

**CONTROL DE POSICIÓN DE UN SISTEMA DE IMPACTO EN EL CONTEXTO  
DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS HÍBRIDOS**

**Luz Áida Vega Mantilla**

**Carlos Eduardo Santos Vesga**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS**

**ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE  
TELECOMUNICACIONES**

**BUCARAMANGA**

**2017**

**CONTROL DE POSICIÓN DE UN SISTEMA DE IMPACTO EN EL CONTEXTO  
DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS HÍBRIDOS**

**Luz Aída Vega Mantilla**

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de  
Ingeniera Mecánica**

**Carlos Eduardo Santos Vesga**

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de  
Ingeniero Electricista**

**Director**

**JULIO ANDELFO FLÓREZ VARGAS**

*M.Sc. Ingeniería Electrónica*

**Codirectores**

**JAIME GUILLERMO BARRERO**

*M.Sc. En Ingeniería Electrónica*

**CARLOS BORRAS PINILLA**

*Ph.D. En Ingeniería Mecánica*

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA  
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE  
TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA  
2017**

## **AGRADECIMIENTOS**

*A Dios, por responder a mis dudas, agudizando mi visión en momentos de obscuridad, por guiar mis pasos y por poner a mi favor la buena voluntad de las personas que contribuyeron al alcance de esta meta.*

*A mi compañero de lucha y esposo devoto, Julio Flórez, por cierto, el mejor director que pude tener; que con su sabiduría y paciencia me alentó para avanzar y culminar con éxito este maravilloso y enriquecedor viaje.*

**Luz Aída Vega Mantilla**

**DEDICATORIA**

*Dedicado a mi familia.*

**Luz Áida Vega Mantilla**

## **AGRADECIMIENTOS**

*A mis padres Luis Eduardo Santos y Gilma Vesga que con su esfuerzo y ejemplo hicieron posible la culminación de esta meta.*

*A mis hermanas y amigas Silvia Cristina y Adriana Rocio, cuyo apoyo incondicional fue indispensable para alcanzar este logro.*

*A mis tíos, tías y primos que me acompañaron y apoyaron cuando más lo necesitaba.*

*A esos amigos, con quienes he compartido conocimiento, risas y lamentos a lo largo de nuestro proceso de formación.*

*A aquellos docentes y personal administrativo que aportaron y dejaron una huella imborrable en lo personal y en lo profesional.*

**Carlos Eduardo**

**DEDICATORIA**

*Dedicado a mi familia que nunca dejo de apoyarme y siempre creyó en mí a pesar de los obstáculos presentados.*

**Carlos Eduardo**

## CONTENIDO

	Pág.
<b>1. PRELIMINARES .....</b>	<b>20</b>
<b>1.1 ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN .....</b>	<b>21</b>
<b>1.2 PLANTEAMIENTO Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA.....</b>	<b>22</b>
<b>1.3 OBJETIVOS.....</b>	<b>24</b>
1.3.1 Objetivo general .....	24
1.3.2 Objetivos específicos .....	24
<b>2. SISTEMAS DINÁMICOS HÍBRIDOS .....</b>	<b>25</b>
<b>2.1 MODELADO HÍBRIDO DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS .....</b>	<b>26</b>
<b>2.2 SISTEMAS DINÁMICOS SUAVES A TRAZOS .....</b>	<b>29</b>
2.2.1 <i>DoS zero</i> .....	29
2.2.2 <i>DoS one</i> .....	29
2.2.3 <i>DoS two</i> .....	29
<b>2.3 SISTEMAS DE FILIPPOV O DESLIZANTES .....</b>	<b>30</b>
2.3.1 Cruzando - deslizando .....	30
2.3.2 Rozando - deslizando.....	30
2.3.3 Conmutando - deslizando .....	31
2.3.4 Aumentando - deslizando.....	31
<b>2.4 EL SISTEMA DINÁMICO PELOTA QUE REBOTA: <i>BOUNCING BALL</i> .</b>	<b>33</b>
2.4.1 <i>Bouncing Ball</i> en el espacio de estados.....	34
2.4.2 <i>Bouncing Ball</i> como sistema dinámico híbrido .....	41
<b>3. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES .....</b>	<b>45</b>
<b>3.1 ESTABILIDAD DE LYAPUNOV .....</b>	<b>46</b>
<b>3.2 FUNDAMENTOS DEL CONTROL POR MODOS DESLIZANTES: <i>SMC</i></b>	<b>51</b>
<b>3.3 CONTROL POR MODOS DESLIZANTES APLICADO AL <i>BOUNCING BALL</i> HÍBRIDO .....</b>	<b>61</b>
<b>4. ANÁLISIS DE RESULTADOS .....</b>	<b>64</b>
<b>4.1 ANÁLISIS DE SIMULACIONES .....</b>	<b>64</b>

4.1.1	Caso 1.....	64
4.1.2	Caso 2.....	72
4.1.3	Caso 3.....	79
4.1.4	Caso 4.....	88
4.1.5	Caso 5.....	97
4.1.6	Caso 6.....	108
4.1.7	Caso 7.....	117
4.1.8	Caso 8.....	121
4.1.9	Caso 9.....	126
	<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>133</b>
	<b>RECOMENDACIONES Y TRABAJO FUTURO .....</b>	<b>135</b>
	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>136</b>
	<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>142</b>

## LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 2.1 Especificaciones de <i>Bouncing Ball</i> . .....	42
Tabla 4.1 Especificaciones de simulación para Caso 1. ....	64
Tabla 4.2 Resumen de simulación - Caso 1. ....	72
Tabla 4.3 Especificaciones de simulación para Caso 2. ....	72
Tabla 4.4 Resumen de simulación - Caso 2. ....	78
Tabla 4.5 Especificaciones de simulación para Caso 3. ....	79
Tabla 4.6 Resumen de simulación - Caso 3. ....	88
Tabla 4.7 Especificaciones de simulación para Caso 4. ....	89
Tabla 4.8 Resumen de simulación - Caso 4. ....	97
Tabla 4.9 Especificaciones de simulación para Caso 5. ....	98
Tabla 4.10 Resumen de simulación - Caso 5. ....	107
Tabla 4.11 Especificaciones de simulación para Caso 6. ....	108
Tabla 4.12 Resumen de simulación - Caso 6. ....	116
Tabla 4.13 Especificaciones de simulación para Caso 7. ....	117
Tabla 4.14 Resumen de simulación - Caso 7. ....	121
Tabla 4.15 Especificaciones de simulación para Caso 8. ....	122
Tabla 4.16 Resumen de simulación - Caso 8. ....	126
Tabla 4.17 Especificaciones de simulación para Caso 9. ....	127
Tabla 4.18 Resumen de simulación - Caso 9. ....	131
Tabla 4.19 Consolidación de posición máxima. ....	132
Tabla 4.20 Consolidación de error de posición. ....	132

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 2.1 Diagrama de transición de estados híbrido.....	28
Figura 2.2 <i>Filippov crossing-sliding</i> .....	31
Figura 2.3 <i>Filippov grazing-sliding</i> . ....	32
Figura 2.4 <i>Filippov switching-sliding</i> . ....	32
Figura 2.5 <i>Filippov adding-sliding</i> . ....	33
Figura 2.6 Diagrama cinemático del Bouncing Ball.....	34
Figura 2.7 Posición en el tiempo.....	42
Figura 2.8 Velocidad en el tiempo.....	43
Figura 2.9 Mapa de fase. ....	43
Figura 2.10 Trayectoria solución en el tiempo.   .....	44
Figura 2.11 Bouncing Ball híbrido. ....	44
Figura 3.1 Error de seguimiento.....	47
Figura 3.2 Concepto de estabilidad de Lyapunov. ....	48
Figura 3.3 Función típica definida positiva de Lyapunov. ....	49
Figura 3.4 Ilustración de definición 2. ....	50
Figura 3.5 Condición deslizante.....	55
Figura 3.6 Interpretación gráfica de las ecuaciones (3.8) y (3.11). ....	56
Figura 3.7 Equivalente dinámico del SMC según Filippov. ....	59
Figura 3.8 Ley de control deslizante .....	60
Figura 3.9 Esquema de control SMC.....	61
Figura 3.10 Estrategia de control SMC aplicado al <i>Bouncing Ball</i> . ....	63
Figura 4.1 Posición – Caso 1.....	65
Figura 4.2 Posición durante control – Caso 1. ....	66
Figura 4.3 Velocidad – Caso 1.....	66
Figura 4.4 Velocidad durante control – Caso 1. ....	67
Figura 4.5 Detalle posición post primer impacto – Caso 1.....	68
Figura 4.6 Detalle velocidad post primer impacto – Caso 1.....	68

Figura 4.7 Posición vs ley deslizante (Impacto 1) – Caso 1.....	69
Figura 4.8 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 1.....	69
Figura 4.9 Detalle ley de control deslizante (Impacto 2) – Caso 1.....	70
Figura 4.10 Mapa de fase – Caso 1.....	70
Figura 4.11 <i>Chatteting</i> – Caso 1.....	71
Figura 4.12 Posición – Caso 2.....	73
Figura 4.13 Posición durante control – Caso 2.....	73
Figura 4.14 Velocidad – Caso 2.....	74
Figura 4.15 Velocidad durante control – Caso 2.....	74
Figura 4.16 Detalle posición post primer impacto – Caso 2.....	75
Figura 4.17 Detalle velocidad post primer impacto – Caso 2.....	75
Figura 4.18 Posición vs ley deslizante (Impacto 1) – Caso 2.....	76
Figura 4.19 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 2.....	76
Figura 4.20 Detalle ley de control deslizante (Impacto 2) – Caso 2.....	77
Figura 4.21 Mapa de fase – Caso 2.....	77
Figura 4.22 <i>Chatteting</i> – Caso 2.....	78
Figura 4.23 Posición – Caso 3.....	80
Figura 4.24 Posición durante control – Caso 3.....	80
Figura 4.25 Velocidad – Caso 3.....	81
Figura 4.26 Velocidad durante control – Caso 3.....	81
Figura 4.27 Detalle posición post primer impacto – Caso 3.....	82
Figura 4.28 Detalle posición post segundo impacto – Caso 3.....	83
Figura 4.29 Detalle posición post tercer impacto – Caso 3.....	83
Figura 4.30 Detalle velocidad post primer impacto – Caso 3.....	84
Figura 4.31 Detalle velocidad post segundo impacto – Caso 3.....	84
Figura 4.32 Detalle velocidad post tercer impacto – Caso 3.....	85
Figura 4.33 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 3.....	85
Figura 4.34 Detalle ley de control deslizante (Impacto 2) – Caso 3.....	86
Figura 4.35 Detalle ley de control deslizante (Impacto 3) – Caso 3.....	86
Figura 4.36 Mapa de fase – Caso 3.....	87

Figura 4.37 <i>Chattering</i> – Caso 3.....	87
Figura 4.38 Posición – Caso 4.....	89
Figura 4.39 Posición durante control – Caso 4.....	90
Figura 4.40 Velocidad – Caso 4.....	90
Figura 4.41 Velocidad durante control – Caso 4.....	91
Figura 4.42 Detalle posición post primer impacto – Caso 4.....	91
Figura 4.43 Detalle posición post segundo impacto – Caso 4.....	92
Figura 4.44 Detalle posición post tercer impacto – Caso 4.....	92
Figura 4.45 Detalle velocidad post primer impacto – Caso 4.....	93
Figura 4.46 Detalle velocidad post segundo impacto – Caso 4.....	93
Figura 4.47 Detalle velocidad post tercer impacto – Caso 4.....	94
Figura 4.48 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 4.....	94
Figura 4.49 Detalle ley de control deslizante (Impacto 2) – Caso 4.....	95
Figura.50 Detalle ley de control deslizante (Impacto 3) – Caso 4.....	95
Figura 4.51 Mapa de fase – Caso 4.....	96
Figura 4.52 <i>Chattering</i> – Caso 4.....	96
Figura 4.53 Posición – Caso 5.....	98
Figura 4.54 Posición durante control – Caso 5.....	99
Figura 4.55 Velocidad – Caso 5.....	100
Figura 4.56 Velocidad durante control – Caso 5.....	100
Figura 4.57 Detalle posición post primer impacto – Caso 5.....	101
Figura 4.58 Detalle posición post segundo impacto – Caso 5.....	101
Figura 4.59 Detalle posición post tercer impacto – Caso 5.....	102
Figura 4.60 Detalle velocidad post primer impacto – Caso 5.....	103
Figura 4.61 Detalle velocidad post segundo impacto – Caso 5.....	103
Figura 4.62 Detalle velocidad post tercer impacto – Caso 5.....	104
Figura 4.63 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 5.....	104
Figura 4.64 Detalle ley de control deslizante (Impacto 2) – Caso 5.....	105
Figura 4.65 Detalle ley de control deslizante (Impacto 3) – Caso 5.....	105
Figura 4.66 Mapa de fase – Caso 5.....	106

Figura 4.67 <i>Chattering</i> – Caso 5.....	107
Figura 4.68 Posición – Caso 6.....	109
Figura 4.69 Posición durante control – Caso 6.....	109
Figura 4.70 Velocidad – Caso 6.....	110
Figura 4.71 Velocidad durante control – Caso 6.....	111
Figura 4.72 Detalle posición post primer impacto – Caso 6.....	111
Figura 4.73 Detalle posición post segundo impacto – Caso 6.....	112
Figura 4.74 Detalle posición post tercer impacto – Caso 6.....	112
Figura 4.75 Detalle posición post cuarto impacto – Caso 6.....	113
Figura 4.76 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 6.....	113
Figura 4.77 Detalle ley de control deslizante (Impacto 2) – Caso 6.....	114
Figura 4.78 Detalle ley de control deslizante (Impacto 3) – Caso 6.....	114
Figura 4.79 Detalle ley de control deslizante (Impacto 4) – Caso 6.....	115
Figura 4.80 Mapa de fase – Caso 6.....	116
Figura 4.81 Posición – Caso 7.....	118
Figura 4.82 Posición vs ley deslizante (Impacto 1) – Caso 7.....	118
Figura 4.83 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 7.....	119
Figura 4.84 Posición vs ley deslizante (Impacto 2) – Caso 7.....	119
Figura 4.85 Posición vs ley deslizante (Impacto 3) – Caso 7.....	120
Figura 4.86 Velocidad durante control – Caso 7.....	120
Figura 4.87 Posición – Caso 8.....	122
Figura 4.88 Posición vs ley deslizante (Impacto 1) – Caso 8.....	123
Figura 4.89 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 8.....	123
Figura 4.90 Velocidad durante control – Caso 8.....	124
Figura 4.91 Mapa de fase – Caso 8.....	125
Figura 4.92 <i>Chattering</i> – Caso 8.....	125
Figura 4.93 Posición – Caso 9.....	127
Figura 4.94 Posición vs ley deslizante (Impacto 1) – Caso 9.....	128
Figura 4.95 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 9.....	128
Figura 4.96 Velocidad durante control – Caso 9.....	129

Figura 4.97 Mapa de fase – Caso 9.....130  
Figura 4.98 *Chattering* – Caso 9.....130

## RESUMEN

Título: CONTROL DE POSICIÓN DE UN SISTEMA DE IMPACTO EN EL CONTEXTO DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS HÍBRIDOS<sup>1</sup>.

Autores: LUZ AIDA VEGA MANTILLA<sup>2</sup>, CARLOS EDUARDO SANTOS VESGA<sup>3</sup>.

Palabras Clave:

*Bouncing Ball*; Control por Modos Deslizantes (SMC); Sistemas Dinámicos Híbridos.

Descripción:

En el presente proyecto se realizará la implementación de una técnica de control avanzada en el dominio del tiempo, para manipular el comportamiento dinámico de un sistema de impacto *Bouncing Ball* en el contexto de los sistemas dinámicos híbridos. Para ello se realizará el correspondiente modelado matemático del sistema *Bouncing Ball* como un sistema dinámico híbrido. Además, se definirá una estrategia de control avanzado para manipular el comportamiento dinámico del sistema de impacto *Bouncing Ball*, con base en la teoría de autómatas programables. Para cumplir con este propósito inicialmente se realizará una exploración de estado del arte sobre la representación híbrida de algunos sistemas mecánicos físicos, de tal forma, que se logre comprender el modelado híbrido de los sistemas dinámicos y, lograr aplicar este tipo de modelado al sistema de *Bouncing Ball*. Adicionalmente se constituirá el modelado híbrido del *Bouncing Ball* de forma que sea explícita la interacción entre un dominio continuo y el dominio discreto. Posteriormente se estudiará la técnica de control por modos deslizantes SMC como técnica de control avanzado a aplicar en el sistema dinámico híbrido de impacto. Finalmente se mostrará por simulación numérica el comportamiento dinámico del sistema *Bouncing Ball* siendo controlado a través del SMC.

---

<sup>1</sup> Trabajo de grado

<sup>2</sup> Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Codirector: Carlos Borrás Pinilla, Ph.D.

<sup>3</sup> Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director: Julio Andelfo Flórez Vargas, MSc. Codirector: Jaime Guillermo Barrero, MSc.

## ABSTRACT

Title: POSITION CONTROL OF IMPACT SYSTEMS, IN CONTEXT OF HYBRID DYNAMICAL SYSTEMS<sup>4</sup>.

Authors: LUZ AIDA VEGA MANTILLA<sup>5</sup>, CARLOS EDUARDO SANTOS VESGA<sup>6</sup>.

Key words:

Bouncing Ball; Sliding Mode Control (SMC); Hybrid Dynamical Systems.

Description:

In this project the implementation of an advanced control technique in the time domain will be carried out to manipulate the dynamic behavior of a Bouncing Ball impact system in the context of hybrid dynamic systems. For this, the corresponding mathematical modeling of the Bouncing Ball system will be performed as a hybrid dynamic system. In addition, an advanced control strategy will be defined to manipulate the dynamic behavior of the Bouncing Ball impact system, based on the theory of programmable automata. In order to accomplish this purpose, a state-of-the-art exploration of the hybrid representation of some physical mechanical systems will be carried out, so as to understand the hybrid modeling of dynamic systems and to apply this type of modeling to the Bouncing Ball. In addition, the hybrid modeling of the Bouncing Ball will be constituted in such a way as to be explicit the interaction between a continuous domain and the discrete domain. Subsequently the SMC sliding mode control technique will be studied as an advanced control technique to be applied in the hybrid dynamic impact system. Finally, the dynamic behavior of the Bouncing Ball system will be shown by numerical simulation to being controlled through the SMC.

---

<sup>4</sup> Degree work.

<sup>5</sup> Physico-mechanical Engineering Faculty. School of Mechanical Engineering. Co-supervisor: Carlos Borrás Pinilla, Ph.D.

<sup>6</sup> Physico-mechanical Engineering Faculty. School of Electrical Engineering. Supervisor: Julio Andelfo Flórez Vargas, MSc. Co-supervisor: Jaime Guillermo Barrero, MSc.

## 1. PRELIMINARES

El estudio y análisis de las vibraciones mecánicas en la actualidad ha venido adquiriendo una relevante importancia, debido a que todos los sistemas mecánicos con características elásticas describen comportamientos amortiguados y opuestos al movimiento, causantes de vibraciones, típicamente producto de perturbaciones como incertidumbres, desajustes en piezas, movimientos relativos entre superficies de contacto, y oscilaciones entre piezas; siendo esta última, la más cercana al trabajo desarrollado. No obstante, y debido a que las vibraciones pueden ser de naturaleza libre o forzada, el control de estas es sin lugar a duda un campo de investigación bastante prominente. Con el propósito de aportar en la comprensión de los sistemas con vibraciones mecánicas, en el presente escrito se tomó como objeto de análisis el impacto de una pelota contra una superficie rígida en un movimiento vertical, por su baja complejidad matemática basada en la física newtoniana, y por ser fácilmente observable en una gran variedad de actividades cotidianas. Para ello, se trazó una metodología que va desde la representación híbrida del *Bouncing Ball* a partir de una interacción matemática de conjuntos con dinámicas continuas y eventos discretos en el espacio de estados, hasta la aplicación de una estrategia avanzada control deslizante (Filippov), soportada en las definiciones de estabilidad absoluta de Lyapunov, para lograr mantener regulada la altura máxima de la pelota entre cada colisión, aun en presencia de perturbaciones y/o imprecisiones en el modelado matemático. Para exponer los resultados, se utilizó la herramienta de simulación numérica MATLAB®, y el solucionador de ecuaciones diferenciales ordinarias *ODE113*, por su algoritmo de alta recurrencia y fiabilidad.

## 1.1 ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN

El análisis de sistemas mecánicos de impacto ha estado en la mira de recientes investigaciones por su riqueza dinámica, a través del estudio de sistemas con bajo rigor matemático como el oscilador de un grado de libertad, el cual, a pesar de tener una trayectoria evolutiva suave del movimiento, justo después del impacto describe un cambio abrupto en el sentido y magnitud de la velocidad, desbocando en un estado de bifurcación propio de los sistemas no-lineales [1]. Además, el grado de elasticidad con que se produce la colisión y la duración de la vibración resultante son factores determinantes en la respuesta del sistema en estudio [2], como, por ejemplo, el impacto en válvulas usadas con compresores [3], la colisión de las aspas de un helicóptero al caer [4], problemas de impacto de proyectiles [5] y, vibraciones producto del cruce de flujo en tuberías [6, 7, 8], entre otros. Cabe resaltar, que el interés de la comunidad científica por este tipo de sistemas ha trascendido al ámbito industrial, donde se observan resultados de investigación que abordan esta temática para comprender el comportamiento de sistemas que van desde la perforación por percusión, hasta la reducción de chillidos en los frenos de disco [9, 10].

Adicionalmente, se han realizado estudios para determinar la cantidad de energía perdida durante el impacto en relación con la deformación presente en el material post-impacto mediante el uso del análisis por elementos finitos [11], sin olvidar que el conocimiento de un balance energético es importante al momento de realizar control basado pasividad, el cual fundamenta el alcance del punto de equilibrio mediante la relación entre la energía suministrada y la almacenada por el sistema [12]. Por otro lado, y dada la naturaleza no-lineal de los sistemas de impacto producto de las transiciones bruscas presentadas en su dinámica, se ha optado por abordar su modelado mediante la representación híbrida a través de funciones continuas y eventos discretos [1, 12, 13, 14]. De este modo, la formulación híbrida se ha convertido en una herramienta novedosa, para aplicar técnicas de control conmutado entre eventos y garantizar el comportamiento deseado de los sistemas

con presencia de singularidades como el *Bouncing Ball*, al estar sometidos a barreras o superficies rígidas que limitan su movimiento libre [13, 14, 15]. Por tanto, como un caso particular de control conmutado, el Control por Modos Deslizantes (por sus siglas en inglés, *SMC*) se convierte en una técnica candidata para controlar la dinámica de los sistemas de impacto, representados en el espacio de estados mediante una previa formulación híbrida, por su capacidad de forzar al seguimiento de una referencia deseada mediante la definición de una superficie deslizante de atracción [16, 17, 18].

## **1.2 PLANTEAMIENTO Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA**

El contacto frecuente entre piezas mecánicas y las vibraciones en las tuberías ante el paso de fluidos, son solo algunos ejemplos de los efectos indeseados en los sistemas dinámicos que presentan deformaciones y pérdidas de energía [11, 19]. Para disminuir los efectos de colisiones, se han desarrollado algoritmos orientados a la conservación de energía entre sólidos sin fricción sometidos a impactos, tomando como base el conocimiento de la trayectoria dinámica del sistema en su estado transitorio [20, 21, 22]; incluso se ha llegado a modelar el intercambio entre energía cinética y elástica, para lograr conservar el momento lineal y angular en el choque de cuerpos rígidos como engranajes [23].

Adicionalmente, por la naturaleza no lineal de los sistemas físicos que describen en su dinámica comportamientos como: bandas muertas, fricción, saturaciones, retrasos y discontinuidades [17, 24, 25, 26, 27]; en muchos casos, se dificulta o es imposible obtener un equivalente matemático por métodos convencionales, capaz de reunir las características más determinantes del fenómeno en estudio, justificando así, la exploración de novedosas formas de representar sistemas dinámicos como la híbrida, que tiene en su formulación matemática el potencial de abarcar gran cantidad de fenómenos con tópicos que van desde las ciencias naturales hasta la ingeniería aplicada [12, 14, 15, 28]. Por otro lado, la necesidad

por manipular el comportamiento dinámico de los sistemas, hace necesario el estudio de técnicas avanzadas de control en el espacio de estados, como el Control por Modos Deslizantes (por sus siglas en inglés, *SMC*) [17, 29, 30], por la facilidad que brinda éste, para establecer condiciones de operación en sistemas con cambios bruscos en su dinámica [1, 9, 13].

Por tanto, con el desarrollo del presente proyecto se espera realizar un aporte sustancial en la representación y control de los sistemas dinámicos a partir de la formulación híbrida, rompiendo paradigmas en el modelado de los sistemas al tomar como objeto de estudio al *Bouncing Ball* por su simplicidad matemática en condiciones de ambiente ideales, logrando que su trayectoria dinámica en marcha libre concuerde con la física newtoniana en un intervalo tiempo estimado y, aplicando una técnica de Control por Modos Deslizantes regular el rebote de la pelota a una altura determinada. Por esta razón, se constituyó un grupo interdisciplinar con estudiantes de la Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones (E3T) y la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Industrial de Santander, ambos adscritos al Grupo de Investigación en control, electrónica, modelado y simulación - CEMOS, para indagar en lo extenso de la línea estratégica de Supervisión Experta, Automatización y Control, y poder dar respuesta a inquietudes como: ¿De qué manera se realiza el modelado matemático del sistema *Bouncing Ball* por medio de la formulación híbrida?, ¿Cómo se aplica el Control por Modos Deslizantes a los sistemas mecánicos con cambios abruptos en su dinámica como el *Bouncing Ball*?, ¿Cómo puede el Control por Modos Deslizantes ser suficiente para manipular el comportamiento dinámico del sistema de impacto *Bouncing Ball*?

## 1.3 OBJETIVOS

**1.3.1 Objetivo general** Implementar bajo simulación numérica una estrategia híbrida de control que permita mantener el rebote de un sistema *Bouncing Ball* como aplicación de estabilidad en sistemas de impacto.

### 1.3.2 Objetivos específicos

- Realizar un estudio sobre la representación híbrida de los sistemas dinámicos, y la técnica de control por modos deslizantes *SMC* y su aplicación en sistemas con singularidades en su dinámica.
- Modelar matemáticamente el *Bouncing Ball* como un sistema dinámico híbrido.
- Diseñar una estrategia de control por modos deslizantes para mantener el rebote de la pelota en una altura deseada.
- Simular y analizar numéricamente el comportamiento del sistema controlado.

## 2. SISTEMAS DINÁMICOS HÍBRIDOS

Una vez el hombre se interesó por estudiar y comprender el comportamiento de los fenómenos que ocurrían en su entorno, comenzó una carrera investigativa por lograr obtener la mejor representación de éstos. Actualmente, este interés persiste, convirtiéndose en una importante línea de investigación cubriendo amplias y numerosas áreas del conocimiento. En un principio, el modelado matemático de dichos fenómenos fue representado como sistemas dinámicos estrictamente continuos en el dominio del tiempo o bien, como sistemas dinámicos estrictamente discretos en el dominio del tiempo. Además, por la naturaleza no lineal de los sistemas físicos, continuó su división categórica en sistemas no lineales y lineales, siendo estos últimos los preferidos por la comunidad científica por las prestaciones para su análisis.

No obstante, con el auge de la era tecnológica y la aparición de una amplia gama de dispositivos de cómputo como tarjetas de programación y sistemas embebidos de fácil acceso para el consumidor, las cuales cada día tienen mejores prestaciones de velocidad de procesamiento, espacio reducido y simplicidad en su lenguaje de programación; parte de la comunidad científica se dedicó a explorar la posibilidad de usar este tipo de dispositivos para simplificar el modelado y control de algunos casos particulares de sistemas dinámicos no lineales, rompiendo por otro lado, paradigmas sobre la posibilidad de representar matemáticamente un sistema dinámico complejo de forma simultánea como continuo y discreto, a lo que le denominó la representación híbrida de los sistemas dinámicos.

## 2.1 MODELADO HÍBRIDO DE LOS SISTEMAS DINÁMICOS

El modelado híbrido de los sistemas dinámicos, es la interacción entre dinámicas continuas en el tiempo, eventos discretos, lógicas de transición, y frecuentemente discontinuidades, en algunos casos fuertes [31]. Dada la conveniencia por incorporar dispositivos lógicos programables para gestionar el funcionamiento del sistema a partir de lógicas de transición discretas, la descripción matemática de estos sistemas dinámicos típicamente es expresada con base en redes de Petri o mediante una adaptación de autómatas programables finitos [32,33,34]. No obstante, en el presente trabajo de investigación únicamente se abordará la formulación híbrida de los sistemas dinámicos con base en la teoría de autómatas, a partir de la generación de dos conjuntos principales de operación; un conjunto continuo  $C$ , constituido por ecuaciones diferenciales en el dominio del tiempo continuo con condiciones iniciales asociadas y, un conjunto estrictamente discreto  $D$ , constituido por la información de los eventos, singularidades y transiciones presentes en el sistema, donde la singularidad representa un cambio abrupto en la evolución con respecto al tiempo de la dinámica del sistema.

De forma general, la formulación híbrida de los sistemas dinámicos se representa en el espacio de estados, por un conjunto de ecuaciones diferenciales del sistema continuo con la forma de  $\dot{\mathbf{x}}$ , correspondiente a una función  $f$  no necesariamente lineal en el estado, dependiente del conjunto de variables de estado  $\mathbf{x}$  propias del sistema, las entradas  $\mathbf{u}$  admisibles en el sistema, el tiempo continuo  $t$ , y por último, del conjunto de condiciones iniciales  $\mathbf{x}_0$  necesarias para encontrar la solución de dichas ecuaciones diferenciales [35], tal como se observa en (2.1).

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

Por otro lado, aunque la formulación híbrida de los sistemas dinámicos se extiende para representar tanto sistemas lineales como no-lineales, si se opta por modelar híbrido un sistema con comportamiento estrictamente no-lineal, la complejidad matemática del sistema no-lineal incrementará en parte la dificultad del modelado

híbrido; por esta razón, el presente proyecto de investigación se centrará en el tratamiento matemático de un tipo particular de sistemas no-lineales discontinuos conocidos como sistemas suaves a tramos [36], los cuales a pesar de ser tener comportamientos no-lineales con discontinuidades, pueden ser vistos y tratados como un conjunto de subsistemas suaves asociados y representados por ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales propias.

De esta manera, la solución de la ecuación dinámica dada por (2.1), corresponde con una pareja ordenada  $(t, \mathbf{x}(\mathbf{u}, t))$ , la cual puede pertenecer al conjunto solución continuo  $C$  o bien al conjunto solución discreto  $D$ .

Por un lado, el conjunto solución continuo  $C$  dado por (2.2), se expresa como la unión de  $l$  regiones solución de la ecuación dinámica  $\dot{\mathbf{x}}$  pertenecientes al dominio de  $\mathbb{R}^n$ , continuos en los  $i$  –ésimos intervalos de tiempo semiabiertos por la derecha  $[t_i, t_{i+1})$ , siendo los tiempos  $t_{i+1}$  los instantes donde se rompe la continuidad de la ecuación diferencial objetivo, y ésta deja de ser diferenciable.

$$C = \bigcup_{i=0}^{l-1} \left\{ \begin{array}{l} (t, \mathbf{x}(\mathbf{u}, t)) \in [t_i, t_{i+1}) \times \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}(t) \text{ es solución de: } \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t); \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i \\ \wedge \\ t_{i+1} \in t \geq t_0 \mid \nexists \dot{\mathbf{x}}(t_{i+1}) \vee \dot{\mathbf{x}}(t_{i+1}) \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

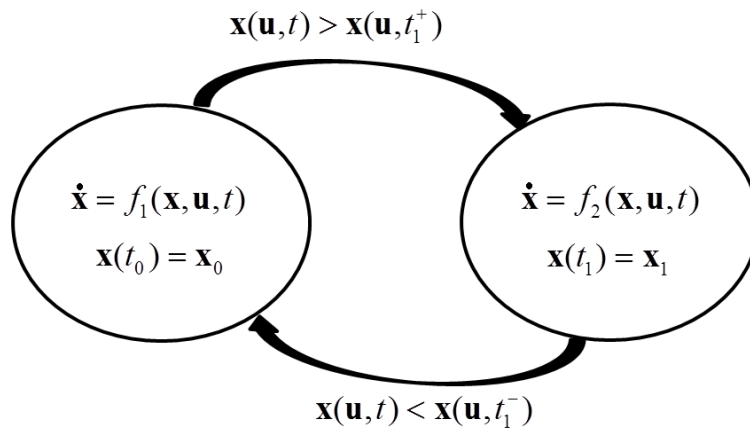
Mientras que, por otro lado, el conjunto solución discreto  $D$  está dado por (2.3), como la unión de  $l - 1$  eventos o singularidades en los instantes  $t_i$ , tales que el límite por la derecha de la solución de la ecuación diferencial sea distinto al límite por la izquierda, es decir, que el límite no esté definido; o el límite en el instante  $t_i$  no exista, como se presenta en las funciones que describen vértices [31,37,38,39]. Cabe resaltar que el tiempo  $t_i^-$  corresponde con el instante de tiempo infinitesimal antes de la ruptura de la continuidad de  $\dot{\mathbf{x}}$  en  $t_i$ , mientras que el instante de tiempo  $t_i^+$  corresponde al instante de tiempo infinitesimal después de su ruptura en  $t_i$ .

$$D = \bigcup_{i=1}^{l-1} \left\{ \begin{array}{l} (t, \mathbf{x}(\mathbf{u}, t_i^+)) \in [t_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow t_i^-} \mathbf{x}(\mathbf{u}, t) \neq \lim_{t \rightarrow t_i^+} \mathbf{x}(\mathbf{u}, t) \\ \vee \\ \nexists \lim_{t \rightarrow t_i} \frac{\mathbf{x}(\mathbf{u}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{u}, t_i)}{t - t_i} \end{array} \right\} \quad (2.3)$$

De esta manera, es posible definir el sistema híbrido como la unión de comportamientos dinámicos continuos por medio de un conjunto de eventos discretos, tal como se expresa en (2.4), y se observa en la Figura 2.1 como un ejemplo de interacción entre dos subsistemas dinámicos en el espacio de estados con condiciones iniciales asociadas, por medio de eventos discretos en un instante de tiempo  $t_1$  [8].

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}, t) = C \cup D, \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (2.4)$$

**Figura 2.1 Diagrama de transición de estados híbrido.**



**Fuente: Sanfelice, R. G.; Goebel, R. y Teel, A. R. (2008)**

A continuación, se expondrá una breve definición de los sistemas dinámicos suaves a trazos, para mostrar el origen de los sistemas dinámicos híbridos y los sistemas deslizantes, y así, ubicar tanto al sistema de impacto *Bouncing Ball* como a la estrategia de Control por Modos Deslizantes en el contexto de este particular tipo de sistemas dinámicos.

## 2.2 SISTEMAS DINÁMICOS SUAVES A TRAZOS

Estos sistemas se caracterizan por mostrar en su evolución dinámica comportamientos continuos y discretos, cuyo diagrama de fase es particionado en diferentes regiones, donde cada una de las regiones está asociada con un funcional de ecuaciones diferenciales. Estos sistemas son clasificados según su grado de suavidad (*DoS*, del inglés *Degree of Smoothness*) en:

**2.2.1 DoS zero:** Tienen discontinuidad en estados a través de los límites de operación en el espacio de estados. Típicamente, este comportamiento se ve asociado a sistemas con impacto o sistemas híbridos lineales a trazos, donde un clásico ejemplo es el oscilador mecánico de impacto [40,41].

**2.2.2 DoS one:** Tienen discontinuidad en el vector de campo. Este tipo particular de sistemas son conocidos como sistemas de Filippov [42,43,44].

**2.2.3 DoS two:** Tienen discontinuidades fuertes de orden 2 o superior en las derivadas de los vectores de campo, y por esta razón son conocidos como sistemas continuos suaves a trazos [45,46].

A partir de la definición expuesta con anterioridad es evidente que el presente proyecto fue desarrollado en torno a sistemas con *DoS zero* y *DoS one*, donde el *Bouncing Ball* es una aplicación de sistemas de impacto con discontinuidad en una variable dinámica, en este caso la velocidad (*DoS zero*); y la técnica de control aplicada (Control por Modos Deslizantes) para mantener el rebote de la pelota se encuentra categorizada como un tipo específico de sistema con *DoS one*. A continuación, se mostrará en brevedad la descripción de los principales tipos de sistemas con *DoS one* o sistemas de Filippov.

## 2.3 SISTEMAS DE FILIPPOV O DESLIZANTES

Los sistemas de Filippov son una subclase de sistemas discontinuos que pueden llegar a ser descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con discontinuidad de lado derecho. Los sistemas mecánicos con la presencia de fricción seca son quizá uno de los ejemplos más claros de este tipo de sistemas, por la presencia de vibraciones en algunos casos indeseadas, ya que reducen significativamente la eficiencia de los sistemas. Por lo general una dinámica de estos sistemas presenta un cambio cualitativo en su trayectoria conocido como bifurcación. Sin embargo, es a través de esta dinámica discontinua que se desea mantener el sistema en condiciones deseadas mediante una condición de deslizamiento. Adicionalmente, las bifurcaciones pueden ser clasificadas como suaves o no-suaves; no obstante, existen cuatro principales tipos de sistemas de Filippov con un ostensible atractivo investigativo: cruzando-deslizante (*crossing-sliding*), rozando-deslizante (*grazing-sliding*), conmutando-deslizante (*switching-sliding*) y aumentando-deslizante (*adding-sliding*) [47]. A continuación, se explicará en brevedad cada uno de los cuatro casos principales de sistemas de Filippov.

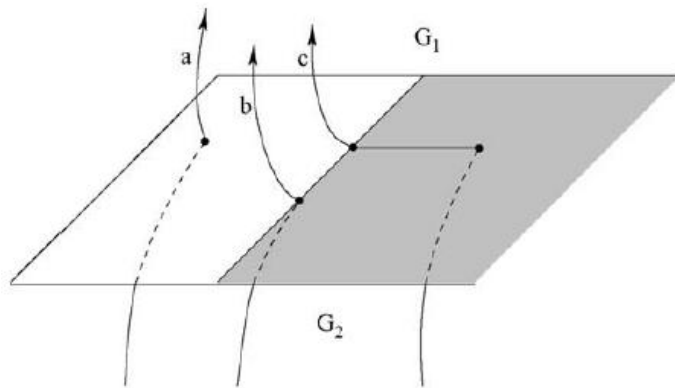
**2.3.1 Cruzando - deslizante:** En este caso la alteración de un estado dinámico provoca que las soluciones crucen transversalmente el límite de la región de deslizamiento en el punto de bifurcación, ver Figura 2.2.

