MONOIDES INVERSOS DE TIPO MÖBIUS

LUIS AUGUSTO MARTÍNEZ SÁNCHEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2019

MONOIDES INVERSOS DE TIPO MÖBIUS

LUIS AUGUSTO MARTÍNEZ SÁNCHEZ

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemático

Director
Héctor Edonis Pinedo Tapia
Postdoctorado en ciencias

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2019

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres: Zorayda Sánchez y Luis Martínez, pues son la base de toda mi vida. También agradezco al profesor **Dr. Héctor Edonis Pinedo** por su colaboración y empeño en el desarrollo de este trabajo.

Finalmente, doy las gracias a todo aquel que durante los últimos cuatro años me brindó su amistad.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	**9**
1. PRELIMINARES	**11**
1.1. SEMIGRUPOS INVERSOS	11
1.2. PRODUCTO SEMIDIRECTO Y TRIPLAS DE MCALISTER	30
1.3. GRUPOS TOPOLÓGICOS	37
2. UN MONOIDE INVERSO ASOCIADO A UNA ACCIÓN DE GRUPO	**50**
2.1. EL MONOIDE INVERSO DE MÖBIUS	50
2.2. CONSTRUCCIÓN DEL MONOIDE	55
2.3. MONOIDES INVERSOS DE TIPO MÖBIUS	61
2.4. ESTRUCTURA DE LOS MONOIDES INVERSOS DE TIPO MÖBIUS	66
BIBLIOGRAFÍA	**77**

RESUMEN

TÍTULO: MONOIDES INVERSOS DE TIPO MÖBIUS *

AUTOR: LUIS AUGUSTO MARTÍNEZ SÁNCHEZ **

PALABRAS CLAVE: SEMIGRUPOS INVERSOS, TRIPLA DE MCALISTER Y AGRANDAMIENTOS.

DESCRIPCIÓN:
Este trabajo consiste esencialmente en presentar una generalización del monoide inverso de Möbius, partiendo de la acción de un grupo sobre un espacio topológico Hausdorff. A partir de esta, y de forma natural, asociamos un monoide inverso que no siempre preservará la estructura del monoide inverso de Möbius, sin embargo, bajo ciertas condiciones lo hará. En ese sentido se definen los monoides inversos de tipo Möbius, y el objetivo de este trabajo es estudiar la estructura de estos monoides mediante triplas de McAlister.

En el primer capítulo mencionamos ciertos conceptos básicos de la teoría de semigrupos inversos y de grupos topológicos, que serán de utilidad a la hora de establecer ciertos resultados. En el capítulo dos empezamos presentando el monoide inverso de Möbius y ciertos resultados relacionados con este, los cuales serán la base de este trabajo. Teniendo en cuenta estos resultados, se empieza a construir un monoide a partir de la acción de un grupo sobre un espacio topológico, para posteriormente definir los monoides inversos de tipo Möbius. Finalmente se presenta un estudio de tales monoides, mostrando que efectivamente logran mantener las mismas propiedades del monoide inverso de Möbius. En ese sentido, lograremos mostrar que dado un monoide inverso de tipo Möbius, se puede encontrar una tripla de McAlister tal que su $P-semigrupo$ asociado sea isomorfo a él.

---

* Trabajo de grado

** Facultad ciencias. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Postdoctorado en ciencias.

ABSTRACT

TITLE: INVERSE MONOIDS OF MÖBIUS TYPE *

AUTHOR: LUIS AUGUSTO MARTÍNEZ SÁNCHEZ **

KEYWORDS: INVERSE SEMIGROUPS, MCALISTER TRIPLE AND ENLARGEMENTS.

DESCRIPTION:

This paper consists essentially in presenting a generalization of the Möbius inverse monoid, based on the action of a group on a Hausdorff topological space. From this, we associate an inverse monoid that will not always preserve the structure of the inverse monoid of Möbius, however, under certain conditions it will. In that sense, the inverse monoids of the Möbius type are defined, and the objective of this work is to study the structure of these monoids by McAlister triples.

In the first chapter we mention basic concepts on the theory of inverse semigroups and topological groups, which will be useful when establishing certain results. In chapter two we begin by presenting the inverse monoid of Möbius and some related results, which will be the basis for this work. With these results in mind, we start the construction of a monoid beginning with the action of a group over a topological space to later define the Möbius inverse monoids. Finally we study such monoids showing that they actualy maintain the same properties of the Möbius inverse monoid. In that sense, we will be able to show that given a inverse monoid of Möbius type, a McAlister triple can be found such that its associated $P-semigroup$ is isomorphic to it.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de ciencias. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Postdoctorado en ciencias.

INTRODUCCIÓN

Una transformación de Möbius es una función de la forma

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ donde } a,b,c,d,z \in \mathbb{C}, \text{ son tales que } ad-bc \neq 0.$$

Notemos que para $c \neq 0,$ la función f no está definida en todo $\mathbb{C},$ pero tenemos que $f : \mathbb{C} - \{\frac{-d}{c}\} \to \mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\}$ es una biyección, esto es, f es una biyección entre subconjuntos de $\mathbb{C}$. En este caso decimos que f es una biyección parcial de $\mathbb{C}$. El conjunto de todas estas biyecciones es denotado por $I(\mathbb{C})$, y es llamado el *monoide inverso simétrico de* $\mathbb{C}$.

Como veremos en el Ejemplo 2.1.1, es posible mostrar que las transformaciones de Möbius surgen al intentar restringir a $\mathbb{C}$ la acción topológica global $\Delta : PGL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ dada por

$$\Delta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} C(GL_2(\mathbb{C})), z\right) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & si\ z \neq \infty \\ \frac{a}{c}, & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Donde $PGL_2(\mathbb{C})$ es el cociente de $GL_2(\mathbb{C})$ por su centro.

En [1], Lawson trabaja con $T \subseteq I(\mathbb{C})$ el conjunto de todas las transformaciones de Möbius, y con M, el monoide inverso compuesto por las composiciones finitas de elementos de T. Lawson logra demostrar que a pesar de que M no es isomorfo al producto semidirecto de un semirretículo por un grupo (ver Sección 1.2), es posible encajarlo en esta clase de estructuras. Además, logra encontrar una tripla de McA-

[1] M. LAWSON. “The Möbius Inverse Monoid”. En: *Journal of algebra* 200 (1998), págs. 428-438.

lister (G, X, Y) de tal forma que $P(G, X, Y) \cong M$.

En este trabajo, el objetivo es estudiar el trabajo realizado en [2], donde se considra cuaquier acción topológica global $\Lambda : G \times X \to X$ de un grupo discreto G sobre un espacio Hausdorff X, y a partir de esta, encontrar monoides inversos que generalicen las características del monoide inverso de Möbius. En ese sentido, se restringe de manera usual la acción Λ a $Y \subseteq X$ abierto y denso. Con lo cual, a cada homeomorfismo $g^* : X \to X$ determinado por la acción Λ asociamos un nuevo dominio

$$dom(g) := \{y \in Y : \ g \cdot y \in Y\} = Y \cap g^{*-1}(Y).$$

Como resultado de esto, obtenemos un conjunto que pretende tomar el papel de T, a saber:

$$Part(G, Y) := \{g^*|_{dom(g)} : \ g \in G\}.$$

Siguiendo la misma idea de Lawson, consideraremos a $\langle Part(G, Y)\rangle$, el generado de $Part(G, Y) \subseteq I(Y)$. El cual, bajo ciertas condiciones logrará generalizar la estructura del monoide inverso de Möbius. En ese caso diremos que $\langle Part(G, Y)\rangle$ es un **monoide inverso de tipo Möbius**.

Finalmente, al igual que Lawson en [1], se encuentra una tripla de McAlister (G, X, Y) tal que $\langle Part(G, Y)\rangle \cong P(G, X, Y)$.

[2] K. CHOI e Y. LIM. “Inverse Monoids of Möbius Type”. En: *Journal of algebra* 223 (2000), págs. 283-294.

1. PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es presentar algunas nociones básicas de la teoría de semigrupos inversos, como fundamento teórico para este trabajo. A pesar de que solo nos centraremos en los semigrupos inversos, existe toda una teoría que se encarga de estudiar solamente los semigrupos, como se puede ver en [3]

1.1. SEMIGRUPOS INVERSOS

Definición 1.1.1. Sean X y Y dos conjuntos, una función parcial de X en Y es una función de un subconjunto de X en un subconjunto de Y. Aquellas funciones parciales que además son biyecciones, son llamadas biyecciones parciales.

Ejemplo 1.1.1. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ con $ad - bc \neq 0$, y considere $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $\alpha(z) = (az + b)/(cz + d)$, entonces α será una función parcial cuando $c \neq 0$, pues a su dominio no pertenecerá el elemento $-d/c$ y a su rango no pertenecerá a/c. Como mencionamos anteriormente, este tipo de funciones son conocidas como transformaciones de Möbius. Si $c = 0$, simplemente tenemos que $dom(\alpha) = \mathbb{C}$. Además, note que α es una biyección, y su inversa está dada por $\alpha^{-1} : \mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\} \to \mathbb{C} - \{\frac{-d}{c}\}$ definida por $\alpha^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$, de donde α^{-1} es también una transformación de Möbius. Por tanto, las transformaciones de Möbius son biyecciones parciales de $\mathbb{C}$.

Definición 1.1.2. Sea S un semigrupo, un elemento $e \in S$ se llama idempotente si $ee = e$.

---

[3] J. HOWIE. *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press, 1976.

Definición 1.1.3. Un semigrupo S es llamado **semigrupo inverso** si cumple lo siguiente:

1. S es **regular**. Esto es, para todo elemento $a \in S$ existe un elemento $b \in S$ llamado inverso de a tal que $a = aba$ y $b = bab$

2. Los elementos idempotentes de S conmutan

Dado un semigrupo S, el conjunto de los idempotentes de S será denotado por $E(S)$.

Lema 1.1.1. Sea S un semigrupo regular, entonces para cada $a \in S$ y $a^{-1} \in S$ un inverso de a se tiene que $aa^{-1}, a^{-1}a \in E(S)$.

Demostración. Sea $a \in S$ y $a^{-1} \in S$ un inverso del elemento a, entonces tenemos que $(aa^{-1})(aa^{-1}) = a(a^{-1}aa^{-1}) = aa^{-1}$, del mismo modo, $(a^{-1}a)(a^{-1}a) = (a^{-1}aa^{-1})a = a^{-1}a$. $\square$

La siguiente proposición nos da una caracterización de los semigrupos inversos.

Proposición 1.1.1. Sea S un semigrupo regular. Los idempotentes de S conmutan si y solo si, cada elemento de S tiene un único inverso.

Demostración. Suponga que los idempotentes de S conmutan, y tome $a \in S$ tal que b y p son inversos de a. Note que ab, ba, ap, pa son idempotentes de S. Por tanto, $b = bab = b(apa)b = (ba)(pa)b = (pa)(ba)b = pab = (pap)ab = p(ab)(ap) = pap = p$.

Suponga ahora que cada elemento de S tiene un único inverso, y sean q y r en $E(S)$. Lo primero que se hace es ver que existe un inverso idempotente de qr. Como S es regular, sea $x = (qr)'$ el inverso de qr. Considere rxq, entonces se tiene que

$$(rxq)^2 = (rxq)(rxq) = r(xqrx)q = rxq,$$

luego rxq es idempotente. Además,

$$(rxq)(qr)(rxq) = r(xqrx)q = rxq \text{ y } (qr)(rxq)(qr) = qrxqr = qr,$$

de donde rxq es un inverso de qr que es idempotente.

Como $x = (qr)'$ y rxq son inversos de qr, entonces $x = rxq$ y x es idempotente. Ahora, x es su propio inverso ya que es idempotente, pero qr también es inverso de x, así $x = qr$ y por tanto qr es idempotente. Con esto se tiene una cerradura de los idempotentes bajo la multiplicación, luego rq también es idempotente. Finalmente, $qr = qrqr = qr(rq)qr$ y $rq = rqrq = rq(qr)rq$, luego qr y rq son ambos inversos de rq, así $qr = rq$. □

De la proposición anterior, tenemos que los semigrupos inversos son precisamente los semigrupos regulares donde cada elemento tiene un único inverso. Es decir, para cada $s \in S$ existe un único $s^{-1} \in S$ tal que $s = ss^{-1}s$ y $s^{-1} = s^{-1}ss^{-1}$.

Ejemplo 1.1.2. Sea G un grupo con identidad 1, sea $P_1(G)$ el conjunto de todos los subconjuntos finitos de G que contienen a 1. Defina

$$\tilde{G}^R = \{(A, g) \in P_1(G) \times G : \; g \in A\}$$

con multiplicación $(A, g)(B, h) = (A \cup gB, gh)$ para $A, B \in P_1(G)$ y $g \in A$, $h \in B$.

Es posible ver que $\tilde{G}^R$ es un monoide inverso con esta operación. En efecto, claramente la operación es asociativa y $(\{1\}, 1)$ es la identidad de $\tilde{G}^R$. Ahora, sea $(A, g) \in P_1(G)$, tenemos que $(g^{-1}A, g^{-1}) \in \tilde{G}^R$ y además se cumple que

$$(A, g)(g^{-1}A, g^{-1})(A, g) = (A, 1)(A, g) = (A, g).$$

Del mismo modo

$$(g^{-1}A, g^{-1})(A, g)(g^{-1}A, g^{-1}) = (g^{-1}A, g^{-1}).$$

Así, cada elemento tiene su propio inverso. Para identificar los elementos idempotentes, notemos que (A, g) es idempotente si y solo si $g = 1$. De esto se tiene que los idempotentes conmutan. Pues si $(A, 1)$ y $(B, 1)$ son idempotentes, entonces

$$(A, 1)(B, 1) = (A \cup B, 1) = (B, 1)(A, 1).$$

Así, $\tilde{G}^R$ es un monoide inverso. Este es conocido como la **Expansión de Birget-Rhodes** de G.

Observación: Sea G un grupo topológico (ver Definición 1.3.3), si en el ejemplo anterior cambiamos la condición de finitud por la de compacidad, es posible definir un monoide inverso que contiene a $\tilde{G}^R$. A saber:

$$\tilde{G}^R_c = \{(A, g) \in C_1(G) \times G : g \in A\}$$

donde $C_1(G)$ es el conjunto de todos los subjuntos compactos de G que contienen 1.

A continuación presentamos un semigrupo inverso que será muy utilizado en el capítulo siguiente.

Ejemplo 1.1.3. Sea X un conjunto, defina

$$I(X) = \{f : A \to B |\ f\ es\ biyectiva\ y\ A, B \subseteq X\}.$$

El conjunto de todas las biyecciones parciales de X. Considere sobre este conjunto la composición usual de funciones, y veamos que $(I(X), \circ)$ es un semigrupo inverso, más aún, un monoide inverso. Este semigrupo es conocido como **Monoide inverso simétrico** de X.

Note que dadas $f, g \in I(X)$, entonces $dom(f \circ g) = g^{-1}(dom(f) \cap im(g))$, y que $im(f \circ g) = f(dom(f) \cap im(g))$. Luego $f \circ g$ es una biyección de su dominio sobre su imagen, y por tanto estaría en $I(X)$. Se tiene la existencia del inverso para cada función, pues estas son biyectivas. Ahora, la conmutatividad entre elementos idempotentes se da, pues podemos ver que $f \in I(X)$ es idempotente si y solo si $f = I_{dom(f)}$. En efecto, sea $f : A \to B$ un elemento de $I(X)$ tal que $f^2 = f$, entonces $B \subseteq A$, además, $(f^{-1})^2 = f^{-1}$, luego $A \subseteq B$. Así, $A = B$. Tome ahora $i \in A$, entonces $f(x) = i$ para algún $x \in A$, y por hipótesis, $f(x) = f(f(x))$, es decir, $i = f(i)$. Por tanto, $f = I_{dom(f)}$.

A continuación definiremos una de las relaciones de orden más importantes que se puede establecer en los semigrupos inversos, y que en los grupos solo sería la relación de igualdad.

Sea S un semigrupo inverso y $a, b \in S$, entonces

$$a \leq b \Leftrightarrow a = bf \text{ para algún } f \in E(S).$$

Veamos algunas propiedades de la relación $\leq$.

Proposición 1.1.2. Sea S un semigrupo inverso. Sean $a, b \in S$, y $\leq$ la relación definida anteriormente, entonces las siguientes son equivalentes:

1. $a \leq b$.
2. $a = eb$ para algún $e \in E(S)$.
3. $a^{-1} \leq b^{-1}$.
4. $a = aa^{-1}b$.
5. $a = ba^{-1}a$.

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Tenemos que $a = bf$, con $f \in E(S)$, entonces se tiene que $a = bb^{-1}bf = bfb^{-1}b = pb$ donde $p = bfb^{-1}$ es idempotente pues $bf(b^{-1}b)fb^{-1} = b(b^{-1}b)ffb^{-1} = bfb^{-1}$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Como $a = eb$ entonces $a^{-1} = b^{-1}e^{-1} = b^{-1}e$ pues $e = e^{-1}$.

$(3) \Rightarrow (4)$ Suponga que $a^{-1} = fb^{-1}$ con $f \in E(S)$, entonces $a = bf = bb^{-1}bf = bfb^{-1}b = (bf)(f^{-1}b^{-1})b = aa^{-1}b$.

$(4) \Rightarrow (5)$ Ya que $a = aa^{-1}b$ entonces tenemos la cadena de igualdades:
$a = aa^{-1}bb^{-1}b = bb^{-1}aa^{-1}b = b(b^{-1}aa^{-1})(aa^{-1}b) = ba^{-1}a$.
$(5) \Rightarrow (1)$ Inmediato pues $a^{-1}a$ es idempotente. $\square$

Ejemplo 1.1.4. Considere un conjunto X y el monoide inverso simétrico $I(X)$. Ya vimos que t es un idempotente de $I(X)$ si y solo si $t = I_{dom(t)}$. Sean $f, g \in I(X)$, entonces $f \leq g$ si y solo si existe un idempotente p de $I(X)$ tal que $f = p \circ g$. Por tanto, si $x \in dom(f)$, entonces $f(x) = p(g(x)) = g(x)$, es decir, $f(x) = g(x)$ para todo $x \in dom(f)$, y por tanto, g es una extensión de f, pues $dom(f) = dom(p \circ g) \subseteq dom(g)$. Es decir, dadas $f, g \in I(X)$, $f \leq g$ si y solo si g es una extensión de f. Debido a esto, la relación $\leq$ sobre $I(X)$ se denotará por $\subseteq$.

Definición 1.1.4. Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, y sea $Q \subseteq P$, decimos que Q es ideal de orden de P si cuando $a \leq b$, con $b \in Q$, entonces $a \in Q$.

Ejemplo 1.1.5. Sea S un semigrupo inverso. Como veremos en la siguiente proposición $\leq$ es un orden parcial sobre S. Sea $a \in S$. Defina $[a] = \{s \in S : s \leq a\}$. Entonces $[a]$ es un ideal de orden de S.

Proposición 1.1.3. Sea S un semigrupo inverso;

1. La relación $\leq$ es un orden parcial en S.

2. Sean $a, b \in E(S)$, entonces $a \leq b$ sii $a = ab = ba$.

3. Si $s \leq t$ y $q \leq r$ entonces $sq \leq tr$.

4. $E(S)$ es ideal de orden de S.

Demostración. (1) Claramente $\leq$ es reflexiva. Veamos que es antisimétrica; si $a \leq b$ y $b \leq a$. Por (4) de la proposición anterior, $a = aa^{-1}b = aa^{-1}bb^{-1}b = bb^{-1}aa^{-1}b = bb^{-1}a = b$. Veamos ahora que la relación es transitiva; sean $a, b, c \in S$ tales que $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a = (aa^{-1}bb^{-1})c = fc$ así, $a \leq c$, ya que f es idempotente.

(2) Si $a \leq b$, entonces $a = aa^{-1}b = aab = ab = ba$. Recíprocamente, si $a = ab$ como $b \in E(S)$, $a \leq b$.

