilaciones observadas en las curvas de despolarización presentan una correlación significativa con las variaciones de esta fase, lo que creemos sugiere que contiene información esencial sobre las propiedades estadísticas de la fuente. Este hallazgo confirma que la fase de coherencia, tradicionalmente relegada en estudios de polarización, juega un papel fundamental en la caracterización completa del comportamiento estadístico de fuentes de luz parcialmente coherentes.

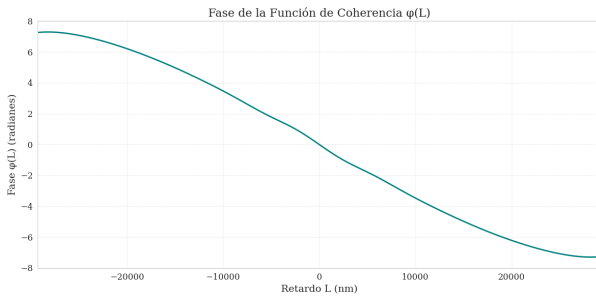
Cabe destacar que durante el desarrollo de este trabajo han surgido aproximadamente cinco problemas de investigación que, por su complejidad y alcance, representan líneas de estudio independientes. Estos quedan planteados como discusión abierta para la comunidad académica y constituyen la base para futuras investigaciones, particularmente en el marco de mis estudios de posgrado.



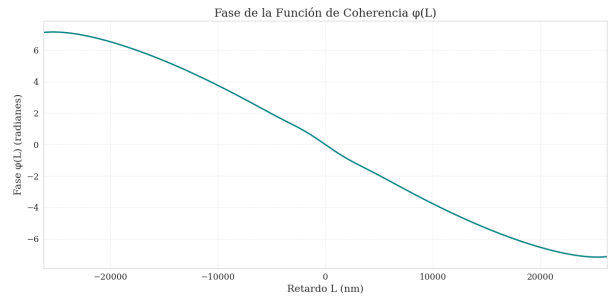
(a) Fase de la coherencia para el primer nivel de potencia.



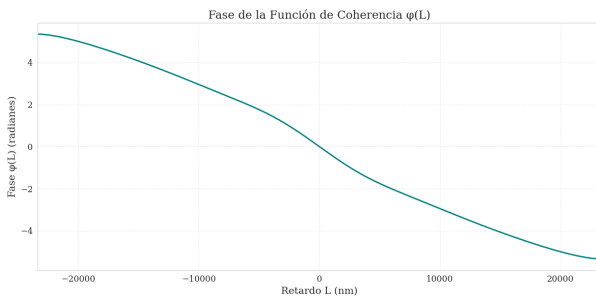
(b) Fase de la coherencia para el segundo nivel de potencia.



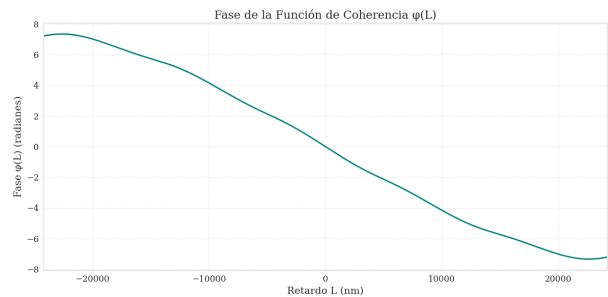
(c) Fase de la coherencia para el tercer nivel de potencia.



(d) Fase de la coherencia para el cuarto nivel de potencia.

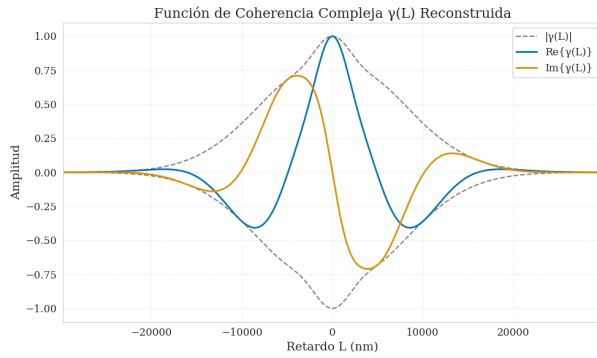


(e) Fase de la coherencia para el quinto nivel de potencia.

