CONTINUOS G-CONTRAÍBLES

MICHAEL ALEXANDER RINCÓN VILLAMIZAR

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2012

CONTINUOS G-CONTRAÍBLES

MICHAEL ALEXANDER RINCÓN VILLAMIZAR

Trabajo de grado presentado para optar al
título de Magister en Matemáticas

Director
JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA, Ph.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2012

AGRADECIMIENTOS

A mi abuela, por todo su cariño y apoyo que me dió para ser quien soy.

Al profesor Javier Camargo y a la profesora Patricia Pellicer por sus comentarios y sugerencias.

A mi amigo Sergio, por su amistad.

Al grupo de topología: Dúwamg y Rosana, por los momentos de risas y burlas.

Y a todos los que de una u otra forma aportaron algo a este trabajo.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

RESUMEN

TÍTULO: CONTINUOS G-CONTRAÍBLES*

AUTOR: MICHAEL ALEXANDER RINCÓN VILLAMIZAR**

PALABRAS CLAVES: continuo, g-contraíble, hiperespacio, uniformemente conexo por caminos.

DESCRIPCIÓN:

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío. Un continuo es *contraíble* si la función identidad es homotópica a una función constante. Claramente, un intervalo compacto, una n-celda (espacio homeomorfo a $[0,1]^n$) o cualquier subconjunto compacto y convexo de un espacio normado son ejemplos de continuos contraíbles. Por otro lado, el continuo S^1 no es contraíble.

Un continuo X es g-*contraíble* o contraíble generalizado si existe una función $f\colon X \to X$ continua, sobreyectiva y homotópica a una función constante. Los continuos g-contraíbles fueron introducidos por el Profesor David Bellamy en [2]. Claramente todo continuo contraíble es g-contraíble. No es difícil ver que cualquier continuo localmente conexo es g-contraíble. En particular, el continuo S^1 es un continuo g-contraíble que no es contraíble.

El propósito de este trabajo es estudiar los continuos g-contraíbles. Nuestro trabajo consta de tres capítulos: en el Capítulo 1 introducimos la terminología y notación que se usará en este trabajo. En el Capítulo 2 estudiamos los continuos g-contraíbles. En este capítulo presentamos nuevos resultados y ejemplos. Construiremos una familia no numerable de continuos uniformemente conexos por caminos (ver Definición 2.27) tal que ningún elemento de esta familia es g-contraíble.

Finalmente, en el Capítulo 3 estudiamos la g-contractibilidad en los hiperespacios de continuos (ver Definición 1.40). Probaremos que para un continuo X, el hiperespacio $F_n(X)$ es imagen y preimagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor si y sólo si X también lo es. Como en el Capítulo 2, construiremos una familia de continuos uniformemente conexos por caminos tal que el hiperespacio de subcontinuos de cada miembro de esta familia no es g-contraíble.

---

*Dr. JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA, Director del Trabajo de Grado.

**Programa de Maestría en Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander.

ABSTRACT

TITLE: G-CONTRACTIBLE CONTINUA*

AUTHOR: MICHAEL ALEXANDER RINCÓN VILLAMIZAR**

KEYWORDS: continuum, g-contractible, hyperspace, uniformly pathwise connected.

DESCRIPTION:

A continuum is a nonempty compact, connected and metric space. A continuum is called *contractible* provided that the identity map is homotopic to a constant map. It is easy to see that a compact interval, a n-cell (space homeomorphic to $[0,1]^n$) and a compact convex subset of a normed space are examples of contractible continua. The simple closed curve is an example of non-contractible continuum.

A continuum X is said to be g-*contractible* or *generalized contractible* if there is a surjective map $f\colon X \to X$ homotopic to a constant map. G-contractible continua was introduced by David Bellamy in [2]. Note that every contractible continuum is g-contractible. It is easy to show that every locally connected continuum is g-contractible. In particular, the simple closed curve is g-contractible but it is not contractible.

The goal of this dissertation is to study g-contractible continua. This dissertation is divided in three chapters: in Chapter 1 we introduce the terminology and notation that we will use in this dissertation. In Chapter 2 we study g-contractible continua. We will show original results and examples. We will also show that there is an uncountable family of uniformly pathwise connected continua (see Definition 2.27) such that each element of that family is not g-contractible.

Finally, in Chapter 3 we study g-contractibility in hyperspaces of continua (see Definition 1.40). We will prove that given a continuum X, the hyperspace $F_n(X)$ is both continuous image and preimage of the cone over the Cantor set if and only if so is X, respectively. Also, we will show that there exists an uncountable family of uniformly pathwise connected continua such that its hyperspace of subcontinua is not g-contractible.

*Dr. JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA, Graduate Dissertation Director.

**Graduate Program of Master in Mathematics, Department of Mathematics, Faculty of Science, Universidad Industrial de Santander.

Introducción

Un problema fundamental en topología es estudiar cuándo dos espacios dados son homeomorfos. Para tal fin se introducen propiedades topológicas que permiten hacer esta distinción. Una de estas propiedades es la contractibilidad. Se dice que un espacio es contraíble si la función identidad es homotópica a una función constante. Intuitivamente hablando, un espacio es contraíble si se puede deformar continuamente en él a un punto. De la definición es fácil ver que un arco, una n-celda y, más generalmente, un subconjunto convexo de un espacio normado son ejemplos de espacios contraíbles. Un ejemplo de un espacio no contraíble es una curva cerrada simple.

En topología, un problema clásico es determinar cuándo un espacio es imagen y/o preimagen continua de otro espacio dado. Un importante teorema de topología general es que todo espacio métrico compacto es imagen continua del espacio de Cantor $\mathcal{C}$ [23, Teorema 7.7]. Con relación a los espacios métricos compactos y conexos, a los cuales llamaremos continuos, es conocido que ellos siempre son preimagen continua de $[0, 1]$, por el Teorema de extensión de Tietze [25, Teorema 5.38]. Por otra parte, un continuo es imagen continua de $[0, 1]$ si y sólo si es localmente conexo (ver Teorema 1.20). Así, todo continuo localmente conexo es imagen y preimagen continua del intervalo cerrado [0,1].

En 1970, David Bellamy en *"The cone over the Cantor set- continuous maps from both directions"* [2] estudió los continuos que son preimagen e imagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor. En este trabajo estudiaremos con detalle dicho artículo y relacionaremos sus resultados con otros trabajos.

En el artículo del profesor Bellamy se da una caracterización de los continuos que son preimagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor. En este mismo artículo, el profesor Bellamy definió los continuos g-contraíbles o contraíbles generalizados como aquellos para los cuales existe una función de él en sí mismo, continua y sobreyectiva, homotópica a una constante. Esta definición extiende naturalmente el concepto de contractibilidad. Claramente, cualquier espacio contraíble es g-contraíble. Una curva cerrada simple es un ejemplo de un continuo g-contraíble que no es contraíble. Es fácil ver que cualquier continuo g-contraíble es imagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor.

En *"Uniformly pathwise connected continua"* [17], W. Kuperberg introduce los continuos uniformemente conexos y prueba que un continuo tiene dicha propiedad si y sólo si es imagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor. Así, cualquier continuo

g-contraíble es uniformemente conexo por caminos. Sin embargo el recíproco de esta afirmación no es cierto, como lo probaron los profesores Iwona Krezemińska y Janusz R. Prajs en *"A non-g-contractible uniformly path connected continuum"* [18], mostrando un ejemplo de un continuo que es imagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor pero no es g-contraíble.

En [24], Sam B. Nadler. Jr., estudió la g-contractibilidad en hiperespacios. El profesor Nadler probó que para cualquier continuo X, el hiperespacio 2^X es g-contraíble [24, Teorema 4.10]. En este mismo trabajo, Nadler probó que si X tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes entonces el hiperespacio $C(X)$ es g-contraíble [24, Teorema 4.12]. Naturalmente, Nadler preguntó si para todo continuo X, el hiperespacio $C(X)$ es g-contraíble [24, Pregunta 4.11]. En *"A continuum whose hyperspace of subcontinua is not g-contractible"* [15], Alejandro Illanes mostró un ejemplo de un continuo X para el cual $C(X)$ no es g-contraíble.