(3) Tenemos que existen f_1 y f_2 en $E(S)$ tal que $s = tf_1$ y $q = f_2r$, entonces, $sq = tf_1f_2r = tf_1f_2rr^{-1}r = trr^{-1}f_1f_2r = tr(r^{-1}fr)$. Donde $f = f_1f_2$. Así, $sq \leq tr$.

(4) Sean $s \in S$ y $e \in E(S)$ tal que $s \leq e$, entonces $s = ss^{-1}e$, luego s es idempotente. $\square$

El orden $\leq$ del que se ha venido hablando, se conoce como **orden parcial natural** de S.

Ahora que tenemos definido el orden parcial natural, podemos hablar de una clase de semigrupos inversos que serán mencionados más adelante en este trabajo. Nos referimos a los monoides inversos **factorizables**. Antes de definir tales semigrupos, recuerde que dado un monoide S, el grupo de unidades de S está compuesto por todos los elementos invertibles de S. Este grupo es denotato por $U(S)$.

Definición 1.1.5. Un monoide inverso S es llamado **factorizable**, si para cada $s \in S$ existe un $t \in U(S)$ tal que $s \leq t$.

Es posible probar que $I(X)$ es factorizable si y solo si X es finito. Además, si X es infinito, se puede mostrar que existe un monoide inverso factorizable F tal que $I(X)$ puede ser encajado en F. Teniendo en cuenta lo anteriormente dicho y el siguiente teorema, podemos probar que todo semigrupo inverso puede ser encajado en un monoide inverso factorizable.

Una demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [4].

Teorema 1.1.1. (Teorema de representación) Sea S un semigrupo inverso, entonces existe un conjunto X y un homomorfismo inyectivo $\theta : S \to I(X)$ tal que

$$a \leq b \text{ si y solo si } \theta(a) \subseteq \theta(b) \text{ para cada } a, b \in S.$$

Teniendo en cuenta el teorema de representación, y las observaciones hechas anteriormente, podemos cocluir que cada semigrupo inverso puede ser encajado en un monoide inverso factorizable.

Usando la parte (2) de la Proposición 1.1.2, veamos que el conjunto de idempotentes de un semigrupo inverso conforma un semirretículo inferior.

Proposición 1.1.4. Sea S cualquier semigrupo. Sobre $E(S)$ considere la siguiente relación:

$$a \leq b \Leftrightarrow a = ab = ba$$

Entonces $\leq$ es un orden parcial en $E(S)$. Si S es un semigrupo inverso, tenemos que $(E(S), \leq)$ es un semirretículo inferior.

---

[4] M. LAWSON. *Inverse semigroups, The Theory of Partial Symmetries*. World Scientific Publishing, 1998.

Demostración. Claramente $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Ahora, para ver que $(E(S), \leq)$ es un semirretículo inferior, siendo S un semigrupo inverso, sean $a, b \in E(S)$ y veamos que $ab = a \wedge b$. Como $ab = (ab)a = a(ab)$ y $ab = (ab)b = b(ab)$ entonces $ab \leq a, b$. Sea $c \in E(S)$ tal que $c \leq a, b$, entonces $c = ac = (ab)c$, así mismo, $c = cb = c(ab)$. Luego $c \leq ab$. $\square$

Sea S un semigrupo inverso, sabemos que si $a \in S$ y $e \in E(S)$ tal que $a \leq e$, entonces $a \in E(S)$. Pero no necesariamente se tiene que si $e \leq a$ entonces $a \in E(S)$, esto se puede ver si tomamos $S = I(X)$, para algún conjunto X. En efecto, sea $X = \{a, b, c, d\}$. Defina $f : \{a, b\} \to \{a, b\}$ como la identidad de $\{a, b\}$, y sea $g : X \to X$ tal que $g(x) = f(x)$ para cada $x \in \{a, b\}$ y $g(c) = d, g(d) = c$. Tenemos que f es idempotente, y $f \subseteq g$, pero g no es idempotente.

Teniendo en cuenta lo anterior, definimos los semigrupos inveros $E - unitarios$.

Definición 1.1.6. Sea S un semigrupo inverso, entonces S es llamado **E-unitario** si cuando a es un idempotente y $a \leq b$ entonces b también es un idempotente.

Ejemplo 1.1.6. Veamos que $\tilde{G}^R$ es $E{-}unitario$. Sea $(A, 1)$ idempotente de $\tilde{G}^R$, y sea $(B, g) \in \tilde{G}^R$ tal que $(A, 1) \leq (B, g)$, entonces $(A, 1) = (A, 1)(A, 1)(B, g) = (A \cup B, g)$, luego $g = 1$ y (B, g) es idempotente.

Es el momento de mencionar ciertas relaciones de equivalencia que se pueden definir sobre los semigrupos inversos. En primer lugar, teniendo en cuenta la propiedad (3) de la Proposición 1.1.3, definimos las relaciones compatibles.

Definición 1.1.7. Sea S un semigrupo y α una relación definida en S. Decimos que α es **compatible a izquierda** con la multiplicación de S, si para cada $s \in S$ y para cada $(a, b) \in \alpha$ se tiene que $(sa, sb) \in \alpha$. La definición de ser compatible a derecha es análoga. Además, α es llamada **compatible** si para (a, b) y (c, d) en α, se tiene que $(ac, bd) \in \alpha$.

Una clase particular de relaciones compatibles definidas sobre semigrupos inversos, son las congruencias. A continuación hablaremos de esta clase de relaciones.

Definición 1.1.8. Sea S un semigrupo y ρ un subconjunto de $S \times S$, decimos que ρ es una congruencia a izquierda (**derecha**), si ρ es una relación de equivalencia y es compatible a izquierda (**derecha**). Además, ρ es llamada congruencia, si es una relación de equivalencia y compatible.

Proposición 1.1.5. Sea S un semigrupo y ρ una relación de equivalencia en S, ρ es una congruencia en S si y solo si ρ es congruencia a derecha y congruencia a izquierda.

Demostración. Si ρ es una congruencia, directamente se tiene que es congruencia a izquierda y a derecha. Supongamos que ρ es una congruencia a izquierda y a derecha, veamos que es una congruencia. Sean $(a, b), (c, d) \in \rho$, queremos ver que $(ac, bd) \in \rho$. Tenemos que $(ac, bc) \in \rho$ por ser congruencia a derecha. y tenemos que $(bc, bd) \in \rho$ por ser congruencia a izquierda. Como ρ es transitiva, entonces $(ac, bd) \in \rho$. $\square$

Las congruencias sobre los semigrupos inversos cumplen el papel análogo de los subgrupos normales en los grupos, ya que si ρ una congruencia sobre un semigrupo S, entonces es posible dar estructura de semigrupo al conjunto cociente S/ρ de manera natural, tomando $a, b \in S$ y definiendo:

$$\rho(a) \cdot \rho(b) = \rho(ab).$$

Podemos ver que esta operación está bien definida por el hecho de que ρ es una congruencia. En efecto, sean $\overline{a} = \overline{b}$ y $\overline{c} = \overline{d}$, veamos que $\overline{ac} = \overline{bd}$. En efecto, ya que $(a, b), (c, d) \in \rho$ se tiene que $(ac, bd) \in \rho$, esto es $\overline{ac} = \overline{bd}$. Además, es fácil ver que $(S/\rho, \cdot)$ es un semigrupo.

Proposición 1.1.6. Si ρ es una congruencia en un semigrupo S, entonces la función $\rho^* : S \to S/\rho$ definida por

$$x \to \bar{x} \; (x \in S)$$

es un homomorfismo.

Por otro lado, si $\alpha : S \to T$ es un homomorfismo, donde S y T son semigrupos, entonces la relación

$$ker(\alpha) = \{(a, b) \in S \times S : \alpha(a) = \alpha(b)\}$$

es una congruencia en S y existe un monomorfismo $\beta : S/ker(\alpha) \to T$ que satisface $Im(\alpha) = Im(\beta)$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "ker(\alpha)^*"'] & T \\
S/\ker(\alpha) \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. Vemos que ρ^* es un homomorfismo de semigrupos pues si s, t en S, entonces $\rho(st) = \overline{st} = \overline{s} \cdot \overline{t} = \rho(s)\rho(t)$. Ahora, sea $\alpha : S \to T$ un homomorfismo de semigrupos, para ver que la relación $ker(\alpha)$ es una congruencia basta mostrar que es compatible con el producto del semigrupo, pues trivialmente es una relación de equivalencia. En ese sentido, sean $(a, b), (c, d) \in ker(\alpha)$, por definición se tiene que $\alpha(a) = \alpha(b)$ y $\alpha(c) = \alpha(d)$, entonces $\alpha(ac) = \alpha(a)\alpha(c) = \alpha(b)\alpha(d) = \alpha(bd)$. Así $(ac, bd) \in ker(\alpha)$.

Finalmente, defina:

$$\begin{aligned} \beta : S/ker(\alpha) &\to T \\ \overline{s} \quad &\to \alpha(s) \end{aligned}$$

Podemos ver que β es homomorfismo pues si $\overline{a}, \overline{b} \in S/ker(\alpha)$, entonces: $\beta(\overline{a} \cdot \overline{b}) = \beta(\overline{ab}) = \alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b) = \beta(a)\beta(b)$. Además, $(\beta \circ ker(\alpha)^*)(s) = \beta(\overline{s}) = \alpha(s)$ para cada $s \in S$, luego el diagrama anterior es conmutativo. Por último, $Im(\alpha) = Im(\beta)$ ya que $t \in Im(\alpha)$ si y solo si $t = \alpha(i)$ para algún $i \in S$, si y solo si $\beta(\bar{i}) = \alpha(i) = t$ $\square$

A continuación, nos centraremos solamente en las congruencias que se pueden establecer sobre semigrupos inversos, y que están relacionadas con el orden parcial natural. En ese sentido, sea S un semigrupo inverso. La relación de compatibilidad a izquierda es definida por

$$a \sim_l b \Leftrightarrow ab^{-1} \in E(S).$$

La relación de compatibilidad a derecha es definida por

$$a \sim_r b \Leftrightarrow a^{-1}b \in E(S).$$

Finalmente, la relación de compatibilidad es definida por

$$a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in E(S) \text{ y } a^{-1}b \in E(S).$$

Definición 1.1.9. Sea S un semigrupo inverso y $A \subseteq S$ no vacío, decimos que A es **compatible** si cada uno de sus elementos son compatibles, es decir, para cada $a, b \in A$ se tiene que $a \sim b$.

La colección de todos los subconjuntos compatibles de un semigrupo inverso tiene ciertas propiedades que son comentadas en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.7. Sea S un semigrupo inverso, un subconjunto A de S es llamado **permisible** si es compatible, y es un ideal de orden. Denotemos por $C(S)$ al conjunto de todos los subconjuntos permisibles de S y veamos que $C(S)$ con la operación

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\} \text{ para cada } A, B \in C(S)$$

es un semigrupo inverso.

En primer lugar, mostremos que esta operación está bien definida. Sean $A, B \in C(S)$, veamos que $AB \in C(S)$. Note que si $e \in E(S)$ y $a \in A$, entonces $ea \in A$. Veamos que AB es un ideal de orden; en efecto, sea $c \in S$ y $ab \in AB$ tal que $c \leq ab$, entonces por la Proposición 1.1.2, tenemos que $c = cc^{-1}ab = (ea)b \in AB$ pues $ea \in A$ por lo dicho anteriormente. Es fácil ver que AB es un subconjunto compatible de S, por tanto $AB \in C(S)$.

Como S es un semigrupo, entonces $C(S)$ también será un semigrupo. Veamos ahora que $C(S)$ es un semigrupo inverso. Sea $A \in C(S)$, defina $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$, veamos que $A = AA^{-1}A$ y que $A^{-1} = A^{-1}AA^{-1}$. Es claro que $A \subseteq AA^{-1}A$, veamos que $AA^{-1}A \subseteq A$; sea $ab^{-1}c \in AA^{-1}A$, como A es compatible, entonces $ab^{-1} \in E(S)$, y como $c \in A$, se tiene que $ab^{-1}c \in A$.

Por último mostremos que los idempotentes de $C(S)$ conmutan. En primer lugar, note que si A es un idempotente de $C(S)$, entonces $A \subseteq E(S)$, pues si $a \in A$, entonces $a = bc$, con $b, c \in A$, por tanto, como $a = aa^{-1}a$, entonces $a = (ac^{-1})(b^{-1}a)$ y ya que A es compatible, entonces $a \in E(S)$. Así, el hecho de que los idempotentes conmuten es trivial, pues S es semigrupo inverso.

Veamos que si S es $E - unitario$, entonces $C(S)$ también lo es. En primer lugar, veamos cómo se comporta el orden paricial netural sobre $C(S)$. Sean $A, B \in C(S)$ tal que $A \leq B$, entonces $A = AA^{-1}B$, como B es ideal de orden, tenemos que $A \subseteq B$. Recípricamente, sea que $A \subseteq B$, veamos que $A = AA^{-1}B$. En efecto, sea $a \in A$, entonces $a = aa^{-1}a \in B$. Sea $ab^{-1}c \in AA^{-1}B$, como B es compatible, entonces $b^{-1}c$ es idempotente. Por tanto, $a(b^{-1}c) \leq a$, y ya que A es ideal de orden,

$ab^{-1}c \in A$. En conclusión, $A \leq B$ si y solo si $A \subseteq B$.

Suponga que S es unitario. Tome $A \in E(C(S))$ y $B \in C(S)$ tal que $A \leq B$, veamos que $B \subseteq E(S)$ y así concluimos que $B \in E(C(S))$. En efecto, tome $b \in B$, como B es compatible, entonces $b \sim a$ para cualquier $a \in A$, entonces ab^{-1} es idempotente, y por tanto, $ab^{-1}b \leq a, b$. Como $a \in E(S)$, y $E(S)$ es ideal de orden, entonces $ab^{-1}b \in E(S)$, y como S es $E-unitario$, entonces $b \in E(S)$ que es lo que queríamos probar.

El siguiente es un resultado que se usará más adelante.

Proposición 1.1.7. Sea S un semigrupo inverso, y $a, b \in S$, entonces:

1. $a \sim_l b$ sii existe $a \wedge b$ y $(a \wedge b)^{-1}(a \wedge b) = a^{-1}ab^{-1}b$.
2. $a \sim_r b$ sii existe $a \wedge b$ y $(a \wedge b)(a \wedge b)^{-1} = aa^{-1}bb^{-1}$.
3. $a \sim b$ sii existe $a \wedge b$ tal que $(a \wedge b)^{-1}(a \wedge b) = a^{-1}ab^{-1}b$, y además se tiene que $(a \wedge b)(a \wedge b)^{-1} = aa^{-1}bb^{-1}$.

Demostración. (1). Ya que $a \sim_l b$, por definición $ab^{-1} \in E(S)$, defina $r = ab^{-1}b$, entonces $r \leq a, b$. Veamos que r es la máxima cota inferior. Sea $p \leq a, b$, así $pp^{-1} \leq ab^{-1}$, de donde $p \leq ab^{-1}b = r$, y $r = a \wedge b$, además, $r^{-1}r = a^{-1}ab^{-1}b$. Recíprocamente, ya que existe $a \wedge b$, entonces $(a \wedge b)^{-1} \leq a^{-1}$, luego $(a \wedge b)^{-1}(a \wedge b) \leq a^{-1}b$, esto es, $a^{-1}ab^{-1}b \leq a^{-1}b$, así, $ab^{-1} \leq aa^{-1}bb^{-1} \in E(S)$. Por tanto, $ab^{-1} \in E(S)$. Las demostraciones de (2) y (3) son análogas. $\square$

Definimos ahora una de las congruencias más importantes, la cual está relacionada con la relación $\sim$ cuando el semigrupo inverso es $E - unitario$.

Considere un semigrupo inverso S, y defina sobre él la siguiente relación

$$(a,b) \in \sigma \Leftrightarrow c \leq a, b \text{ para algún } c \in S$$

Proposición 1.1.8. Sea S un semigrupo inverso, entonces

1. σ es la congruencia más pequeña que contiene la relación de compatibilidad.
2. S/σ es un grupo.
3. Si ρ es una congruencia en S tal que S/ρ es un grupo, entonces $\sigma \subseteq \rho$.

Demostración. Antes de empezar la prueba considere lo siguiente; tome $t \in S$, defina

$$[t] = \{s \in S : s \leq t\}$$

En el Ejemplo 5 vimos que $[t]$ es un ideal de orden. Veamos que $[t]$ es compatible. Sean $c, d \in [t]$, entonces $cd^{-1} \leq tt^{-1}$, y por tanto $c \sim_l d$. Del mismo modo se ve que $c \sim_r d$, y por tanto $[t]$ es un ideal de orden compatible, luego es permisible por definición. Sabiendo esto, iniciemos la demostración.

(1) Veamos primero que σ es una congruencia en S. Note que la reflexividad y simetría de la relación, son inmediatas. Veamos ahora la transitividad, sean $(a,b), (b,c) \in \sigma$, entonces existen $s, t \in S$ tal que $s \leq a, b$ y $t \leq b, c$. Por tanto, $s, t \in \sigma(b)$, luego son compatibles, y por la Proposición 1.1.7, $s \wedge t$ existe, así, $s \wedge t \leq a, c$, luego $(a,c) \in \sigma$. Es fácil ver que σ es una relación compatible con el producto de S. Vemos que $\sim \subseteq \sigma$ pues si $(a,b) \in \sim$, entonces existe $a \wedge b$ luego $(a,b) \in \sigma$.

(2) Como σ es una congruencia, entonces S/σ es un semigrupo. Veamos que S/σ tiene un elemento identidad. Sea $e \in E(S)$, veamos que para todo $\sigma(a) \in S/\sigma$, $\sigma(a) \cdot \sigma(e) = \sigma(a) = \sigma(e) \cdot \sigma(a)$. Sea $x \in \sigma(ae)$, entonces existe $t \in S$ tal que $t \leq ae, x$, entonces $t \leq x, a$, así $x \in \sigma(a)$. Sea ahora $x \in \sigma(a)$, entonces existe t tal que $t \leq a, x$, entonces $te \leq ae$ y $te \leq t \leq x$, luego $x \in \sigma(ae)$. Debemos ver que solo hay un elemento identidad, y esto se tiene ya que si $e, f \in E(S)$, $\sigma(e) = \sigma(f)$, pues $ef \leq e, f$. Ahora, sea $\sigma(a) \in S/\sigma$, entonces $\sigma(a)\sigma(a^{-1}) = \overline{e}$, pues aa^{-1} es idempotente. Así, cada elemento tiene inverso, y S/σ es un grupo.

(3) Sea ρ una congruencia en S tal que S/ρ es un grupo, veamos que $\sigma \subseteq \rho$. Ya que S/ρ es un grupo, $\rho(e) = \rho(f)$ para cualesquiera $e, f \in E(S)$. Pues el elemento identidad es único. Veamos entonces que $\sim \subseteq \rho$. Sea $(a, b) \in \sim$, entonces $ab^{-1} \in E(S)$, luego $\rho(ab^{-1}) = \rho(bb^{-1})$, así, $\rho(ab^{-1})\rho(b) = \rho(bb^{-1})\rho(b)$, de donde $\rho(a) = \rho(b)$. Por la parte (1) se tiene que $\sigma \subseteq \rho$. $\square$

La congruencia σ es llamada la **mínima congruencia de grupo**.

A continuación, definimos los semigrupos $F - inversos$, los cuales, como veremos posteriormente, son monoides inversos $E - unitarios$.

Definición 1.1.10. Un semigrupo inverso es llamado **F-inverso**, si cada $\sigma - clase$ tiene supremo.

Un ejemplo sencillo de monoide $F - inverso$, es la expansión de Birget-Rhodes $\tilde{G}^R$ de un grupo G, como veremos a continuación.

Ejemplo 1.1.8. Sea G un grupo, y considere $\tilde{G}^R$. Sea $(A, g) \in \tilde{G}^R$, veamos que $(\{1, g\}, g)$ es el supremo de $\sigma(A, g)$. Sea $(B, h) \in \sigma(A, g)$, entonces existe $(C, t) \in \tilde{G}^R$ tal que $(C, t) \leq (A, g), (B, h)$ y por tanto $t = h = g$. Así, $(B, g) \leq (\{1, g\}, g)$ pues $\{1, g\} \subseteq B$. Por último, note que (T, p) es otra cota superior de $\sigma(A, g)$, en particular $(A, g) \leq (T, p)$ de donde $g = p$ y $(T, g) \leq (\{1, g\}, g)$.