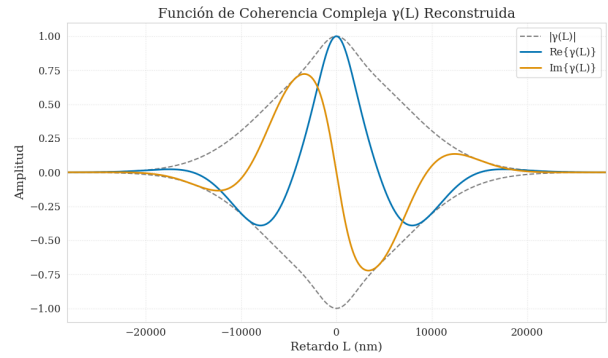


(f) Fase de la coherencia para el sexto nivel de potencia.

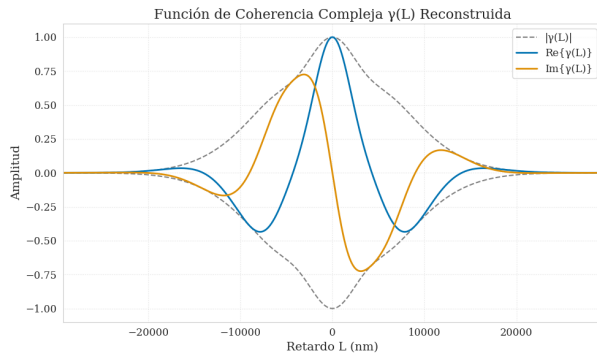
Figura 4.5: Fases de coherencia para los seis niveles de potencia de una fuente LED parcialmente coherente, determinadas mediante la transformada de Hilbert aplicada al grado de coherencia complejo obtenido por el método de despolarización (ver ecuación 3.24).



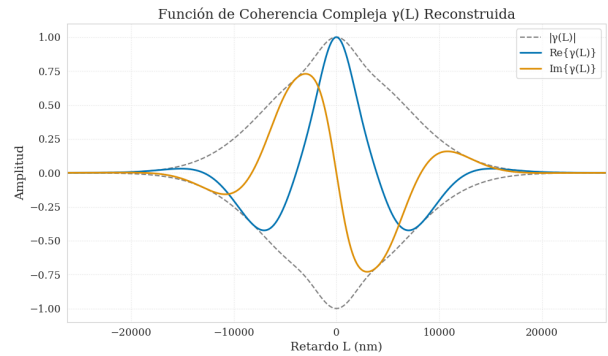
(a) Parte real e imaginaria para el metodo de despolarización para el primer nivel de intensidad de la fuente.



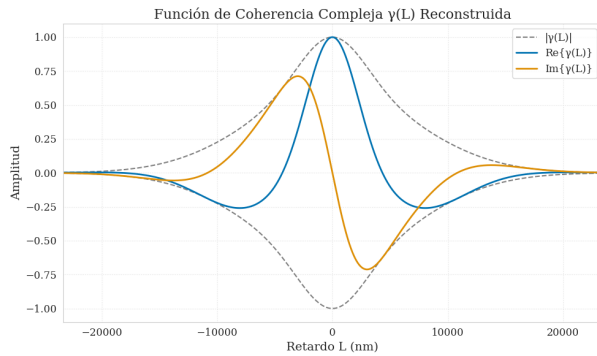
(b) Parte real e imaginaria para el metodo de despolarización para el segundo nivel de intensidad de la fuente.



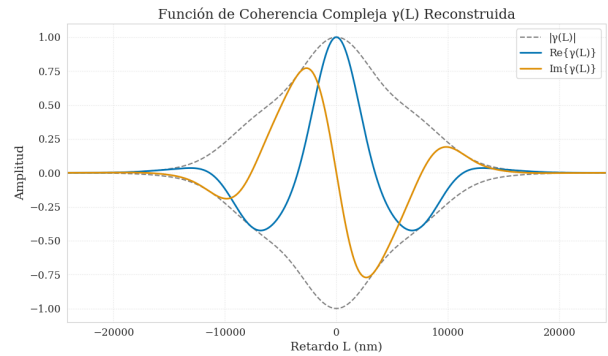
(c) Parte real e imaginaria para el metodo de despolarización para el tercer nivel de intensidad de la fuente.



(d) Parte real e imaginaria para el metodo de despolarización para el cuarto nivel de intensidad de la fuente.

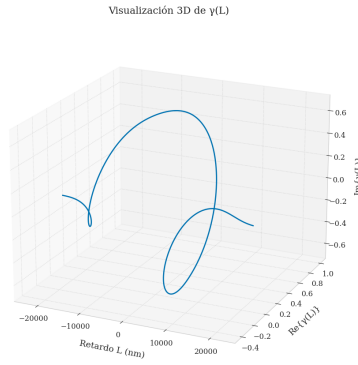


(e) Parte real e imaginaria para el metodo de despolarización para el quinta nivel de intensidad de la fuente.