En este trabajo nos proponemos estudiar los continuos g-contraíbles. Nuestro trabajo está compuesto por tres capítulos:

En el Capítulo 1 presentamos las definiciones y resultados que utilizaremos para desarrollar nuestro trabajo.

El Capítulo 2 está dividido en tres secciones. La primera sección la dedicamos al estudio de las propiedades generales de los continuos g-contraíbles. Daremos una respuesta parcial afirmativa a una pregunta formulada por los profesores Krezemińska y Prajs [18, Pregunta 1]. La segunda sección es una recopilación de los resultados publicados por el profesor Bellamy en [2]. Finalmente, en la tercera sección mostramos que dado un subcontinuo uniformemente conexo por caminos L del plano, tal que $N(L) \neq \emptyset$ y $Cl_{\mathbb{R}^2}(N(L))$ es localmente conexo, podemos construir un continuo X_L uniformemente conexo por caminos que no es g-contraíble. El problema de encontrar un continuo uniformemente conexo por caminos que no sea g-contraíble, fue propuesto por el profesor Bellamy quien preguntó si cualquier continuo uniformemente conexo por caminos es g-contraíble. Solo hasta 1999 fue dada una respuesta negativa a esta pregunta. Sin embargo, la construcción del continuo presentado en ese entonces es muy elaborada, pues se utilizan sucesiones de circunferencias que convergen a arcos y el argumento para probar la no g-contractibilidad de este continuo es muy sofisticado. Basándonos en la construcción que se hace en esta sección, mostraremos que existe un dendroide (continuo arcoconexo sin circunferencias) uniformemente conexo por caminos que no es g-contraíble.

En el Capítulo 3 estudiamos la g-contractibilidad en hiperespacios. El capítulo está dividido en dos secciones. En la primera sección presentamos con pruebas los resultados del profesor Nadler alrededor de la g-contractibilidad de los hiperespacios 2^X y $C(X)$, donde X es un continuo. Probaremos que si un continuo X contiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes entonces $C_n(X)$ es g-contraíble para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto generaliza el resultado del profesor Nadler [23, Teorema 4.12]. Con respecto al hiperespacio $F_n(X)$, probaremos que un continuo X es imagen y preimagen continua de Cono($\mathcal{C}$) si y sólo si el hiperespacio $F_n(X)$ también lo es. En la segunda sección de este capítulo mostramos que existe una familia no numerable de continuos uniformemente conexos por caminos tales que el hiperespacio de subcontinuos de cada miembro de esta familia no es g-contraíble. Como un caso particular de este resultado mostraremos que existe un dendroide cuyo hiperespacio de subcontinuos no es g-contraíble.

Los resultados más importantes presentados en este trabajo de grado hacen parte del artículo *"On g-contractibility of continua"* [5] que se encuentra en proceso de evaluación. Aún así, hay muchas preguntas abiertas relacionadas con los continuos g-contraíbles. Por ello, durante el transcurso de este trabajo presentaremos algunas de estas preguntas.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentaremos las definiciones y resultados de topología general, teoría de continuos e hiperespacios de continuos que usaremos a lo largo de este trabajo. Todas las definiciones que daremos en este trabajo serán dadas en el contexto de los espacios métricos compactos y conexos, a los que llamaremos *continuos.*

1.1. Continuos: definiciones y resultados

En este sección presentamos definiciones y resultados conocidos de topología y teoría de continuos. Las pruebas de algunos de estos resultados serán omitidas ya sea por ser muy conocidas o por involucrar conceptos que no son relevantes para el desarrollo del trabajo.

Definición 1.1. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente de vacío. Un *continuo de Hausdorff* (o *continuo* T_2) es un espacio topológico de Hausdorff compacto, conexo y diferente de vacío. Un *subcontinuo* es un subespacio de un espacio métrico que es un continuo.

A continuación presentamos algunos ejemplos de continuos.

Ejemplo 1.2. Un *arco* es un continuo homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

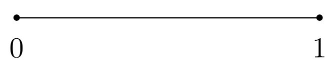

Figura 1.1: Arco

Ejemplo 1.3. Sea $Y = \left\{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \leq 1\right\}$ y $X = Cl_{\mathbb{R}^2}(Y)$. El continuo X es llamado la *curva del topólogo.*

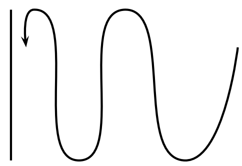

Figura 1.2: Curva del topólogo

Observe que todo continuo es un continuo de Hausdorff. El recíproco de esta afirmación no es cierto, como lo mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4. Si $X = [0,1] \times [0,1]$ es dotado de la topología de orden lexicográfico (ver [21, Sección 14]) entonces X es un continuo de Hausdorff. Note que X es de Hausdorff. Ahora, como todo subconjunto no vacío y acotado de X tiene una mínima cota superior, tenemos que X es compacto [21, Teorema 27.1]. Notemos también que X es conexo, por [21, Teorema 24.1]. De otra parte, X no es metrizable (ver [11, Definición 2.3, pag. 183]) pues X no es separable.

Definición 1.5. Sea X un continuo. Se dice que X es *localmente conexo en* $x \in X$ si para cada vecindad V de x, existe un abierto conexo U de X tal que $x \in U \subset V$. Un continuo se dice *localmente conexo* cuando es localmente conexo en cada uno de sus puntos.

En este trabajo haremos uso de la siguiente notación.

Definición 1.6. Dado un continuo X definimos

$$N(X) = \{x \in X \mid X \,\text{no es localmente conexo en}\, x\}.$$

El conjunto de puntos donde un continuo X es localmente conexo lo denotaremos por $L(X) = X \setminus N(X)$.

Ejemplo 1.7. Claramente un continuo X es localmente conexo si y sólo si $N(X) = \emptyset$ o equivalentemente $L(X) = X$. Sea X la curva del topólogo, como la definimos en el Ejemplo 1.3. Entonces $X = Y \cup J$, donde $J = \{0\} \times [-1,1]$. El continuo X no es localmente conexo en cada punto de J; así $N(X) = J$ y $L(X) = X \setminus N(X) = \big\{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) \mid 0 < x \leq 1\big\}$.

Definición 1.8. Un continuo X se llama *conexo en pequeño en* x si para cada vecindad V de x, existe una vecindad conexa W de x tal que $W \subset V$. El conjunto de puntos donde X no es conexo en pequeño lo denotaremos por $K(X)$.

Comentario 1.9. Claramente si X es localmente conexo en x, X es conexo en pequeño en x y por consiguiente $K(X) \subset N(X)$. En [19, Ejemplo 1.7.7], se da un ejemplo de un continuo X que es conexo en pequeño en un punto $p \in X$, pero que no es localmente conexo en p. Es conocido que un continuo es localmente conexo si y sólo si es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos [19, Teorema 1.7.12].

Lema 1.10. *Sea X un continuo. Entonces $N(X) \subset Cl_X(K(X))$.*

Demostración. Sea $U = X \setminus Cl_X(K(X))$ y veamos que $U \subset L(X)$. Note que U es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Es fácil ver que cada componente de U es abierta y por lo tanto U es localmente conexo por [25, Teorema 3.23]. Así, $U \subset L(X)$. $\square$

Lema 1.11. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Si $y \in Y$ y V es un subconjunto de X tal que $f^{-1}(y) \subset Int_X(V)$ entonces $y \in Int_Y f(V)$.*

Demostración. Supongamos que $y \in Y \setminus Int_Y(f(V)) = Cl_Y(Y \setminus f(V))$ y veamos que $f^{-1}(y) \cap X \setminus Int_X(V) \neq \emptyset$. Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y tal que $y_n \in Y \setminus f(V)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Note que $f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(Y \setminus f(V)) = X \setminus f^{-1}(f(V))$ y como $X \setminus f^{-1}(f(V)) \subset X \setminus V$ tenemos que $f^{-1}(y_n) \subset X \setminus V$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $x_n \in f^{-1}(y_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X es compacto, podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Claramente $x \in Cl_X(X \setminus V) = X \setminus Int_X(V)$. Ahora bien, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ por la continuidad de f y, como $f(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, se sigue que $f(x) = y$. Así, $x \in f^{-1}(y) \cap X \setminus Int_X(V)$. $\square$

