

# **SOBRE EL TEOREMA DE EFFROS**

**JESÚS FERNANDO CARREÑO DÍAZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

**2017**



# **SOBRE EL TEOREMA DE EFFROS**

Autor

**JESÚS FERNANDO CARREÑO DÍAZ**

Trabajo de grado para optar al título de

*Matemático*

Director

**CARLOS ENRIQUE UZCÁTEGUI AYLWIN**

Doctor en Matemáticas

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

**2017**



# Tabla de contenidos

<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1. Nociones básicas . . . . .	11
1.2. Espacios Polacos . . . . .	15
1.3. Algunos resultados sobre espacios $T_0$ . . . . .	17
1.4. Conjuntos magros y espacios Baire . . . . .	19
1.5. Grupos topológicos . . . . .	25
<b>2. El Teorema de Effros</b>	<b>32</b>
2.1. El principio de la aplicación abierta . . . . .	32
2.1. El Teorema de Effros . . . . .	39
<b>Citas bibliográficas</b>	<b>43</b>

# RESUMEN

**TÍTULO:** SOBRE EL TEOREMA DE EFFROS<sup>1</sup>.

**AUTOR:** JESÚS FERNANDO CARREÑO DÍAZ<sup>2</sup>.

**PALABRAS CLAVE:** Teorema de Effros;  $C^*$ -álgebra; grupo Polaco.

## DESCRIPCIÓN:

En el estudio de la teoría descriptiva de conjunto aparecen problemas de alta complejidad, como los tópicos en acciones de grupos Polacos. En 1965, el matemático Estadounidense Edward G. Effros publicó un artículo sobre propiedades sobre las  $C^*$ -álgebras. En ese artículo probó un teorema que se conoce como Teorema de Effros, que expresa algunas propiedades de acciones de grupos Polacos.

El objetivo principal de este trabajo es mostrar el Teorema de Effros siguiendo las ideas utilizadas por Jan van Mill en un artículo publicado en 2004, que a su vez se basa en los trabajos de los matemáticos Aarno Honti y Frederick Ancel, quienes hicieron aportes a la prueba del Teorema de Effros. Vamos a presentar todos los detalles necesarios para entender la prueba de van Mill, que resulta ser diferente a la utilizada por Effros en su artículo original. El primer capítulo del libro contiene los conceptos preliminares necesarios para la prueba. En el segundo capítulo, presentamos la herramienta principal utilizada por van Mill (llamado el Principio de la función abierta) y luego lo usamos para mostrar el Teorema de Effros. Además, veremos algunas aplicaciones del Principio de la Aplicación Abierta y del Teorema de Effros, en las cuales se podrá entender la importancia de estos resultados.

---

<sup>1</sup>Tesis.

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas.

DIRECTOR: Doc. Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

# ABSTRACT

**TITLE:** ABOUT EFFROS' THEOREM <sup>3</sup>.

**AUTHOR:** JESÚS FERNANDO CARREÑO DÍAZ <sup>4</sup>.

**KEYWORDS:** Effros' Theorem;  $C^*$ -algebra; Polish groups.

## DESCRIPTION:

In the study of the descriptive set theory appear problems of high complexity, such as the topics in actions of Polish groups theory. In 1965, the American mathematician Edward G. Effros published an article on properties on the  $C^*$ -algebras. In that article he proved a theorem that is known as the Effros' Theorem, which expresses some properties of actions of Polish groups.

The main objective of this work is to show Effros' Theorem following the ideas used by Jan van Mill in an article published in 2004, which is based on the works of the mathematicians Aarno Honti and Frederick Ancel, who made contributions to the proof of Effros' Theorem. We will present all the details necessary to understand van Mill's proof, which is different from the one used by Effros in his original article.

The first chapter of the book contains the preliminary concepts necessary for the proof. In the second chapter, we will present the main tool used by van Mill (called the Open Mapping Principle) and then use it to show Effros' Theorem. In addition, we will see some applications of the Open Mapping Principle and Effros' Theorem, in which we can understand the importance of these results.

---

<sup>3</sup>Thesis.

<sup>4</sup>Faculty of Science, School of Mathematics.

DIRECTED BY: Doc. Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

*"Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty -a beauty cold and austere, like that of sculpture."*

Bertrand Russell

# INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de esta monografía es presentar una prueba al Teorema 2.1 de [4] presentado por el matemático estadounidense Edward G. Effros en 1965, en un artículo de la revista *Annals of Mathematics* en el cual estudiaba propiedades de las  $C^*$ -álgebras, este teorema es conocido en la literatura como el teorema de Effros, el cual ha sido y sigue siendo motivo de estudio en diferentes ramas de las matemáticas como en la teoría descriptiva de conjuntos para la clasificación de relaciones de equivalencia (ver por ejemplo [5, 8]), en topología para el estudio de continuos homogéneos [9], etc. El teorema Effros enuncia lo siguiente:

**Teorema de Effros.** Sean  $G$  un grupo Polaco y  $X$  un  $G$ -espacio Polaco. Entonces son equivalentes:

1. Para todo  $x \in X$ , la función  $gG_x \rightarrow g \cdot x$  de  $G/G_x$  en  $G \cdot x$  es un homeomorfismo.
2. Toda órbita es de segunda categoría en sí misma.
3. Toda órbita es  $G_\delta$  en  $X$ .
4.  $X/E_G$  es  $T_0$ .

La presentación que daremos sigue la hecha por van Mill en [6], debido a que dicho artículo presenta un argumento sencillo y práctico para probar de una forma más sofisticada el teorema de Effros. El principal ingrediente en la prueba de van Mill (que a su vez se basa en el trabajo de [1]) es un resultado llamado el Principio de la aplicación abierta:

**Principio de la aplicación abierta.** Suponga que un grupo Polaco  $G$  actúa transitivamente sobre un espacio  $X$ . Luego son equivalentes:

1.  $G$  actúa micro-transitivamente sobre  $X$ .
2.  $X$  es Polaco.
3.  $X$  es de segunda categoría.

Claramente, este resultado tiene bastante similitud con el teorema de la función abierta de análisis funcional, como lo mostraremos en el Capítulo .

Las herramientas mas importantes para la prueba que presentaremos son las nociones de categoría de Baire: Conjuntos nunca densos, magros y el Teorema de Categoría de Baire. Además, a lo largo de este trabajo estudiaremos temas de la teoría de grupos topológicos, aunque la teoría de grupos topológicos es bastante amplia solo nos enfocaremos en estudiar los conceptos y resultados necesarios para entender el Teorema de Effros.

# 1. PRELIMINARES

En lo que sigue definiremos algunos conceptos básicos de topología y algunos otros conceptos nuevos que trataremos de dar a entender fácilmente con los ejemplos y proposiciones aquí presentados. También enmarcaremos algunos conceptos tal vez conocidos, para que no halla problema con la notación y el lenguaje que emplearemos en el escrito.

## 1.1. NOCIONES BÁSICAS

Un espacio topológico es un par  $(X, \tau)$  donde  $X$  es un conjunto y  $\tau$  es una colección de subconjuntos de  $X$  tal que  $\emptyset$  y  $X$  están en  $\tau$ ; y  $\tau$  es cerrado bajo las uniones arbitrarias e intersecciones finitas. Esta colección de subconjuntos es conocida como la topología en  $X$  y sus elementos se llaman abiertos. Los complementos de los conjuntos abiertos son llamados cerrados.

Una base es un subconjunto  $\mathcal{B}$  de  $\tau$  tal que todo abierto en  $\tau$  es una unión de elementos de  $\mathcal{B}$ . Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto  $\mathcal{B}$  sea una base es que  $\bigcup\{B \mid B \in \mathcal{B}\} = X$  y dados  $B_1, B_2$  en  $\mathcal{B}$  y  $x \in B_1 \cap B_2$ , exista otro elemento  $B_3$  en  $\mathcal{B}$  tal que  $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ .

Si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico y  $S$  es un subconjunto de  $X$ . Entonces  $(S, \tau_S)$  es llamado subespacio de  $X$ , donde  $\tau_S = \{U \cap S \mid U \in \tau\}$  es la topología relativa sobre  $S$ . Es fácil ver que  $\tau_S$  es en efecto una topología sobre  $S$ .

Un espacio métrico es un par  $(X, d)$  con  $X$  un conjunto no vacío y  $d : X \rightarrow [0, \infty)$  una función llamada métrica que satisface:

I.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;

II.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;

III.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , con  $x, y, z \in X$ .

El conjunto  $B(x; r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$  es conocido como la bola abierta con centro  $x$  y radio  $r$ . El conjunto de todas las bolas abiertas forman una base para una topología, la cual llamaremos la topología generada por la métrica.

Un conjunto no vacío  $G$  es un grupo si en él hay definida una operación binaria  $*$  tales que  $G$  es cerrado, existe un elemento neutro en  $G$ , cada elemento en  $G$  tiene un inverso y se cumple con la ley asociativa en  $G$ .

**Definición 1.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $A \subseteq X$ . Definimos la adherencia de  $A$  sobre el espacio  $X$ , por:

$$cl_X(A) = \bigcap \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}.$$

Definimos el interior de  $A$  sobre el espacio  $X$ , por:

$$int_X(A) = \bigcup \{U \subseteq X \mid U \text{ es abierto y } U \subseteq A\}.$$

**Observación 2.** Simplificaremos la notación si el espacio topológico es claro, denotando  $cl_X(A) = \bar{A}$  y  $int_X(A) = int(A)$ . Además,  $\bar{A}$  es el cerrado más pequeño que contiene a  $A$ ; esto es, si  $F$  es cerrado y  $A \subseteq F$ , entonces  $\bar{A} \subseteq F$ . También diremos que  $int(A)$  es el abierto más grande contenido en  $A$ ; es decir, si  $W$  es abierto de  $X$  y  $W \subseteq A$ , entonces  $W \subseteq int(A)$ .