Como mencionamos anteriormente, la congruencia σ está relacionada con $\sim$ bajo ciertas condiciones sobre el semigrupo. Para ver esta relación de manera más amplia, veamos la siguiente definición:

Definición 1.1.11. Sea S un semigrupo inverso, una congruencia ρ en S es llamada idempotente pura si cuando $(a, e) \in \rho$ y e es idempotente, entonces a es idempotente.

Proposición 1.1.9. Una congruencia ρ es idempotente pura si y solo si $\rho \subseteq \sim$.

Demostración. Suponga que ρ es idempotente pura, y sea $(a, b) \in \rho$, tenemos entonces que $(ab^{-1}, bb^{-1}) \in \rho$, y como ρ es idempotente pura, $a \sim_l b$. Del mismo modo podemos ver que $a \sim_r b$, y así $a \sim b$.
Suponga que $\rho \subseteq \sim$. Tome $e \in E(S)$ y $a \in S$ tal que $(a, e) \in \rho$, entonces $(a^{-1}, e) \in \rho$ y $(e, a^{-1}a) \in \rho$. Así, $(a, a^{-1}a) \in \rho$, y ya que $\rho \subseteq \sim$, entonces $aa^{-1}a = a \in E(S)$. □

Con esto en mente, veamos la siguiente proposición.

Proposición 1.1.10. Sea S un semigrupo inverso, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. S es $E - unitario$.

2. $\sigma = \sim$.

3. σ es idempotente pura.

4. $\sigma(e) = E(S)$ para cualquier idempotente e.

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Solo hace falta ver que $\sigma \subseteq \sim$. Sea $(a, b) \in \sigma$, entonces existe $u \in S$ tal que $uu^{-1} \leq ab^{-1}$, así $(a, b) \in \sim_l$. De manera similar, $(a, b) \in \sim_r$. Las demás equivalencias son inmediatas.

$(2) \Rightarrow (3)$ Por la Proposición 1.1.9 es inmediato.

$(3) \Rightarrow (4)$ Sea $e \in E(S)$, tenemos $E(S) \subseteq \sigma(e)$ pues si $f \in E(S)$, entonces $fe \leq e, f$. La otra contenencia se tiene pues σ es idempotente pura.

$(4) \Rightarrow (1)$ Sea $e \in E(S)$ y $a \in S$ tal que $e \leq a$, entonces $(a, e) \in \sigma$ y por tanto $a \in E(S)$. $\square$

A continuación mencionamos las relaciones de Green, las cuales se pueden definir sin que los semigrupos sean inversos. Estas relaciones se utilizarán en la segunda parte de este trabajo.

Definición 1.1.12. Sea S un semigrupo inverso, definimos las relaciones L y R como sigue:

$$(a, b) \in L \text{ sii } a^{-1}a = b^{-1}b \;\; a, b \in S,$$

$$(a, b) \in R \text{ sii } aa^{-1} = bb^{-1}.$$

Note que L y R son relaciones de equivalencia, y si se toman $(a, b) \in L$, y $c \in S$, ya que $a^{-1}a = b^{-1}b$, tenemos que $c^{-1}a^{-1}ac = c^{-1}b^{-1}bc$, de donde $(ac, bc) \in L$. Es decir, L es congruencua a derecha. Del mismo modo se puede probar que R es congruencia a izquierda.

Notación: Dado S un semigrupo inverso y T una relación de Green, denotamos por T_a a la clase de equivalencia del elemento a, para cada $a \in S$.

Definimos ahora la relación de Green D como la relación de equivalencia más pequeña que contiene tanto a L como a R.

Proposición 1.1.11. Sea S un semigrupo inverso, la relación de equivalencia más pequeña que contiene a L y a R es $L \circ R = R \circ L$.

Demostración. Claramente, $L \circ R$ es una relación de equivalencia. Note que si $(a, b) \in L$, entonces $(a, b) \in L \circ R$, pues $(b, b) \in R$, de donde $L \subseteq L \circ R$. De manera análoga se tiene que $R \subseteq L \circ R$. Ahora, suponga que ρ es una relación de equivalencia tal que $L, R \subseteq \rho$. Sea $(a,b) \in L \circ R$, entonces existe un $c \in S$ tal que $(a,c) \in L$ y $(c,b) \in R$, ya que ρ es transitiva, $(a,b) \in \rho$. Veamos que $L \circ R = R \circ L$. Sea $(a,b) \in L \circ R$, entonces existe r tal que $a^{-1}a = r^{-1}r$ y $rr^{-1} = bb^{-1}$. Sea $p = ar^{-1}b$, entonces tenemos que $aa^{-1} = pp^{-1}$, $p^{-1}p = b^{-1}b$. Por tanto, $(a,b) \in R \circ L$. De manera similar, $R \circ L \subseteq L \circ R$. $\square$

Las relaciones L y R dan paso a la siguiente definición.

Definición 1.1.13. Sea $\theta : S \to T$ un homomorfismo entre semigrupos inversos, y sea K una relación de Green, decimos que θ es $K-inyectivo$ si para cada $e \in E(S)$, se tiene que $\theta|_{K_e} : K_e \to K_{\theta(e)}$ es inyectivo. Donde K_e es la clase de equivalencia que contiene al elemento e. La definición de $K - sobreyectivo$ es análoga.

Proposición 1.1.12. Sea $\theta : S \to T$ un homomorfismo, las siguientes afirmaciones sonequivalentes.

1. θ es $L - inyectivo$.

2. θ es $R - inyectivo$.

3. Si $\theta(a)$ es idempotente, entonces a es idempotente.

Demostración. $(1) \Rightarrow (2)$ Sean $e \in E(S)$ y $a, b \in R_e$ tal que $\theta(a) = \theta(b)$. Entonces $\theta(a^{-1}) = \theta(b^{-1})$, y por la $L - inyectividad$, $a^{-1} = b^{-1}$, luego $a = b$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Note que $a \in R_{aa^{-1}}$ y que $\theta(a) = \theta(aa^{-1})$, así, $a = aa^{-1}$ y a es idempotente.

$(3) \Rightarrow (1)$ Sea $e \in E(S)$, y $a, b \in L_e$ tal que $\theta(a) = \theta(b)$, entonces $\theta(ab^{-1})$ es idempotente y por tanto, $ab^{-1} \in E(S)$. Teniendo en cuenta que $(a,b) \in L$ tenemos;
$a = aa^{-1}a = (ab^{-1})b \leq b$. De manera análoga, $b \leq a$ y tenemos que $a = b$. $\square$

Con la proposición anterior, es fácil ver que un semigrupo inverso S es $E-unitario$ si y solo si $\sigma^* : S \to S/\sigma$ es $L-inyectivo$. En efecto, si S es $E-unitario$, tomemos $a \in S$ tal que $\sigma^*(a) = \sigma(a)$ es idempotente. Entonces $\sigma(a) = \sigma(e)$ para cualquier idempotente e. Como σ es idempotente pura, entonces $a \in E(S)$, y por (3) de la proposición anterior σ^* es $L-inyectivo$. Recíprocamente, veamos que σ es idempotente pura. Sea $(a, e) \in \sigma$, donde $e \in E(S)$, entonces $\sigma(a)$ es idempotente, y por la proposición anterior, esto implica que $a \in E(S)$, luego σ es idempotente pura.
Usando el comentario anterior, podemos probar ver que los semigrupos $F-inversos$ son $E-unitarios$ ya que si $e \in E(S)$ y $a, b \in L_e$ tal que $\sigma(a) = \sigma(b)$, entonces el supremos de las clases $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$ coinciden, luego existe $f \in S$ tal que $a, b \leq f$. Así, $a = fa^{-1}a = fb^{-1}b = b$. Luego σ^* es $L-inyectivo$.

1.2. PRODUCTO SEMIDIRECTO Y TRIPLAS DE MCALISTER

En esta sección definimos el producto semidirecto entre semigrupos inversos, el cual será fundamental en el desarrollo de este trabajo. Como veremos en esta sección, los productos semidirectos de semirretículos por grupos son un ejemplo sencillo de semigrupos inversos $E-unitarios$. Posteriormente hablaremos de las triplas de McAlister y de la relación que estas tienen con los productos semidirectos.

Producto semidirecto clásico

Considere dos semigrupos inversos T y K, con T actuando por endomorfismos sobre K. Esto es, para cada $t \in T$ existe $\phi_t : K \to K$ denotada por $\phi_t(k) = t \cdot k$, que satisface:

1. $\phi_t(ab) = \phi_t(a)\ \phi_t(b)$.

2. $\phi_{tu}(a) = \phi_t(\phi_u(a))$.

Además, si T tiene 1, ϕ satisface $\phi_1(a) = a$ para cada $a \in K$.

Se define el **producto semidirecto clásico** de K por T denotato por $K * T$ como el conjunto $K \times T$, bajo la operación:

$$(a, g)(b, h) = (a(g \cdot b), gh) \text{ para cada } a, b \in K \text{ y } g, h \in T.$$

Vemos que la operación anterior es asociativa pues si $(a, g), (b, h), (c, i) \in K \times T$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}((a, g)(b, h))(c, i) = (a(g \cdot b), gh)(c, i) = (a(g \cdot b)(gh \cdot c), ghi) = (a\ g \cdot (b(h \cdot c)), ghi) \\ = (a, g)(b(h \cdot c), hi) = (a, g)((b, h)(c, i)).\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.1. Sea S un semigrupo inverso, y considere $E(S)$ el semirretículo de idempotentes de S. Defina la operación $\rho : S \times E(S) \to E(S)$ dada por $\rho(t, e) = tet^{-1}$ para cada $(t, e) \in S \times E(S)$. Veamos que ρ satisface las condiciones 1 y 2 de la definición anterior. En efecto, sea $t \in S$ y considere $\rho_t : E(S) \to E(S)$, tenemos entonces:

$$\rho_t(ab) = t(ab)t^{-1} = tt^{-1}tabt^{-1} = (tat^{-1})(tbt^{-1}) = \rho_t(a)\rho_t(b).$$

La condición 2 se ve de inmediato, pues

$$\rho_{th}(a) = (th)a(th)^{-1} = t(hah^{-1})t^{-1} = \rho_t(\rho_h(a)).$$

Note que $(e, t) \in E(S) \times S$ es idempotente si y solo si $t \in E(S)$, y $e \leq t$. Por tanto, los idempotentes no necesariamente conmutan. En efecto, sean $(e, f), (h, g)$ idempotentes de $E(S) \times S$, teniendo en cuenta que los idempotentes de S conmutan, tenemos que $(e, f)(h, g) = (efh, fg)$ y $(h, g)(e, f) = (egh, fg)$, pero no necesariamente $efh = egh$. Por tanto no podrá ser un semigrupo inverso.

Como vimos anteriormente, el producto semidirecto entre semigrupos inversos no necesariamente es un semigrupo inverso. Sin embargo, dando unas condiciones más específicas sobre T y K, podemos mostrar que dicho producto si es un semigrupo inverso. Primero recordemos lo siguiente:

Definición 1.2.1. Sea $(X, \leq_X)$ un conjunto parcialmente ordenado, un automorfismo de orden de X es una biyección $f : X \to X$ tal que si $a \leq_X b$, entonces $f(x) \leq_X f(y)$ para cada $x, y \in X$.

Sea T un grupo y K un semirretículo, sin pérdida de generalidad, supongamos que K es un semirretículo inferior. Decimos que T actúa sobre K mediante automorfismos de orden, si existe una acción $\rho : T \times K \to K$ tal que, para cada $t \in T$ $\rho_t : K \to K$ es un automorfismo de orden.

Note que si T actúa mediante automorfismos de orden sobre K, entonces T actúa por endomorfismos sobre K. En efecto, la condición 2 de la definición se satisface, pues ρ es una acción. Veamos ahora que para cada $t \in T$, y $a, b \in K$ se tiene que

$$t \cdot (a \wedge b) = t \cdot a \wedge t \cdot b.$$

en efecto, vemos que $t \cdot (a \wedge b) \leq_K t \cdot a, t \cdot b$ pues T actúa mediante automorfismos de orden. Por tanto, $t \cdot (a \wedge b) \leq_K (t \cdot a \wedge t \cdot b)$. Por otro lado, $t^{-1} \cdot (t \cdot a \wedge t \cdot b) \leq_K (a \wedge b)$, por el caso anterior. Entonces, $(t \cdot a \wedge t \cdot b) \leq_K t \cdot (a \wedge b)$.

Definimos el producto semidirecto del semirretículo K por el grupo T, que en este caso denotaremos por $P(T, K)$, de la misma forma que describimos anteriormente, es decir, el conjunto $K \times T$ con la operación

$$(k, t)(l, u) = (k \wedge (t \cdot u), tu) \text{ para cada } (k, t), (l, u) \in K \times T$$

Proposición 1.2.1. Sea G un grupo y Y un semirretículo inferior, de tal forma que G actúa sobre Y por automorfismos de orden. Entonces $P(G, Y)$ es un semigrupo inverso $E - unitario$, con semirretículo de idempotentes isomorfo a Y, tanto como conjuntos parcialmente ordenados, como semigrupos inversos. Además, $P(G,Y)/\sigma$ es isomorfo a G.

Demostración. En líneas previas ya vimos que la operción es asociativa. Veamos que cada elemento tiene inverso. En efecto, sea $(k,g) \in P(G,Y)$, entonces tenemos:

$$(k,g)(g^{-1} \cdot k, g^{-1})(k,g) = (k,1)(k,g) = (k,g).$$

también se tiene que

$$(g^{-1} \cdot k, g^{-1})(k,g)(g^{-1} \cdot k, g^{-1}) = (g^{-1} \cdot k, 1)(g^{-1} \cdot k, g^{-1}) = (g^{-1} \cdot k, g^{-1}).$$

Por tanto, $(k,g)^{-1} = (g^{-1} \cdot k, g^{-1})$.

Note que $(k,g) \in P(G,Y)$ es idempotente si y solo si $g = 1$. Así, tomando a $(k,1),(l,1)$ idempotentes, tenemos que $(k,1)(l,1) = (k \wedge l, 1) = (l \wedge k, 1) = (l,1)(k,1)$. De donde $P(G,Y)$ es un semigrupo inverso. Ahora, suponga que $(k,1) \leq (l,g)$ para algún $(l,g) \in P(G,Y)$, entonces $(k,1) = (k \wedge l, g)$ de donde $g = 1$ y (l,g) es idempotente. Con esto tenemos que $P(G,Y)$ es $E - unitario$.

Ya que $E(P(G,Y)) = Y \times \{1\}$, entonces $i : E(P(G,Y)) \to Y$ definida por $i(y,1) = y$ para cada $y \in Y$, es un isomorfismo de orden pues si $(y,1) \leq (z,1)$, entonces $(y,1) = (y \wedge z, 1)$, luego $y \leq_Y z$. Además, también es un homomorfismo de semigrupos. En efecto, sean $(y,1),(z,1)$ idempotentes de $P(G,Y)$, entonces

$$i((y,1)(z,1)) = i((y \wedge z, 1)) = y \wedge z = i(y,1) \wedge i(z,1).$$

Solo nos falta mostrar que $P(G,Y)/\sigma$ es isomorfo a G. Para ello, note que si tomamos $(k,g),(l,h)$ en $P(G,Y)$ tal que $(k,g) \leq (l,h)$ entonces $(k,g) = (k \wedge l, h)$ de donde $g = h$. Así, para cada $(k,l) \in P(G,Y)$ se tiene $\sigma(k,l) = B \times \{l\}$, con $B \subseteq K$. Tenieno en cuenta esto, se define:

$$\begin{aligned} T : P(G,Y)/\sigma &\to G \\ \sigma(y,g) \quad &\to g \end{aligned}$$

T es homomorfismo pues

$$T(\sigma(k,g)\sigma(l,h)) = T(\sigma(k \wedge g \cdot l, gh)) = gh = T(\sigma(k,g))T(\sigma(l,h)).$$

Ya que claramente T es sobreyectiva, veamos la inyectividad. Sean $\sigma(k,g), \sigma(l,h)$ en $P(G,Y)/\sigma$ tal que $g = h$, entonces tomando $(k \wedge l, g)$, tenemos que $(k \wedge l, g) \leq (k,g), (l,h)$ y las σ- clases son iguales. $\square$

Triplas de McAlister

Introduciremos el concepto de tripla de McAlister pues este será fundamental en este trabajo, ya que mediante este analizaremos la estructura de los Monoides inversos de tipo Möbius.

Sea G un grupo y X un conjunto parcialmente ordenado, supongamos que G actúa sobre X mediante automorfismos de orden. Sea Y un subconjunto de X parcialmente ordenado por el orden inducido. Se dice que (G,X,Y) es una tripla de McAlister si se cumple lo siguiente:

1. Y es un ideal de orden de X, y un semirretículo inferior.
2. $G \cdot Y = Y$.
3. $g \cdot Y \cap Y \neq \emptyset$ para cada $g \in G$.

Si (G,X,Y) una tripla de McAlister. Definimos

$$P(G,X,Y) = \{(y,g) \in Y \times G : g^{-1} \cdot y \in Y\}.$$

Teorema 1.2.1. Considere una tripla de McAlister (G, X, Y) y sobre $P(G, X, Y)$ defina el producto:

$$(a, b)(c, d) = (a \wedge b \cdot c, bd)$$

Entonces $P(G, X, Y)$ es un semigrpo inverso E-unitario, con semirretículo de idempotentes isomorfo a Y, y $P(G, X, Y)/\sigma$ es isomorfo a G.

Demostración. Sean $(a, b), (c, d) \in P(G, X, Y)$. Veamos que $(a \wedge b \cdot c, bd)$ existe, y $(a \wedge b \cdot c, bd)$ está en $P(G, X, Y)$. Ya que $b^{-1}a \in Y$, entonces existe $r = c \wedge b^{-1}a$ y cumple que $r \leq c, b^{-1}a$. Como G actúa en X por automorfismos de orden, $b \cdot r \leq b \cdot c, a$. Pero $b \cdot r = b \cdot (c \wedge b^{-1}a) = b \cdot c \wedge a$, y ya que $br \leq a$, $br \in Y$.
Ahora veamos que $d^{-1}b^{-1} \cdot (a \wedge b \cdot c) \in Y$. En efecto, como $a \wedge b \cdot c \leq b \cdot c$, entonces $b^{-1}(a \wedge b \cdot c) \leq c$, y por tanto $d^{-1}b^{-1}(a \wedge b \cdot c) \leq d^{-1}c \in Y$, así, $d^{-1}b^{-1}(a \wedge b \cdot c)$ está en Y, pues Y es ideal de orden.

Sabemos que esta operación es asociativa. Veamos que $P(G, X, Y)$ es un semigrupo inverso. Sea $(a, b) \in P(G, X, Y)$, note que $(b^{-1}a, b^{-1}) \in P(G, X, Y)$ y satisface que

$$(a, b) = (a, b)(b^{-1}a, b^{-1})(a, b) \text{ y } (b^{-1}a, b^{-1}) = (b^{-1}a, b^{-1})(a, b)(b^{-1}a, b^{-1}).$$

Luego cada elemento de $P(G, X, Y)$ tiene inverso.

Note que si $(a, g) \in E(P(G, X, Y))$, entonces $(a, g) = (a, g)(a, g) = (a \wedge ga, gg)$, luego $gg = g$, y por tanto $g = 1$. Recíprocamente, sea $(y, 1) \in P(G, X, Y)$, entonces $(y, 1)(y, 1) = (y, 1)$, luego $E(P(G, X, Y)) = \{(y, 1) : \ y \in Y\}$. De esto se tiene inmediatamente que los idempotentes de $P(G, X, Y)$ conmutan. Así, $P(G, X, Y)$ es un semigrupo inverso. Además, utilizando la misma función de la demostración de la proposición anterior, es inmediato que Y es isomomorfo a $E(P(G, X, Y))$.