Lema 1.12. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Si $y \in Y$ es tal que $f^{-1}(y) \subset X \setminus K(X)$ entonces $y \in Y \setminus K(Y)$.*

Demostración. Sea U un abierto de Y tal que $y \in U$. Entonces $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U)$. Si $z \in f^{-1}(y)$ tenemos que $z \in X \setminus K(X)$, por lo tanto existe una vecindad conexa V_z tal que $z \in V_z \subset f^{-1}(U)$. Si definimos $V = \bigcup_{z \in f^{-1}(y)} V_z$ entonces $f^{-1}(y) \subset Int_X(V) \subset f^{-1}(U)$. Note que $y \in Int_Y(f(V)) \subset f(f^{-1}(U)) = U$, por el Lema 1.11. Ahora bien, $f(V) = \bigcup_{z \in f^{-1}(y)} f(V_z)$ es conexo pues $f(V_z)$ es conexo y $y \in f(V_z)$ para cada $z \in f^{-1}(y)$. Luego $f(V)$ es una vecindad conexa de y que está contenida en U. Así, $y \in Y \setminus K(Y)$. $\square$

Teorema 1.13. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces $K(Y) \subset f(K(X))$.*

Demostración. Veamos que $Y \setminus f(K(X)) \subset Y \setminus K(Y)$. Si $y \in Y \setminus f(K(X))$ entonces $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(Y \setminus f(K(X))) = X \setminus f^{-1}(f(K(X)))$. Como $X \setminus f^{-1}(f(K(X))) \subset X \setminus K(X)$ tenemos que $f^{-1}(y) \subset X \setminus K(X)$. Así, $y \in Y \setminus K(Y)$ por el Lema 1.12. $\square$

Corolario 1.14. *Sean X y Y continuos y $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Entonces $Cl_Y(N(Y)) \subset f(Cl_X(N(X)))$.*

Demostración. Como $K(Y) \subset f(K(X))$ tenemos que $K(Y) \subset f(N(X))$ y $f(N(X)) \subset f(Cl_X(N(X)))$. Por otra parte, $N(Y) \subset Cl_Y(K(Y))$ por el Teorema 1.13. Como toda función definida entre continuos es cerrada tenemos que $N(Y) \subset f(Cl_X(N(X)))$. De esta manera concluimos que $Cl_Y(N(Y)) \subset f(Cl_X(N(X)))$. $\square$

Definición 1.15. Sea X un espacio topológico conexo y $p \in X$. Si $X \setminus \{p\}$ es conexo, diremos que p es un *punto de no corte de* X. En caso contrario, diremos que p es *punto de corte de* X.

Ejemplo 1.16. Si L es el arco (Ejemplo 1.2) entonces 0 y 1 son los únicos puntos de no corte. Para el continuo X mostrado en el Ejemplo 1.3, tenemos que cualquier punto de $\{0\} \times [-1, 1]$ es un punto de no corte de X.

Definición 1.17. Diremos que un continuo X es *arcoconexo* si para cada $x, y \in X$ existe una inmersión $h\colon [0, 1] \to X$ tal que $h(0) = x$ y $h(1) = y$.

La siguiente proposición muestra que la arcoconexidad es invariante bajo funciones continuas.

Proposición 1.18. *Sean X y Y continuos. Si X es arcoconexo y $f\colon X \to Y$ es una función continua y sobreyectiva entonces Y es arcoconexo.*

Demostración. Sean a y b en Y entonces existen x e y en X tales que $f(x) = a$ y $f(y) = b$. Sea $h\colon [0, 1] \to X$ una inmersión tal que $h(0) = x$ y $h(1) = y$. Como $h([0, 1])$ es un subcontinuo de X localmente conexo que contiene a x e y, por [23, Teorema 8.16] se sigue que $f(h([0, 1]))$ es un subcontinuo localmente conexo de Y que contiene a a y b. De lo anterior, el continuo $f(h([0, 1]))$ es arcoconexo, por [23, Teorema 8.23]; así existe una inmersión $g\colon [0, 1] \to Y$ tal que $g(0) = a$ y $g(1) = b$. Esto prueba que Y es arcoconexo. $\square$

Definición 1.19. Un continuo X es *unicoherente* si cuando $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de X, tenemos que $A \cap B$ es conexo. Se dice que X es *hereditariamente unicoherente* si todo subcontinuo de X es unicoherente.

Todo arco es unicoherente y hereditariamente unicoherente. La curva del topólogo (Ejemplo 1.3) es un continuo hereditariamente unicoherente. Una *curva cerrada simple* (continuo homeomorfo a $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$) es un continuo que no es unicoherente.

Un conocido y muy importante teorema en teoría de continuos es el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz que caracteriza los continuos localmente conexos y enunciamos a continuación. Una prueba de este teorema puede ser consultada en [23, Teoremas 8.14 y 8.18].

Teorema 1.20. *Un continuo de Hausdorff es localmente conexo si y sólo si es imagen continua de* $[0, 1]$.

Introducimos la siguiente notación: dados un arco L y $\alpha\colon [0, 1] \to L$ un homeomorfismo, los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ se llaman *puntos finales de* L.

Definición 1.21. Un continuo X se dice *hereditariamente arcoconexo* si cada subcontinuo de X es arcoconexo. Diremos que X es *únicamente arcoconexo* si dados $x, y \in X$ existe un único arco en X que contiene como puntos finales a x e y. Un *dendroide* es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente.

Comentario 1.22. Es conocido que un continuo X es un dendroide si y sólo si X es hereditariamente arcoconexo y únicamente arcoconexo [6, Teorema 26, p.197]. También es bien conocido que todo subcontinuo de un dendroide es un dendroide [7, pags. 239 y 240].

Ejemplo 1.23. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$ y sea $A_0 = \{0\} \times [0,1]$. Definimos el dendroide X como $X = L \cup \left(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_n\right)$, donde $L = [0,1] \times \{0\}$.

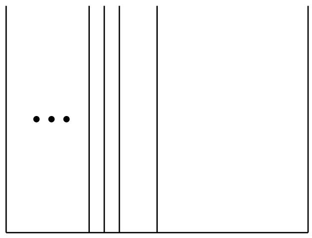

Figura 1.3: Un ejemplo de un dendroide

Definición 1.24. Sea X un dendroide. Se dice que $p \in X$ es un *punto final de X* si p es punto final de todo arco en X que lo contiene. Diremos que $p \in X$ es *punto de ramificación* si p es un punto final común de al menos tres arcos que sólo se intersectan en él. Un *abanico* es un dendroide con un único punto de ramificación.

Ejemplo 1.25. Sean $a = (-1,0)$, $b = (0,0)$ y $q_n = (0, \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^2$, sea $\overline{xy} = \{(1-t)x + ty \,|\, t \in [0,1]\}$. Definimos el *abanico armónico* como $X = \overline{ab} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{aq_n}$.

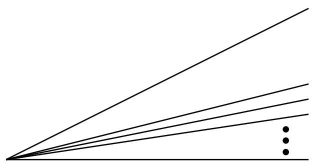

Figura 1.4: Abanico armónico

El siguiente resultado conocido como el Teorema de Transgresión es muy útil para definir funciones continuas entre espacios topológicos. Una prueba de este puede ser consultada en [11, Teorema 3.2, pág. 123].

Teorema 1.26. *Sea $p\colon X \to Y$ una función cociente y $h\colon X \to Z$ una función continua. Supongamos que para cada $y \in Y$, h es constante sobre el conjunto $p^{-1}(y)$ entonces $hp^{-1}\colon Y \to Z$ es una función continua y $(hp^{-1}) \circ p = h$.*

Definición 1.27. Sea X un espacio topológico. Definimos el *cono de X* como el espacio cociente $X \times [0,1]/X \times \{1\}$ y lo denotamos $\mathrm{Cono}(X)$.

Ejemplo 1.28. Sean $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor y $X = \text{Cono}(\mathcal{C})$. El continuo X se ilustra en la siguiente figura.