**2.3.2 Rozando - deslizante:** En este caso las soluciones rozan la región de deslizamiento por la parte superior, entrando posteriormente en régimen deslizante, ver Figura 2.3.

**2.3.3 Conmutando - deslizando:** En este caso la alteración de un estado dinámico provoca que las soluciones crucen la región de deslizamiento permaneciendo en ella para todo instante futuro, ver Figura 2.4. Por tanto, la técnica de Control por Modos Deslizantes (*SMC*, del inglés *Sliding Mode Control*) forma parte de este tipo particular de sistema de Filippov.

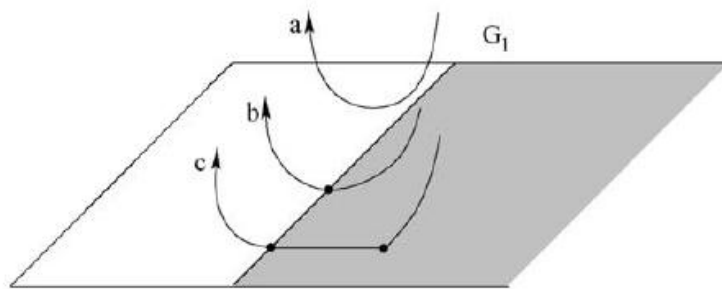
**2.3.4 Aumentando - deslizando:** En este caso las trayectorias dinámicas pasan de estar totalmente dentro de la región de deslizamiento, a tener una parte por fuera de ellas, ver Figura 2.5.

**Figura 2.2 Filippov crossing-sliding.**



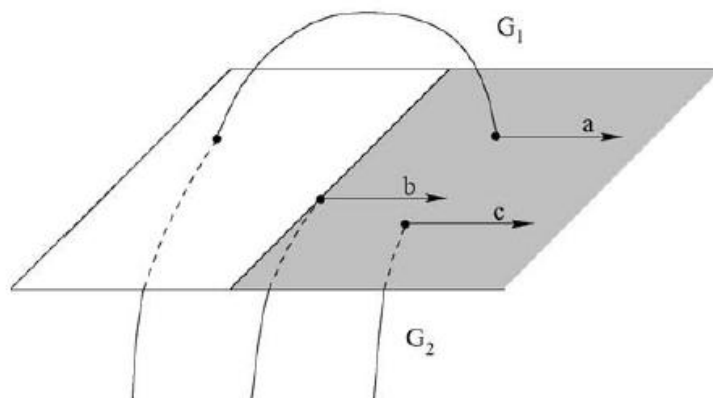
**Fuente: Filippov, A. F. (2013). Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems (Vol. 18). Springer Science & Business Media.**

**Figura 2.3 *Filippov grazing-sliding.***



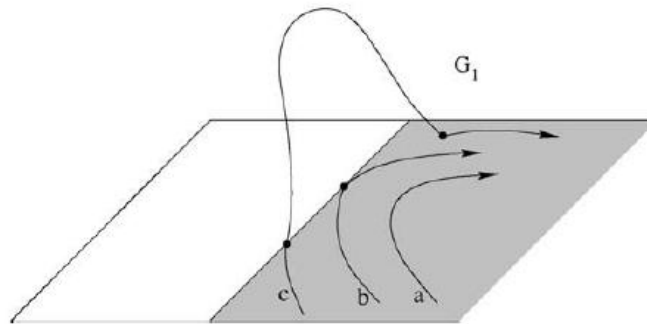
**Fuente: Filippov, A. F. (2013). Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems (Vol. 18). Springer Science & Business Media.**

**Figura 2.4 *Filippov switching-sliding.***



**Fuente: Filippov, A. F. (2013). Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems (Vol. 18). Springer Science & Business Media.**

**Figura 2.5 Filippov adding-sliding.**



**Fuente: Filippov, A. F. (2013). Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems (Vol. 18). Springer Science & Business Media.**

A continuación, se abordará de forma detallada y con base en la física newtoniana, el modelado matemático del sistema dinámico de grado de suavidad cero *Bouncing Ball*.

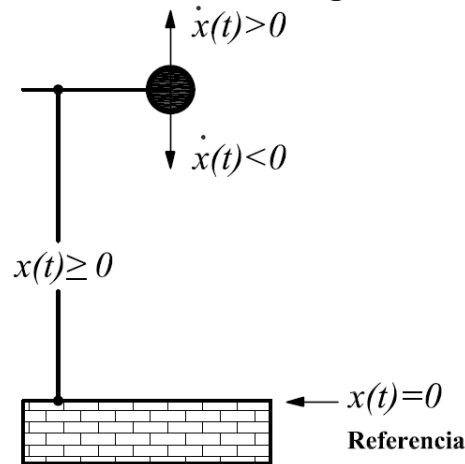
## **2.4 EL SISTEMA DINÁMICO PELOTA QUE REBOTA: *BOUNCING BALL***

En el estudio y análisis de los sistemas de impacto, el fenómeno del rebote vertical de una pelota contra una superficie rígida es ampliamente citado por la comunidad científica, por los comportamientos singulares o bifurcaciones presentes en su trayectoria dinámica durante los tiempos de colisión [48], típicos en un amplio espectro de aplicaciones de ingeniería que van desde las vibraciones entre las piezas móviles de máquinas, hasta vibraciones provocadas en los tubos al paso de fluidos [49].

Si definimos la posición de la pelota con respecto a la superficie rígida como  $x(t)$  y la velocidad como  $\dot{x}(t)$ , el modelado matemático de la evolución dinámica del *Bouncing Ball*, puede ser realizado teniendo en cuenta dos escenarios principales de movimiento: el correspondiente al tiempo en que la pelota se encuentra en

marcha libre o en vuelo ( $x(t) > 0$ ), y en los instantes en que la pelota choca contra la superficie ( $x(t) = 0$ ) [50]. La Figura 2.6 expone el diagrama cinemático del *Bouncing Ball*, donde se observan los estados dinámicos de posición y velocidad [51].

**Figura 2.6 Diagrama cinemático del Bouncing Ball.**



A continuación, se mostrará el modelado matemático analítico del sistema *Bouncing Ball* en un ambiente ideal (sin fricción del aire), teniendo en cuenta el enfoque de dinámicas continuas y eventos discretos, con base en los postulados de la mecánica clásica para el comportamiento de los cuerpos en caída libre.

**2.4.1 *Bouncing Ball* en el espacio de estados:** Para esto consideramos la segunda ley de Newton para la caída libre de los cuerpos, en condiciones libres de la resistencia del aire (2.5), donde la aceleración del cuerpo depende exclusivamente de la aceleración de la gravedad, y por tanto su cinemática es independiente de la masa del objeto [52], tal como se observa a continuación.

Se realiza la sumatoria de fuerzas verticales sobre el cuerpo de masa  $m$ , donde

$$\text{Peso} = m * g,$$

$$\sum F_{vertical} = Peso = m \cdot a \quad (2.5)$$

Luego de (2.5) despejamos la aceleración y obtenemos que

$$a = \frac{Peso}{m}, \quad (2.6)$$

y al sustituir el valor de  $Peso$  en (2.6), obtenemos que la aceleración es constante e igual a la gravedad (2.7).

$$a = \frac{m \cdot g}{m} = g \quad (2.7)$$

Una vez aclarada la no inclusión de la masa en el modelado, se pasará a obtener la representación matemática en el espacio de estados, al definir las variables de estado del sistema como posición  $x(t)$  y velocidad  $\dot{x}(t)$  de la pelota, tal que:

$$x_1 = x(t),$$

$$x_2 = \dot{x}(t). \quad (2.8)$$

Ahora pasamos a definir el sistema *Bouncing Ball* como un sistema dinámico de segundo orden, a partir de la ecuación diferencial de la caída libre de los cuerpos con condiciones iniciales asociadas (2.9),

$$\ddot{x}(t) = -g; \quad \dot{x}(t_0) = v_0; \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.9)$$

donde  $x_0$  y  $v_0$  son respectivamente las condiciones iniciales de posición y velocidad del cuerpo.

Por tanto, las dos ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica del sistema, estarán representadas en el espacio de estados por (2.10, 2.11)

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.10)$$

$$\dot{x}_2 = -g \quad (2.11)$$

De esta manera, reemplazando el conjunto de ecuaciones (2.8-2.11) en (2.1) obtenemos la representación en el espacio de estados del sistema en caída libre dada por (2.12)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Adicionalmente, las ecuaciones que representan el sistema dinámico en estudio se pueden llegar a deducir analíticamente a partir de (2.9), mediante la reducción en el orden de la ecuación diferencial, tal como se mostrará a continuación:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \int_{t_0}^t (-g) d\tau = -g[t - t_0] + C_1; \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = v_0$$

Ahora, aplicando a la ecuación anterior la condición inicial de la velocidad en el tiempo  $t = t_0$ ,

$$\frac{dx(t_0)}{dt} = -g[t_0 - t_0] + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_0,$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -g[t - t_0] + v_0; \quad \text{donde } x(t_0) = x_0. \quad (2.13)$$

Si para simplificar la expresión anterior se define  $\tau = (t - t_0)$ , se obtendrá que  $dt = d\tau$ . Entonces reemplazando en (2.13) obtenemos

$$\frac{dx(t)}{dt} = -g\tau + v_0; \quad \text{donde } x(t_0) = x_0.$$

Ahora bien, si se realiza una nueva integración, se tendrá la expresión cinemática para la posición de la pelota, tal como se observa a continuación:

$$x(t) = \int_{t_0}^t (-g\tau + v_0) d\tau; \quad \text{donde } x(t_0) = x_0,$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}g[t - t_0]^2 + v_0[t - t_0] + C_2; \quad \text{donde } x(t_0) = x_0$$

Por otro lado, aplicando a la ecuación anterior la condición inicial de la posición en el tiempo  $t = t_0$ , se obtiene la ecuación cinemática que describe la caída libre de la pelota, tal como se observa en (2.14).

$$x(t_0) = -\frac{1}{2}g[t_0 - t_0]^2 + v_0[t_0 - t_0] + C_2; \quad \Rightarrow \quad C_2 = x_0,$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}g[t - t_0]^2 + v_0[t - t_0] + x_0. \quad (2.14)$$

Adicional a esto, en el instante en que la pelota colisiona en  $x(t) = 0$  contra la superficie rígida con coeficiente de restitución  $k$  dentro de un intervalo cerrado  $[0,1]$ , es conocido que la posición de esta no cambia de forma instantánea como si lo hace la velocidad [53]; es decir, si se toma a  $t_1$  como el instante en que la pelota choca contra la superficie de referencia,  $t_1^-$  como el instante infinitesimalmente inferior a  $t_1$  donde la pelota alcanza su velocidad máxima en el descenso, y  $t_1^+$

como el instante de tiempo infinitesimalmente superior al impacto en  $t_1$ , tenemos que la velocidad del sistema postimpacto está dada por:

$$v(t_1^+) = -kv(t_1^-). \quad (2.15)$$

Con lo visto hasta este punto, es posible determinar las ecuaciones que definen la cinemática del sistema *Bouncing Ball*, tanto a lo largo de la trayectoria continua definida entre rebotes, como en los instantes discretos en que la pelota colisiona contra la superficie. De este modo, se puede determinar la posición y velocidad de la partícula durante todo  $t \geq t_0$  por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\text{Para } x(t) > 0 \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}g[t - t_0]^2 + v_0[t - t_0] + x_0,$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -g[t - t_0] + v_0;$$

$$\text{Para } x(t) = 0 \Rightarrow x(t) = 0,$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t^+) = -k\dot{x}(t^-). \quad (2.16)$$

Otro parámetro importante para determinar la cinemática de la pelota es el tiempo en que esta choca contra la superficie. Este tiempo se puede predecir si se considera el caso en que la pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial  $v_0$  en el tiempo  $t_0$ , y se hace coincidir con el valor de la posición en el impacto  $x(t) = 0$  según la ecuación (2.14), para posteriormente despejar la variable tiempo, tal como se muestra a continuación:

$$x(t) = -\frac{1}{2}g[t - t_0]^2 + v_0[t - t_0] = [t - t_0] \left[ -\frac{1}{2}g[t - t_0] + v_0 \right] = 0.$$

De la expresión anterior, se obtienen dos tiempos solución; el tiempo en que inicia el movimiento  $t_0$  y el tiempo en que se produce la primera colisión  $t_1$ , ver ecuación (2.17).

$$t = t_0 \quad \text{y} \quad t = 2\frac{v_0}{g} + t_0 = t_1 \quad (2.17)$$

De la expresión inmediatamente anterior, se tiene el instante de tiempo donde ocurre la primera colisión, y es evidente que únicamente depende de dos parámetros variables: el tiempo de la colisión inmediatamente anterior  $t_0$  y de la velocidad con que sale verticalmente hacia arriba después de la colisión  $v_0$ . De este modo, es posible llegar a predecir el instante de tiempo donde se produce el siguiente evento como:

$$t_2 = \frac{2v_1}{g} + t_1,$$

donde  $v_1 = kv_0$  es la velocidad con que la pelota sale lanzada hacia arriba después del primer impacto en  $t_1$ . Por tanto, la expresión anterior puede reescribirse como:

$$t_2 = \frac{2kv_0}{g} + t_1.$$

De forma iterativa, se puede obtener los tiempos futuros impactos, a partir del análisis de los rebotes consecutivos de la siguiente forma:

$t_0$  ; Instante de salida

$$t_1 = \frac{2v_0}{g} + t_0 \quad ; \text{ Instante de primera colisión}$$

$$t_2 = \frac{2kv_0}{g} + t_1 \quad ; \text{ Instante de segunda colisión}$$

$$t_3 = \frac{2k^2v_0}{g} + t_2 \quad ; \text{ Instante de tercera colisión}$$

⋮

⋮

$$t_i = \frac{2k^{(i-1)}v_0}{g} + t_{i-1} \quad ; \text{ Instante de la } i\text{-ésima colisión}$$

$$t_i = \frac{2v_{i-1}}{g} + t_{i-1} \quad ; \text{ Instante de la } i\text{-ésima colisión} \quad (2.18)$$

Esta última expresión es la encargada de establecer los instantes de tiempo en que el sistema *Bouncing Ball* rompe la continuidad, y el sentido de la velocidad cambia súbitamente, y por tanto será indispensable para representarlo como sistema dinámico híbrido [51].

**2.4.2 Bouncing Ball como sistema dinámico híbrido:** A partir de las definiciones (2.1), (2.2) y (2.18), y la representación en el espacio de estados de un sistema en caída libre sin fricción del aire dado por (2.12), es posible obtener el modelado de la trayectoria continua del *Bouncing Ball* por el conjunto  $C$  dado por (2.19):

$$C = \bigcup_{i=0}^{l-1} \left\{ \begin{array}{l} (t, \mathbf{x}(t)) \in [t_i, t_{i+1}) \times \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x}(t) \text{ es solución de: } \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -g \end{bmatrix}; \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ v_i \end{bmatrix} \\ \wedge \\ (t_i = \frac{2v_{i-1}}{g} + t_{i-1}) \in t \geq t_1 \mid \nexists \dot{\mathbf{x}}(t_{i+1}) \vee \dot{\mathbf{x}}(t_{i+1}) \rightarrow \infty \end{array} \right\}, \quad (2.19)$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  corresponden a las variables de estado de posición y velocidad respectivamente, y  $t_{i+1}$  son los instantes en los cuales la pelota impacta contra la superficie rígida.

Por otro lado, el conjunto de eventos discretos  $D$ , reúne las soluciones del sistema en el momento justo en que la pelota impacta contra la superficie en los tiempos  $t_i$ , tal como se observa en (2.20).

$$D = \bigcup_{i=1}^{l-1} \left\{ \begin{array}{l} (t, \mathbf{x}(t_i^+)) \in [t_i, t_{i+1}] \times \mathbb{R}^2 \mid \lim_{t \rightarrow t_i^-} \mathbf{x}(t) \neq \lim_{t \rightarrow t_i^+} \mathbf{x}(t) \\ \vee \\ \nexists \lim_{t \rightarrow t_i} \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_i)}{t - t_i} \end{array} \right\} \quad (2.20)$$

De esta manera, el sistema *Bouncing Ball* queda expresado como un sistema dinámico híbrido, mediante la unión de trayectorias continuas (Conjunto  $C$ ) y eventos discretos (Conjunto  $D$ ), satisfaciendo la igualdad dada por (2.4).

Para mostrar la correspondencia del modelado con respecto a la física Newtoniana, a continuación, se mostrará el funcionamiento del sistema *Bouncing Ball* en lazo abierto, soportados en el software de simulación numérica MATLAB®.

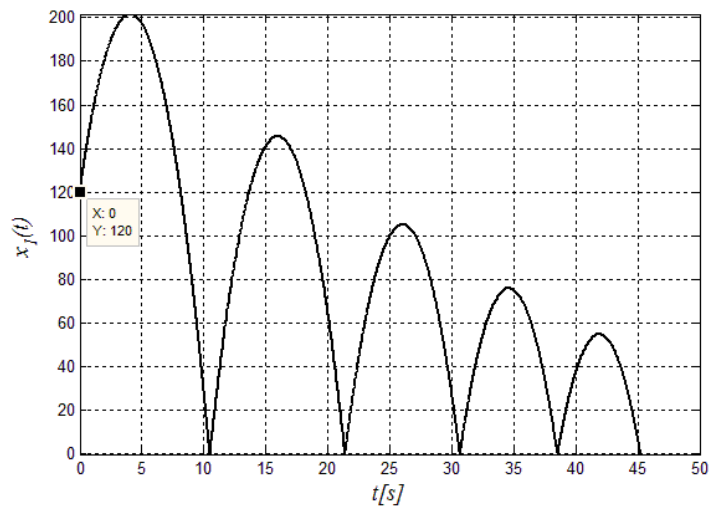
Los parámetros para la simulación del modelo se exponen en la Tabla 2.1, mientras que los resultados se muestran en las Figuras 2.6 – 2.10.

**Tabla 2.1 Especificaciones de *Bouncing Ball*.**

Parámetro	Notación	Valor
Posición inicial	$x_0$	120[m]
Velocidad inicial	$v_0$	40[m/s]
Coefficiente de restitución	$k$	0.85
Número de saltos	$salto$ s	5
Tiempo de simulación	$T$	50[s]

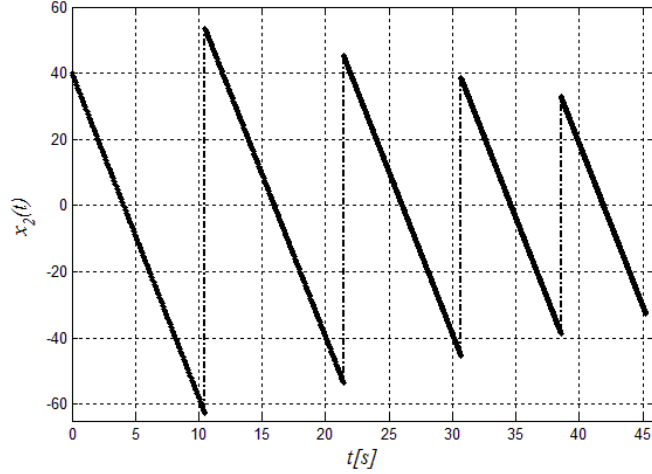
En la Figura 2.7 se muestra la evolución dinámica de la posición  $x_1$  contra el tiempo, donde se evidencia que la pelota comienza el movimiento vertical hacia arriba a una altura de 120[m/s]. Además, se observa como decrece su amplitud con cada rebote según el coeficiente de restitución del sistema.

**Figura 2.7 Posición en el tiempo.**



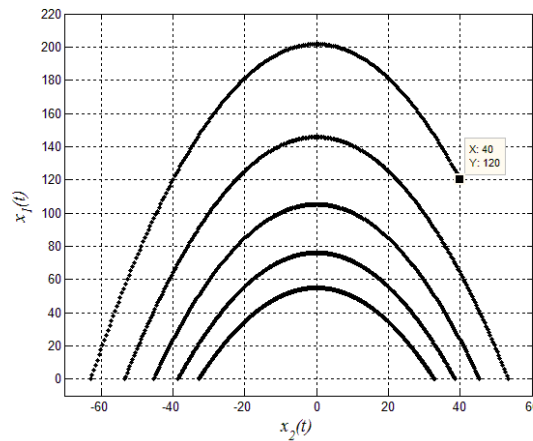
Por otro lado, la Figura 2.8 describe la evolución dinámica de la velocidad  $x_2$  con respecto al tiempo, donde se observa un cambio lineal entre colisiones debido a la aceleración constante de la gravedad.

**Figura 2.8 Velocidad en el tiempo.**



En el contexto del control automático en el espacio de estados, es frecuente realizar la confrontación de las variables de estado por medio de la constitución de un mapa de fase, con el propósito de mostrar la evolución conjunta del sistema. Por tanto, en la Figura 2.9 se muestra el mapa de fase para el caso simulado.

**Figura 2.9 Mapa de fase.**



Por último, el comportamiento dinámico híbrido del *Bouncing Ball* se puede observar por medio de las Figuras 2.10 y 2.11, como la unión de trayectorias continuas, eventos discretos y saltos discontinuos productos de impactos.

Figura 2.10 Trayectoria solución en el tiempo.

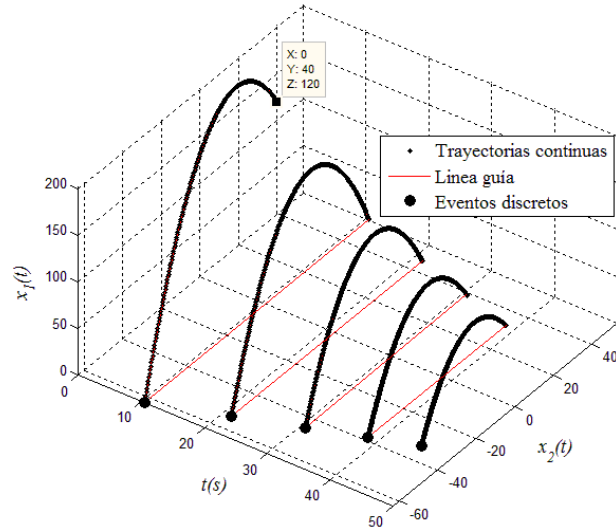
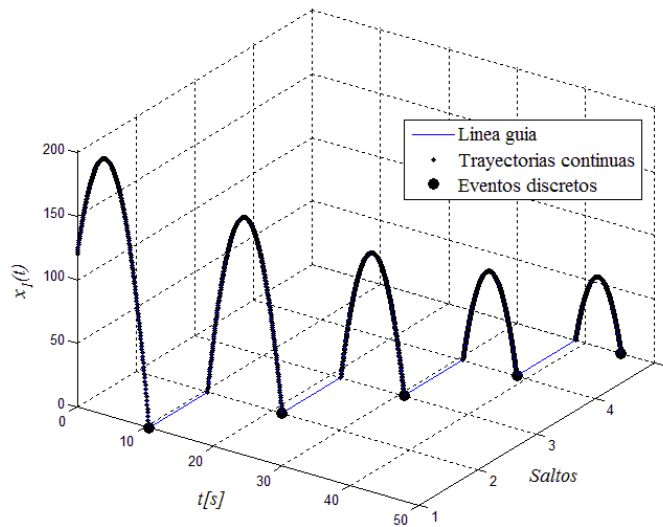


Figura 2.11 Bouncing Ball híbrido.



### 3. CONTROL POR MODOS DESLIZANTES

En el contexto del control automático y control de procesos, existe una gran variedad de técnicas y estrategias de control, capaces de satisfacer el correcto funcionamiento de sistemas tanto lineales como no-lineales, mediante la manipulación del comportamiento dinámico de variables del sistema. Dependiendo de la naturaleza de los sistemas, la formulación de la técnica de control puede ser representada en el dominio de la frecuencia, el cual está restringido para sistemas estrictamente lineales o, en el dominio del tiempo mediante la representación en el espacio de estados a través de ecuaciones diferenciales y en diferencias. Esta última formulación es la base del control moderno, y de la cual se desprenden diversas técnicas avanzadas, entre las que se encuentra el Control Óptimo, y el Control por Modos Deslizantes (*SMC*, del inglés *Sliding Mode Control*), que es la técnica de control seleccionada para conducir el sistema *Bouncing Ball* al estado de funcionamiento deseado.

El control por modos deslizantes es una solución destacada para controlar sistemas con presencia de incertidumbres por sus características robustas, y tiene la capacidad de mantener operando una planta no-lineal compleja de alto orden bajo ciertas condiciones de funcionamiento [54]. Quizá la mayor ventaja de esta técnica de control, es la capacidad de reducir la sensibilidad del sistema ante perturbaciones externas y variaciones considerables en el modelado. El tipo de ley de control deslizante es de naturaleza discontinua, por lo que puede ser fácilmente aplicada a sistemas con conmutadores en su estructura, como si se tratara de un controlador ON-OFF, siendo solución para una gran variedad de aplicaciones, que se extienden a la robótica, el movimiento de vehículos, y los generadores de energía [18,55].

### 3.1 ESTABILIDAD DE LYAPUNOV

La comprensión de la técnica de Control por Modos Deslizantes requiere de una previa comprensión de la teoría de estabilidad de *Lyapunov*, ya que a partir de estos postulados se fundamenta el alcance del punto de equilibrio por deslizamiento. De forma general para un sistema descrito por la forma (2.1) que reescribiremos a continuación

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

con vector de condiciones deseadas  $\mathbf{x}^*$ , tal que el punto de equilibrio del sistema es alcanzado cuando al evaluar en (2.1) el vector de condiciones deseadas, la dinámica se hace igual a cero (3.1); por lo cual a  $\mathbf{x}^*$  se le denomina punto de equilibrio.

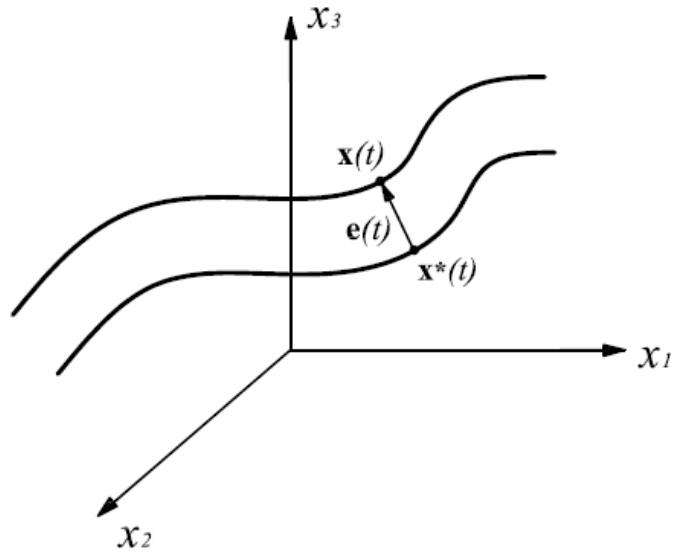
$$\dot{\mathbf{x}} = 0 = f(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, t) \tag{3.1}$$

De esta manera, se tiene la definición del error de seguimiento cometido en la trayectoria del sistema como la diferencia de la solución de (2.1) y el vector de condiciones deseadas  $\mathbf{x}^*$  para todo tiempo mayor que  $t_0$ , tal como se establece en (3.2).

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t) \tag{3.2}$$

Este comportamiento se observa en la Figura 3.1 para un sistema de orden 3 con variables de estado  $x_1, x_2, x_3$ .

Figura 3.1 Error de seguimiento.



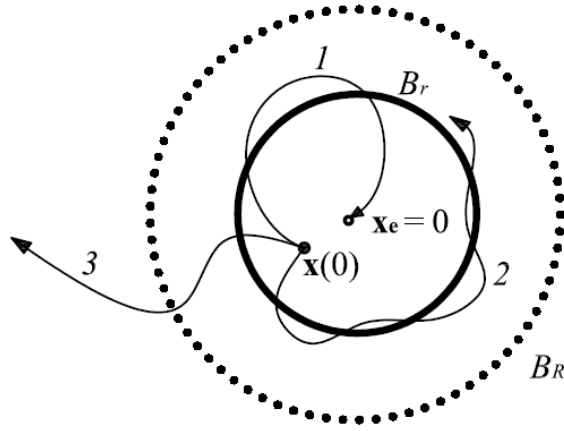
La teoría de estabilidad de Lyapunov, establece la existencia de una región esférica limitada en el espacio de estados  $B_R$ , tal que  $R$  es el radio de dicha región, donde todas las trayectorias solución  $\|\mathbf{x}\|$  del sistema están contenidas en  $R$  según lo indica la ecuación (3.3).

$$\|\mathbf{x}\| < R \mid \mathbf{x} \text{ solución de } \dot{\mathbf{x}} \quad (3.3)$$

Además, existe una región esférica  $B_r$  en el espacio de estados solución, inscrita en la región  $B_R$ , donde todos los valores  $\mathbf{x}$  al interior de esta región, circundan el punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e$ .

Bajo estas premisas, el concepto de la estabilidad de *Lyapunov* se resume en la Figura 3.2 por medio de tres comportamientos evolutivos del sistema: Asintóticamente estable, marginalmente estable, e inestable.

**Figura 3.2 Concepto de estabilidad de Lyapunov.**



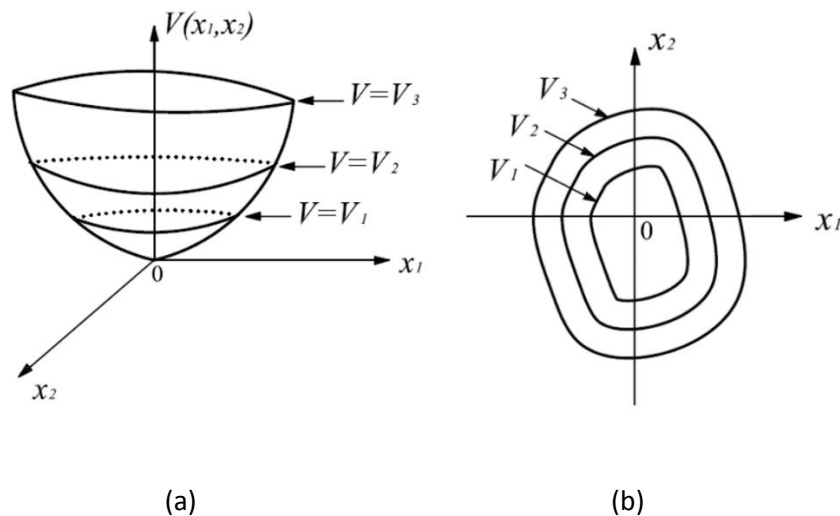
Si consideremos que el sistema comienza su movimiento en un tiempo de cero, cerca de un punto de equilibrio estable  $x_e$ , y después de ser lanzado levemente fuera de radio de atracción dado por  $B_r$  el sistema es llevado directamente al punto de equilibrio en un tiempo futuro y permanece en él, se dice que el sistema es *asintóticamente estable según Lyapunov* (Trayectoria 1 en Figura 3.2). Por otro lado, si una vez comienza el movimiento del sistema en un tiempo de cero, y la trayectoria solución en todo tiempo futuro permanece circundante alrededor del punto de equilibrio describiendo una órbita sin tender estrictamente hacia el equilibrio, se dice que el sistema es *marginalmente estable* (Trayectoria 2 en Figura 3.2). Por último, si se considera el caso en que el sistema se pone en movimiento y este es lanzado fuera del campo de acción del punto de equilibrio  $x_e$ , y la solución del sistema jamás vuelve a la región limitada  $B_r$  para todo tiempo futuro, se dice que el sistema es *inestable* (Trayectoria 3 en Figura 3.2) [18].

Por otro lado, a continuación, vamos a citar dos definiciones que *Lyapunov* considera que se deben cumplir en un funcional de energía  $V$  para lograr garantizar la satisfacción del punto de equilibrio y  $V$  pertenezca al conjunto de funciones de *Lyapunov*:

**Definición 1:** Una función escalar continua  $V(\mathbf{x})$  se dice que es localmente definida positiva si  $V(\mathbf{0}) = 0$ , y al interior de una esfera  $B_{R_0}$  para todo  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow V(\mathbf{x}) > 0$ . Si además  $V(\mathbf{0}) = 0$  y la propiedad mencionada con anterioridad se mantiene en todo el espacio de estados, entonces se dice que el sistema es globalmente definido positivo [18].

Esta definición se puede observar en la Figura 3.3, si se considera un sistema de segundo orden con variables de estado  $x_1$  y  $x_2$ , donde para toda pareja ordenada solución del sistema  $(x_1, x_2)$  el valor de  $V(\mathbf{x})$  es mayor que cero, excepto en el origen, lugar en que  $V(\mathbf{x}) = 0$ . La Figura 3.3(a) muestra en 3 dimensiones la evaluación del funcional  $V$  para tres diferentes funciones en el espacio de estados, donde  $V_1 < V_2 < V_3$ ; cabe resaltar que todos los valores evaluados en  $V$  son mayores de cero. Como complemento, la Figura 3.3(b) muestra la misma gráfica mencionada con anterioridad, pero desde una vista superior, con el propósito de mostrar la forma en que los contornos del funcional  $V$  se acercan hacia el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

**Figura 3.3** Función típica definida positiva de Lyapunov.



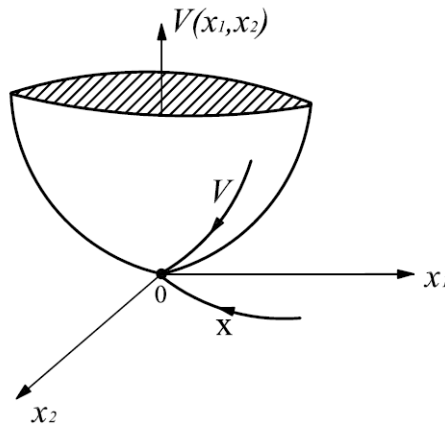
**Definición 2:** Si en una bola  $B_{R_0}$  la función  $V(\mathbf{x})$  es definida positiva (*Definición 1*) y tiene derivadas parciales continuas, y si la derivada en el tiempo a lo largo de cualquier trayectoria del sistema (2.1) es semidefinida negativa, es decir

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0,$$

entonces se dice que  $V(\mathbf{x})$  es una función de *Lyapunov* para el sistema [18].

La interpretación geométrica de la presente definición se observa en la Figura 3.4, donde es evidente que la dinámica de  $V(\mathbf{x})$  para todo valor de  $\mathbf{x}$  es estrictamente decreciente, lo que provoca que sin importar el punto de inicio del movimiento  $\mathbf{x}_0$ , la solución  $\mathbf{x}$  del sistema siempre tenderá hacia punto de equilibrio  $\mathbf{x}_e = 0$ . Esta gráfica también muestra una forma de campana convexa, que es fácilmente asociada con una función cuadrática  $V = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}$ ; esta forma cuadrática es típicamente seleccionada como función de *Lyapunov* y es ampliamente utilizada para mostrar estabilidad en la definición de técnicas avanzadas de control, como, por ejemplo, el Control por Modos Deslizantes.

**Figura 3.4 Ilustración de definición 2.**



### 3.2 FUNDAMENTOS DEL CONTROL POR MODOS DESLIZANTES: SMC

De forma general el *SMC* es considerado una técnica de control para sistemas no-lineales con imprecisión en su modelo matemático. La metodología deslizante se base en la premisa de poder controlar sistemas descritos por ecuaciones diferenciales de orden  $n$ , a través de una acción de control de tipo escalar, es decir, tiene la capacidad de manipular un sistema de orden superior, como si se tratase de un sistema de primer orden. Esta técnica de control es ampliamente utilizada en el ámbito de la ingeniería en manipuladores robóticos, vehículos submarinos, motores eléctricos de alta eficiencia y convertidores de potencia [17,18].

A continuación, se presentarán los conceptos del Control por Modos Deslizantes cuando el sistema únicamente tiene una forzante; no obstante, cabe resaltar que su aplicación se expande para sistema con múltiples entradas.

Consideremos un sistema en la forma general no-lineal definido por la ecuación dinámica (3.4) denominada como la forma afín del sistema

$$x^{(n)} = f(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})u, \quad (3.4)$$

donde  $f(\mathbf{x})$  y  $b(\mathbf{x})$  son una funciones continuas limitadas por arriba,  $x$  es una salida escalar de interés (por ejemplo la posición de un sistema mecánico),  $u$  una ley de control escalar (por ejemplo el torque ejercido por un motor) y,  $\mathbf{x}$  un vector de variables de estado descrito por

$$\mathbf{x} = [x \ \dot{x} \ \ddot{x} \ \dots \ x^{(n-1)}]^T. \quad (3.5)$$

Aún en presencia de imprecisiones de modelado donde  $f(\mathbf{x})$  y  $b(\mathbf{x})$  no son exactamente conocidas, el problema de control se centra en la especificación de un vector de seguimiento deseado  $\mathbf{x}_d$  descrito por

$$\mathbf{x}_d = \left[ x_d \dot{x}_d \ddot{x}_d \cdots x_d^{(n-1)} \right]^T. \quad (3.6)$$

De esta manera, el error de seguimiento  $\tilde{\mathbf{x}}$  se determina como la diferencia entre (3.5) y (3.6), tal como se observa en (3.7)

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = \left[ \tilde{x} \dot{\tilde{x}} \ddot{\tilde{x}} \cdots \tilde{x}^{(n-1)} \right]^T. \quad (3.7)$$

Por otro lado, para mantener las dinámicas de un sistema pertenecientes a  $\mathbb{R}^n$  en un valor deseado por medio de una acción de control escalar, se crea una superficie escalar que cumpla con la ecuación  $s(\mathbf{x}; t) = 0$ , donde la superficie está en función de derivadas consecutivas de la señal de error cometido, tal como se observa en (3.8)

$$s(\mathbf{x}; t) = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x}, \quad (3.8)$$

donde  $\lambda$  es una constante estrictamente positiva, y guarda relación con el ancho de banda del sistema, sin embargo, no se profundizará al respecto.

En este caso, para un sistema de segundo orden la superficie de deslizamiento a partir de (3.8) está dada por

$$s = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x}, \quad (3.9)$$

mientras que para un sistema de tercer orden la superficie de deslizamiento será el resultado de

$$s = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^2 \tilde{x}$$

$$s = \left( \frac{d^2}{dt^2} + 2\lambda \frac{d}{dt} + \lambda^2 \right) \tilde{x}$$

$$s = \ddot{\tilde{x}} + 2\lambda \dot{\tilde{x}} + \lambda^2 \tilde{x}. \quad (3.10)$$

De (3.9) y (3.10) se observa que la superficie de deslizamiento está constituida como la superposición del error de la variable de salida  $\tilde{x}$ , y las  $n - 1$  dinámicas de error, ponderadas por un factor constante positivo  $\lambda$ .