Veamos que $P(G,X,Y)$ es $E - unitario$. En fecto, sea $(y,1) \in E(P(G,X,Y))$ y (a,g) en $P(G,X,Y)$, tal que $(y,1) \leq (a,g)$, entonces $(y,1) = (y,1)(a,g) = (y \wedge a, g)$, por tanto $g = 1$, y $(a,g) \in E(P)$.
Veamos que $P(G,X,Y)/\sigma \simeq G$. Por definición, para todo $(y,g) \in P(G,X,Y)$

$$\sigma(y,g) = \{(a,b) : \ (a,b)\sigma(y,g)\}$$

Note que $(a,b) \in \sigma(y,g)$ si y solo si $b = g$. Ya que si $(a,b)\sigma(y,g)$, existe (s,t) tal que $(s,t) \leq (a,b),(y,g)$, luego $t = b = g$. Recíprocamente, si $b = g$, como Y es semirretículo inferior, $(a \wedge y, g) \leq (a,g),(y,g)$. Sabiendo esto, defina:

$$\begin{aligned} T : P(G,X,Y)/\sigma &\to G \\ \sigma(y,g) \qquad &\to g \end{aligned}$$

Es fácil ver que T es monomorfismo. Veamos que es sobre; sea $g \in G$, por definición $g^{-1} \cdot Y \cap Y \neq \emptyset$, luego existe $y \in Y$ tal que $(y,g) \in P(G,X,Y)$, así $T(\sigma(y,g)) = g$. $\square$

Note que $P(G,X,Y)$ es un subsemigrupo inverso de $P(G,X)$, cuando X sea una semirretículo inferior (para que $P(G,X)$ esté definido), y que cuando $X = Y$, tenemos que $P(G,X,Y) = P(G,X)$. A continuación describimos otras relaciones que hay entre $P(G,X)$ y $P(G,X,Y)$, las cuales motivan una de las definiciones fundamentales de este trabajo, la definición de agrandamiento.

Proposición 1.2.2. Sea (G,X,Y) una tripla de McAlister, con X un semirretículo inferior, entonces se cumplen las siguientes:

1. $E(P(G,X,Y))$ es un ideal de orden de $E(P(G,X))$.

2. Si (x,g) $P(G,X)$ es tal que $(x,g)(x,g)^{-1}, (x,g)^{-1}(x,g) \in P(G,X,Y)$, entonces $(x,g) \in P(G,X,Y)$.

3. Si $(x,1)$ es idempotente de $P(G,X)$, entonces existe un idempotente $(y,1)$ de $P(G,X,Y)$ tal que $(x,1)D(y,1)$.

Demostración. (1) Sean $(y,1)$ y $(x,1)$ idempotentes de $P(G,X,Y)$ y $P(G,X)$ respectivamente, tal que $(x,1) \leq (y,1)$, entonces $x \leq y$, y como Y es ideal de orden, $x \in Y$ y $(x,1)$ es idempotente de $P(G,X,Y)$.

(2) Sea $(x,g) \in P(G,X)$ que cumple la hipótesis. Ya que $(x,g)(g^{-1} \cdot x, g^{-1}) = (x,1) \in P(G,X,Y)$, entonces $x \in Y$. Además, ya que $(g^{-1} \cdot x, g^{-1})(x,g) = (g^{-1} \cdot x, 1) \in P(G,X,Y)$, entonces $g^{-1} \cdot x \in Y$. De esto, $(x,g) \in P(G,X,Y)$.

(3) Sea $(x,1)$ idempotente de $P(G,X)$, como (G,X,Y) es una tripla de McAlister, $G \cdot Y = X$, por tanto existen $y \in Y$ y $h \in G$ tal que $h \cdot y = x$, por tanto, $y = h^{-1} \cdot x$. Defina $p = (x,h)$, entonces $pp^{-1} = (x,h)(h^{-1} \cdot x, h^{-1}) = (x,1)$, luego $(x,1)R(x,h)$. Además, $p^{-1}p = (h^{-1} \cdot x, h^{-1})(x,h) = (h^{-1} \cdot x, 1) = (y,1)$. Luego $(x,h)L(y,1)$. Así, $(x,1)D(y,1)$.

□

1.3. GRUPOS TOPOLÓGICOS

Ya que trabajaremos con el concepto de grupo topológico, utilizamos esta sección para dar algunos ejemplos de estos objetos matemáticos. Para un estudio más detallado, se puede consultar [5].

Definición 1.3.1. Sea (X,τ) un espacio topológico, una familia $\beta \subseteq \tau$ es llamada base de τ, si para cada $U \in \tau$, existe $\alpha \subseteq \beta$ tal que $U = \bigcup_{A \in \alpha} A$. En este caso, se dice que τ es generada por la base β.

Notación: Sea X un conjunto no vacío, y $S \subseteq P(X)$. Denotamos al conjunto compuesto de todas las intersecciones finitas de elementos de S, por S^*.

[5] T. HUSAIN. *Introduction to topological groups*. Saunders company, 1996.

Definición 1.3.2. Sea (X, τ) un espacio topológico. Una familia $\eta \subseteq \tau$ es subbase de τ si η^* es base de τ.

Ejemplo 1.3.1. Sea (X, τ) un espacio topológico, defina:

$$CL(X) = \{A \subseteq X : A\ es\ cerrado\ y\ A \neq \emptyset\}$$

Sean $U_1, U_2 \cdots U_n$ abiertos de X. Definimos:

$$\langle U_1, \cdots, U_n \rangle = \{A \in CL(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i\ y\ A \cap U_i \neq \emptyset\ para\ cada\ i \in \{1, 2, \cdots n\}\}$$

Veamos que $\beta_V = \{\langle U_1, \cdots, U_n \rangle : U_i \in \tau\ para\ cada\ i\}$ es base de alguna topología sobre $CL(X)$. Dicha topología es conocida como Topología de $Vietoris$, y $CL(X)$ es un ejemplo de hiperespacio.

Para ver que β_V es base de alguna topología, defina:

$$S = \{\langle X, U \rangle : U\ es\ abierto\ de\ X\} \cup \{\langle W \rangle : W\ es\ abierto\ de\ X\}.$$

Veamos que $\beta_V = S^*$. Sea $\langle U_1, \cdots, U_n \rangle \in \beta_V$. Note que:

$$\langle U_1, \cdots, U_n \rangle = \langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle \cap \cdots \cap \langle X, U_n \rangle \cap \langle \cup_{i=1}^{n} U_i \rangle.$$

En efecto, sea $A \in \langle U_1, \cdots, U_n \rangle$, entonces $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2 \cdots, n\}$. Así, $A \in \langle X, U_i \rangle$ para cada $i \in \{1, 2 \cdots n\}$. Además, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, por tanto, $A \in \langle \cup_{i=1}^{n} U_i \rangle$.

Para probar que $S^* \subseteq \beta_V$, primero veamos que la intersección de cualesquiera dos elementos de S, pertenece a β_V.

$Caso\ 1$. $\langle X, U \rangle \cap \langle X, V \rangle = \langle X, U, V \rangle$.

$Caso\ 2$. $\langle V \rangle \cap \langle W \rangle = \langle V \cap W \rangle$.

$Caso\ 3$. $\langle X, U \rangle \cap \langle V \rangle = \langle V, V \cap U \rangle$.

Sabiendo esto, solo falta verificar que la intersección de dos elementos de β_V pertenece a β_V. En efecto, sean $\langle U_1, \cdots, U_n \rangle, \langle V_1, \cdots, V_k \rangle$ en β_V. Sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, $V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$, veamos que:

$$\langle U_1, \cdots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \cdots, V_k \rangle = \langle U_1 \cap V, \cdots, U_n \cap V, V_1 \cap U, \cdots V_k \cap U \rangle$$

Sea A en la intersección, entonces $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2 \cdots n\}$ y $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_i$, por tanto, $A \cap (U_i \cap V) \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \cdots n\}$. De manera análoga, $A \cap (V_i \cap U) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots k\}$. Solo falta ver que

$$A \subseteq ((U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n) \cap V) \cup ((V_1 \cup \cdots \cup V_k) \cap U) = U \cap V$$

Esto se tiene pues $A \in \langle U_1, \cdots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \cdots, V_k \rangle$.
Sea que $A \in \langle U_1 \cap V, \cdots, U_n \cap V, V_1 \cap U, \cdots V_k \cap U \rangle$, entonces $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2 \cdots n\}$ y $A \cap V_j \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, 2 \cdots k\}$. Además, también se tiene que $A \subseteq ((U_1 \cup \cdots \cup U_n) \cap V) \cup ((V_1 \cup \cdots V_k) \cap U) = U \cap V$, de donde $A \subseteq U$ y $A \subseteq V$. Con esto conluimos que el conjunto de todas las intersecciones finitas de S es β_V. Por tanto, β_V es base de una topología sobre $CL(X)$.

Posteriormente daremos la topología de Vietoris al conjunto compuesto por los subconjuntos compactos de un grupo topológico. Por ahora, definimos este objeto matemático.

Definición 1.3.3. Un espacio topológico G que es también un grupo, es llamada **grupo semitopológico** si la función:

$$\begin{aligned} g_1 : G \times G &\to G \\ (x, y) &\to xy \quad \forall x, y \in G \end{aligned}$$

es continua en cada variable por separado.
Por otro lado, G es llamado **grupo topológico** si g_1 es continua en ambas variables a la vez, y la función:

$$\begin{aligned} g_2 : G &\to G \\ x &\to x^{-1} \qquad \forall x \in G \end{aligned}$$

es continua.

A continuación mostramos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.3.2. Veamos que no todo grupo semitopológico es un grupo topológico. Considere la recta $\mathbb{R}$, y para cada $x \in \mathbb{R}$ defina:

$$B_x = \{[x, x + \tfrac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$$

Defina

$$\tau_l = \{U \subseteq \mathbb{R} : \; si\; x \in U\; existe\; B \in B_x\; tal\; que\; B \subseteq U\}$$

Es fácil ver que τ_l es una topología sobre $\mathbb{R}$. En efecto, $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ están en τ_l. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de elementos de τ. Para ver que $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ está en τ_l, sea $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$, entonces $x \in U_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$, y por tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[x, x+\frac{1}{n}] \subseteq U_\alpha \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$. Ahora, sean $U, V \in \tau$, y tomemos $x \in U \cap V$, entonces existen $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $[x, x + \frac{1}{k}] \subseteq U$ y $[x, x + \frac{1}{k}] \subseteq V$, de donde $[x, x + \frac{1}{n+k}] \subseteq U \cap V$. El espacio topológico resultante se acostumbra a denotar $\mathbb{R}_l$ y se llama **recta de Sorgenfrey**.

Considere a $(\mathbb{R}, +, \tau_l)$. Veamos que $f : \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}_l$ definida por $f(x, y) = x + y$ para cada $x, y \in \mathbb{R}_l$ es continua. En efecto, sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_l \times \mathbb{R}_l$, y sea U una vecindad de $x_0 + y_0$, así, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[x_0 + y_0, x_0 + y_0 + \frac{1}{k}) \subseteq U$. Defina $U_1 = [x_0, x_0 + \frac{1}{2k})$ y $U_2 = [y_o, y_o + \frac{1}{2k})$, entonces tenemos que $f(U_1 \times U_2) \subseteq [x_0 + y_0, x_0 + y_0 + \frac{1}{k}) \subseteq U$, luego f es continua en todo punto. Así, $(\mathbb{R}, +, \tau_l)$ es un grupo semitopológico.
Veamos que $g : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}_l$ definida por $g(x) = -x$ no es continua. En efecto, sea $[0, \frac{1}{2})$ una vecindad de cero, y sea U cualquier abierto de $\mathbb{R}_l$ que contiene a 0, se tendría entonces que $[0, \frac{1}{k}) \subseteq U$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Así, $f(U)$ no está contenido en $[0, \frac{1}{2})$ y f no será continua en cero.

Para el siguiente ejemplo, recordemos la siguiente definición:

Definición 1.3.4. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde U es abierto de $\mathbb{R}^n$. Decimos que f es diferenciable en $a \in U$, si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que $f(a + h) = f(a) + T(h) + r(h)$, donde $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{||h||} = 0$.

Observación: Note que si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en el punto $a \in U$, entonces es continua en a. En efecto, por definición de diferenciabilidad se tiene que $f(a+h) = f(a) + T(h) + r(h)$, donde $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, y $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{||h||} = 0$, por tanto, $\lim_{h\to 0}[f(a+h) - f(a)] = \lim_{h\to 0} T(h)$, pero como T es una transformación lineal definida en un espacio de dimensión finita, entonces es continua, en particular es continua en 0, de donde se tiene que $\lim_{h\to 0}[f(a+h) - f(a)] = 0$, luego f es continua en a.

Ejemplo 1.3.3. Veamos que $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \ det(A) \neq 0\}$ es un grupo semitopológico con la topología de $\mathbb{R}^{n^2}$. Primero veamos que $f : GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ dada por $f(A,B) = AB$ es continua. Para ellos mostraremos que toda aplicación bilineal $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable. Sea $(a,b), h = (u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, tenemos que
$\varphi((a,b) + (u,v)) - \varphi(a,b) = \varphi(a+u, b+v) - \varphi(a,b)$
$= \varphi(a, b+v) + \varphi(u, b+v) - \varphi(a,b) = \varphi(a,v) + \varphi(u,b) + \varphi(u,v)$ luego nuestro candidato a ser el residuo es $r(h) = \varphi(u,v)$. Para ello deberíamos ver que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{||h||} = 0$.
Si llegara a existir $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $||\varphi(u,v)|| \leq c||u||\ ||v||$ tendríamos que

$$||\frac{r(h)}{||h||}|| = ||\frac{\varphi(u,v)}{||h||}|| \leq \frac{c||u||\ ||v||}{||h||} \leq \frac{c||h||\ ||h||}{||h||} \leq c||h||$$

y $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{||h||} = 0$.

Veamos que realmente existe este c.
Sea que $u = \sum_{i=1}^{m} u_i e_i$ y $v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j$. Así,

$$\varphi(u,v) = \varphi(\textstyle\sum_{i=1}^{m} u_i e_i, \sum_{j=1}^{n} v_j e_j) = \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} v_j\ \varphi(e_i, e_j).$$

Sea M=máx$\{||\varphi(e_i, e_j)|| : 1 \leq i, j \leq m\}$, con esto tenemos

$$||\varphi(u,v)|| = ||\sum_{i=1}^m u_i \sum_{j=1}^n v_j\ \varphi(e_i,e_j)|| \leq \sum_{i=1}^m |u_i| \sum_{j=1}^n |v_j|\ ||\varphi(e_i,e_j)||$$

$$\leq M \sum_{i=1}^m |u_i| \sum_{j=1}^n |v_j| \leq Mm||u||\ n||v|| = c||u||\ ||v||.$$

Ya que f es bilineal, tenemos que es diferenciable y por tanto continua.

Para el siguiente ejemplo, recordemos que ya hemos encontrado una subbase para la topología de Vietoris definida sobre $CL(X)$, y en ninguna parte de la demostración hemos usado las características de los elementos de $CL(X)$.

Ejemplo 1.3.4. En primer lugar, considere un grupo topológico G, y sea $C(G)$ el conjunto de todos los subconjuntos compactos y no vacíos de G. Definamos sobre $C(G)$ la topología de Vietoris, esto es, la topología generada por la subbase:

$$S = \{\langle U\rangle : U\ es\ abierto\ de\ G\} \cup \{\langle V, G\rangle : V\ es\ abierto\ de\ G\}$$

donde

$$\langle U_1, U_2, \cdots, U_n\rangle = \{A \in C(G)\ tal\ que\ A \cap U_i \neq \emptyset\ para\ i \in \{1,2,\cdots n\}\ y\ A \subseteq \cup_{i=1}^n U_i\}$$

Ya hemos visto que el conjunto de todas las intersecciones finitas de S es precisamente el conjunto $B = \{\langle U_1, U_2, \cdots, U_n\rangle :\ U_i\ es\ abierto\ de\ G\ para\ i \in \{1,2,\cdots n\}\}$. Veamos que $C(G)$ con la topología de Vietoris y con la multiplicación usual es un semigrupo topológico. Para ello, denote por g la función de multiplicación del grupo G. Y sea

$$\begin{aligned} P : C(G) \times C(G) &\to C(G) \\ (A,B) \qquad &\to AB \end{aligned}$$

para cada $A, B \in C(G)$, donde $AB = \{ab :\ a \in A, b \in B\}$.

En primer lugar, note que la operación está bien definida pues AB es compacto, ya que $A \times B$ es un compacto de $G \times G$, y g es continua. Para ver que P es continua, sea $\langle U_1, U_2, \cdots, U_n \rangle$ una vecindad básica de AB, entonces $AB \subseteq \cup_{i=1}^{n} U_i$, por tanto $A \times B \subseteq g^{-1}(AB) \subseteq \cup_{i=1}^{n} g^{-1}(U_i)$. Como todo grupo topológico es regular, entonces para cada $(a, b) \in A \times B$ existen abiertos C_a, D_b tal que $(a, b) \in C_a \times D_b \subseteq g^{-1}(\cup_{i=1}^{n} U_i)$. Sea $C = \cup_{a \in A} C_a$ y $D = \cup_{b \in B} D_b$, entonces C y D son abiertos que contienen a A y B respectivamente. Sabemos que $AB \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \cdots n\}$. Definamos $\{(a_{ij}, b_{ij})\}_{i \in J} = (A \times B) \cap g^{-1}(U_i)$. Nuevamente por la regularidad, tenemos la existencia de abiertos H_{ij}, S_{ij} de G tal que $(a_{ij}, b_{ij}) \in H_{ij} \times S_{ij} \subseteq g^{-1}(U_i)$. Sea $H_i = \bigcup_{j \in J} H_{ij}$ y $S_i = \bigcup_{j \in J} S_{ij}$. Entonces H_i, S_i son abiertos tales que $AB \cap U_i \subseteq H_i S_i$, y además $H_i S_i \subseteq U_i$. Defina $H = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$ y $S = \bigcap_{i=1}^{n} S_i$, veamos que $\langle C \rangle \cap \langle C, H \rangle$ y $\langle D \rangle \cap \langle D, S \rangle$ son vecindades de Vietoris de A y B. En efecto, $A \in \langle C \rangle$ pues $A \subseteq C$, y por la construcción, $A \cap H \neq \emptyset$. Del mismo modo, $B \in \langle D \rangle \cap \langle D, S \rangle$. Sea ahora $Z \in \langle C \rangle \cap \langle C, H \rangle$ y $Y \in \langle D \rangle \cap \langle D, S \rangle$, entonces $ZY \subseteq CD \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Sea $k \in \{1, 2, \cdots n\}$, como $Z \cap H \neq \subseteq$, existe $z \in Z \cap H_k$, del mismo modo existe $y \in Y \cap S_k$, así, $zy \in H_k S_k \subseteq U_k$.

Con lo anterior, hemos mostrado que $C(G)$ con la topología de Vietoris y la multiplicación definida por la función P, es un semigrupo topológico.

En el siguiente ejemplo, nos olvidamos de la estructura topológica de $C(G)$, y lo consideramos como un semirretículo superior. Además, damos nuestro primer ejemplo de producto semidirecto de un semirretículo por un grupo.

Ejemplo 1.3.5. Sea G un grupo, claramente $(C(G), \subseteq)$ es un semirretículo superior. Por tanto, si definimos $m : C(G) \times C(G) \to C(G)$ por $m(A, B) = A \cup B$ para $A, B \in C(G)$, tenemos que $(C(G), m)$ es un semigrupo inverso. Defina $\alpha : G \times (C(G), m) \to (C(G), m)$ por $\alpha(g, A) = gA$. Note que α es bien definida ya que gA es compacto.