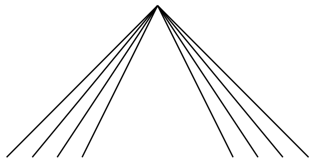

Figura 1.5: El cono sobre el conjunto de Cantor

Para cada $x \in X$, la clase de equivalencia de $(x, 1)$ es el conjunto $X \times \{1\}$. Dicha clase es llamada el *vértice del cono* y lo denotaremos v_X. La función $h\colon X \to \text{Cono}(X)$ definida por $h(x) = (x, 0)$ es un homeomorfismo entre X y el conjunto $\beta(X) = \{(x, 0) \mid x \in X\} \subset \text{Cono}(X)$. Por lo tanto podemos considerar a X como un subespacio de $\text{Cono}(X)$. La proyección canónica o función identificación de $X \times [0, 1]$ a $\text{Cono}(X)$ será denotada por q_X. Cuando X es un continuo, $X \times [0, 1]$ es un continuo y por lo tanto $\text{Cono}(X)$ también es un continuo. Para detalles de la construcción del cono de un continuo ver [23, Ejemplo 3.15].

Ahora, si X es un espacio métrico compacto, podemos suponer que $X \subset I^\infty$, donde I^∞ denota el cubo de Hilbert [25, Teorema 7.2]. El *cono geométrico* de X, denotado por $GC(X)$, se define como la unión de todos los segmentos de recta de la forma $\overline{xv} = \{tv + (1 - t)(x, 0) \mid t \in [0, 1]\}$, donde $x \in X$ y $v = ((0, 0, \ldots), 1)$. No es difícil ver que $GC(X)$ es homeomorfo a $\text{Cono}(X)$ cuando X es un espacio métrico compacto [16, pág. 52].

Definición 1.29. Sea X un espacio topológico. Definimos la *suspensión de* X como el espacio cociente $\text{Cono}(X)/\beta(X)$ y lo denotamos $\text{Sus}(X)$.

Definición 1.30. Sean X y Z espacios topológicos y $f, g\colon X \to Z$ funciones continuas. Una *homotopía* es una función continua de $X \times [0, 1]$ a Z. Decimos que f *es homotópica a* g si existe una homotopía $H\colon X \times [0, 1] \to Z$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para cada $x \in X$.

Definición 1.31. Un espacio topológico X es *contraíble*, si la función identidad id_X es homotópica a una función constante.

Ejemplo 1.32. Un arco es un ejemplo de un espacio contraíble. Usando técnicas de topología algebraica se puede probar que una curva cerrada simple no es contraíble (para detalles ver [25]).

Ejemplo 1.33. Un subconjunto C de un espacio normado se llama *convexo estrellado* si existe $a \in C$ tal que para cualquier $x \in C$ tenemos que $\overline{ax} \subset C$. Cualquier conjunto convexo es convexo estrellado pero no recíprocamente. Note que un conjunto convexo estrellado es contraíble. En efecto, sea C un conjunto convexo estrellado entonces existe $a \in C$ tal que para cada $x \in C$ tenemos que $\overline{ax} \subset C$. Definamos $H\colon C \times [0,1] \to C$ por $H(x,t) = ta + (1-t)x$. Entonces H es una homotopía tal que $H(x,0) = x$ y $H(x,1) = a$ para cada $x \in C$. Por lo tanto C es contraíble.

En particular, cualquier n-celda $[0,1]^n$ y el cubo de Hilbert son espacios contraíbles. Por otra parte, si X es un espacio métrico compacto entonces $\mathrm{Cono}(X)$ es homeomorfo a $GC(X)$ y como $GC(X)$ es convexo estrellado tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.34. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces* $\mathrm{Cono}(X)$ *es contraíble.*

Lema 1.35. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces existe una función* $\Gamma\colon \mathrm{Sus}(X) \to \mathrm{Cono}(X)$ *continua y sobreyectiva.*

Demostración. Sean $\phi\colon X \times [0,1] \to \mathrm{Cono}(X)$, la función definida por

$$\phi(x,t) = \begin{cases} q_X(x, 1-t), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ q_X(x,t), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

y $f\colon X \times [0,1] \to \mathrm{Sus}(X)$ definida por $f(x,t) = (q \circ q_X)(x,t)$, donde $q\colon \mathrm{Cono}(X) \to \mathrm{Sus}(X)$ es la función cociente. Por [21, Teorema 18.3], la función ϕ es continua. Veamos que para cada $(w,s) \in \mathrm{Sus}(X)$, la función ϕ es constante sobre el conjunto $f^{-1}(w,s)$. Para probar esto consideremos los siguientes casos:

1) supongamos que $s \in (0,1)$ entonces $f^{-1}(w,s) = q_X^{-1}(q^{-1}(w,s)) = \{(w,s)\}$ y es claro que ϕ es constante sobre el conjunto $f^{-1}(w,s)$;

2) para $s = 1$ tenemos que $f^{-1}(w,s) = q_X^{-1}(q^{-1}(v_X)) = q_X^{-1}(v_X) = X \times \{1\}$ y por consiguiente $\phi(f^{-1}(w,s)) = \{v_X\}$;

3) si $s = 0$ entonces $f^{-1}(w,s) = q_X^{-1}(q^{-1}(w,s)) = q_X^{-1}(\beta(X)) = \beta(X)$; por lo tanto $\phi(f^{-1}(w,s)) = \{v_X\}$ y esto completa la prueba de los casos.

Por el Teorema 1.26, la función $\Gamma\colon \mathrm{Sus}(X) \to \mathrm{Cono}(X)$ definida por $\Gamma = \phi \circ f^{-1}$ es continua y como ϕ es sobreyectiva, se sigue que Γ también lo es. $\square$

Definición 1.36. Sea Ω el primer ordinal de cardinalidad no numerable. Definimos el espacio S_Ω como el conjunto de todos los ordinales menores que Ω. El espacio *cerrado primer ordinal no numerable* se define como $S_\Omega \cup \{\Omega\}$ junto con la topología de orden y lo denotamos $\overline{S}_\Omega$.

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 12 de [27, Parte 2, 43].

Teorema 1.37. *Sean (X,d) un espacio métrico y $f\colon S_\Omega \to X$ una función continua. Entonces existe $\alpha \in S_\Omega$ tal que si $\alpha < \beta$ tenemos $f(\beta) = f(\alpha)$.*

Demostración. Probemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_n \in S_\Omega$ tal que $d(f(\beta), f(\alpha_n)) < \frac{1}{n}$ para cualquier $\beta > \alpha_n$. Supongamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $\alpha \in S_\Omega$ tenemos $d(f(\alpha_1), f(\alpha) \geq \frac{1}{N}$ para algún $\alpha_1 > \alpha$. Entonces existe $\alpha_2 > \alpha_1$ tal que $d(f(\alpha_2), f(\alpha_1)) \geq \frac{1}{N}$. Repitiendo este mismo argumento, encontramos una sucesión $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en S_Ω con $\alpha_{k+1} > \alpha_k$ tal que $d(f(\alpha_{k+1}), f(\alpha_k)) \geq \frac{1}{N}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como todo subconjunto contable de S_Ω tiene cota superior en S_Ω [11, Teorema 9.1, p.54], el conjunto $A = \{\alpha_k \,|k \in \mathbb{N}\}$ es acotado superiormente en S_Ω y puesto que S_Ω es un conjunto bien ordenado se sigue que A tiene una mínima cota superior α_0 [21, Ejercicio 1, p.66]. No es difícil ver que la sucesión $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a α_0. Puesto que f es continua se sigue que la sucesión $(f(\alpha_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\alpha_0)$. Esto último contradice la construcción de la sucesión $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Sea α la mínima cota superior para el conjunto $\{\alpha_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ en donde cada α_n tiene la propiedad de que $d(f(\beta), f(\alpha_n)) < \frac{1}{n}$ para cualquier $\beta > \alpha_n$. Como el espacio S_Ω es contablemente compacto [25, Ejemplo 11, p.150] se sigue que existe una subsucesión $(\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = \alpha$. Luego $d(f(\beta), f(\alpha)) = 0$, por la continuidad de f, i.e., $f(\beta) = f(\alpha)$ para cualquier $\alpha < \beta$. □

1.2. Hiperespacios: definiciones y propiedades

En esta sección introducimos la noción de hiperespacio y enunciaremos algunas propiedades de estos.