**Definición 3.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Diremos que:

1.  $f$  es continua en  $a \in X$ , si para todo abierto  $V$  de  $Y$  con  $f(a) \in V$ , existe un abierto  $U$  en  $X$  con  $a \in U$  tal que  $f(U) \subseteq V$ . Se dice que  $f$  es continua, si  $f$  es continua en todo punto de  $X$ .
2.  $f$  es un homeomorfismo si  $f$  es biyección tal que  $f$  y  $f^{-1}$  son continuas.
3.  $f$  es abierta si  $f(U)$  es abierto en  $Y$ , para cada abierto  $U$  de  $X$ .
4.  $f$  es cerrada si  $f(C)$  es cerrado en  $Y$ , para cada cerrado  $C$  de  $X$ .

Con el fin de no extender los temas del texto, enunciaremos la siguiente proposición pero no incluiremos la prueba. Pero esta pueden ser consultada en un libro de topología general, por ejemplo [3] Proposición 3.13.

**Proposición 4.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y biyectiva entre espacios topológicos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $f$  es un homeomorfismo.
2.  $f$  es abierta.
3.  $f$  es cerrada.

Un primer problema en topología es dotar a un conjunto arbitrario  $Y$  con alguna topología y obtener propiedades de dicho espacio topológico. Pero qué sucede cuando ya se tiene un espacio topológico conocido  $X$  y una función  $f : X \rightarrow Y$  sobreyectiva. Una forma sencilla de dar una topología al conjunto  $Y$ , es definir sus abiertos por medio del conjunto  $X$  y la función  $f$ , este concepto se conoce como topología cociente y lo definiremos a continuación.

**Definición 5.** *Sean  $X$  un espacio topológico,  $Y$  un conjunto y  $f : X \rightarrow Y$  una función sobreyectiva. Se define la topología cociente, como la topología más fina en  $Y$  tal que  $f$  es continua. Es decir,*

$$U \text{ es un abierto en } Y \iff f^{-1}(U) \text{ es un abierto en } X.$$

**Definición 6.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva. Diremos que  $f$  es una función cociente si  $Y$  tiene la topología cociente.

Para el siguiente ejemplo necesitaremos tener claro un par de conceptos de la teoría clásica de conjuntos, como lo son clase de equivalencia y conjunto cociente; ver en [7], pág. 23. Así que para introducir una notación adecuada definiremos brevemente estos conceptos.

Sean  $X$  un conjunto y  $E$  es una relación de equivalencia sobre  $X$ , diremos que el conjunto

$$[x]_E = \{y \in X \mid xEy\}$$

es la clase de equivalencia de  $x \in X$  bajo la relación  $E$ .

El conjunto de todas las clases de equivalencia de  $E$  sobre  $X$  lo llamaremos el conjunto cociente y lo denotaremos por  $X/E$ .

**Ejemplo 7.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $E$  una relación de equivalencia. Considere la función cociente:

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/E \\ x &\longmapsto [x]_E \end{aligned}$$

Ahora queremos dar una topología al conjunto  $X/E$  diferente a la trivial, así que la topología que usaremos es la cociente. Es decir,

$$U \text{ es un abierto en } X/E \iff \pi^{-1}(U) \text{ es un abierto en } X.$$

En adelante, llamaremos a  $\pi$  la función asociada a la relación de equivalencia  $E$  y cada vez que no especifiquemos la topología en un conjunto cociente, asumiremos que tiene la topología dada por la función cociente  $\pi$ .

**Teorema 8.** Sean  $f : X \rightarrow Y$  una función cociente. Si  $Z$  es un espacio topológico entonces una función  $g : Y \rightarrow Z$  es continua si y solo si  $g \circ f : X \rightarrow Z$  es continua.

La prueba del teorema anterior puede consultarse en [3], Proposición 3.40.

## 1.2. ESPACIOS POLACOS

Sea  $(X, d)$  espacio métrico. Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de elementos de  $X$ , diremos que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente a  $x \in X$  o  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , si  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n > n_0)$ . Además, una sucesión de Cauchy es una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n, m > n_0)$ . Un espacio métrico donde toda sucesión de Cauchy es convergente es llamado completo.

Sea  $X$  un espacio topológico. Diremos que  $X$  es 2-numerable, si tiene una base numerable. Un subconjunto  $D$  de  $X$  es denso en el espacio, si dado cualquier abierto  $U$  en  $X$  se tiene que  $D \cap U \neq \emptyset$  (i.e.,  $\overline{D} = X$ ). Además, diremos que  $X$  es separable, si tiene un subconjunto denso numerable. Por último,  $X$  se dice espacio de Lindelöf, si cada cubierta abierta de  $X$  tiene una subcubierta numerable.

El primer concepto nuevo que daremos es el de un espacio Polaco con algunos ejemplos.

**Definición 9.** *Un espacio topológico es Polaco, si es un espacio métrico completo y separable.*

**Ejemplo 10.** ■  *$\mathbb{R}$  el conjunto de los números reales con la topología dada por su métrica usual, es un espacio Polaco.*

- *$\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  y los conjuntos finitos en  $\mathbb{R}$  son espacios Polacos con sus topologías relativas.*
- *$\mathbb{C}$  el campo de los números complejos con la topología usual, también es un espacio Polaco.*
- *En general cualquier espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  es un espacio Polaco.*
- *$M_n(\mathbb{R})$  el conjunto de las matrices cuadradas con entradas en  $\mathbb{R}$ , es un espacio Polaco.*

En adelante cada vez que hablemos de  $\mathbb{R}$  y no especifiquemos su topología, asumiremos que tiene la topología usual generada por la métrica euclídea. Análogamente, si no especificamos la topología de un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , entonces lo dotaremos con la topología relativa dada

por la usual en  $\mathbb{R}$ . En el caso de  $\mathbb{R}^n$  también asumiremos que su topología es la usual generada por la métrica euclídea.

Las siguientes proposiciones son resultados clásicos de topología sus pruebas pueden ser consultadas en [3], Proposiciones 5.42. y 5.46.

**Proposición 11.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva. Si  $X$  es separable, entonces  $Y$  es separable.*

**Proposición 12.** *Sea  $X$  un espacio métrico. Entonces son equivalentes:*

1.  $X$  es 2-numerable.
2.  $X$  es separable.
3.  $X$  es de Lindelöf.

La siguiente proposición nos permite construir nuevos espacios Polacos mediante algunos ya conocidos (ver [5], pág. 3).

**Proposición 13.** *El producto cartesiano numerable de Polacos es Polaco.*

Siguiendo la proposición anterior vemos que los siguientes espacios también son Polacos.

**Ejemplo 14.** ■  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  es un espacio Polaco. En adelante, llamaremos este conjunto como el espacio de Baire.

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  el espacio de todas las sucesiones de números reales es Polaco.
- $2^{\mathbb{N}}$  el espacio de Cantor es Polaco.

**Definición 15.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Decimos que  $A \subseteq X$  es  $G_\delta$ , si existe  $\{O_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  una familia numerable de abiertos en  $X$  tal que  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ .*

**Teorema 16.** *Sean  $X$  un espacio Polaco y  $A$  un subconjunto de  $X$ . Entonces  $A$  es un espacio  $G_\delta$  si y solo si  $A$  es un espacio Polaco con su topología relativa.*

El resultado anterior puede ser consultado en [5], Teorema 3.11.

**Teorema 17.** (Teorema de metrización de Urysohn) *Todo espacio regular  $X$  con una base numerable es metrizable.*

El Teorema de metrización de Urysohn es un resultado clásico de topología, su prueba puede consultarse en [7], Teorema 34.1.

El Teorema de Sierpinski es un resultado importante en la teoría de espacios Polacos. La prueba de este teorema puede ser consultada en [8], Teorema 2.2.9.

**Teorema 18.** (Teorema de Sierpinski) *Sean  $X$  un espacio Polaco,  $Y$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua, sobreyectiva y abierta. Entonces  $Y$  es un espacio Polaco.*

El siguiente teorema es un resultado directo del Teorema de metrización de Urysohn y el Teorema de Sierpinski.

**Proposición 19.** *Sea  $f : X \rightarrow Y$  un homeomorfismo entre espacios topológicos. Si  $X$  es Polaco, entonces  $Y$  es Polaco.*

Revisaremos brevemente la definición de un espacio analítico, más aún incluiremos un lema que será utilizado en pruebas posteriores. Aunque no probaremos el lemas, este puede ser consultado en un libro clásico de teoría descriptiva de conjuntos ver en [5], pág. 196.

**Definición 20.** *Sea  $X$  un espacio métrico y separable. Un subconjunto de  $X$  es analítico, si es la imagen continua de un subespacio Polaco de  $X$ .*

Es evidente que todo espacio Polaco es un espacio analítico, porque todo Polaco es la imagen continua bajo la función identidad.

**Lema 21.** *Sean  $X, Y$  espacios Polacos y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Si  $A$  es un abierto no vacío en  $X$ , entonces  $f(A)$  es analítico.*

### 1.3. ALGUNOS RESULTADOS SOBRE ESPACIOS $T_0$

Daremos algunos conceptos conocidos en topología y que nos ayudarán como justificación para resultados posteriores, como el de espacio  $T_0$  el cual hace una clasificación de algunos

espacios topológicos, dicho concepto se conoce como uno de los axiomas de separación en topología.

**Definición 22.** Sea  $X$  un espacio topológico, se dice que  $X$  es un espacio  $T_0$  si dados  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , existe una vecindad de uno de ellos que no contiene al otro.

El siguiente lema nos da una buena caracterización de los espacios  $T_0$ .

**Lema 23.**  $X$  es espacio  $T_0$  si y solo si para cualquier par de puntos distintos sus clausuras no son iguales.

*Demostración.*  $[\Rightarrow]$  Sean  $x$  y  $z$  en  $X$ , con  $x \neq z$ . Como  $X$  es  $T_0$ , existe un conjunto  $V$  abierto en  $X$  y considerando los siguientes dos casos:

**Caso 1:** Si  $x \in V$  y  $z \notin V$ , entonces  $\{z\} \cap V = \emptyset$  y  $x \notin \overline{\{z\}}$ . Por tanto,  $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{z\}}$ .

**Caso 2:** Si  $x \notin V$  y  $z \in V$ , entonces  $\{x\} \cap V = \emptyset$  y  $z \notin \overline{\{x\}}$ . Por tanto,  $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{z\}}$ .