Tenemos entonces que para cada $g \in G$ existe $\alpha_g : C(G) \to C(G)$ tal que $\alpha_g(A) = gA$. Note que para cada $g \in G$, α_g es un endomorfismo pues $\alpha_g(m(A,B)) = \alpha_g(A \cup B) = gA \cup gB = m(\alpha_g(A), \alpha_g(B))$. Y claramente G actúa por automorfismos de orden sobre $C(G)$. En efecto, sea $g \in G$, si $A, B \in C(G)$ tal que $A \subseteq B$, entonces $gA \subseteq gB$. Luego α_g preserva el orden. Sea $A \in C(G)$, sea $g^{-1}A \in C(G)$, entonces $\alpha_g(g^{-1}A) = A$. La inyectividad se da pues si $gA = gB$, entonces $g^{-1}gA = A = g^{-1}gB$. Se define entonces el producto semidirecto $P(G, C(G))$ con la operación usual $(A,g)(B,h) = (A \cup gB, gh)$. Es fácil ver que $\tilde{G}_c^R$ es un submomoide inverso de $P(G, C(G))$.
Recordemos que $\tilde{G}_c^R = \{(A,g) \in C_1(G) \times G : g \in A\}$, con la operación que hereda de $P(G, C(G))$. Donde $C_1(G)$ es el conjunto de todos los subconjuntos compactos de G que contienen a 1.

Ejemplo 1.3.6. Sea (X, τ) un espacio topológico, y $G \subseteq X^X$ de funciones continuas, de tal forma que $(G, \circ)$ sea un grupo con la composición usual de funciones. Veamos que $(G, \circ, \tau_p)$ es un grupo semitopológico, donde τ_p es la topolgía de convergencia puntual. Defina $T : G \times G \to G$ tal que $(f,g) \to f \circ g$ para cada $f, g \in G$. Tomemos $f_1, g_1 \in G$ y sea W una vecindad de $f_1 \circ g_1$ en G, sabemos que $W = G \cap U$ donde U es una vecindad de $f_1 \circ g_1$ en X^X. Por tanto, existe $J \subseteq X$ finito, y Z_j abierto de $X_j = X$ para $j \in J$, tal que $f_1 \circ g_1 \in G \cap (\cap_{j \in J} \pi_j^{-1}(Z_j)) \subseteq U \cap G = W$. Tenemos entonces que $\pi_j(f_1 \circ g_1) \in Z_j$, entonces $f_1 \in \cap_{i \in J} \pi_{g_1(j)}^{-1}(Z_j)$ que es un abierto de X^X, y por tanto, $f_1 \in G \cap (\cap_{i \in J} \pi_{g_1(j)}^{-1}(Z_j))$ que es abierto de G. Además, para cada $h \in G \cap (\cap_{i \in J} \pi_{g_1(j)}^{-1}(Z_j))$, tenemos que $h \circ g_1 \in G \cap (\cap_{j \in J} \pi_j^{-1}(Z_j))$. En efecto, tenemos que $\pi_{g_1(j)}(h) \in Z_j$, luego $(h \circ g_1)(j) \in Z_j$ para cada $j \in J$, y como G es grupo $h \circ g_1 \in G$. Así, T es continua en la primera variable. Veamos que T es continua en la segunda variable. Sabemos que $f_1 \circ g_1 \in G \cap (\cap_{j \in J} \pi_j^{-1}(Z_j)) \subseteq U \cap G = W$, luego $g_1(j) \in f_1^{-1}(Z_j)$ para cada $j \in J$. Así, $g_1 \in \cap_{j \in J} \pi_j^{-1}(f_1^{-1}(Z_j))$, que es un abierto de X^X pues f_1 es continua. Así, tenemos que $g_1 \in G \cap (\cap_{j \in J} \pi_j^{-1}(f_1^{-1}(Z_j)))$

abierto de G. Además, para cada $h \in G \cap (\cap_{j\in J}\pi_j^{-1}(f_1^{-1}(Z_j)))$ se tiene que $f_1 \circ h \in G \cap (\cap_{j\in J}\pi_j^{-1}(Z_j))$, en efecto, $\pi_j(h) \in f_1^{-1}(Z_j)$, es decir, $(f_1 \circ h)(j) \in Z_j$ para cada $j \in J$, como G es grupo, $f_1 \circ h \in G$.

Proposición 1.3.1. Sea G un espacio topológico que también es un grupo. G es un grupo topológico si y solo si

$$\begin{aligned} g_3 &: G \times G \to G \\ &(x,y) \to xy^{-1} \quad \forall x,y \in G \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Sea $g_1 : G \times G \to G$ tal que $g_1(g,h) = gh$ para cada $g,h \in G$, y $g_2 : G \to G$ tal que $g_2(g) = g^{-1}$ para cada $g \in G$.
Veamos que g_3 es continua. En efecto, sea $(x_0,y_0) \in G \times G$, y sea W una vecindad de $x_0y_0^{-1}$, como g_1 es continua en (x_0,y_0^{-1}), existe $U_1 \times V_1$ abierto de $G \times G$ tal que $(x_0,y_0^{-1}) \in U_1 \times V_1$, y $U_1V_1 \subseteq W$. Ahora, ya que g_2 es continua en y_0, existe V_2 vecindad de y_0 tal que $V_2^{-1} \subseteq V_1$, así, $U_1 \times V_2$ es vecindad de (x_0,y_0) y $U_1V_2^{-1} \subseteq U_1V_1 \subseteq W$. Así, g_3 es continua en cada punto.

Recíprocamente, veamos primero que g_2 es continua. Sea $y_0 \in G$, y W una vecindad de y_0^{-1}, como g_3 es continua en $(1,y_0)$ existe $U \times V$ vencidad de $(1,y_0)$ tal que $UV^{-1} \subseteq W$. Note que V es una vecindad de y_0, y $V^{-1} \subseteq UV^{-1} \subseteq W$. Así, g_2 es continua.
Finalmente veamos que g_1 es continua. En efecto, sea $(x_0,y_0) \in G \times G$ y sea W una vecindad de x_0y_0, como g_3 es continua en (x_0,y_0^{-1}) existe $U \times V$ vecindad de (x_0,y_o^{-1}) tal que $UV^{-1} \subseteq W$. Ahora, ya que g_2 es continua en y_0, existe P vecindad de y_0 tal que $P^{-1} \subseteq V$. Tenemos entonces que $U \times P$ es una vecindad de (x_0,y_0) y $UP \subseteq UV^{-1} \subseteq W$. Luego g_1 es continua.

$\square$

Es fácil ver que si G es un grupo semitopológico, entonces para cada $a \in G$

$$r_a : G \to G \text{ tal que } r_a(x) = xa, \text{ y } l_a : G \to G \text{ tal que } l_a(x) = ax$$

son homeomorfismos. Por tanto, $i_a : G \to G$ tal que $i_a(x) = axa^{-1}$ es homeomorfismo. De esto se puede concluir que si F es un cerrado de G, y $a \in G$, entonces aF y Fa son cerrados. Esto se tiene pues $Fa = r_{a^{-1}}^{-1}(F)$ y $aF = l_{a^{-1}}^{-1}(F)$. Por la misma razón, si U es un abierto y $a \in G$ aU y Ua son abiertos.

Ejemplo 1.3.7. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos topológicos, veamos que f es continua si y solo si f es continua en 1_G. En efecto, suponga que f es continua en 1_G. Sea $x \in G$ arbitrario, y W una vecindad de $f(x)$, entonces $f(x)^{-1}W$ es una vecindad de $1_H = f(1_G)$, luego existe V vecindad de 1_G tal que $f(V) \subseteq f(x)^{-1}W$, note que xV es una vecindad de x, y $f(xV) = f(x)f(V) \subseteq f(x)f(x)^{-1}W = W$, y f será continua.

Del ejemplo anterior, vemos la importancia de tener un sistema de vecindades para la identidad de un grupo topológico G. Más aún, es fácil ver que si U_{1_G} es el sistema de vecindades de 1_G, y U_x el sistema de vecindades de $x \in G$, entonces $xU_{1_G} = U_{1_G}x = U_x$.
Recordemos la siguiente definición antes de presentar el Teorema 1.3.1.

Definición 1.3.5. Sea X un conjunto, $\zeta \subseteq P(X)$ es un filtro, si satisface las siguientes propiedades:

1. $\zeta \neq \emptyset$;

2. $\emptyset \notin \zeta$;

3. $A \cap B \in \zeta$ para cada $A, B \in \zeta$;

4. Si $A \in \zeta$, y $A \subseteq B$, entonces $B \in \zeta$.

Teorema 1.3.1. Sea $(G, \tau, \cdot)$ un grupo topológico y U_{1_G} el sistema de vecindades de 1_G, entonces:

1. Para cada $U \in U_{1_G}$, existe un $V \in U_{1_G}$ tal que $V \cdot V \subseteq U$
2. Para cada $U \in U_{1_G}$, existe un $V \in U_{1_G}$ tal que $V^{-1} \subseteq U$
3. Para cada $U \in U_{1_G}$, y $a \in G$ existe un $V \in U_{1_G}$ tal que $aVa^{-1} \subseteq U$.

Recíprocamente, si δ es un filtro de G que satisface (1),(2) y (3), existe una única topología τ tal que $(G, \tau, \cdot)$ es un grupo topológico, y δ coincide con el sistema de vecindades de 1_G.

Demostración. (1), (2) y (3) son inmediatas. Veamos el recíproco.
Definda

$$\tau = \{U \subseteq G : \; si \; x \in U, \; existe \; D \in \delta \; tal \; que \; xD \subseteq U\}$$

Claramente τ es una topología sobre G. En efeto, G y $\emptyset$ están en τ. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, una familia de elementos de τ, y sea $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, entonces existe un $D \in \delta$ tal que $xD \subseteq U_\alpha$ para algún $\alpha \in A$, así, $xD \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, luego la unión infinita de elementos de τ, está en τ. Sean U, V elementos de τ, y sea $x \in U \cap V$, entonces existen $D, K \in \delta$ tal que $xD \subseteq U$, $xK \subseteq V$, como δ es un filtro, $P = K \cap D \in \delta$, luego $xP \subseteq U \cap V$.
Vemos que δ coincide con el sistema de vecindades de 1_G. En efecto, si U es una vecindad de 1_G, entonces existe un $D \in \delta$ tal que $1_G D = D \subseteq U$, y como δ es un filtro, entonces $U \in \delta$. Ahora, sea $D \in \delta$, entonces existe $V \in \delta$ tal que $VV \subseteq D$, así mismo, existe un $W \in \delta$ tal que $W^{-1} \subseteq V$, note que $W \cap V \neq \emptyset$ porque δ es un filtro, así $(V \cap W)(V \cap W)^{-1} \subseteq VW^{-1} \subseteq VV \subseteq D$, en ese sentido, tome $i \in V \cap W$, así, $ii^{-1} = 1_G \in D$. Luego D es una vecindad de 1_G. Finalmente, veamos que G es un grupo topológico con esta topología. En primer lugar, note que si $x \in G$, y V_x es el filtro de todas las vecindades de x, entonces $x\delta = V_x$. Veamos que $g : G \times G \to G$

tal que $(x, y) \to xy^{-1}$ para cada $(x, y) \in G \times G$ es continua. Sea W una vecindad de xy^{-1}, existe $V \in \delta$ tal que $xy^{-1}V \subseteq W$, existe $U \in \delta$ tal que $Uy^{-1} \subseteq y^{-1}V$. Sea $L \in \delta$ tal que $L \cdot L^{-1} \subseteq U$, note que xL y yL son vecindades de x, y respectivamente. Entonces $xLL^{-1}y^{-1} \subseteq xUy^{-1} \subseteq xy^{-1}V \subseteq W$, y la aplicación sería continua. $\square$

Sigamos mostrando algunas características sencillas que tiene el sistema de vecindades de la identidad en un grupo topológico.

Definición 1.3.6. Dado un grupo topológico G, un subconjunto U de G se llama simétrico si $U = U^{-1}$

Partiendo del hecho de que en un grupo topológico G, la función $g : G \to G$ definida por $g(x) = x^{-1}$ para $x \in G$ es un homeomorfismo, se puede ver que la identidad 1_G tiene una base vecindades simétricas. Más aún, para cada vecindad W de 1_G, y para cada subconjunto $\{\epsilon_1\epsilon_2 \cdots \epsilon_k\}$ con $\epsilon_i \in \{1, -1\}$, existe una vecindad simétrica U de 1_G tal que $U^{\epsilon_1}U^{\epsilon_2} \cdots U^{\epsilon_k} \subseteq W$.

Veamos como se relaciona la adherencia de cualquier subconjunto de un grupo topológico, con el filtro de vecindades de la identidad.

Proposición 1.3.2. Sea $B \subseteq G$ con G un grupo topológico, y sea Λ el filtro de todas las vecindades de 1_G, entonces:

$$\overline{B} = \bigcap_{A\in\Lambda} BA = \bigcap_{A\in\Lambda} AB$$

Demostración. Sea $b \in \overline{B}$, y sea A vecindad simétrica de 1_G, entonces $bA \cap B \neq \emptyset$, sea $i \in bA \cap B$, esto es, $i = ba'$, con $a' \in A$, luego $b = ia'^{-1}$, luego $b \in BA$. Sea ahora $b \in \cap_{A\in\Lambda} BA$, y sea P una vecindad de b, por tanto $P = bA$ para algún $A \in \Lambda$. Como 1_G tiene una base de vecindades simétricas, existe V vecindad simétrica de 1_G tal que $bV \subseteq bA = P$. Ahora, $b \in BV$, luego $b = b'v$ para algún $b' \in B$, así, $b' = bv^{-1}$, pero $v^{-1} \in V$ pues V es simétrica, así, $b' \in P$. Luego $P \cap B \neq \emptyset$. La otra igualdad es análoga. $\square$

Corolario 1.3.1. Cada grupo topológico es un espacio regular.

Demostración. En primer lugar, recuerde que si U es vecindad de la identidad, entonces existe V vecindad de la identidad tal que $V \cdot V \subseteq U$. Por el teorema anterior, $\overline{V} \subseteq VV \subseteq U$. Sea aW una vecindad de $a \in G$, entonces existe V vecindad de la identidad tal que $a\overline{V} \subseteq aW$, luego cada elemento de G tiene una base de vecindades cerradas. $\square$

2. UN MONOIDE INVERSO ASOCIADO A UNA ACCIÓN DE GRUPO

2.1. EL MONOIDE INVERSO DE MÖBIUS

En esta sección buscamos exponer la motivación de asociarle un monoide inverso, a una acción de grupo. Antes de presentar dicha motivación, recordemos la siguiente definición.

Definición 2.1.1. Sea G un grupo discreto y X un espacio topológico. Una acción topológica parcial del grupo G sobre el espacio X es una pareja $\theta = (\{D_g\}, \{\theta_g\})$ donde D_g es un abierto de X para cada $g \in G$, y $\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ un homeomorfismo. Estos cumplen las siguientes:

1. $D_1 = X$ y θ_1 es la identidad de X.

2. $\theta_g \circ \theta_h \subseteq \theta_{gh}$.

Si para cada $g \in G$ se tiene que $D_g = X$, θ será una topológica global.

Obervación: Note que $\theta_{g^{-1}} \circ \theta_g, \theta_g \circ \theta_{g^{-1}} \subseteq \theta_1$, por tanto, $\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}$.

Ejemplo 2.1.1. Considere el grupo topológico $GL_2(\mathbb{C})$. Es fácil ver su centro es:

$$C(GL_2(\mathbb{C})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} - \{0\} \right\}$$

Sea $PGL_2(\mathbb{C})$ el grupo topológico $GL_2(\mathbb{C})/C(GL_2(\mathbb{C}))$ con la topología discreta, y considere el espacio topológico $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ conocido como plano complejo ampliado, que tiene las siguiente aritmética:

1. $a \cdot \infty = \infty$ para cada $a \in \mathbb{C}^*$.

2. $\frac{a}{\infty} = 0$ para cada $a \in \mathbb{C} - \{0\}$.

3. $a + \infty = \infty + a = \infty$ para cada $a \in \mathbb{C}^*$.

4. $\frac{a}{0} = \infty$ para cada $a \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Además, dotamos a $\mathbb{C}^*$ de la compactación de Alexandroff, esto es

$$\tau^* = \tau_{\mathbb{C}} \cup \{A \subseteq \mathbb{C}^* : \ \mathbb{C} - A \ compacto \ en \ \mathbb{C}\}$$

Donde $\tau_{\mathbb{C}}$ es la topología generada por la métrica usual de $\mathbb{C}$.

Observación: Note que si $U_p = \{z \in \mathbb{C} : |z| > p\} \cup \{\infty\}$ entonces $\{U_p : \ p > 0\}$ es una base de vecindades de ∞. En efecto, sea $A \in \tau^*$ tal que $\infty \in A$, entonces $\mathbb{C} - A$ es compacto en $\mathbb{C}$, luego es acotado, así, existe $p > 0$ tal que si $z \in \mathbb{C} - A$, entonces $|z| \leq p$, luego $U_p \subseteq A$.

Teniendo en cuenta lo anterior, defina la siguiente aplicación $\Delta : PGL_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, dada por

$$\Delta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} C(GL_2(\mathbb{C})), z\right) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d}, & si \ z \neq \infty \\ \dfrac{a}{c}, & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Vemos que Δ está bien definida pues no depende de la matriz que se tome en la clase lateral.

Buscamos ver que Δ determina una acción topológica global. En ese sentido, para cada $\overline{A} \in PGL_2(\mathbb{C})$, asociamos la función $\Delta_{\overline{A}} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ definida por $\Delta_{\overline{A}}(z) = \Delta(\overline{A}, z)$.

Veamos que $\Delta_{\overline{A}}$ es un homeomorfismo, para cada $\overline{A} \in PGL_2(\mathbb{C})$.

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$, tenemos que $\Delta_{\overline{A}} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ está dada por

$$\Delta_{\overline{A}}(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & si\ z \neq \infty \\ \frac{a}{c}, & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Sea $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, vemos que $B \in GL_2(\mathbb{C})$ y además $\Delta_{\overline{B}} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ es dada por

$$\Delta_{\overline{B}}(z) = \begin{cases} \frac{dz-b}{-cz+a}, & si\ z \neq \infty \\ \frac{-d}{c}, & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Es fácil notar que $\overline{A} \circ \overline{B} = \overline{B} \circ \overline{A} = I_{\mathbb{C}^*}$. Además, $\overline{AB} = \overline{BA} = \overline{1}$. Haciendo unos pequeños cálculos, podemos ver que $\Delta_{\overline{A}}$ es continua para cada $\overline{A} \in PGL_2(\mathbb{C})$.

Otra particularidad que tiene la aplicación Δ, es que es una acción efectiva. Recordemos que dado un grupo G y un conjunto X, una acción $\phi : G \times X \to X$ dada por $\phi(g, x) :=\ gx$ es llamada efectiva, si

$$\{g \in G :\ gx = x\ \forall x \in X\} = \{1\}.$$

Para mostrar que Δ es efectiva, considere sea $\overline{A} \in PGL_2(\mathbb{C})$ tal que $\Delta(\overline{A}, z) = z$ para cada $z \in \mathbb{C}^*$, veamos que A está en el centro de $GL_2(\mathbb{C})$.

Supongamos que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Tenemos que para cada $z \in \mathbb{C}^*$ vale que $\frac{az+b}{cz+d} = z$.

$Caso\ z = 0$: Se tiene que $\frac{b}{d} = 0$, de donde $b = 0$ o $d = \infty$. Pero si $d = \infty$, entonces $\frac{a+b}{c+\infty} = 1$, lo cual es absurdo. Así, $b = 0$.

$Caso\ z = \frac{-d}{c}$**:** Para $z = \frac{-d}{c}$, tenemos que $\Delta(\overline{A}, \frac{-d}{c}) = \frac{-d}{c}$, esto es, $\frac{d}{c} = 0$ de donde $d = \infty$ o $c = 0$, pero ya vimos que d no es cero, así, $c = 0$. Es inmediato ahora que $a = d$, y por tanto que $\overline{A} = PGL_2(\mathbb{C})$.

Finalmente, rescatamos otra particularidad de la acción Δ, a saber, $\mathbb{C}$ no es invariante bajo esta. Es decir, no es cierto que para cada $A \in GL_2(\mathbb{C})$ se tiene que $\Delta_A(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$. En efecto, si tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, tenemos que $\Delta(\overline{A}, \frac{-4}{3}) = \infty \notin \mathbb{C}$.