Por otro lado, el *SMC* se basa en el cumplimiento de dos grandes premisas, *la existencia de una superficie de deslizamiento escalar* ya mencionada dada (3.8), y *la satisfacción de una condición de atracción hacia la superficie deslizante*. Esta condición deslizante está determinada por la satisfacción de la ecuación (3.11) descrita a continuación, basada en una función de energía de *Lyapunov* cuadrática de  $s$ , siendo  $s$  la superficie de deslizamiento constituida por los errores cometidos en toda la trayectoria solución del sistema; dicho de otra forma, mediante el *SMC* lo que se desea minimizar por *Lyapunov* es el error cometido en el sistema a partir de una tendencia decreciente de todas las dinámicas del error hacia  $s = 0$ .

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s| \quad (3.11)$$

La expresión (3.11) establece que la distancia al cuadrado hacia la superficie determinada por  $s^2$ , decrece a lo largo de todas las trayectorias del sistema. Esta ecuación concuerda con la *definición 1* de *Lyapunov*, ya que la ecuación cuadrática  $s^2$  es definida positiva para todo valor de  $s$ . Por otro lado, la satisfacción de la *definición 2* de *Lyapunov* no es muy evidente, razón por la cual se abordará por medio de la siguiente demostración:

*Inicio de demostración.*

Dado

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s|,$$

y teniendo presente que  $\eta$  es una constante estrictamente positiva, tenemos que:

$$\frac{1}{2} \left( 2 \frac{ds}{dt} s \right) \leq -\eta |s|$$

$$\dot{s} \cdot s \leq -\eta |s| \tag{3.12}$$

$$\frac{\dot{s} \cdot s}{\eta} \leq -|s|$$

$$-\frac{\dot{s} \cdot s}{\eta} \geq |s|$$

Resolviendo la desigualdad tenemos dos casos particulares.

**Caso 1**

$$\frac{\dot{s} \cdot s}{\eta} \leq s$$

$$\dot{s} \leq \eta$$

**Caso 2**

$$-\frac{\dot{s} \cdot s}{\eta} \geq s$$

$$-\dot{s} \geq \eta$$

$$\dot{s} \leq \eta$$

Hasta este punto de forma general es correcto afirmar que la amplitud de la dinámica de la distancia hacia la superficie está dada por

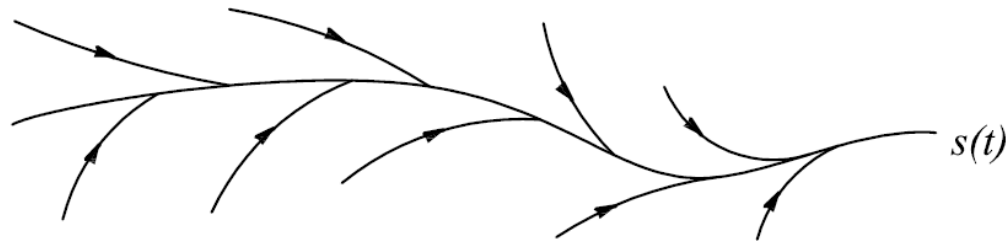
$$\dot{s} \leq \eta, \quad (3.13)$$

es decir, que la dinámica del error del control deslizante es decreciente e inferior a una cantidad positiva  $\eta$ . Por tanto, si se hace que  $\eta \rightarrow 0^+$ , se verifica el cumplimiento de la *definición 2* de *Lyapunov*, dado que  $\dot{s} \leq 0^+$ , es decir, la dinámica de la superficie es semidefinida negativa.

*Fin de demostración.*

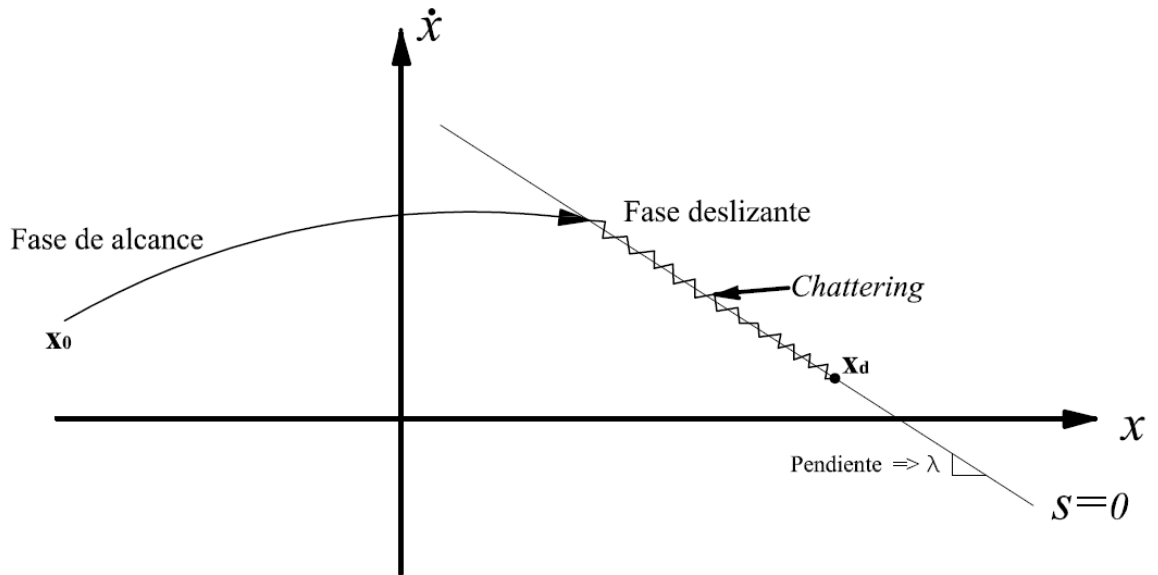
El régimen deslizante se puede observar en la Figura 3.5, donde todas las dinámicas del sistema son atraídas hacia la superficie deslizante  $s(t)$ .

**Figura 3.5 Condición deslizante.**



Por otro lado, el modo de operación del *SMC* para un sistema de segundo orden se puede observar en la Figura 3.6, donde a partir de una condición inicial  $\mathbf{x}_0$  comienza una fase de alcance hacia un valor deseado  $\mathbf{x}_d$  sobre la superficie deslizante  $s = 0$ , y una vez sobre ella el sistema entra en régimen deslizante conmutando por encima y por debajo de la superficie, pero siempre cerca de ella, formando un rizo no deseado denominado *chattering*.

**Figura 3.6 Interpretación gráfica de las ecuaciones (3.8) y (3.11).**



Adicionalmente, en 1960 el matemático ruso A. F. Filippov tuvo un enorme interés en la interpretación gráfica de los sistemas deslizantes, definiendo la dinámica en la fase deslizante como el promedio de la conmutación hacia ambos lados de la superficie por medio de (3.14).

$$\dot{s} = 0 \tag{3.14}$$

De esta manera, para satisfacer la ecuación (3.14) debe existir una ley de control equivalente  $u_{eq}$ , tal que la solución del sistema se encuentre sobre la superficie deslizante, es decir,  $s = 0$ .

Por ejemplo, para un sistema dado por

$$\ddot{x} = f + u, \tag{3.15}$$

a partir de (3.7) se obtiene que

$$\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x} - \ddot{x}_d$$

$$\ddot{x} = \ddot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d,$$

Y reemplazando en (3.15) tenemos que

$$\ddot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d = f + u \quad (3.16)$$

Por otro lado de (3.8) para  $n = 2$  e igualando la superficie a cero, tenemos que:

$$0 = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \tilde{x}$$

$$0 = \dot{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x}. \quad (3.17)$$

Por tanto, si derivo la expresión (3.17) con respecto al tiempo tenemos que:

$$0 = \ddot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}}$$

$$\ddot{\tilde{x}} = -\lambda \dot{\tilde{x}}. \quad (3.18)$$

Ahora reemplazando (3.18) en (3.16) y despejando la ley de control tenemos que:

$$-\lambda \dot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d = f + u$$

$$\ddot{x} = -\lambda \dot{\tilde{x}} + \ddot{x}_d = f + u_{eq} \quad (3.19)$$

$$u_{eq} = -f - \lambda \dot{x} + \ddot{x}_d. \quad (3.20)$$

No obstante, para el sistema dado por (3.19) el equivalente geométrico de la ley de control dada por (3.20) establece que:

$$u_{eq} = \alpha \cdot u_+ + (1 - \alpha)u_-. \quad (3.21)$$

Así, de forma intuitiva el sistema tiene dos comportamientos distintos según la forma de la ley de control equivalente  $u_{eq}$ :

$$f_+ \text{ cuando } u_{eq} = u_+ \text{ porque } \alpha = 1,$$

$$f_- \text{ cuando } u_{eq} = u_- \text{ porque } \alpha = 0.$$

En forma vectorial la dinámica del sistema  $f_+$  está dada por (3.22), mientras que la dinámica vectorial de  $f_-$  está dada por (3.23).

$$f_+ = [\dot{x} \ \ddot{x}] = [\dot{x} \ f + u_+] \quad (3.22)$$

$$f_- = [\dot{x} \ \ddot{x}] = [\dot{x} \ f + u_-] \quad (3.23)$$

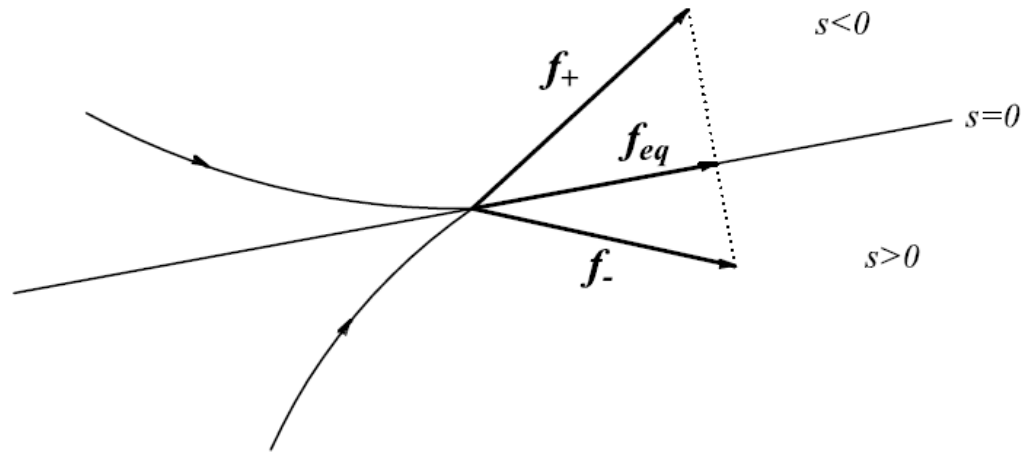
De esta manera, es correcto afirmar que la  $f_{eq}$  necesaria y suficiente para que el sistema permanezca sobre la superficie de deslizamiento  $s$  está dada por

$$f_{eq} = [\dot{x} \ \ddot{x}] = [\dot{x} \ f + u_{eq}] \quad (3.24)$$

De forma complementaria, según Filippov el comportamiento del sistema (3.15) considerando las leyes de control  $u_+$  y  $u_-$ , se observa en la Figura 3.7, donde  $f_{eq}$

es la forma que debe tener el sistema para permanecer sobre la superficie de deslizamiento  $s$ .

**Figura 3.7** Equivalente dinámico del SMC según Filippov.



No obstante, y con fines prácticos, se optará por el cumplimiento de la ecuación (3.25) para garantizar el alcance de todas las dinámicas del sistema hacia la superficie de deslizamiento

$$\dot{s} \cdot s < 0, \quad (3.25)$$

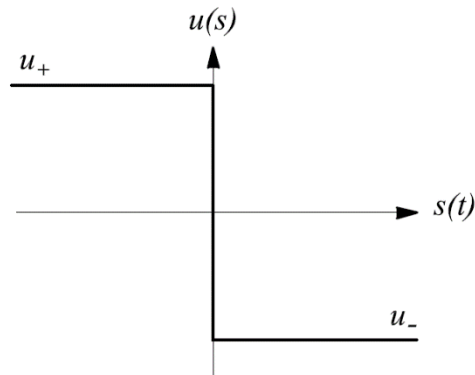
donde es evidente que para un  $s > 0$  la dinámica debe ser decreciente para satisfacer (3.13), es decir,  $\dot{s} < 0$ ; y para un  $s < 0$  la dinámica debe ser creciente, es decir,  $\dot{s} > 0$ .

Además, de (3.13) se puede abstraer que el parámetro  $\eta$  es una cantidad positiva que está relacionada con la amplitud máxima de la ley de control discontinua dada por (3.26), tal que,  $M = \eta$ .

$$u = -M.\text{sign}(s) \quad (3.26)$$

La acción de control definida por (3.26) es conocida como la ley de control por modos deslizantes, cuyo modo de operación concuerda con la condición de atracción hacia la superficie mencionada con anterioridad en (3.25). La Figura (3.8) se observa el comportamiento de la ley de control deslizante  $u$  en función de la distancia hacia la superficie deslizante  $s$  [18].

**Figura 3.8 Ley de control deslizante**



A continuación, se mostrará el esquema y estrategia de control aplicados para mantener la altura deseada del sistema *Bouncing Ball* previamente modelado como híbrido en el Capítulo 2.

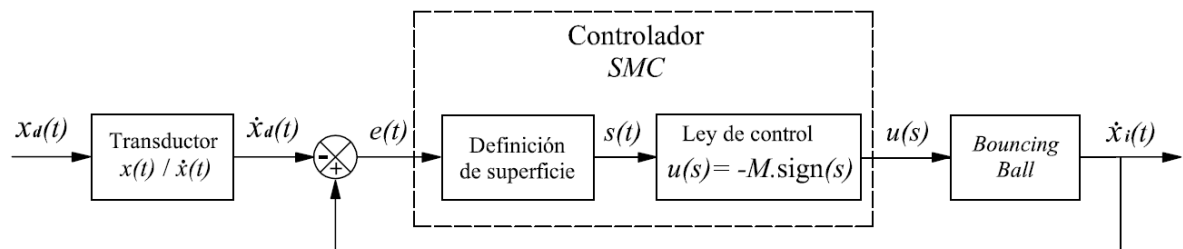
### 3.3 CONTROL POR MODOS DESLIZANTES APLICADO AL *BOUNCING BALL* HÍBRIDO

Dado que el propósito del presente proyecto es mantener en un valor deseado de posición  $x_d(t)$ , la altura máxima alcanzada por una pelota durante cada rebote sobre una superficie rígida en un movimiento vertical, teniendo en cuenta que el alcance de esta posición depende de la velocidad con la cual la pelota sale lanzada hacia arriba después de cada colisión, se espera controlar la posición máxima de forma indirecta a partir del control de la velocidad posterior a la colisión. Este esquema de control se observa en la Figura 3.9, donde la salida de interés es la velocidad de inicial de la pelota  $\dot{x}(t)$ , y el error cometido  $e(t)$ , está dado por

$$e(t) = \dot{x}_i(t) - \dot{x}_d(t), \quad (3.27)$$

donde  $\dot{x}_i(t)$  corresponde con la velocidad de salida de la pelota posterior al  $i$  –ésimo impacto.

**Figura 3.9 Esquema de control SMC.**



Para diseñar la técnica de *SMC* aplicada al sistema, a continuación, se constituirán el vector de variables de estado, el vector de valores deseados y el vector de errores cometidos, a partir de (3.5), (3.6) y (3.7) respectivamente.

$$\mathbf{x} = [\dot{x} \ \ddot{x}] = [x_2 \ g]$$

$$\mathbf{x}_d = [\dot{x}_d \ddot{x}_d] = [x_{2d} \ g]$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = [\dot{\tilde{x}} \ \ddot{\tilde{x}}] \quad (3.28)$$

Además, como el sistema *Bouncing Ball* es de segundo orden y la variable de salida del sistema es  $\dot{\tilde{x}}$ , la superficie de deslizamiento está dada por

$$s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{2-1} \dot{\tilde{x}} = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right) \dot{\tilde{x}}$$

$$s = \ddot{\tilde{x}} + \lambda \dot{\tilde{x}}, \quad (3.29)$$

y al reemplazar (3.28) en (3.29) considerando  $\lambda = 1$ , tenemos definida la superficie deslizante por

$$s = (g - g) + \lambda(x_2 - x_{2d})$$

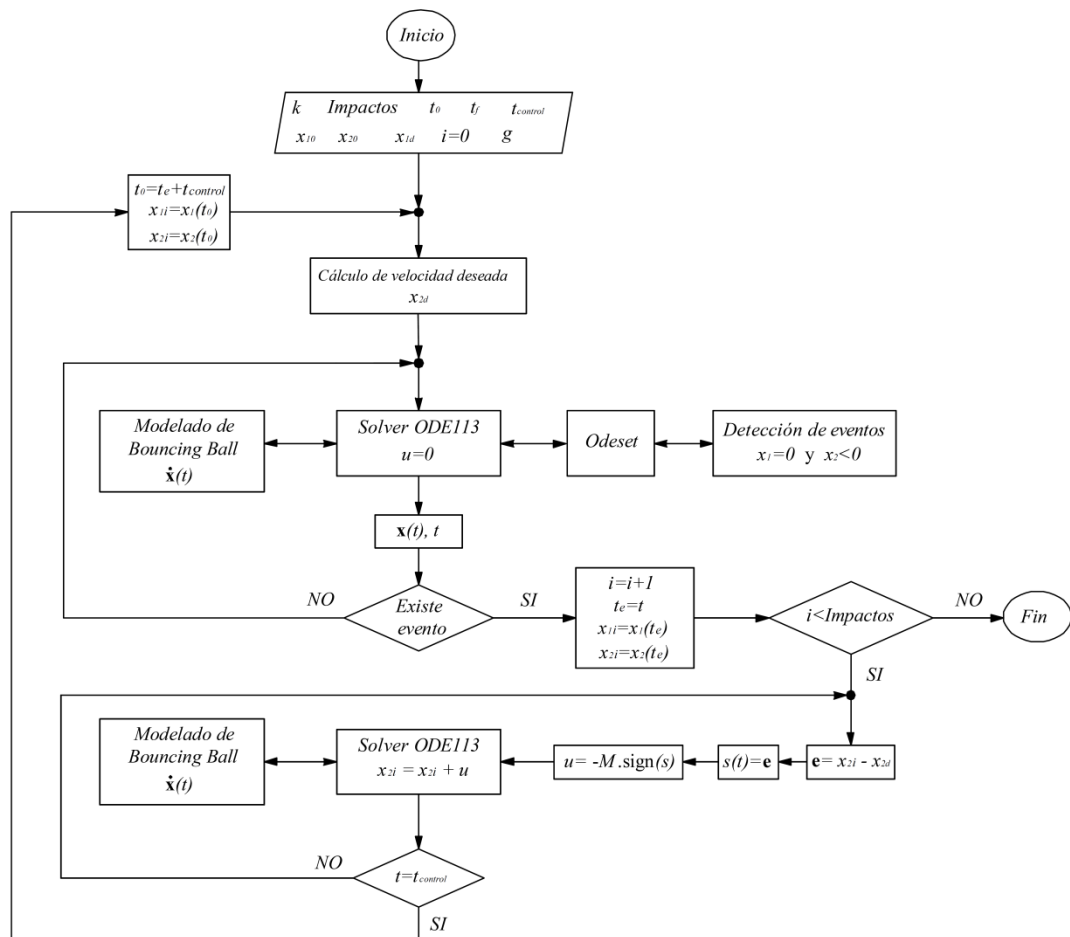
$$s = x_2 - x_{2d}$$

Una vez definida la superficie deslizante, en la Figura 3.10 se muestra la estrategia de control aplicada al *Bouncing Ball* para mantener la altura de la pelota en un valor deseado bajo simulación numérica usando MATLAB®. Aquí se observa como a partir de condiciones iniciales se comienza un proceso para obtener la solución de la ecuación diferencial matricial  $\dot{\mathbf{x}}$ ; para esto se utiliza el *Solver ODE113*, el cual consulta durante constantemente una función que detecta los eventos discretos (colisiones), y una vez ocurrido un evento, se guarda la información de este (posición, velocidad y tiempo) para definir el error cometido en la velocidad de alcance máximo deseado, y con base a este error se calcula la superficie deslizante y la respectiva ley de control deslizante  $u$ ; de esta manera, comienza un proceso iterativo de control para llevar la velocidad de la pelota posterior al impacto hacia el valor deseado calculado durante un tiempo preestablecido de control  $t_{control}$ , utilizando también el *Solver ODE113* para continuar con la solución del sistema. Terminado el tiempo de control, la pelota es

lanzada verticalmente con nuevas condiciones iniciales (posición, velocidad y tiempo), para continuar resolviendo su trayectoria en marcha libre por el primer *Solver ODE113* situado al inicio del algoritmo visto en la Figura 3.10, hasta que exista un nuevo evento discreto. Este proceso iterativo continúa hasta que se cumpla el número de rebotes predefinidos.

A continuación, en el Capítulo 4 de análisis y resultados, se mostrará el funcionamiento del *Bouncing Ball* mediante la estrategia de Control por Modos Deslizantes definida con anterioridad.

**Figura 3.10 Estrategia de control SMC aplicado al *Bouncing Ball*.**



## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

### 4.1 ANÁLISIS DE SIMULACIONES

En el presente capítulo bajo simulación numérica se mostrarán y analizarán, las dinámicas resultantes de la evolución del sistema *Bouncing Ball* controlado a través de la estrategia de Control por Modos Deslizantes definida en el capítulo anterior, considerando entre otros, variaciones en las condiciones iniciales y, posibles perturbaciones en el sistema por cambios abruptos en: el coeficiente de restitución  $k$  producto de la sustitución instantánea de la superficie rígida durante el tiempo de vuelo; la aceleración de la gravedad; y el nivel de referencia de la superficie rígida. A partir de acá cuando se cite la posición y la velocidad alcanzada, se hará referencia a la cinemática propia de la pelota. No obstante, en algunos casos pertinentes se citará completamente para evitar ambigüedades en la lectura.

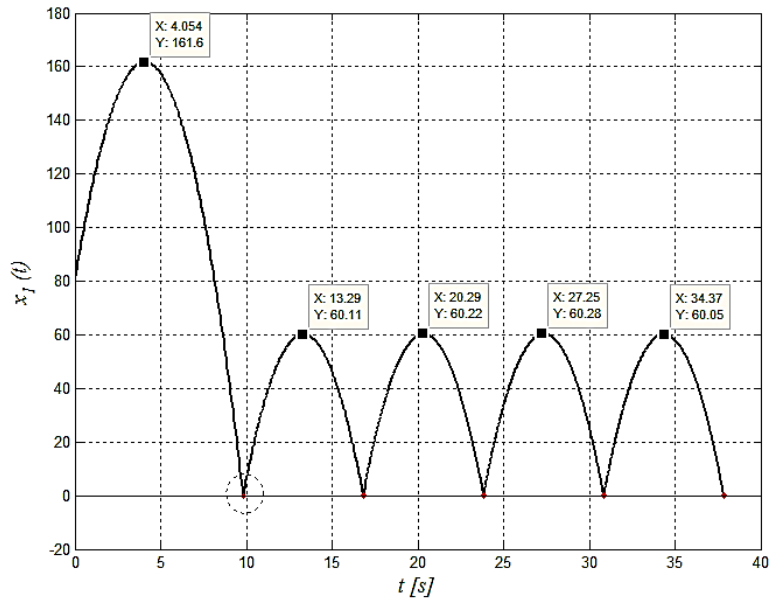
**4.1.1 Caso 1: Regulación de altura deseada  $x_{1d} = 60 [m]$**  A partir de los parámetros seleccionados de la Tabla 4.1, a continuación, se mostrarán los resultados de simulación del sistema, donde el *SMC* tiene como objetivo mantener el máximo alcance vertical de la pelota en  $60[m]$ .

**Tabla 4.1 Especificaciones de simulación para Caso 1.**

Parámetro	Notación	Valor
Posición inicial	$x_{10}$	$80[m]$
Velocidad inicial	$x_{20}$	$40[m/s]$
Coeficiente de restitución	$k$	0.8
Número de saltos	$saltos$	5
Tiempo de simulación	$T$	$50[s]$
Posición máxima deseada	$x_{1d}$	$60[m]$
Tiempo de control	$t_{control}$	$0.01[s]$
Magnitud de ley de control	$M$	$0.1 [m/s]$

La Figura 4.1 muestra como a través del SMC se durante cada rebote el alcance máximo de la pelota se mantiene cerca del valor deseado.

**Figura 4.1 Posición – Caso 1.**

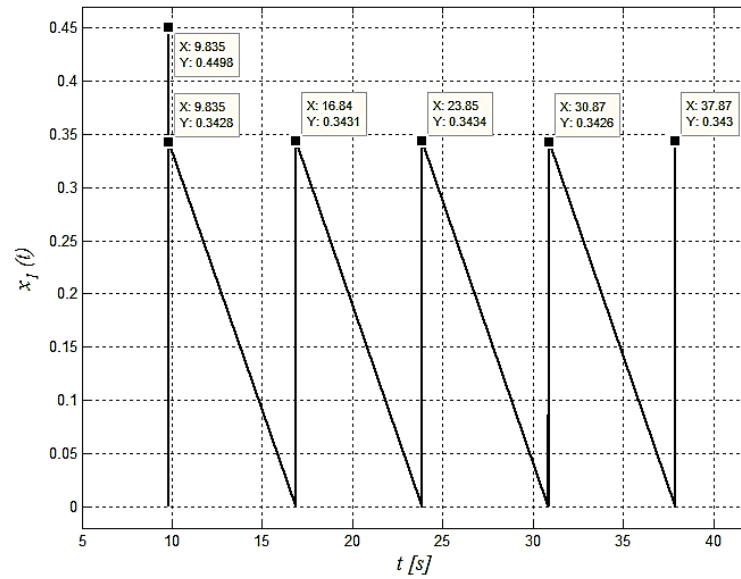


Además, en la Figura 4.2 se observa la posición recorrida por la pelota durante el tiempo de control  $t_{control}$ , teniendo como el recorrido máximo un valor de  $0.4498[m]$  posterior al primer impacto, donde se requiere una mayor disminución de la velocidad de salida, mientras que el recorrido máximo posterior a siguientes impactos se encuentra alrededor de los  $0.34[m]$ . Cabe aclarar que línea inclinada entre cada etiqueta se debe a la interpolación entre puntos, mas no corresponde con desplazamiento en el sistema.

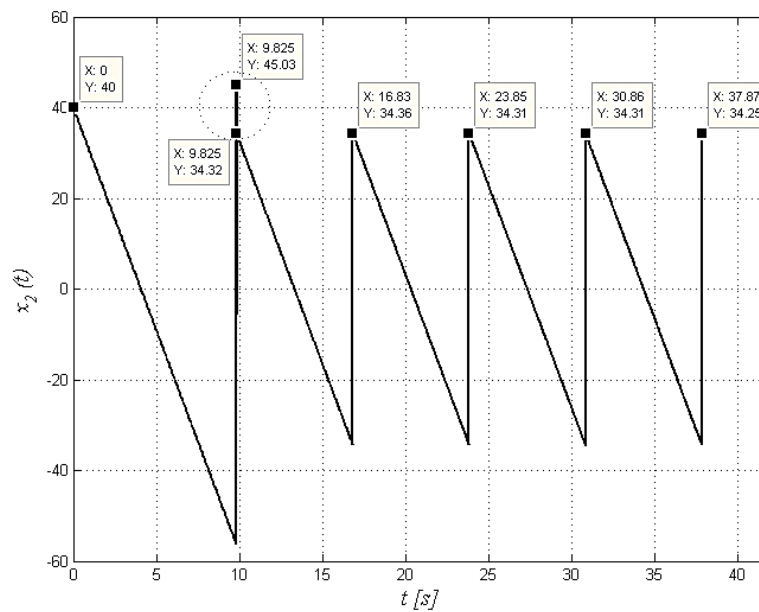
Por otro lado, en la Figura 4.3 se observa la curva de velocidad de la pelota con respecto al tiempo, donde se observa como posterior al primer impacto el sistema de control necesita disminuir la velocidad de  $45.03 [m/s]$  hasta un valor cercano a los  $34.3 [m/s]$ , y mantener el control de la velocidad de salida posterior a cada impacto cerca de este valor. Al igual que en la curva de posición durante control

de la Figura 4.2, en la Figura 4.4 se observa el cambio de velocidad de salida durante el tiempo de control preestablecido.

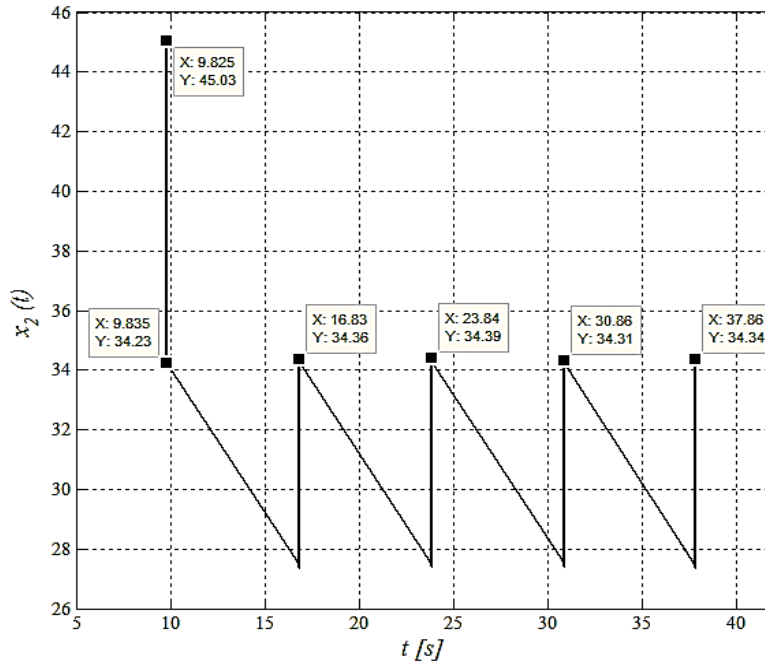
**Figura 4.2 Posición durante control – Caso 1.**



**Figura 4.3 Velocidad – Caso 1.**



**Figura 4.4 Velocidad durante control – Caso 1.**

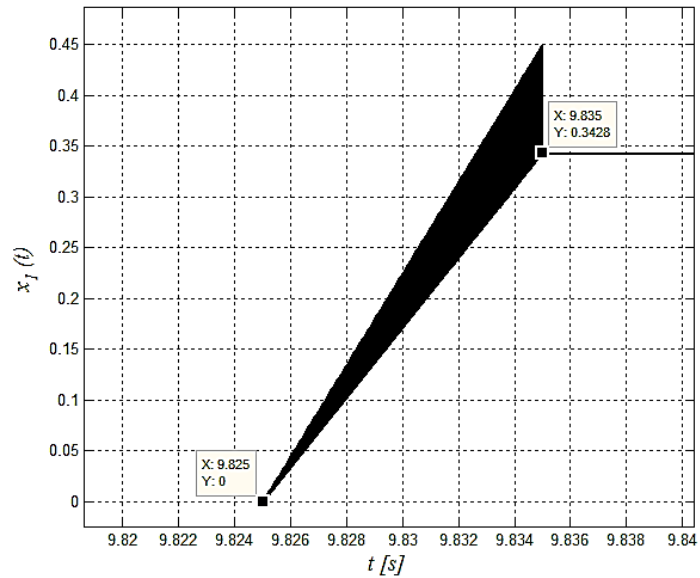


Para comprender un poco más el control efectuado sobre el sistema, la Figura 4.5 muestra el detalle de la altura alcanzada durante el tiempo de control, donde por la relación de la velocidad (Espacio/Tiempo) es evidente que la pelota es liberada en un tiempo de 9.835 [s] con una velocidad de 34.28 [m/s]. Esta premisa se puede soportar con la Figura 4.6, donde se observa el detalle de la velocidad durante el primer tiempo de control, teniendo en cuenta que justo después de la primera colisión la pelota sale con una velocidad de 45.03 [m/s], la cual debe ser disminuida con el control conmutado SMC hasta un valor de 34.23 [m/s], cercano al valor ideal deseado de 34.29 [m/s]. Cabe resaltar que el ancho de las curvas de velocidad coincide con el tiempo de control predefinido.

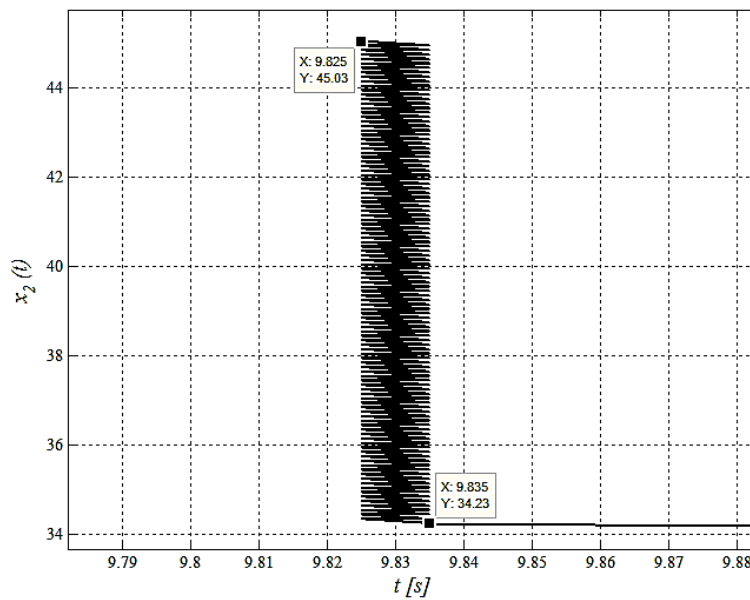
Adicionalmente, en la Figura 4.7 se observa la posición (color negro) superpuesta con una representación de la ley de control (color rojo), teniendo en cuenta que en una sola barra de color rojo está contenida toda la información de la ley de control aplicada al sistema para controlar la velocidad de lanzamiento. En la Figura 4.8 se observa en detalle la ley de control neta aplicada al sistema durante el tiempo de

control posterior al primer impacto, donde cada pulso de color rojo representa una acción de control aplicada.

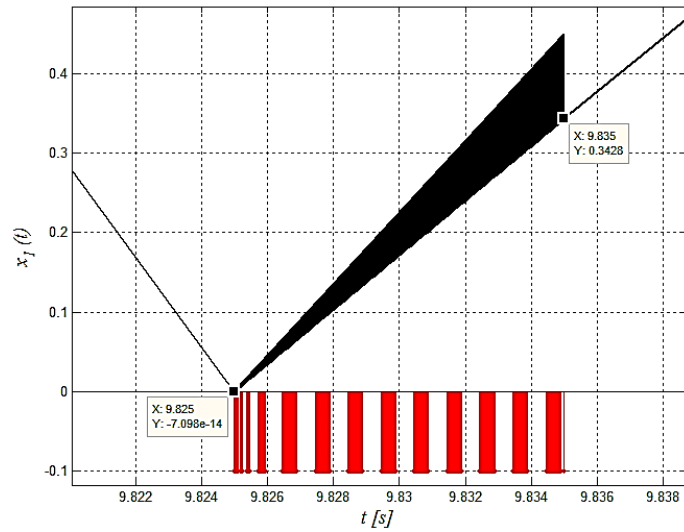
**Figura 4.5 Detalle posición post primer impacto – Caso 1.**



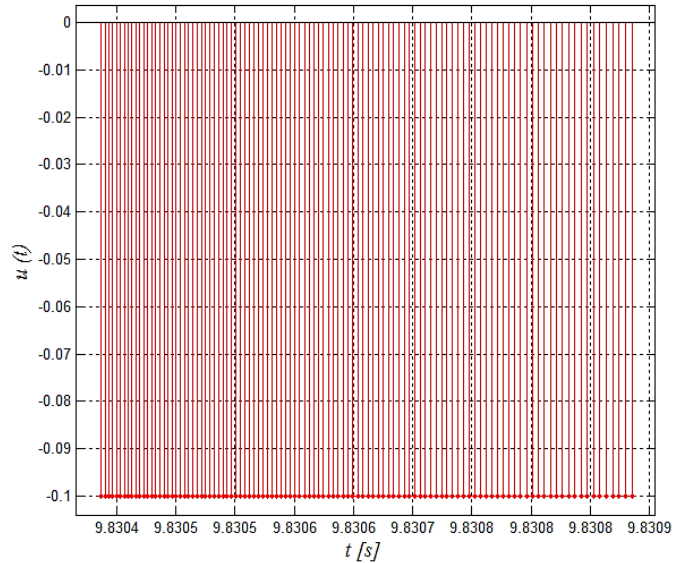
**Figura 4.6 Detalle velocidad post primer impacto – Caso 1.**



**Figura 4.7 Posición vs ley deslizante (Impacto 1) – Caso 1.**



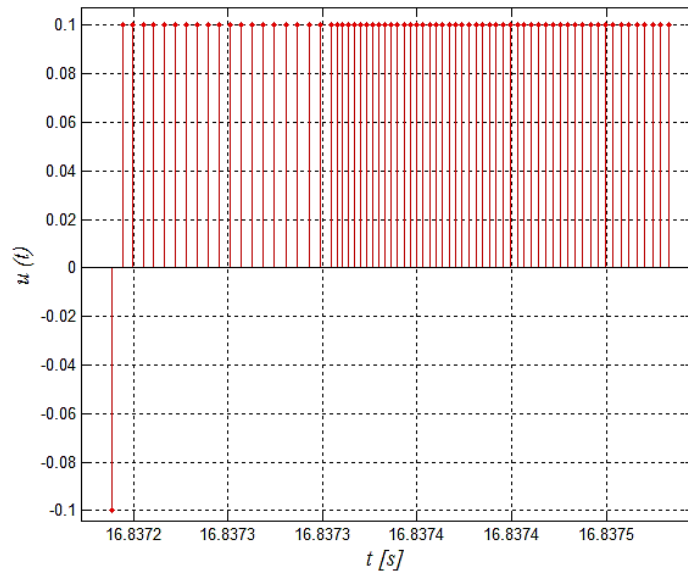
**Figura 4.8 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 1.**



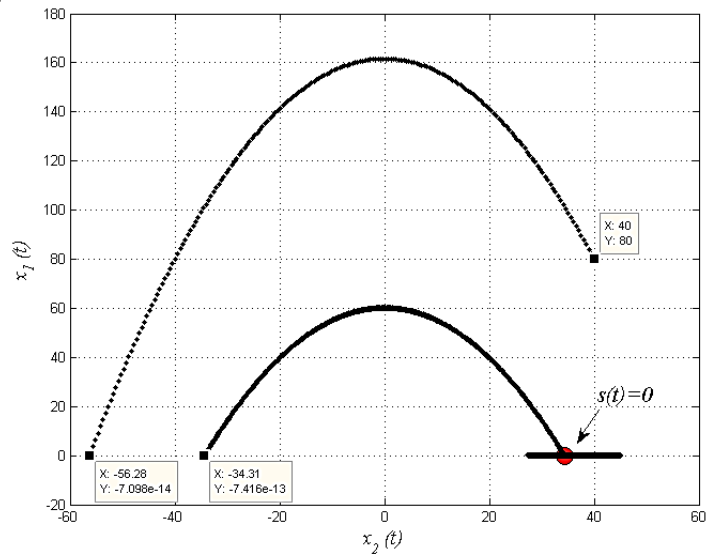
Similar a la Figura 4.8, la Figura 4.9 muestra el detalle de la ley de control deslizante aplicada a la pelota durante el segundo tiempo de control (posterior al segundo impacto), donde a diferencia se la Figura 4.8, se observa un único pulso de  $u(t) = -0.1$  [m/s] y varios pulsos de  $u(t) = 0.1$  [m/s]. Esto se debe a que en

el primer impacto se requiere disminuir sustancialmente la velocidad de salida, mientras que el segundo impacto la prioridad es incrementar la velocidad de salida. Por otro lado, la Figura 4.10 muestra en un mapa de fase, la confrontación de las variables de estado posición y velocidad, donde además se define en color rojo la superficie de deslizamiento definida en el sistema.