$[\Leftarrow]$  Sean  $x$  y  $z$  elementos en  $X$ , con  $x \neq z$ . Por hipótesis,  $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{z\}}$  y si se consideran los siguientes dos casos:

**Caso 1:** Si  $\overline{\{x\}} \not\subseteq \overline{\{z\}}$  entonces  $x \notin \overline{\{z\}}$ . Luego existe  $V$  un abierto en  $X$  tal que  $x \in V$  y  $V \cap \{z\} = \emptyset$ . Por tanto,  $z \notin V$ .

**Caso 2:** Análogamente, si  $\overline{\{z\}} \not\subseteq \overline{\{x\}}$ .

□

La siguiente proposición será utilidad en una de las implicaciones del Teorema de Effros.

**Proposición 24.** Sean  $X$  un espacio topológico  $T_0$ ,  $\{U_i \mid i \in I\}$  una base para  $X$  y  $x \in X$ . Si

$$V_i = \begin{cases} U_i, & \text{si } x \in U_i; \\ X \setminus U_i, & \text{si } x \notin U_i. \end{cases}$$

entonces  $\bigcap_{i \in I} V_i = \{x\}$ .

*Demostración.* Probaremos una doble contención entre conjuntos.

[ $\subseteq$ ]. Procederemos por contradicción. Supongamos que  $z \in \bigcap_{i \in I} V_i$  y  $z \neq x$ . Usando la hipótesis de que  $X$  es un espacio  $T_0$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad los siguientes dos casos:

**Caso 1:** Existe  $k \in I$  tal que  $x \in U_k$  y  $z \notin U_k$ , entonces  $V_k = U_k$  y  $z \notin V_k$ . Pero esto resultaría absurdo, ya que  $z \in \bigcap_{i \in I} V_i$ .

**Caso 2:** Existe  $j \in I$  tal que  $x \notin U_j$  y  $z \in U_j$ , entonces  $V_j = X \setminus U_j$  y  $z \notin V_j$ . Igualmente resultaría absurdo, ya que  $z \in \bigcap_{i \in I} V_i$ .

Por tanto,  $\bigcap_{i \in I} V_i \subseteq \{x\}$ .

[ $\supseteq$ ]. Es evidente, porque para todo  $i \in I$ ,  $x \in V_i$ . □

## 1.4. CONJUNTOS MAGROS Y ESPACIOS BAIRE

En esta parte definiremos conceptos importantes para obtener una prueba del Teorema de Effros. Entre estos conceptos resaltamos el de conjunto magro y espacio Baire, los cuales serán fundamentales para el desarrollo de muchas de nuestras pruebas. Aunque los conceptos que definiremos a continuación tienen enunciados muy cortos, es necesario conseguir algunas buenas caracterizaciones de ellos; así que usaremos y probaremos algunas.

Para poder definir que es un conjunto magro, primero definiremos el concepto de un conjunto nunca denso o denso en ninguna parte, dando algunos ejemplos sencillos de estos conjuntos.

**Definición 25.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Un conjunto  $A$  es nunca denso o denso en ninguna parte en  $X$ , si el interior de  $\overline{A}$  es vacío.*

**Ejemplo 26.** ■ *Los subconjuntos finitos de números reales son nunca densos en  $\mathbb{R}$ .*

■  *$\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Z}$  son claros ejemplos de conjuntos nunca densos en  $\mathbb{R}$ .*

- Las sucesiones convergentes de números reales son nunca densas en  $\mathbb{R}$ .
- Cualquier curva cerrada simple en  $\mathbb{R}^2$  o lo que es lo mismo cualquier camino cerrado simple en  $\mathbb{C}$  son también nunca densos en  $\mathbb{C}$ .

**Definición 27.** Un conjunto  $A$  es magro o de primera categoría en  $X$ , si está contenido en una unión numerable de conjuntos nunca densos de  $X$ . Si un conjunto no es de primera categoría, diremos que es de segunda categoría. Un conjunto es comagro, si su complemento es magro.

**Ejemplo 28.**  $\mathbb{Q}$  es un conjunto magro en  $\mathbb{R}$ . Basta con ver que,

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} = \mathbb{Q}$$

donde  $\{q\}$  es un conjunto nunca denso en  $\mathbb{R}$  (i.e.,  $\text{int}(\overline{\{q\}}) = \emptyset$ ), para todo  $q \in \mathbb{Q}$ .

**Lema 29.** Todo subconjunto de un magro es magro.

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio topológico. Si  $A$  un conjunto magro en  $X$  y  $B \subseteq A$ . Probaremos que  $B$  es magro en  $X$ . Como  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  con  $A_n$  un nunca denso en  $X$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $B \cap A_n$  es un nunca denso en  $X$ , para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Debido a que  $\text{int}(\overline{B \cap A_n}) \subseteq \text{int}(\overline{A_n}) = \emptyset$ . Así,  $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n)$  es magro en  $X$ .  $\square$

**Proposición 30.** Sea  $X$  un espacio topológico. Son equivalentes:

1. Todo abierto no vacío en  $X$  no es magro en  $X$ .
2. Todo comagro es denso en  $X$ .
3. La intersección numerable de abiertos densos en  $X$  es densa en  $X$ .

*Demostración.* [(3)  $\Rightarrow$  (2)] Sea  $A$  un comagro en  $X$  y  $X \setminus A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$  con  $F_n$  un conjunto nunca denso en  $X$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Entonces el conjunto  $X \setminus \overline{F_n}$  es un abierto denso en  $X$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , en efecto,  $\overline{X \setminus \overline{F_n}} = X \setminus \text{int}(\overline{F_n}) = X \setminus \emptyset = X$ . Definamos  $O_n = X \setminus \overline{F_n}$  con  $n \in \mathbb{N}$ , por hipótesis  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$  es un conjunto denso en  $X$ , además  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \subseteq A$ . Así, el conjunto  $A$  es denso en  $X$ .

[(2)  $\Rightarrow$  (1)] Sea  $U$  un abierto no vacío en  $X$ . Supongamos que  $U$  es un conjunto magro en  $X$ , entonces  $X \setminus U$  es comagro en  $X$ . Por hipótesis,  $X \setminus U$  es denso en  $X$  y debido a esto  $(X \setminus U) \cap U \neq \emptyset$ , pero esto es absurdo y vemos que  $U$  es comagro en  $X$ .

[(1)  $\Rightarrow$  (3)] Sea  $O_n$  un abierto denso en  $X$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Si suponemos que el conjunto  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$  no es denso en  $X$ . Entonces existe un conjunto  $V$  abierto no vacío en  $X$  tal que  $V \cap \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \right) = \emptyset$  y  $V \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus O_n)$ . Pero  $X \setminus O_n$  es nunca denso en  $X$ . Luego  $V$  es un conjunto magro en  $X$  y esto contradice la hipótesis. Por tanto,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$  es denso en  $X$ .  $\square$

**Definición 31.** *Un espacio topológico es llamado un espacio Baire, si satisface cualquiera de las condiciones equivalentes en 30.*

**Teorema 32.** *Sea  $X$  un espacio Baire y  $V \subseteq X$  abierto no vacío. Entonces  $V$  es Baire.*

*Demostración.* Sean  $X$  un espacio Baire,  $V$  un abierto no vacío en  $X$  y  $W$  un abierto no vacío en  $V$  (i.e.,  $W = V \cap U$  con  $U$  abierto en  $X$ ). Probaremos que todo abierto no vacío en  $V$  con su topología relativa no puede ser magro en  $V$ . Supongamos que  $W$  es magro en  $V$ . Es decir que  $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$  con  $O_n$  un nunca densos en  $V$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\text{int}_V(\text{cl}_V(O_n)) = \emptyset$  y por la Proposición 2.95 de [3],  $\text{int}_V(\text{cl}_V(O_n)) = \text{int}_X(\text{cl}_X(O_n)) \cap V \cap V$ . Entonces  $\text{int}_X(\text{cl}_X(O_n)) \cap V \cap V = \emptyset$ . Pero si  $\text{int}_X(\text{cl}_X(O_n)) \cap V \cap V = \emptyset$  implica que  $\text{int}_X(\text{cl}_X(O_n)) \cap V = \emptyset$ . Así por la Proposición 2.48 de [3], tenemos que  $\text{int}_X(\text{cl}_X(O_n)) \cap V = \emptyset$ . Por tanto,  $\text{int}_X(\text{cl}_X(O_n)) = \emptyset$ . Pero esto es una contradicción,

porque  $W$  es un abierto en  $X$  y ningún abierto no vacío en  $X$  es magro. Así ningún abierto no vacío es magro en  $V$ . Luego  $V$  es un espacio Baire.  $\square$

**Definición 33.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Un conjunto  $A \subseteq X$  tiene la propiedad de Baire, si existe un abierto  $O$  en  $X$  tal que  $A \triangle O$  es un conjunto magro en  $X$ .*

**Observación 34.** *La familia  $\Sigma$  de conjuntos con la propiedad de Baire sobre un espacio  $X$  forman una  $\sigma$ -álgebra, es decir que cumple las siguientes condiciones:*

1.  $\emptyset \in \Sigma$
2. Si  $A$  está en  $\Sigma$ , también está  $X \setminus A$  en  $\Sigma$
3. La unión numerable de conjuntos de  $\Sigma$  está en  $\Sigma$ .

El siguiente lema es un resultado clásico de la Teoría descriptiva de conjuntos, puede ser consultado en [5], pág. 196.

**Lema 35.** *Todo conjunto analítico contenido en un espacio métrico separable tiene la propiedad de Baire.*

Se puede llegar a mostrar ejemplos de conjuntos con la propiedad Baire que no son espacios Baire y espacios Baire que no tienen la propiedad de Baire. Ilustraremos un ejemplo de un espacio con la propiedad Baire que no es un espacio Baire.

**Ejemplo 36.** *El subespacio de  $\mathbb{R}$  de los números racionales  $\mathbb{Q}$  es un conjunto con la propiedad de Baire. Como  $\mathbb{Q}$  es magro en sí mismo, todo subconjunto en  $\mathbb{Q}$  es magro. Entonces para todo abierto  $V$  en  $\mathbb{Q}$ , el conjunto  $\mathbb{Q} \triangle V$  es magro  $\mathbb{Q}$ . Pero  $\mathbb{Q}$  no es un espacio Baire, porque todo abierto no vacío en  $\mathbb{Q}$  es magro.*

El enunciado del siguiente teorema es conocido en la literatura como el Teorema de Categoría de Baire, cuya prueba se conoce desde el año 1899 desarrollada por el matemático francés René-Louis Baire como parte de su tesis de doctorado en la École Normale Supérieure (*Escuela Normal Superior*) en París, Francia.