Ya que $\mathbb{C}$ no es invariante bajo Δ, si queremos restringir Δ a $\mathbb{C}$, obtendremos una acción parcial. A continuación definimos este concepto.

Como se puede ver en [6] que dada una acción global η de un grupo G en un espacio Y, se puede construir una acción topológica parcial restringiendo η a $X \subseteq Y$ abierto, de la siguiente manera:

$$D_g = \eta_g(X) \cap X$$

Entonces, si definimos θ_g como $\eta_g|_{D_{g^{-1}}}$, se tiene que:

$$\theta_g(D_{g^{-1}}) = \eta_g(\eta_{g^{-1}}(X) \cap X) = X \cap \eta_g(X) = D_g.$$

Con lo cual, $\theta_g : D_{g^{-1}} \to D_g$. Ahora veamos que $\theta_g \circ \theta_h \subseteq \theta_{gh}$, en efecto, note que

$$dom(\theta_g \circ \theta_h) = \eta_{h^{-1}}(\eta_h(X) \cap X \cap \eta_{g^{-1}}(X)) \subseteq X \cap \eta_{(gh)^{-1}}(X) = dom(\theta_{gh}).$$

Y naturalmente, $\theta_g \circ \theta_h$ coincide con θ_{gh} en el dominio de $\theta_g \circ \theta_h$, pues ellas son restricciones de $\eta_g \circ \eta_h$ y η_{gh}, respectivamente.

---

[6] R. EXEL. *Partial Dynamical Systems Fell Bundles and Aplications*. Universidad Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, 2014.

Teniendo en cuenta lo anterior, se hará una restricción de Δ a $\mathbb{C}$ como sigue:

Se $\overline{A} \in PGL_2(\mathbb{C})$ y $\Delta_{\overline{A}} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Se define:

$$D_{\overline{A}} = \Delta_{\overline{A}}(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C} = \mathbb{C} - \{\tfrac{a}{c}\}.$$

Si $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, tenemos que :

$$D_{\overline{A}^{-1}} = D_{\overline{B}} = \mathbb{C} - \{\tfrac{-d}{c}\}$$

De este modo, obtenemos las funciones $\theta_{\overline{A}} : \mathbb{C} - \{\frac{-d}{c}\} \to \mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\}$ tal que $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ para cada $z \in \mathbb{C} - \{\frac{-d}{c}\}$, que son llamadas **Transformaciones de Möbius**.

Si denotamos por T al conjunto de todas las transformaciones de Möbius, tenemos que $T \subseteq I(\mathbb{C})$. Lawson muestra en [1] que este conjunto no es cerrado bajo la composición usual de funciones. Sin embargo, se define sobre T la operación $\odot$, de la siguiente manera: Si α, β son elementos de T tal que, $\alpha(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $\beta(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}$, entonces

$$\alpha \odot \beta = \tfrac{(aA+bC)z+(aB+bD)}{(cA+dC)z+(cB+dD)}.$$

con la cual, es fácil ver que T es un grupo. A $(T, \odot)$ se le conoce como el grupo de Möbius.

Si se considera el generado de las transformaciones de Möbius, viendo a T como subconjunto de $I(\mathbb{C})$, obtenemos un monoide inverso llamada el **Monoide inverso**

de Möbius, que denotaremos por $\mathcal{M}$. En [1], Lawson estudia la estructura de $\mathcal{M}$, utilizando un subgrupo de $U(I(\mathbb{C}^*))$ compuesto por las de transformaciones de Möbius extendidas, denotado por $\mathcal{H}$, y utilizando a $\mathcal{M}'$ que es el generado de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{H}$. El objetivo de Choi y Lim, es estudiar una estructura más general, siguiendo las mismas ideas.

A continuación, mencionaremos algunos resultados que obtuvo Lawson en [6], que forman parte de los que se busca generalizar.

Proposición 2.1.1. $\mathcal{M}$ es $F-inverso$, y $\mathcal{M}/\sigma$ es isomorfo al grupo de Möbius.

Proposición 2.1.2. $\mathcal{M}$ no es isomorfo al producto semidirecto de un semirretículo por un grupo.

Proposición 2.1.3. $\mathcal{M}'$ es isomorfo al producto semidirecto de su semirretículo de idempotentes $\mathcal{E}'$, por el grupo $\mathcal{H}$.

Proposición 2.1.4. $\mathcal{F} = \mathcal{M}' - \mathcal{H}$ es un agrandamiento de $\mathcal{M}$.

Proposición 2.1.5. $(\mathcal{H}, \mathcal{E}' - \{\mathcal{I}_{\mathbb{C}^*}\}, \mathcal{E})$ es una tripla de McAlister, y $P(\mathcal{H}, \mathcal{E}' - \{\mathcal{I}_{\mathbb{C}^*}\}, \mathcal{E})$ es isomorfo a $\mathcal{M}$. Donde $\mathcal{E}$ es el semirretículo de idempotentes de $\mathcal{M}$.

2.2. CONSTRUCCIÓN DEL MONOIDE

En esta sección se presenta la construcción de un monoide inverso, asociado a cualquier acción de un grupo topológico sobre un espacio Hausdorff. El cual, bajo ciertas condiciones, generalizará el semigrupo $\mathcal{M}$ definido anteriormente.
Antes de esto, recordemos que una acción de un grupo G sobre un conjunto X es llamada efectiva, si la representación asociada a la acción es inyectiva.

En busca de generalizar lo que se mostró en el Ejemplo 2.1.1, considere un grupo topológico discreto G, actuando efectivamente sobre un espacio topológico de Hausdorff X mediante un homeomorfismo $\Lambda : G \times X \to X$ tal que $(g, x) \to g \cdot x$ para cada $(g, x) \in G \times X$. Como el lector puede imaginar, la acción Λ busca hacer el papel de la acción Δ del Ejemplo 2.1.1, así mismo, X hará el papel de $\mathbb{C}^*$. Finalmente, necesitamos un subconjunto de X que logre hacer el papel de $\mathbb{C}$, en ese sentido se considera $Y \subseteq X$ abierto y denso.

Note que para cada $g \in G$ se tiene un homeomorfismo $g^* : X \to X$ tal que $g^*(x) = g \cdot x$.

Se busca asociar a cada elemento del grupo G una biyección parcial de Y. En ese sentido, para cada $g \in G$ defina

$$dom(g) = \{y \in Y : g \cdot y \in Y\} = Y \cap g^{*-1}(Y)$$

Así, para cada elemento $g \in G$ tenemos asociada la función $g^*|_{dom(g)}$, que es una biyección parcial de Y.

Considere el conjunto

$$Part(G, Y) = \{g^*|_{dom(g)} : \ g \in G\}$$

Note que un caso particular del conjunto anterior, es precisamente T, el conjunto compuesto por las transformaciones de Möbius. En efecto, note que:

$$T = \left\{\Delta_{\overline{A}}|_{\mathbb{C} \cap \Delta_{\overline{A}^{-1}}(\mathbb{C})} : \ \overline{A} \in PGL_2(\mathbb{C})\right\}$$

Ahora, tenemos que $Part(G, Y) \subseteq I(Y)$ que no es cerrado bajo la composición usual de funciones. Esto se puede ver si seguimos identificando a $Part(G, Y)$ con las transformaciones de Möbius. A pesar de que $Part(G, Y)$ no sea cerrado bajo composición, es posible definir una operación en $Part(G, Y)$ con la cual tendrá estructura de grupo. Tal operación tiene su fundamento en el producto que hace a T un grupo. En efecto, considere la siguiente función:

$$\begin{aligned} \odot : Part(G, Y) \times Part(G, Y) &\to Part(G, Y) \\ (g, h) \qquad\qquad &\to (gh)^*|_{dom(gh)} \end{aligned}$$

para cada $(g, h) \in Part(G, Y) \times Part(G, Y)$, donde gh es el producto de g y h en el grupo G.

Podemos ver que $(Part(G, Y), \odot)$ es un grupo con esta operación. Más aún, es posible ver que $G \cong (Part(G, Y), \odot)$.

En efecto, defina

$$\begin{aligned} \rho : G &\to Part(G, Y) \\ g &\to g^*|_{dom(g)} \qquad\qquad (\forall g \in G) \end{aligned}$$

Tenemos que $ker(\rho) = \{g \in G : g^*|_{dom(g) = I_Y}\} = \{1_G\}$ pues G actúa efectivamente en X. Claramente ρ es sobre. Por último, sean $g, h \in G$, tenemos que

$$\rho(gh) = (gh)^*|_{dom(gh)} = g^*|_{dom(g)} \odot h^*|_{dom(h)} = \rho(g) \odot \rho(h)$$

A continuación, veremos que así como las transformaciones de Möbius, los elementos de $Part(G, Y)$ tienen la característica de que sus dominios son densos.

Proposición 2.2.1. Para cada $g \in G$, $dom(g)$ es denso en X.

Demostración. Ya que $dom(g) = Y \cap g^{*-1}(Y)$ y $g^{*-1}(Y)$ es denso, el resultado es inmediato. □

Con el fin de obtener una estructura similar al monoide inverso de Möbius, considere a $Part(G, Y)$ como subconjunto de $I(Y)$, y defina el conjunto de todas las composiciones finitas de elementos de $Part(G, Y)$, esto es, introducimos el conjunto:

$$\langle Part(G,Y)\rangle = \{g_1^*|_{dom(g_1)} \circ g_2^*|_{dom(g_2)} \circ \cdots \circ g_n^*|_{dom(g_n)} :\ g_i^*|_{dom(g_i)} \in Part(G,Y)\}$$

Clarmente, $\langle Part(G,Y)\rangle$ es submonoide inverso de $I(Y)$, con identidad $g^* : Y \to Y$, con $g = 1_G$.

Veamos que los elementos de $\langle Part(G,Y)\rangle$ mantienen la característica de tener dominios densos.

Proposición 2.2.2. Sea $\alpha = g_1^*|_{dom(g_1)} \circ g_2^*|_{dom(g_2)} \circ \cdots \circ g_n^*|_{dom(g_n)}$ tal que $g_i^*|_{dom(g_i)} \in Part(G,Y)$ para cada $i \in \{1, 2 \cdots n\}$. Entonces, $dom(\alpha)$ es un subconjunto denso de X.

Demostración. El caso $n = 1$ se tiene de la Proposición 2.2.1. Veamos el caso $n = 2$. Sea $\alpha = g_1^*|_{dom(g_1)} \circ g_2^*|_{dom(g_2)}$, entonces $x \in dom(\alpha)$ si y solo si, $x \in dom(g_2)$ y $g_2^*(x) \in dom(g_1)$, si y solo si, $x \in g_2^{*-1}(Y) \cap Y$ y $x \in g_2^{*-1}(g_1^{*-1}(Y) \cap Y)$, lo que ocurre si y solo si,

$$x \in Y \cap g_2^{*-1}(Y) \cap g_2^{*-1}(g_1^{*-1}(Y))$$

Note que $g_2^{*-1}(Y)$ y $g_2^{*-1}(g_1^{*-1}(Y))$ son abiertos densos de X, así, su intersección es un abierto denso. Y por tanto,

$$\overline{dom(\alpha)} = \overline{Y} = X$$

Para analizar el caso general, sea $\alpha = g_1^*|_{dom(g_1)} \circ g_2^*|_{dom(g_2)} \circ \cdots \circ g_n^*|_{dom(g_n)}$, siguiendo la misma idea anterior, tenemos que $x \in dom(\alpha)$ si y solo si $x \in dom(g_n)$, $g_n^*(x) \in dom(g_{n-1})$, $(g_{n-1}^* \circ g_n^*)(x) \in dom(g_{n-2})$, y así sucesivamente, $(g_2^* \circ g_3^* \circ \cdots \circ g_n^*)(x) \in dom(g_1)$, lo cual pasa si y solo si

$$x \in Y \cap g_n^{*-1}(Y) \cap (g_n^{*-1} \circ g_{n-1}^{*-1})(Y) \cap \cdots \cap (g_n^{*-1} \circ g_{n-1}^{*-1} \circ \cdots \circ g_1^{*-1})(Y).$$

Note que, $g_n^{*-1}(Y), (g_n^{*-1} \circ g_{n-1}^{*-1})(Y), \cdots, (g_n^{*-1} \circ g_{n-1}^{*-1} \circ \cdots \circ g_1^{*-1})(Y)$ son subconjuntos abiertos y densos de X, luego su intersección es un subconjunto abierto y denso de X. Por tanto, $\overline{dom(\alpha)} = \overline{Y} = X$. $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior, y del hecho de que las funciones de $Part(G,Y)$ son continuas sobre un espacio Hausdorff, tenemos inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 2.2.1. Sean $g_1^*|_{dom(g_1)}, g_2^*|_{dom(g_2)} \in Part(G,Y)$ y $\gamma \in \langle Part(G,Y)\rangle$ tal que $\gamma \subseteq g_1^*|_{dom(g_1)}, g_2^*|_{dom(g_2)}$ entonces $g_1^*|_{dom(g_1)} = g_2^*|_{dom(g_2)}$.

Demostración. Tenemos que g_1^* y g_2^* son homeomorfismos de X, y por hipótesis, coinciden en un subconjunto denso de X, como X es un espacio Hausdorff, $g_1^* = g_2^*$, así, $g_1^*|_{dom(g_1)} = g_2^*|dom(g_2)$. $\square$

Antes de probar que $\langle Part(G,Y)\rangle$ es $F - inverso$, presentamos la siguiente proposición que nos ayudará a encontrar el supremo en las $\sigma - clases$.

Notación: Por comodidad, se dejará de escribir $g^*|_{dom(g)}$ cuando nos refiramos a un elemento de $Part(G,Y)$. Simplemente escribiremos el respectivo representante del grupo, en este caso, g.

Proposición 2.2.3. Sea $\alpha = g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n \in \langle Part(G,Y)\rangle$, entonces

$$g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n \subseteq g_1 \odot g_2 \odot \cdots \odot g_n$$

Demostración. Para el caso $n = 2$, tenemos que si $x \in dom(g_1 \circ g_2)$, entonces $g_2 x \in Y$ y $g_1 g_2 x \in Y$, así, $x \in dom(g_1 \odot g_2)$. Sea ahora que $x \in dom(g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n)$, entonces por lo visto en la Proposición 2.2.2, $x \in (g_n^{*-1} \circ g_{n-1}^{*-1} \circ \cdots \circ g_1^{*-1})(Y)$ y $x \in Y$, por tanto, $g_1 g_2 \cdots g_n \cdot x \in Y$, así, $x \in dom(g_1 \odot g_2 \odot \cdots \odot g_n)$. Por último, de la propia definición de $\odot$, tenemos que α y $g_1 \odot g_2 \odot \cdots \odot g_n$ coinciden en el dominio de α. $\square$

A continuación mostramos el resultado que generaliza la Proposicón 2.1.1.

Teorema 2.2.1. El monoide inverso $\langle Part(G,Y)\rangle$ es $F - inverso$, y $\langle Part(G,Y)\rangle/\sigma$ es isomorfo a $(Part(G,Y), \odot)$.

Demostración. Vemos que $\langle Part(G,Y)\rangle$ es $F - inverso$. Sea $\alpha \in \langle Part(G,Y)\rangle$, consideremos

$$\sigma(\alpha) = \{\beta \in \langle Part(G,Y)\rangle : (\alpha,\beta) \in \sigma\}$$

Sea $\alpha' \in Part(G,Y)$ el único elemento de $Part(G,Y)$ tal que $\alpha \subseteq \alpha'$. A saber, si tenemos que $\alpha = g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n$, entonces $\alpha' = g_1 \odot g_2 \odot \cdots \odot g_n$. Tome $\beta \in \sigma(\alpha)$, entonces existe $\gamma \in \langle Part(G,Y)\rangle$ tal que $\gamma \subseteq \alpha, \beta$. Sea $\beta' \in Part(G,Y)$ el único elemento de $Part(G,Y)$ tal que $\beta \subseteq \beta'$, entonces $\gamma \subseteq \alpha', \beta'$, y por el Corolario 2.2.1, tenemos que $\alpha' = \beta'$, de donde $\beta \subseteq \alpha'$. Luego α' es cota superior.

Para ver que α' es la mínima cota superior, sea $\rho \in \langle Part(G,Y)\rangle$ una cota superior de $\sigma(\alpha)$, en particular, $\alpha \subseteq \rho$. Sea ρ' el único elemento de $Part(G,Y)$ tal que $\rho \subseteq \rho'$, entonces $\alpha \subseteq \rho', \alpha'$, luego $\rho \subseteq \rho' = \alpha'$.

Para concluir la prueba del teorema, defina:

$$\begin{aligned} \varphi : \langle Part(G,Y)\rangle/\sigma &\to Part(G,Y) \\ \sigma(\alpha) \qquad &\to \quad \alpha' \end{aligned}$$

Veamos que φ es un isomorfismo. Sean $\sigma(\alpha), \sigma(\beta)$ elementos de $\langle Part(G,Y)\rangle/\sigma$, tenemos que $\varphi(\sigma(\alpha) \cdot \sigma(\beta)) = \varphi(\sigma(\alpha \circ \beta)) = \rho'$, note que $\alpha \subseteq \alpha'$ y $\beta \subseteq \beta'$, luego $\alpha \circ \beta \subseteq \alpha' \circ \beta' \subseteq \alpha' \odot \beta'$, así, $\alpha \circ \beta \subseteq \rho', \alpha' \odot \beta'$, y por el Corolario 2.2.1, $\rho' = \alpha' \odot \beta'$, luego φ es homomorfismo. La sobreyectividad de φ se tiene claramente. Veamos la inyectividad. Sean $\sigma(\alpha)$ y $\sigma(\beta)$ tal que $\alpha' = \beta'$. Entonces tenemos que $\alpha, \beta \subseteq \alpha'$, de donde $\alpha \circ \beta^{-1}, \alpha^{-1} \circ \beta$ son idempotentes, así, $\alpha \sim \beta$, y por la Proposición 1.1.8 $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$. Así, φ es isomorfismo. $\square$

2.3. MONOIDES INVERSOS DE TIPO MÖBIUS

En esta sección, seguimos trabajando con los elementos usados en la sección anterios, a saber, un espacio Hausdorff X, un grupo discreto G actuando sobre X mediante un homeomorfismo $\Lambda : G \times X \to X$, un subconjunto Y de X abierto y denso, y por su puesto $\langle Part(G,Y)\rangle$, el generado del conjunto de bijecciones parciales de Y inducidas por elementos de G.

Lo que buscamos en esta sección, es caracterizar los monoides inversos en los que estamos interesados, esto es, aquellos que logran generalizar la estructura del monoide inverso de Möbius.

Observación: Hasta el momento no se ha tenido en cuenta una característica que posee la acción Δ tratada en el Ejemplo 2.1.1. Estamos hablando de que $\mathbb{C}$ no es invariante bajo esta acción. Esta característica es la que se usará para caracterizar los que llamaremos, **monoides inversos de tipo Möbius**.

Pensando en esto, consideremos:

$$C(Y) = \{g \in Part(G,Y) : \ dom(g) = Y\}$$

Es fácil ver que si $g, h \in C(Y)$, entonces $g \circ h = g \odot h$. Pues el domonio de $g \circ h$ sería Y, al igual que el dominio de $g \odot h$. Además, note que $C(Y)$ es un grupo bajo la composición.

Proposición 2.3.1. Sea $\alpha \in \langle Part(G,Y)\rangle$, entonces $\alpha^{-1} \circ \alpha = I_Y$ si y solo si $\alpha \in C(Y)$ si y solo si $\alpha(Y) \subseteq Y$.