**Figura 4.9 Detalle ley de control deslizante (Impacto 2) – Caso 1.**

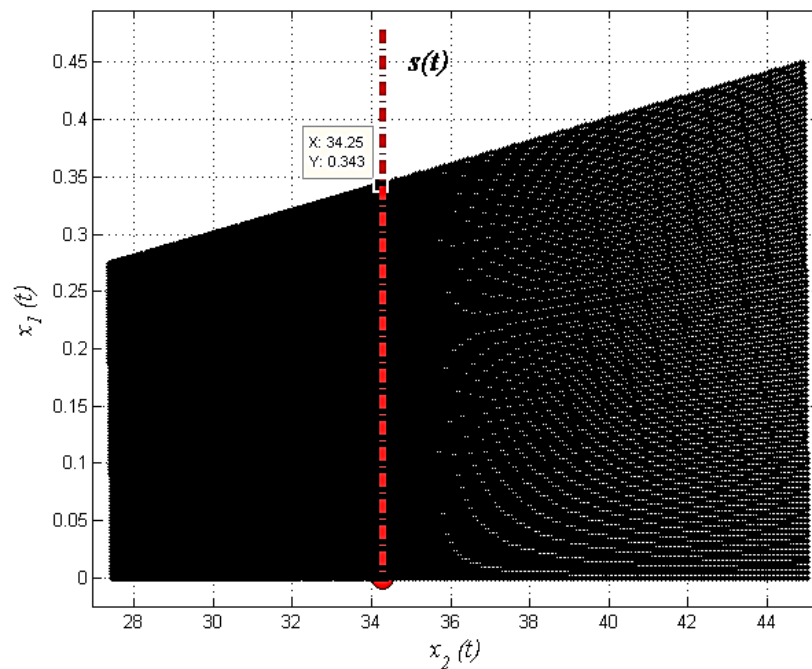


**Figura 4.10 Mapa de fase – Caso 1.**



Para finalizar, a partir de la Figura 4.10 en la Figura 4.11 se observa en detalle la región cerca de la superficie de deslizamiento (color rojo), donde la línea vertical muestra todos los posibles recorridos en el control de velocidad de salida durante cada tiempo de control, siendo el punto etiquetado el máximo de posición alcanzado durante el control a la velocidad de salida. A la región sombreada (color negro) que se encuentra rodeando la superficie deslizante se le conoce como *Chattering*, y es un fenómeno presente durante la aplicación del *SMC*.

**Figura 4.11 Chattering – Caso 1.**



La Tabla 4.2 resume los datos obtenidos para y durante el control de velocidad de salida, donde se observa de izquierda a derecha los tiempos de colisión, la velocidad previa a la colisión, la velocidad de lanzamiento leída, el error en velocidad, y el número positivos y negativos durante el control.

De la Tabla 4.2, es evidente que el error obtenido en la velocidad de salida, nunca fue mayor que la magnitud de la ley de control, la cual para este caso se fijó en  $0.1 [m/s]$ .

**Tabla 4.2 Resumen de simulación - Caso 1.**

Tiempo de impacto	Velocidad previa al impacto	Velocidad de salida obtenida	Velocidad de salida deseada	Error en velocidad de salida	Pulsos de $u = M$	Pulsos de $u = -M$
$t_e[s]$	$x_2(t_e^-)[m/s]$	$x_2[m/s]$	$x_{2d}[m/s]$	$\tilde{x}_2[m/s]$	<i>Unidad</i>	<i>Unidad</i>
9.8250	-56.2850	34.28	34.29	-0.01	0	108
16.8303	-34.3260	34.36	34.29	0.07	69	1
23.8423	-34.3588	34.39	34.29	0.1	69	1
30.8597	-34.3851	34.31	34.29	0.02	68	1
37.8609	-34.3061	34.34	34.29	0.05	69	1

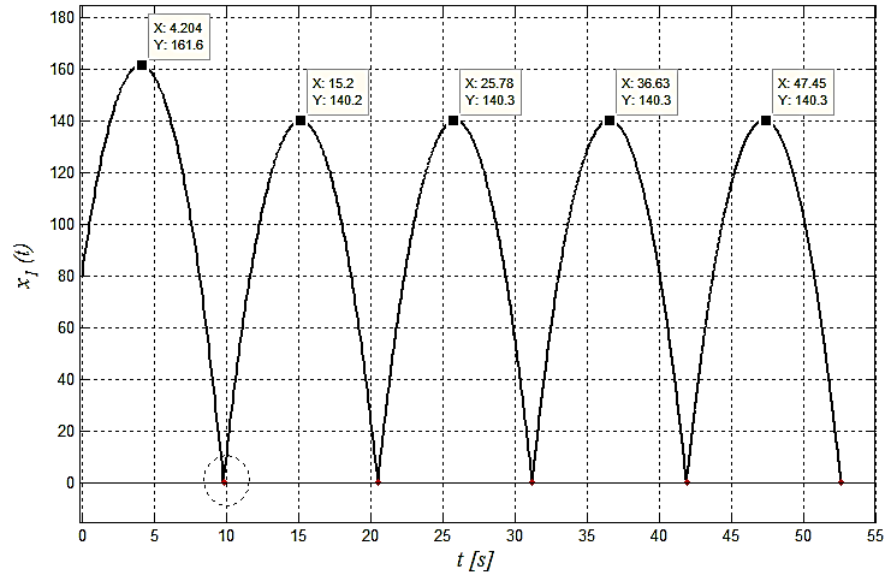
**4.1.2 Caso 2: Regulación de altura deseada  $x_{1d} = 140 [m]$**  A partir de los parámetros seleccionados de la Tabla 4.3, a continuación, se mostrarán los resultados de simulación del sistema, donde el SMC tiene como objetivo mantener el máximo alcance vertical de la pelota en **140[m]**.

**Tabla 4.3 Especificaciones de simulación para Caso 2.**

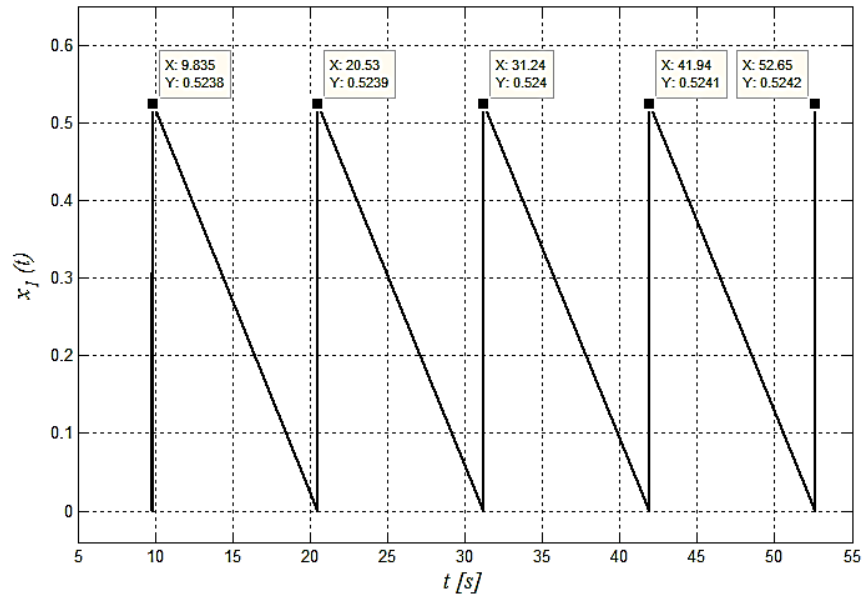
Parámetro	Notación	Valor
Posición inicial	$x_{10}$	80[m]
Velocidad inicial	$x_{20}$	40[m/s]
Coefficiente de restitución	$k$	0.8
Número de saltos	<i>saltos</i>	5
Tiempo de simulación	$T$	50[s]
Posición máxima deseada	$x_{1d}$	140[m]
Tiempo de control	$t_{control}$	0.01[s]
Magnitud de ley de control	$M$	0.1

De forma equivalente al Caso 1 presentado previamente, en la Figura 4.12 se observa como a través del SMC se durante cada rebote el alcance máximo de la pelota se mantiene cerca del valor deseado en 140 [m/s].

**Figura 4.12 Posición – Caso 2.**

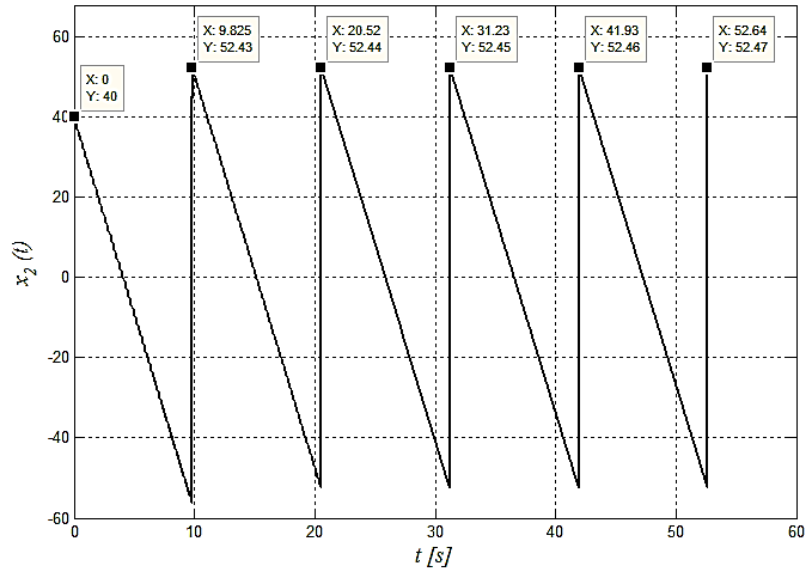


**Figura 4.13 Posición durante control – Caso 2.**

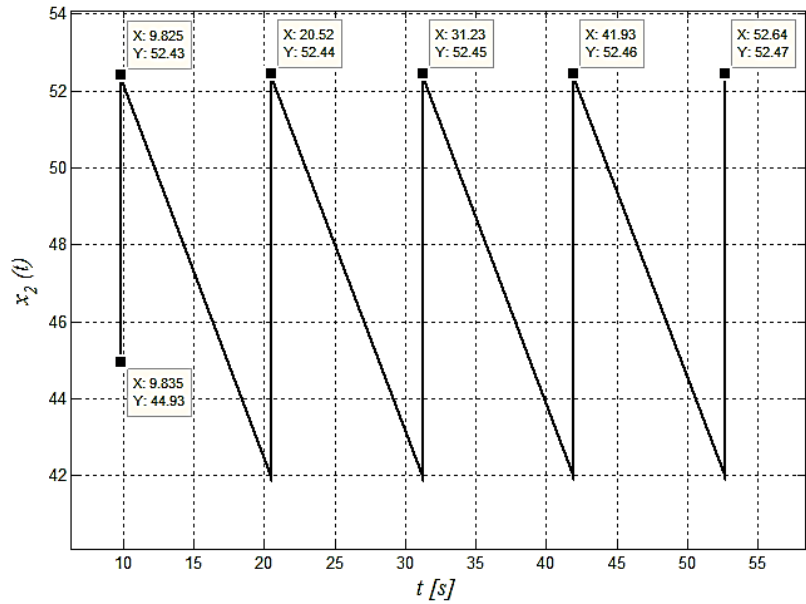


Además, en la Figura 4.13 se observa la posición recorrida por la pelota durante el tiempo de control en un valor cercano a los 0.52[m]. De igual manera, en la Figura 4.14 se observa la curva de velocidad de la pelota, mientras que en la Figura 4.15 se observa la velocidad durante el control.

**Figura 4.14 Velocidad – Caso 2.**



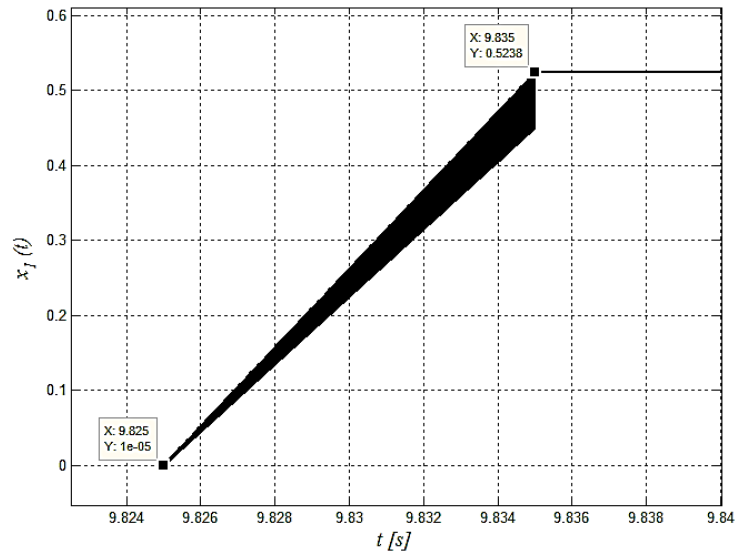
**Figura 4.15 Velocidad durante control – Caso 2.**



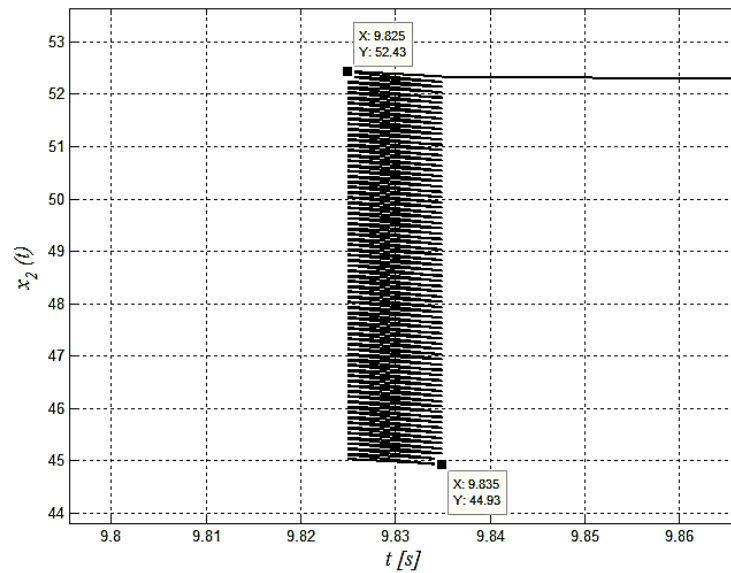
Al igual que el Caso 1, en la Figura 4.16 se muestra el detalle de la posición posterior al primer impacto, donde se deduce por las etiquetas que, al finalizar el tiempo de control, la pelota es lanzada con una velocidad de 52.43 [m/s]. Este cambio de velocidad se ve soportada por la Figura 4.17, donde se observa el

cambio de velocidad durante el tiempo de control mediante la elevación de la velocidad de salida hasta un valor de 52.43 [m/s].

**Figura 4.16 Detalle posición post primer impacto – Caso 2.**



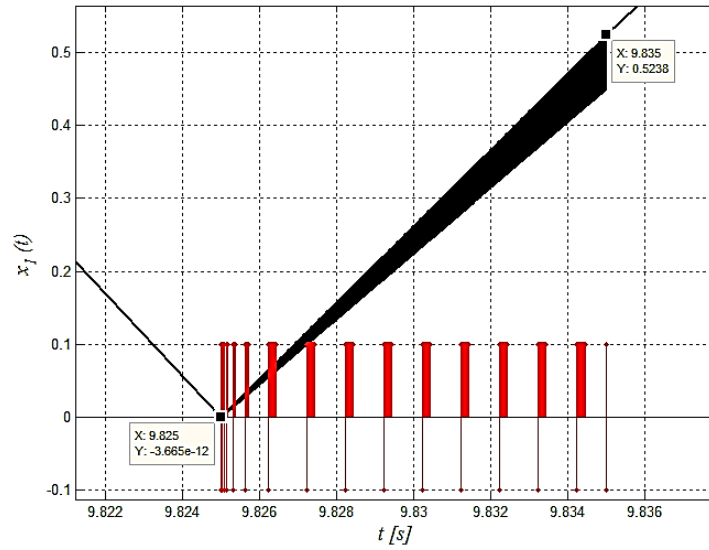
**Figura 4.17 Detalle velocidad post primer impacto – Caso 2.**



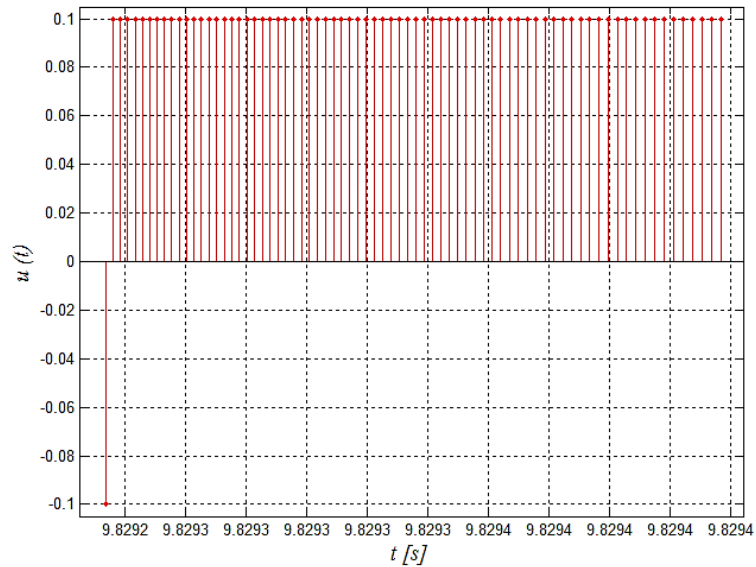
Al igual que en el Caso 2, la Figura 4.18 expone la superposición entre la posición de la pelota durante el control y una representación de la ley de control deslizante

aplicada. Esta ley de control deslizante se observa en detalle en las Figuras 4.19 y 4.20, posterior a los impactos 1 y 2 respectivamente.

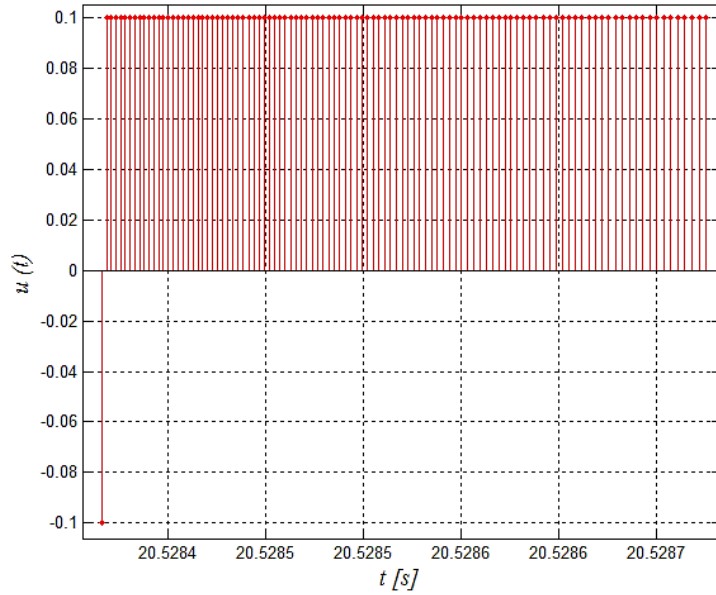
**Figura 4.18 Posición vs ley deslizante (Impacto 1) – Caso 2.**



**Figura 4.19 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 2.**

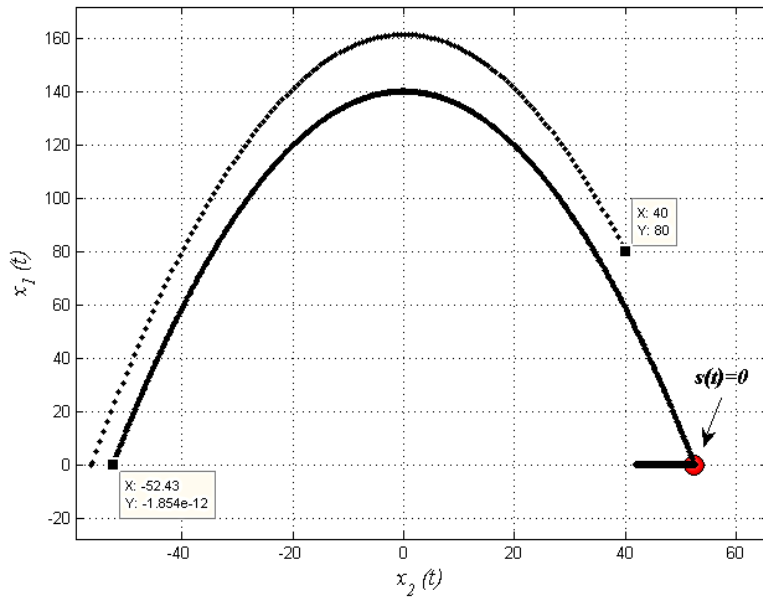


**Figura 4.20 Detalle ley de control deslizante (Impacto 2) – Caso 2.**

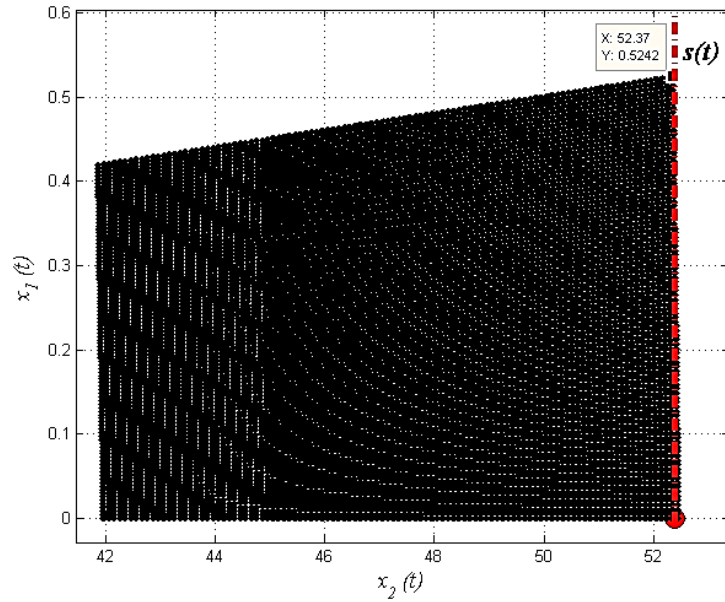


Finalmente, en la Figura 4.21 se muestra el mapa de fase para Caso 2, donde se observa claramente la confrontación entre la posición y la velocidad de la pelota. Además, la Figura 4.22 muestra la superficie deslizante y la posición máxima a la que es lanzada la pelota una vez finalizada la etapa de control.

**Figura 4.21 Mapa de fase – Caso 2.**



**Figura 4.22 Chattering – Caso 2.**



La Tabla 4.4 resume los datos obtenidos para y durante el control de velocidad de salida, donde se observa de izquierda a derecha los tiempos de colisión, la velocidad previa a la colisión, la velocidad de lanzamiento leída, el error en velocidad, y el número positivos y negativos durante el control.

**Tabla 4.4 Resumen de simulación - Caso 2.**

Tiempo de impacto	Velocidad previa al impacto	Velocidad de salida obtenida	Velocidad de salida deseada	Error en velocidad de salida	Pulsos de $u = M$	Pulsos de $u = -M$
$t_e[s]$	$x_2(t_e^-)[m/s]$	$x_2[m/s]$	$x_{2d}[m/s]$	$\tilde{x}_2[m/s]$	Unidad	Unidad
9.8250	-56.2850	52.43	52.38	0.05	74	1
20.5242	-52.4260	52.44	52.38	0.06	105	1
31.2260	-52.4388	52.45	52.38	0.07	105	1
41.9299	-52.4490	52.46	52.38	0.08	105	1
52.6354	-52.4572	52.47	52.38	0.09	105	1

De la Tabla 4.4, también es evidente que el error obtenido en la velocidad de salida, nunca fue mayor que la magnitud de la ley de control, la cual para este caso se fijó en  $0.1 [m/s]$ .

**4.1.3 Caso 3: Perturbación en el coeficiente de restitución  $k$**  A partir de los parámetros seleccionados de la Tabla 4.5, a continuación, se mostrarán los resultados de simulación del sistema, donde el *SMC* tiene como objetivo mantener el máximo alcance vertical de la pelota en  $60[m]$  a pesar de ser cambiada la superficie rígida a partir del tercer impacto.

**Tabla 4.5 Especificaciones de simulación para Caso 3.**

Parámetro	Notación	Valor
Posición inicial	$x_{10}$	$80[m]$
Velocidad inicial	$x_{20}$	$40[m/s]$
Coeficiente de restitución inicial	$k$	0.8
Coeficiente de restitución a partir del tercer impacto	$k_p$	0.2
Número de saltos	$saltos$	5
Tiempo de simulación	$T$	$50[s]$
Posición máxima deseada	$x_{1d}$	$60[m]$
Tiempo de control	$t_{control}$	$0.01[s]$
Magnitud de ley de control	$M$	0.1

La Figura 4.23 referente a la posición muestra que el alcance máximo durante cada rebote es bastante cercano al deseado, y la Figura 4.24 muestra que la altura máxima a la cual se aplicó control es de  $0.4458 [m]$  al igual que el caso 1.

Por otro lado, la Figura 4.25 muestra una curva regular donde la velocidad de salida de la pelota posterior a cada impacto se mantiene en un valor cercano a los  $34.37 [m/s]$ . No obstante, en la Figura 4.26 se ve una gran diferencia en el control de velocidad entre el segundo impacto (cuando  $k = 0.8$ ) y el tercer impacto (cuando  $k = 0.2$ ); esto se debe a que en el tercer impacto se debe incrementar aún más la velocidad por el efecto de la disminución del coeficiente de restitución.

Figura 4.23 Posición – Caso 3.

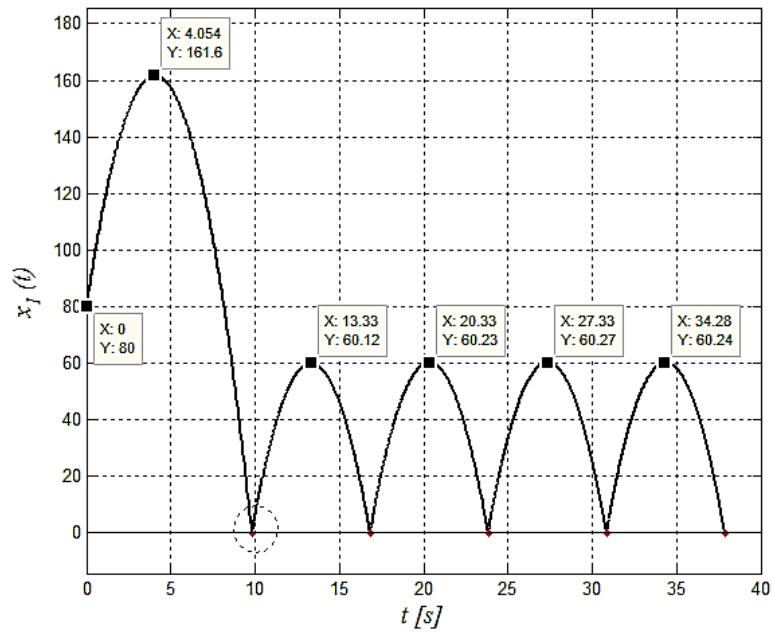


Figura 4.24 Posición durante control – Caso 3.

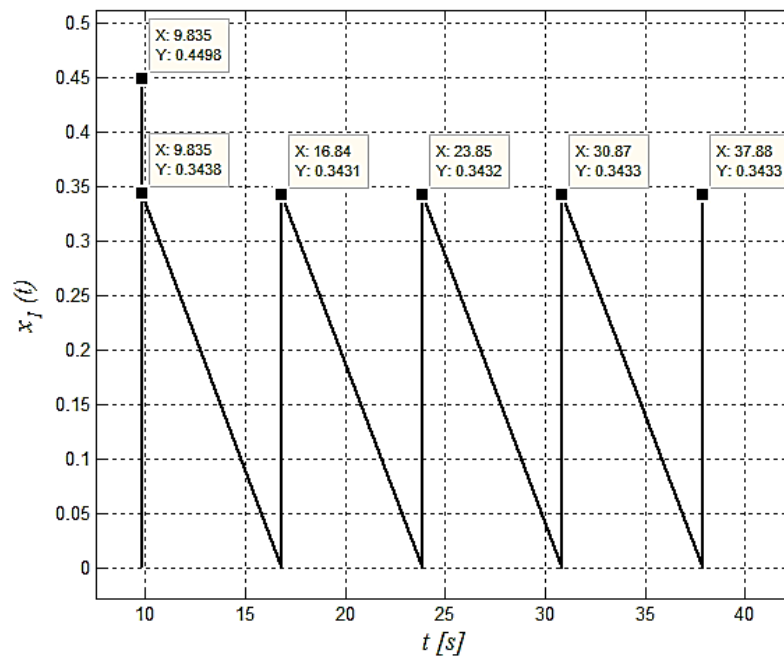


Figura 4.25 Velocidad – Caso 3.

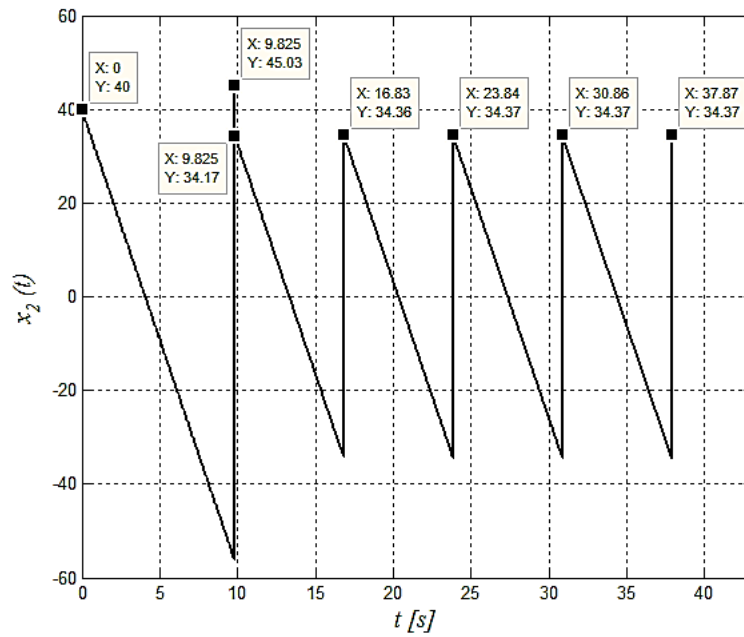
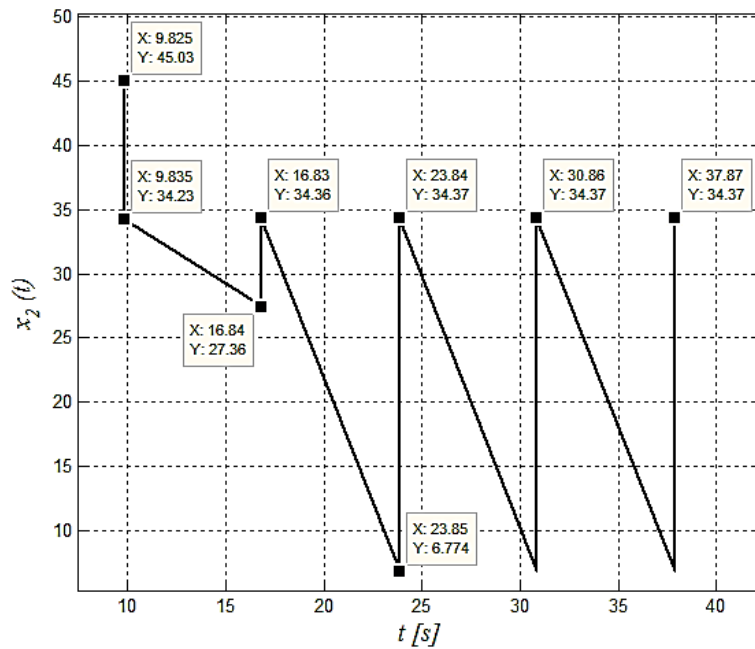
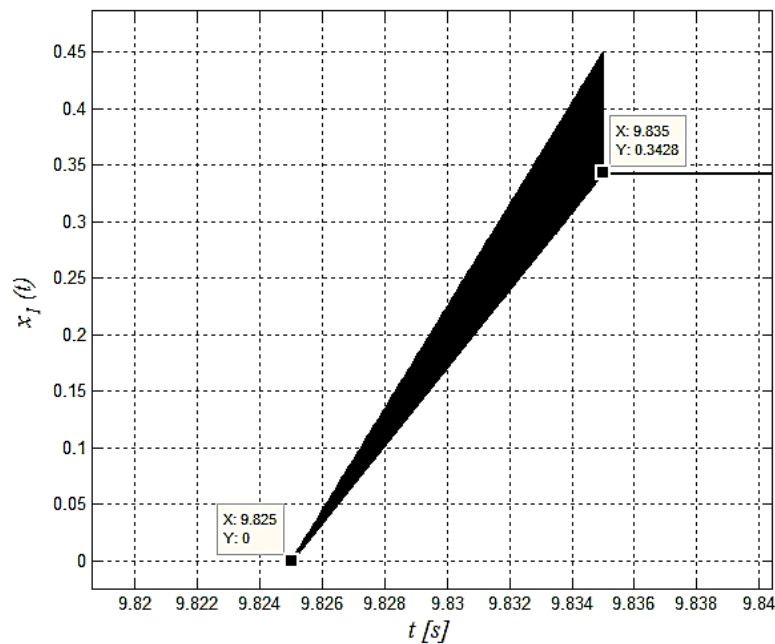


Figura 4.26 Velocidad durante control – Caso 3.



Adicionalmente, las Figuras 4.27, 4.28 y 4.29 exponen en detalle la posición posterior al impacto 1, 2 y 3 respectivamente. De aquí, también se observa como después del tercer impacto se tuvo que aumentar la conmutación vertical de la posición para lograr alcanzar la velocidad deseada al finalizar el tiempo de control (ver Figura 4.29).

**Figura 4.27 Detalle posición post primer impacto – Caso 3.**

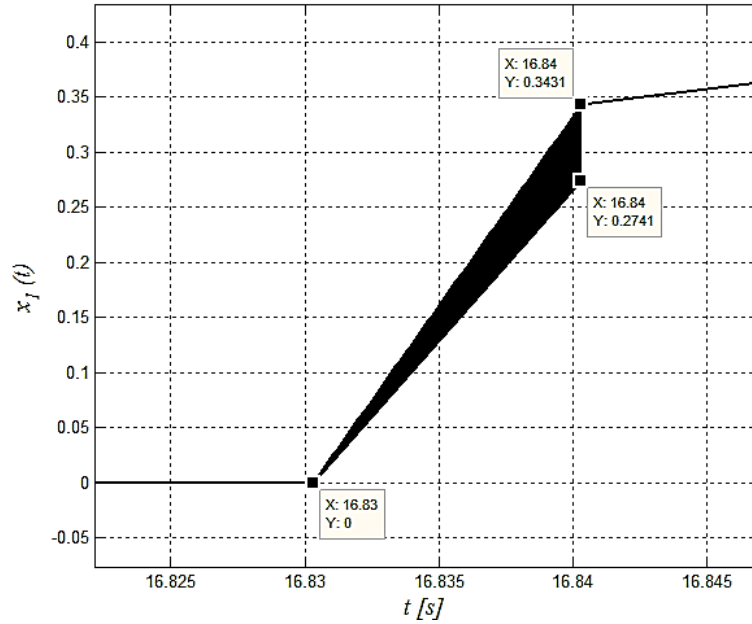


De igual manera que las tres figuras anteriores, en las Figuras 4.30, 4.31 y 4.32 se observa que en el tercer impacto se tuvo que hacer un mayor incremento de velocidad y una mayor conmutación durante el tiempo de control, que en los impactos 1 y 2, debido al coeficiente de restitución menor. Esto se observa en la Figura 4.32 donde la velocidad pasó de  $6.77[m/s]$  a  $34.36[m/s]$ , mientras que en la Figura 4.31 la velocidad pasó de  $27.36[m/s]$  a  $34.36[m/s]$ .

Este efecto incremental en las conmutaciones cuando el coeficiente de restitución disminuye en el cambio de superficie rígida, también se observa en el detalle de la acción de control posterior a cada impacto, visto en las Figuras 4.33, 4.34 y 4.35,

donde se evidencia que el control en el tercer impacto (cuando  $k = 0.2$ ) conmuta mucho más que en los impactos 1 y 2 (cuando  $k = 0.8$ ).