Definición 1.38. Dado un espacio métrico acotado X, definimos

$$2^X = \{A \subset X \,|\, A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es compacto}\}.$$

Dado $A \in 2^X$ y $x \in X$ definimos $d(x, A) = \inf \{d(x, a) \,|\, a \in A\}$. Para cada $r > 0$, sea $N_d(A, r) = \{x \in X \,|\, d(x, A) < r\}$. Ahora, dados $A, B \in 2^X$ se define

$$H_d(A, B) = \inf \{r > 0 \,|\, A \subset N_d(B, r) \,\text{y}\, B \subset N_d(A, r)\}.$$

Puesto que d es una métrica acotada, H_d define una función de $2^X \times 2^X$ a $[0, \infty)$. Probaremos que esta función es una métrica para 2^X. Esta métrica es conocida como la *métrica de Hausdorff.*

Teorema 1.39. *Si X es un espacio métrico acotado, la función $H_d\colon 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ es una métrica para 2^X.*

Demostración. Claramente si $A, B \in 2^X$ tenemos que $H_d(A, B) = H_d(B, A)$. Veamos que si $H_d(A, B) = 0$ entonces $A = B$. Sea $x \in A$. Entonces la ecuación $H_d(A, B) = 0$ implica que para cada $r > 0$ tenemos que $A \subset N_d(B, r)$. Como $x \in N_d(B, r)$ se sigue que $d(x, B) < r$ para cada $r > 0$; luego $d(x, B) = 0$ y así $x \in B$ pues B es un cerrado de X. Esto prueba que $A \subset B$ y de igual manera se puede probar que $B \subset A$ y por lo tanto $A = B$.

Para probar que H_d satisface la desigualdad triangular, usamos la siguiente definición equivalente: si $A, B \in 2^X$ entonces $H_d(A, B) = \text{máx}\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\}$ [16, Ejercicio 2.7, pág. 14]. Sean $A, B, C \in 2^X$ y supongamos que $H_d(A, B) = \sup_{a\in A} d(a, B)$. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Entonces existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $H_d(A, B)-\varepsilon < d(a_\varepsilon, B)$. Así, $H_d(A, B)-\varepsilon < d(a_\varepsilon, b)$, para cada $b \in B$. Si $c \in C$ es dado, entonces $H_d(A, B)-\varepsilon < d(a_\varepsilon, c) + d(c, b)$ para cada $b \in B$. Luego, $H_d(A, B) - \varepsilon \leq d(a_\varepsilon, c) + d(c, B)$. Note que $H_d(A, B) - \varepsilon \leq d(a_\varepsilon, c) + d(c, B) \leq d(a_\varepsilon, c) + H_d(C, B)$ para cada $c \in C$. De lo anterior se sigue que $H_d(A, B) - \varepsilon \leq d(a_\varepsilon, C) + H_d(C, B) \leq H_d(A, C) + H_d(C, B)$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $H_d(A, B) \leq H_d(A, C) + H_d(C, B)$. $\square$

Un *hiperespacio* $\mathcal{H}$ es una familia de subconjuntos de X tal que $\mathcal{H} \subset 2^X$. Convenimos en que la topología para un hiperespacio $\mathcal{H}$ será la topología de subespacio inducida por 2^X.

A continuación introducimos algunos hiperespacios asociados a un continuo.

Definición 1.40. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Definamos:

1) $C(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es conexo}\}$,

2) $F_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$,

3) $C_n(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$.

El hiperespacio $F_n(X)$ es conocido como el *n-ésimo producto simétrico* y fue introducido por Borsuk y Ulam en [4]. Claramente $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$, $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$ y $F_n(X) \subset C_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que $C_1(X) = C(X)$. Dado $y \in X$, $C_y(X) = \{A \in C(X) \mid y \in A\}$. Más generalmente, si X es un continuo y $W \subset X$ definimos $C(W) = \{A \in C(X) \mid A \subset W\}$.

Otra topología para el hiperespacio 2^X es la topología de Vietoris, la cual definimos a continuación.

Definición 1.41. Sea X un continuo y sean $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos de X. Definimos

$$\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = \left\{A \in 2^X \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\right\}.$$

Es fácil ver que la colección $\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \mid U_1, \ldots, U_n \text{ son abiertos de } X \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$ es una base para una topología en 2^X [16, Teorema 1.2]. La topología generada por $\mathcal{B}$ es llamada la *topología de Vietoris*.

Comentario 1.42. Los subconjuntos de la forma $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$, en donde U_i es un abierto de X para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, son llamados *abiertos de Vietoris* de 2^X. Si $\mathcal{H}$ es un hiperespacio de X, usaremos la notación $\langle\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ cuando hablemos de un abierto de Vietoris en $\mathcal{H}$.

A continuación, probamos que la topología de Vietoris para 2^X es metrizable. La prueba es tomada de [16, Teorema 3.1].

Proposición 1.43. *Si X es un espacio métrico, entonces la topología de Vietoris para 2^X coincide con la topología generada por la métrica de Hausdorff.*

Demostración. Sea T_{H_d} la topología generada por la métrica de Hausdorff para 2^X y sea T_V la topología de Vietoris. Es fácil mostrar que la colección $\mathcal{S}$ de conjuntos de la forma $\langle U \rangle$ y $\langle X, U \rangle$ forman una subbase para la topología de Vietoris [16, Teorema 1.2]. Por lo tanto, para probar que $T_V \subset T_{H_d}$ es suficiente mostrar que $\langle U \rangle$ y $\langle X, U \rangle$ son elementos de T_{H_d} para cualquier U abierto de X. Sea U un abierto de X; si $U = X$ tenemos que $\langle U \rangle = 2^X$ y por lo tanto $\langle U \rangle \in T_{H_d}$. Supongamos que $U \neq X$ y sea $A \in \langle U \rangle$. Definamos $\varepsilon = \text{ínf}\,\{d(x,a) \,|\, a \in A,\, x \in X \setminus U\}$. Como A es compacto no vacío, $X \setminus U$ es un cerrado no vacío de X y $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$, tenemos que $\varepsilon > 0$ (ver [11, 4.4, pág. 234]). Veamos que $B_{H_d}(A, \varepsilon) \subset \langle U \rangle$. Si $B \in B_{H_d}(A, \varepsilon)$ entonces $H_d(A, B) < \varepsilon$ y así, $B \subset N_d(A, \varepsilon)$. Para cada $x \in B$ se tiene $d(x, A) < \varepsilon$. Supongamos que $B \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ y tomemos $x_0 \in B \cap (X \setminus U)$. Entonces $d(x_0, A) < \varepsilon$ y como $d(x_0, A) = \text{ínf}\,\{d(x_0, a) \,|\, a \in A\}$ existe $a \in A$ tal que $d(x_0, a) < \varepsilon$ pero esto contradice la elección de ε. Así, $B \subset U$ y $B \in \langle U \rangle$. Por lo tanto $B_{H_d}(A, \varepsilon) \subset \langle U \rangle$. Como $A \in \langle U \rangle$ fue arbitrario, se sigue que $\langle U \rangle \in T_{H_d}$.

Probemos ahora que $\langle X, U \rangle \in T_{H_d}$. Sea $A \in \langle X, U \rangle$. Entonces $A \cap U \neq \emptyset$. Tomemos $p_0 \in A \cap U$. Como U es abierto de X y $p_0 \in U$, existe $\delta > 0$ tal que $N_d(\{p_0\}, \delta) \subset U$. Veamos que $B_{H_d}(A, \delta) \subset \langle X, U \rangle$. Sea $B \in B_{H_d}(A, \delta)$. Entonces $A \subset N_d(B, \delta)$. Como $p_0 \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(b, p_0) < \delta$ y así, $b \in U$ y concluimos que $B \cap U \neq \emptyset$. Luego $B \in \langle X, U \rangle$ y se sigue que $B_{H_d}(A, \delta) \subset \langle X, U \rangle$. Ahora, como $A \in \langle X, U \rangle$ fue arbitrario tenemos que $\langle X, U \rangle \in T_{H_d}$.

Veamos ahora que $T_{H_d} \subset T_V$. Como la colección de conjuntos $B_{H_d}(A, r)$ con $A \in 2^X$ y $r > 0$ es una base para la topología T_{H_d}, es suficiente mostrar que para cualquier $A \in 2^X$ y $r > 0$, existe una colección finita de abiertos $U_1, \ldots, U_n$ de X tales que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subset B_{H_d}(A, r)$.