**Teorema 37.** *Sea  $(X, d)$  un espacio Polaco. Entonces  $X$  es Baire.*

*Demostración.* Para llegar a una prueba de este teorema usaremos la Proposición 30, y mostraremos que la intersección numerable de abiertos densos es densa.

Sean  $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  una familia de abiertos densos en  $X$  y  $V$  un abierto no vacío en  $X$ . Probaremos que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \cap V \neq \emptyset$ . Claramente,  $V \cap U_0 \neq \emptyset$ . Entonces sea  $B_0$  una bola abierta con radio  $r < \frac{1}{2}$  tal que  $\overline{B_0} \subseteq V \cap U_0$ . Notemos que  $B_0 \cap U_1 \neq \emptyset$ , ahora sea  $B_1$  la bola abierta con radio  $r < \frac{1}{3}$  tal que  $\overline{B_1} \subseteq B_0 \cap U_1$ . Ahora si construimos las bolas abiertas  $B_{n+1}$  con radio  $r < \frac{1}{n}$  tal que  $\overline{B_{n+1}} \subseteq B_n \cap U_{n+1}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Podemos definir  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{x_i \in X \mid x_i \text{ - es el centro de la bola } B_i\}$ . Entonces observamos que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy, ya que dado un  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$  y  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ , para todo  $n, m > n_0$ . Luego  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$  para algún  $x \in X$ , porque  $(X, d)$  es completo. Además,  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \subseteq (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n) \cap V$  y  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \cap V \neq \emptyset$ , por tanto,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  es un conjunto denso en  $X$ .  $\square$

**Lema 38.** *Sea  $X$  un espacio Baire. Entonces la intersección de dos  $G_\delta$  densos en  $X$  es densa en  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos  $G_\delta$  densos en  $X$ . Probaremos que el conjunto  $A \cap B$  es denso en  $X$ . Sabemos  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$  y  $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$  con  $U_n$  y  $V_n$  abiertos en  $X$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $A$  y  $B$  son densos entonces  $U_n$  y  $V_n$  son densos para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ . Definamos  $W_n = U_n \cap V_n$ . Por la Proposición 30,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$  es densa en  $X$ , ya que cada  $W_n$  es un abierto denso en  $X$ . Luego vemos que:

$$A \cap B = \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) \cap \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n \cap V_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n.$$

Así que  $A \cap B$  es un conjunto denso en  $X$ .  $\square$

El siguiente ejemplo muestra un espacio que no es Polaco, usando el Teorema 16 y Lema 38.

**Ejemplo 39.** *El conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q}$  no es un espacio Polaco. Para probar esto, veremos que  $\mathbb{Q}$  no es  $G_\delta$ . Supongamos que  $\mathbb{Q}$  es  $G_\delta$ . Observemos que  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es un  $G_\delta$ , ya que  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\}$  y  $\mathbb{R} \setminus \{q\}$  es un abierto en  $\mathbb{R}$ , para cualquier  $q \in \mathbb{Q}$ . Ahora, como  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  son conjuntos  $G_\delta$  densos en  $\mathbb{R}$ . Por el Lema 38,  $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es diferente del vacío, pero esto es absurdo. Por tanto,  $\mathbb{Q}$  no puede ser un  $G_\delta$  en  $\mathbb{R}$ . Así que por el Teorema 16,  $\mathbb{Q}$  no es un espacio Polaco con la topología relativa dada por  $\mathbb{R}$ .*

**Definición 40.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Diremos que un conjunto  $A \subseteq X$  es localmente no magro, si  $V \cap A$  no es magro, para todo abierto no vacío  $V$  en  $X$  tal que  $V \cap A$  no es vacío.*

**Lema 41.** *Sea  $X$  un espacio y  $A \subseteq X$  un conjunto con la propiedad de Baire. Si  $A$  es denso y es localmente no magro en  $X$ , entonces  $A$  es comagro en  $X$ . Además, si  $X$  es Baire se cumple el recíproco.*

*Demostración.* Sea  $A$  un conjunto denso con la propiedad de Baire que es localmente no magro en  $X$ . Probaremos que el conjunto  $X \setminus A$  es magro en  $X$ . Como  $A$  tiene la propiedad de Baire, existe un abierto  $O$  en  $X$  tal que  $A \Delta O$  es magro en  $X$ . Observemos que  $(O \setminus A)$  es magro. Así que considerando:

$$\begin{aligned} X \setminus A &= (O \setminus A) \cup ((X \setminus O) \setminus A) \\ &= (O \setminus A) \cup ((X \setminus O) \cap (X \setminus A)) \\ &= (O \setminus A) \cup (X \setminus (O \cup A)). \end{aligned}$$

Probaremos que  $X \setminus (O \cup A)$  es magro. Supongamos que  $X \setminus (O \cup A)$  no es magro. Observemos que  $X \setminus (O \cup A)$  tiene la propiedad de Baire, así existe un abierto  $V$  no

vacío en  $X$  tal que  $(X \setminus (O \cup A)) \triangle V$  es magro. De lo anterior,  $(O \cup A) \cap V$  es magro. Entonces  $(O \cap V) \cup (A \cap V)$  es magro y  $A \cap V$  es magro, pero esto resulta contradiciendo que  $A$  es localmente no magro en  $X$ , porque  $A \cap V \neq \emptyset$ , ya que  $A$  es denso y  $V$  es un abierto no vacío en  $X$ . Luego  $X \setminus (O \cup A)$  es magro. De aquí  $X \setminus A$  es magro. Por tanto,  $A$  es comagro

Para mostrar la segunda afirmación, supongamos que  $X$  es Baire y sea  $A$  un comagro con la propiedad de Baire en  $X$ . Probaremos que  $A$  es denso en  $X$ . Observemos que  $X \setminus A$  es magro. Así que  $X \setminus A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$  con  $F_n$  es un cerrado nunca denso en  $X$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Luego  $X \setminus F_n$  es un abierto denso en  $X$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $X$  es Baire, la Proposición 30 nos dice que el conjunto  $H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus F_n)$  es denso en  $X$ , y además  $H \subseteq A$ . Por tanto,  $A$  es denso.

Ahora probaremos que  $A$  es localmente no magro. Sea  $V$  un abierto no vacío en  $X$ . Como  $H \cap V \subseteq A \cap V$  entonces  $H \cap V$  es un  $G_\delta$  denso en  $V$ . Por el Teorema 32,  $V$  es un espacio Baire. Así que por el Teorema 30,  $H \cap V$  no es magro. Por tanto,  $A \cap V$  tampoco es magro. Lo que implica que  $A$  sea localmente no magro.  $\square$

**Corolario 42.** *Sean  $X$  un espacio métrico separable,  $A \subseteq X$  y  $B \subseteq X$ . Si  $A$  y  $B$  son subespacios analíticos densos y localmente no magros en  $X$ , entonces  $A \cap B \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Primero observemos que  $X$  no es magro, pues  $A$  es localmente no magro. Por el Lema 35,  $A$  y  $B$  tienen la propiedad de Baire, y por el Lema 41,  $A$  y  $B$  son comagros, en particular  $A \cap B \neq \emptyset$ , pues de lo contrario,  $X$  sería magro.  $\square$

## 1.5. GRUPOS TOPOLÓGICOS

Los grupos topológicos son un concepto que nace con los grupos de transformaciones continuas o grupos de Lie introducidos por Sophus Lie en 1870, al tratar de dar solución a un problema en ecuaciones diferenciales. Aunque el concepto originalmente fue nombrado como grupo continuo por el matemático ruso Lev Pontriaguin en 1939, hoy

en día es mejor conocido como grupo topológico por la comunidad que trabaja en temas relacionados.

**Definición 43.** *Un conjunto  $G$  es un grupo topológico, si  $G$  es un grupo y un espacio topológico tal que las operaciones:*

$$\begin{array}{ll} G \times G & \longrightarrow G & G & \longrightarrow G \\ (g, h) & \longmapsto gh & g & \longmapsto g^{-1} \end{array}$$

*son continuas.*

**Observación 44.** *Sea  $G$  un grupo y un espacio topológico. Entonces  $G$  es grupo topológico si y solo si la función  $(g, h) \mapsto gh^{-1}$  es continua.*

**Definición 45.** *Un grupo  $G$  es metrizable, si existe una métrica  $d$  que induce la topología en  $G$ . Si  $d$  induce la topología sobre un grupo topológico  $G$  diremos que  $d$  es una métrica compatible. Una métrica  $d$  es invariante a izquierda en  $G$ , si  $d(gh, gk) = d(h, k)$  para todo  $g, h, k \in G$ . Un espacio  $G$  es invariante, si admite una métrica que es invariante a izquierda y a derecha.*

**Definición 46.** *Diremos que  $G$  es un grupo Polaco, si  $G$  es un grupo topológico cuya topología asociada es Polaca.*

**Ejemplo 47.** ■  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$  y  $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \cdot)$  son grupos topológicos.

■  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $(\mathbb{C}, +)$  y  $(\mathbb{R}^n, +)$  son grupos Polacos.

■ Cualquier grupo finito con la topología discreta es un grupo Polaco.

Si no definimos la operación del grupo, entonces asumiremos la notación multiplicativa para hablar de dicha operación.

**Lema 48.** *Sea  $G$  grupo topológico y  $W$  una vecindad abierta de  $g \in G$ . Existen  $A$  y  $B$  vecindades abiertas de  $e$ -neutro y  $g$  respectivamente en  $G$  tal que  $AB \subseteq W$ .*

*Demostración.* Sean  $g \in G$  y  $W$  una vecindad abierta de  $g$ , entonces por la continuidad en la operación del grupo topológico, existe  $A \times B$  una vecindad abierta de  $\{g\} \times \{e\}$  tal que  $AB \subseteq W$ . Así mismo existen  $A$  y  $B$  vecindades abiertas de  $e$  y  $g$  respectivamente.  $\square$

**Lema 49.** *Sea  $G$  un grupo metrizable. Entonces existe  $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  una base de vecindades abiertas numerable del neutro en  $G$  tal que:*

1.  $U_1 = G$ .
2.  $(U_n)^{-1} = U_n$ .
3.  $U_{n+1} \subseteq (U_{n+1})^2 \subseteq U_n$ .