**Figura 4.28 Detalle posición post segundo impacto – Caso 3.**



**Figura 4.29 Detalle posición post tercer impacto – Caso 3.**

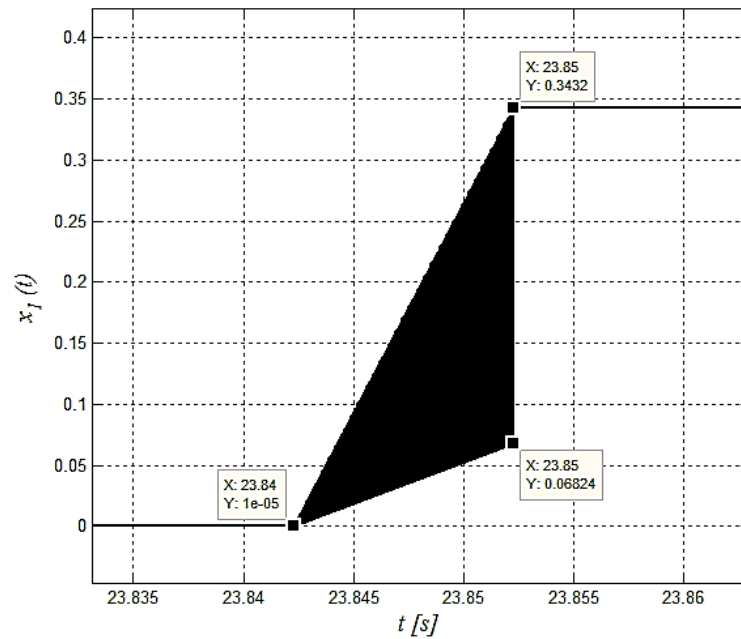


Figura 4.30 Detalle velocidad post primer impacto – Caso 3.

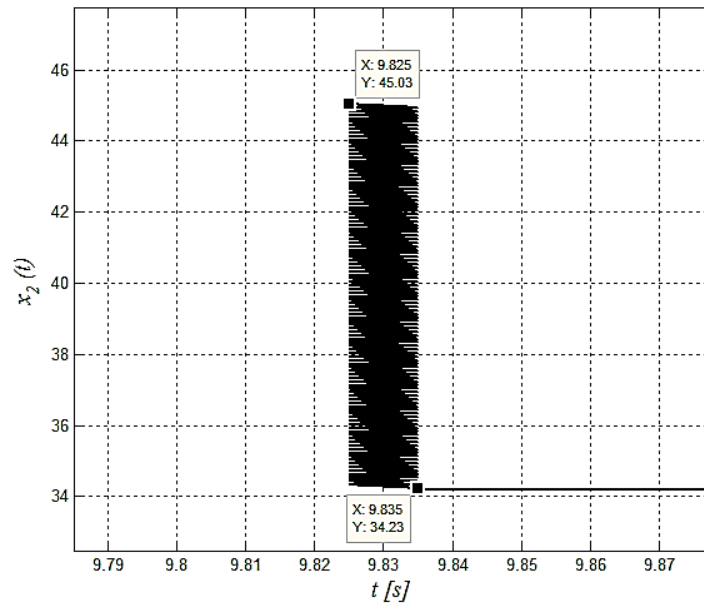


Figura 4.31 Detalle velocidad post segundo impacto – Caso 3.

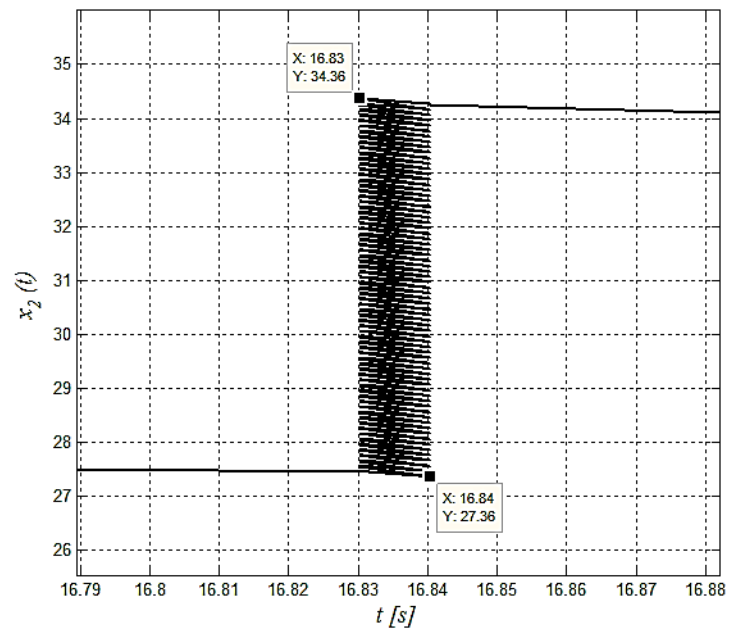


Figura 4.32 Detalle velocidad post tercer impacto – Caso 3.

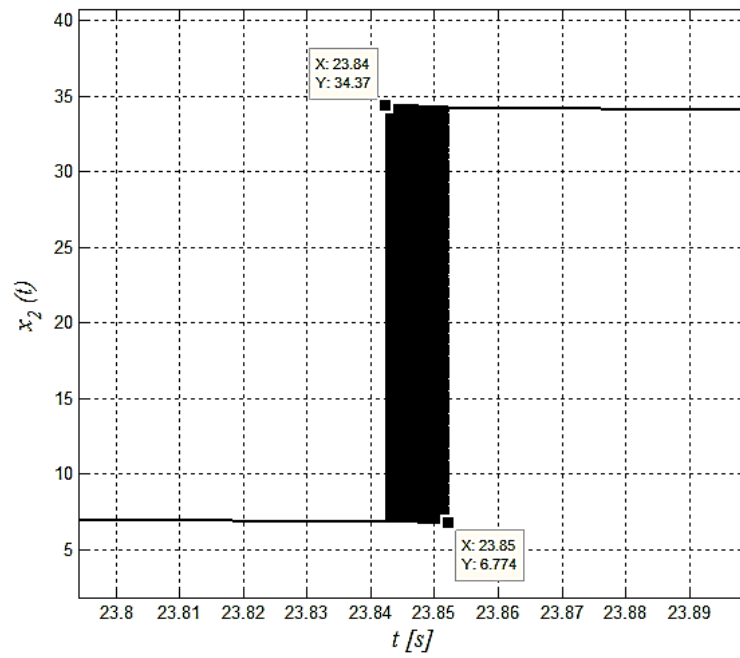
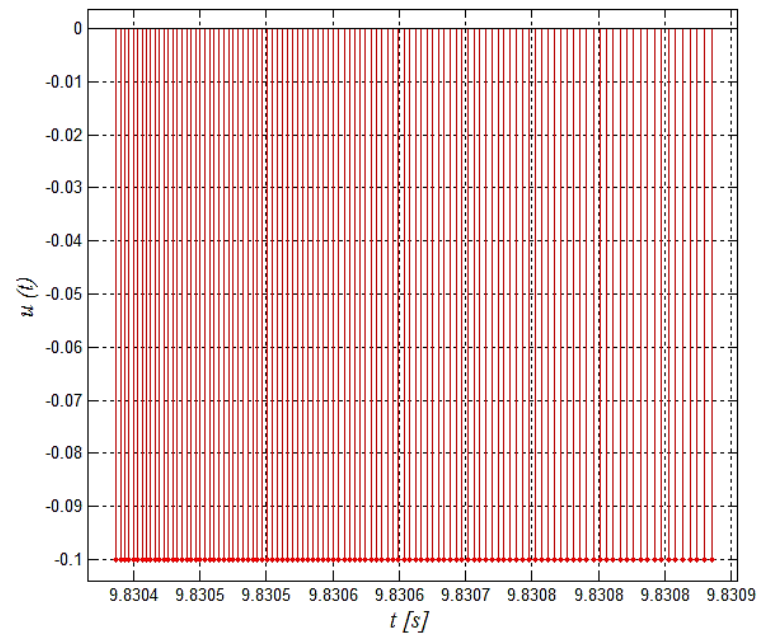
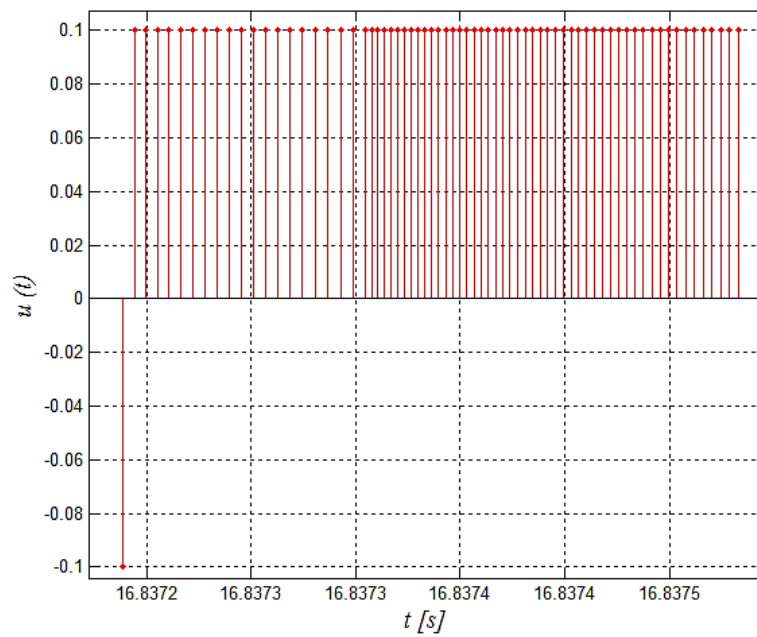


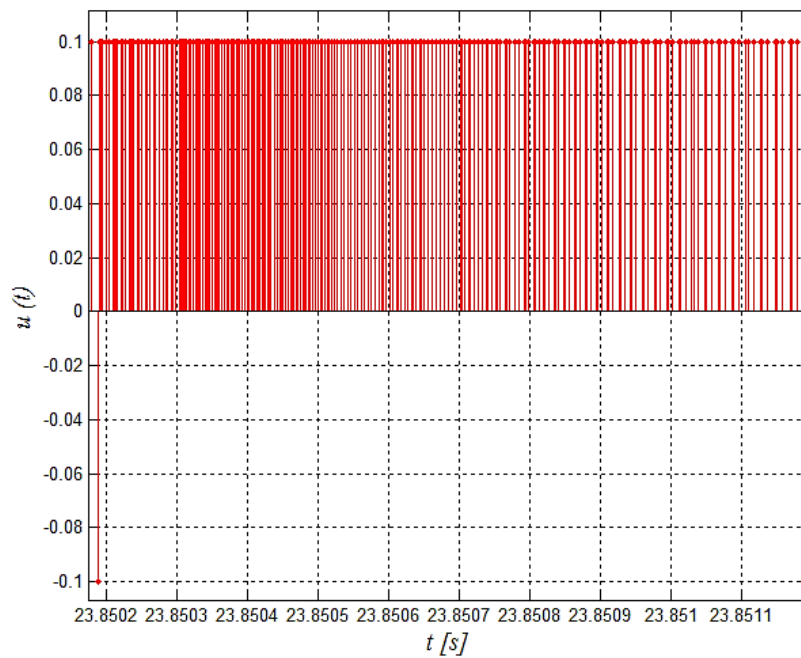
Figura 4.33 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 3.



**Figura 4.34 Detalle ley de control deslizante (Impacto 2) – Caso 3.**

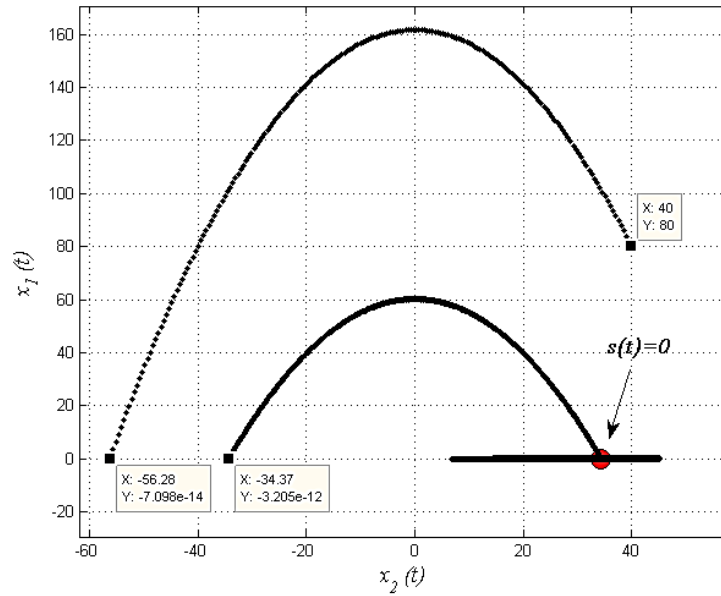


**Figura 4.35 Detalle ley de control deslizante (Impacto 3) – Caso 3.**

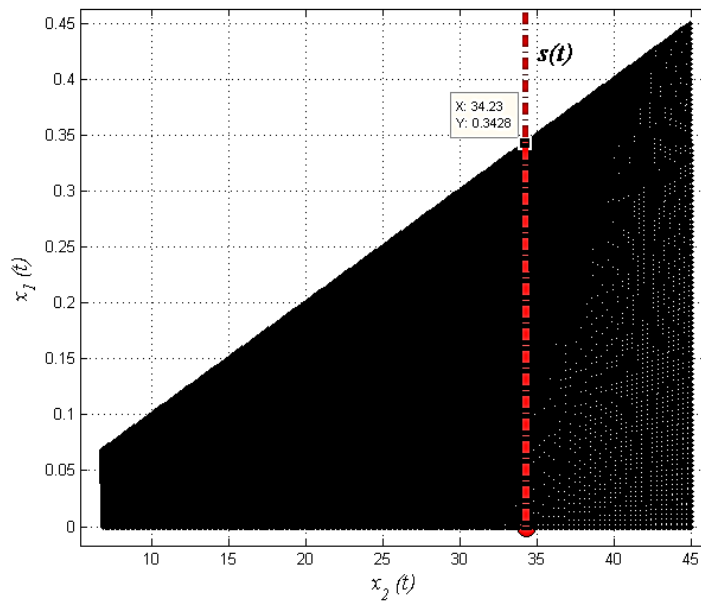


Finalmente, en la Figura 4.36 se muestra el mapa de fase para el Caso 3, donde se observa que el *chattering* alrededor de la superficie deslizante es más ancho que el visto en el Caso1. La Figura 4.37 muestra en detalle el *chattering*, donde se observa que el ancho de este fenómeno va está cercano a los 40[m/s].

**Figura 4.36 Mapa de fase – Caso 3.**



**Figura 4.37 Chattering – Caso 3.**



La Tabla 4.6 resume los datos obtenidos para y durante el control de velocidad de salida, donde se observa de izquierda a derecha los tiempos de colisión, la velocidad previa a la colisión, la velocidad de lanzamiento leída, el error en velocidad, y el número positivos y negativos durante el control.

**Tabla 4.6 Resumen de simulación - Caso 3.**

Tiempo de impacto	Velocidad previa al impacto	Velocidad de salida obtenida	Velocidad de salida deseada	Error en velocidad de salida	Pulsos de $u = M$	Pulsos de $u = -M$
$t_e[s]$	$x_2(t_e^-)[m/s]$	$x_2[m/s]$	$x_{2d}[m/s]$	$\tilde{x}_2[m/s]$	<i>Unidad</i>	<i>Unidad</i>
9.8250	-56.2850	34.23	34.29	-0.06	0	108
16.8303	-34.3260	34.36	34.29	0.07	69	1
23.8423	-34.3588	34.37	34.29	0.08	275	1
30.8565	-34.3698	34.37	34.29	0.08	275	1
37.8712	-34.3720	34.37	34.29	0.08	275	1

De la Tabla 4.6, también es evidente que el error obtenido en la velocidad de salida, nunca fue mayor que la magnitud de la ley de control, la cual para este caso se fijó en  $0.1 [m/s]$ .

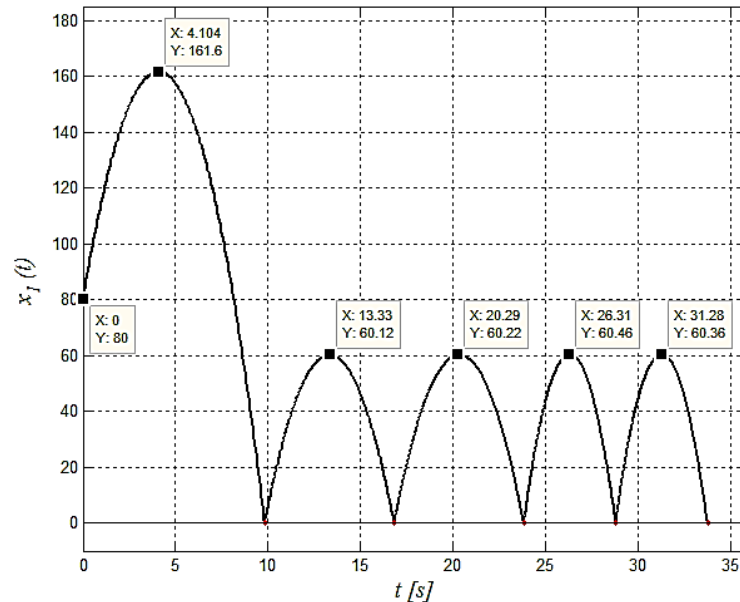
**4.1.4 Caso 4: Perturbación en la gravedad  $g$**  A partir de los parámetros seleccionados de la Tabla 4.7, a continuación, se mostrarán los resultados de simulación del sistema, donde el *SMC* tiene como objetivo mantener el máximo alcance vertical de la pelota en  $60[m]$  a pesar de ser duplicada la aceleración de la gravedad a partir del tercer impacto.

La Figura 4.38 referente a la posición muestra que el alcance máximo durante cada rebote es bastante cercano al deseado, y la Figura 4.39 muestra que la altura máxima a la cual se aplicó control es de  $0.4458 [m]$  al igual que el caso 1.

**Tabla 4.7 Especificaciones de simulación para Caso 4.**

Parámetro	Notación	Valor
Posición inicial	$x_{10}$	80[m]
Velocidad inicial	$x_{20}$	40[m/s]
Coeficiente de restitución	$k$	0.8
Gravedad a partir del tercer impacto	$g_p$	19.6 [m/s <sup>2</sup> ]
Número de saltos	$saltos$	5
Tiempo de simulación	$T$	50[s]
Posición máxima deseada	$x_{1d}$	60[m]
Tiempo de control	$t_{control}$	0.01[s]
Magnitud de ley de control	$M$	0.1

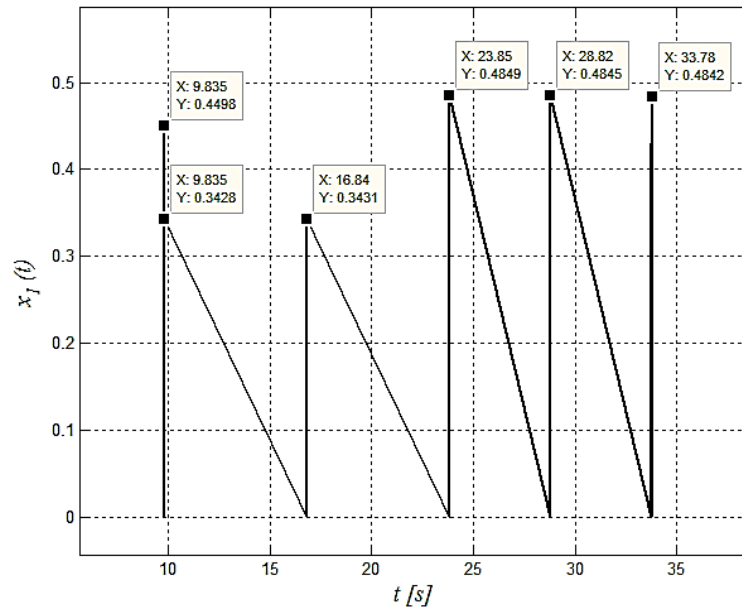
**Figura 4.38 Posición – Caso 4.**



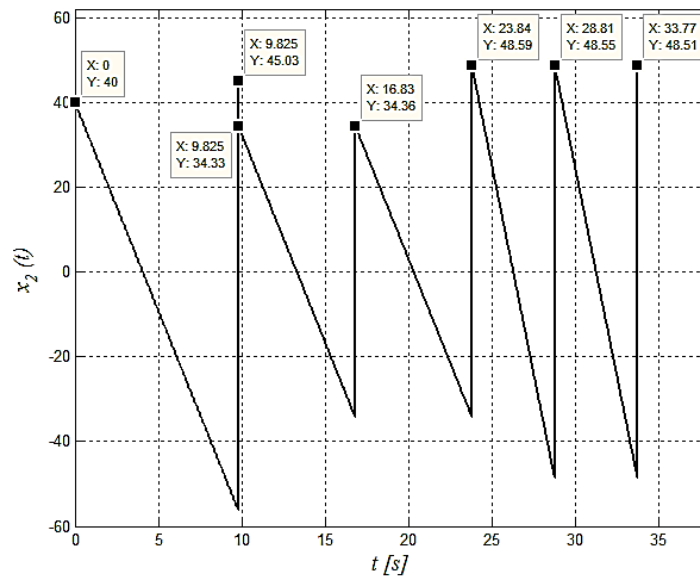
Por otro lado, la Figura 4.40 muestra una curva irregular donde la velocidad de salida de la pelota posterior impacto 1 y 2 es igual, pero a partir del impacto 3 (cuando  $g = g_p = 19.6 [m/s^2]$ ) la velocidad aumenta; esto se debe a que en el tercer impacto se debe incrementar aún más la velocidad por el aumento de la aceleración de la gravedad, opuesta al movimiento vertical hacia arriba. El control

de velocidad efectuado se observa en la Figura 4.41, donde a partir del tercer impacto la velocidad de salida pasa de 34.36 [m/s] a 48.59 [m/s].

**Figura 4.39 Posición durante control – Caso 4.**

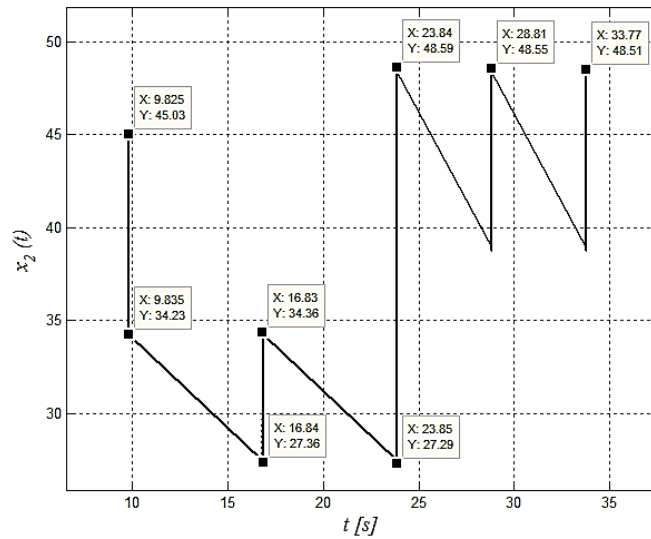


**Figura 4.40 Velocidad – Caso 4.**



Por otro lado, en las Figuras 4.42, 4.43 y 4.44 se muestra en detalle el cambio en la posición de la pelota durante el control, siendo de mayor amplitud el correspondiente al tercer impacto con respecto al 1 y 2, debido a que tiene que elevar un poco más la pelota para que logre alcanzar la altura máxima deseada después de ser liberada al finalizar el tiempo de control.

**Figura 4.41 Velocidad durante control – Caso 4.**



**Figura 4.42 Detalle posición post primer impacto – Caso 4.**

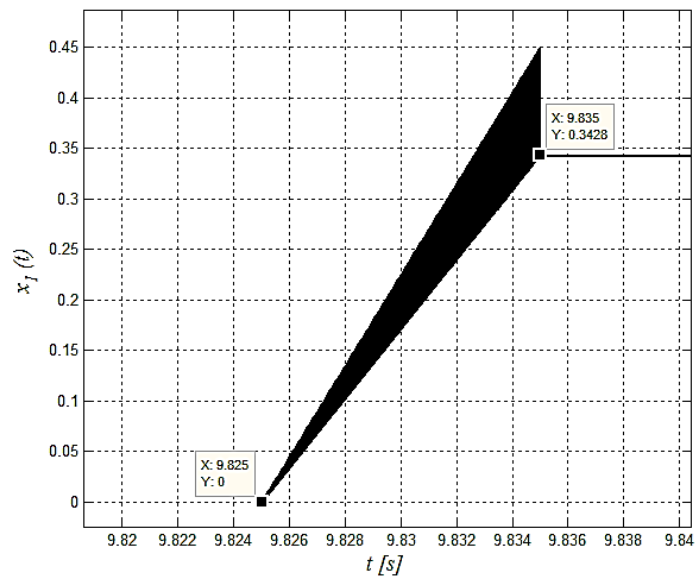


Figura 4.43 Detalle posición post segundo impacto – Caso 4.

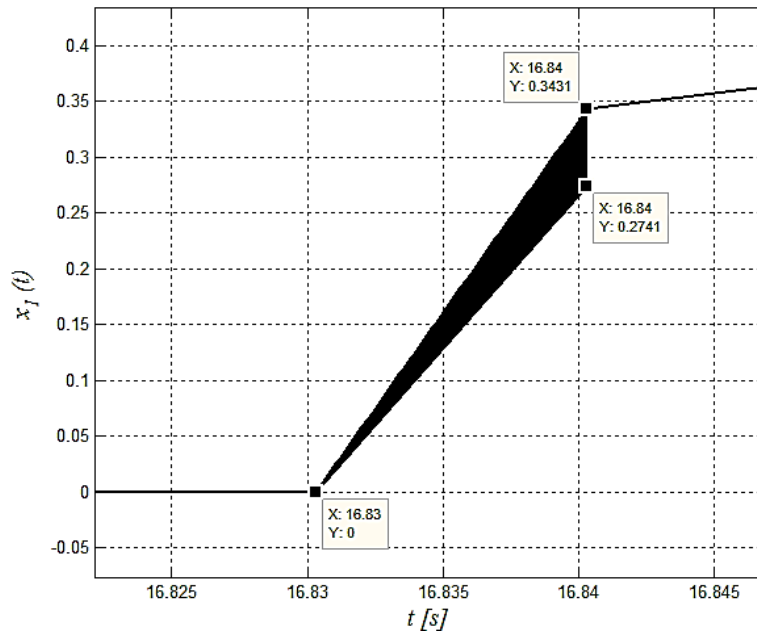
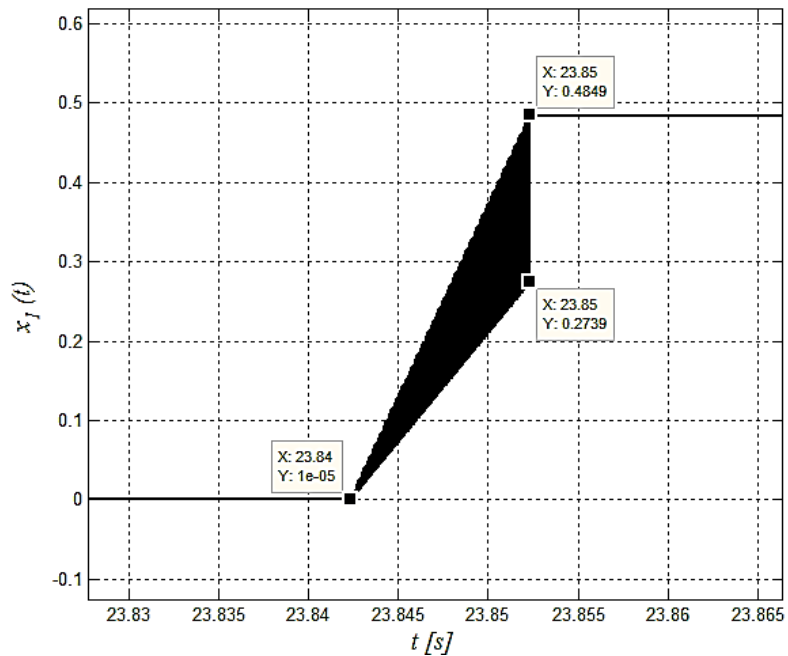


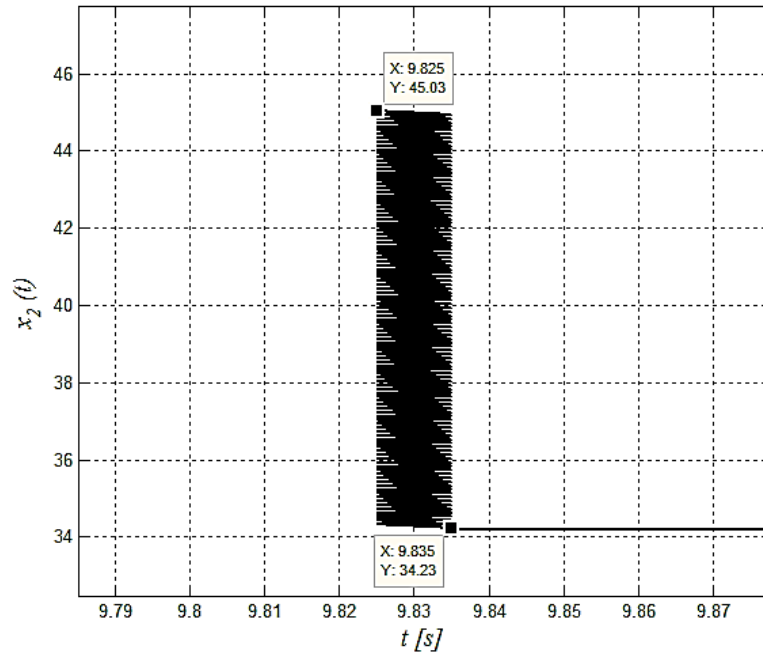
Figura 4.44 Detalle posición post tercer impacto – Caso 4.



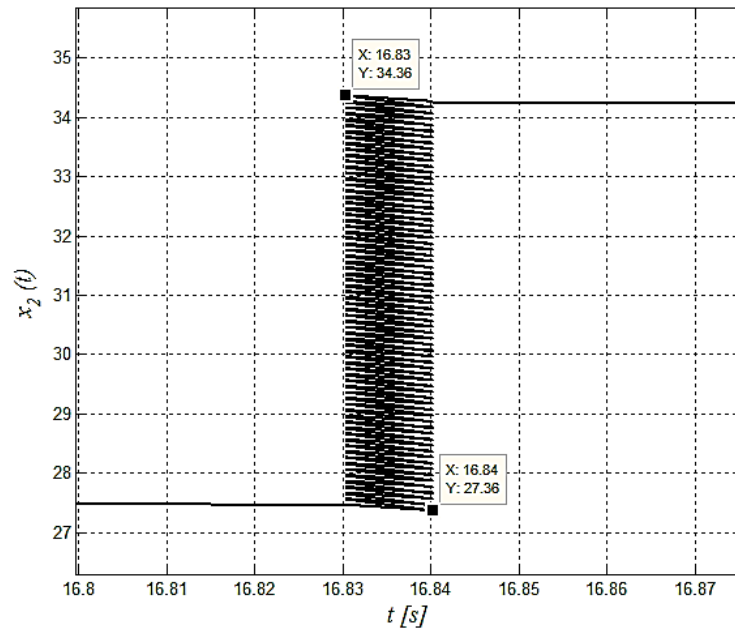
De forma equivalente, las Figuras 4.45, 4.46 y 4.47 muestran el detalle de la velocidad durante el tiempo de control, siendo la correspondiente al control después del tercer impacto la de mayor densidad, debido al mayor número de

conmutaciones que debe realizar para compensar el efecto de la gravedad aumentada.

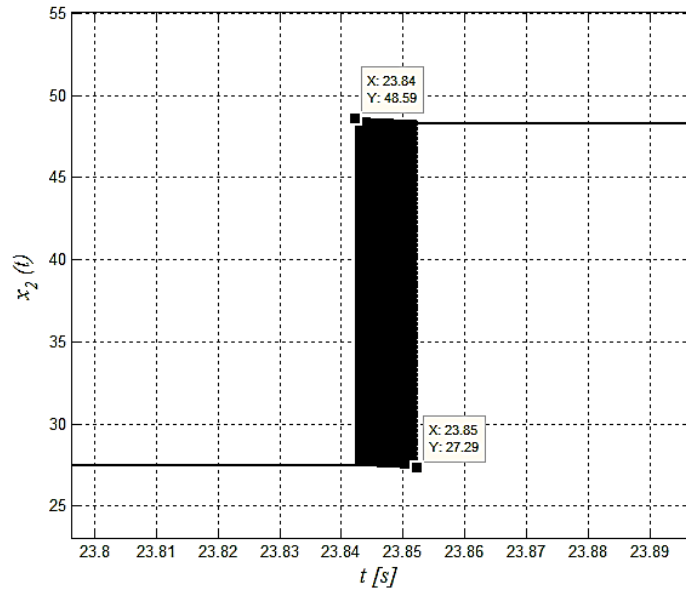
**Figura 4.45 Detalle velocidad post primer impacto – Caso 4.**



**Figura 4.46 Detalle velocidad post segundo impacto – Caso 4.**

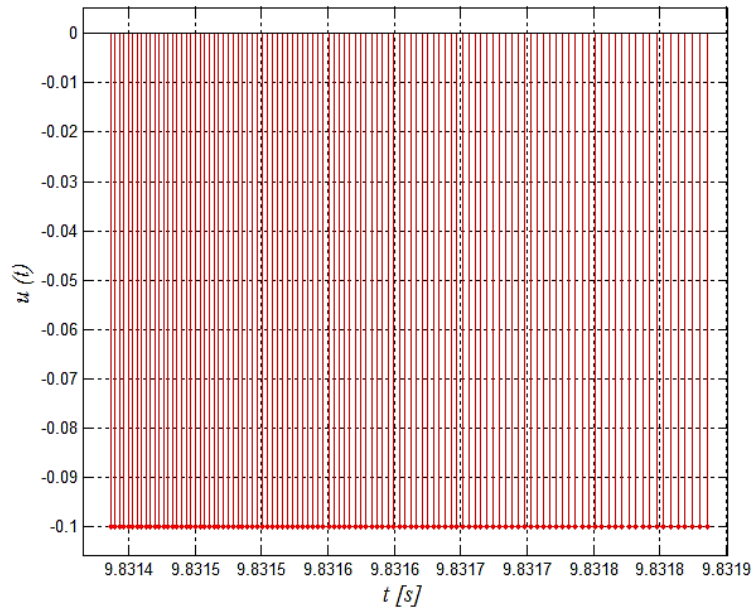


**Figura 4.47 Detalle velocidad post tercer impacto – Caso 4.**

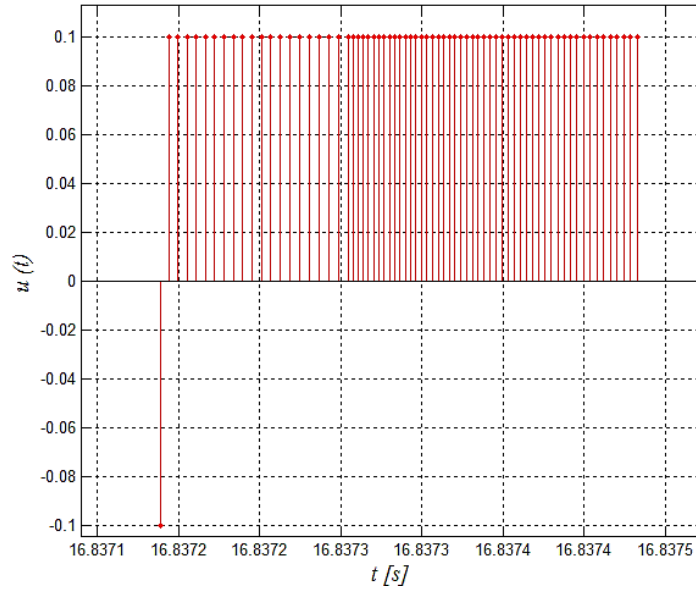


Por otro lado, las Figuras 4.48, 4.49 y 4.50 muestran el detalle de la ley de control necesaria para llevar la pelota a la altura máxima deseada, donde es evidente que la acción requerida a partir del incremento de la aceleración de la gravedad en mucho mayor a las demás.

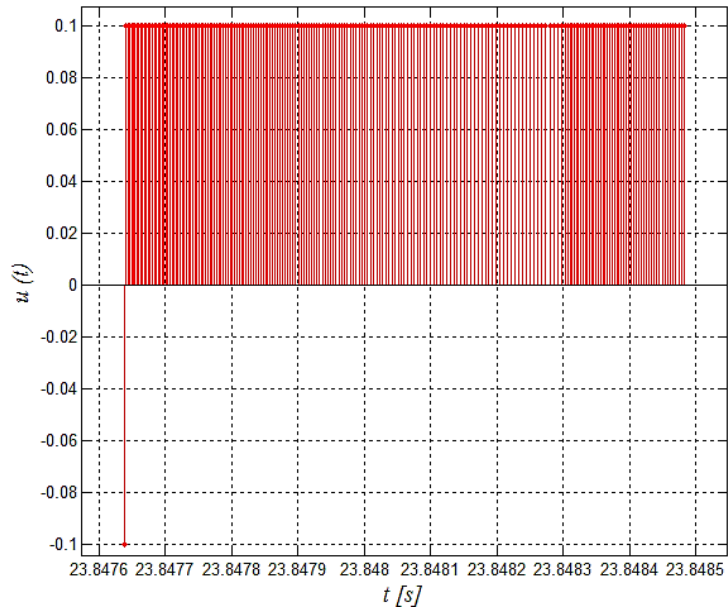
**Figura 4.48 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 4.**



**Figura 4.49 Detalle ley de control deslizante (Impacto 2) – Caso 4.**



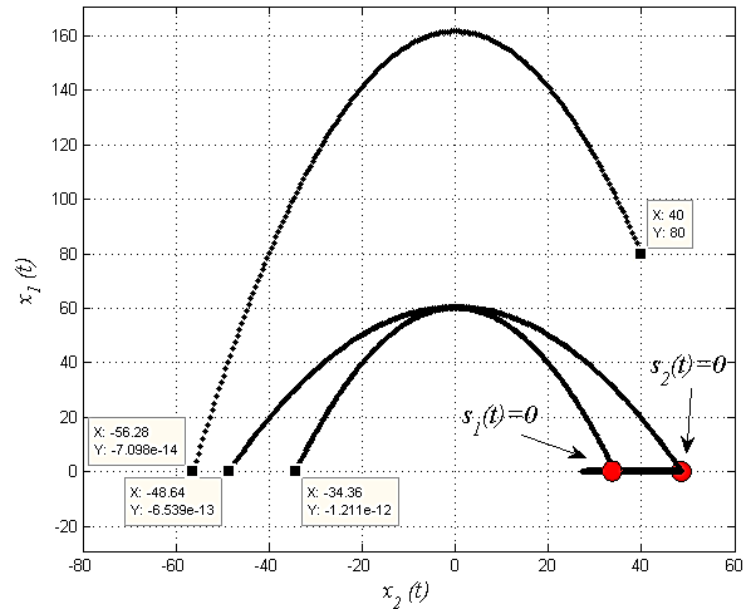
**Figura.50 Detalle ley de control deslizante (Impacto 3) – Caso 4.**



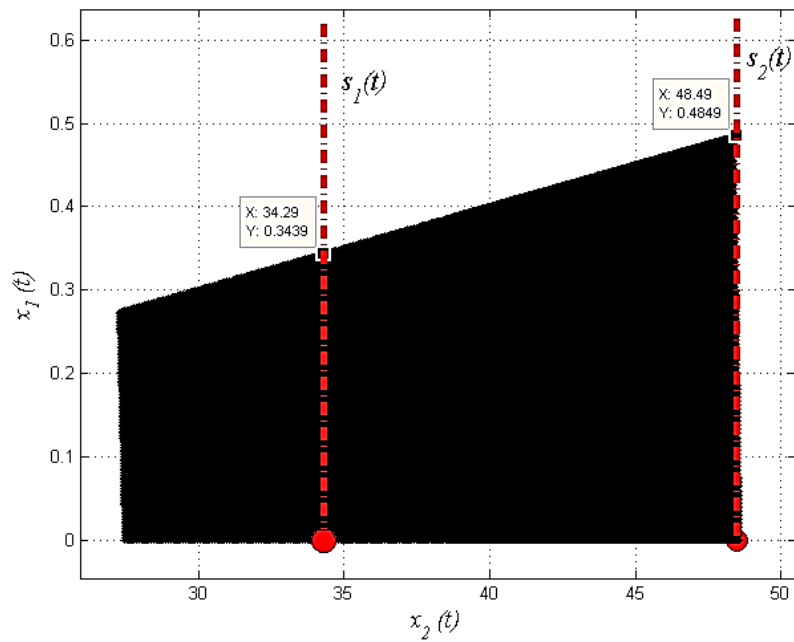
Finalmente, en la Figura 4.51 se muestra el mapa de fase para el Caso 4, donde se observa el *chattering* para dos superficies deslizantes  $s_1(t)$  y  $s_2(t)$ , donde la primera superficie corresponde al valor deseado de velocidad antes de aumentar

la gravedad, mientras que la segunda superficie hace lo mismo cuando la gravedad se duplica. El detalle del *chattering* sobre las dos superficies se observa en la Figura 4.52.

