COMPLEMENTACIÓN EN EL RETÍCULO DE TOPOLOGÍAS DE ALEXANDROFF

ANDREA MARTÍNEZ DÍAZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

COMPLEMENTACIÓN EN EL RETÍCULO DE TOPOLOGÍAS DE ALEXANDROFF

ANDREA MARTÍNEZ DÍAZ

Trabajo de grado para optar al título de
Matemática

Director
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer a mi madre que siempre me apoyó y motivó a seguir estudiando. Al Dr. Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, director de esta tesis por su orientación y paciencia durante el desarrollo de este proyecto.

A todos mis profesores por su invaluable contribución a mi formación académica, y a mis compañeros, quienes hicieron de esta experiencia un proceso más ameno y gratificante.

A mis amigas Ana y Danna por ser mi apoyo incondicional a lo largo de los años, sus palabras de ánimo y amistad han sido un pilar fundamental en mi camino.

CONTENIDO

pág.

Introducción **8**

1. Retículos **10**

1.1. Retículos completos y complementados 11

1.2. El retículo $CO(X)$ de los cuasiórdenes en X 17

1.3. $CO(X)$ es complementado 24

2. Retículos de topologías **31**

2.1. El retículo $TOP(X)$ 31

2.2. Topologías de Alexandroff 32

2.2.1. $A(X)$ es un retículo 35

2.2.2. Teorema de representación 36

2.2.3. $CO(X)$ y $A(X)$ son retículos isomorfos 39

2.3. Topologías primales 42

Bibliografía **51**

LISTA DE FIGURAS

pág.

1.1. Un ejemplo de orden parcial 11
1.2. $(X, \leq)$ 13
1.3. $(E(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ 15
1.4. $(E(\mathbb{R}^3), \subseteq)$ 15
1.5. $(E(\mathbb{R}^n), \subseteq)$ 15
1.6. Retículos de subespacios vectoriales 15
1.7. (X, R) 20
1.8. (X, S). 20
1.9. $CT(R \cup S)$ 20
1.10. Dos cuasiórdenes sobre X. 20
1.11. $(X, \leq)$ 22
1.12. $(X, \leq^*)$ 22
1.13. $CT(\leq \cup \leq^*)$ 22
1.14. $(X, \lesssim)$ y su complemento $(X, \leq^*)$. 22
1.15. $(\mathbb{N}, \leq^*)$ 23
1.16. $(\mathbb{N}, \leq_2)$ 23
1.17. $(\mathbb{N}, \leq_3)$ 23
1.18. (X, $\sqsubseteq$) 24
1.19. (X, $\sqsubseteq^p$) 25
1.20. $(X, \lesssim)$ 27
1.21. $(X, \lesssim^{p^*})$ 27
1.22. Cuasiorden conexo y un complemento suyo 27
1.23. $(X, \lesssim)$ 30
1.24. $(X, \sqsubseteq_1)$ 30
1.25. $(X, \sqsubseteq_2)$ 30
1.26. $(X, \lesssim)$ y dos de sus complementos. 30

2.1. $(2^{<\omega}, \lesssim)$ 46
2.2. $(X, \lesssim)$ 49
2.3. $(X, \leq)$ 50

RESUMEN

TÍTULO: COMPLEMENTACIÓN EN EL RETÍCULO DE TOPOLOGÍAS DE ALEXANDROFF *

AUTOR: ANDREA MARTÍNEZ DÍAZ **

PALABRAS CLAVE: RETÍCULO, TOPOLOGÍAS DE ALEXANDROFF, RETÍCULO COMPLEMENTADO.

DESCRIPCIÓN:

Un retículo L es un conjunto ordenado en el cual, para cualquier par de elementos, existe el supremo e ínfimo. Además, se dice que es un retículo complementado si, para cada elemento x en el retículo, existe y tal que el supremo e ínfimo de estos son el elemento máximo y el elemento mínimo del retículo, respectivamente.

En este trabajo, se estudian algunos retículos complementados, en particular, $A(X)$ el retículo de las topologías de Alexandroff, y $CO(X)$ el retículo de los cuasiórdenes sobre X. Se demuestra que estos son retículos isomorfos y se utiliza en la prueba de que $A(X)$ es complementado. También presentamos un resultado obtenido por Menix y Richmond sobre un tipo especial de topologías de Alexandroff, $FA(X)$ las topologías primales sobre X.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: COMPLEMENTATION IN THE LATTICE OF ALEXANDROFF TOPOLOGIES. *

AUTHOR: ANDREA MARTÍNEZ DÍAZ **

KEYWORDS: LATTICE, ALEXANDROFF TOPOLOGIES, COMPLEMENTED LATTICE.

DESCRIPTION:

A lattice L is an ordered set in which, for any pair of elements, there exists the supremum and infimum. Moreover, it is said to be a complemented lattice if, for each element x in the lattice, there exists y such that the supremum and infimum of these are the maximum and minimum elements of the lattice, respectively.

In this paper, we study some complemented lattices, in particular, $A(X)$ the lattice of Alexandroff topologies, and $CO(X)$ the lattice of quasi-orders over X. It is shown that these are isomorphic lattices and used in the proof that $A(X)$ is complemented. We also present a result obtained by Menix and Richmond about a special type of Alexandroff topologies, $FA(X)$ primal topologies over X.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

Introducción

Un retículo es un conjunto L ordenado tal que cualquier par de elementos x, y de L tiene ínfimo y supremo, denotados por $x \wedge y$ y $x \vee y$, respectivamente. Si esta propiedad se cumple para cualquier subconjunto no vacío de L, el retículo se dice que es completo.
Un ejemplo importante de retículo es el conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$, ordenado por inclusión $\subseteq$. Este retículo no solo es completo, sino que también tiene a X como elemento máximo y a $\emptyset$ como mínimo. Además, cada subconjunto $A \subseteq X$ tiene un complemento, es decir, existe un conjunto B tal que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$.
En un retículo L, cuando existen el mínimo y el máximo, se denotan por $\perp$ y $\top$, respectivamente. Diremos que L es complementado si, para todo $x \in X$, existe $y \in X$ tal que $x \vee y = \top$ y $x \wedge y = \perp$.
En este trabajo se estudiarán dos retículos particulares y fundamentales. Específicamente, nos enfocamos en el retículo $A(X)$ de las topologías de Alexandroff y $CO(X)$ de los cuasiórdenes sobre X. Recordemos que una topología es de Alexandroff si la intersección arbitraría de conjuntos abiertos es un abierto y un cuasiorden es una relación reflexiva y transitiva. El orden para ambos retículos es la contenencia $\subseteq$ (en el caso de $CO(X)$, los cuasiórdenes se ven como subconjuntos de $X \times X$).
Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar que ambos retículos son complementados. Este es un teorema debido a Steiner [1] del año 1966. La demostración de que $CO(X)$ es un retículo complementado sigue el enfoque general presentado en el libro de Richmond [2]. No obstante, en este trabajo incorporamos argumentos suplementarios que no aparecen en el texto original. Adicionalmente, presentaremos ejemplos concretos para ilustrar y fortalecer los conceptos teóricos abordados.
Para mostrar que $A(X)$ también es un retículo complementado es suficiente demostrar que $A(X)$ es isomorfo a $CO(X)$. Para este resultado hace falta demostrar un teorema, fundamental para el estudio de $A(X)$, que establece que toda topología de Alexandroff es de especialización. Recordemos que si $\preceq$ es un cuasiorden sobre X la topología de especialización asociada a $\preceq$, denotada $\tau[\preceq]$, consiste de los conjuntos $\preceq$-creciente; es decir, los conjuntos $A \subseteq X$ tales que para todo $x \in A$ y para todo $y \in X$ con $x \preceq y$ se

[1] A. K. Steiner. "The Lattice of Topologies: Structure and Complementation". En: *Transactions of the American Mathematical Society* 122.2 (1966), págs. 379-398. URL: `http://www.jstor.org/stable/1994555` (visitado 23-09-2023).

[2] Tom Richmond. *General Topology: An Introduction*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2020.

tiene que $y \in A$. De manera equivalente, una base para la topología $\tau[\preceq]$ viene dada por los conjuntos de la forma:

$$N(x) = \{y \in X : \ x \preceq y\}.$$

Un tipo especial de topologías Alexandroff que ha recibo atención en los últimos años son las topologías primales [3], también llamadas funcional Alexandroff [4] pues están asociadas a funciones de X en X. Mas precisamente, la topología primal asociada a una función $f : X \to X$ está conformada por los subconjuntos A de X tales que $f^{-1}(A) \subseteq A$. En la sección 2.3 daremos una breve introducción al retículo $FA(X)$ de las topologías primales sobre X. Veremos que las topologías primales son de Alexandroff y además mostraremos que, en efecto, $FA(X)$ ordenado por $\subseteq$ es un retículo cuando X es finito [3].

---

3 Jacob Menix y Tom Richmond. “The lattice of functional Alexandroff topologies”. En: *Order* 38 (2021), págs. 1-11. URL: `https://rdcu.be/dmeSF`.

4 Fatemah Ayatollah Zadeh Shirazi y Nasser Golestani. “Functional Alexandroff spaces”. En: *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 40.4 (2011), págs. 515-522.

1. Retículos

En este capítulo introduciremos los conceptos relacionados con retículos. Demostraremos que $CO(X)$ (la colección de todos los cuasiórdenes sobre X) es un retículo complementado; este resultado es la clave para mostrar uno de los objetivos de este trabajo: la colección de las topologías Alexandroff sobre un conjunto es un retículo complementado.

Comenzaremos recordando algunas nociones que son necesarias para introducir el concepto de retículo. Un **cuasiorden** $\lesssim$ en un conjunto X es una relación reflexiva y transitiva en X, es decir, $x \lesssim x$ para todo $x \in X$, y para todo $x, y, z \in X$ si $x \lesssim y$ y $y \lesssim z$, entonces $x \lesssim z$. Diremos que $\lesssim$ es un **orden** si además es antisimétrico.
Dado $B \subseteq X$ donde $(X, \lesssim)$ es un conjunto cuasiordenado,

$$i(B) = \{x \in X : b \lesssim x \text{ para algún } b \in B\},$$

y se dice que B es un **conjunto creciente** si $B = i(B)$. Es decir, B es creciente si

$$\forall x \in B, \forall y \in X (x \lesssim y \rightarrow y \in B).$$

De manera dual,

$$d(B) = \{x \in X : x \lesssim b \text{ para algún } b \in B\},$$

y B es llamado un conjunto **decreciente** si $B = d(B)$. Es decir, B es decreciente si

$$\forall x \in B, \forall y \in X (y \lesssim x \rightarrow y \in B).$$

Definición 1.0.1. *Sea $(X, \leq)$ un orden.*

a. Un elemento $a \in X$ es un **máximo** *si $x \leq a$ para todo $x \in X$.*

b. a es **maximal** *si no existe $x \in X$ tal que $a < x$.*

c. Para $A \subseteq X$, $x \in X$ es una **cota superior** *de A si $x \geq a$ para todo $a \in A$. Si el conjunto Ub(A) de cotas superiores de A tiene un elemento mínimo w, entonces w se llama* **supremo** *de A, denotado por $\sup A$ o $\vee A$. En el caso que A tenga solo dos elementos x e y, denotaremos el supremo por $x \vee y$.*

Los conceptos duales a los de la definición anterior son elemento **mínimo**, elemento **minimal**, **cota inferior** de un conjunto e **ínfimo**, este último para un conjunto de dos elementos $\{x, y\}$ se denota como $x \wedge y$ y $\wedge A$ en el caso del ínfimo de un conjunto A. El supremo y el ínfimo cumplen la ley de idempotencia, conmutatividad y asociatividad.
Todo cuasiorden $\lesssim$ en un conjunto X tiene asociado un cuasiorden inverso $\lesssim^*$ definido por

$$x \lesssim^* y \text{ si y solo si } y \lesssim x.$$

Ahora daremos la definición de cuasiórdenes isomorfos.

Definición 1.0.2. *Dos cuasiórdenes $(X, \leq_X)$ y $(Y, \leq_Y)$ son isomorfos si existe una función biyectiva $f : X \to Y$ tal que*

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \leq_X x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq_Y f(x_2))$$

1.1. Retículos completos y complementados

Definición 1.1.1. *Un* **retículo** *es un conjunto ordenado $(L, \leq)$ en el cual cualquier par de elementos x, y tienen ínfimo y supremo.*

Un retículo $(L, \leq)$ es **completo** si todo subconjunto no vacío de L tiene ínfimo y supremo. Un **subretículo** de un retículo $(L, \leq)$ es un subconjunto A de L tal que el supremo e ínfimo de elementos de A (calculados en L) pertenecen a A. Si se cumple que el supremo (e ínfimo) de un subconjunto arbitrario de A pertenece a A, entonces diremos que A es un **subretículo completo**.

Ejemplo 1.1.2. *En la figura 1.1, el conjunto $X = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c, \}, \emptyset\}$ ordenado por la inclusión no es un retículo, pues $\{a\} \vee \{c\}$ no existe.*

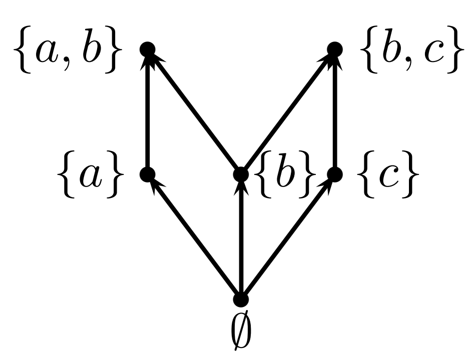

Figura 1.1: Un ejemplo de orden parcial

Si un retículo tiene elemento mínimo, se denota como $\perp$, y si tiene elemento máximo, se denota como $\top$. Un retículo es **acotado** si tiene $\top$ y $\perp$.