*Demostración.* Definimos el conjunto  $B_n$  como la bola con centro  $e$  neutro en  $G$  y radio  $1/n$  con  $n > 1$ . Por la continuidad de la función  $g \mapsto g^2$  en  $e \in G$ , existe  $V_n$  abierto no vacío en  $B_{n+1}$  tal que  $V_n^2 \subseteq B_n$  con  $n > 1$ . Definiremos  $U_1 = G$  y  $U_{n+1} = V_n \cap V_n^{-1}$  (i. e.,  $U_{n+1} = (U_{n+1})^{-1}$ ), para todo  $n \geq 1$ . Así solo faltaría ver que el conjunto de todos los  $U_n$  cumple con la condición (3). En efecto,  $(U_{n+1})^2 = (V_n \cap V_n^{-1})^2 \subseteq V_n^2 \subseteq U_n$  y notemos que  $V_{n+1} = \{e\}V_{n+1} \subseteq U_{n+1}U_{n+1} = (U_{n+1})^2$ . Por tanto, el conjunto  $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  es una base de vecindades abiertas de  $e$ .  $\square$

**Definición 50.** *Una acción de un grupo  $G$  sobre un conjunto  $X$  es una función*

$$\begin{aligned} a : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longrightarrow a(g, x) := g \cdot x. \end{aligned}$$

*Tal que  $a(e, x) = e \cdot x = x$ , para todo  $x \in X$ , y  $a(g, a(h, x)) = a(gh, x) = gh \cdot x$  con  $g, h \in G$  y  $x \in X$  (con  $e$  elemento neutro de  $G$ ).*

**Definición 51.** *Si un grupo topológico  $G$  actúa de manera continua sobre un espacio topológico  $X$ , diremos que  $X$  es un  $G$ -espacio.*

**Ejemplo 52.** Veamos que siempre podemos construir un  $\mathbb{Z}$  – espacio en un espacio topológico con un homeomorfismo en el mismo. Sean  $\mathbb{Z}$  el grupo aditivo de los números enteros,  $X$  un espacio topológico y  $f : X \rightarrow X$  un homeomorfismo. Definimos la acción

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{Z} \times X &\longrightarrow X \\ (m, z) &\longmapsto f^m(z).\end{aligned}$$

donde  $f^m = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{m\text{-veces}}$ ,  $f^{-m} = \underbrace{f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}}_{m\text{-veces}}$  y  $f^0 = I_d$ .

Note que  $X$  es un  $\mathbb{Z}$  – espacio. En efecto,  $\alpha(0, z) = f^0(z) = I_d(z) = z$  con  $0$  el neutro aditivo de  $\mathbb{Z}$  y  $\alpha(n, \alpha(m, z)) = \alpha(n, f^m(z)) = f^{m+n}(z) = \alpha(n+m, z)$  para todo  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

**Ejemplo 53.** Siguiendo con el ejemplo anterior, una acción que usaremos para ilustrar el Teorema de Effros es la siguiente. Sean  $\mathbb{Z}$  el grupo aditivo de los números enteros y  $S^1$  la circunferencia unitaria definida en los complejos como  $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ . Definimos

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{Z} \times S^1 &\longrightarrow S^1 & f_\theta : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ (m, z) &\longmapsto f_\theta^m(z) & z &\longmapsto e^{i\theta} z\end{aligned}$$

con  $\theta \in \mathbb{R}$ . Además, la función  $f_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es un homeomorfismo.

La función  $f_\theta$  es conocida en la literatura como rotación compleja o rotar por  $\theta$  el complejo  $z$ . Además, como la función  $f_\theta$  esta bien definida de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$  y  $f_\theta(S^1) = S^1$ , tenemos que  $f_\theta : S^1 \rightarrow S^1$  esta bien definida.

**Proposición 54.** Si  $X$  es un  $G$  – espacio y  $G$  un grupo topológico, entonces para todo  $g \in G$ , la función  $x \mapsto g \cdot x$  es un homeomorfismo de  $X$  cuya inversa es  $x \mapsto g^{-1} \cdot x$ . Además, la función  $g \mapsto g \cdot x$  es continua, para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Probaremos que si  $g \in G$ , la función definida por

$$\begin{aligned}\lambda_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \lambda_g(x) := g \cdot x\end{aligned}$$

es continua.

Sabemos que la acción  $a : G \times X \rightarrow X$  es una función continua y por la Proposición 3.8 de [3] las funciones  $\lambda_g$  y  $\lambda_{g^{-1}}$  son continuas. Como  $\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = I_d$ . Entonces  $\lambda_g$  es un homeomorfismo.

Análogamente, si  $x \in X$  entonces la función definida por

$$\begin{aligned}\gamma_x : G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto \gamma_x(g) := g \cdot x\end{aligned}$$

es continua. □

En adelante, definiremos la función “operar con  $x$ ” como  $\gamma_x : G \rightarrow X$  dada por  $\gamma_x(g) = g \cdot x$  y la función “operar con  $g$ ” como  $\lambda_g : X \rightarrow X$  dada por  $\lambda_g(x) = g \cdot x$ .

**Definición 55.** *Dada una acción de un grupo topológico  $G$  sobre un espacio  $X$ . Entonces para cada  $x \in X$ , definimos el estabilizador de  $x$  como el conjunto:*

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

**Definición 56.** *Dada una acción de un grupo topológico  $G$  sobre un espacio  $X$ . Entonces para cada  $x \in X$ , la órbita de  $x$  es el conjunto:*

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}.$$

**Definición 57.** *Sea  $E_G$  la relación sobre el  $G$ -espacio  $X$ , definida de la siguiente manera:*

$$x E_G y \iff G \cdot x = G \cdot y.$$

Se tiene que  $E_G$  es una relación de equivalencia.

**Teorema 58.** Sean  $G$  un grupo Polaco y  $H$  un subgrupo cerrado de  $G$  entonces  $G/H$  es un espacio Polaco.

*Demostración.* Probaremos que  $G/H$  es un espacio Polaco, usando el Teorema 18. Es decir, debemos probar que  $G/H$  es un espacio métrico y que  $\pi_H$  es una función continua y abierta.

Sea  $\pi_H : G \rightarrow G/H$  es la función cociente dada por  $\pi_H(g) = gH$ . Si dotamos a  $G/H$  con la topología cociente dada por la función cociente  $\pi_H$ , entonces  $\pi_H$  es continua.

Probaremos que  $\pi_H$  es una función abierta. Sea  $U$  un abierto de  $G$ , para ver que  $\pi_H(U)$  es abierto en  $G/H$  hay que ver  $\pi_H^{-1}(\pi_H(U))$  es abierto en  $G$ . Observemos que

$$\pi_H^{-1}(\pi_H(U)) = \bigcup_{x \in G} \{xH\} = \bigcup_{x \in G} \bigcup_{h \in H} \{xh\} = \bigcup_{h \in H} Uh$$

es la unión de abiertos en  $G$ , ya que  $Uh$  es un abierto en  $G$  debido a que la función  $\gamma_h$  es un homeomorfismo. Por tanto,  $\pi_H^{-1}(\pi_H(U))$  es un abierto en  $G$  y por la topología cociente tenemos que  $\pi_H(U)$  es abierto en  $G/H$ .

Considere la métrica sobre  $G/H$  dada por:  $d^*(g_1H, g_2H) = \inf\{d(k_1, k_2) : k_1 \in g_1H, k_2 \in g_2H\}$ . Entonces  $d^*$  es una métrica compatible con la topología de  $G/H$  (ver Lema 2.2.8 de [8]). □

**Lema 59.** Sean  $G$  un grupo Polaco,  $X$  un  $G$  – espacio Polaco y  $x \in X$ . Entonces  $G_x$  es un subgrupo cerrado de  $G$ .

*Demostración.* Sean  $(X, d_X)$  y  $(G, d_G)$  espacios Polacos. Probaremos que  $G_x$  es un conjunto cerrado. Dada  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de elementos en  $G_x$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$ . Entonces dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d_G(g_n, g) < \varepsilon$ , para todo  $n > n_0$ . Luego por la continuidad de la acción  $a : G \times X \rightarrow X$ , tenemos que  $d_X(g_n \cdot x, g \cdot x) < \varepsilon$ . Pero  $g_n \cdot x = x$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Así,  $d_X(x, g \cdot x) < \varepsilon$ . Lo que implica  $g \cdot x = x$ . Por tanto,  $g \in G_x$  y  $G_x$  es cerrado en  $G$ .

Veamos que  $G_x$  es un subgrupo de  $G$ . Sean  $g$  y  $h$  elementos en  $G_x$ , entonces

$$\begin{aligned}(gh) \cdot x &= g \cdot (h \cdot x) \\ (gh) \cdot x &= g \cdot x \\ (gh) \cdot x &= x. \quad (1)\end{aligned}$$

Además, como  $g \cdot x = x$  tenemos que

$$\begin{aligned}g^{-1} \cdot x &= g^{-1} \cdot (g \cdot x) \\ g^{-1} \cdot x &= (g^{-1}g) \cdot x \\ g^{-1} \cdot x &= e \cdot x \\ g^{-1} \cdot x &= x. \quad (2)\end{aligned}$$

Por (1) y (2)  $G_x$  es un subgrupo  $G$ .

Por tanto,  $G_x$  es un subgrupo cerrado de  $G$ . □

El Teorema 58 y el Lema 59 nos serán de gran provecho para el progreso de los temas del documento. Además, los utilizaremos fuertemente para la prueba del Teorema de Effros.

## 2. EL TEOREMA DE EFFROS

Con el propósito realizar una prueba del Teorema de Effros, utilizaremos en este capítulo una técnica presentada por el matemático holandés Jan van Mill en [6] de 2004, la cual enunciaremos como el **Principio de la aplicación abierta**. Con el uso de esta técnica daremos una prueba un poco diferente a la hecha por E. G. Effros en 1965.

De aquí en adelante supondremos que los espacios son metrizablees y separables.