**Figura 4.51 Mapa de fase – Caso 4.**



**Figura 4.52 Chattering – Caso 4.**



La Tabla 4.8 resume los datos obtenidos para y durante el control de velocidad de salida, donde se observa de izquierda a derecha los tiempos de colisión, la velocidad previa a la colisión, la velocidad de lanzamiento leída, el error en velocidad, y el número positivos y negativos durante el control.

**Tabla 4.8 Resumen de simulación - Caso 4.**

Tiempo de impacto	Velocidad previa al impacto	Velocidad de salida obtenida	Velocidad de salida deseada	Error en velocidad de salida	Pulsos de $u = M$	Pulsos de $u = -M$
$t_e[s]$	$x_2(t_e^-)[m/s]$	$x_2[m/s]$	$x_{2d}[m/s]$	$\tilde{x}_2[m/s]$	Unidad	Unidad
9.8250	-56.2850	34.23	34.29	-0.06	0	108
16.8303	-34.3260	34.36	34.29	0.07	69	1
23.8423	-34.3588	48.59	48.49	0.1	211	1
28.8099	-48.6827	48.55	48.49	0.06	96	1
33.7734	-48.6417	48.51	48.49	0.02	96	1

De la Tabla 4.8, también es evidente que el error obtenido en la velocidad de salida, nunca fue mayor que la magnitud de la ley de control, la cual para este caso se fijó en  $0.1 [m/s]$ .

#### 4.1.5 Caso 5: Control por perturbación en la referencia de la superficie rígida manteniendo la altura máxima deseada $x_{1d}$ respecto a la nueva referencia $x_p$

A partir de los parámetros seleccionados de la Tabla 4.19, a continuación, se mostrarán los resultados de simulación del sistema, donde el *SMC* tiene como objetivo mantener el máximo alcance vertical de la pelota en  $60[m]$  a pesar de ser cambiado el nivel de la superficie rígida a partir de un tiempo de  $20 [s]$ .

La Figura 4.53 referente a la posición muestra que el alcance máximo absoluto durante cada rebote es bastante cercano al deseado, aunque se cambie la

referencia de la superficie rígida, tal como se observa a partir del tercer impacto. La Figura 4.54 muestra cómo se aplican los mismos desplazamientos sobre la pelota durante el control a pesar de ser cambiada la referencia de la superficie rígida.

**Tabla 4.9 Especificaciones de simulación para Caso 5.**

Parámetro	Notación	Valor
Posición inicial	$x_{10}$	80[m]
Velocidad inicial	$x_{20}$	40[m/s]
Coefficiente de restitución	$k$	0.8
Altura de superficie rígida después de 20 segundos	$x_p$	20 [m]
Número de saltos	$saltos$	5
Tiempo de simulación	$T$	50[s]
Posición máxima deseada	$x_{1d}$	60[m]
Tiempo de control	$t_{control}$	0.01[s]
Magnitud de ley de control	$M$	0.1

**Figura 4.53 Posición – Caso 5.**

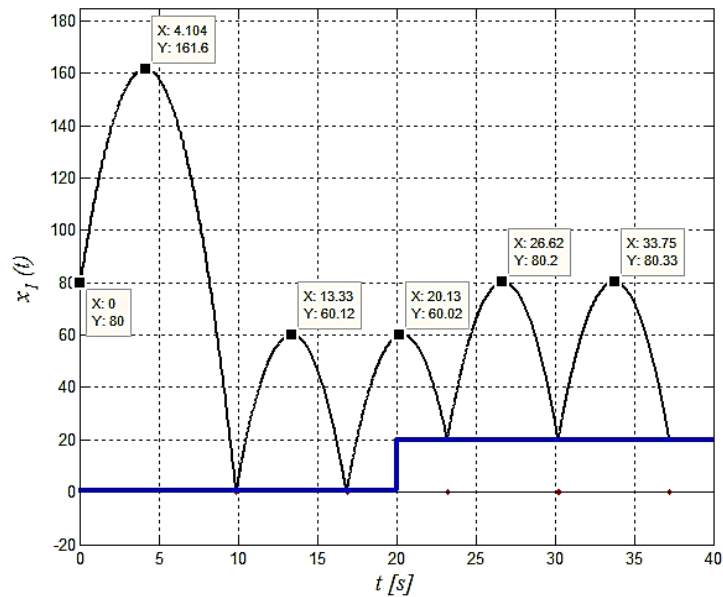
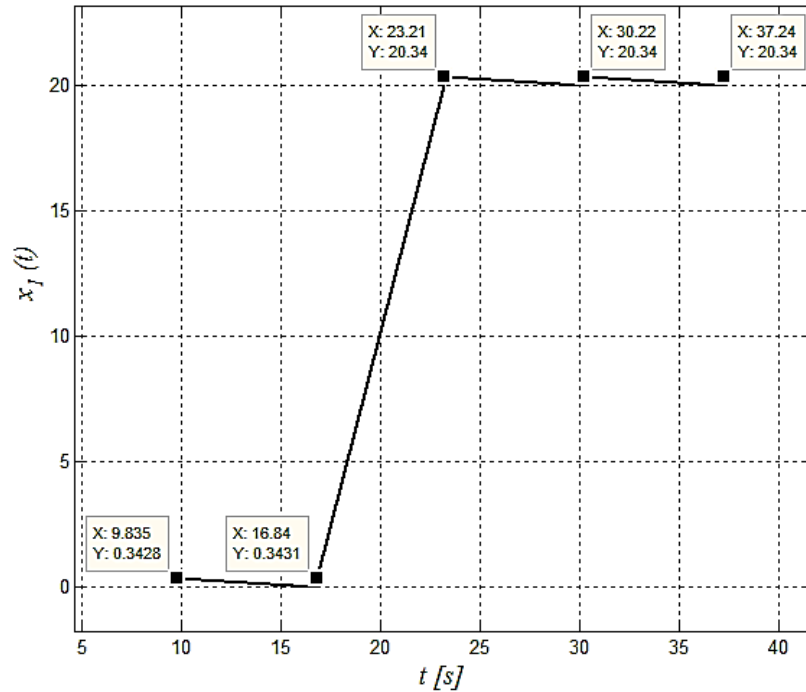


Figura 4.54 Posición durante control – Caso 5.



Por otro lado, la Figura 4.55 muestra una curva irregular donde la velocidad de salida después a cada impacto es similar. Sin embargo, de la Figura 4.56 se observa que a partir del impacto 3 (cuando se cambia el nivel de la superficie rígida) la velocidad de control se incrementa; esto se debe a que en el tercer impacto la velocidad con que colisiona la pelota contra la superficie en su nivel de referencia de 20 [m] es bastante menor, debido a que se acortó el tiempo de aceleración.

Por otro lado, en las Figuras 4.57, 4.58 y 4.59 se muestra en detalle el cambio en la posición de la pelota durante el control, donde se observa que a partir del tercer impacto se controla la altura a partir de una referencia de 20 [m].

Figura 4.55 Velocidad – Caso 5.

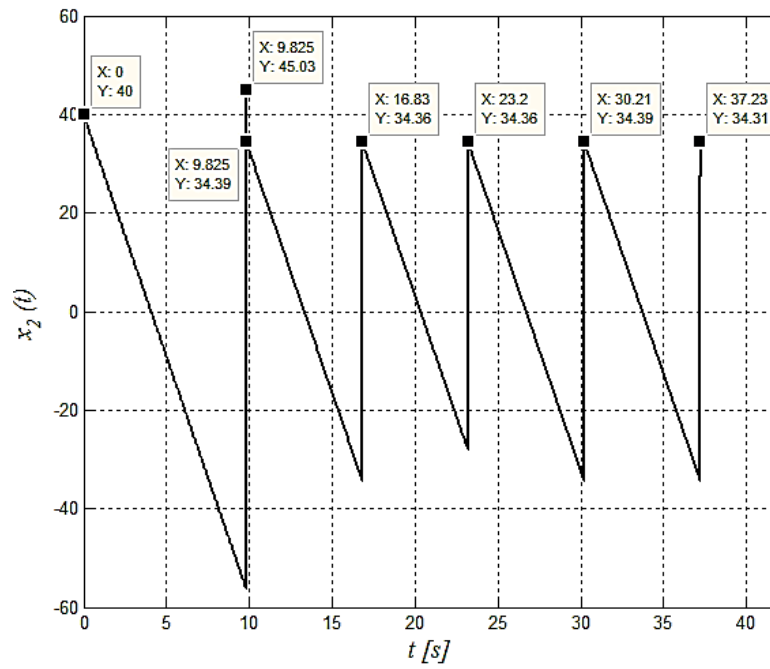


Figura 4.56 Velocidad durante control – Caso 5.

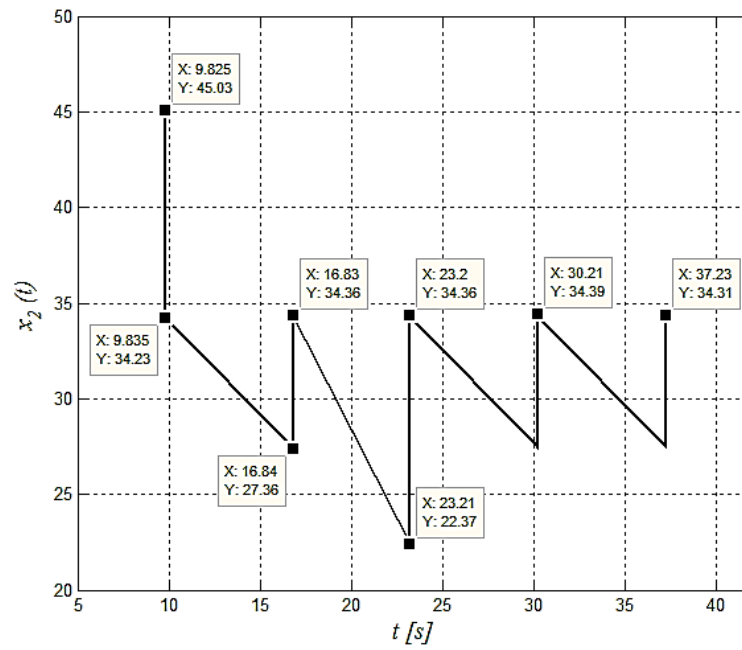


Figura 4.57 Detalle posición post primer impacto – Caso 5.

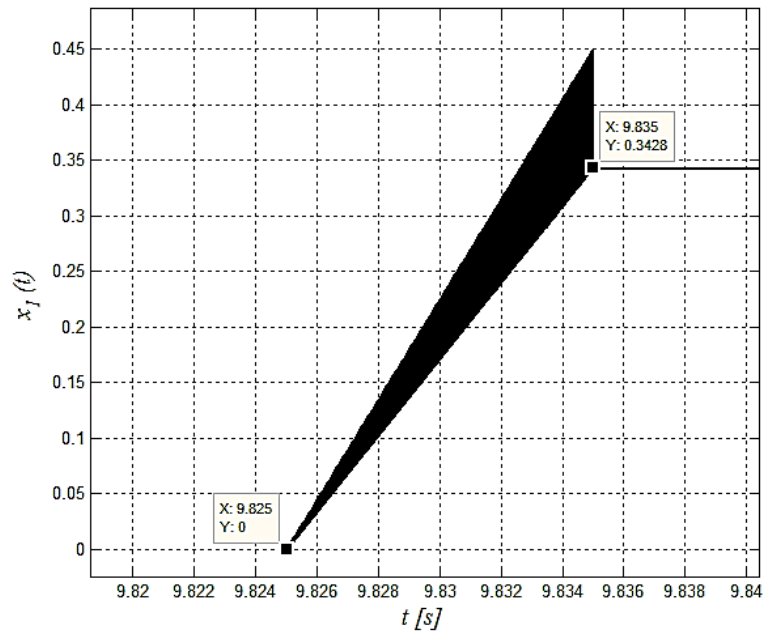
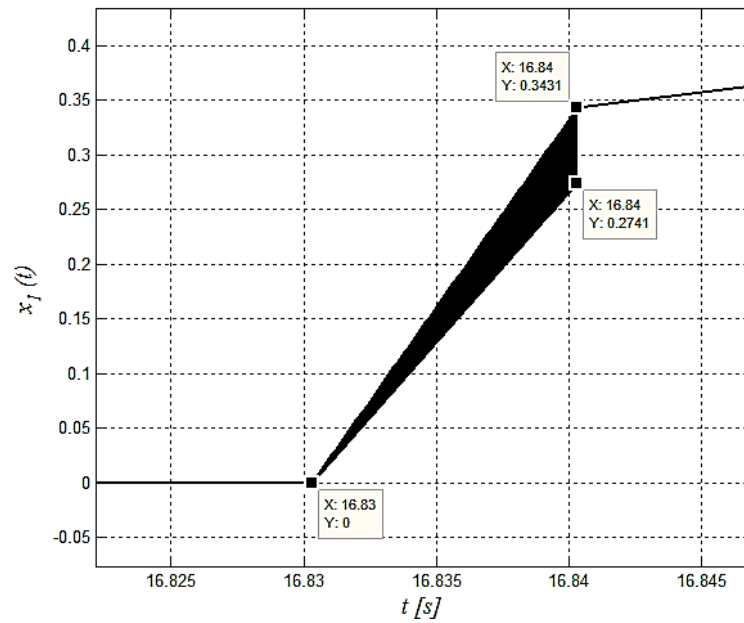
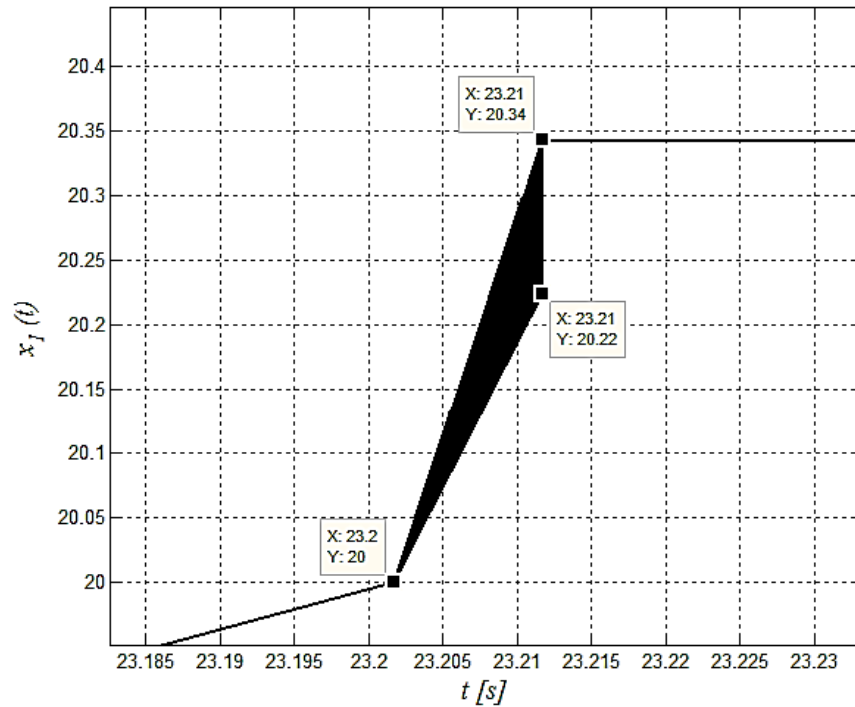


Figura 4.58 Detalle posición post segundo impacto – Caso 5.



**Figura 4.59 Detalle posición post tercer impacto – Caso 5.**



De forma equivalente, las Figuras 4.60, 4.61 y 4.62 muestran el detalle de la velocidad durante el tiempo de control, donde se observa que la correspondiente al tercer impacto realiza un mayor recorrido durante el tiempo de control que la posterior al segundo impacto, debido a que debe compensar el efecto de la poca velocidad con que llega por primera vez hacia la nueva superficie.

Por otro lado, las Figuras 4.63, 4.64 y 4.65 muestran el detalle de la ley de control necesaria para llevar la pelota a la altura máxima deseada, donde es evidente que la acción requerida a partir tercer impacto cuando cambia la referencia de superficie rígida con respecto al segundo impacto es bastante mayor.

Figura 4.60 Detalle velocidad post primer impacto – Caso 5.

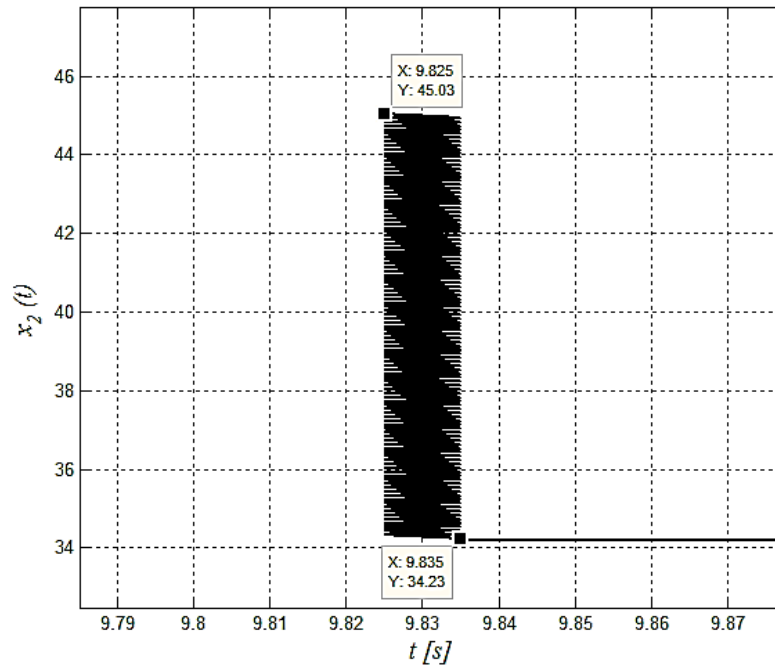


Figura 4.61 Detalle velocidad post segundo impacto – Caso 5.

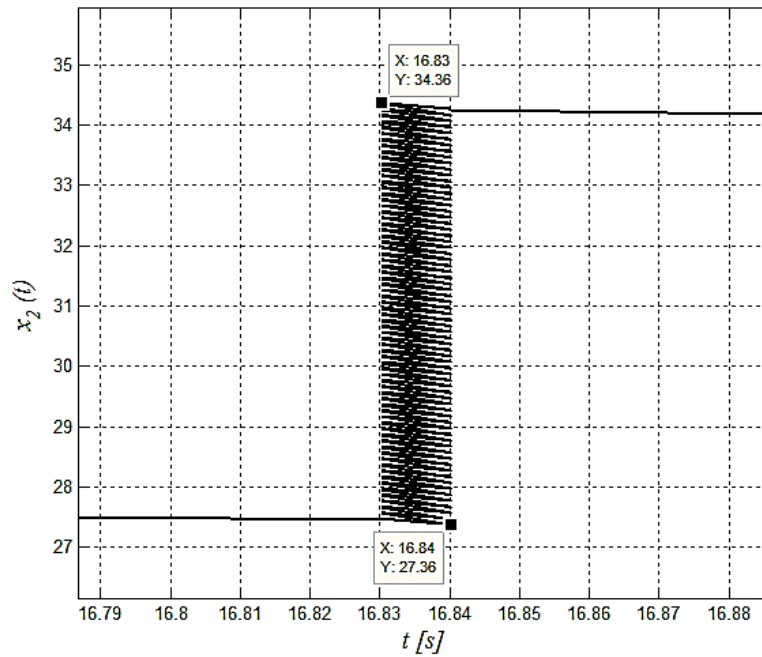


Figura 4.62 Detalle velocidad post tercer impacto – Caso 5.

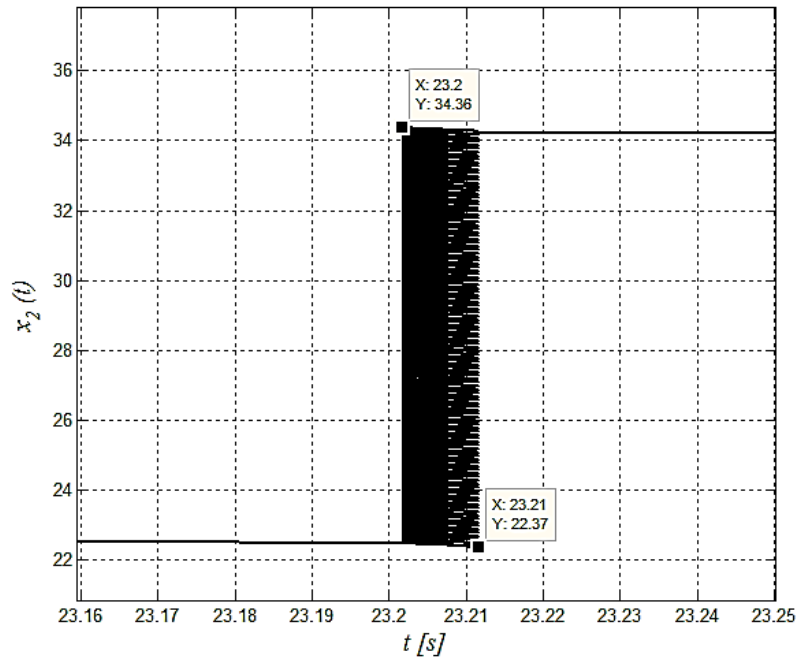
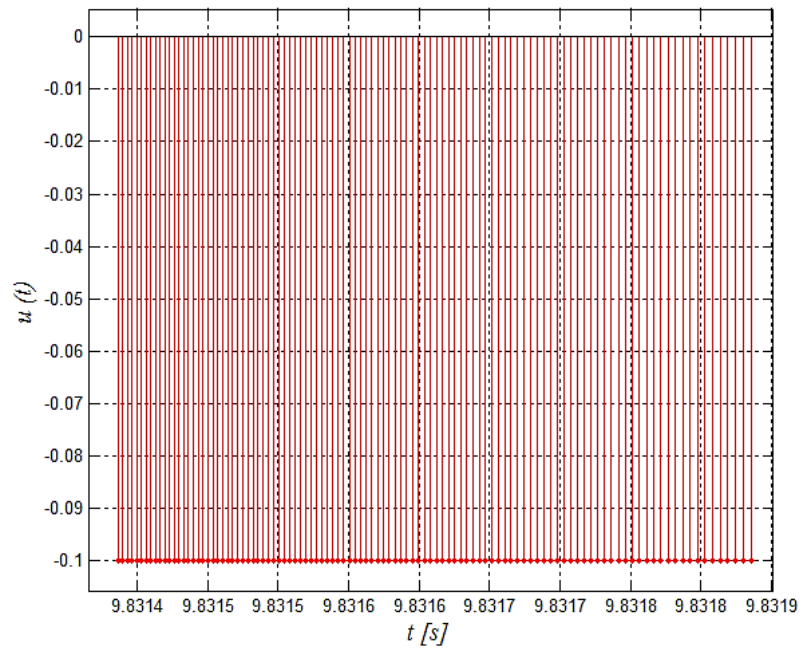
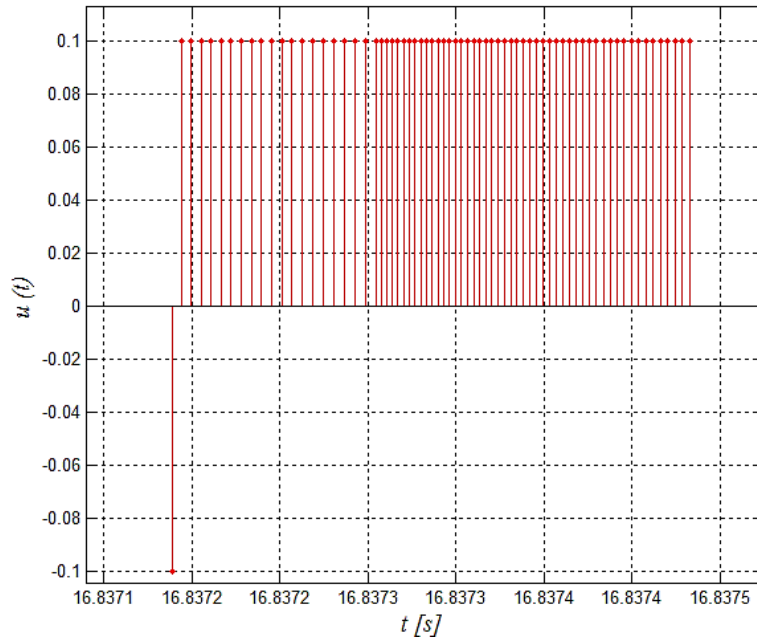


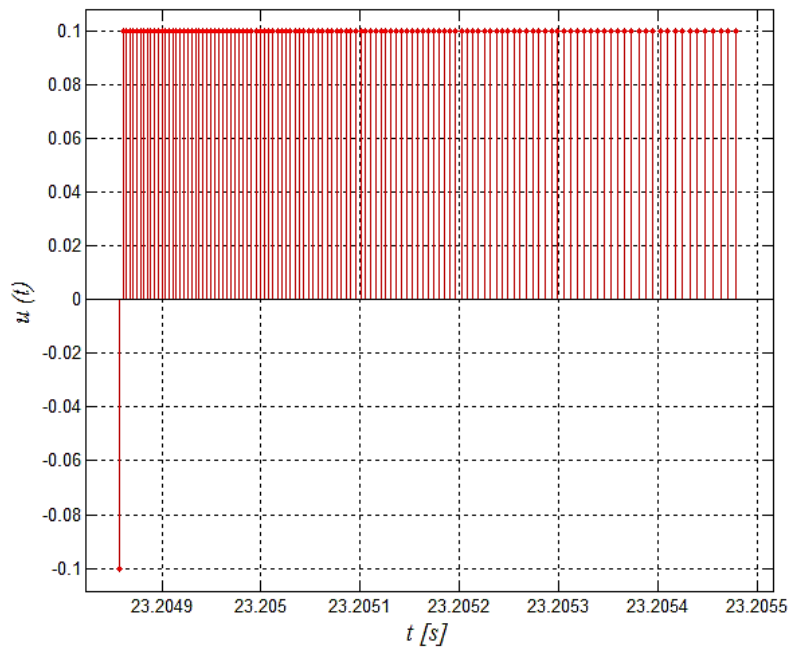
Figura 4.63 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 5.



**Figura 4.64 Detalle ley de control deslizante (Impacto 2) – Caso 5.**



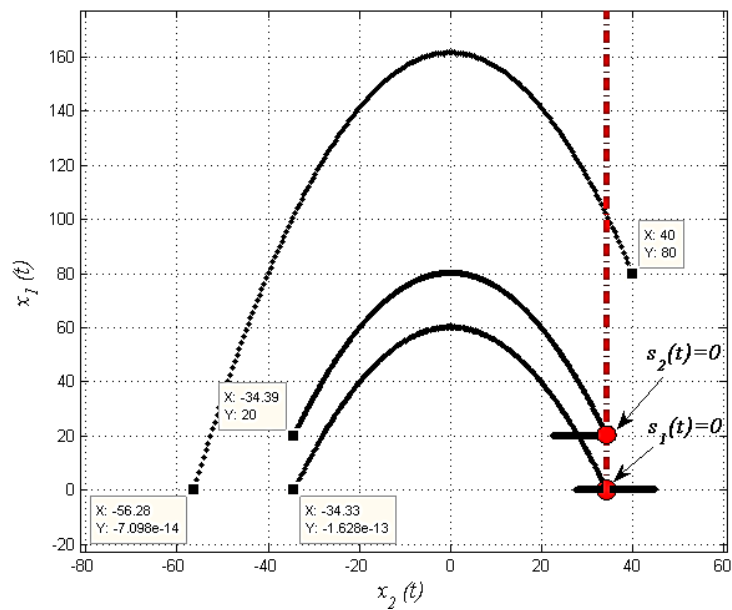
**Figura 4.65 Detalle ley de control deslizante (Impacto 3) – Caso 5.**



Finalmente, en la Figura 4.66 se muestra el mapa de fase para el Caso 5, donde se observa el *chattering* para dos superficies deslizantes  $s_1(t)$  y  $s_2(t)$ , donde la

primera superficie corresponde al valor deseado de velocidad antes aumentar el nivel de la superficie de contacto, mientras que la segunda hace lo mismo cuando aumenta la superficie de contacto. No obstante, a pesar que parecen diferentes en esta figura, cabe recordar que a la superficie deslizante diseñada únicamente se constituye con la variable de velocidad, por tanto, se puede decir que las dos superficies son una misma.

**Figura 4.66 Mapa de fase – Caso 5.**



El detalle del *chattering* sobre las dos superficies se observa en la Figura 4.67, donde además es evidente que las dos superficies son una misma, ya que a partir de ellas se libera la pelota después de realizar el mismo recorrido de posición correspondiente a  $0.3438 [m]$ .

La Tabla 4.10 resume los datos obtenidos para y durante el control de velocidad de salida, donde se observa de izquierda a derecha los tiempos de colisión, la velocidad previa a la colisión, la velocidad de lanzamiento leída, el error en velocidad, y el número positivos y negativos durante el control.

Figura 4.67 Chattering – Caso 5.

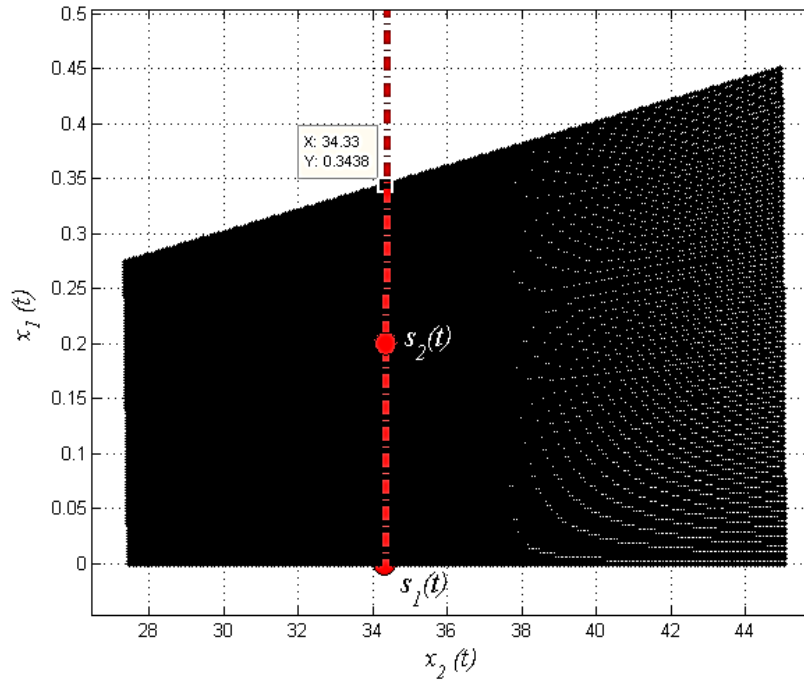


Tabla 4.10 Resumen de simulación - Caso 5.

Tiempo de impacto	Velocidad previa al impacto	Velocidad de salida obtenida	Velocidad de salida deseada	Error en velocidad de salida	Pulsos de $u = M$	Pulsos de $u = -M$
$t_e[s]$	$x_2(t_e^-)[m/s]$	$x_2[m/s]$	$x_{2d}[m/s]$	$\tilde{x}_2[m/s]$	Unidad	Unidad
9.8250	-56.2850	34.23	34.29	-0.06	0	108
16.8303	-34.3260	34.36	34.29	0.07	69	1
23.2017	-28.0807	34.36	34.29	0.07	119	1
30.2145	-34.3626	34.39	34.29	0.1	69	1
37.2324	-34.3881	34.31	34.29	0.02	68	1

De la Tabla 4.10, también es evidente que el error obtenido en la velocidad de salida, nunca fue mayor que la magnitud de la ley de control, la cual para este caso se fijó en 0.1 [m/s].

**4.1.6 Caso 6: Control por perturbación en la referencia de la superficie rígida manteniendo la altura máxima deseada  $x_{1d}$  respecto a la referencia inicial  $x_{1ref}$**

A partir de los parámetros seleccionados de la Tabla 4.11, a continuación, se mostrarán los resultados de simulación del sistema, donde el *SMC* tiene como objetivo mantener el máximo alcance vertical de la pelota en 60[m] con respecto a la referencia inicial  $x_{1ref}$ , a pesar de ser cambiado el nivel de la superficie rígida en 20 [m] a partir en un tiempo de 20 [s], y en 40 [m] a partir en un tiempo de 25 [s].

**Tabla 4.11 Especificaciones de simulación para Caso 6.**

<b>Parámetro</b>	<b>Notación</b>	<b>Valor</b>
Posición inicial	$x_{10}$	80[m]
Velocidad inicial	$x_{20}$	40[m/s]
Coeficiente de restitución	$k$	0.8
Altura de superficie rígida después de 20 segundos	$x_{p1}$	20 [m]
Altura de superficie rígida después de 25 segundos	$x_{p2}$	40 [m]
Número de saltos	<i>saltos</i>	5
Tiempo de simulación	$T$	50[s]
Posición máxima deseada	$x_{1d}$	60[m]
Tiempo de control	$t_{control}$	0.01[s]
Magnitud de ley de control	$M$	0.1

La Figura 4.68 referente a la posición muestra que el alcance máximo relativo durante cada rebote es bastante cercano al deseado, aunque se cambie la referencia de la superficie rígida, tal como se observa a partir del tercer impacto. La Figura 4.69 muestra cómo se aplican desplazamientos relativos sobre la pelota durante el control cuando es cambiada la referencia de la superficie rígida.

Figura 4.68 Posición – Caso 6.

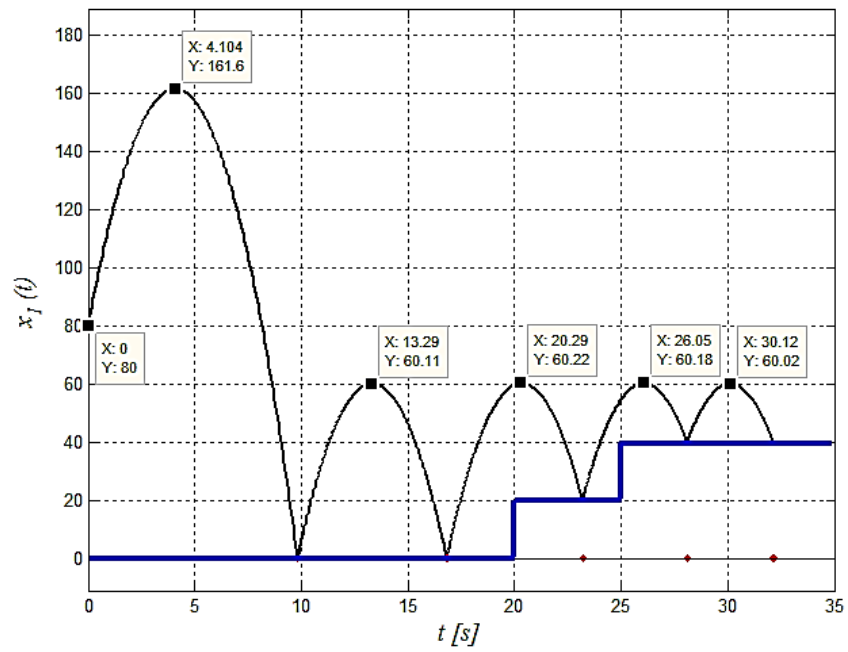
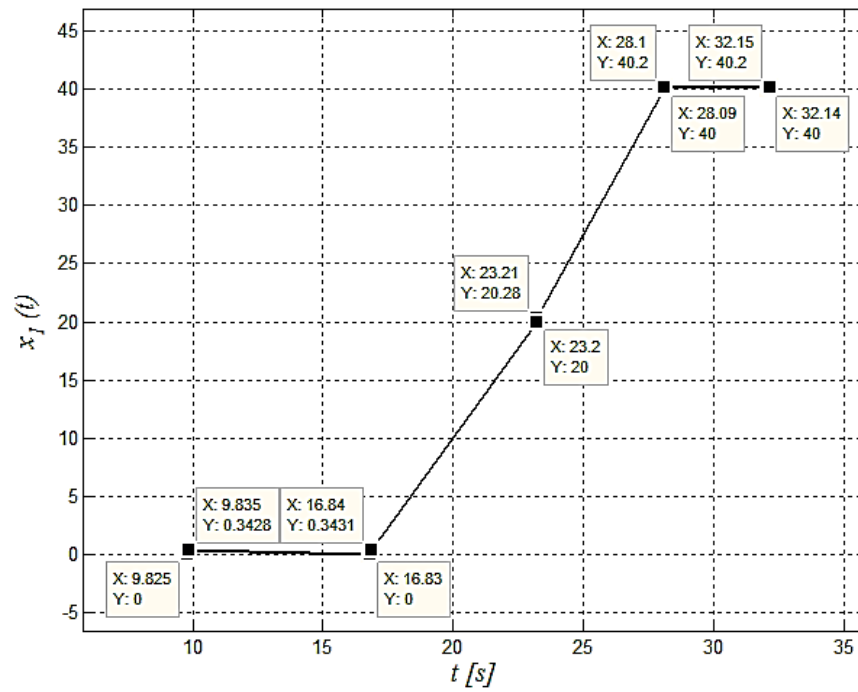
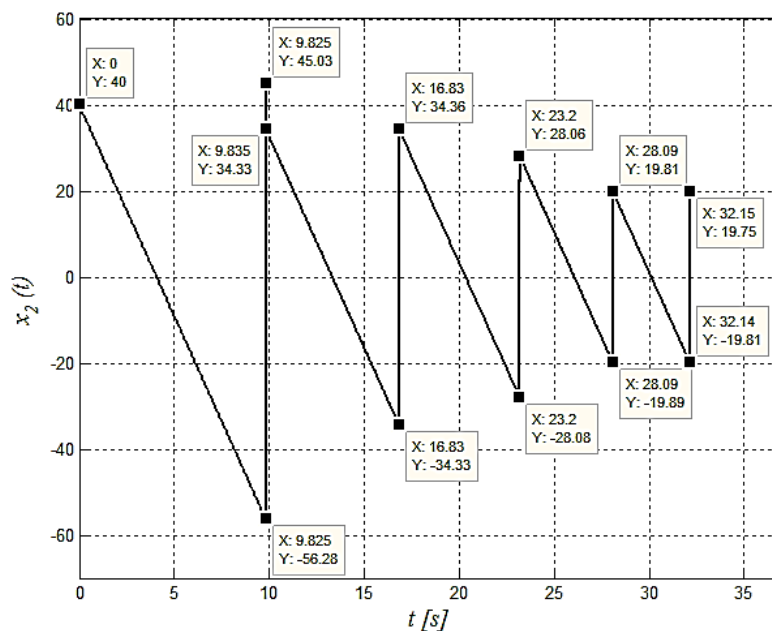


Figura 4.69 Posición durante control – Caso 6.