Sean $A \in 2^X$ y $r > 0$ dados. Claramente la colección $\mathcal{U} = \{B_d(x, r) \,|\, x \in A\}$ es un cubrimiento abierto de A. Como A es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n$ elementos de A tales que $A \subset \cup_{i=1}^n B_d(x_i, r)$. Sea $U_i = B_d(x_i, r)$. Entonces $A \subset \cup_{i=1}^n U_i$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos $A \cap U_i \neq \emptyset$ y $\text{diám}(U_i) < r$. Es evidente que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Probemos que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subset B_{H_d}(A, r)$. Sea $K \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Entonces $K \subset \cup_{i=1}^n U_i$. Veamos que $K \subset N_d(A, r)$. Supongamos que existe $x_0 \in K$ tal que $x_0 \notin N_d(A, r)$ entonces $r \leq d(x_0, A)$ y por lo tanto $r \leq d(x_0, a)$ para cada $a \in A$. Como $x_0 \in K$, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_0 \in U_j$. De otra parte, como $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $a_0 \in A \cap U_j$. Luego $r \leq d(x_0, a_0) \leq \text{diám}(U_j)$ lo cual es una contradicción. Así, $K \subset N_d(A, r)$. Similarmente podemos probar que $A \subset N_d(K, r)$. Luego $H_d(A, K) < r$, por definición de H_d y de esta manera concluimos que $K \in B_{H_d}(A, r)$. Por lo tanto, $T_{H_d} \subset T_V$ y así, $T_V = T_{H_d}$. Con esto completamos la prueba del teorema. $\square$

La siguiente definición es una noción clásica de convergencia de conjuntos.

Definición 1.44. Sean X un continuo y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X. Definimos el *límite inferior* de la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ como el conjunto

$$\liminf A_i = \{x \in X \mid \forall U \subset X \text{ abierto con } x \in U, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } U \cap A_i \neq \emptyset, \forall i \geq N\}.$$

El *limite superior* de la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ se define como

$$\limsup A_i = \{x \in X \mid \forall U \subset X \text{ abierto con } x \in U; U \cap A_i \neq \emptyset \text{ para infinitos } i \in \mathbb{N}\}.$$

Es claro que $\liminf A_i \subset \limsup A_i$. Si $\liminf A_i = \limsup A_i = A$, diremos que la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *converge a* A y escribimos $\lim_{i\to\infty} A_i = A$.

No es difícil probar que dada una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ en 2^X, los conjuntos $\liminf A_i$ y $\limsup A_i$ son no vacíos y cerrados de X [24, Observación 0.6].

Comentario 1.45. La convergencia en el sentido de la Definición 1.44 es equivalente a la convergencia usual en el hiperespacio 2^X dotado con la métrica de Hausdorff cuando X es un continuo [16, Teorema 4.7].

A continuación probaremos que los hiperespacios 2^X, $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son continuos, cuando X es un continuo. Las pruebas de estos resultados se han tomado de [24, Teorema 0.8] y [19, Corolarios 1.8.8 y 1.8.9].

Teorema 1.46. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces 2^X, $C(X)$ son espacios métricos compactos.*

Demostración. Primero, probemos que 2^X es compacto. Es suficiente mostrar que toda sucesión en 2^X tiene una subsucesión convergente (ver [25, Teorema 4.10]). Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X. Como X es un espacio métrico compacto, existe una base $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ numerable [11, Teorema 4.1, pág. 233]. Sea $\left\{A_n^1\right\}_{n=1}^{\infty} = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una y supongamos que hemos definido una sucesión $\{A_n^m\}_{n=1}^{\infty}$. Definamos $\left\{A_n^{m+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ de la siguiente forma:

(1) Si $\{A_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\left\{A_{n_k}^m\right\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\limsup A_{n_k}^m \cap U_m = \emptyset$ entonces sea $\left\{A_n^{m+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ dicha subsucesión.

(2) Si para cualquier subsucesión $\left\{A_{n_k}^m\right\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A_n^m\}_{n=1}^{\infty}$ tenemos que $\limsup A_{n_k}^m \cap U_m \neq \emptyset$ entonces hacemos $\left\{A_n^{m+1}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{A_n^m\}_{n=1}^{\infty}$.

Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$, hemos definido $\{A_n^m\}_{n=1}^{\infty}$. Consideremos ahora la sucesión diagonal $\{A_n^n\}_{n=1}^{\infty}$. De la construcción, es claro que $\{A_n^n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Probemos que esta subsucesión es convergente. Supongamos que $\{A_n^n\}_{n=1}^{\infty}$ no es convergente entonces existe $p \in \limsup A_n^n \setminus \liminf A_n^n$. Como $p \notin \liminf A_n^n$, existe un abierto U_{k_0} y una subsucesión $\left\{A_{n_j}^{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ de $\{A_n^n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $p \in U_{k_0}$ y $U_{k_0} \cap A_{n_j}^{n_j} = \emptyset$ para cada $j \in \mathbb{N}$ (ver Definición 1.44). Note que $\left\{A_{n_j}^{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\left\{A_n^{k_0}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Por lo tanto, la sucesión $\left\{A_n^{k_0}\right\}_{n=1}^{\infty}$ satisface la condición (1).

Luego, $\limsup A_n^{k_0+1} \cap U_{k_0} = \emptyset$ por definición de la sucesión $\left\{A_n^{k_0+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Como $\{A_n^n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\left\{A_n^{k_0+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\limsup A_n^n \subset \limsup A_n^{k_0+1}$ (ver [24, Observación 0.6]) tenemos que $\limsup A_n^n \cap U_{k_0} = \emptyset$ pero esto no es posible pues $p \in \limsup A_n^n \cap U_{k_0}$. Así, 2^X es compacto.

Ahora, para probar que $C(X)$ es compacto, es suficiente ver que $C(X)$ es cerrado en 2^X. Sea $K \in C(X)$ y sea $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} K_n = K$. Como K es cerrado, es suficiente ver que K es un subconjunto conexo de X. Supongamos que K no es conexo entonces existen abiertos disyuntos U y V de X tales que $K \subset U \cup V$ y $K \cap U \neq \emptyset$, $K \cap V \neq \emptyset$. Como la convergencia en el sentido de la métrica de Hausdorff es equivalente a la convergencia introducida en la Definición 1.44 (ver [24, Teorema 0.7]) y $\langle U \cap V \rangle$ es un abierto de 2^X que tiene al punto K, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ entonces $K_n \subset U \cup V$. Sean $y \in K \cap U$ y $z \in K \cap V$. Como $y, z \in K$ y $K = \liminf K_n$, existen sucesiones $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tales que $y_n, z_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ y $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, respectivamente. Así, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ tenemos $y_n \in U$ y $z_n \in V$. Sean $N = \max\{N_0, N_1\}$ y $n \geq N$, fijo. Entonces $K_n \subset U \cup V$, $K_n \cap U \neq \emptyset$ y $K_n \cap V \neq \emptyset$, lo cual es imposible pues K_n es conexo. Esto completa la prueba del teorema. $\square$

Teorema 1.47. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $F_n(X)$ es un continuo.*

Demostración. Definamos $g \colon X^n \to F_n(X)$ por $g(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Veamos que g es una función continua. Sean $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in X^n$ y supongamos que $D((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = r$, donde D denota la métrica sobre X^n definida por $D((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n)\}$. Veamos que $H_d(g(x_1, \ldots, x_n), g(y_1, \ldots, y_n)) \leq r$. Note que $D((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = r < r + \varepsilon$ donde $\varepsilon > 0$ es dado; luego $d(x_i, y_i) < r + \varepsilon$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. No es difícil ver que esta última desigualdad implica que $H_d(g(x_1, \ldots, x_n), g(y_1, \ldots, y_n)) < r + \varepsilon$ para cada $\varepsilon > 0$ y así, $H_d(g(x_1, \ldots, x_n), g(y_1, \ldots, y_n)) \leq r$. Esto prueba que g es una función continua. Como X es un continuo, X^n también es un continuo y concluimos que $F_n(X)$ también es un continuo, por la continuidad y sobreyectividad de la función g. $\square$