Lema 1.1.3. *Sea $(L, \leq)$ un retículo. Si $z, w \in L$ entonces*

a. *z es máximo si y solo si*
$$(\forall x \in L)(x \vee z = z).$$

b. *w es mínimo si y solo si*
$$(\forall x \in L)(x \wedge w = w).$$

Demostración. Probaremos la parte 1.

$(\Rightarrow)$ Sea $z \in L$ máximo. Entonces es cota superior para todo $x \in X$. Suponga que existe $x, y \in X$ tales que
$$x \vee z = y.$$
De donde $z \leq y$ como $z = \top$ se tiene que $y \leq z$, pero como L es un retículo se tiene que $z = y$.

$(\Leftarrow)$ Si para todo $x \in L$ se cumple que $x \vee z = z$, entonces z es cota superior de X, de donde es elemento máximo, es decir $z = \top$.

El caso del mínimo se aborda de manera análoga. $\square$

Definición 1.1.4. *Sea L un retículo acotado y $a \in L$. Un* **complemento** *(en el retículo) de a es un elemento $b \in L$ tal que $a \vee b = \top$ y $a \wedge b = \perp$.*

Un elemento de un retículo acotado puede no tener complemento, o puede tener varios complementos. Un retículo acotado en el que cada elemento tiene un complemento se llama retículo **complementado**, si además este complemento es único se dice que es **retículo único complementado**.

Ejemplo 1.1.5. *En la figura 1.2 se ilustra $(X, \leq)$, un retículo acotado con $\top = g$ y $\perp = a$. Sin embargo no es complementado pues d no tiene complemento.*

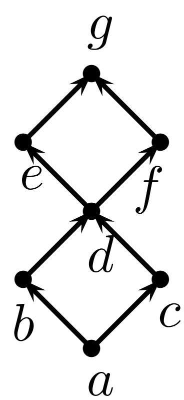

Figura 1.2: $(X, \leq)$

Teorema 1.1.6. $\mathcal{P}(X)$ *es un retículo completo y complementado.*

Otro ejemplo interesante de retículo complementado es el siguiente. Sea V un espacio vectorial y $E(V)$ la colección de todos los subespacios vectoriales de V ordenados por inclusión. Mostraremos que $E(V)$ es un retículo complementado.

Teorema 1.1.7. Teorema del subespacio: *Un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si y solo si W cumple con las siguientes tres condiciones:*

a. *El vector cero está en W: $\mathbf{0} \in W$.*

b. *La cerradura bajo la suma: Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pertenecen a W, entonces su suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ también pertenece a W.*

c. *La cerradura bajo la multiplicación por escalar: Si $\mathbf{u}$ pertenece a W y c es un escalar, entonces $c\mathbf{u}$ también pertenece a W.*

Si W, U son subespacios de V, entonces $W \cap U$ es un subespacio de V, pues cumple las condiciones del Teorema 1.1.7. En consecuencia

$$W \wedge U = W \cap U.$$

Es evidente que la intersección $W \cap U$ constituye el subespacio vectorial más grande de V que está contenido en W y U. Esto se puede extender a una colección de subespacios $\{U_i : i \in I\}$ de $E(V)$:

$$\bigwedge \{U_i : i \in I\} = \bigcap_{i \in I} U_i. \tag{1.1}$$

Definición 1.1.8. *Sean U y W subespacios de un espacio vectorial V. La suma de U y W, denotada como $U + W$, está definida por*

$$U + W = \{v \in V \mid v = u + w, \text{ para } u \in U \text{ y } w \in W\}.$$

Más generalmente, la suma de cualquier colección de subespacios $\{U_i : i \in I\}$ es el conjunto de todas la sumas finitas de vectores de $\bigcup_{i\in I} U_i$:

$$\sum_{i\in I} U_i = \left\{ u_1 + u_2 + \cdots + u_n \mid u_j \in \bigcup_{i\in I} U_i \right\}.$$

Se tiene que $\sum_{i\in I} U_i$ está en $E(V)$. De donde

$$W \vee U = W + U \tag{1.2}$$

Pues si existiera $Z \in E(V)$ con $W \subseteq Z$ y $U \subseteq Z$ tal que $Z \subseteq W + U$ y $Z \neq W + U$. Entonces existe $v \in W + U$ y $v \notin Z$. Pero $v = w + u$ con $w \in W$ y $u \in U$. Como $Z \in E(V)$ y contiene a W y a U se debe tener que $v \in Z$.

Claramente $\sum_{i\in I} U_i$ está en $E(V)$. De donde

$$\bigvee \{U_i : i \in I\} = \sum_{i\in I} U_i \tag{1.3}$$

El siguiente teorema es un resultado bien conocido del álgebra lineal.

Teorema 1.1.9. *Cualquier subespacio de un espacio vectorial V tiene un complemento, es decir, si U es un subespacio de V, entonces existe un subespacio W tal que $V = U \oplus W$.*

Todo lo anterior se resume en el siguiente resultado.

Teorema 1.1.10. *$E(V)$ es un retículo completo y complementado.*

Demostración. Por las ecuaciones 1.1 y 1.3 se concluye que $E(V)$ es un retículo completo. Veamos que es complementado. Sea $W \in E(V)$. Por el teorema 1.1.9 se tiene que existe $U \in E(V)$ tal que

$$V = W \oplus U. \tag{1.4}$$

Entonces U es un complemento de W pues

$$W \cap U = \{0\} = \perp_{E(V)}$$

y

$$W + U = V = \top_{E(V)}.$$

Es decir U es un complemento de W, por lo tanto $E(V)$ es complementado. $\square$

Ejemplo 1.1.11. *En la figura 1.6 se exponen tres ejemplos de retículos de subespacios vectoriales. En 1.3 se logra apreciar que los subespacios de $\mathbb{R}^2$ son de "un solo tipo", las rectas que pasan por el origen. Similarmente en $\mathbb{R}^3$ los subespacios son las rectas que pasan por el origen y están contenidas en distintos planos que pasan por el origen (2 tipos). Extendiendo este razonamiento a $\mathbb{R}^n$ hay $n-1$ tipos de subespacios ordenados como se ve en 1.5.*

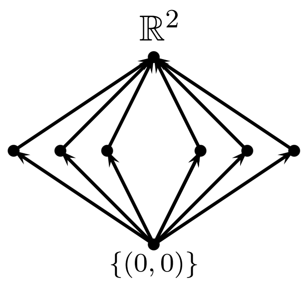

Figura 1.3: $(E(\mathbb{R}^2), \subseteq)$

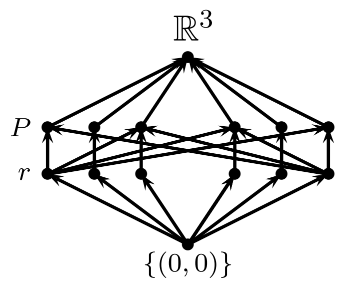

Figura 1.4: $(E(\mathbb{R}^3), \subseteq)$

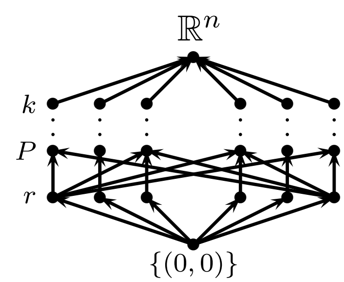

Figura 1.5: $(E(\mathbb{R}^n), \subseteq)$

Figura 1.6: Retículos de subespacios vectoriales

Ahora veremos un resultado que nos ayudará a probar que un retículo es completo.

Lema 1.1.12. *Si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado con máximo $\top$, entonces $(X, \leq)$ es un retículo completo si y solo si $\inf(A)$ existe para todo subconjunto no vacío $A \subseteq X$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Si $(X, \leq)$ es un retículo completo, por definición se tiene que $\inf(A)$ existe para todo subconjunto no vacío $A \subseteq X$.

($\Leftarrow$) Basta probar que existe $\sup(A)$ para todo subconjunto no vacío $A \subseteq X$. Sea Ub(A) el conjunto de las cotas superiores de A, se tiene que Ub$(A) \neq \emptyset$ pues $a \leq \top$ para todo $a \in A$, por hipótesis existe $b = \inf(\text{Ub}(A))$, veamos que $b \in$ Ub(A).
Sea $a \in A$, si $x \in$ Ub(A), entonces $a \leq x$, es decir a es una cota inferior de Ub(A), así $a \leq b = \inf(\text{Ub}(A))$ para todo $a \in A$, por lo que b es una cota superior de A, así $b \in$ Ub(A), por lo tanto X es un retículo completo.

$\square$

El siguiente es un resultado análogo al anterior.

Lema 1.1.13. *Si $(X, \leq)$ es un conjunto ordenado con mínimo $\perp$, entonces $(X, \leq)$ es un retículo completo si y solo si $\sup(A)$ existe para todo subconjunto no vacío $A \subseteq X$.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Si $(X, \leq)$ es un retículo completo, por definición se tiene que $\sup(A)$ existe para todo subconjunto no vacío $A \subseteq X$.

($\Leftarrow$) Basta probar que existe $\inf(A)$ para todo subconjunto no vacío $A \subseteq X$. Sea $\mathsf{lb}(A)$ el conjunto de las cotas inferiores de A, se tiene que $\mathsf{lb}(A) \neq \emptyset$ pues $a \leq \perp$ para todo $a \in A$, por hipótesis existe $b = \sup(\mathsf{lb}(A))$, veamos que $b \in \mathsf{lb}(A)$.
Sea $a \in A$, si $x \in \mathsf{lb}(A)$, entonces $a \leq x$, es decir a es una cota superior de $\mathsf{lb}(A)$, así $a \leq b = \sup(\mathsf{lb}(A))$ para todo $a \in A$, por lo que b es una cota inferior de A, así $b \in \mathsf{lb}(A)$, por lo tanto X es un retículo completo.

□

Definición 1.1.14. *Si L y M son retículos, un isomorfismo de retículos es una función biyectiva $f : L \to M$ que preserva $\vee$ y $\wedge$, es decir, $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ y $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ para todo $x, y \in L$.*

En caso que exista un isomorfismo entre M y L diremos que esos retículos son isomorfos. A continuación mostraremos una propiedad entre retículos isomorfos: todo isomorfismo envía supremo a supremo e ínfimo a ínfimo.

Lema 1.1.15. *Sean M y L retículos acotados y $f : L \to M$ un isomorfismo de retículos, entonces $f(\top_L) = \top_M$ y $f(\perp_L) = \perp_M$.*

Demostración. Sea $y \in M$, por ser f sobreyectiva, existe un (único) elemento $x \in L$ tal que $y = f(x)$. Luego, se tiene que

$$y \vee f(\top_L) = f(x) \vee f(\top_L) = f(x \vee \top_L) = f(\top_L)$$

y

$$f(x) \wedge f(\perp_L) = f(x \wedge \perp_L) = f(\perp_L),$$

por el Lema 1.1.3 se tiene que $f(\top_L) = \top_M$ y $f(\perp_L) = \perp_M$. □

Teorema 1.1.16. *Si L y M son retículos isomorfos y L es complementado, entonces M también lo es.*

Demostración. Sea f un isomorfismo de retículos entre L y M, es decir, $f : L \to M$ es biyectiva y satisface que $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ y $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ para todos los x, y en L.

Tome $w \in M$, veamos que w tiene un complemento. Como f es biyectiva existe un único $x \in L$ tal que $f(x) = w$. Dado que L es complementado existe $y \in L$ tal que $x \vee y = \top_L$ y $x \wedge y = \bot_L$. Con $\top_L, \bot_L \in L$. De donde

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = f(\top_L)$$

y

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = f(\bot_L).$$

Por el Lema 1.1.15 sabemos que $f(\top_L) = \top_M$ y $f(\bot_L) = \bot_M$, de donde $f(y)$ es complemento de w, es decir M es un retículo complementado. □

1.2. El retículo $CO(X)$ de los cuasiórdenes en X

Recordemos que un cuasiorden $\lesssim$ en un conjunto X es una relación reflexiva y transitiva en X, es decir, $x \lesssim x$ para todo $x \in X$, y para todo $x, y, z \in X$ si $x \lesssim y$ y $y \lesssim z$, entonces $x \lesssim z$.

Definición 1.2.1. *Denotaremos por $CO(X)$ al conjunto de todos los cuasiórdenes sobre X ordenados por inclusión invertida (vistas como relaciones binarias sobre X).*

Veamos que $CO(X)$ es un retículo. El orden en $CO(X)$ lo denotaremos por $\leq_{CO}$ y viene dado por

$$R_1 \ \leq_{CO} \ R_2 \iff R_1 \supseteq R_2.$$

Sean $R_1, R_2 \in CO(X)$. Tenemos que:

a. $R_1 \cap R_2 \in CO(X)$.

   a) $(x, x) \in R_1 \cap R_2$ para todo $x \in X$ pues R_1 y R_2 son reflexivas.

   b) si $(x, y), (y, z) \in R_1 \cap R_2$ entonces $(x, y), (y, z) \in R_i$ y por lo tanto $(x, z) \in R_i$, para $i = 1, 2$, pues son transitivas. Es decir $R_1 \cap R_2$ es transitiva.

b. $R_1 \vee R_2 \ = \ R_1 \cap R_2$

$$R_1 \ \leq_{CO} \ R_1 \cap R_2$$

$$R_2 \ \leq_{CO} \ R_1 \cap R_2$$

pues $R_1 \supseteq R_1 \cap R_2$ y $R_2 \supseteq R_1 \cap R_2$.