### 2.1. EL PRINCIPIO DE LA APLICACIÓN ABIERTA

La siguiente definición fue suministrada por van Mill en [6] y será fuertemente usada para la prueba del Principio de la aplicación abierta.

**Definición 60.** Sean  $G$  un grupo topológico y  $X$  un  $G$ -espacio. Si  $x \in X$  y  $U \subseteq G$ , entonces  $U \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in U\}$ . Una acción de  $G$  sobre  $X$  es transitiva si  $G \cdot x = X$  para todo  $x \in X$ . Una acción es micro-transitiva si para todo  $x \in X$  y toda vecindad  $U$  de  $e \in G$ , el conjunto  $U \cdot x$  es una vecindad de  $x \in X$ .

Veremos en el siguiente teorema una buena caracterización de cuándo la acción de un grupo es micro-transitiva.

**Teorema 61.** Sea  $X$  un  $G$ -espacio. Entonces  $G$  actúa micro-transitivamente sobre  $X$  si y solo si  $\gamma_x : G \rightarrow X$  es una función abierta para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Supongamos que  $G$  actúa micro-transitivamente sobre  $X$ . Mostraremos que  $\gamma_x : G \rightarrow X$  es una función abierta, con  $x \in X$ . Sea  $U$  un abierto en  $G$  y  $g \in G$ . Sabemos que  $g^{-1}U$  es una vecindad de  $e \in G$  ( $e$  neutro en  $G$ ) y como  $G$  actúa micro-transitivamente sobre  $X$ ,  $g^{-1}U \cdot x$  es una vecindad de  $x \in X$ , entonces  $g \cdot (g^{-1}U \cdot x) = eU \cdot x = U \cdot x$  es una vecindad de  $g \cdot x \in X$ . Pero  $U \cdot x = \gamma_x(U)$ , por lo tanto,  $\gamma_x$  es una función abierta para cualquier  $x$  en  $X$ . Recíprocamente, probaremos que si para cada  $x \in X$ , la función  $\gamma_x$  es abierta entonces  $G$  actúa micro-transitivamente sobre  $X$ . Sea  $x \in X$  y  $U$  una vecindad de  $e \in G$ , entonces  $\gamma_x(\text{int}(U)) = \text{int}(U) \cdot x$  es un abierto en  $X$ . Como  $e \in \text{int}(U)$  y  $e \cdot x = x$ , entonces  $x \in \gamma_x(\text{int}(U)) = \text{int}(U \cdot x)$ . Luego  $U \cdot x$  es una vecindad de  $x \in X$  y concluimos que  $G$  actúa micro-transitivamente sobre  $X$ .  $\square$

Sea  $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  la base del elemento neutro en  $G$  dada por el Lema 49, tal que:

1.  $U_1 = G$ .
2.  $(U_n)^{-1} = U_n$ .
3.  $U_{n+1} \subseteq (U_{n+1})^2 \subseteq U_n$ .

**Lema 62.** *Sea  $X$  un  $G$  – espacio de segunda categoría y  $G$  un grupo Polaco actuando transitivamente sobre  $X$ . Para todo  $x \in X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V$  un subconjunto abierto en  $X$  y  $z \in V \cap U_n \cdot x$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $U_m \cdot z \subseteq V \cap U_n \cdot x$ .*

*Demostración.* Sean  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Probaremos que existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $U_m \cdot z \subseteq V \cap U_n \cdot x$ . Sean  $h \in U_n$  y  $V$  un abierto en  $X$  tal que  $\gamma_x(h) = h \cdot x = z \in V$ . Definimos  $E = \gamma_x^{-1}(V)$  una vecindad abierta en  $h$ . Entonces  $e \in Eh^{-1} \cap U_n h^{-1}$ . Así que tomamos un natural  $m$  lo suficientemente grande tal que  $U_m \subseteq Eh^{-1} \cap U_n h^{-1}$ . Sea  $p \in U_m \cdot z$ . Existe  $g \in U_m$  tal que  $g \cdot z = p$ . Luego  $\gamma_x(gh) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot z = p$  y  $gh \in E \cap U_n$ . Por tanto,  $p \in V \cap U_n \cdot x$ .  $\square$

**Lema 63.** *Sea  $X$  un  $G$  – espacio de segunda categoría y  $G$  un grupo Polaco actuando transitivamente sobre  $X$ . Si  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $U_n \cdot x$  no es magro en  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Supongamos que  $U_n \cdot x$  es magro en  $X$ . Por el Teorema 12,  $G$  es de Lindelöf; es decir, toda cubierta abierta admite una subcubierta numerable. Así que tomando  $\{gU_n \mid g \in G\}$  como cubierta abierta en  $G$ . Entonces existe  $F$  subconjunto numerable de  $G$  tal que  $FU_n = G$ . Si  $k \in F$ , el conjunto  $(kU_n) \cdot x$  es la imagen del conjunto  $U_n \cdot x$  bajo el homeomorfismo  $\lambda_k$  de  $X$ . Como  $G$  actúa transitivamente sobre  $X$  entonces

$$X = G \cdot x = \bigcup_{k \in F} \{(kU_n) \cdot x\}.$$

Luego  $X$  es magro por ser la unión numerable de magros, pero esto es absurdo, ya que  $X$  es de segunda categoría.  $\square$

**Corolario 64.** *Sea  $X$  un  $G$ -espacio de segunda categoría y  $G$  un grupo Polaco actuando transitivamente sobre  $X$ . Para todo  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $U_n \cdot x$  es localmente no magro en  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $x \in X$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $V$  un abierto no vacío en  $X$ . Veamos que para cualesquiera  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $V \cap U_n \cdot x$  no es magro en  $X$ . Si  $z \in V \cap U_n \cdot x$ , por el Lema 62 existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $U_m \cdot z \subseteq V \cap U_n \cdot x$ . Además, por el Lema 63 el conjunto  $U_m \cdot z$  no es magro en  $X$ . Por tanto,  $V \cap U_n \cdot x$  no es magro en  $X$  y  $U_n \cdot x$  es localmente no magro en  $X$ .  $\square$

**Lema 65.** *Sea  $X$  un  $G$ -espacio de segunda categoría y  $G$  un grupo Polaco actuando transitivamente sobre  $X$ . Para todo  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{int}(\overline{U_n \cdot x})$  es denso en  $\overline{U_n \cdot x}$ . Además,  $x \in \text{int}(\overline{U_n \cdot x})$ .*

*Demostración.* Sean  $x \in X$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $V$  un abierto no vacío en  $X$  tal que  $V \cap U_n \cdot x$  es diferente de vacío. Por el Corolario 64, el conjunto  $V \cap U_n \cdot x$  no es magro. Entonces los conjuntos  $\overline{V \cap U_n \cdot x}$  y  $V \cap \overline{U_n \cdot x}$  no son nunca densos, es decir que tienen interior no vacío. Esto prueba que  $\text{int}(\overline{U_n \cdot x})$  es un conjunto denso en  $\overline{U_n \cdot x}$ .

Solo falta probar que  $x \in \text{int}(\overline{U_n \cdot x})$ . Sea  $V = \text{int}(\overline{U_{n+1} \cdot x})$ ,  $V$  no es vacío por lo probado anteriormente. Como  $V \cap U_{n+1} \cdot x \neq \emptyset$ , entonces existe  $y \in V \cap U_{n+1} \cdot x$  tal que

$y = h \cdot x$  para algún  $h \in U_{n+1}$ . Como la función  $\lambda_{h^{-1}}$  es un homeomorfismo, tenemos que:

$$x \in h^{-1}V \subseteq h^{-1}\overline{U_{n+1} \cdot x} = \overline{h^{-1}(U_{n+1} \cdot x)}$$

así que,

$$\overline{h^{-1}(U_{n+1} \cdot x)} = \overline{\{(h^{-1}\varphi) \cdot x : \varphi \in U_{n+1}\}} \subseteq \overline{U_{n+1}U_{n+1} \cdot x}$$

y por el inciso (3) del Lema 49,

$$\overline{U_{n+1}U_{n+1} \cdot x} \subseteq \overline{U_n \cdot x}.$$

Entonces  $h^{-1}V \subseteq \overline{U_n \cdot x}$  y  $h^{-1}V$  es una vecindad abierta de  $x$ . Por lo tanto,  $x \in \text{int}(\overline{U_n \cdot x})$ .  $\square$

**Lema 66.** *Sea  $X$  un  $G$  – espacio de segunda categoría y  $G$  un grupo Polaco actuando transitivamente sobre  $X$ . Si  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\text{int}(\overline{U_{n+1} \cdot x}) \subseteq U_n \cdot x$ .*

*Demostración.* Sean  $x \in X$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $z \in V = \text{int}(\overline{U_{n+1} \cdot x})$ . Probaremos que  $z \in \overline{U_n \cdot x}$ . Si consideramos el conjunto  $U_{n+1} \cdot z$  y  $W = \text{int}(\overline{U_{n+1} \cdot z})$ . Notamos que  $E = V \cap W$  es una vecindad abierta de  $z$  y  $E \subseteq \overline{U_{n+1} \cdot x}$  entonces por el Lema 65, el conjunto  $U_{n+1} \cdot x \cap E$  es denso en  $E$ . Análogamente, el conjunto  $U_{n+1} \cdot z \cap E$  es denso en  $E$ . Por el Corolario 64,  $U_{n+1} \cdot x$  y  $U_{n+1} \cdot z$  son conjuntos localmente no magros en  $X$ , y como  $E$  es abierto, entonces  $U_{n+1} \cdot x \cap E$  y  $U_{n+1} \cdot z \cap E$  son localmente no magros en  $E$ . Como  $U_{n+1} \cdot x \cap E$  y  $U_{n+1} \cdot z \cap E$  son subespacios abiertos de los espacios analíticos  $U_{n+1} \cdot x$  y  $U_{n+1} \cdot z$  respectivamente, por el Lema 21 son espacios analíticos. Por la Proposición 42 aplicada en el espacio métrico  $E$ , existe  $y \in (U_{n+1} \cdot x \cap E) \cap (U_{n+1} \cdot z \cap E)$ , y en consecuencia existen  $h, g \in U_{n+1}$  tales que  $y = h \cdot x$  y  $y = g \cdot z$ . Si  $\varphi = g^{-1}h$  entonces  $\varphi \cdot x = z$ . Además,  $\varphi \in U_{n+1}U_{n+1}$ , y  $U_{n+1}U_{n+1} \subseteq U_n$  por el Lema 49. Así,  $z \in U_n \cdot x$ .  $\square$

**Corolario 67.** *Sea  $X$  un  $G$  – espacio de segunda categoría y  $G$  un grupo Polaco actuando transitivamente sobre  $X$ . Si  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $U_n \cdot x$  es una vecindad de  $x$ .*

*Demostración.* Sean  $x \in X$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Probaremos que  $x \in \text{int}(U_n \cdot x)$ . Sabemos que  $\text{int}(\overline{U_{n+1} \cdot x}) \subseteq U_n \cdot x$ . Entonces  $\text{int}(\overline{U_{n+1} \cdot x}) \subseteq \text{int}(U_n \cdot x)$  y por el Lema 65,  $x \in \text{int}(\overline{U_{n+1} \cdot x})$ . Por tanto,  $x \in \text{int}(U_n \cdot x)$ .  $\square$

El siguiente teorema es el resultado que nos ayuda a probar una versión más débil del Teorema del Principio de la aplicación abierta.