Como una consecuencia del Teorema 1.47, tenemos:

Teorema 1.48. *Sea X un continuo. Entonces 2^X es un continuo.*

Demostración. Por el Teorema 1.46, 2^X es un espacio métrico compacto. Luego, basta probar que 2^X es conexo. Como $F_n(X)$ es un continuo para cada $n \in \mathbb{N}$ y $F_1(X) \subset F_2(X) \subset \cdots \subset F_n(X) \subset \cdots$, tenemos que $F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$ es un subconjunto conexo de 2^X. Así, $Cl_{2^X}(F(X))$ es conexo, por [11, Teorema 1.6, pág. 109]. Probemos que $Cl_{2^X}(F(X)) = 2^X$. Sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, dado. Como A es compacto, existen $x_1, \ldots, x_n \in A$ tales que $A \subset \cup_{j=1}^{n} B_d(x_j, \varepsilon)$. Definamos $L = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y veamos que $H_d(A, L) < \varepsilon$. Es claro que $L \subset A$ y así $L \subset N_d(A, \varepsilon)$. Ahora, sea $x \in A$. Entonces existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in B_d(x_j, \varepsilon)$. Luego $d(x, L) \leq d(x, x_j) < \varepsilon$. Por lo tanto, $x \in N_d(L, \varepsilon)$ y se sigue que $A \subset N_d(L, \varepsilon)$. De esta manera concluimos que $Cl_{2^X}(F(X)) = 2^X$ y esto completa la prueba del Teorema. $\square$

Una herramienta muy útil para estudiar la arcoconexidad en hiperespacios de continuos es la noción de arco de orden, que introducimos a continuación.

Definición 1.49. Sea X un continuo. Un *arco de orden* en 2^X es un arco tal que si $A, B \in \alpha$ tenemos que $A \subset B$ o $B \subset A$. Un *arco de orden de* A_0 *a* A_1 en 2^X es un arco de orden α tal que $A_0, A_1 \in \alpha$ y si $A \in \alpha$ entonces $A_0 \subset A \subset A_1$.

Una prueba para el siguiente resultado puede ser consultada en [24, Teorema 1.8].

Teorema 1.50. *Sean X un continuo y $A_0, A_1 \in 2^X$ tales que $A_0 \neq A_1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) existe un arco de orden en 2^X de A_0 a A_1;

(2) $A_0 \subset A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0.

Teorema 1.51. *Sea X un continuo. Entonces 2^X es arcoconexo.*

Demostración. Sea $A \in 2^X$ y $A \neq X$. Por la parte (1) del Teorema 1.50, existe un arco de orden de A a X. Claramente esto implica que para cualesquiera dos elementos de 2^X existe un arco de orden que los une. Así, 2^X es arcoconexo. $\square$

Para probar la arcoconexidad del hiperespacio $C(X)$, usaremos el siguiente resultado que probamos a continuación.

Proposición 1.52. *Sea X un continuo y sea α un arco de orden en 2^X. Si $A \in C(X)$ es el punto inicial de α entonces $\alpha \subset C(X)$.*

Demostración. Sea $B \in \alpha$ tal que $B \neq A$. Sea β un subarco de α con puntos finales A y B. Como α es un arco de orden, por [24, Teorema 1.6], tenemos que β es un arco de orden de A a B. Así, $A \subset B$ y cada componente de B intersecta a A, por la parte (2) del Teorema 1.50. Es fácil ver que $B = \bigcup\{A \cup K \mid K \text{ es una componente de } B\}$. Como cada componente de B intersecta a A y A es conexo tenemos que $A \cup K$ es conexo para cada componente de B. Por lo tanto, B es conexo. Así, $\alpha \subset C(X)$. $\square$

Teorema 1.53. *Sea X un continuo. Entonces $C(X)$ es arcoconexo.*

Demostración. Sea $A \in C(X)$ y $A \neq X$. Note que existe un arco de orden α en 2^X de A a X, por la parte (1) del Teorema 1.50. Como $A \in C(X)$ y A es el punto inicial de α, se sigue que $\alpha \subset C(X)$, por la Proposición 1.52. Por lo tanto $C(X)$ es arcoconexo. $\square$

Para el propósito de ciertas pruebas es conveniente hacer uso de la siguiente función: sea $u\colon 2^{2^X} \to 2^X$ definida por $u(\mathcal{L}) = \bigcup \mathcal{L}$. En [24, Lema 1.48], se prueba que u está bien definida y es continua.

Teorema 1.54. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $C_n(X)$ es un continuo arcoconexo.*

Demostración. Como $C(X)$ es arcoconexo, es fácil ver que $(C(X))^n$ también es arcoconexo. Por otra parte, la función $g\colon (C(X))^n \to F_n(C(X))$ definida por $g(A_1, \ldots, A_n) = \{A_1, \ldots, A_n\}$ es es continua y sobreyectiva (ver Teorema 1.47) y por lo tanto $F_n(C(X))$ es arcoconexo. Sea $v\colon F_n(C(X)) \to C_n(X)$ definida por $v(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$. Note que $v = u|_{F_n(C(X))}\colon F_n(C(X)) \to C_n(X)$ y así, v es una función continua. No es difícil ver que $v\colon F_n(C(X)) \to C_n(X)$ es sobreyectiva. De esta manera, concluimos que $C_n(X)$ es un continuo arcoconexo, por la Proposición 1.18. $\square$

Como una aplicación de la compacidad del hiperespacio 2^X, vamos a probar el *Teorema del cable cortado*, un resultado muy útil en teoría de continuos. Como una consecuencia de este teorema probaremos el *Teorema de golpes en la frontera* el cual también es muy utilizado en teoría de continuos. La definición dada a continuación será utilizada para la prueba del siguiente teorema.

Definición 1.55. Sean (X, d) un espacio métrico, $a, b \in X$ y $\varepsilon > 0$. Una *(d-ε)-cadena* de puntos de a a b es un conjunto finito $\{x_1 = a, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ tal que $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Lema 1.56. *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$. Definamos*

$$\mathcal{C}(A, \varepsilon) = \{x \in X \mid \textit{existe una (d-}\varepsilon\textit{)-cadena de algún punto de } A \textit{ a } x\}.$$

Entonces $\mathcal{C}(A, \varepsilon)$ es abierto y cerrado de X.

Demostración. Note que $A \neq \emptyset$ si y sólo si $\mathcal{C}(A, \varepsilon) \neq \emptyset$. Supongamos que $A \neq \emptyset$ y sea $x \in \mathcal{C}(A, \varepsilon)$. Veamos que $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{C}(A, \varepsilon)$. Si $y \in B(x, \varepsilon)$ entonces $d(x, y) < \varepsilon$. Como $x \in \mathcal{C}(A, \varepsilon)$, existe una ($d$-$\varepsilon$)-cadena $\{x = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = a\}$ para algún $a \in A$. Así, $\{y, x = x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = a\}$ es una (d-ε)-cadena de y a a. Por lo tanto $y \in \mathcal{C}(A, \varepsilon)$ y de lo anterior tenemos que $\mathcal{C}(A, \varepsilon)$ es abierto.

Veamos que $\mathcal{C}(A, \varepsilon)$ es cerrado. Si $x \in \overline{\mathcal{C}(A, \varepsilon)}$ entonces $B(x, \varepsilon) \cap \mathcal{C}(A, \varepsilon) \neq \emptyset$. Tomemos $y \in B(x, \varepsilon) \cap \mathcal{C}(A, \varepsilon)$. Entonces existe una ($d$-$\varepsilon$)-cadena $\{y = x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m = b\}$ de y a algún $b \in A$. Por lo tanto $\{x, y = x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m = b\}$ es una (d-ε)-cadena de x a b. Luego $x \in \mathcal{C}(A, \varepsilon)$ y concluimos que $\mathcal{C}(A, \varepsilon)$ es cerrado. $\square$

Lema 1.57. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y, A y B subconjuntos cerrados de X. Si no existe un subconjunto conexo de X que intersecta a A y a B entonces existe $\delta > 0$ tal que no hay una (d-δ)-cadena de algún punto de A a algún punto de B.*

Demostración. Supongamos que esto no se satisface. Entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ existe una (d-$\frac{1}{2^i}$)-cadena Q_i de $a_i \in A$ a $b_i \in B$. Puesto que 2^X es un espacio métrico compacto, la sucesión $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, digamos $\{Q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Sea $Q = \lim_{k\to\infty} Q_{n_k}$ entonces como $Q_{n_k} \cap A \neq \emptyset$ y $Q_{n_k} \cap B \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y, A y B son subconjuntos cerrados de X tenemos que $Q \cap A \neq \emptyset$ y $Q \cap B \neq \emptyset$. Por [23, Lema 4.16], Q es un subconjunto conexo de X; por lo tanto Q es un subconjunto conexo de X que intersecta a A y B lo cual contradice la hipótesis de Lema. Esto prueba el resultado. $\square$

Una consecuencia directa del Lema 1.57 es el Teorema del cable cortado, el cual probamos a continuación.