Suponga R^* tal que

$$R_1 \leq_{CO} R^*$$

$$R_2 \leq_{CO} R^*$$

entonces $R_1 \supseteq R^*$ y $R_2 \supseteq R^*$, de donde $R_1 \cap R_2 \supseteq R^*$, es decir $R_1 \cap R_2 \leq_{CO} R^*$. Por lo tanto

$$R_1 \vee R_2 = R_1 \cap R_2. \tag{1.5}$$

Para mostrar que existe el ínfimo de dos cuasiórdenes necesitaremos el concepto de clausura transitiva.

Definición 1.2.2. *Sea $R \subseteq X \times X$, entonces $(x, y) \in CT(R)$ si y solo si existen $x_1, \cdots, x_n$ tales que:*

a. $x_1 = x$ *y* $x_n = y$.

b. $(x_i, x_{i+1}) \in R$ *para todo* $i = 1, \cdots, n-1$.

Lema 1.2.3. *Sea $R \subseteq X \times X$, entonces $CT(R)$ es la relación transitiva sobre X más pequeña que contiene a R.*

Demostración.

a. Sea $(x, y) \in R$ entonces existen $x = x_1, x_2 = y$ tales que $(x, y) \in R$, de donde $(x, y) \in CT(R)$.

b. Suponga $(x, y), (y, z) \in CT(R)$ entonces existen $x = x_1, \cdots, x_n = y$ tales que $(x_i, x_{i+1}) \in R$ para todo $i = 1, \cdots, n-1$ y $y = y_1, \cdots, y_m = z$ tales que $(y_j, y_{j+1}) \in R$ para todo $j = 1, \cdots, m-1$. De donde $x_n = y_1 = y$ y así $(x, z) \in CT(R)$, es decir $CT(R)$ es transitiva.

c. Suponga que R^* es una relación transitiva, más pequeña que $CT(R)$, que contiene a R, sea $(x, y) \in CT(R)$ y $(x, y) \notin R^*$, entonces existen $x = x_1, \cdots, x_n = y$ tales que $(x_i, x_{i+1}) \in R$ para todo $i = 1, \cdots, n-1$, como $R \subseteq R^*$ se tiene que $(x_i, x_{i+1}) \in R^*$ para todo $i = 1, \cdots, n-1$, y como es transitiva se tiene también que $(x, y) \in R^*$, lo que es una contradicción, por lo tanto se debe tener que $CT(R)$ es la relación transitiva sobre X más pequeña que contiene a R.

$\square$

Teorema 1.2.4. *Sean* $R, S \in CO(X)$*, entonces* $(x, y) \in CT(R \cup S)$ *si y solo si existen* $x_1, \cdots, x_n$ *tales que:*

a. $x_1 = x$ *y* $x_n = y$*.*

b. $(x_1, x_2) \in R$*,* $(x_2, x_3) \in S$*,* $(x_3, x_4) \in R, \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in S$*.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $(x, y) \in CT(R \cup S)$ entonces existen $x = x_1, \cdots, x_n = y$ tales que $(x_i, x_{i+1}) \in R \cup S$ para todo $i = 1, \cdots, n-1$. Por lo tanto $(x_i, x_{i+1}) \in R$ o $(x_i, x_{i+1}) \in S$. Suponga, sin pérdida de generalidad, que $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{k-1}, x_k) \in R$, por transitividad $(x_1, x_k) \in R$, para algún $2 \leq k \leq n$ y de esta manera $(x_k, x_{k+1}) \in S$ y continuando de esta forma hasta (x_{n-1}, x_n).

($\Leftarrow$) Si (x, y) cumple las condiciones 1 y 2, entonces cumple la definición 1.2.2 para $R \cup S$.

□

Ahora completamos la construcción del ínfimo en $CO(X)$. Tomamos $R_1, R_2 \in CO(X)$, se tiene que

a. $R_i \subseteq R_1 \cup R_2$ para $i = 1, 2$ y por el lema anterior, se tiene que $R_i \subseteq CT(R_1 \cup R_2)$. Es decir, $CT(R_1 \cup R_2) \leq_{CO} R_i$ para $i = 1, 2$.

b. Suponga $R^* \in CO(X)$ tal que

$$R^* \leq_{CO} R_1$$

$$R^* \leq_{CO} R_2.$$

Entonces $R^* \supseteq R_1$ y $R^* \supseteq R_2$, de donde $R^* \supseteq R_1 \cup R_2$, y por el Lema 1.2.3 se tiene que $R^* \supseteq CT(R_1 \cup R_2)$.

Por lo tanto,

$$R_1 \wedge R_2 = CT(R_1 \cup R_2). \tag{1.6}$$

$CO(X)$ es un retículo acotado, sus elementos máximo y mínimo son, respectivamente,

$$\top = \{(x, x) : x \in X\}$$

y

$$\bot = X \times X.$$

Son llamados también $\top$ orden discreto y $\bot$ orden antidiscreto.

Ejemplo 1.2.5. *Dado los cuasiórdenes R y S en la figura 1.7 y 1.8 se tiene que*

$$CT(R \cup S) = R \cup S \cup \{(c,b),(b,c),(d,c)\}.$$

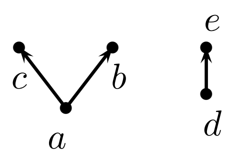

Figura 1.7: (X, R)

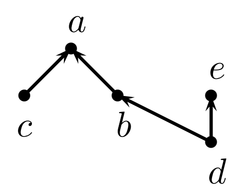

Figura 1.8: (X, S).

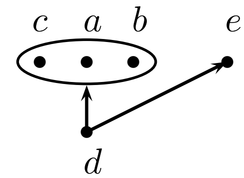

Figura 1.9: $CT(R \cup S)$

Figura 1.10: Dos cuasiórdenes sobre X.

Veremos más adelante que $CO(X)$ es complementado. Ahora mostraremos solo un caso particular que será útil para la prueba general. Recordemos que si $\leq$ es un cuasiorden, entonces $\leq^*$ denotara el cuasiorden inverso definido por

$$x \leq^* y \text{ si y solo si } y \leq x.$$

Definición 1.2.6. *Decimos que un conjunto cuasiordenado $(X, \lesssim)$ es* ***conexo*** *si, para cada par de puntos $x, y \in X$, existe una sucesión de puntos $x = x_0, x_1, \cdots, x_n = y \in X$ con $x_{k-1} \lesssim x_k$ o $x_k \lesssim x_{k-1}$ para $k = 1, \cdots, n$. Y diremos que existe un camino de x a y.*

El conjunto X con el orden S dado en la Figura 1.8 es un ejemplo de conjunto conexo.
A continuación mostraremos que la definición de conexidad de un conjunto cuasiordenado dada en 1.2.6 (desde el punto de vista de la teoría de grafos) es equivalente a la conexidad topológica respecto a la topología de especialización (ver 2.2.11).

Proposición 1.2.7. *Sea $(X, \lesssim)$ un conjunto cuasiordenado. Entonces $(X, \lesssim)$ es conexo si, y solo si, $(X, \tau[\lesssim])$ es conexo.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Suponga, por reducción al absurdo, que $(X, \tau[\lesssim])$ es disconexo. Sea U, V una separación de X. Escoja $x, y \in X$ con $y \in V$ y $x \in U$. Sea $x = x_0, \cdots, x_n = y$ una sucesión de puntos en X que cumplen $x_{k-1} \lesssim x_k$ o $x_k \lesssim x_{k-1}$ para $k = 1, \cdots, n$. Todo abierto básico es orden-conexo: Si $w, z \in N_y$, entonces w, y, z es un camino que une a w con z, pues $y \leq z$ y $w \geq y$. Por lo tanto N_x y N_y son orden conexos, como existe un camino de x a y se tiene que

$$\{x, y\} \subseteq N_x \cap N_y.$$

De donde $U \cap V \neq \emptyset$, lo que es una contradicción, por lo tanto $(X, \tau[\lesssim])$ debe ser conexo.

($\Leftarrow$) Suponga por contradicción que $(X, \lesssim)$ no es conexo, entonces existen $x, y \in X$ con $x \neq y$, tales que no existen $x_1 = x, \cdots, x_n = y$ en X con $x_{k-1} \lesssim x_k$ o $x_k \lesssim x_{k-1}$ para $k = 1, \cdots, n$. Entonces $y \not\lesssim x$ y $x \not\lesssim y$, de donde

$$y \notin N_x^{\tau[\lesssim]} = \{z \in X : x \lesssim z\}$$

$$x \notin N_y^{\tau[\lesssim]} = \{z \in X : y \lesssim z\}.$$

Esto quiere decir que cualquier abierto en $\tau[\lesssim]$ que contenga a x no contiene a y; del mismo modo con los abiertos que contiene a y. Haciendo

$$U_x = \{z \in X : \text{ Existe una camino entre } z \text{ y } x\}.$$

Sea $z \in U_x$, entonces $N_z \subseteq U_x$ pues como para todo $w \in N_z$ se tiene que $z \lesssim w$, y ya existe un camino entre z y x, por lo tanto existe un camino entre w y x. Es decir U_x es abierto.

Sea

$$V = X \setminus U_x.$$

Entonces $y \in V$, sea $w \in N_y$, si $w \in U_x$ entonces existe un camino de y a x, por lo tanto necesariamente $w \in V$, es decir $N_y \subseteq V$. De donde V es abierto.

Así V es abierto y cerrado, de donde $(X, \tau[\lesssim])$ es disconexo, que es una contradicción. Por lo tanto $(X, \lesssim)$ debe ser conexo.

$\square$

Proposición 1.2.8. *Sea $\leq$ un orden conexo sobre un conjunto X, entonces $\leq^*$ es un complemento para $\leq$.*

Demostración.

a. $\leq \vee \leq^* = \leq \cap \leq^* = \{(x,x) : x \in X\}$. En efecto, si $(x,y) \in \leq \cap \leq^*$, entonces $x \leq y$ y $y \leq x$. Como $\leq$ es antisimétrico, entonces $x = y$.

b. $\leq \wedge \leq^* = X \times X$. Sea $(x,y) \in X \times X$, recordemos que $\leq \wedge \leq^*$ es la clausura transitiva de $\leq \cup \leq^*$. Como $\leq$ es conexo, entonces existe un camino en $(X, \leq)$ que une a x con y, lo que muestra que (x,y) está en la clausura transitiva de $\leq \cup \leq^*$ (ver el Teorema 1.2.4).

□

En la figura 1.14 se ilustra un ejemplo de orden dual $\leq^*$ de un orden conexo $\leq$.

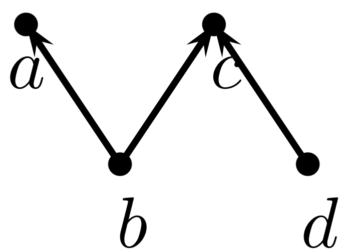

Figura 1.11: $(X, \leq)$

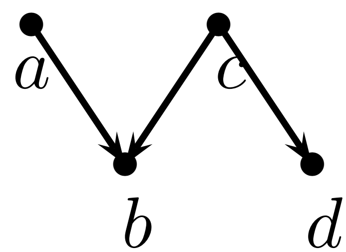

Figura 1.12: $(X, \leq^*)$

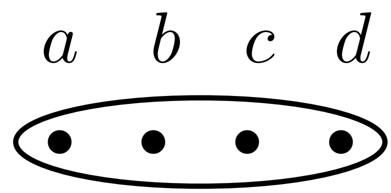

Figura 1.13: $CT(\leq \cup \leq^*)$

Figura 1.14: $(X, \lesssim)$ y su complemento $(X, \leq^*)$.

Ejemplo 1.2.9. *Sea* $(\mathbb{N}, \leq)$ *el orden usual de* $\mathbb{N}$*. Entonces* $\leq^*$ *es un complemento de* $\leq$ *por la proposición anterior. Definiremos otro complemento para* $\leq$*.*
Considere $\leq_2$ *definido de la siguiente manera*

$$2k + 2 \leq_2 2k, \tag{1.7}$$

y

$$2k + 3 \leq_2 2k + 1 \tag{1.8}$$

para $k \in \mathbb{N}$*.*

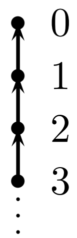

Figura 1.15: $(\mathbb{N}, \leq^*)$

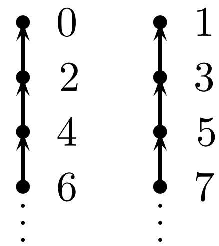

Figura 1.16: $(\mathbb{N}, \leq_2)$

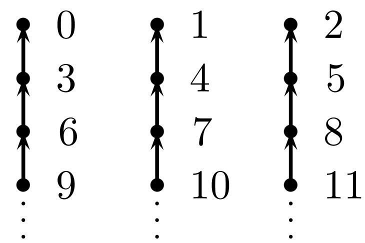

Figura 1.17: $(\mathbb{N}, \leq_3)$

Veamos que $\leq \vee \leq_2 = \top$. *Sea* $(x, y) \in \leq \cap \leq_2$, *entonces*

$$x \leq y \wedge x \leq_2 y.$$

Luego x, y *son ambos impares o pares, pues en* $\leq_2$ *no son comparables pares con impares. De donde* $x \geq y$, *por lo tanto* $x = y$. *Es decir* $\leq \wedge \leq_2 = \{(x, x) : x \in X\}$.
Ahora mostraremos que $\leq \vee \leq_2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. *Sea* $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. *Hay dos posibles casos:*

a. $x \leq y$, *de donde* $(x, y) \in CT(\leq \cup \leq_2)$.

b. $y < x$. *Si* x, y *son ambos pares o ambos impares entonces* $x \leq_2 y$ *y así* $(x, y) \in CT(\leq \cup \leq_2)$. *Suponga sin pérdida de generalidad que* $y = 2n + 1$ *y* $x = 2m$ *para algún* $m, n \in \mathbb{N}$. *Como* $2n + 1 < 2m$ *(*$y \leq 2m$*) entonces* $2n \leq 2m$, *es decir* $2m \leq_2 2n$; *además* $2n \leq 2n + 1$ *de donde* $(x, y) \in CT(\leq \cup \leq_2)$.