**Teorema 68.** *Sea  $X$  un  $G$ -espacio de segunda categoría y  $G$  un grupo Polaco actuando transitivamente sobre  $X$ . Entonces  $\gamma_x$  es una aplicación abierta para todo  $x \in X$ .*

*Demostración.* Probaremos que para todo  $U_n$  en  $G$ , el conjunto  $U_n \cdot x$  es un abierto en  $X$ . Sea  $z \in U_n \cdot x$ . Usando el Lema 62 y tomando el abierto  $V = X$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $U_m \cdot z \subseteq U_n \cdot x$ . Por el Corolario 67,  $U_m \cdot z$  es una vecindad de  $z$ . Luego  $z \in \text{int}(U_m \cdot z)$ , lo cual implica que  $z \in \text{int}(U_n \cdot x)$ . Por lo tanto,  $U_n \cdot x$  es un conjunto abierto en  $X$ .

Ahora probaremos que  $\gamma_x(W)$  es un abierto en  $X$ , para cualquier abierto no vacío  $W$  en  $G$ . Sea  $z \in W \cdot x$ . Entonces  $z = g \cdot x$ , para algún  $g \in W$ . Por el Lema 48, existen  $A, B$  abiertos no vacíos contenidos en  $W$  tal que  $AB \subseteq W$  con  $e \in A$  y  $g \in B$ . Por lo tanto, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $U_n \subseteq A$ . Por lo visto antes  $U_n \cdot z$  es un conjunto abierto en  $X$ ,  $z \in U_n \cdot z$  y  $z = g \cdot x$ . Así tenemos que:

$$A \cdot z = (Ag) \cdot x \subseteq AB \cdot x \subseteq W \cdot x.$$

Luego  $z \in \text{int}(W \cdot x)$ . Por tanto  $\gamma_x(W)$  es un conjunto abierto en  $X$ .  $\square$

Exhibiremos el siguiente teorema como el **Principio de la aplicación abierta débil**, ya que este resultado es una implicación de nuestro teorema principal de esta sección.

**Teorema 69. (Principio de la aplicación abierta débil)** *Suponga que un grupo Polaco  $G$  actúa transitivamente sobre  $X$ . Si  $X$  es de segunda categoría, entonces  $G$  actúa micro-transitivamente sobre  $X$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 68, si  $X$  es un espacio de segunda categoría entonces  $\gamma_x$  es una aplicación abierta para todo  $x \in X$ . Por el Teorema 61, si  $\gamma_x$  es abierta entonces  $G$  actúa micro-transitivamente sobre  $X$ .  $\square$

En la prueba de la aplicación abierta débil no usamos la continuidad como tal de la acción sino que usamos fuertemente el hecho que la acción es **separablemente continua** (i.e., las funciones  $\gamma_x$  y  $\lambda_g$  son continuas, para todo  $x \in X$  y  $g \in G$ . Ver en [8], cap. 3).

**Teorema 70. (Principio de la aplicación abierta)** *Suponga que un grupo Polaco  $G$  actúa transitivamente sobre un espacio  $X$ . Luego son equivalentes:*

1.  $G$  actúa micro-transitivamente sobre  $X$ .
2.  $X$  es Polaco.
3.  $X$  es de segunda categoría.

*Demostración.* [(1)  $\Rightarrow$  (2)] Como  $G$  actúa micro-transitivamente sobre  $X$ , la función  $\gamma_x$  es abierta por el Teorema 61. Veamos que  $\gamma_x$  es sobreyectiva para cualquier  $x \in X$ . En efecto, fijando  $x \in X$ . Tenemos que dado  $z \in X$ , como  $G$  actúa transitivamente sobre  $X$  existe  $g \in G$  tal que  $g \cdot x = z$ , es decir que  $\gamma_x(g) = z$ , por tanto  $\gamma_x$  es sobreyectiva. Además, el espacio  $X$  es metrizable. Así que, usando el Teorema de Sierpinski 18, vemos que  $X$  es un espacio Polaco.

[(2)  $\Rightarrow$  (3)] Teorema 37 (Teorema de Categoría de Baire).

[(3)  $\Rightarrow$  (1)] Teorema 69.  $\square$

El teorema de la aplicación abierta falla si  $X$  es de primera categoría, un claro ejemplo en donde sucede es el siguiente:

**Ejemplo 71.** Sea  $\mathbb{Q}_d$  el grupo topológico aditivo de los números racionales con la topología discreta. Si definimos la acción:

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{Q}_d \times \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ (p, q) &\longmapsto \alpha(p, q) := p + q\end{aligned}$$

con  $\mathbb{Q}$  el subespacio de los números racionales en  $\mathbb{R}$ .

Claramente,  $\mathbb{Q}_d$  actúa transitivamente sobre  $\mathbb{Q}$  (i.e.,  $\mathbb{Q}_d + q = \mathbb{Q}$ ,  $\forall q \in \mathbb{Q}$ ). Pero  $\mathbb{Q}_d$  no actúa micro-transitivamente sobre  $\mathbb{Q}$ , ya que  $\{q\}$  es un abierto en  $\mathbb{Q}_d$  y  $\gamma_x(\{q\})$  no es un abierto en  $\mathbb{Q}$ , para todo  $q, x \in \mathbb{Q}$ , por tanto,  $\gamma_x$  no es una función abierta para todo  $x \in \mathbb{Q}$ .

Por supuesto, la razón de esto es que  $\mathbb{Q}$  (con la métrica usual) no es completo.

El principio de la aplicación abierta implica el Teorema de Effros pero también prueba el teorema clásico de la función abierta del análisis funcional (para espacios Banach separable). Recordemos que el teorema de la función abierta enuncia lo siguiente:

**Teorema 72.** (Teorema de la función abierta) Sea  $\phi : B \rightarrow E$  un operador lineal continuo sobreyectivo entre dos espacios de Banach separables. Entonces  $\phi$  es una función abierta.

*Demostración.* Probaremos que  $\phi$  es una función abierta. Podemos ver a  $B$  como un grupo topológico con la operación aditiva del espacio vectorial. Definimos la acción  $\alpha : B \times E \longrightarrow E$  por  $\alpha(x, y) = \phi(x) + y$ . Veamos que  $\alpha$  es una acción transitiva. Dado  $z \in E$ , entonces la órbita de  $z$  bajo la acción  $\alpha$  viene dada por  $\alpha(B, z) := \{\phi(x) + z \mid x \in B\}$ . Como  $\phi$  es sobreyectiva (i.e.,  $\phi(B) = E$ ), vemos que  $\alpha(B, z) = E + z = E$ . Luego, la acción  $\alpha$  es una acción transitiva. Por el Teorema 70,  $B$  actúa micro-transitivamente sobre  $E$ . Así que por el Teorema 68, la función  $\gamma_0(x) = \alpha(x, 0) = \phi(x) + 0 = \phi(x)$  es abierta, con 0 el neutro aditivo de  $E$ .  $\square$

## 2.2. EL TEOREMA DE EFFROS

En esta sección probaremos el teorema que lleva como título este trabajo monográfico.

**Teorema 73.** (*Teorema de Effros, 1965*) Sean  $G$  un grupo Polaco y  $X$  un  $G$ -espacio Polaco. Entonces son equivalentes:

1. Para todo  $x \in X$ , la función  $gG_x \rightarrow g \cdot x$  de  $G/G_x$  en  $G \cdot x$  es un homeomorfismo.
2. Toda órbita es de segunda categoría en sí misma.
3. Toda órbita es  $G_\delta$  en  $X$ .
4.  $X/E_G$  es  $T_0$ .

*Demostración.* Primero probaremos que [(1)  $\Rightarrow$  (3)]. Dado  $x \in X$ , por Lema 59 el conjunto  $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$  es cerrado en  $G$ , ahora por el Teorema 58 el espacio  $G/G_x$  es Polaco. Como  $G/G_x$  es homeomorfo a  $G \cdot x$  entonces  $G \cdot x$  es Polaco. Ahora por el Teorema 16, tenemos que  $G \cdot x$  es un espacio  $G_\delta$ .

[(3)  $\Rightarrow$  (2)] Notemos que  $G \cdot x$  es un subconjunto  $G_\delta$  en el espacio Polaco  $X$  para todo  $x \in X$ . Ahora por el Teorema 16 se tiene que  $G \cdot x$  es un subespacio Polaco de  $X$ . Así por el Teorema 37, el espacio  $G \cdot x$  es de segunda categoría.

[(2)  $\Rightarrow$  (1)] Sea  $x \in X$  y considere la función  $\varphi : G/G_x \rightarrow G \cdot x$  dada por  $\varphi(gG_x) = g \cdot x$ . Por hipótesis  $G \cdot x$  no es un espacio magro, además  $G$  actúa micro-transitivamente sobre  $G \cdot x$ , pues  $G \cdot x$  es invariante. Aplicando el Teorema 70, tenemos que  $G$  actúa micro-transitivamente sobre  $G \cdot x$  y la función  $\gamma_x$  es abierta, evidentemente,  $\varphi \circ f = \gamma_x$  donde  $f : G \rightarrow G/G_x$  es la función cociente.