Demostración. Si $\alpha^{-1} \circ \alpha = I_Y$, entonces $I_{dom(\alpha)} = I_Y$, así, $dom(\alpha) = Y$. Ahora, sea α' el único elemento de $Part(G,Y)$ tal que $\alpha \subseteq \alpha'$, entonces $\alpha = \alpha' \circ \alpha^{-1} \circ \alpha = \alpha' \in$

$Part(G, Y)$, así, $\alpha \in C(Y)$. Ahora, si $\alpha \in C(Y)$, entonces $\alpha^{-1} \circ \alpha = I_{dom(\alpha)} = I_Y$. Ahora, por definición, si $\alpha \in C(Y)$, entonces $\alpha(Y) \subseteq Y$. Recíprocamente, si $\alpha(Y) \subseteq Y$, entonces $Y \subseteq dom(\alpha)$, luego $dom(\alpha) = Y$, por tanto $\alpha^{-1} \circ \alpha = I_Y$.

□

Proposición 2.3.2. El conjunto Y es un invariante bajo la acción del grupo G si y solo si $Part(G, Y) = C(Y)$. En este caso, $Part(G, Y)$ sería un grupo bajo $\circ$.

Demostración. Suponga que Y es un invariante bajo la acción de G, entonces para cada $g \in G$, $g \cdot Y \subseteq Y$, así, para cada $g \in$ tenemos que $dom(g) = Y$. Luego $Part(G, Y) = C(Y)$. Suponga ahora que $C(Y) = Part(G, Y)$ y sea $g \in Part(G, Y)$, es claro que $g \cdot Y \subseteq Y$ pues para cada $y \in Y$, $y \in dom(g)$, esto es, $g \cdot y \in Y$. □

Definición 2.3.1. Cuando Y no es un invariante bajo la acción del grupo G, diremos que $\langle Part(G, Y) \rangle$ es un **Monoide inverso de tipo Möbius**.

La idea que se tiene con los monoides inversos de tipo Möbius es estudiar su estructura, siguiendo las mismas ideas que Lawson en [7]. Nos preguntamos, por ejemplo, si estos serán isomorfos al producto semidirecto de un semirretículo por un grupo. El siguiente teorema nos permitirá responder esta pregunta.

Teorema 2.3.1. Sea S un semigrupo inverso, S es isomorfo al producto semidirecto de un semirretículo por un grupo sii S es $E - unitario$ y para cada $a \in S$, y cada idempotente $e \in S$, existe $b \in S$ tal que $b^{-1}b = e$ y $a \sim_r b$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea Y un semirretículo (sin pérdida de generalidad, supongamos que Y es un semirretículo inferior) y G un grupo, de tal forma que $Y \times G$ es un producto semidirecto. Suponga que $S \cong Y \times G$, y sea $\phi : S \to Y \times G$ el isomorfismo. Sean $a \in S,\ e \in E(S)$ con $\phi(a) = (y, g)$ y $\phi(e) = (z, 1)$. Defina $p = (gz, g)$. Note que:

$$p^{-1}p = (z, g^{-1})(g \cdot z, g) = (z, 1) = \phi(e).$$

Además, $p^{-1}\phi(a)$ y $p\phi(a)^{-1}$ son idempotentes. Defina $b = \phi^{-1}(p)$, tenemos entonces que;

$$b^{-1}b = \phi^{-1}(p^{-1})\phi^{-1}(p) = \phi^{-1}(p^{-1}p) = \phi^{-1}(\phi(e)) = e$$

También tenemos que $b \sim a$, ya que $ba^{-1} = \phi^{-1}(p)\phi^{-1}(\phi(a)^{-1}) = \phi^{-1}(p\phi(a)^{-1})$. Y como $p \sim_r \phi(a)$, tenemos que $\phi^{-1}(p\phi(a)^{-1})$ es idempotente. Del mismo modo se puede ver que $b^{-1}a$ es idempotente. Con lo que quedaría probada esta parte de la implicación.

$(\Leftarrow)$ En primer lugar probemos que el homomorfismo $\sigma^* : S \to S/\sigma$ es $L - biyectivo.$
Inyectividad: Sea $a \in S$ tal que $\sigma^*(a) = \sigma(a)$ es idempotente, entonces $\sigma(a) = \sigma(e)$ para cualquier $e \in E(S)$ ya que S/σ es grupo. Como σ es idempotente pura, ya que S es $E - unitario$, tenemos que $a \in E(S)$. Así, por la Proposición 1.1.12, σ^* es $L - inyectivo$.
Hemos probado lo anterior, con el fin de definir las siguientes dos funciones, las cuales nos permitirán establecer el isomorfismo que deseamos.

Defina:

$$\begin{aligned} \theta : S &\to E(S) \times S/\sigma \\ a &\to (a^{-1}a, \sigma(a)) \qquad \text{para cada } a \in S. \end{aligned}$$

Veamos que θ es biyectiva. La inyectividad se tiene, ya que si $a, b \in S$ tal que $a^{-1}a = b^{-1}b$ y $(a, d) \in \sigma$, como σ^* es $L - inyectiva$, en particular si $e = a^{-1}a$ tenemos que $\sigma^*|_{L_e}$ es inyectiva. Note que $a, b \in L_e$. Y ya que $\sigma^*(a) = \sigma^*(b)$, $a = b$.
Para ver que es sobre, sea $(f, \sigma(a)) \in E(S) \times S/\sigma$, ya que $\sigma^*|_{L_f} : S \to S/\sigma$ es sobre, existe un $p \in L_f$ tal que $\sigma(p) = \sigma(a)$, y como $p \in L_f$, $p^{-1}p = f$, con lo cual se tiene que $\theta(p) = (p^{-1}p, \sigma(p)) = (f, \sigma(a))$.

Como veremos más adelante, usaremos esta función para establecer una acción del grupo S/σ sobre el semirretículo $E(S)$ mediante automorfismos de orden, con el fin de establecer un producto semidirecto.

Definamos ahora la siguiente función:

$$\begin{aligned} \alpha : S &\to E(S) \times S/\sigma \\ a &\to (aa^{-1}, \sigma(a)) \qquad \text{para cada } a \in S. \end{aligned}$$

Es inmediato que la biyectividad de θ implica la biyectividad de α, y que el recíproco también se cumple.

Usemos las anteriores funciones para dar a $E(S) \times S/\sigma$ estructura de producto semidirecto. Para eso, defina la siguiente función:

$$\begin{aligned} \eta : S/\sigma \times E(S) &\to E(S) \\ (\sigma(a), e) &\to \sigma(a) \cdot e = tt^{-1} \end{aligned}$$

donde t es tal que $\theta(t) = (e, \sigma(a))$.

Note que η está bien definida porque θ es una biyección.

Veamos que η es una acción, en efecto, tomando la identidad de S/σ, que es $\sigma(e)$ donde e es cualquier idempotente, y tomando $a \in E(S)$, vemos que $\sigma(e) \cdot a = a$, ya que $\theta(a) = (a, \sigma(a)) = (a, \sigma(e))$.

Ahora verifiquemos que $\sigma(a) \cdot (\sigma(b) \cdot e) = \sigma(ab) \cdot e$. En efecto, sea $t \in S$ que satisface $\theta(t) = (e, \sigma(b)) = (t^{-1}t, \sigma(t))$, entonces tenemos que $\sigma(a) \cdot (\sigma(b) \cdot e) = \sigma(a) \cdot tt^{-1}$. Sea $q \in S$ tal que $\theta(q) = (tt^{-1}, \sigma(a)) = (q^{-1}q, \sigma(q))$, entonces $\sigma(a) \cdot (\sigma(b) \cdot e) = \sigma(a) \cdot tt^{-1} = qq^{-1}$.

Teniendo en cuenta que $\sigma(qt) = \sigma(ab)$, note que

$$\theta(qt) = ((qt)^{-1}(qt), \sigma(qt)) = (t^{-1}q^{-1}qt, \sigma(qt)) = (e, \sigma(ab)).$$

Así, $\sigma(ab) \cdot e = qq^{-1}$, que era lo que se quería mostrar.

Mostremos que S/σ actúa mediante automorfismos de orden sobre $E(S)$ mediante η. Sean $e, f \in E(S)$ tales que $e \leq f$ y tome $a \in S$, veamos que $\sigma(a) \cdot e \leq \sigma(a) \cdot f$. Sea que $\theta(t) = (e, \sigma(a)) = (t^{-1}t, \sigma(t))$ y que $\theta(q) = (f, \sigma(a)) = (q^{-1}q, \sigma(q))$, tenemos entonces que $t^{-1}t \leq q^{-1}q$, y queremos ver que $tt^{-1} \leq qq^{-1}$.
Note que $(q, t) \in \sigma$, y ya que S es $E - unitario$ tenemos que $(q, t) \in \sim$. Por tanto, $t^{-1}t = t^{-1}tq^{-1}q$, de donde se tiene

$$tt^{-1} = tt^{-1}tq^{-1}qt^{-1} = tt^{-1}qt^{-1}tq^{-1} = tt^{-1}qq^{-1}, \text{ con lo que } tt^{-1} \leq qq^{-1}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos dar a $E(S) \times S/\sigma$ estructura de producto semidirecto, con la operación usual determinada por la acción η. En ese sentido, la operación se vería así

$$(e, \sigma(a))(f, \sigma(b)) = (e \wedge \sigma(a) \cdot f, \sigma(ab)) = (e \wedge tt^{-1}, \sigma(ab)) = (ett^{-1}, \sigma(ab))$$

donde $\theta(t) = (f, \sigma(a))$, $e \in E(S)$, $a, b \in S$.

Finalmente, debemos ver que α es un homomorfismo entre semigrupos inversos, con lo cual tendríamos que S es isomorfo al producto semidirecto $E(S) \times S/\sigma$. En efecto, sean $a, b \in E(S)$, tenemos que $\alpha(ab) = ((ab)(ab)^{-1}, \sigma(ab))$, $\alpha(a) = (aa^{-1}, \sigma(a))$ y $\alpha(b) = (bb^{-1}, \sigma(b))$. Por tanto,

$$\alpha(a)\alpha(b) = (aa^{-1} \wedge \sigma(a) \cdot bb^{-1}, \sigma(ab)).$$

En ese sentido, solo queda verificar que $abb^{-1}a = aa^{-1} \wedge \sigma(a) \cdot bb^{-1}$. Sea $t \in S$ tal que $\theta(t) = (bb^{-1}, \sigma(a)) = (t^{-1}t, \sigma(t))$. Note que $(a, t) \in \sigma = \sim$. Ahora;

$$aa^{-1} \wedge \sigma(a) \cdot bb^{-1} = aa^{-1}tt^{-1} = aa^{-1}tt^{-1}tt^{-1} = aa^{-1}tbb^{-1}t^{-1} = abb^{-1}a^{-1}(tt^{-1}) \leq abb^{-1}a^{-1}$$

Además;

$$abb^{-1}a^{-1} = at^{-1}ta^{-1} = aa^{-1}at^{-1}ta^{-1} = aa^{-1}ta^{-1}at^{-1} = aa^{-1}tt^{-1}(ta^{-1}at^{-1})$$

con lo que $abb^{-1}a^{-1} \leq aa^{-1}tt^{-1}$. Y así se concluye la demostración. □

A continuación mostramos el resultado que generaliza la Proposición 2.1.2

Proposición 2.3.3. El monoide inverso $\langle Part(G, Y)\rangle$ es de tipo Möbius sii no es isomorfo al producto semidirecto de un semirretículo por un grupo.

Demostración. Supongamos que $\langle Part(G, Y)\rangle$ es isomorfo al producto semidirecto de un semirretículo por un grupo. Tome I_Y, y $\alpha \in Part(G, Y)$. Entonces existe $\beta \in \langle Part(G, Y)\rangle$ tal que $\beta^{-1} \circ \beta = I_Y$, y $\alpha^{-1} \circ \beta$ es idempotente. Por la Proposición 2.3.1 tenemos que $\beta \in Part(G, Y)$. Ahora, ya que $\alpha^{-1} \circ \beta$ es idempotente, $\alpha^{-1} \circ \beta \circ \beta^{-1} \subseteq \alpha, \beta$, de donde $\alpha = \beta$ por el Corolario 2.2.1, luego para cada $\alpha \in Part(G, Y)$ $dom(\alpha) = Y$, y $Part(G, Y) = C(Y)$. Así, Y será invariante bajo la acción de G. Con esto hemos mostrado que si $\langle Part(G, Y)\rangle$ es un monoide inverso de tipo Möbius, entonces no es isomorfo al producto semidirecto de un semirretículo por un grupo. Con lo cual, faltaría ver que si $C(Y) = Part(G, Y)$, entonces $\langle Part(G, Y)\rangle$ es isomorfo a tal producto semidirecto. En efecto, esto se tiene pues $\langle Part(G, Y)\rangle$ será un grupo con la composición.

□

2.4. ESTRUCTURA DE LOS MONOIDES INVERSOS DE TIPO MÖBIUS

En esta sección daremos por hecho que Y no es invariante bajo la acción del grupo G. Buscamos mostrar que aunque los Monoides inversos de tipo Möbius no son isomorfos al producto semidirecto de un semirretículo por un grupo, es posible encajarlos en esta clase de estructura. Para mostrar esto, haremos uso de dos conjuntos, análogos a los que define Lawson en [1]. A saber, el conjunto G^*, compuesto por las extensiones de los elementos de $Part(G, Y)$ a X, es decir, funciones de la forma $g^* : X \to X$ tal que $g^*(x) = \Lambda(g, x) = g \cdot x$, para cada $x \in X$. Donde Λ es la acción que hemos considerado desde el inicio de este capítulo. G^* hará el papel de $\mathcal{H}$, el conjunto compuesto por las transformaciones de Möbius extendidas. Así mismo, usaremos al conjunto $\langle Part(G, Y)\rangle'$ que será el generado de $\langle Part(G, Y)\rangle$ y G^*. El cual hace el papel de $\mathcal{M}'$ en [1].

Sea G^* el conjunto de las biyecciones sobre X inducidas por los elementos de G. Es fácil ver que G^* es un grupo con la composición, más aún $G^* \cong (Part(G, Y), \odot)$. En efecto, defina:

$$\begin{gathered}\phi : G^* \to Part(G, Y)\\ g^* \to g^*|_{dom(g)}\end{gathered}$$

$\phi(g^* \circ h^*) = \phi((gh)^*) = (gh)^*|_{dom(gh)} = g^*|_{dom(g)} \odot h|_{dom(h)} = \phi(g^*) \odot \phi(h^*)$. Veamos que ϕ es inyectiva. Sean $g^*, h^* \in G^*$, tal que $g^*|_{dom(g)} = h^*|_{dom(h)}$, como X es un espacio Hausdorff, entonces $g^* = h^*$. La sobreyectividad de ϕ es trivial. Con lo cual, ϕ es isomorfismo. Note que este isomorfismo es una versión general del isomorfismo que hay entre el grupo de Möbius, y el de las transformaciones de Möbius extendidas.

Sea $\langle Part(G, Y)\rangle'$ el submonoide inverso de $I(X)$ generado por $\{G^* \cup \langle Part(G, Y)\rangle\}$.

Siguiendo la idea de Lawson en [1], buscamos un isomorfismo entre $\langle Part(G, Y)\rangle'$ y el producto semidirecto entre su semirretículo de idempotentes por el grupo G^*. Para poder hacer esto, en primer lugar necesitamos asociar de manera biunívoca los elementos de $\langle Part(G, Y)\rangle'$ con elementos de G^*. Y en segundo lugar, lograr definir el producto semidirecto.

A continuación se define una función, la cual nos permitirá encargarnos de la relación biunívoca entre elementos de $\langle Part(G,Y)\rangle'$ y elementos de G^*.

Definamos: $\Gamma : Part(G,Y) \cup G^* \to Part(G,Y)$ tal que $\Gamma(g^*) = g$ y $\Gamma(g) = g$ para cada $g \in Part(G,Y)$. Extendamos Γ a $\langle Part(G,Y)\rangle'$ de la siguiente manera;

Sea $\alpha = \alpha_1 \circ \cdots \alpha_n$ con $\alpha_i \in Part(G,Y) \cup G^*$ para cada $i \in \{1,2,\cdots n\}$. Definimos:

$$\bullet\ \Gamma(\alpha) \equiv \Gamma(\alpha_1) \circ \Gamma(\alpha_2) \circ \cdots \circ \Gamma(\alpha_n)$$

$$\bullet\ \alpha^* \equiv \Gamma(\alpha_1)^* \circ \Gamma(\alpha_2)^* \circ \cdots \circ \Gamma(\alpha_n)^* = (\Gamma(\alpha_1) \circ \Gamma(\alpha_2) \circ \cdots \circ \Gamma(\alpha_n))^*$$

Note que $\Gamma(\alpha) \in \langle Part(G,Y)\rangle$ y $\alpha^* \in G^*$. A continuación mostramos algunas propiedades que serán de utilizadas posteriormente.

Lema 2.4.1. Sea $\alpha = \alpha_1 \circ \cdots \alpha_n$ con $\alpha_i \in Part(G,Y) \cup G^*$ para cada $i \in \{1,2,\cdots n\} \in \langle Part(G,Y)\rangle'$, entonces:

1. $\Gamma(\alpha) \subseteq \alpha \subseteq \alpha^*$.
2. $I_y \circ \alpha^* \circ I_Y = \Gamma(\alpha_1) \odot \Gamma(\alpha_2) \odot \cdots \odot \Gamma(\alpha_n)$.
3. $\alpha^* \circ \alpha^{-1} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \alpha^* = \alpha$.
4. $\alpha^{*-1} \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ \alpha$.
5. $(\alpha \circ \beta)^* = \alpha^* \circ \beta^*$ para cualquier $\beta \in \langle Part(G,Y)\rangle'$.
6. Si α y $h^* \circ \alpha \circ g^*$ están en $\langle Part(G,Y)\rangle$, entonces $\alpha \circ g^* = \alpha \circ g$.

Demostración. (1) Como $\Gamma(\alpha_i) \subseteq \alpha_i$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots n\}$, y ya que el orden parcial natural $\subseteq$ es compatible, se tiene $\Gamma(\alpha) \subseteq \alpha$. Del mismo modo, $\alpha \subseteq \alpha^*$.

(2) Si $x \in dom(I_Y \circ \alpha^* \circ I_Y) = dom(I_Y \circ \Gamma(\alpha_1)^* \circ \cdots \circ \Gamma(\alpha_n)^* \circ I_Y)$, esto pasa si y solo si $x \in Y$ y $\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)x \in Y$, que es equivalente a que x esté en el dominio de $\Gamma(\alpha_1) \odot \Gamma(\alpha_2) \odot \cdots \odot \Gamma(\alpha_n)$.

(3) Como $\alpha = \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \alpha$, entonces $\alpha \subseteq \alpha^* \circ \alpha^{-1} \circ \alpha$. Si $x \in dom(\alpha^* \circ \alpha^{-1} \circ \alpha)$, es inmediato que $x \in dom(\alpha)$, luego $\alpha = \alpha^* \circ \alpha^{-1} \circ \alpha$. Ahora, claramente $\alpha \subseteq \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \alpha^*$. Y si $x \in dom(\alpha \circ \alpha^{-1} \circ \alpha^*)$, entonces $\alpha^*(x) \in dom(\alpha^{-1}) = \alpha(dom(\alpha))$, luego $x \in dom(\alpha)$. Una manera más sencilla de ver esto es utilizando el hecho de que $\alpha \subseteq \alpha^*$ y por tanto $\alpha = \alpha^* \circ \alpha^{-1} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \alpha^*$.

(4) Ya que $\alpha \subseteq \alpha^*$, entonces $\alpha^{-1} \subseteq \alpha^{*-1}$, luego $\alpha^{-1} \circ \alpha \subseteq \alpha^{*-1} \circ \alpha$. Ahora, note que $\alpha^{*-1} \circ \alpha = \alpha^{*-1} \circ \alpha^* \circ \alpha^{-1} \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ \alpha$.

(5) Inmediato de la definición y de que la composición es asociativa.

(6) Veamos que $\alpha \circ g^* \subseteq \alpha \circ g$. Sea $x \in dom(\alpha \circ g^*)$, ya que $h^* \circ \alpha \circ g^* \in \langle Part(G, Y)\rangle$, entonces $x \in Y$, y $g^*(x) = g(x) \in dom(\alpha)$, luego $x \in dom(\alpha \circ g)$. $\square$

Veamos que es posible encajar los monoides inversos de tipo Möbius, en el producto semidirecto de un semirretículo por un grupo. Para ello probemos el siguiente teorema, que es la generalización de la Proposición 2.1.3.