   Por lo tanto $\leq_2$ *es un complemento para* $\leq$.

El orden $\leq_2$ *no es isomorfo a* $\leq^*$ *ya que* $(\mathbb{N}, \leq^*)$ *tiene a* 0 *como máximo mientras* $(\mathbb{N}, \leq_2)$ *no tiene máximo.*

Realmente $\leq$ *tiene infinitos complementos como veremos a continuación. Considere las clases de equivalencia respecto a la relación de dividir módulo* i, *donde* i *es un natural cualquiera mayor que 1. Entonces ordenamos cada clase usando* $\leq^*$ *(similar a las ecuaciones 1.7 y 1.8) pero elementos de diferentes clases no son comparables. Ese orden lo denotamos por* $\leq_i$. *Observe que las componentes conexas de* $(\mathbb{N}, \leq_i)$ *son las clases de equivalencia en* $\mathbb{N}/i\mathbb{N}$. *Por ejemplo, el orden* $\leq_3$ *dado en la figura 1.17. Pues haciendo un razonamiento similar al anterior se puede demostrar que se puede ir de* x *a* y *en* $\mathbb{N}$ *avanzando con* $\leq$ *y retrocediendo con* $\leq_i$ *para* $i \in \mathbb{N}$. *Igualmente se tiene* $\leq \cap \leq_i = \{(x, x) : x \in \mathbb{N}\}$, *pues los órdenes* $\leq_i$ *están contenidos en* $\leq^*$.

En relación con el ejemplo anterior tenemos la siguiente observación.

Proposición 1.2.10. *Sea $(X, \leq)$ un orden lineal y $\sqsubseteq$ un complemento para $\leq$. Entonces $\sqsubseteq$ está contenido en $\leq^*$.*

Demostración. Suponga que $x \sqsubseteq y$. Entonces $x \not\leq y$ por ser $\sqsubseteq$ un complemento de $\leq$. Como $\leq$ es lineal, entonces $y < x$, es decir $x \leq^* y$. $\square$

1.3. $CO(X)$ es complementado

Sea $(X, \lesssim)$ un conjunto cuasiordenado. Para mostrar un complemento a $(X, \lesssim)$ necesitamos dos construcciones auxiliares.
Primero mostraremos como asociarle un orden a un cuasiorden $(X, \sqsubseteq)$. El objetivo es eliminar los casos donde falla la antisimetría de $\sqsubseteq$ sin cambiar nada más.

Proposición 1.3.1. *Sea $(X, \sqsubseteq)$ un conjunto cuasiordenado. Considere la relación sobre X dada por*

$$x \sqsubseteq^p y \Leftrightarrow (x = y) \vee ((x \sqsubseteq y) \wedge (y \not\sqsubseteq x)).$$

Entonces, $(X, \sqsubseteq^p)$ es un orden.

El conjunto ordenado resultante $(X, \sqsubseteq^p)$ se llama la **división paralela** del cuasiorden $(X, \sqsubseteq)$.
Veamos un ejemplo. Suponga que $(X, \sqsubseteq)$ viene dado por el siguiente diagrama. (Las Figuras 1.18 y 1.19 fueron tomadas y adaptadas de Richmond, *General Topology: An Introduction*).

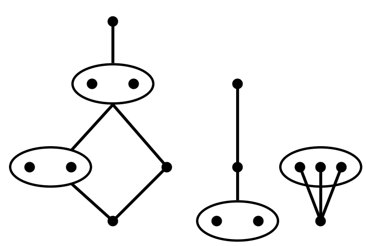

Figura 1.18: (X, $\sqsubseteq$)

Entonces $(X, \sqsubseteq^p)$ corresponde al siguiente orden.

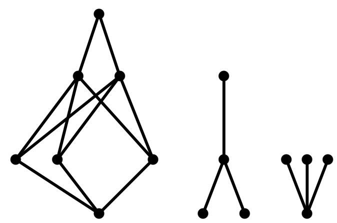

Figura 1.19: (X, $\sqsubseteq^p$)

Lema 1.3.2. *Sea* $(X, \lesssim)$ *un conjunto cuasiordenado conexo,* $x, y \in X$*. Si* $C_1 = (x_0, \ldots, x_n)$ *es un camino de* x *a* y*, entonces podemos obtener un camino* $C_2 = (x_0, x_{k_0}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_m})$ *de* x *a* y *con* $\{k_n\}_{n=0}^m \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ *para algún* $m \leq n$ *tal que*

$$x_0 \lesssim x_{k_0} \gtrsim x_{k_1} \cdots \lesssim x_n \vee x_0 \gtrsim x_{k_0} \lesssim x_{k_1} \cdots \lesssim x_n.$$

Demostración. Suponga sin pérdida de generalidad que se tiene

$$x_0 \lesssim x_1 \lesssim x_2 \lesssim \cdots \lesssim x_{k_0} \gtrsim x_{k+1} \cdots$$

para algún $0 < k_0 \leq n$. Por transitividad $x_0 \lesssim x_{k_0}$. De esta manera podemos elegir los elementos de $\{k_n\}_{n=0}^m$. $\square$

Lema 1.3.3. *Sea* $(X, \sqsubseteq)$ *un cuasi orden conexo no antidiscreto. Entonces la división paralela* $(X, \sqsubseteq^p)$ *es conexo.*

Demostración. Sean $x, y \in X$. Usaremos $[x]$ para denotar

$$[x] = \{u \in X : u \sqsubseteq x \wedge x \sqsubseteq u\}.$$

Sea $C_1 = (x_0, \ldots, x_n)$ un $\sqsubseteq$-camino C entre x e y. Mostraremos como, usando el camino C_1, obtener un camino en $(X, \sqsubseteq^p)$ entre x e y.

a. $[x_0] \neq [x_n]$. Por el Lema 1.3.2 podemos suponer que C_1 cumple:

$$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsupseteq x_2 \cdots \sqsubseteq x_n$$

Definiremos una subsucesión $(x_{k_0}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_m})$ de $(x_0, \ldots, x_n)$. Sea $\{k_i\}$ la sucesión definida como sigue

$$k_0 = \text{máx}\{i : \{x_1, x_2, \dots, x_i\} \subseteq [x_0]\} + 1.$$

Es decir, k_0 es el índice que hace que $x_0 \sqsubseteq^p x_{k_0}$ ó $x_0 \sqsupseteq^p x_{k_0}$. Y continuamos recursivamente,

$$k_1 = \text{máx}\{m : \{x_{k_0}, x_{k_0+1}, \dots, x_m\} \subseteq [x_{k_0}]\} + 1.$$
$$k_i = \text{máx}\{h : \{x_{k_{i-1}}, x_{k_i}, \dots, x_h\} \subseteq [x_{i-1}]\} + 1.$$

De esta manera $x_{k_{i-1}}$ y x_{k_i} están relacionados en un solo sentido por medio de $\sqsubseteq$, y por lo tanto, están relacionados mediante $\sqsubseteq^p$.

Definimos $C_2 = (x_0, x_k, x_{k_2} \dots, x_{k_m})$. Si $k_m < n$, entonces podemos reemplazar k_m por n (pues $x_{k_m} \in [x_n]$) de tal manera que C_2 sea un camino de x a y por medio de $\sqsubseteq^p$.

b. $[x_0] = [x_n]$. Como $(X, \lesssim)$ es no antidiscreto existe $z \in X$ que no está en $[x_0]$, es decir que $[x_0] \neq [z]$ y $[x_n] \neq [z]$. Tómanos C_1 un $\sqsubseteq^p$-camino entre x_0 y z, y C_2 $\sqsubseteq^p$-camino entre x_n y z (que existen por la parte 1). La unión de estos es un camino entre x e y.

De esta manera siempre se puede construir un camino entre dos elementos de X mediante $\sqsubseteq^p$. Por lo tanto $(X, \sqsubseteq^p)$ es conexo. □

Lema 1.3.4. *Sea $(X, \lesssim)$ un cuasiorden conexo. Entonces admite un complemento.*

Demostración. Consideraremos dos casos.

Caso 1: $(X, \lesssim)$ es antidiscreto. Entonces el complemento es el orden discreto. Pues en $CO(X)$ el orden discreto y el antidiscreto son el elemento mínimo y máximo, de donde

$$\top \vee \bot = \top \text{ y } \top \wedge \bot = \bot.$$

Caso 2: $(X, \lesssim)$ no es antidiscreto. Sea $\lesssim^p$ la división paralela de $\lesssim$. Por el lema 1.3.3 $(X, \lesssim^p)$ es un orden conexo. Por la Proposición 1.2.8, $(X, \lesssim^p)$ admite un complemento $\lesssim^{p^*}$. Basta ver que $\lesssim^{p*}$ es un complemento para $\lesssim$.

a. Sea $(x, y) \in \lesssim \cap \lesssim^{p^*}$, queremos ver $x = y$. Recordemos que :

$$x \lesssim^{p^*} y \Leftrightarrow (x = y) \vee ((y \lesssim x) \wedge (x \not\lesssim y))$$

Dado que $(x,y) \in \lesssim$ se tiene que $x = y$.

b. Como $\lesssim^{p^*}$ es conexo, un argumento similar al usado en la demostración de la parte 2 de la proposición 1.2.8 muestra que $\lesssim \wedge \lesssim^{p^*} = X \times X$.

Hemos mostrado que $\lesssim$ y $\lesssim^{p^*}$ son complementos. $\square$

Ejemplo 1.3.5. *El cuasiorden dado en la figura 1.20 es conexo, por lo tanto admite un complemento, ilustrado en la figura 1.21.*

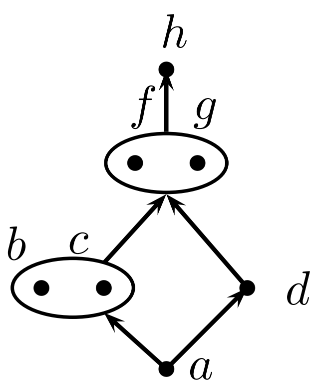

Figura 1.20: $(X, \lesssim)$

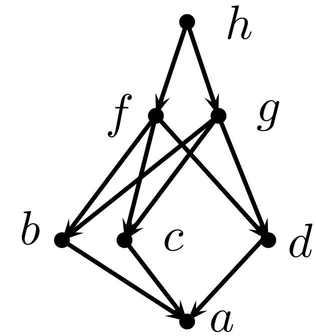

Figura 1.21: $(X, \lesssim^{p^*})$

Figura 1.22: Cuasiorden conexo y un complemento suyo

La segunda construcción tiene como objetivo convertir un orden disconexo en otro conexo haciendo "cambios mínimos".

Dada una colección $\{(X_i, \sqsubseteq_i) : i \in I\}$ de conjuntos cuasiordenados disjuntos. Para cada $i \in I$, se elige un punto $a_i \in X_i$. Definiremos un cuasiorden $\sqsubseteq_C$ en $X = \bigcup\{X_i : i \in I\}$ que establece los puntos $a_i \in X_i$ como equivalentes y mantiene la transitividad. Explícitamente, definimos $\sqsubseteq_C$ de la siguiente manera: para $x, y \in X$,

$x \sqsubseteq_C y$ si y solo si ($x \sqsubseteq_i y$ para algún $i \in I$) o ($x \sqsubseteq_i a_i$ y $a_j \sqsubseteq_j y$ para algunos $i, j \in I$ con $i \neq j$).

Lema 1.3.6. *Sea $\{(X_i, \sqsubseteq_i) : i \in I\}$ una colección de conjuntos cuasiordenados disjuntos y $a_i \in X_i$ para cada $i \in I$. Entonces $\sqsubseteq_C$ es un cuasiorden. Si además los cuasiórdenes son conexos, entonces $\sqsubseteq_C$ también lo es.*

Demostración. Veamos que $\lesssim_C$ es un cuasiorden. La reflexividad se mantiene en los X_i por lo tanto se hereda en $\sqsubseteq_C$. Analicemos ahora la transitividad. Si $x, y, x \in X$ tales que

$$x \lesssim_C y \wedge y \lesssim_C z.$$

Existen cuatro posibles casos:

a. $x, y, z \in X_i$ para algún i. Como $\lesssim_i$ es transitiva, entonces $x \lesssim_C z$.

b. $x, y \in X_i$ y $z \in X_j$ para algún $i, j \in I$. Entonces por definición de $\lesssim_C$ tenemos que

$$(x \lesssim_i y) \wedge (y \lesssim_i a_i) \wedge (a_j \lesssim_j z).$$

De donde $x \lesssim_i a_i$ y luego $x \lesssim_C z$.

c. $y, z \in X_j$ y $x \in X_i$. Análogo al caso anterior.

d. $x \in X_i, y \in X_j, z \in X_k$ para algún $i, j, k \in I$. Entonces $(x \lesssim_i a_i), (a_i \lesssim_C a_j), (a_j \lesssim_j y)$ y $(y \lesssim_j a_j), (a_j \lesssim_C a_k), (a_k \lesssim_k z)$. De donde $x \lesssim_i a_k$ y $a_k \lesssim_k z$, y así $x \lesssim_C z$.