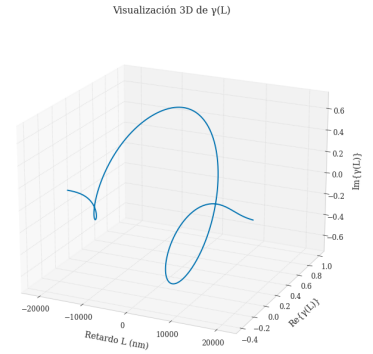


(f) Parte real e imaginaria para el metodo de despolarización para el sexta nivel de intensidad de la fuente.

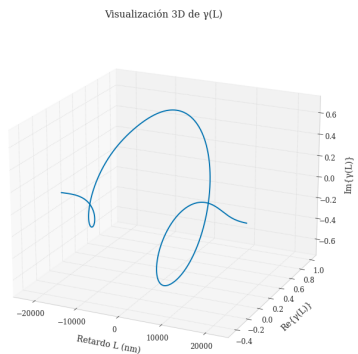
Figura 4.6: Representación de las partes reales e imaginarias y como estas modulan el comportamiento del grado complejo de coherencia obtenidas bajo el metodo de despolarización.



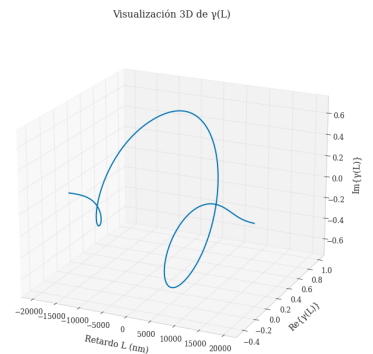
(a) Representación tridimensional de la función de coherencia compleja para el primer nivel de intensidad del LED.



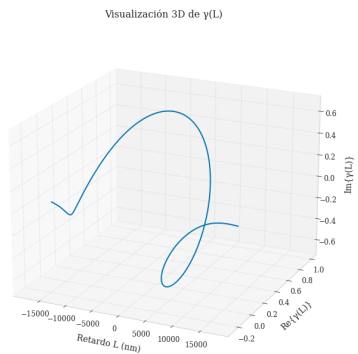
(b) Representación tridimensional de la función de coherencia compleja para el segundo nivel de intensidad del LED



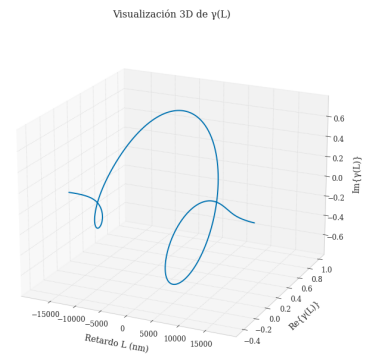
(c) Representación tridimensional de la función de coherencia compleja para el tercer nivel de intensidad del LED.



(d) Representación tridimensional de la función de coherencia compleja para el cuarto nivel de intensidad del LED



(e) Representación tridimensional de la función de coherencia compleja para el quinto nivel de intensidad del LED



(f) Representación tridimensional de la función de coherencia compleja para el sexto nivel de intensidad del LED

Figura 4.7: Representación tridimensional de la función de coherencia compleja en función del retardo.