Teorema 2.4.1. $\langle Part(G, Y)\rangle'$ es isomorfo al producto semidirecto de su semirretículo de idempotentes, por el grupo G^*

Demostración. Denote por E' al conjunto de idempotentes de $\langle Part(G, Y)\rangle'$ y defina:

$$\rho : G^* \times E' \to E'$$
$$(g^*, e) \to g^* \circ e \circ g^{*-1}$$

para cada $(g^*, e) \in G^* \times E'$.

Es claro que G^* actúa por automorfismos de orden sobre E' mediante ρ. En efecto, veamos que $\rho_{g^*} : E' \to E'$ es automorfismo de orden. Sean $e, f \in E'$ tal que $e \subseteq f$, por la compatibilidad del orden parcial natural se tiene $g^* \circ e \circ g^{*-1} \subseteq g^* \circ f \circ g^{*-1}$. La sobreyectividad se tiene pues si $e \in E'$, entonces $\rho_{g^*}(g^{*-1} \circ e \circ g^*) = e$. La inyectividad es trivial.

Definimos ahora el producto semidirecto de E' por G^* con la operación:

$$(e, g^*)(f, h^*) = (e \circ \rho(g^*, f), g^* \circ h^*)$$

para $g^*, h^* \in G^*$ y $e, f \in E'$.

Veamos que $S = E' \times G^*$ es un semigrupo inverso con esta operación. Sean $(e, g^*), (f, h^*), (t, r^*)$ elementos de $E' \times G^*$. Tenemos que:

$$((e, g^*)(f, h^*))(t, r^*) = (e \circ g^* \circ f \circ g^{*-1} \circ g^* \circ h^* \circ t \circ h^{*-1} \circ g^{*-1}, g^* \circ h^* \circ r^*)$$

$$= (e \circ g^* \circ f \circ g^{*-1} \circ g^* \circ h^* \circ t \circ h^{*-1} \circ h^* \circ r^*) = (e, g^*)((f, h^*)(t, r^*)).$$

Luego la operación es asociativa. Veamos ahora que cada elemento tiene inverso. En efecto, sea $(e, g^*) \in E' \times G^*$, tomamos $(h^* \circ e \circ g^*, h^*)$, donde $h = g^{-1} \in G$, entonces se tiene que $(e, g^*) \circ (h^* \circ e \circ g^*, h^*) \circ (e, g^*) = (e, g^*)$. Además, $(h^* \circ e \circ g^*, h^*) = (h^* \circ e \circ g^*, h^*)(e, g^*)(h^* \circ e \circ g^*, h^*)$. Por último, es fácil ver que los idempotentes conmutan ya que estos son de la forma (e, I_X) con $e \in E'$.
Establezcamos ahora el isomorfismo entre $\langle Part(G, Y) \rangle'$ y S.
Defina:

$$\begin{aligned}\psi : \langle Part(G,Y)\rangle' &\to E' \times G^* \\ \alpha \qquad &\to (\alpha \circ \alpha^{-1}, \alpha^*)\end{aligned}$$

Veamos que ψ es un isomorfismo.

La inyectividad de ψ se tiene, ya que si $\alpha, \beta \in \langle Part(G,Y)\rangle'$ tal que $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$, esto es, $(\alpha \circ \alpha^{-1}, \alpha^*) = (\beta \circ \beta^{-1}, \beta^*)$. Así, usando el lema anterior tenemos que

$$\alpha = \alpha \circ \alpha^{-1}\alpha^* = \beta \circ \beta^{-1} \circ \beta^* = \beta.$$

Sea $(e, g^*) \in E' \times G^*$, tomemos $e \circ g^* \in \langle Part(G,Y)\rangle'$, entonces

$$\psi(e \circ g^*) = (e, e^* \circ g^*) = (e, g^*).$$

Luego ψ es sobreyectiva. Por último, veamos que ψ es homomorfismo.

Sean $\alpha, \beta \in \langle Part(G,Y)\rangle'$, tenemos que $\psi(\alpha \circ \beta) = (\alpha \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}, (\alpha \circ \beta)^*)$, y que $\psi(\alpha)\psi(\beta) = (\alpha \circ \alpha^{-1} \circ \alpha^* \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ \alpha^{-1*}, \alpha^* \circ \beta^*)$. Luego solo hace falta ver que coinciden en la primera componente. En efecto, usando el Lema anterior tenemos que:

$$\alpha \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ (\alpha^{-1} \circ \alpha \circ \alpha^{-1*}) = \alpha \circ (\alpha^{-1} \circ \alpha) \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ \alpha^{-1*}$$

$$= \alpha \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ \alpha^{-1*} = \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \alpha^* \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ \alpha^{-1*}.$$

□

Con el Teorema anterior, tenemos un isomorfismo entre $\langle Part(G,Y)\rangle'$ y el producto semidirecto $S = E' \times G^*$. A continuación usaremos este isomorfismo para encajar $\langle Part(G,Y)\rangle$ en S.

Defina $P = \{(e, g^*) \in E \times G^* : \ g^{*-1} \circ e \circ g^* \in E\}$ donde E es el conjunto de los idempotentes de $\langle Part(G,Y)\rangle$.

Corolario 2.4.1. Sea $\psi : \langle Part(G, Y)\rangle' \to E' \times G^*$ el isomorfismo del teorema anterior, y $P = \{(e, g^*) \in E \times G^* : \ g^{*-1} \circ e \circ g^* \in E\}$, entonces $\psi(\langle Part(G, Y)\rangle) = P$.

Demostración. Sea $\alpha \in \langle Part(G, Y)\rangle$, por definición, $\psi(\alpha) = (\alpha \circ \alpha^{-1}, \alpha^*)$. Por tanto, usando el Lema 2.11, tenemos que $\alpha^{*-1} \circ \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \alpha^* = \alpha^{*-1} \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ \alpha \in E$.
Sea ahora $(e, g^*) \in E \times G^*$, tomamos $e \circ g \in \langle Part(G, Y)\rangle$ y tenemos que $\psi(e \circ g) = (e, (e^* \circ g^*)) = (e, g^*)$. $\square$

Con lo hecho anteriormente, hemos llegado a que los monoides inversos de tipo Möbius se pueden encajar en el producto semidirecto de un semirretículo por un grupo.
Siguiendo el modelo de Lawson, ahora el objetivo es buscar una tripla de McAlister (G, X, Y) tal que $P(G, X, Y)$ sea isomorfo a nuestro monoide inverso de tipo Möbius. Con el fin de encontrar dicha tripla, considere la siguiente definición:

Definición 2.4.1. Sea F un semigrupo inverso, y M un subsemigrupo inverso de F. Decimos que F es un agrandamiento de M si se cumplen las siguientes condiciones:

1. M es ideal de orden de F.

2. Si $\alpha \in F$ y $\alpha \circ \alpha^{-1}, \alpha^{-1} \circ \alpha \in M$, entonces $\alpha \in M$.

3. Cada idempotente de F está $D - relacionado$ con un idempotente de M.

El siguiente teorema muestra una relación que se da entre los agrandamientos, y el hecho de asociar una tripla de McAlister.

Teorema 2.4.2. Sea G un grupo, X un semirretículo y sea $P(G, X)$ el producto semidirecto de G por X. Suponga que S es un subsemigrupo inverso de $P(G, X)$ de tal forma que $P(G, X)$ es un agrandamiento de S. Sea $Y \times \{1\} = E(S)$, entonces (G, X, Y) es una tripla de McAlister y $P(G, X, Y) = S$.

Demostración. En primer lugar debemos ver que Y satisface con los axiomas de la definición de tripla de McAlister. En efecto, claramente Y es ideal de orden de X pues si $x \in X$, $y \in Y$ tal que $x \leq y$, entonces $x \wedge y = x$, luego $(x, 1) \leq (y, 1)$, con lo que $(x, 1) \in Y \times \{1\}$, y $x \in Y$. Además, como $E(S)$ es semirretículo inferior, Y también lo es.

Veamos ahora que para cada $G \cdot Y = X$. Sea $x \in X$, por definición de agrandamiento, tenemos que $((x, 1), (y, 1)) \in D$ para algún $y \in Y$, luego existe $(r, g) \in X \times G$ tal que $(x, 1) = (g^{-1}r, 1)$ y $(r, 1) = (y, 1)$, de donde $x = g^{-1}r$, con $r \in Y$. Por último, veamos que para cada $g \in G$, $gY \cap Y \neq \emptyset$. En efecto, tome $y \in Y$, entonces $(y, 1)(gy, g) = (z, g)$ donde $z = y \wedge gy$, luego $z \leq y$ y por tanto $(z, 1) \leq (y, 1)$, de donde $z \in Y$ pues $E(S)$ es ideal de orden. Además, es fácil ver que $g^{-1} \cdot z = g^{-1} \cdot y \wedge y$, y por tanto $g^{-1} \cdot z \in Y$.

Finalmente, veamos que $P(G, X, Y) = S$. En efecto, sea $(y, g) \in Y \times G$, como $g^{-1}y \in Y$, es inmediato por el axioma (2) de la definición de agrandamiento, que $(y, g) \in S$. Ahora, si $(y, g) \in S$, entonces $(g^{-1}y, g^{-1}) \in S$, luego $g^{-1}y \in Y$ y $(y, g) \in P(G, X, Y)$. $\square$

Mostremos con un ejemplo sencillo la utilidad del teorema anterior.

Ejemplo 2.4.1. Dado un grupo topológico G, ya hemos mostrado que $\tilde{G}_c^R$ es un submonoide inverso del producto semidirecto $C(G) \times G$. Donde $C(G)$ es un semirretículo superior, ya que dados $A, B \in C(G)$ el supremo de $\{A, B\}$ es $A \cup B$. Y G actúa sobre $C(G)$ por automorfismos de orden mediante $\alpha : G \times C(G) \to C(G)$ definida por $\alpha(g, A) = gA$ para $g \in G$ y $A \in C(G)$. Sea $Y = \{A \in C(G) : (A, 1) \in E(\tilde{G}_c^R)\}$.

Usemos el teorema anterior para ver que $(G, C(G), Y)$ es una tripla de McAlister tal que $P(G, C(G), Y) = \tilde{G}_c^R$. En ese sentido, solo debemos mostrar que $P(C(G), G)$

es un agrandamiento de $\tilde{G}_c^R$. Veamos que se cumplen las tres condiciones de la Definición 2.4.1.

La primera condición se verifica viendo que $E(\tilde{G}_c^R)$ es ideal de orden de $E(P(C(G),G))$. En efecto, sea $(A,1) \in E(\tilde{G}_c^R)$ y $(B,1)$ idempotente de $P(C(G),G)$, tal que $(B,1) \leq (A,1)$, entonces $A \subseteq B$, luego $B \in C_1(G)$ y por tanto $(B,1) \in E(\tilde{G}_c^R)$.

Sea $(A,g) \in P(C(G),G)$ tal que $(A,g)(g^{-1}A,g^{-1}) = (A,1) \in \tilde{G}_c^R$, entonces $A \in C_1(G)$. Además, si $(g^{-1}A,1) \in \tilde{G}_c^R$, tenemos que $g \in A$. Así, $(A,g) \in \tilde{G}_c^R$. Por último, veamos que cada idempotente de $P(C(G),G)$ es $D-relacionado$ con un idempotente de $\tilde{G}_c^R$. Sean $(A,1)$ idempotente de $P(C(G),G)$, $a \in A$, y considere $(a^{-1}A,1)$. Veamos que $(A,1)D(a^{-1}A,1)$. Para esto, considere $(a^{-1}A,a^{-1})$. Vemos que $(A,a)(a^{-1}A,a^{-1}) = (A,1)$, es decir, $(A,1)L(a^{-1}A,a^{-1})$. Además, también se tiene que $(a^{-1}A,a^{-1})(A,a) = (a^{-1}A,1)$, luego $(a^{-1}A,a^{-1})R(a^{-1}A,1)$. Por tanto, $(A,1)D(a^{-1}A,1)$. Con lo que se tienen las hipótesis del teorema anterior, y tenemos que $P(G,C(G),Y) = \tilde{G}_c^R$.

Según el teorema anterior, si logramos encontrar un agrandamiento de $\langle Part(G,Y)\rangle$, que sea un producto semidirecto de un semirretículo por un grupo, podríamos encontrar una tripla de McAlister como la que estamos buscando. En ese sentido, recordemos que se ha probado que $\langle Part(G,Y)\rangle' \cong E' \times G^*$. Además, podemos ver que $(E' - \{I_X\}) \times G^*$ es subsemigrupo inverso de $E' \times G^*$ pues se tiene que $\psi(\langle Part(G,Y)\rangle' - G^*) = (E' - \{I_X\}) \times G^*$. En efecto, si $\alpha \in \langle Part(G,Y)\rangle' - G^*$, entonces $\psi(\alpha) = (\alpha \circ \alpha^{-1}, \alpha^*) \in (E' - \{I_X\}) \times G^*$. Además, si $(e,g^*) \in (E' - \{I_X\}) \times G^*$, basta tomar $e \circ g^*$ que es un elemento de $\langle Part(G,Y)\rangle' - G^*$ y se tiene que $\psi(e \circ g^*) = (e,g^*)$. De esto obtenemos que $\langle Part(G,Y)\rangle' - G^*$ es isomorfo al producto semidirecto $(E' - \{I_X\}) \times G^*$.

Teniendo en cuenta esto, queremos probar que $\langle Part(G,Y)\rangle' - G^*$ es un agrandamiento de $\langle Part(G,Y)\rangle$. Para hacerlo, primero mostramos la siguiente proposición;

Proposición 2.4.1. Sea $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \cdots \alpha_n$ un idempotente de $\langle Part(G,Y)\rangle' - G^*$, entonces existe $\beta \in \langle Part(G,Y)\rangle$ tal que $dom(\alpha) \cap Y = dom(\beta)$.

Demostración. Procedemos por inducción en n.
El caso en que $\alpha = \alpha_1 \in \langle Part(G,Y)\rangle$, es trivial. Veamos cuando $n = 2$. Aquí se debe considerar cuando $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2^*$ o cuando $\alpha = \alpha_1^* \circ \alpha_2$. Si $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2^*$, basta tomar $\beta = \alpha_1 \circ \alpha_2$. Ya que trivialmente $dom(\alpha_1 \circ \alpha_2) = dom(\alpha_1 \circ \alpha_2^*) \cap Y$. Si $\alpha = \alpha_1^* \circ \alpha_2$, sea $\beta = \alpha_1$, entonces $dom(\beta) = dom(\alpha_2^* \circ \alpha_1)$.

Asuma ahora que la afirmación se cumple para k. Sea $\alpha = \alpha_1 \circ \cdots \alpha_k \circ \alpha_{k+1}$. Suponga primero que $\alpha_k \in G^*$. Si $\alpha_{k+1} \in G^*$ es inmediato, pues $\alpha_k \circ \alpha_{k+1} = r^* \in G^*$, y solo sería escribir α como $\alpha = \alpha_1 \circ \cdots \alpha_{k-1} \circ r^*$ y aplicar la hipótesis de inducción. Si ahora, $\alpha_{k+1} \in Part(G,Y)$. Por hipótesis de inducción, existe $\gamma \in \langle Part(G,Y)\rangle$ que satisface que $dom(\gamma) = dom(\alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_k) \cap Y$. Note que $\gamma \circ \alpha_{k+1} \in \langle Part(G,Y)\rangle$. Además, claramente se tiene que $dom(\gamma \circ \alpha_{k+1}) = dom(\alpha)$.

Supongamos ahora que $\alpha_k \in Part(G,Y)$. Si $\alpha_{k+1} \in Part(G,Y)$, por hipóesis de inducción, existe $\gamma \in \langle Part(G,Y)\rangle$ que satisface $dom(\gamma) = dom(\alpha_1 \circ \cdots \alpha_k)$, luego $dom(\gamma \circ \alpha_{k+1}) = dom(\alpha)$, y $\gamma \circ \alpha_{k+1} \in \langle Part(G,Y)\rangle$. Sea que $\alpha_{k+1} \in G^*$, digamos $\alpha_{k+1} = g^*$, basta tomar $\beta = \gamma \circ g$, donde $dom(\gamma) = Y \cap dom(\alpha_1 \circ \cdots \alpha_k)$. $\square$

Usando esta proposición, probemos que $\langle Part(G,Y)\rangle' - G^*$ es un agrandamiento de $\langle Part(G,Y)\rangle$, lo que generaliza la Proposición 2.1.4.

Proposición 2.4.2. Sea $F = \langle Part(G,Y)\rangle' - G^*$, entonces F es un agrandamiento de $\langle Part(G,Y)\rangle$.

Demostración. Es claro que $\langle Part(G,Y)\rangle$ es un subsemigrupo inverso de F. Veamos que $\langle Part(G,Y)\rangle' - G^*$ satisface (1) de la Definición 2.4.1. Es fácil ver, que basta mostrar que E es ideal de orden $E(F)$. En ese sentido, sea $\alpha \in E$ y sea $\beta \in E(F)$ tal que $\beta \subseteq \alpha$. Entonces existe $\gamma \in \langle Part(G,Y)\rangle$ tal que $dom(\beta) \cap Y = dom(\beta) = dom(\gamma)$. Así, $\beta = I_{dom(\beta)} = I_{dom(\gamma)} \in \langle Part(G,Y)\rangle$.

Veamos ahora que se cumple (2). Sea $\alpha \in \langle Part(G,Y)\rangle' - G^*$ tal que $\alpha \circ \alpha^{-1}, \alpha^{-1} \circ \alpha$ están en $\langle Part(G,Y)\rangle$. Tenemos entonces que $dom(\alpha), im(\alpha) \subseteq Y$. Por tanto:

$$\alpha = \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{-1} \circ \alpha^* \alpha^{-1} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{-1} \circ (I_Y \circ \alpha^* \circ I_Y) \circ \alpha^{-1} \circ \alpha$$

Por último, sea α un idempotente de $\langle Part(G,Y)\rangle' - G^*$, sabemos que este idempotente puede ser de dos formas, a saber, $\alpha = I_{dom(\beta)}$ para $\beta \in \langle Part(G,Y)\rangle$ o bien, $\alpha = I_{g^*(dom(\rho))}$ para $\rho \in \langle Part(G,Y)\rangle$. Si α es de la primera forma, no hay nada que demostrar. Sea ahora que α es de la segunda forma, vemos que $(\alpha, I_{dom(\rho)}) \in D$. Sea $h = g^* \circ \rho$. Entonces $(h, I_{dom(\rho)}) \in L$, y $im(h) = g^*(dom(\rho)) = dom(\alpha)$. $\square$

Teniendo en cuenta el isomorfismo $\langle Part(G,Y)\rangle' - G^* \cong (E' - \{I_X\}) \times G^*$, la proposición anterior y el Teorema 2.4.2, tenemos el siguiente resultado que logra establecer el objetivo que nos habíamos planteado, generalizando la Proposición 2.1.5.

Teorema 2.4.3. $(G^*, E' - \{I_X\}, E)$ es una tripla de McAlister tal que $P(G^*, E' - \{I_X\}, E)$ es isomorfo a $\langle Part(G,Y)\rangle$.

BIBLIOGRAFÍA

CHOI, K. e Y. LIM. “Inverse Monoids of Möbius Type”. En: *Journal of algebra* 223 (2000), págs. 283-294 (vid. pág. 10).

EXEL, R. *Partial Dynamical Systems Fell Bundles and Aplications*. Universidad Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, 2014 (vid. pág. 53).

HOWIE, J. *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press, 1976 (vid. pág. 11).

HUSAIN, T. *Introduction to topological groups*. Saunders company, 1996 (vid. pág. 37).

LAWSON, M. *Inverse semigroups, The Theory of Partial Symmetries*. World Scientific Publishing, 1998 (vid. pág. 18).

— “The Möbius Inverse Monoid”. En: *Journal of algebra* 200 (1998), págs. 428-438 (vid. págs. 9, 10, 54, 55, 67).