Si cada $(X_i, \sqsubseteq_i)$ es conexo, tome $x, y \in X$. Si están en una misma componente X_k ya existe un camino entre ambos mediante $\sqsubseteq_k$ y por lo tanto también en $\sqsubseteq_C$. Supongamos que pertenecen a componentes distintas, digamos X_i y X_j. Por ser X_i, X_j conexos, existe un camino entre x y a_i por medio de $\sqsubseteq_i$ y otro entre y y a_j a través de $\sqsubseteq_j$. Luego uniendo esos caminos, pues $a_i \lesssim_C a_j$, obtenemos uno en $\sqsubseteq_C$ entre x e y. □

Llamamos a esta construcción la conexión de los conjuntos cuasiordenados X_i en los puntos $\{a_i\}$.

Lema 1.3.7. *Sea $(X_i, \lesssim_i)$ un cuasiorden con $X_i \cap X_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $X = \bigcup_i X_i$. Suponga que $\sqsubseteq_i$ es un complemento para $(X_i, \lesssim_i)$ para cada $i \in I$. Fije $a_i \in X_i$ para cada $i \in I$. Sea $\sqsubseteq_C$ el quasiorden sobre X dado en el lema 1.3.6 asociado a los cuasiórdenes $(X_i, \sqsubseteq_i)$. Entonces $\sqsubseteq_C$ es un complemento para $(X, \bigcup_i \lesssim_i)$.*

Demostración. Sea

$$\lesssim = \bigcup_i \lesssim_i .$$

a. Sea $(x, y) \in \lesssim \bigcap \sqsubseteq_C$. Entonces $x \lesssim_i y$, para algún $i \in I$, por lo tanto x, y están X_i, pues los cuasiórdenes son disjuntos. Como $x \sqsubseteq_C y$, hay dos casos a considerar:

   a) $x \lesssim_i y$ y $x \sqsubseteq_i y$, de donde $(x, y) \in \lesssim_i \cap \sqsubseteq_i$, como estos son complementos se tiene que $x = y$.

   b) $x \lesssim_i y$ y $(\exists i, j \in I)(i \neq j \wedge x \sqsubseteq_i a_i \wedge a_j \sqsubseteq_j y)$. Veremos que este caso no es posible. En efecto, como $y \in X_i$ y $a_j \sqsubseteq_j y$, entonces $i = j$, lo que no es posible.

Es decir,

$$\lesssim \vee \sqsubseteq_C = \{(x, x) : x \in X\}.$$

b. Sea $(x,y) \in X \times X$. Hay dos casos posibles:

a) $x, y \in X_i$ para algún $i \in I$. Como $\sqsubseteq_i$ es un complemento para $\lesssim_i$, se cumple que $CT(\lesssim_i \cup \sqsubseteq_i) = X_i \times X_i$. De donde $(x,y) \in CT(\lesssim \bigcup \sqsubseteq_C)$

b) $x \in X_i, y \in X_j$, para algún $i, j \in I$ con $i \neq j$.
Por la parte $a)$ tenemos que $(x, a_i), (a_j, y) \in CT(\lesssim \bigcup \sqsubseteq_C)$. Como $(a_i, a_j) \in \sqsubseteq_C$ también $(a_i, a_j) \in CT(\lesssim \bigcup \sqsubseteq_C)$. Ya que $CT(\lesssim \bigcup \sqsubseteq_C)$ es transitiva se tiene que $(x,y) \in CT(\lesssim \bigcup \sqsubseteq_C)$.

Por lo tanto (x,y) está en $CT(\lesssim \bigcup \sqsubseteq_C)$. En otras palabras:

$$\lesssim \wedge \sqsubseteq_C = X \times X.$$

□

Teorema 1.3.8. *$CO(X)$ es un retículo complementado.*

Demostración. Sea $\lesssim$ un quasiorden sobre X. Sean $\{X_i : i \in I\}$ las componentes conexas de $\lesssim$. Para facilitar la lectura, denotaremos por $\lesssim_i$ la restricción de $\lesssim$ a X_i. Sea $\sqsubseteq_i$ un complemento para $(X_i, \lesssim_i)$, que existe por el Lema 1.3.4. Finalmente, por el Lema 1.3.7, sabemos que $\sqsubseteq_C$ es un complemento para $\lesssim$. Es decir $CO(X)$ es un retículo complementado. □

En el siguiente ejemplo se muestra que la elección de los elementos a_i del algoritmo de la demostración del teorema 1.3.8 es importante, pues puede generar complementos no isomorfos.

Ejemplo 1.3.9. *En la figura 1.26 se muestra $(X, \lesssim)$ y dos complementos no isomorfos de él. El complemento de $\lesssim$ en la figura 1.24 y el de la figura 1.25 no son isomorfos, pues en $(X, \sqsubseteq_1)$ los elementos a y d son los maximales, en cambio en $(X, \sqsubseteq_2)$ tenemos que a, e y d son maximales (es decir, no existe ningún elemento de X estrictamente mayor que ellos).*

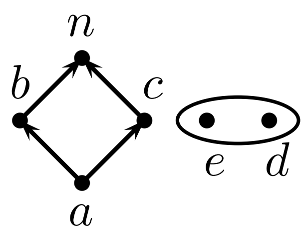

Figura 1.23: $(X, \lesssim)$

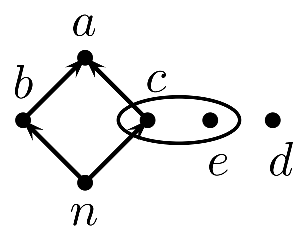

Figura 1.24: $(X, \sqsubseteq_1)$

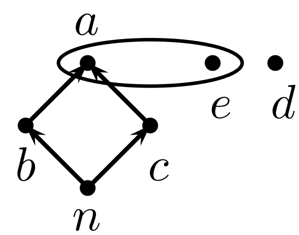

Figura 1.25: $(X, \sqsubseteq_2)$

Figura 1.26: $(X, \lesssim)$ y dos de sus complementos.

2. Retículos de topologías

En este capítulo nos enfocaremos en estudiar algunas propiedades de los retículos de topologías, especialmente $A(X)$ el retículo de las topologías de Alexandroff sobre un conjunto X. Mostraremos el teorema de representación que nos dice que $A(X)$ y $CO(X)$ son isomorfos, en particular, obtendremos que $A(X)$ es un retículo complementado.

2.1. El retículo $TOP(X)$

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio topológico.*

a. X es T_0 si para cada par de puntos distintos x, y en X, existe una vecindad U de x que no contiene a y o bien existe una vecindad V de y que no contiene a x.

b. X es T_1 si para cada par de puntos distintos x, y en X, existe una vecindad U de x que no contiene a y y también existe una vecindad V de y que no contiene a x.

Proposición 2.1.2. *Sea X un espacio topológico, $x \in X$. X es T_1 si y solo si $\{x\}$ es cerrado.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea X espacio topológico $T_1, y \neq x$, y sea U_x abierto que contiene a x, y que no contiene a y, que existe por hipótesis, entonces

$$\{y\} = \bigcap_{y \neq x} U_x^c.$$

Así, $\{y\}$ es una intersección de cerrados y por lo tanto es cerrado.

($\Leftarrow$) Sea x, y dos elementos de X con $x \neq y$, por hipótesis $\{y\}^c$ es un abierto que contiene a x y no contiene a y, y $\{x\}^c$ es un abierto que contiene a y y no contiene a x, de donde X es T_1

$\square$

Definición 2.1.3. *Si X es un conjunto no vacío, $TOP(X)$ denotará el conjunto de todas las topologías sobre X ordenado por inclusión $\subseteq$.*

Definición 2.1.4. *Se dice que S es una subbase de X si es una colección de subconjuntos de X cuya unión es X, y se llama topología generada por la subbase S a aquella cuyos abiertos son $\emptyset$ y las uniones (arbitrarias) de intersecciones finitas de elementos de S.*

$TOP(X)$ es un retículo completo en relación a $\subseteq$. En efecto:

$$\bigwedge_{i\in I}\tau_i = \bigcap_{i\in I}\tau_i \tag{2.1}$$

$$\bigvee_{i\in I}\tau_i = \left[\bigcup_{i\in I}\tau_i\right] \tag{2.2}$$

donde $\left[\bigcup_{i\in I}\tau_i\right]$ es la topología generada por la subbase $\bigcup_{i\in I}\tau_i$.

En vista de la definición 1.1.4 decimos que dos topologías τ_1 y τ_2 sobre X son **complementarias** si la única topología que es más fina que τ_1 y τ_2 es la topología discreta y la única topología que es más gruesa que τ_1 y τ_2 es la topología indiscreta, es decir,

$$\tau_1 \vee \tau_2 = \mathcal{P}(X) \quad \text{y} \quad \tau_1 \wedge \tau_2 = \{\emptyset, X\}.$$

El siguiente resultado es interesante pero está fuera de los objetivos de esta tesis (ver [1]).

Teorema 2.1.5. [1]***(A. Steiner, 1966).*** *El retículo $TOP(X)$ es un retículo complementado.*

En la siguiente sección estudiaremos otro retículo de topologías y mostraremos que es complementado.

2.2. Topologías de Alexandroff

En esta sección, expondremos ciertas características de las topologías de Alexandroff, destacando especialmente que la colección de estas topologías es un retículo isomorfo a $CO(X)$.

Definición 2.2.1. *Una* **topología de Alexandroff** *es una topología en la cual intersecciones arbitrarias de conjuntos abiertos es un abierto.*

Ejemplo 2.2.2. *Sea X un conjunto y S un subconjunto fijo de X. Las colecciones:*

a. $Super(S) = \{U \subseteq X : S \subseteq U\} \cup \{\emptyset\}$, *b.* $Disjoint(S) = \{U \subseteq X : U \cap S = \emptyset\} \cup X$*, y*

c. $Sub(S) = \{U \subseteq X : U \subseteq S\} \cup X$

son topologías de Alexandroff sobre X, respectivamente conocidas como la topología de los superconjuntos de S, la topología de conjuntos disjuntos de S y la topología de subconjuntos de S.

Teorema 2.2.3. *Sea X un conjunto. Una topología* τ *sobre* X *es una topología de Alexandroff si y solo si todo* $x \in X$ *tiene una vecindad minimal con respecto a la inclusión.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que τ es de Alexandroff. Sea

$$N_x = \bigcap\{B : B \text{ es vecindad abierta de } x\}.$$

Como τ es de Alexandroff, N_x es abierto en X. Claramente es el menor abierto que contiene a x.

($\Leftarrow$) Sean B_i con $i \in I$ abiertos en τ y

$$V = \bigcap_{i \in I} B_i.$$

Veamos que V es abierto. Sea $x \in V$ y N_x la vecindad minimal de x que existe por hipótesis. Entonces $x \in B_i$ para todo $i \in I$ y así $x \in N_x \subseteq B_i$ para todo $i \in I$. De donde $N_x \subseteq V$. Luego V es abierto.

□

De ahora en adelante la **vecindad minimal** de un punto x en τ un espacio Alexandroff se denotará por N_x o $N(x)$, es decir,

$$N_x = \bigcap\{V : \ x \in V \ \text{ y } V \text{ es abierto}\}.$$

Si existiera la posibilidad de confusión respecto a que topología se está tratando, la denotaremos por N_x^τ o $N_\tau(x)$.

Proposición 2.2.4. *Sea* τ *una topología de Alexandroff sobre un conjunto* X*. Sean* $x, y \in X$*. Entonces* $x \in N(y)$ *si y solo si* $y \in cl\{x\}$*.*

Demostración. $y \in cl\{x\}$ si y solo si para todo abierto A tal que $y \in A$ entonces $A \cap \{x\} \neq \emptyset$; como τ es de Alexandroff esto último es equivalente a que $N(y) \cap \{x\} \neq \emptyset$, es decir $x \in N(y)$. □

Proposición 2.2.5. *Si τ es una topología de Alexandroff sobre X y $V \subseteq X$, entonces*

$$cl(V) = \bigcup_{x \in V} cl(x)$$

Demostración.

a. Sea $W = \bigcup_{x \in V} cl(x)$, como $cl\{x\}$ es cerrado y estamos en una topología de Alexandroff se tiene que W es cerrado. Como $cl(V)$ es el cerrado más pequeño que contiene a V, se debe tener entonces que $cl(V) \subseteq W$.

b. Sea $y \in \bigcup_{x \in V} cl(x)$, claramente $y \in cl(V)$.

□

Las topologías de Alexandroff sobre un conjunto ocurren en pares como lo demostramos a continuación.

Proposición 2.2.6. *Sea X un conjunto. Si τ es una topología de Alexandroff sobre X, entonces la colección $\rho = \{X \setminus U : U \in \tau\}$ de conjuntos τ- cerrados es también una topología de Alexandroff en X.*

Demostración.

a. X y $\emptyset$ pertenecen a ρ pues son τ- cerrados.

b. La unión arbitraria de τ-cerrados es τ-cerrado. Sean B_i abiertos de τ, considere

$$V = \bigcup_{i \in I} B_i^c.$$

Entonces $V = \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right)^c$, es el complemento de un τ-abierto, pues τ es de Alexandroff. Por lo tanto V es τ-cerrado.

c. En un espacio topológico se cumple que la intersección de cerrados es cerrada, luego la intersección de una familia finita de τ- cerrados es τ-cerrado.