Referencias

- Al-Qasimi, A., Korotkova, O., James, D., y Wolf, E. (2007). Definitions of the degree of polarization of a light beam. *Optics letters*, *32*(9), 1015–1016.
- Baumann, B., Baumann, S. O., Konegger, T., Pircher, M., Götzinger, E., Schlanitz, F., . . . others (2012). Polarization sensitive optical coherence tomography of melanin provides intrinsic contrast based on depolarization. *Biomedical optics express*, *3*(7), 1670–1683.
- Baylis, W. E., Bonenfant, J., Derbyshire, J., y Huschilt, J. (1993). Light polarization: A geometric-algebra approach. *American journal of physics*, *61*(6), 534–545.
- Born, M., y Wolf, E. (2013). *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier.
- Brosseau, C. (1998). *Fundamentals of polarized light: a statistical optics approach*. Wiley-Interscience.
- Chakraborty, B. (1986). Depolarizing effect of propagation of a polarized polychromatic beam through an optically active medium: a generalized study. *JOSA A*, *3*(9), 1422–1427.
- Chipman, R., Lam, W. S. T., y Young, G. (2018). *Polarized light and optical systems*. CRC press.
- Cieslak, R., y Domanski, A. (2008). Lyot depolarizer as an optical temporal coherence measurement system. En *Photonics applications in astronomy, communications, industry, and high-energy physics experiments 2008* (Vol. 7124, p. 71240B).
- de Sande, J. C. G., Piquero, G., y Teijeiro, C. (2012). Polarization changes at lyot depolarizer output for different types of input beams. *JOSA A*, *29*(3), 278–284.
- Ge, X., Chen, S., Chen, S., y Liu, L. (2021). High resolution optical coherence tomography. *Journal of Lightwave Technology*, *39*(12), 3824–3835.
- Goldstein, D. H. (2017). *Polarized light*. CRC press.
- Goodman, J. W. (2015). *Statistical optics*. John Wiley & Sons.
- Gori, F., Vicalvi, S., Santarsiero, M., Frezza, F., Schettini, G., Ambrosini, S., y Borghi, R. (1997). An elementary approach to spinors. *European Journal of Physics*, *18*(4), 256.
- Jammalamadaka, S. R. (2004). Directional statistics, i. *Encyclopedia of Statistical Sciences*, 1–5.
- Jeong, Y.-C., Lee, J.-C., y Kim, Y.-H. (2013). Experimental implementation of a fully controllable depolarizing quantum operation. *Physical Review A Atomic, Molecular, and Optical Physics*, *87*(1), 014301.
- Khrennikov, A. (2008). Quantum-like model for classical random electromagnetic field. *Journal of Modern Optics*, *55*(14), 2257–2267.
- Klauder, J. R., y Sudarshan, E. C. G. (2006). *Fundamentals of quantum optics*. Courier Corporation.

- Kuntman, E., Kuntman, M. A., Canillas, A., y Arteaga, O. (2019). Quaternion algebra for stokes–mueller formalism. *JOSA A*, *36*(4), 492–497.
- Makowski, P. L., y Domański, A. W. (2010). Degree of polarization fading of light passing through birefringent medium with optical axis variation. En *Photonics applications in astronomy, communications, industry, and high-energy physics experiments 2010* (Vol. 7745, pp. 186–197).
- Mardia, K. V., y Jupp, P. E. (2009). *Directional statistics*. John Wiley & Sons.
- Ortega-Quijano, N., Marvdashti, T., y Ellerbee Bowden, A. K. (2016). Enhanced depolarization contrast in polarization-sensitive optical coherence tomography. *Optics letters*, *41*(10), 2350–2353.
- Pabón, J., Hernandez, C., y Torres, R. (2023, 10). Tunable birefringence and elliptical polarization eigenmodes in a biplate of two quarter-wave plates. *J. Opt. Soc. Am. A*, *40*(10), 1959–1968. Descargado de <https://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?URI=josaa-40-10-1959> doi: 10.1364/JOSAA.499731
- Pellat-Finet, P. (1984). Représentation des états et des opérateurs de polarisation de la lumière par des quaternions. *Optica Acta: International Journal of Optics*, *31*(4), 415–434.
- Saito, S. (2023). Dirac equation for photons: Origin of polarisation. *arXiv preprint arXiv:2303.18196*.
- Shaham, A., y Eisenberg, H. (2011). Realizing controllable depolarization in photonic quantum-information channels. *Physical Review A Atomic, Molecular, and Optical Physics*, *83*(2), 022303.
- Shen, Y., Wang, Z., Fu, X., Naidoo, D., y Forbes, A. (2020). Su (2) poincaré sphere: A generalized representation for multidimensional structured light. *Physical Review A*, *102*(3), 031501.
- Temporão, G., Xavier, G., y von der Weid, J. (2012). Quantum channel with controllable decoherence using polarization-time coupling. *The European Physical Journal D*, *66*, 1–6.
- Tudor, T. (2008). Interaction of light with the polarization devices: a vectorial pauli algebraic approach. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, *41*(41), 415303.
- Wolf, E. (1959). Coherence properties of partially polarized electromagnetic radiation. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, *13*(6), 1165–1181.
- Wolf, E., y cols. (2007). *Introduction to the theory of coherence and polarization of light*. Cambridge University Press.
- Yang, D.-K., y Wu, S.-T. (2014). *Fundamentals of liquid crystal devices*. John Wiley & Sons.
- Zangwill, A. (2013). *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press.