Por otro lado, la Figura 4.70 muestra una curva regular pero decreciente donde la velocidad de salida es menor con cada escalón subido. Este comportamiento también se puede apreciar en la Figura 4.71, donde se observa que la velocidad requerida para alcanzar la altura deseada con respecto al nivel inicial de la superficie rígida es cada vez menor. Lo cual es lógico, porque por cada escalón de subida se tiene que alcanzar una menor altura.

**Figura 4.70 Velocidad – Caso 6.**



Por otro lado, en las Figuras 4.72, 4.73 y 4.74 se muestra en detalle el cambio en la posición de la pelota durante el control, donde se observa como en el tercer impacto se controla la altura a partir de una referencia de 20 [m], mientras que a partir del cuarto impacto la altura se controla con respecto a una referencia de 40 [m].

Figura 4.71 Velocidad durante control – Caso 6.

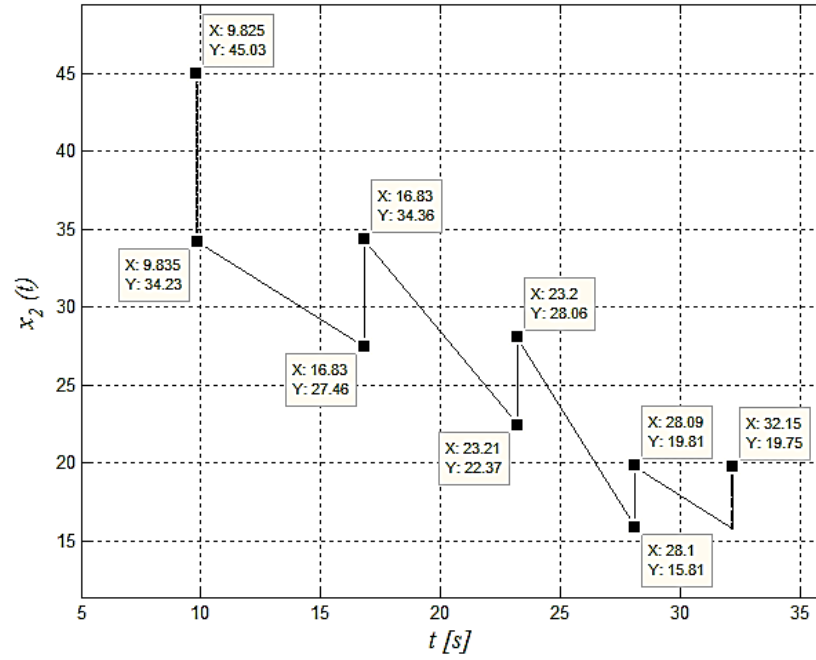
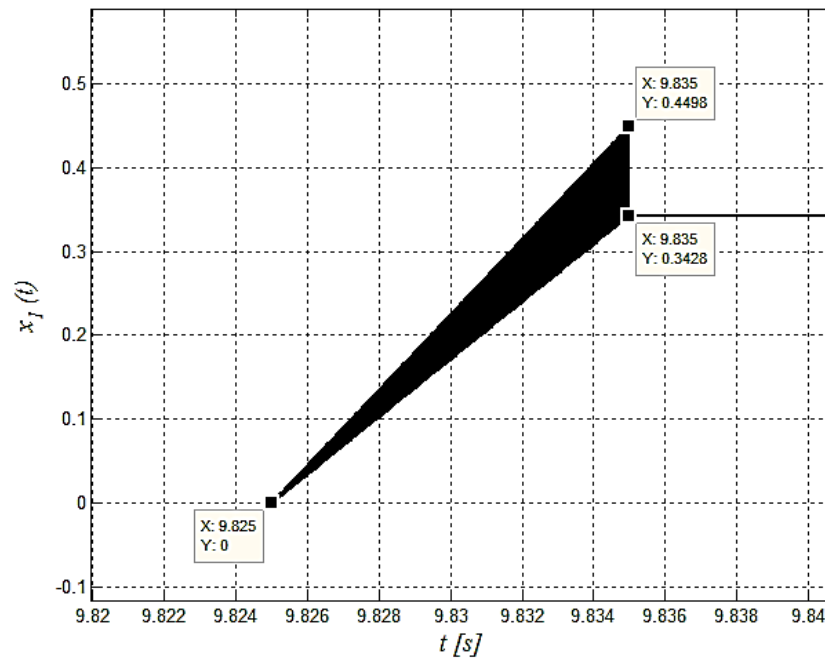
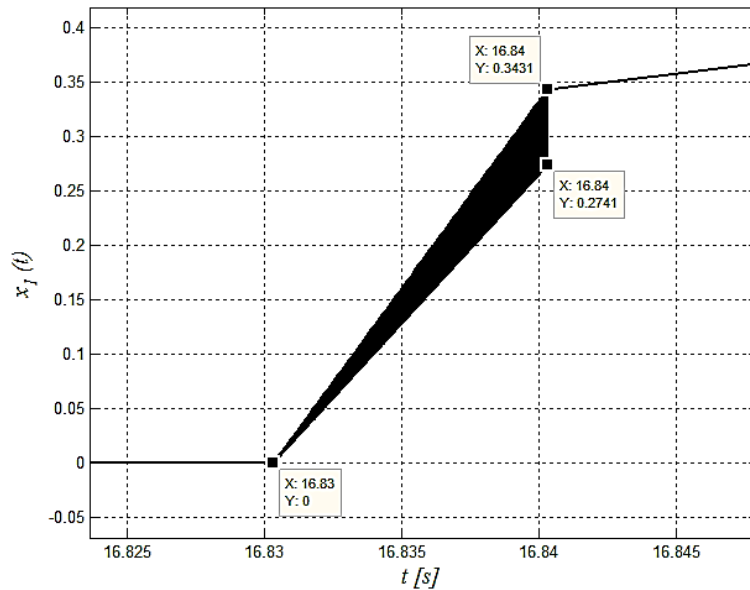


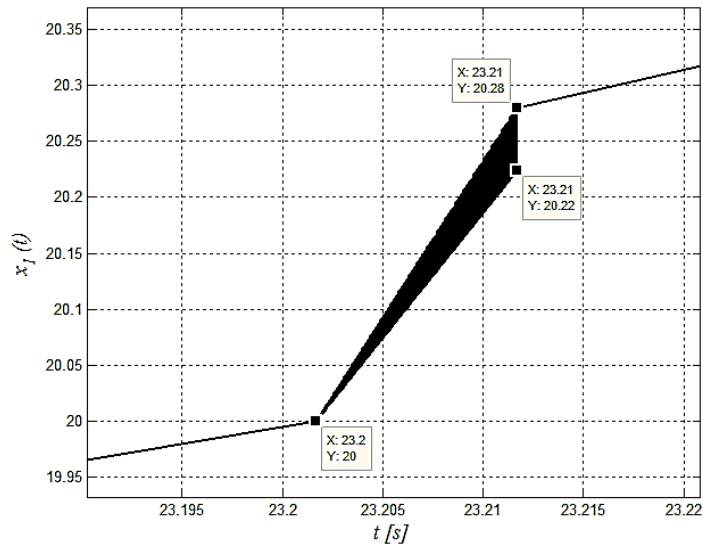
Figura 4.72 Detalle posición post primer impacto – Caso 6.



**Figura 4.73 Detalle posición post segundo impacto – Caso 6.**



**Figura 4.74 Detalle posición post tercer impacto – Caso 6.**



Adicionalmente, las Figuras 4.76, 4.77, 4.78 y 4.79 muestran el detalle de la ley de control necesaria para llevar la pelota a la altura máxima deseada, donde es evidente que la acción requerida desde el tercer impacto se va reduciendo, debido a que cada vez escalón ganado conlleva a estar más cerca de la altura deseada.

Figura 4.75 Detalle posición post cuarto impacto – Caso 6.

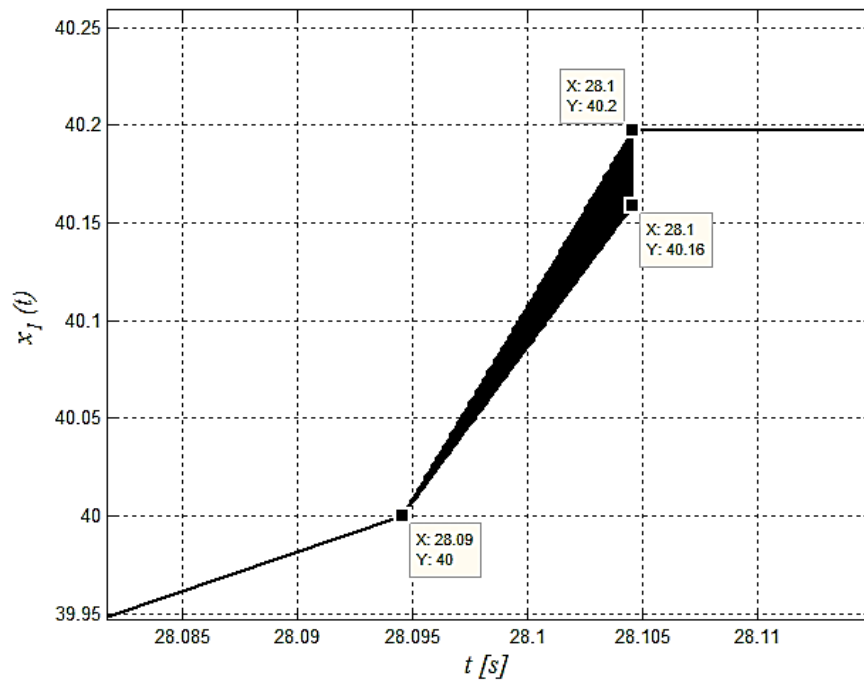
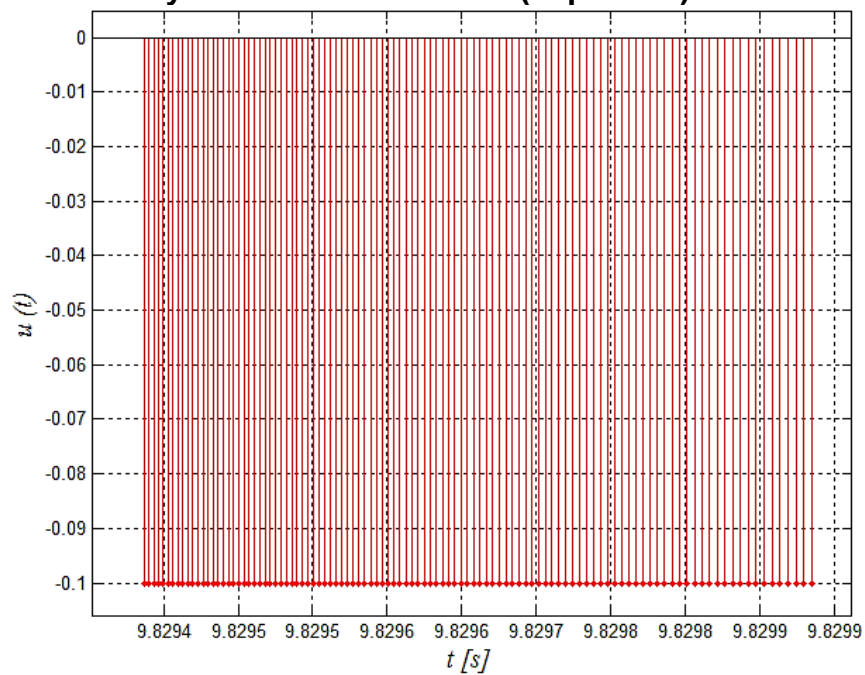
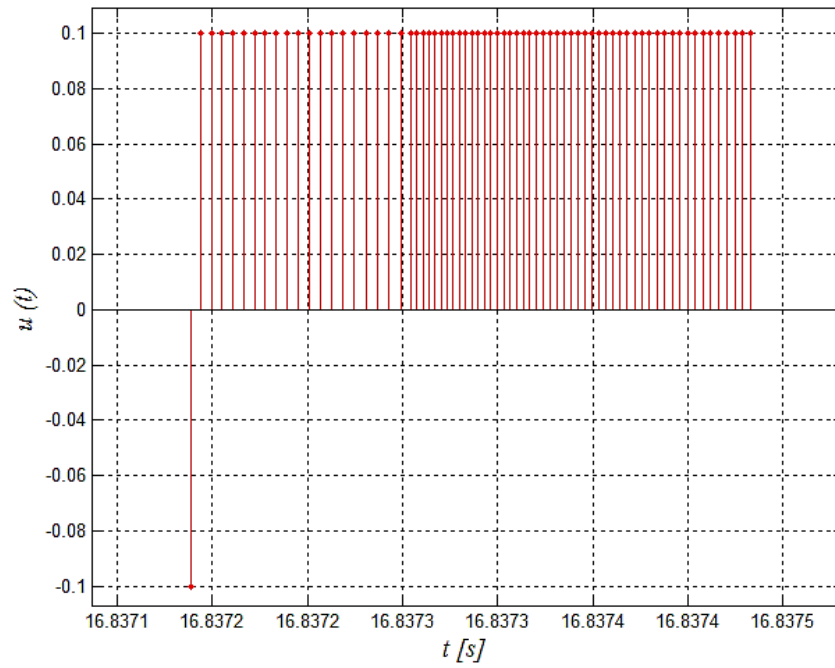


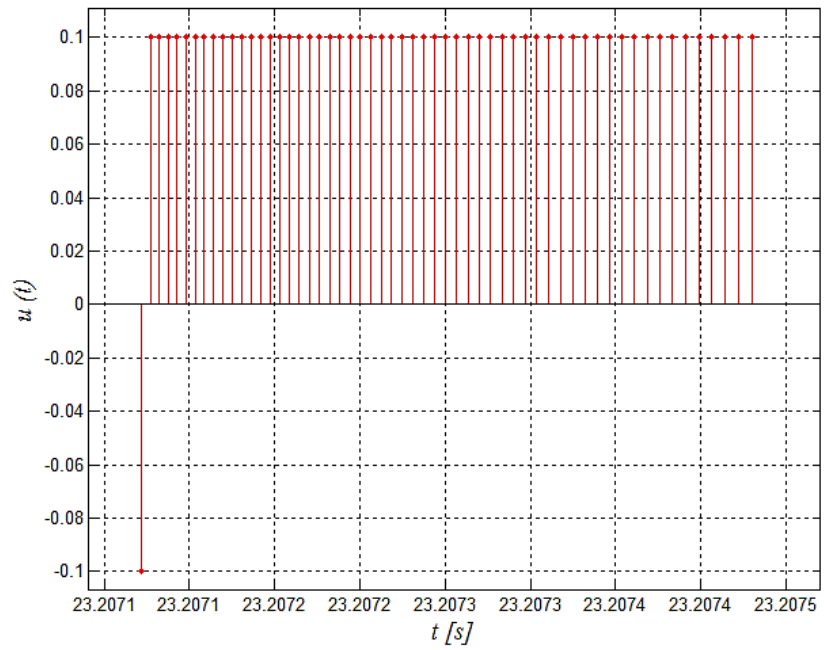
Figura 4.76 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 6.



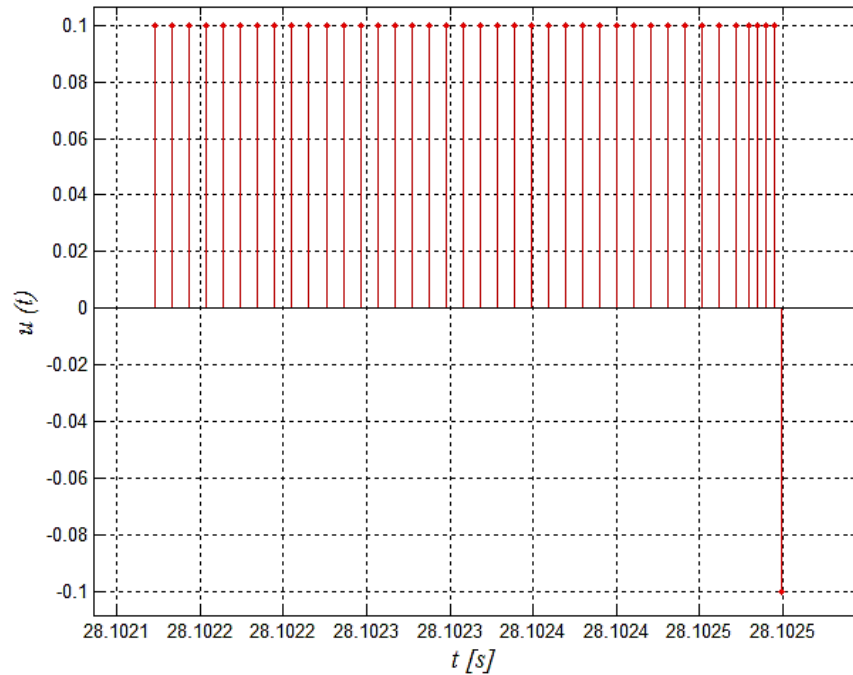
**Figura 4.77 Detalle ley de control deslizante (Impacto 2) – Caso 6.**



**Figura 4.78 Detalle ley de control deslizante (Impacto 3) – Caso 6.**



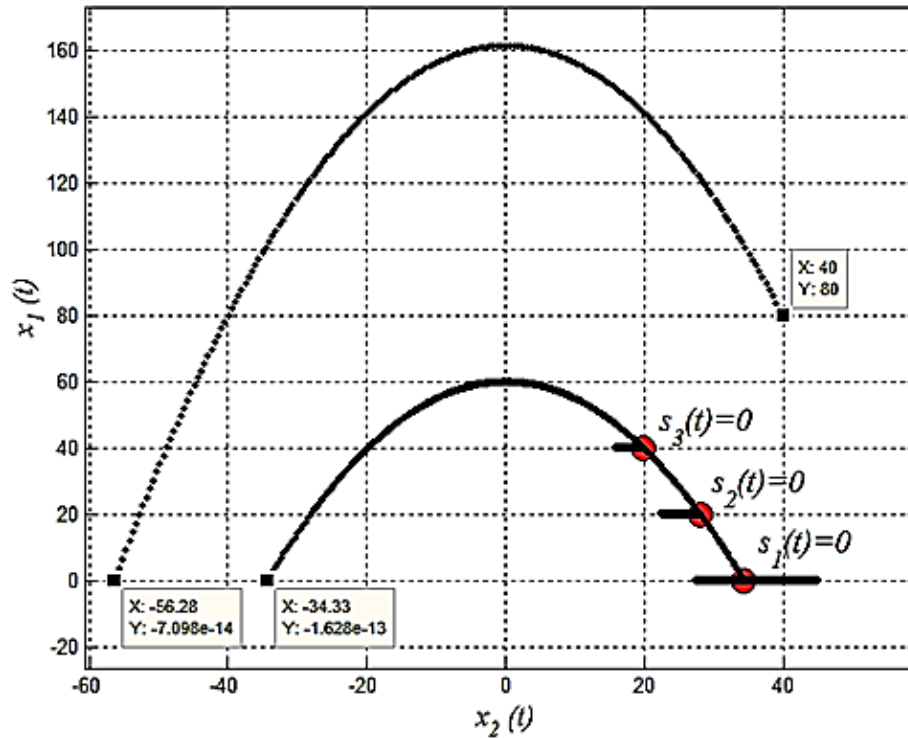
**Figura 4.79 Detalle ley de control deslizante (Impacto 4) – Caso 6.**



Finalmente, en la Figura 4.80 se muestra el mapa de fase para el Caso 6, donde se observa el *chattering* para las tres superficies deslizantes  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  y  $s_3(t)$ , creadas por el cambio sistemático del nivel la superficie rígida de impacto, donde la primera superficie corresponde al valor deseado de velocidad antes aumentar el nivel de la superficie de contacto, mientras que la segunda y la tercera hacen lo mismo cuando aumenta la superficie de contacto a 20 [m] y 40 [m] respectivamente.

Cabe aclarar que distinto al Caso 5 expuesto con anterioridad, las superficies generadas en este caso particular son totalmente distintas. Esto muestra la capacidad del algoritmo de control para generar nuevas superficies deslizantes para garantizar mantener las condiciones deseadas.

Figura 4.80 Mapa de fase – Caso 6.



La Tabla 4.12 resume los datos obtenidos para y durante el control de velocidad de salida, donde se observa de izquierda a derecha los tiempos de colisión, la velocidad previa a la colisión, la velocidad de lanzamiento leída, el error en velocidad, y el número positivos y negativos durante el control.

Tabla 4.12 Resumen de simulación - Caso 6.

Tiempo de impacto	Velocidad previa al impacto	Velocidad de salida obtenida	Velocidad de salida deseada	Error en velocidad de salida	Pulsos de $u = M$	Pulsos de $u = -M$
$t_e[s]$	$x_2(t_e^-)[m/s]$	$x_2[m/s]$	$x_{2d}[m/s]$	$\tilde{x}_2[m/s]$	Unidad	Unidad
9.8250	-56.2850	34.23	34.29	-0.06	0	108
16.8303	-34.3260	34.36	34.29	0.07	69	1
23.2017	-28.0807	28.06	28.00	0.06	56	1
28.0945	-19.8874	19.81	19.79	0.02	39	1
32.1370	-19.8079	19.75	19.79	-0.04	40	1

De la Tabla 4.12, también es evidente que el error obtenido en la velocidad de salida, nunca fue mayor que la magnitud de la ley de control, la cual para este caso se fijó en  $0.1 [m/s]$ .

**4.1.7 Caso 7: Regulación de  $x_{1d} = 60[m]$  con  $k = 1$**  A partir de los parámetros seleccionados de la Tabla 4.13, a continuación, se mostrarán los resultados de simulación del sistema, donde el SMC tiene como objetivo mantener el máximo alcance vertical de la pelota en  $60[m]$  con respecto a la referencia inicial  $x_{1ref}$ , a pesar de chocar la pelota contra una superficie perfecta mente rígida, es decir, una superficie con coeficiente de restitución  $k = 1$ .

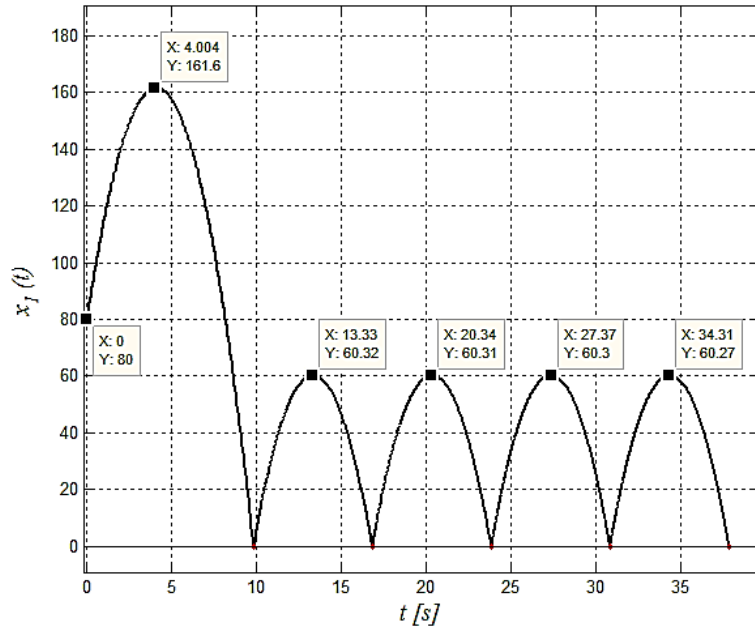
**Tabla 4.13 Especificaciones de simulación para Caso 7.**

Parámetro	Notación	Valor
Posición inicial	$x_{10}$	$80[m]$
Velocidad inicial	$x_{20}$	$40[m/s]$
Coeficiente de restitución	$k$	1
Número de saltos	$saltos$	5
Tiempo de simulación	$T$	$50[s]$
Posición máxima deseada	$x_{1d}$	$60[m]$
Tiempo de control	$t_{control}$	$0.01[s]$
Magnitud de ley de control	$M$	0.1

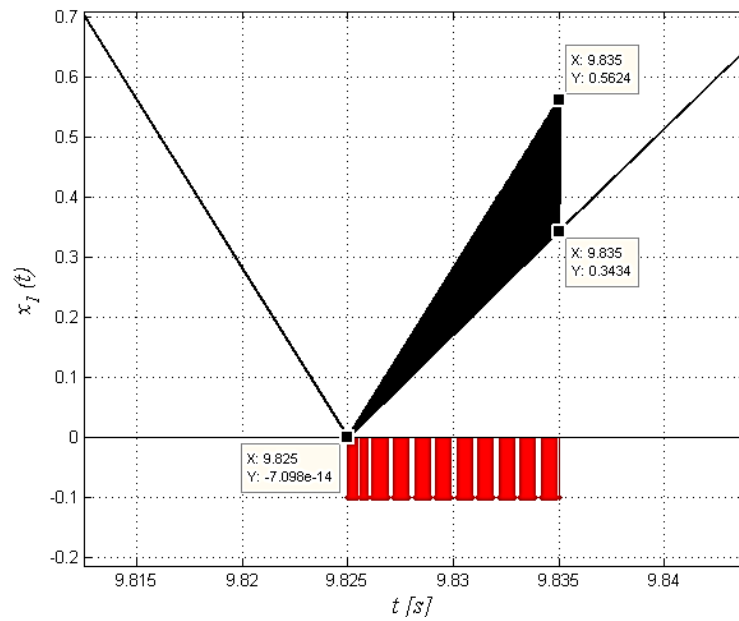
La Figura 4.81 referente a la posición muestra que el alcance máximo absoluto durante cada rebote es bastante cercano al deseado, aunque la superficie sea perfectamente rígida, y sea incapaz de disipar energía durante el impacto.

Adicionalmente, en las Figuras 4.82, 4.84 y 4.85 se observa la posición (color negro) superpuesta con una representación de la ley de control (color rojo) posterior al primero, segundo y tercer impacto respectivamente, donde se vale aclarar que en una sola barra de color rojo está contenida toda la información de la ley de control aplicada al sistema para controlar la velocidad de lanzamiento.

**Figura 4.81 Posición – Caso 7.**



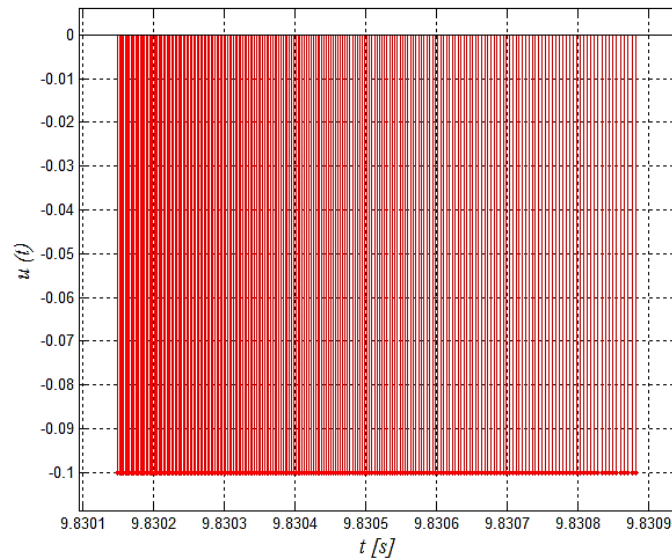
**Figura 4.82 Posición vs ley deslizante (Impacto 1) – Caso 7.**



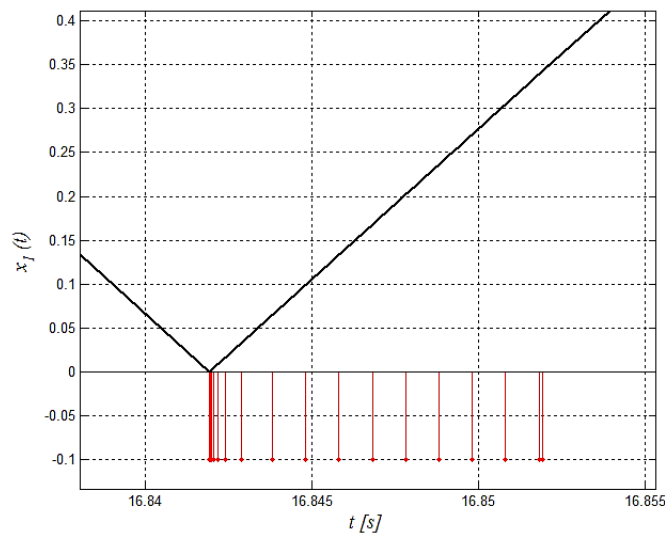
En la Figura 4.83 se observa en detalle la ley de control neta aplicada al sistema durante el tiempo de control posterior al primer impacto, donde cada pulso de color rojo representa una acción de control aplicada. Para los impactos 2 y 3 no se

detalló la ley de control como si se realizó en el impacto 1, debido a que únicamente la ley de control aplicada fue un pulso de ajuste de velocidad, tal como se evidencia en las Figuras 4.84 y 4.85.

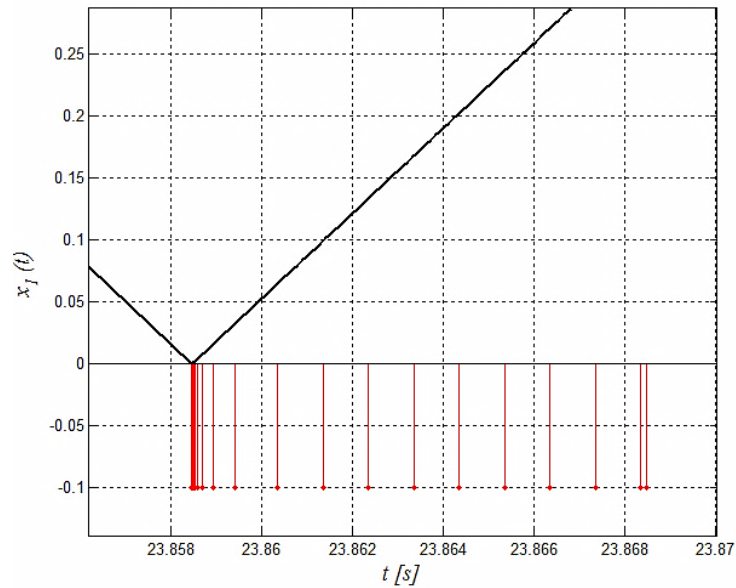
**Figura 4.83 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 7.**



**Figura 4.84 Posición vs ley deslizante (Impacto 2) – Caso 7.**

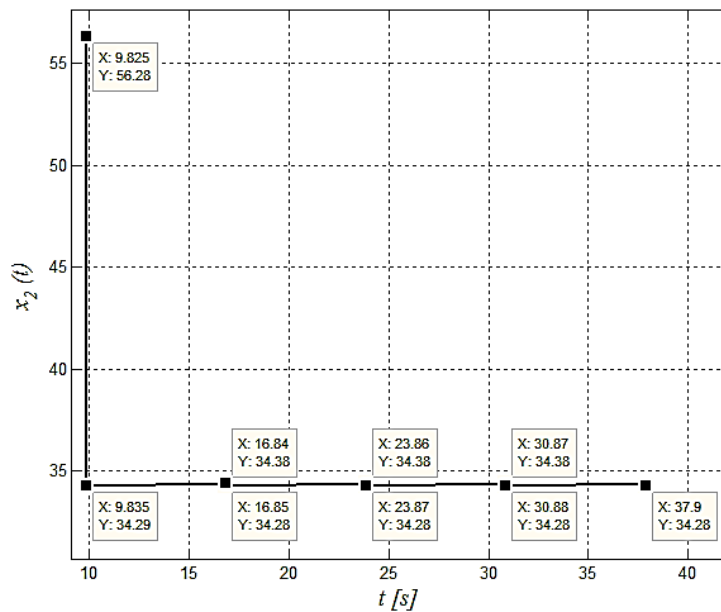


**Figura 4.85 Posición vs ley deslizante (Impacto 3) – Caso 7.**



Finalmente, en la Figura 4.86 se observa como posterior al primer impacto la velocidad se ajusta de  $56.28$  [m/s] a  $34.29$  [m/s], y luego en los siguientes impactos únicamente se realiza un pequeño ajuste en la velocidad de salida de  $u = -0.1$  [m/s] para acercarla al valor deseado de  $34.29$  [m/s].

**Figura 4.86 Velocidad durante control – Caso 7.**



La Tabla 4.14 resume los datos obtenidos para y durante el control de velocidad de salida, donde se observa de izquierda a derecha los tiempos de colisión, la velocidad previa a la colisión, la velocidad de lanzamiento leída, el error en velocidad, y el número positivos y negativos durante el control.

**Tabla 4.14 Resumen de simulación - Caso 7.**

Tiempo de impacto	Velocidad previa al impacto	Velocidad de salida obtenida	Velocidad de salida deseada	Error en velocidad de salida	Pulsos de $u = M$	Pulsos de $u = -M$
$t_e[s]$	$x_2(t_e^-)[m/s]$	$x_2[m/s]$	$x_{2d}[m/s]$	$\tilde{x}_2[m/s]$	Unidad	Unidad
9.8250	-56.2850	34.29	34.29	0	0	220
16.8419	-34.3830	34.28	34.29	-0.01	0	1
23.8585	-34.3810	34.28	34.29	-0.01	0	1
30.8746	-34.3790	34.28	34.29	-0.01	0	1
37.8903	-34.3770	34.28	34.29	-0.01	0	1

De la Tabla 4.14, también es evidente que el error obtenido en la velocidad de salida, nunca fue mayor que la magnitud de la ley de control, la cual para este caso se fijó en  $0.1 [m/s]$ .

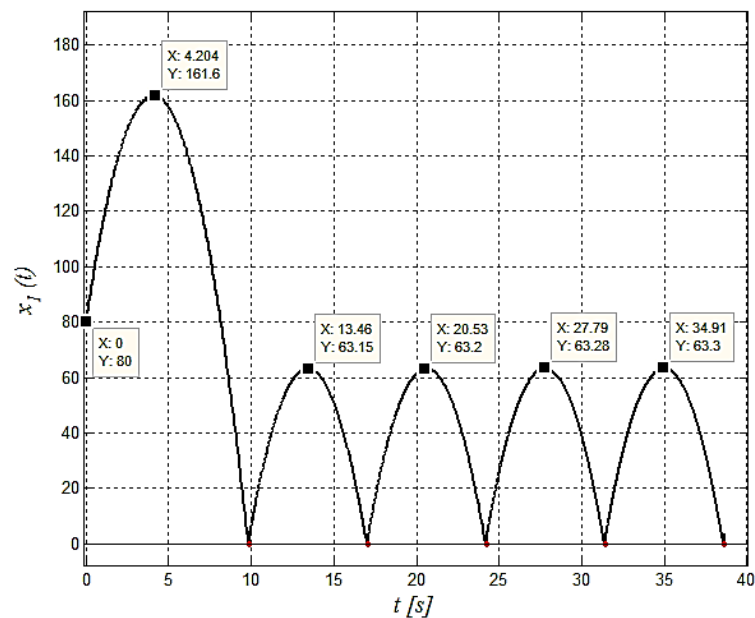
**4.1.8 Caso 8: Efecto de incrementar el tiempo de control** A partir de los parámetros seleccionados de la Tabla 4.15, a continuación, se mostrarán los resultados de simulación del sistema, donde el *SMC* tiene como objetivo mantener el máximo alcance vertical de la pelota en  $60[m]$ , cuando el tiempo de control  $t_{control}$  se asume como 10 veces el tiempo de control de los casos anteriores.

La Figura 4.87 referente a la posición muestra que el alcance máximo durante cada rebote está considerablemente alejado del valor deseado. No obstante, las alturas máximas alcanzadas son bastante regulares entre ellas.