Hemos mostrado que la colección de conjuntos τ-cerrados es también una topología de Alexandroff en X. □

Proposición 2.2.7. *Sea X un conjunto, toda topología finita (conformada por una cantidad finita de abiertos) sobre X es Alexandroff. En particular, si X es finito, toda topología en X es Alexandroff.*

Demostración. Sea $\tau = \{\emptyset, X, B_1, \ldots, B_n\}$ topología finita en X, toda intersección hecha con abiertos de τ será finita, por lo tanto τ es de Alexandroff, ya que por definición de topología la intersección finita de abiertos es abierto. $\square$

Proposición 2.2.8. *Sea X un conjunto, la única topología T_1 de Alexandroff sobre X es la topología discreta.*

Demostración. Sea τ una topología de Alexandroff T_1 sobre X y $x_0 \in X$. Como τ es T_1, para todo $y \in X$ con $y \neq x_0$ existe U_y abierto que contiene a x_0 y no contiene a y. Observemos que

$$\{x_0\} = \bigcap_{y \neq x_0} U_y.$$

Como τ es de Alexandroff, entonces $\{x_0\}$ es abierto. $\square$

2.2.1. $A(X)$ es un retículo

Definición 2.2.9. *$A(X)$ denota al conjunto de todas las topologías de Alexandroff sobre X.*

Veamos que $A(X)$ es un subretículo de $TOP(X)$. En efecto, si tomamos $\tau_1, \tau_2 \in A(X)$, entonces en $TOP(X)$,

$$\tau_1 \vee \tau_2 = [\tau_1 \cup \tau_2].$$

Para todo $x \in X$, tenemos que $N_1(x) \cap N_2(x) \in [\tau_1 \cup \tau_2]$. Note que $N_1(x) \cap N_2(x)$ es la vecindad de x más pequeña en $\tau_1 \vee \tau_2$, por tanto es la vecindad minimal de x en $\tau_1 \vee \tau_2$. De donde $\tau_1 \vee \tau_2$ es de Alexandroff y así el supremo coincide en $TOP(X)$ y $A(X)$.

Veamos que sucede con el ínfimo para un conjunto de topologías de Alexandroff. Sea $\tau_i \in A(X)$ para todo $i \in I$ y considere

$$\rho = \bigcap_{i \in I} \tau_i.$$

Sean $V_\alpha \in \rho$ con $\alpha \in A$,

$$Z = \bigcap_{\alpha \in A} V_\alpha$$

Note que $V_\alpha \in \tau_i$ para todo $i \in I$ y todo $\alpha \in A$. Luego, como τ_i es Alexandroff, $Z \in \tau_i$ para todo $i \in I$, de donde $Z \in \rho$, es decir ρ es de Alexandroff. Y claramente es la topología más pequeña contenida en τ_i para todo $i \in I$. Por lo tanto

$$\rho = \bigwedge_{i \in I} \tau_i. \tag{2.3}$$

Observe que las ecuaciones (2.1) y (2.3) nos dicen que el ínfimo en $A(X)$ y en $TOP(X)$ coinciden. Pero no sucede lo mismo con el supremo. Sin embargo, $A(X)$ es un retículo completo bajo $\subseteq$ como veremos a continuación. Pero no es un subretículo completo de $TOP(X)$.

Teorema 2.2.10. [1]***(A. Steiner, 1966).*** *El retículo $A(X)$ de las topologías de Alexandroff sobre X es un retículo completo.*

Demostración. $\mathcal{P}(X)$ es una topología de Alexandroff, y es la topología más fina en $TOP(X)$, es decir $\mathcal{P}(X) = \top$ en $A(X)$. Veamos que existe el ínfimo para cualquier subconjunto no vacío de $A(X)$. Por la ecuación (2.3) tenemos que el ínfimo de cualquier subconjunto no vacío en $A(X)$ existe pues es la intersección de topologías de Alexandroff que es otra topología de Alexandrof. Por el Lema 1.1.12 se garantiza que $A(X)$ es un retículo completo. $\square$

2.2.2. Teorema de representación

Ahora introduciremos las topologías de especialización. Estos espacios son los más importantes para este trabajo, pues como veremos, toda topología de Alexandroff es de especialización.

Definición 2.2.11. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto con un cuasiorden. La* **topología de especialización** *asociada a $\leq$, denotada por $\tau[\leq]$, consiste de los conjuntos crecientes, es decir,*

$$V \in \tau[\leq] \iff \forall x \in V, \forall y \in X (x \leq y \to y \in V).$$

Teorema 2.2.12. *$\tau[\leq]$ es una topología de Alexandroff.*

Demostración. Veamos que $\tau[\leq]$ es una topología

a. $\emptyset \in \tau[\leq]$, pues $\emptyset$ es decreciente por vacuidad. Note que el complemento de un conjunto creciente B es decreciente, pues si $x \in B^c$ y $y \leq x$ queremos ver que

$y \in B^c$, suponga que $y \in B = i(B)$, es decir $x \in B$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $B^c \in \tau[\leq]$ y de esta manera $X \in \tau[\leq]$.

b. Sean V_i conjuntos crecientes para $i \in I$ y

$$W = \bigcup_{i \in I} V_i$$

Sea $x \in i(W) = \{y \in X : b \leq y \text{ para algún } b \in W\}$, entonces existe $b_0 \leq x$ para algún $b_0 \in W$, es decir existe V_{i_0} tal que $b_0 \in V_{i_0}$, como este es creciente se tiene que $x \in V_{i_0}$ de donde $x \in W$. Por lo tanto, la unión de conjuntos crecientes es creciente.

c. Sea B_i un abierto de $\tau[\leq]$ para todo $i \in I$, es decir, B_i es creciente. Entonces

$$\forall x \in B_i, \forall y \in X (x \leq y \to y \in B_i).$$

Y sea

$$V = \bigcap_{i \in I} B_i$$

Debemos mostrar que $V = i(V)$.

a) $V \subseteq i(V)$ pues $\leq$ es reflexivo.

b) $i(V) \subseteq V$. Sea $y_0 \in i(V) = \{y \in X : b \leq y \text{ para algún } b \in V\}$. Entonces existe $b_0 \leq y_0$ con $b_0 \in V$. De donde $b_0 \in B_i$ para todo $i \in I$, y como B_i es creciente, $y_0 \in B_i$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $y_0 \in V$ y en consecuencia $i(V) \subseteq V$.

Por todo esto se tiene que $\tau[\leq]$ es una topología de Alexandroff donde los cerrados son los conjuntos decrecientes. □

Observemos que la vecindad más pequeña de x relativa a la topología $\tau[\leq]$ es el conjunto creciente más pequeño que contiene a x. Es decir,

$$N_x = \{y \in X : \ x \leq y\}.$$

Definición 2.2.13. *Sea τ una topología en un conjunto X. El* **cuasiorden de especialización** *asociado a τ, denotado por $\leq_\tau$, está dado por*

$$x \leq_\tau y \Longleftrightarrow x \in cl_\tau\{y\}.$$

Veamos que en efecto $\leq_\tau$ es un cuasiorden. Sean $x, y, z \in X$, entonces

a. $\leq_\tau$ es reflexiva pues $x \in cl_\tau\{x\}$.

b. Si $x \leq_\tau y$, y $y \leq_\tau z$, entonces $x \in cl_\tau\{y\}$ y $y \in cl_\tau\{z\}$, lo que es equivalente a

$$\forall A \in \tau(x \in A \to y \in A)$$

$$\forall B \in \tau(y \in B \to z \in B),$$

de donde

$$\forall A \in \tau(x \in A \to z \in A).$$

Esto muestra que $\leq_\tau$ es transitiva.

Por lo tanto $\leq_\tau$ es un cuasiorden.

Teorema 2.2.14. *Una topología τ es T_0 si y solo si el cuasiorden de especialización de τ es un orden.*

Demostración. Sea $\leq$ el cuasiorden de especialización de τ.

($\Rightarrow$) Suponga que τ es T_0. Suponga por contradicción que $\leq$ no es un orden. Entonces existen $x, y \in X$ tales que

$$x \leq y \wedge y \leq x,$$

con $x \neq y$. Por τ ser T_0, hay dos posibilidades:

a) Existe U vecindad de x que no contiene a y. Como U es un conjunto creciente y $x \leq y$, se tiene que $y \in U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x = y$.

b) Existe V una vecindad de y que no contiene a x. Se razona de manera análoga al caso a).

En ambos casos se obtiene que $x = y$, luego $\leq$ es un orden.

($\Leftarrow$) Suponga por contradicción que τ no es T_0, entonces

$$(\exists x, y \in X)(x \neq y) \wedge (\forall U, V \in \tau)(x \in U \to y \in U) \wedge (y \in V \to x \in V).$$

Por lo tanto todo abierto que contiene a x intercepta a $\{y\}$, por lo tanto $x \in cl_\tau\{y\}$, recordando el orden de especialización se tiene que

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \in cl_\tau\{y\}.$$

De donde $x \leq y$. De la misma manera $y \leq x$. Como $\leq$ es antisimétrico se tiene que $x = y$, lo cual es una contradicción, por lo tanto τ debe ser T_0.

$\square$

El siguiente resultado facilitará la demostración del objetivo principal de esta sección, que es establecer un isomorfismo entre $A(X)$ y $CO(X)$.

Teorema 2.2.15. *Toda topología ρ de Alexandroff es de especialización, y además,*

$$\rho = \tau[\leq_\rho].$$

Demostración. Recordemos que $x \leq_\rho y \Leftrightarrow x \in cl_\rho\{y\}$. Observemos que $cl_\rho\{y\}$ es $\leq_\rho$-decreciente pues $\leq_\rho$ es transitiva.

Sea V cerrado de ρ. Por la proposición 2.2.5 se tiene que $V = cl_\rho(V) = \bigcup_{y\in V} cl_\rho\{y\}$. De donde V es una unión de conjuntos decrecientes, y por lo tanto, V es $\leq_\rho$-decreciente. Esto muestra que V es $\tau[\leq_\rho]$-cerrado. Por lo tanto $\rho \subseteq \tau[\leq_\rho]$.
Recíprocamente, sea V un cerrado de $\tau[\leq_\rho]$. Entonces

$$\begin{aligned} V = d(V) =& \{x \in X : x \leq_\rho y \text{ para algún } y \in V\} \\ =& \{x \in X : x \in cl_\rho(y) \text{ para algún } y \in V\} \\ =& \bigcup_{y\in V} cl_\rho(y) = cl_\rho(V). \end{aligned}$$

De donde V es ρ-cerrado, es decir $\tau[\leq_\rho] \subseteq \rho$. Por lo tanto, $\rho = \tau[\leq_\rho]$, esto es, ρ es de especialización. $\square$

2.2.3. $CO(X)$ y $A(X)$ son retículos isomorfos

Ahora probaremos que $A(X)$ es un retículo isomorfo a $CO(X)$, que es uno de los resultados principales de este trabajo, para ello necesitaremos los siguientes resultados.

Lema 2.2.16. *Sean $\leq_1, \leq_2$ en $CO(X)$. Entonces, $\leq_2 \subseteq \leq_1$ si y solo si $\tau[\leq_1] \subseteq \tau[\leq_2]$.*

Demostración.

a. Suponga $\leq_2 \subseteq \leq_1$
   Sea $A \in \tau[\leq_1]$ entonces

$$\forall x \in A, \forall y \in X(x \leq_1 y \rightarrow y \in A).$$

Como $\leq_2 \subseteq \leq_1$ se tiene que $\forall x \in A, \forall y \in X(x \leq_2 y \rightarrow y \in A)$, es decir $A \in \tau[\leq_2]$, de donde $\tau[\leq_1] \subseteq \tau[\leq_2]$

b. Suponga $\tau[\leq_1] \subseteq \tau[\leq_2]$, y que existen $x, y \in X$ tales que $x \leq_2 y$ y $x \not\leq_1 y$
Entonces $N_x^{\tau_1} \in \tau[\leq_2]$, como $x \leq_2 y$ se tiene que $y \in N_x^{\tau_1}$, lo que es una contradicción pues $x \not\leq_1 y$. Por lo tanto $\leq_2 \subseteq \leq_1$.

□

Proposición 2.2.17. *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías sobre X, la topología $\tau_1 \vee \tau_2$, generada por la unión de estas, tiene una base que consiste de los conjuntos de la forma $U_1 \cap U_2$ donde $U_i \in \tau_i$ para $i = 1, 2$. En caso de que τ_1, τ_2 sean topologías de Alexandroff, entonces $\tau_1 \vee \tau_2$ es de Alexandroff y su base de vecindades minimales consiste de los conjuntos de la forma $N_1(x) \cap N_2(x)$, donde $N_i(x)$ es la vecindad minimal de x en τ_i.*

Demostración.

a. Veamos que los elementos de la forma $U_1 \cap U_2$ son una base S para la topología generada por $\tau_1 \cup \tau_2$.

   a) Sea $x \in X$, existe $U_1(x) \cap U_2(x) \in S$, que contiene a x, pues existen $U_1 \in \tau_1, U_2 \in \tau_2$, que contienen a x.

   b) Sean B_1, B_2 tales que $B_1 = U_1 \cap U_2$, $B_2 = V_1 \cap V_2$, con $U_1, V_1 \in \tau_1$ y $U_2, V_2 \in \tau_2$. Sea $x \in B_1 \cap B_2$, veamos que S es cerrada bajo intersecciones. Sea $B_3 = B_1 \cap B_2 = U_3 \cap V_3$ con $U_3 = U_1 \cap V_1 \in \tau_1$ y $V_3 = U_2 \cap V_2 \in \tau_2$.
   Observe que S está contenida en $\tau_1 \vee \tau_2$, pues sus elementos son uniones de intersecciones finitas de elementos de τ_1 y τ_2.

b. Sea $U \in [\tau_1 \cup \tau_2]$, $x \in U$. Entonces existen $V_i \in \tau_i$, para $i = 1, 2$, tales que $x \in V_1 \cap V_2 \subseteq U$. Como son topologías de Alexandroff tenemos que $N_1(x) \cap N_2(x) \subseteq V_1 \cap V_2 \subseteq U$.