Probaremos que  $\varphi$  es una función abierta, es decir que  $\varphi(U)$  es un abierto en  $G \cdot x$ , si  $U$  es un abierto en  $G/G_x$ . Ahora tomando cualquier abierto  $U$  en  $G/G_x$  entonces  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $G$ . Como  $\gamma_x = \varphi \circ f$  es una función abierta, tenemos que  $\gamma_x(f^{-1}(U))$  es un abierto en  $G \cdot x$ , pero  $\gamma_x(f^{-1}(U)) = (\varphi \circ f)(f^{-1}(U)) = \varphi(f \circ f^{-1}(U)) = \varphi(U)$ . Por tanto,

$\varphi(U)$  es un conjunto abierto en  $G \cdot x$  y por el Teorema 8 la función  $\varphi$  es continua, ya que  $\gamma_x$  es continua. Asimismo,  $\varphi$  es una función biyectiva. Veamos que  $\varphi$  es inyectiva, si  $\varphi(gG_x) = \varphi(hG_x)$  con  $g, h \in G$  entonces  $g \cdot x = h \cdot x$ , lo cual implica que  $x = (g^{-1}h) \cdot x$ . Por tanto,  $g^{-1}h \in G_x$  y  $gG_x = hG_x$ . Veamos que  $\varphi$  es sobreyectiva. Basta ver que dado  $y \in G \cdot x$ , existe  $g \in G$  tal que  $y = g \cdot x$  y así  $\varphi(gG_x) = y$ . Luego  $\varphi$  es sobreyectiva. Usando la Proposición 4,  $\varphi$  es un homeomorfismo.

[(3)  $\Rightarrow$  (4)] Probaremos que  $X/E_G$  es un espacio  $T_0$ . Por el Lema 23, bastará probar que para cualquier par de elementos  $[x]$  e  $[y]$  en  $X/E_G$ , si  $\overline{[x]} = \overline{[y]}$  entonces  $[x] = [y]$ . Sean  $[x]$  e  $[y]$  en  $X/E_G$  tal que  $\overline{[x]} = \overline{[y]}$ . Observemos que si  $[x] \in X/E_G$ ,  $\pi^{-1}([x]) = G \cdot x$ , donde  $\pi(x) = [x]$  con  $x \in X$ .

Además, la función  $\pi$  es abierta y  $\pi^{-1}(\overline{[x]}) = \overline{\pi^{-1}([x])}$ . En efecto, si  $z \in \pi^{-1}(\overline{[x]})$  y  $V$  es un abierto en  $X$  tal que  $z \in V$ , entonces  $\pi(V)$  es un abierto en  $X/E_G$  tal que  $\pi(x) \in \pi(V)$  y  $\pi(x) \in \overline{[x]}$ . Luego  $\pi(V) \cap \overline{[x]} \neq \emptyset$  y  $x \in \pi(V)$ . Existe  $y \in V$  tal que  $\pi(y) = x$  y  $V \cap \pi^{-1}([x]) \neq \emptyset$ . Por tanto,  $z \in \overline{\pi^{-1}([x])}$ .

Si  $z \in \overline{\pi^{-1}([x])}$ . Dado cualquier abierto  $W$  en  $X$  tal que  $z \in W$ , tenemos que  $\pi^{-1}([x]) \cap W \neq \emptyset$ . Entonces  $[x] \cap \pi(W) \neq \emptyset$  y  $\pi(W)$  es un abierto en  $X/E_G$  tal que  $\pi(z) \in \pi(W)$ . Así,  $\pi(z) \in \overline{[x]}$  y  $z \in \pi^{-1}(\overline{[x]})$ . Por tanto,  $\pi^{-1}(\overline{[x]}) = \overline{\pi^{-1}([x])}$ .

Usando lo anterior,  $\pi^{-1}(\overline{[x]}) = \overline{G \cdot x}$ . Ahora si  $\overline{[x]} = \overline{[z]}$ , aplicando  $\pi^{-1}$  obtenemos que  $\overline{G \cdot x} = \overline{G \cdot z} = Z$ , para algún  $Z \subseteq X$ . Por el Lema 38,  $G \cdot x \cap G \cdot z \neq \emptyset$  porque  $G \cdot x$  y  $G \cdot z$  son  $G_\delta$  densos en  $Z$ . Así  $G \cdot x = G \cdot z$  y  $x = z$ . Por el Teorema 23,  $X/E_G$  es un espacio  $T_0$ .

[(4)  $\Rightarrow$  (3)] Sean  $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  una base para el espacio  $X$  y  $x \in X$ . Definimos

$$V_n = \begin{cases} \pi(U_n), & \text{si } \pi(x) \in \pi(U_n); \\ X/G \setminus \pi(U_n), & \text{si } \pi(x) \notin \pi(U_n). \end{cases}$$

Como  $X/G$  es un espacio  $T_0$ , por la Proposición 24 tenemos que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \{\pi(x)\}$ . Luego

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi^{-1}(V_n) = \pi^{-1}(\pi(x)) = G \cdot x.$$

Ya que  $V_n$  bien pueda ser un abierto o un cerrado de  $X/G$ , entonces  $\pi^{-1}(V_n)$  también puede ser un abierto o un cerrado de  $X$ . Así, cada  $\pi^{-1}(V_n)$  es un  $G_\delta$  de  $X$ . Y concluimos que  $G \cdot x$  es un  $G_\delta$  de  $X$ .

□

**Ejemplo 74.** Sean  $\mathbb{Z}$  el grupo aditivo de los números enteros y  $S^1$  la circunferencia unitaria en el conjunto de los números complejos. Recordemos  $f_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f_\theta(w) = e^{i\theta}w$ , definida en el Ejemplo 53. Sabemos que ese homeomorfismo hace de  $S^1$  un  $\mathbb{Z}$ -espacio. Sea  $w \in S^1$ , estudiaremos la órbita de  $z$ :

$$\mathbb{Z} \cdot w = \{\dots, e^{-2i\pi m\theta}w, e^{-2i\pi(m-1)\theta}w, \dots, e^{-2i\pi\theta}w, w, e^{2i\pi\theta}w, \dots, e^{2i\pi m\theta}w, \dots\}.$$

Dividiremos el problema en dos casos que dependen del argumento  $\theta$  del complejo.

**Caso 1.** Si  $\theta \in \mathbb{Q}$  entonces podemos escribir a  $\theta = \frac{p}{q}$  con  $p, q \in \mathbb{Z}$  y máximo común divisor de  $p$  y  $q$  igual a 1. Veamos que pasa con la órbita de  $w$ . Si  $m = q$  entonces  $m\theta \in \mathbb{Z}$  y  $e^{2i\pi m\theta} = 1$ . Vemos que:

$$\mathbb{Z} \cdot w = \{w, e^{2i\pi\theta}w, \dots, e^{2i\pi(q-1)\theta}w\}.$$

Así que,  $\mathbb{Z} \cdot w = \{e^{2i\pi m\theta}w \mid m \in \mathbb{Z}\}$  es un conjunto finito y la función  $f_\theta$  es periódica. Por tanto, la órbita de  $w$  es  $G_\delta$ . Por el Teorema 73,  $\mathbb{Z} \cdot w$  es de segunda categoría.

**Caso 2.** Si  $\theta \notin \mathbb{Q}$  entonces para cualquier  $w \in S^1$  la órbita de  $w$  es densa, eso quiere decir que, dados  $z \in S^1$  y  $\varepsilon > 0$ , existe  $n > 0$  tal que  $\|f_\theta^n(w) - z\| < \varepsilon$ . Por tanto,  $\overline{\mathbb{Z} \cdot w} = S^1$ . Note que  $S^1 \setminus \mathbb{Z} \cdot w$  es un  $G_\delta$  pues  $\mathbb{Z} \cdot w$  es numerable. Probaremos que  $\mathbb{Z} \cdot w$  no es  $G_\delta$ . Supongamos que  $\mathbb{Z} \cdot w$  si es  $G_\delta$ , entonces observemos que tanto  $\mathbb{Z} \cdot w$  como  $S^1 \setminus \mathbb{Z} \cdot w$  son densos. Ya que si tomamos  $t \notin \mathbb{Z} \cdot w$  entonces

$\mathbb{Z} \cdot t \subseteq S^1 \setminus \mathbb{Z} \cdot w$  y  $\mathbb{Z} \cdot t$  es densa en  $S^1$ . Así,  $S^1 \setminus \mathbb{Z} \cdot w$  es denso también. Como  $\mathbb{Z} \cdot w$  y  $S^1 \setminus \mathbb{Z} \cdot w$  son  $G_\delta$  densos entonces por el Lema 38,  $\mathbb{Z} \cdot w \cap (S^1 \setminus \mathbb{Z} \cdot w)$  es denso en  $S^1$ , pero esto es absurdo. Por tanto,  $\mathbb{Z} \cdot w$  no es un conjunto  $G_\delta$ , es decir, ninguna órbita es  $G_\delta$ . Por el Teorema 73,  $\mathbb{Z} \cdot w$  es un conjunto magro para cualquier  $w \in S^1$ .

## CITAS BIBLIOGRÁFICAS

ANCEL, F. D. An alternative proof and applications of a theorem of E. G. Effros, *Michigan Math. J.* **34** 39-55 (1987).

BECKER H. and KECHRIS, A. S., *The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions*, Cambridge University Press, (1996).

CAMARGO GARCÍA J. E. and VILLAMIZAR ROA, E. J. *Topología General*, [En edición], Bucaramanga, (2016).

EFFROS, E. G. Transformation groups and  $C^*$  – algebras, *Annals of Math.* **81** 38-55 (1965).

KECHRIS, A. S. *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **156**, Springer-Verlag, Berlin, (1994).

VAN MILL, J. A note on the Effros theorem, *Amer. Math. Monthly* **111**, 801-806 (2004).

MUNKRES, J. R. *Topología. 2ª edición*, Prentice Hall, INC, Madrid, España, (2000).

GAO, S. *Invariant descriptive set theory*. Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), **293**. CRC Press, Boca Raton, FL, (2009).

UNGAR, G. S. On all kinds of homogeneous spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*. Volume **212**, (1975).