**Tabla 4.15 Especificaciones de simulación para Caso 8.**

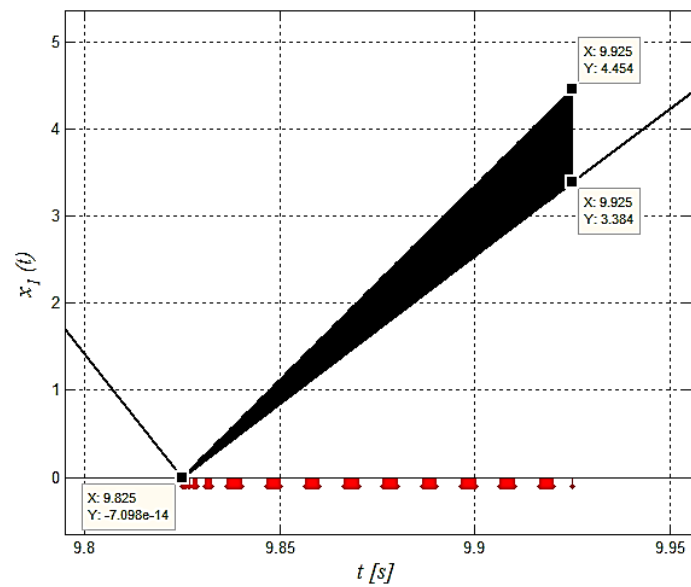
Parámetro	Notación	Valor
Posición inicial	$x_{10}$	80[m]
Velocidad inicial	$x_{20}$	40[m/s]
Coefficiente de restitución	$k$	0.8
Número de saltos	<i>saltos</i>	5
Tiempo de simulación	$T$	50[s]
Posición máxima deseada	$x_{1d}$	60[m]
Tiempo de control	$t_{control}$	0.1[s]
Magnitud de ley de control	$M$	0.1

**Figura 4.87 Posición – Caso 8.**



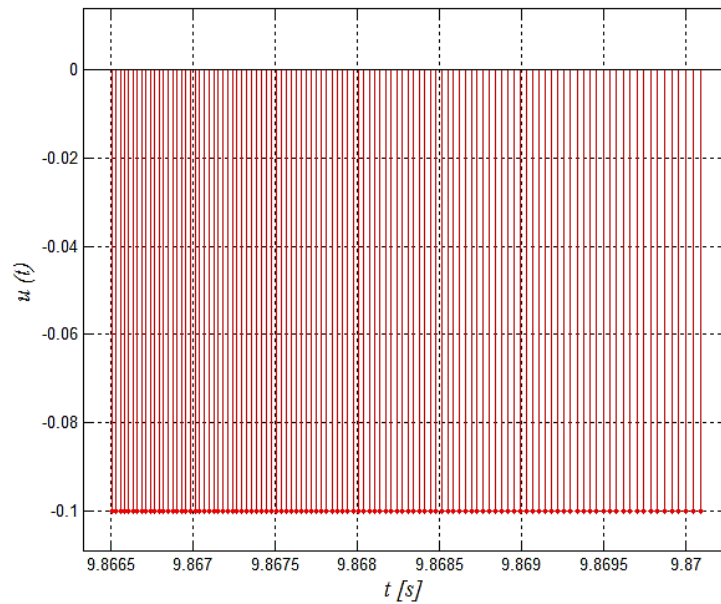
Por otro lado, en la Figura 4.88 se muestra la superposición entre la posición de la pelota y la representación de la ley de control deslizante aplicada posterior al primer impacto, donde por la relación de la velocidad, es evidente que una vez finalizado el tiempo de control la pelota sale disparada a una velocidad de 33.84 [m/s].

**Figura 4.88 Posición vs ley deslizante (Impacto 1) – Caso 8.**



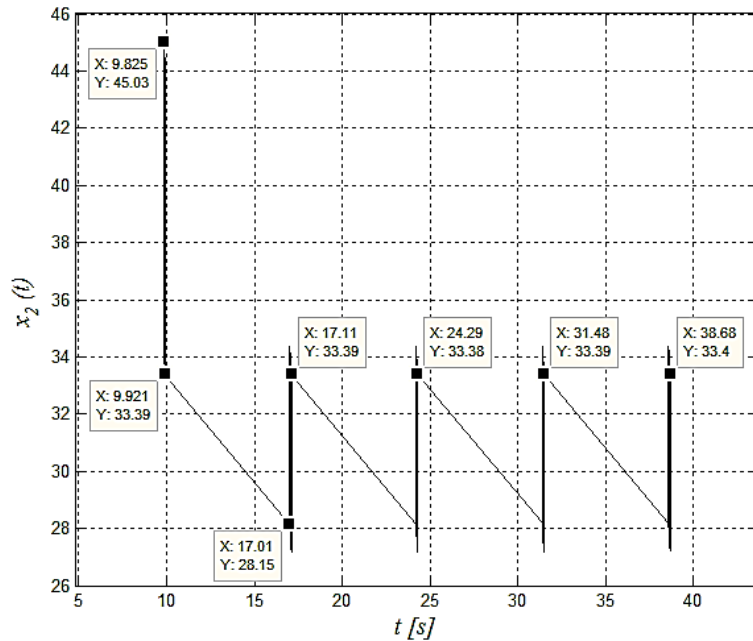
Adicionalmente, en la Figura 4.89 se muestra el detalle de la ley de control necesaria para llevar la pelota a la altura máxima deseada posterior al primer impacto.

**Figura 4.89 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 8.**



Además, la Figura 4.90 muestra una curva bastante regular de la velocidad durante el control, donde se observa un notable defecto cada vez que controla la velocidad posterior al impacto, posiblemente debido al incremento en el tiempo de control.

**Figura 4.90 Velocidad durante control – Caso 8.**



Finalmente, en la Figura 4.91 se muestra el mapa de fase para el Caso 8, donde se observa el *chattering* sobre la superficie deslizante se hace más extenso que los casos anteriores cuando  $t_{control} = 0.01$  [s]; esto se debe a que el tiempo de control incrementado 10 veces genera un desplazamiento considerable en la pelota durante el control, desembocando en un desplazamiento exagerado del objeto a lo largo de  $3.439$  [m] antes de ser liberado. Este desplazamiento se puede observar con detalle en la Figura 4.92.

La Tabla 4.16 resume los datos obtenidos para y durante el control de velocidad de salida, donde se observa de izquierda a derecha los tiempos de colisión, la velocidad previa a la colisión, la velocidad de lanzamiento leída, el error en velocidad, y el número positivos y negativos durante el control.

Figura 4.91 Mapa de fase – Caso 8.

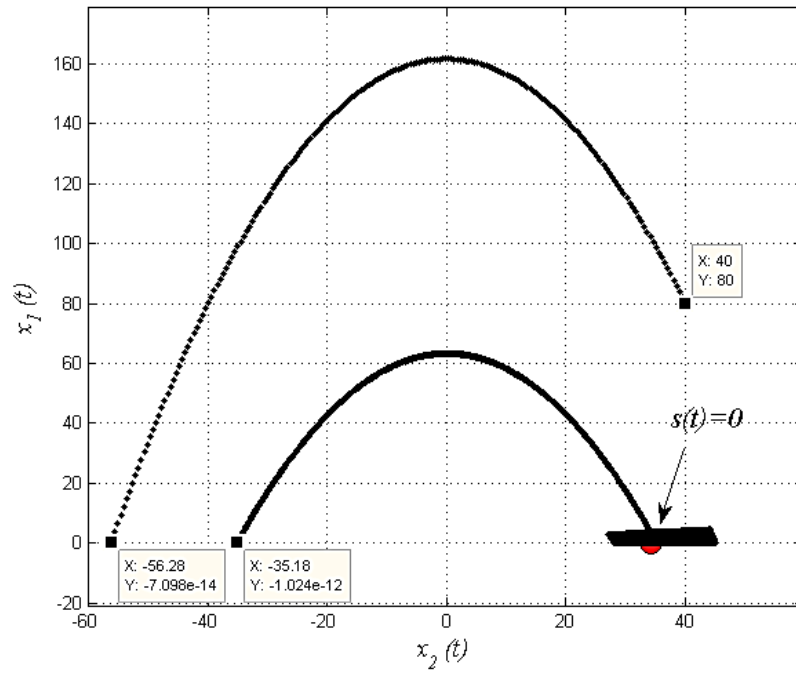
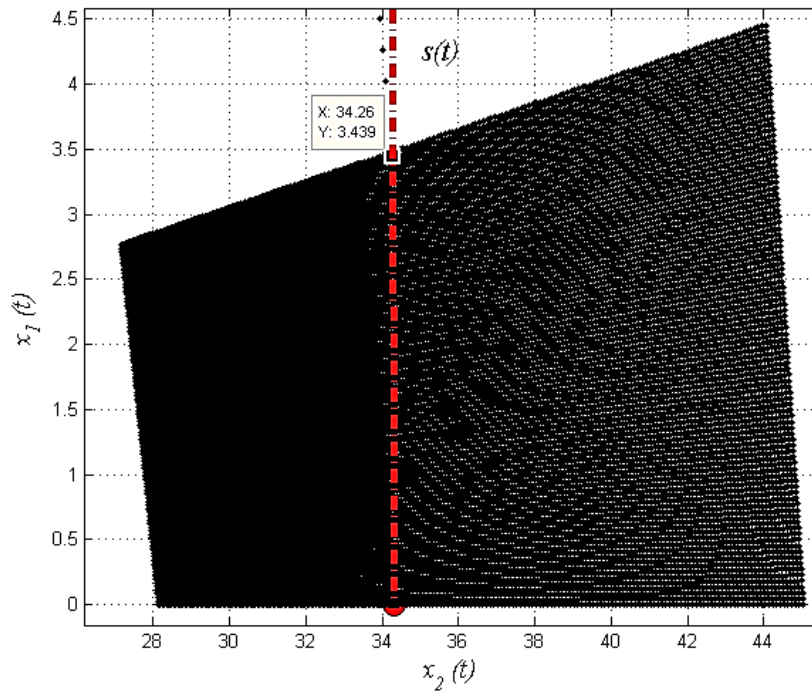


Figura 4.92 Chattering – Caso 8.



**Tabla 4.16 Resumen de simulación - Caso 8.**

Tiempo de impacto	Velocidad previa al impacto	Velocidad de salida obtenida	Velocidad de salida deseada	Error en velocidad de salida	Pulsos de $u = M$	Pulsos de $u = -M$
$t_e[s]$	$x_2(t_e^-)[m/s]$	$x_2[m/s]$	$x_{2d}[m/s]$	$\tilde{x}_2[m/s]$	<i>Unidad</i>	<i>Unidad</i>
9.8250	-56.2850	33.39	34.29	-0.9	0	108
17.0078	-35.1835	33.39	34.29	-0.9	62	1
24.1944	-35.2023	33.38	34.29	-0.91	62	1
31.3842	-35.2174	33.39	34.29	-0.9	62	1
38.5763	-35.2294	33.40	34.29	-0.89	62	1

De la Tabla 4.16, es evidente que el error obtenido en la velocidad de salida es bastante mayor al obtenido en todos los casos anteriores, aun cuando la magnitud de la ley de control también se fijó en  $0.1 [m/s]$ . Por tanto, se puede afirmar que el incremento del tiempo de control influye notablemente en el error de velocidad de salida de la pelota.

#### 4.1.9 Caso 9: Efecto de incrementar la magnitud de ley de control $u$ A

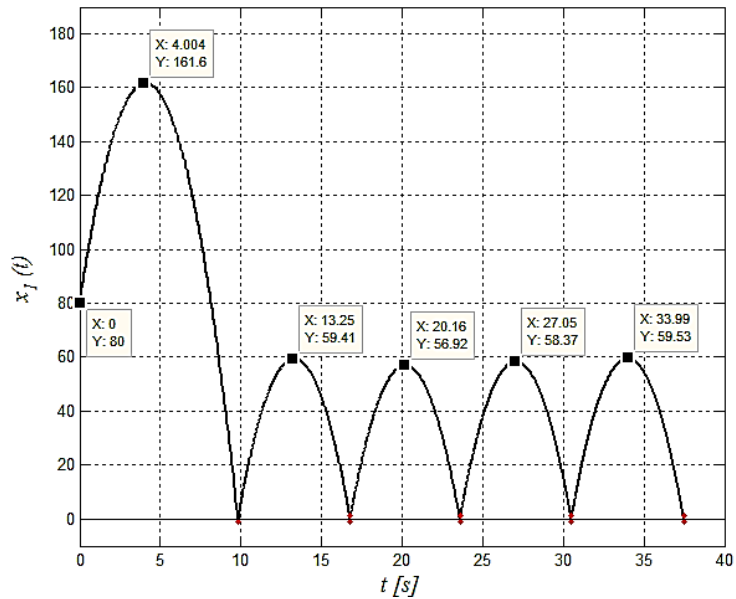
partir de los parámetros seleccionados de la Tabla 4.17, a continuación, se mostrarán los resultados de simulación del sistema, donde el *SMC* tiene como objetivo mantener el máximo alcance vertical de la pelota en  $60[m]$ , cuando la magnitud de la ley de control  $u$  se asume 10 veces mayor a la dada en casos anteriores.

La Figura 4.93 referente a la posición muestra que el alcance máximo durante cada rebote es bastante irregular, y se mantiene en algunos casos notablemente alejado del valor deseado.

**Tabla 4.17 Especificaciones de simulación para Caso 9.**

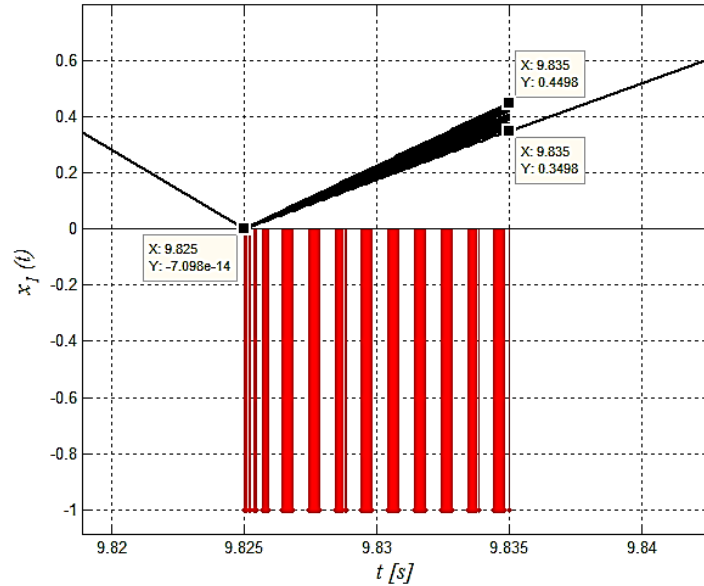
Parámetro	Notación	Valor
Posición inicial	$x_{10}$	80[m]
Velocidad inicial	$x_{20}$	40[m/s]
Coeficiente de restitución	$k$	0.8
Número de saltos	$saltos$	5
Tiempo de simulación	$T$	50[s]
Posición máxima deseada	$x_{1d}$	60[m]
Tiempo de control	$t_{control}$	0.01[s]
Magnitud de ley de control	$M$	1

**Figura 4.93 Posición – Caso 9.**



Por otro lado, en la Figura 4.94 se muestra la superposición entre la posición de la pelota y la representación de la ley de control deslizante aplicada posterior al primer impacto, donde es evidente que la magnitud de la ley de control es 10 veces mayor que en los casos anteriores.

**Figura 4.94 Posición vs ley deslizante (Impacto 1) – Caso 9.**



Adicionalmente, en la Figura 4.95 se muestra el detalle de la ley de control necesaria para llevar la pelota a la altura máxima deseada posterior al primer impacto, donde se puede verificar rápidamente que durante el primer tiempo de control se envían 11 pulsos de  $u = -1$  [m/s] para disminuir la velocidad de salida.

**Figura 4.95 Detalle ley de control deslizante (Impacto 1) – Caso 9.**

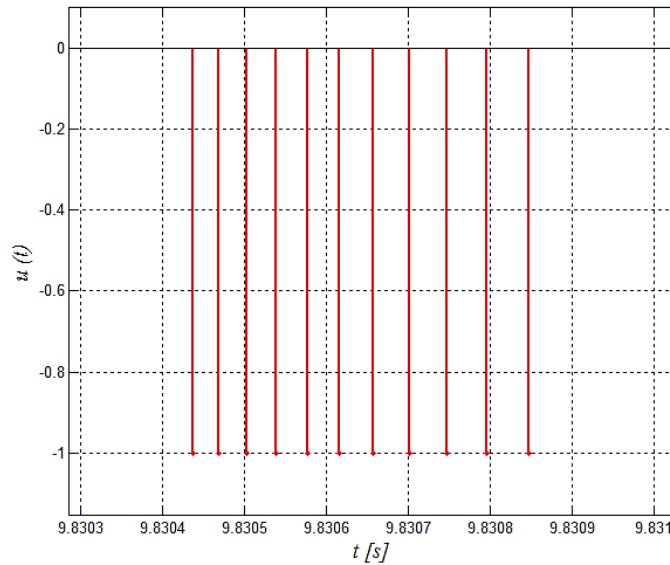
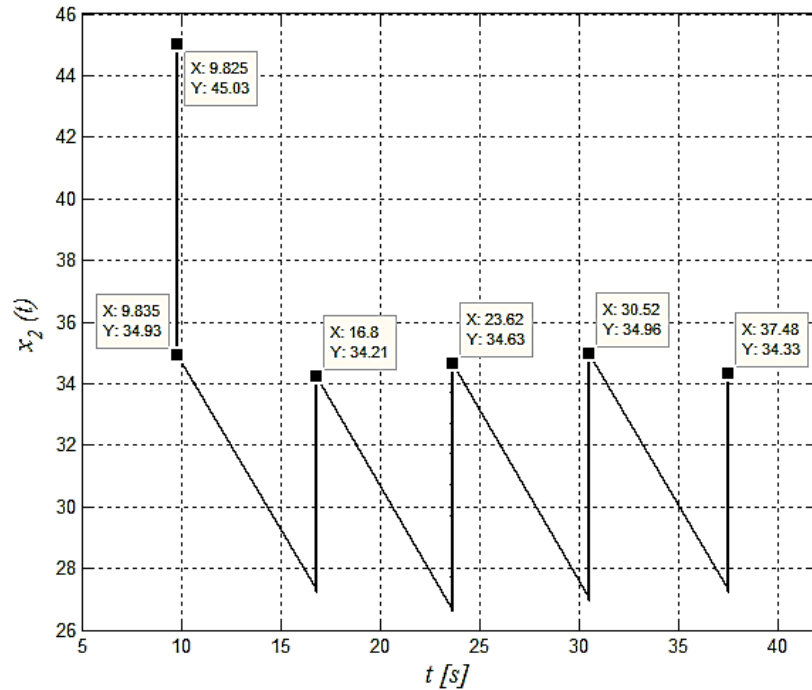


Figura 4.96 Velocidad durante control – Caso 9.



Finalmente, en la Figura 4.97 se muestra el mapa de fase para el Caso 9, donde se observa que la trayectoria de vuelo de la pelota posterior a cada control es bastante espesa en comparación con los casos anteriores, debido a la irregularidad en la velocidad de salida. Además, en la Figura 4.98 se observa en detalle que el *chattering* es poco denso, a causa de las conmutaciones realizadas por la ley de control para conducir la velocidad de salida hacia el valor deseado.

Cabe aclarar que las figuras que muestran el mapa de fase y el detalle del *chattering* corresponden con valores discretos, razón por la cual se observa discontinuidad entre los datos. Por esta estrategia de graficar, se puede evidenciar hacia la derecha de la superficie deslizante 11 franjas verticales, las cuales indican las veces que se descontó velocidad a la pelota posterior al primer impacto durante el tiempo de control definido.

Figura 4.97 Mapa de fase – Caso 9.

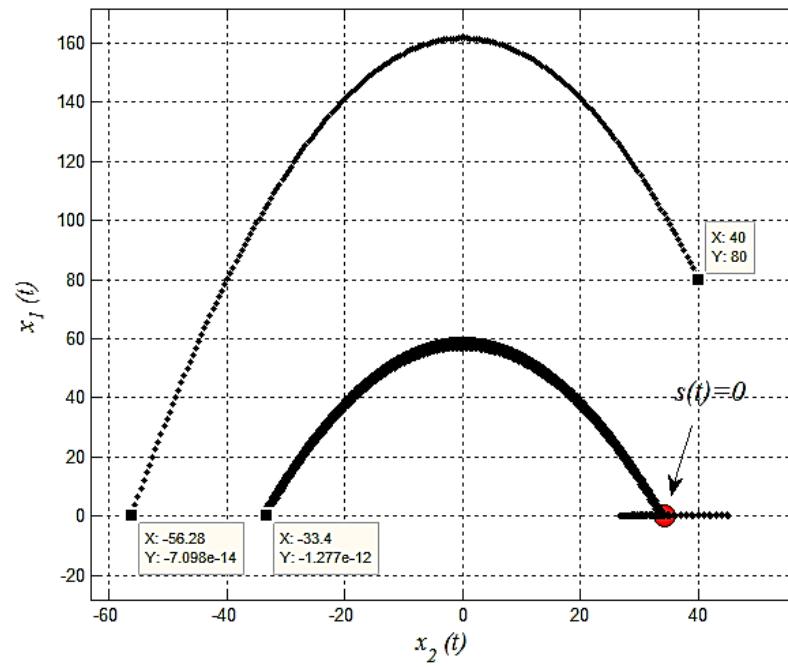
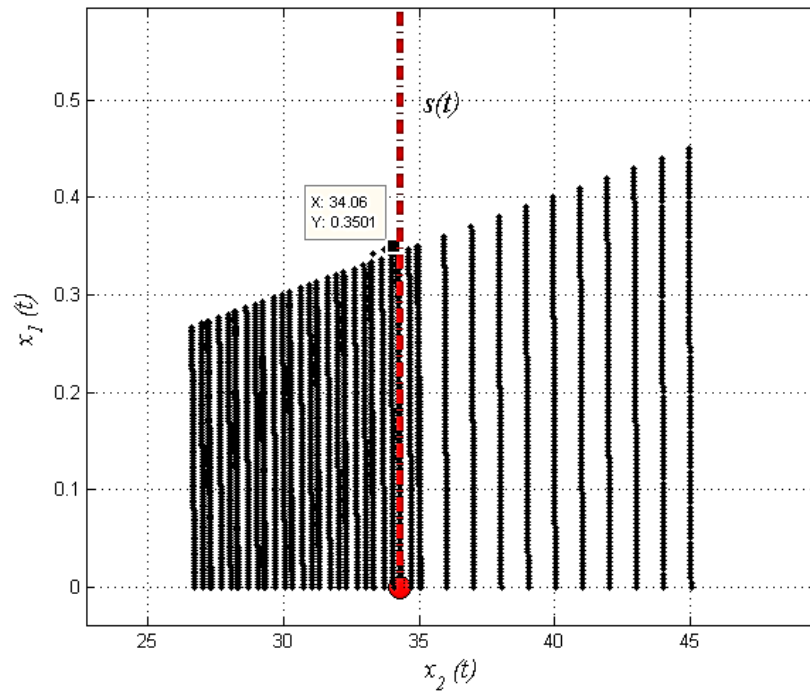


Figura 4.98 Chattering – Caso 9.



La Tabla 4.18 resume los datos obtenidos para y durante el control de velocidad de salida, donde se observa de izquierda a derecha los tiempos de colisión, la velocidad previa a la colisión, la velocidad de lanzamiento leída, el error en velocidad, y el número positivos y negativos durante el control.

**Tabla 4.18 Resumen de simulación - Caso 9.**

<b>Tiempo de impacto</b>	<b>Velocidad previa al impacto</b>	<b>Velocidad de salida obtenida</b>	<b>Velocidad de salida deseada</b>	<b>Error en velocidad de salida</b>	<b>Pulsos de <math>u = M</math></b>	<b>Pulsos de <math>u = -M</math></b>
$t_e[s]$	$x_2(t_e^-)[m/s]$	$x_2[m/s]$	$x_{2d}[m/s]$	$\tilde{x}_2[m/s]$	<i>Unidad</i>	<i>Unidad</i>
9.8250	-56.2850	34.93	34.29	0.64	0	11
16.7898	-34.1286	34.21	34.29	-0.08	7	1
23.6065	-33.4035	34.63	34.29	0.34	8	1
30.5090	-33.8234	34.96	34.29	0.67	8	1
37.4800	-34.1593	34.33	34.29	0.04	7	1

De la Tabla 4.18, es evidente que el error obtenido en la velocidad de salida es bastante mayor al obtenido en los casos anteriores, con excepción el Caso 8. Este error elevado se debe a que la magnitud de la ley de control es 10 veces mayor que en los demás casos considerados. Sin embargo, en comparación con el caso anterior el error cometido en velocidad de salida no es tan exagerado, por lo cual es correcto afirmar que a pesar de conducir al error el incremento en la magnitud de la ley de control, este error no es tan evidente que el provocado por el incremento del tiempo de control.

Ya para concluir, en la Tabla 4.19 se muestra en resumen la altura máxima alcanzada por la pelota durante cada tiempo de vuelo en todos los casos a excepción del Caso 2, donde se desea alcanzar una altura de 140 [m/s], y del Caso 5, donde la altura máxima sobrepasa por arriba la referencia inicial preestablecida, por efecto de la perturbación seleccionada. También en esta Tabla 4.20 se calculan los errores cometidos con respecto al caso ideal, para lograr definir algunas conclusiones al respecto.

**Tabla 4.19 Consolidación de posición máxima.**

Caso ideal [m]	Caso 1 [m]	Caso 3 [m]	Caso 4 [m]	Caso 6 [m]	Caso 7 [m]	Caso 8 [m]	Caso 9 [m]
161.6	161.6	161.6	161.6	161.6	161.6	161.6	161.6
60	60.11	60.12	60.12	60.11	60.32	63.15	59.41
60	60.22	60.23	60.22	60.22	60.31	63.20	56.92
60	60.28	60.27	60.46	60.18	60.30	63.28	58.37
60	60.05	60.24	60.36	60.02	60.27	63.30	59.53

**Tabla 4.20 Consolidación de error de posición.**

Caso 1 [m]	Caso 3 [m]	Caso 4 [m]	Caso 6 [m]	Caso 7 [m]	Caso 8 [m]	Caso 9 [m]
0	0	0	0	0	0	0
0.11	0.12	0.12	0.11	0.32	3.15	-0.59
0.22	0.23	0.22	0.22	0.31	3.20	-3.08
0.28	0.27	0.46	0.18	0.30	3.28	-1.63
0.05	0.24	0.36	0.02	0.27	3.30	-0.47

## CONCLUSIONES

De las Tablas 4.19 y 4.20 se puede apreciar que el Caso 8 presenta mayor error con respecto a la referencia, debido al incremento en el tiempo de control, ya que la pelota requiere hacer un mayor recorrido antes de ser lanzada, el cual finalmente es adicionado a la altura máxima deseada. Es decir, la altura máxima alcanzada por la pelota es cercana a la altura máxima deseada sumada con la altura ganada durante el tiempo de control.

Por otro lado, el incremento en la magnitud de la ley de control está asociado con el error cometido, ya que su incremento dificulta el alcance de la superficie deslizante; esto se puede ver como un error de cuantificación producto de la resolución del entramado definido por el paso predeterminado  $M$  de la ley de control. Por tanto, se recomienda definir la magnitud de la ley de control lo suficientemente pequeña para garantizar un aceptable funcionamiento en el sistema, pero no tan baja que ralentice la ejecución del algoritmo de control. De esta manera, en caso de ser implementado, se debe realizar una cuidadosa estimación de  $M$ , que se ajuste a la tecnología a utilizar.

Para los Casos 3, 4, 5, 6 y 7 se observa un comportamiento aceptable en el sistema controlado, evidenciando la capacidad de la estrategia de control para mantener condiciones de funcionamiento deseado ante cambios en la aceleración de la gravedad, en el coeficiente de restitución de la superficie rígida, y en el nivel de referencia de la superficie rígida como regulador absoluto/relativo; esto es posible por la naturaleza robusta de la técnica utilizada *SMC*, y la forma en que el algoritmo control logra la redefinición de la superficie de deslizamiento según la necesidad.

En general, son bastantes satisfactorios los resultados obtenidos en el funcionamiento controlado del sistema *Bouncing Ball* modelado como sistema dinámico híbrido, y controlado por la estrategia avanzada de Control por Modos Deslizantes. Por un lado, el enfoque híbrido es determinante para particularizar el sistema mediante zonas de operación suave y eventualidades discretas, teniendo en cuenta que justo después de los eventos, la técnica de control iniciaba su proceso con el propósito de garantizar las condiciones deseadas, basándose en las premisas de constituir una superficie deslizante y garantizar la respectiva atracción hacia dicha superficie.

## RECOMENDACIONES Y TRABAJO FUTURO

Realizar el modelado híbrido del sistema *Bouncing Ball* no idealizado, donde se considere entre otros aspectos, la fricción del aire ejercida sobre la pelota.

Indagar sobre las posibles técnicas avanzadas de control con formulación en el espacio de estados, que puedan ser aplicadas al sistema *Bouncing Ball* en un caso de regulación.

Estudiar a profundidad las tecnologías de vanguardia que hagan posible la implementación del sistema *Bouncing Ball* controlado por *SMC*.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]. Budd, C. J., & Piiroinen, P. T. (2006). Corner bifurcations in non-smoothly forced impact oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 220(2), 127-145.
- [2]. Langley, R. S. (2012). The analysis of impact forces in randomly vibrating elastic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 331(16), 3738-3750.
- [3]. Wang, C., & Kim, J. (1996). New analysis method for a thin beam impacting against a stop based on the full continuous model. *Journal of Sound and Vibration*, 191(5), 809-823.
- [4]. Keller, J. A., & Smith, E. C. (1999). Experimental and theoretical correlation of helicopter rotor blade-droop stop impacts. *Journal of Aircraft*, 36(2), 443-450.
- [5]. Lee, E. H. (1940). *Impact of a mass striking a beam*, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics* 62 (1940) 129–140.
- [6]. Goyder, H. G. D., & Teh, C. E. (1989). A study of the impact dynamics of loosely supported heat exchanger tubes. *Journal of pressure vessel technology*, 111(4), 394-401.
- [7]. Błazejczyk-Okolewska, B., & Czołczyński, K. (1998). Some aspects of the dynamical behaviour of the impact force generator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 9(8), 1307-1320.
- [8]. Budd, C., & Dux, F. (1994). Chattering and related behaviour in impact oscillators. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 347(1683), 365-389.
- [9]. Neumann, N., & Sattel, T. (2007). Set-oriented numerical analysis of a vibro-impact drilling system with several contact interfaces. *Journal of sound and vibration*, 308(3), 831-844.

- [10]. Oura, Y., Kurita, Y., Matsumura, Y., & Nishizawa, Y. (2008). Influence of distributed stiffness in contact surface on disk brake squeal (No. 2008-01-2584). SAE Technical Paper.
- [11]. Wu, C. Y., Li, L. Y., & Thornton, C. (2005). Energy dissipation during normal impact of elastic and elastic-plastic spheres. *International Journal of Impact Engineering*, 32(1), 593-604.
- [12]. Naldi, R., & Sanfelice, R. G. (2013). Passivity-based control for hybrid systems with applications to mechanical systems exhibiting impacts. *Automatica*, 49(5), 1104-1116.
- [13]. Bentsman, J., Miller, B. M., & Rubanovich, E. Y. (2008). Dynamical systems with active singularities: Input/state/output modeling and control. *Automatica*, 44(7), 1741-1752.
- [14]. Sanfelice, R. G., & Teel, A. R. (2010). Dynamical properties of hybrid systems simulators. *Automatica*, 46(2), 239-248.
- [15]. Bentsman, J., Miller, B. M., Rubanovich, E. Y., & Zheng, K. (2007). Hybrid dynamical systems with controlled discrete transitions. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 1(4), 466-481.
- [16]. Harl, N., & Balakrishnan, S. N. (2012). Impact time and angle guidance with sliding mode control. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 20(6), 1436-1449.
- [17]. Utkin, V., Guldner, J., & Shi, J. (2009). *Sliding mode control in electro-mechanical systems* (Vol. 34). CRC press.
- [18]. Slotine, J. J. E., & Li, W. (1991). *Applied nonlinear control* (Vol. 199, No. 1). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [19]. Qiao, P., Yang, M., & Bobaru, F. (2008). Impact mechanics and high-energy absorbing materials: review. *Journal of Aerospace Engineering*, 21(4), 235-248.

- [20]. Laursen, T. A., & CHAWLA, V. (1997). Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(5), 863-886.
- [21]. Armero, F., & Petőcz, E. (1999). A new dissipative time-stepping algorithm for frictional contact problems: formulation and analysis. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 179(1), 151-178.
- [22]. Heinstein, M. W., Mello, F. J., Attaway, S. W., & Laursen, T. A. (2000). Contact—impact modeling in explicit transient dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187(3), 621-640.
- [23]. Bajer, A., & Demkowicz, L. (2002). Dynamic contact/impact problems, energy conservation, and planetary gear trains. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(37), 4159-4191.
- [24]. Broschart, S. B., & Scheeres, D. J. (2007). Boundedness of spacecraft hovering under dead-band control in time-invariant systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 30(2), 601-610.
- [25]. Powell, B. K., Bailey, K. E., & Cikanek, S. R. (1998). Dynamic modeling and control of hybrid electric vehicle powertrain systems. *Control Systems, IEEE*, 18(5), 17-33.
- [26]. Bai, H., Nie, Z., & Chunting Mi, C. (2011). A model-based dead-band compensation for the dual-active-bridge isolated bidirectional DC–DC converter. *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering*, 6(6), 517-524.
- [27]. Gebert, J., Oktem, H., Pickl, S. W., Radde, N., Weber, G. W., & Yilmaz, F. B. (2004). Inference of gene expression patterns by using a hybrid system formulation—an algorithmic approach to local state transition matrices. *Anticipative and Predictive Models in Systems Science I*, Lasker, GE, and

- Dubois, DM (eds.), IIAS (International Institute for Advanced Studies) in Windsor, Ontario, 63-66.
- [28]. Goebel, R., Sanfelice, R. G., & Teel, A. (2009). Hybrid dynamical systems. *Control Systems, IEEE*, 29(2), 28-93.
- [29]. Young, K. D., Utkin, V. I., & Ozguner, U. (1999). A control engineer's guide to sliding mode control. *IEEE transactions on control systems technology*, 7(3), 328-342.
- [30]. Utkin, V. I. (2013). *Sliding modes in control and optimization*. Springer Science & Business Media.
- [31]. R. Goebel, R. G. Sanfelice and A. R. Teel. *Hybrid dynamical systems: Modeling, stability, and robustness*. Princeton University Press, 2012. M. Gotesman and N. L. Benitez. "Petri net-based modeling of hybrid dynamic systems". *Emerging Technologies and Factory Automation, 1996. EFTA'96. Proceedings.*, 1996 IEEE Conference on (Vol. 2, pp. 553-559). IEEE., November, 1996.
- [32]. J. Nishikawa and Kazutoshi Gohara. A hybrid dynamical system as an automaton on the fractal set. *Neural Networks, 2003. Proceedings of the International Joint Conference on* (Vol. 2, pp. 825-830). IEEE., July, 2003.
- [33]. Van Der Schaft, A. J., & Schumacher, J. M. (2000). *An introduction to hybrid dynamical systems* (Vol. 251). London: Springer.
- [34]. J.-J E. Slotine, W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Pearson Education (US), United States, 1991.
- [35]. H. Öktem, A survey on piecewise-linear models of regulatory dynamical systems, *Nonlinear*.
- [36]. *Analysis: Theory, Methods & Applications*, Volume 63, Issue 3, 1 November 2005, Pages 336-349, ISSN 0362-546X.

- [37]. Vargas, J. A. F., & Castaño, R. A. Convertidores de potencia como sistemas dinámicos híbridos. LACCEI, 2014.
- [38]. Sanfelice, R. G., Goebel, R., & Teel, A. R. (2008). Generalized solutions to hybrid dynamical systems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 14(4), 699-724.
- [39]. Armero, F., & Petócz, E. (1998). Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 158(3), 269-300.
- [40]. Manrique, T., & Patiño, D. (2010). Mathematical modelling on Hybrid Dynamical Systems: An application to the bouncing ball and a two-tanks system. In 2010 IEEE ANDESCON.
- [41]. Champneys, A. R., & di Bernardo, M. (2008). Piecewise smooth dynamical systems. *Scholarpedia*, 3(9), 4041.
- [42]. Leine, R., & Nijmeijer, H. (2013). Dynamics and bifurcations of non-smooth mechanical systems (Vol. 18). Springer Science & Business Media.
- [43]. Kowalczyk, P., & Di Bernardo, M. (2005). Two-parameter degenerate sliding bifurcations in Filippov systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 204(3), 204-229.
- [44]. Filippov, A. F. (2013). Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems (Vol. 18). Springer Science & Business Media.
- [45]. Taborda, J. A., & Arango, I. (2014). Topological Classification of Limit Cycles of Piecewise Smooth Dynamical Systems and Its Associated Non-Standard Bifurcations. *Entropy*, 16(4), 1949-1968.
- [46]. Kowalczyk, P. (2004). Robust chaos and border-collision bifurcations in non-invertible piecewise-linear maps. *Nonlinearity*, 18(2), 485.

- [47]. R. A. Ibrahim. Vibro-impact dynamics: Modeling, mapping and applications. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, vol.3, 2009.
- [48]. Luo, A. C., & Han, R. P. (1996). The dynamics of a bouncing ball with a sinusoidally vibrating table revisited. *Nonlinear Dynamics*, 10(1), 1-18.
- [49]. Chaohong, C., Rafal, G., Ricardo, G. S., & Andrew, R. T. (2007, July). Hybrid dynamical systems: Robust stability and control. In 2007 Chinese Control Conference (pp. 29-36). IEEE.
- [50]. Vargas, J. A. F. (2014). Controladores híbridos y sus aplicaciones en regulación de circuitos convertidores de potencia CC-CC (Tesis de Maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.
- [51]. Hibbeler, R. C. (2004). *Mecánica vectorial para ingenieros: dinámica (Vol. 1)*. Pearson Educación.
- [52]. Pilipchuk, V. N. (2010). *Nonlinear dynamics: between linear and impact limits (Vol. 52)*. Springer Science & Business Media.
- [53]. Baik, I. C., Kim, K. H., & Youn, M. J. (2000). Robust nonlinear speed control of PM synchronous motor using boundary layer integral sliding mode control technique. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(1), 47-54.
- [54]. Sabanovic, A., Fridman, L. M., & Spurgeon, S. K. (2004). *Variable structure systems: from principles to implementation (Vol. 66)*. IET.
- [55]. Utkin, V. I. (1993). Sliding mode control design principles and applications to electric drives. *IEEE transactions on industrial electronics*, 40(1), 23-36.

## BIBLIOGRAFÍA

FILIPPOV, A. F. Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems. Springer Science & Business Media, 2013. (Vol. 18).

FLOREZ VARGAS, Julio Andelfo. Controladores híbridos y sus aplicaciones en regulación de circuitos convertidores de potencia CC-CC. Bucaramanga, Santander. Trabajo de grado (M.Sc. Ingeniería Electrónica). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones.

GULDNER, J.; SHI, J. y UTKIN, V. Sliding mode control in electro-mechanical systems. CRC press, 2009. (Vol. 34).

LI, W. y SLOVINE, J. J. E. Applied nonlinear control. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1991. (Vol. 199, No. 1).