□

El siguiente es el objetivo principal de esta sección y uno de los resultados principales de este trabajo.

Teorema 2.2.18. *$CO(X)$ y $A(X)$ son retículos isomorfos.*

Demostración. Sea T definida de la siguiente manera

$$T : (CO(X), \supseteq) \longrightarrow (A(X), \subseteq)$$

$$T(\leq) = \tau[\leq]$$

Por el Teorema 2.2.15 tenemos que T es sobreyectiva, pues toda topología de Alexandroff es de especialización. Veamos que también es inyectiva, sean $\leq_1, \leq_2$ cuasiórdenes distintos en $CO(X)$. Sea $\tau_1 = \tau[\leq_1]$ y $\tau_2 = \tau[\leq_2]$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que existen $x, y \in X$ tales que $x \leq_1 y$ y $x \nleq_2 y$. Afirmamos que $N_x^{\tau_2}$ no es τ_1-abierto. En efecto, como $x \nleq_2 y$ entonces $y \notin N_x^{\tau_2}$. Pero $y \in N_x^{\tau_1}$ (pues $x \leq_1 y$), de esto se tiene que $N_x^{\tau_1} \nsubseteq N_x^{\tau_2}$, luego $N_x^{\tau_2}$ no es τ_1-abierto. Así se tiene que T es inyectiva. Ahora veamos que se preservan los supremos e ínfimos, sean $R_1, R_2 \in CO(X)$.

a. $T(R_1 \vee R_2) \subseteq T(R_1) \vee T(R_2)$.

   Como $T(R_1 \vee R_2) = T(R_1 \cap R_2) = \tau[R_1 \cap R_2]$ y $T(R_1) \vee T(R_2) = [\tau[R_1] \cup \tau[R_2]]$. Tenemos que mostrar que

$$\tau[R_1 \cap R_2] \subseteq [\tau[R_1] \cup \tau[R_2]].$$

   Basta verificar que las vecindades minimales de la topología de la izquierda son abiertas en la otra topología.

   Sea $x \in X$ tenemos que

$$N_x^{\tau[R_1 \cap R_2]} = \{y \in X : x \leq_{R_1 \cap R_2} y\} = N_x^{\tau_1} \cap N_x^{\tau_2}.$$

   Luego $N_x^{\tau[R_1 \cap R_2]}$ esta en $[\tau[R_1] \cup \tau[R_2]]$. Por lo tanto tenemos que $\tau[R_1 \cap R_2] \subseteq [\tau[R_1] \cup \tau[R_2]]$

b. $T(R_1) \vee T(R_2) \subseteq T(R_1 \vee R_2)$.

   Sea $A \in [\tau[R_1] \cup \tau[R_2]]$, por la Proposición 2.2.17 entonces A es de la forma:

$$A = \bigcup N_x^{\tau_1} \cap N_x^{\tau_2}$$

   de donde $A \in \tau[R_1 \cap R_2]$, por lo tanto $[\tau[R_1] \cup \tau[R_2]] \subseteq \tau[R_1 \cap R_2]$.

   Hemos probado que T preserva los supremos. Ahora veremos que también preserva los ínfimos.

c. $T(R_1 \wedge R_2) \;\subseteq\; T(R_1) \wedge T(R_2)$.

Como $T(R_1 \wedge R_2) = T(CT(R_1 \cup R_2)) = \tau[CT(R_1 \cup R_2)]$ y $R_i \;\subseteq\; R_1 \cup R_2 \subseteq\; CT(R_1 \cup R_2)$ para $i = 1, 2$, entonces, por la Proposición 2.2.16, tenemos que:

$$\tau(R_1 \wedge R_2) \;\subseteq\; \tau(R_1) \wedge \tau(R_2).$$

d. $T(R_1) \wedge T(R_2) \;\subseteq\; T(R_1 \wedge R_2)$.

Sea $A \in \tau[R_1] \cap \tau[R_2] = T(R_1) \wedge T(R_2)$, queremos ver que $A \in \tau[CT(R_1 \cup R_2)]$. Suponga que no, entonces existen $x \in A$, $y \in X$ tales que $(x, y) \in CT(R_1 \cup R_2)$ con $y \notin A$. Entonces existen $x = x_1, \cdots, x_n = y$ en X con $(x_1, x_2) \in R_1$, $(x_2, x_3) \in R_2$ $\ldots, (x_{n-1}, x_n) \in R_i$ (algún i). Como $A \in \tau[R_1]$, entonces $x_2 \in A$. Como $A \in \tau[R_2]$, entonces $x_3 \in A$ y de está manera todos los $x_i \in A$ para $i = 1, \cdots, n$. Así $y \in A$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $A \in \tau[CT(R_1 \cup R_2)]$. Es decir:

$$\tau(R_1) \wedge \tau(R_2) \;\subseteq\; \tau(R_1 \wedge R_2).$$

De esta manera queda demostrado que T es un isomorfismo de retículos. $\square$

Ahora mostraremos $A(X)$ es complementado que es uno de los objetivos principales de este trabajo.

Teorema 2.2.19. [1]***(A. Steiner, 1966).*** *El retículo $A(X)$ de las topologías de Alexandroff sobre X es un retículo complementado.*

Demostración. Como $A(X)$ y $CO(X)$ son retículos isomorfos (por el Teorema 2.2.18) y $CO(X)$ es un retículo complementado (por el Teorema 1.3.8), se tiene que $A(X)$ es complementado (por el Teorema 1.1.16). $\square$

2.3. Topologías primales

En esta sección introducimos un ejemplo especial de topología de Alexandroff. Estas topologías fueron originalmente estudiadas en [4], la introducción de [3] contiene la historia de esta noción.

Definición 2.3.1. *Sea $f : X \to X$ una función. La* **topología primal o funcional Alexandroff** *sobre X asociada a f es*

$$\tau_f = \{U \subseteq X : f^{-1}(U) \subseteq U\}.$$

Definición 2.3.2. *Sea $f : X \to X$ una función. $A \subseteq X$ se dice f-**invariante** si $f(A) \subseteq A$.*

Teorema 2.3.3. *τ_f es una topología de Alexandroff.*

Demostración. Sean B_i con $i \in I$ tales que $f^{-1}(B_i) \subseteq B_i$.

a. $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, por lo tanto $\emptyset \in \tau_f$

b. $f^{-1}(X) \subseteq X$, de donde $X \in \tau_f$

c. $f^{-1}\big[\bigcup_{i\in I} B_i\big] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i]$. Como $f^{-1}(B_i) \subseteq B_i$ se tiene que

$$\bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i] \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i.$$

   De donde $\bigcup_{i\in I} B_i \in \tau_f$.

d. $f^{-1}\big[\bigcap_{i\in I} B_i\big] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i]$. Como $f^{-1}(B_i) \subseteq B_i$ se tiene que

$$\bigcap_{j\in I} f^{-1}[B_j] \subseteq f^{-1}(B_i) \subseteq B_i \text{ para todo } i \in I.$$

   De donde $f^{-1}\big[\bigcap_{i\in I} B_i\big] \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$.

Por lo tanto, τ_f es una topología de Alexandroff. $\square$

Ejemplo 2.3.4. *Sea $f : X \to X$ dada por $f(x) = x$. Entonces τ_f es la topología discreta sobre X.*

Ejemplo 2.3.5. *Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $f : X \to X$ dada por $f(x) = b$. Entonces*

$$\tau_f = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, d, c\}\}.$$

En general, para cualquier conjunto X y f la función constante b se tiene que los abiertos en τ_f son $\emptyset$, X y los subconjuntos de X que no contienen a b.

La topología τ_f dada por $f : X \to X$ también será denotada por $P(f)$ y denotaremos por

$$\leq_f$$

al cuasiorden de especialización de la topología primal τ_f.

Denotaremos $f^0(x) = x$ y $f^{-1}(x)$ como la preimagen de x; adicionalmente denotamos la iterada de f como sigue

$$f^n(x) = f \circ f \circ \cdots \circ f(x),$$

Teorema 2.3.6. *Sea $f : X \to X$ y τ_f la topología primal asociada a f.*

a. C es τ_f-cerrado si y solo si $f(C) \subseteq C$. Es decir, los conjuntos τ_f-cerrados son los subconjuntos f-invariantes de X.

b. Para $x \in X$, $cl\{x\} = \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Es decir, $cl\{x\}$ es la órbita $\mathcal{O} = \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ de x bajo f.

c. Para $x \in X$, la vecindad más pequeña de x es

$$N_f(x) = \{y \in X : f^n(y) = x \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración.

a. $(\Rightarrow)$ Sea $A \in \tau_f$ y $C = A^c$, veamos que $f(C) \subseteq C$. Sea $x \in f(C)$, entonces existe $y \in C$ tal que $f(y) = x$. Queremos ver que $x \in C$, suponga por contradicción que $x \in A$, por lo tanto $y \in f^{-1}(A) \subseteq A$, lo cual es una contradicción pues $y \in C$. De donde se debe tener que $f(C) \subseteq C$.

$(\Leftarrow)$ Sea C tal que $f(C) \subseteq C$ y $x \in f^{-1}(C^c)$. Entonces existe $y \in C^c$ tal que $y = f(x)$. Suponga por contradicción que $x \in C$, de donde $y \in f(C)$ y por lo tanto $y \in C$, lo cual es una contradicción. Se concluye que $f^{-1}(C^c) \subseteq C^c$.

b. Sea $y \in \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ entonces $y = f^m(x)$ para algún $m \in \mathbb{N}$, de donde $f(y) = f^{m+1}(x) \in \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Es decir $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es f-invariante. Como $x \in \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, pues $f^0(x) = x$, y $cl\{x\}$ es el cerrado más pequeño que contiene a x se tiene que

$$cl\{x\} \subseteq \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Sea $y \in \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ con $y = f^m(x)$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces $x \in N_f(y)$ y por la proposición 2.2.4 se tiene que $y \in \mathrm{cl}(x)$. Por lo tanto

$$\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty} \subseteq cl\{x\}.$$

c. Probaremos primero que $N_f(x)$ es abierto. Sea $y \in f^{-1}(N_f(x))$, entonces $f(y) \in N_f(x)$, es decir, $f^m(f(y)) = x$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces $f(f^m(y)) = f^{m+1}(y) = x$ de donde $y \in N_f(x)$. Por lo tanto $N_f(x)$ es abierto.

Veamos que $N_f(x)$ es minimal. Sea $x, y \in X$ con $y \in N_f(x)$ tal que $x = f^m(y)$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Por la parte 2) y por la proposición 2.2.4, se tiene que

$$x = f^m(y) \Leftrightarrow x \in \text{cl}\{y\} \Leftrightarrow y \in N_{P(f)}(x).$$

Por lo tanto $N_f(x)$ es minimal.

□

En el teorema que sigue presentamos una caracterización para topologías primales. No haremos su demostración, solo ilustraremos con ejemplos cómo se puede usar ese resultado.

Teorema 2.3.7. [4] **(F. Shirazi y N.Golestani, 2011).** *Sea X un espacio Alexandroff. Entonces, X es primal si y solo si se cumplen las siguientes afirmaciones:*

a. *Para todo $x, y \in X$, $N(x) \subseteq N(y)$ **ó** $N(y) \subseteq N(x)$ **ó** $N(x) \cap N(y) = \emptyset$.*

b. *Para $x \in X$, si existe $y \in X$ tal que $N(x) \subset N(y)$, entonces para todo $z \in X \setminus \{x\}$, se tiene $N(x) \neq N(z)$.*

c. *Para todo $x, y \in X$, $\{z \in X : N(x) \subseteq N(z) \subseteq N(y)\}$ es finito.*

A continuación presentamos algunos ejemplos de topologías primales.

Ejemplo 2.3.8. *Sea $(\mathbb{N}, \tau[\leq])$ el espacio de Alexandroff asociado al orden usual de $\mathbb{N}$. Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por*

$$f(n) = \begin{cases} n - 1 & \textit{si } n \geq 1, \\ 0 & \textit{si } n = 0. \end{cases}$$

Mostraremos que $P(f) = \tau[\leq]$.

a. *Sea B un conjunto $P(f)$-cerrado. Mostraremos que B es $\leq$-decreciente. Sea $n \in B$ y $z < n$. Luego $n \neq 0$. Queremos ver que z está en B. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $z = n - k$. Entonces $f(n) = n - 1 \in B$ y siguiendo de esta manera tenemos que $n - k \in B$. Es decir B es $\leq$-decreciente.*

b. *Sea B un conjunto $\leq$-decreciente. Para ver que B es $P(f)$-cerrado, basta verificar que B es f-invariante. Sea $n \in B$, veamos que $f(n) = n - 1 \in B$. Como $n - 1 \leq n$ entonces $n - 1 \in B$. Es decir B es $P(f)$-cerrado.*

Por lo tanto $P(f) = \tau[\leq]$.

Ejemplo 2.3.9. $(\mathbb{R}, \tau[\leq])$ *el espacio de Alexandroff asociado al orden usual de* $\mathbb{R}$*. Mostraremos que no es primal usando el Teorema 2.3.7. Sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *tales que* $N(x) \subseteq N(y)$*. Recordemos que*

$$N(x) = \{z \in \mathbb{R} : x \leq z\}.$$

Supongamos que $y < x$*. Ya que* $\{z \in \mathbb{R} : N(x) \subseteq N(z) \subseteq N(y)\}$ *es infinito, por la parte 3 del Teorema 2.3.7 se concluye que* $(\mathbb{R}, \tau[\leq])$ *no es primal.*

Ejemplo 2.3.10. *Considere el conjunto de las sucesiones finitas de ceros y unos:*

$$2^{<\omega} = \{s : \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Ordenaremos a $2^{<\omega}$ *por extensión* $\lesssim$*. Sean* $t = (a_1, \ldots, a_n)$ *y* $s = (b_1, \ldots, b_m)$ *con* $n, m \in \mathbb{N}$*, elementos en* $2^{<\omega}$ *entonces*

$$(b_1, \ldots, b_m) \lesssim (a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow m \leq n \text{ y } b_i = a_i \text{ para todo } i \leq m,$$

como se ilustra en la figura 2.1.

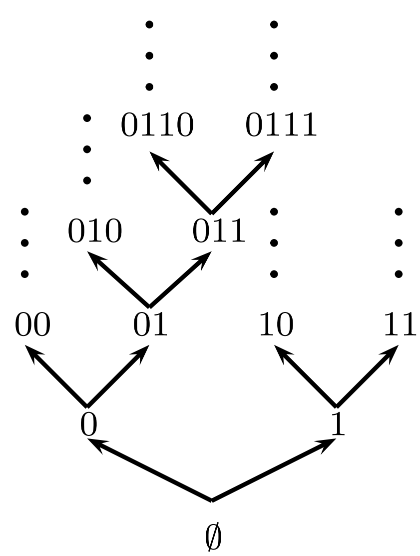

Figura 2.1: $(2^{<\omega}, \lesssim)$

Sea $f : 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ *dada por:*

$$f((a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)) = \begin{cases} (a_1, \ldots, a_{n-1}) & \text{si } (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{si } (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \emptyset \end{cases}$$

Veamos que $P(f) = \tau[\lesssim]$.

a. Sea B un conjunto $P(f)$-cerrado, $s = (a_1, \dots, a_n) \in B$ y $t = (b_1, \dots, b_m) \in 2^{<\omega}$ tal que $t \lesssim s$, es decir

$$(b_1, \dots, b_m) \lesssim (a_1, \dots, a_n).$$

Por definición de $\lesssim$, tenemos que $m \leq n$ y $b_i = a_i$ para todo $i \leq m$.

Como B es $P(f)$-cerrado se tiene que $f(s) = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in B$ y análogamente, $f^2(s) = (a_1, \dots, a_{n-2}) \in B$; siguiendo de esta manera hasta $n - k = m$, obtenemos que $t = (a_1, \dots, a_m) \in B$. Es decir B es $\tau[\lesssim]$-cerrado.

b. Sea B un conjunto $\tau[\lesssim]$-cerrado. Veamos que $f(B) \subseteq B$, es decir, que B es f-invariante. Tome $f(c) = b = (b_1, \dots, b_{n-1}) \in f(B)$ para algún $c = (b_1, \dots, b_n) \in B$. Entonces $b \lesssim c$ y como B es $\tau[\lesssim]$-cerrado, se tiene que $b \in B$. Es decir, B es $P(f)$-cerrado.

Por lo tanto se tiene que $P(f) = \tau[\lesssim]$.

Teorema 2.3.11. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto finito ordenado linealmente. Entonces $\tau[\leq]$ es primal.*

Demostración. Sea $X = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$. Considere $f : X \to X$ dada por

$$f(x_i) = \begin{cases} x_{i-1} & \text{si } 2 \leq i \leq n \\ x_1 & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

Mostraremos que $P(f) = \tau[\leq]$.

a. Sea B conjunto $P(f)$-cerrado. Veamos que B es $\tau[\leq]$-cerrado. Sea $x_i \in B$ entonces $f(x_i) = x_{i-1} \in B$, y por lo tanto $f(x_{i-1}) \in B$ continuando de esta manera se tiene que

$$\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_i\} \subseteq B \tag{2.4}$$

Por lo tanto B es $\tau[\leq]$-cerrado.

b. Sea B conjunto $\tau[\leq]$-cerrado y $x_i \in B$, entonces $f(x_i) = x_{i-1} \in B$ (si $x_i = x_1$ entonces $f(x_1) = x_1$ de donde $f(x_i) \in B$). Por lo tanto B es conjunto $P(f)$-cerrado.

$\square$

En los ejemplos 2.3.8, 2.3.10 y 2.3.11 se mostró que la topología de especialización asociada a los respectivos órdenes eran iguales a $P(f)$ para la f dada, por lo que esos espacios Alexandroff son primales.

Definición 2.3.12. *Se denotará por $FA(X)$ al conjunto de topologías primales sobre X.*

En general, $FA(X)$ no es un retículo (ver Menix y Richmond, "The lattice of functional Alexandroff topologies"). Sin embargo, si lo es cuando X es finito, como lo mostramos a continuación.

Teorema 2.3.13. [3] *Si X es un conjunto finito, $FA(X)$ es un retículo.*

Demostración. Mostraremos que $P(f) \vee P(g)$ (calculado en $A(X)$) es el supremo en $FA(X)$. Para esto, es suficiente mostrar que $P(f) \vee P(g)$ es primal. Como $P(f), P(g)$ son topologías de Alexandroff, sean $\lesssim_f$ y $\lesssim_g$ los cuasiórdenes asociados a $P(f)$ y a $P(g)$, respectivamente. Es decir,

$$P(f) = \tau[\lesssim_f] \text{ y } P(g) = \tau[\lesssim_g].$$

Sabemos por la ecuación 1.5 en la Sección 1.2 que

$$\lesssim_f \vee \lesssim_g \; = \; \lesssim_f \cap \lesssim_g \; .$$

Del Teorema 2.2.18 sabemos que

$$\tau[\lesssim_f] \vee \tau[\lesssim_g] = \tau[\lesssim_f \cap \lesssim_g].$$

Veamos que $\tau[\lesssim_f \cap \lesssim_g]$ es primal. Considere $h : X \to X$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f^k(x) & \text{si } k = \min\{j : f^j(x) \in \{g(x), g^2(x), \ldots\}\} \\ x & \text{si } O_f(x) \cap O_g(x) = \{x\}. \end{cases}$$

Mostraremos que $P(h) = P(f) \vee P(g)$. Como son topologías de Alexandroff es suficiente mostrar que $N_h(y) = N_f(y) \cap N_g(y)$ para cualquier $y \in X$, como se tiene que

$$x \in N_f(y) \cap N_g(y) \Leftrightarrow y \in \text{cl}_f\{x\} \cap \text{cl}_g\{x\}.$$

Es equivalente mostrar que $\text{cl}_h\{x\} = \text{cl}_f\{x\} \cap \text{cl}_g\{x\}$ para todo $x \in X$.

a. Sea $x \in X$. Dado que $h(x) \in \text{cl}_f\{x\} \cap \text{cl}_g\{x\}$, se sigue que $\text{cl}_h\{x\} \subseteq \text{cl}_f\{x\} \cap \text{cl}_g\{x\}$.

b. Supongamos que $z \in \text{cl}_f\{x\} \cap \text{cl}_g\{x\}$. Si $z = x$, entonces $z \in \text{cl}_h\{x\}$, por lo que podemos asumir que $z = f^k(x) = g^n(x)$, donde $k, n > 0$.

   Si $h(x) = f^{k_1}(x) = g^{n_1}(x)$, iterando f obtenemos una secuencia creciente $k_1 < k_2 < \ldots$ y $n_1 < n_2 < \ldots$. tal que $f^{k_i}(x) \in \{g(x), g_2(x), g_3(x), \ldots\}$ y $f^j(x) \notin \{g(x), g_2(x), g_3(x), \ldots\}$ para $k_i < j < k_{i+1}$.
   Si iniciamos la iteración con h al salirnos de los k_j, por ejemplo $k_i+1 \notin k_j$, tendremos que $h^e(f^{k_i}(x)) = f^{k_i+1}(x)$ entonces $h^{e+1}(x) = h(f^{k_i+1}(x)) = f^{k_{i_2}-(k_i+1)}(x)$ siendo k_{i_2} el siguiente a k_i. Cuando $k_j = k$ tenemos que $z = f^{k_i}(x) = h^i(x)$ es decir $z \in cl_h(x)$, de donde $\text{cl}_f\{x\} \cap \text{cl}_g\{x\} \subseteq \text{cl}_h\{x\}$.

Ahora mostraremos que la topología indiscreta es primal cuando X es finito. Suponga que $X = \{x_1, \ldots x_n\}$ y sea $f : X \to X$ una permutación cíclica, por ejemplo:

$$f(x_i) = \begin{cases} x_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1, \\ x_1 & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Sea A conjunto $P(f)$-cerrado y $x_i \in A$ de donde $f(x_i) = x_{i+1} \in A$ y por lo tanto $f(x_{i+1}) = x_{i+2} \in A$, continuando de esta manera se tiene que $A = X$ (si $x_i = x_n$ la imagen de $x_n = x_1 \in A$ y continuando se obtiene que $X \subseteq A$); por lo tanto $P(f) = \{\emptyset, X\}$ es el elemento mínimo de $FA(X)$.
Como X es finito, todo subconjunto de $FA(X)$ tiene supremo, por lo tanto, por el Lema 1.1.13, $FA(X)$ es un retículo completo. □

A manera de información mencionamos (sin demostración) que $FA(X)$ es un retículo complementado cuando X es un conjunto finito [3]. Daremos a continuación un ejemplo de una topología primal con un complemento primal.

Ejemplo 2.3.14. *Sea X un subconjunto finito de $2^{<\omega}$ como se ilustra en la figura 2.2.*

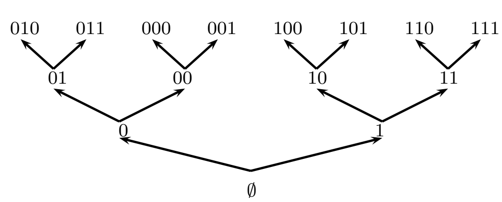

Figura 2.2: $(X, \lesssim)$

Tomando f la función dada en el Ejemplo 2.3.10 se tiene que $P(f)$ es una topología primal sobre X, y como se mostró $P(f) = \tau[\lesssim]$. Ahora sea $\leq$ el orden lineal sobre X que se muestra en la figura 2.3.

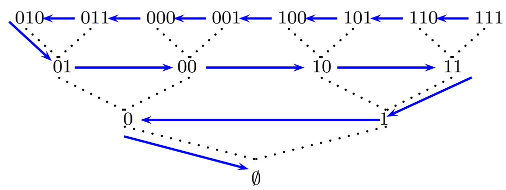

Figura 2.3: $(X, \leq)$

Por el Teorema 2.3.11 se tiene que $\tau[\leq]$ es primal; mostraremos que $\tau[\leq]$ es complemento para $\tau[\lesssim]$. Por el Teorema 2.2.18 sabemos que

$$\tau[\lesssim] \vee \tau[\leq] = \tau[\lesssim \cap \leq]$$

y

$$\tau[\lesssim] \wedge \tau[\leq] = \tau[CT(\lesssim \cup \leq)].$$

Sea $(t, s) \in \lesssim \cap \leq$ con $t = (a_1, \ldots, a_n)$ y $s = (b_1, \ldots, b_m)$; entonces $n \leq m$ y $a_i = b_i$ para todo $i \leq n$, por la definición de $\leq$ se debe tener que $s = t$; por lo tanto

$$\lesssim \cap \leq = \{(t, t) : t \in X\} = \top_{CO(X)}.$$

Sean $s, t \in X$. Entonces $s \leq \emptyset \lesssim t$, de donde $(s, t) \in CT(\lesssim \cup \leq)$, por lo tanto

$$\lesssim \wedge \leq = X \times X = \bot_{CO(X)}.$$

Por el Lema 1.1.15 se tiene que $\tau[\lesssim] \vee \tau[\leq] = \mathcal{P}(X)$ y $\tau[\lesssim] \wedge \tau[\leq] = \{\emptyset, X\}$, es decir que $\tau[\leq]$ es complemento para $\tau[\lesssim]$.

Bibliografía

Menix, Jacob y Tom Richmond. "The lattice of functional Alexandroff topologies". En: *Order* 38 (2021), págs. 1-11. URL: https://rdcu.be/dmeSF (vid. págs. 6, 9, 42, 48, 49).

Richmond, Tom. *General Topology: An Introduction*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2020 (vid. págs. 8, 24).

Shirazi, Fatemah Ayatollah Zadeh y Nasser Golestani. "Functional Alexandroff spaces". En: *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 40.4 (2011), págs. 515-522 (vid. págs. 9, 42, 45).

Steiner, A. K. "The Lattice of Topologies: Structure and Complementation". En: *Transactions of the American Mathematical Society* 122.2 (1966), págs. 379-398. URL: http://www.jstor.org/stable/1994555 (visitado 23-09-2023) (vid. págs. 8, 32, 36, 42).