Teorema 1.58. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y A y B subconjuntos cerrados de X. Si no existe un subconjunto conexo de X que interseca a A y a B, entonces $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 y X_2 son subconjuntos disyuntos cerrados de X tales que $A \subset X_1$, $B \subset X_2$.*

Demostración. Como no existe un subconjunto conexo de X que interseca a A y a B, por el Lema 1.57 existe $\delta > 0$ tal que no hay una (d-δ)-cadena de algún punto de A a algún punto de B. Sean $X_1 = \mathcal{C}(A, \delta)$ y $X_2 = X \setminus \mathcal{C}(A, \delta)$ entonces $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ y $X = X_1 \cup X_2$. Por el Lema 1.56, X_1 es un abierto y cerrado de X, y así X_2 es un cerrado de X. Claramente $A \subset X_1$ y además $B \subset X_2$, por el Lema 1.57. $\square$

A continuación probamos el Teorema de golpes en la frontera.

Teorema 1.59. *Sean X un continuo y U un subconjunto abierto no vacío propio de X. Si L es una componente de $Cl_X(U)$, entonces $L \cap Fr_X(U) \neq \emptyset$ (o equivalentemente, $L \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$).*

Demostración. Supongamos que $L \cap Fr_X(U) = \emptyset$. Puesto que L es una componente de $Cl_X(U)$, no existe un subconjunto conexo de $Cl_X(U)$ que intersecte a L y $Fr_X(U)$. Por el Teorema 1.58, existen X_1 y X_2 cerrados disyuntos de $Cl_X(U)$ tales que $Cl_X(U) = X_1 \cup X_2$ y $L \subset X_1$, $Fr_X(U) \subset X_2$. Como L es una componente de $Cl_X(U)$ tenemos que $L \neq \emptyset$ y por lo tanto $X_1 \neq \emptyset$. Sea $Y = X_2 \cup (X \setminus U)$. Como $Cl_X(U) = X_1 \cup X_2$ tenemos que $X = Cl_X(U) \cup (X \setminus U) = (X_1 \cup X_2) \cup (X \setminus U) = X_1 \cup Y$. Note que X_1 y X_2 son cerrados de $Cl_X(U)$ y $Cl_X(U)$ es un cerrado de X, así X_1 y X_2 son cerrados de X. Por lo tanto, Y es un cerrado de X. Además $Y \neq \emptyset$ pues $U \neq X$ y $X \setminus U \subset Y$. Ahora bien, $X_1 \cap Y = X_1 \cap (X_2 \cup (X \setminus U)) = (X_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap (X \setminus U)) = X_1 \cap (X \setminus U)$. De otra parte, $X_1 \cap (X \setminus U) \subset Cl_X(U) \cap (X \setminus U) = Fr_X(U) \subset X_2$. Luego $X_1 \cap (X \setminus U) = \emptyset$ pues $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. De lo anterior tenemos que X no es conexo pero esto es una contradicción. $\square$

La prueba del siguiente resultado ha sido tomada de [14, Lema 3.1].

Lema 1.60. *Sean X un continuo, $\mathcal{K}$ un subcontinuo de 2^X (o $C(X)$) y $K \in \mathcal{K}$. Entonces cada componente de $u(\mathcal{K})$ intersecta a K.*

Demostración. Supongamos que existe una componente E de $u(\mathcal{K})$ tal que $E \cap K = \emptyset$. Note que E y K son cerrados no vacíos de $u(\mathcal{K})$ tal que ningún subconjunto conexo de $u(\mathcal{K})$ intersecta a los dos. Por el Teorema 1.58, existen A y B cerrados disyuntos de $u(\mathcal{K})$ tal que $K \subset A$ y $E \subset B$ y $u(\mathcal{K}) = A \cup B$. Sean $\mathcal{U} = \langle A \rangle$ y $\mathcal{V} = \langle X, B \rangle$. Claramente $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son cerrados disyuntos no vacíos de 2^X. Ahora bien, si $D \in \mathcal{K}$ entonces $D \subset u(\mathcal{K}) = A \cup B$ y por lo tanto $D \subset A$ o $D \cap B \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{K} \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ y como $\mathcal{U} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$ y $\mathcal{V} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$ se sigue que $\mathcal{K}$ no es conexo, lo cual es una contradicción. $\square$

Lema 1.61. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{L} \in C(F_n(X))$ es tal que $\mathcal{L} \cap F_k(X) \neq \emptyset$ para algún $k \leq n$, entonces $u(\mathcal{L}) \in C_k(X)$.*

Demostración. Sea $W \in \mathcal{L} \cap F_k(X)$. Entonces, por el Lema 1.60 toda componente de $u(\mathcal{L})$ debe intersectar a W. Como $W \in F_k(X)$ tenemos que $u(\mathcal{L})$ debe tener a lo más k componentes. □

El siguiente resultado es probado en [1, Lema 3.5] con la hipótesis que U es abierto en X, sin embargo en la prueba de dicho resultado no se utiliza esta hipótesis.

Lema 1.62. *Sea X un continuo y $U \subset X$. Si L es una componente de U entonces $C(L)$ es una componente de $C(U)$.*

Demostración. Veamos que $C(L)$ es conexo. Sea $L' = \{\{x\} \mid x \in L\}$. Entonces L' y L son homeomorfos y $L' \subset C(L)$. Sean $A \in C(L)$ y $a \in A$. Como A es conexo y $a \in A$, existe un arco de orden α_A de $\{a\}$ a A, por el Teorema 1.50. Note que $\alpha_A \subset C(L)$, por la Proposición 1.52. Así, $C(L) = \bigcup \{\alpha_A \mid A \in C(L)\} \cup L'$ es conexo. Sea $\mathcal{K}$ la componente de $C(U)$ que contiene a $C(L)$ y sea $A \in \mathcal{K}$. Observemos que $u(\mathcal{K})$ es un subconjunto conexo de U. Como L es una componente de U y $L \subset u(\mathcal{K})$ tenemos que $L = u(\mathcal{K})$. Por lo tanto, $A \subset u(\mathcal{K}) = L$ y concluimos que $A \in C(L)$. Esto prueba que $\mathcal{K} = C(L)$ y así $C(L)$ es una componente de $C(U)$. □

Corolario 1.63. *Sean X un continuo, $U \subset X$ y $\mathcal{K} \subset C(U)$. Entonces $\mathcal{K}$ es una componente de $C(U)$ si y sólo si $\mathcal{K} = C(L)$ para alguna componente L de U.*

Demostración. Si L es una componente de U entonces $C(L)$ es una componente de $C(U)$, por el Lema 1.62. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{K}$ es una componente de $C(U)$. Entonces $u(\mathcal{K})$ es un subconjunto conexo de U. Sea L la componente de U tal que $u(\mathcal{K}) \subset L$ y veamos que $\mathcal{K} = C(L)$. Sea $K \in \mathcal{K}$ entonces $K \subset u(\mathcal{K}) \subset L$, así $K \in C(L)$. Por el Lema 1.62, $C(L)$ es conexo y como $\mathcal{K}$ es una componente de $C(U)$, se sigue que $\mathcal{K} = C(L)$. □

Con relación a la conexidad en pequeño en el hiperespacio $C(X)$ tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.64. *Sea X un continuo y $p \in X$. Entonces X es conexo en pequeño en p si y sólo si $C(X)$ es conexo en pequeño en cada punto de $C_p(X)$.*

Demostración. Supongamos que $C(X)$ es conexo en pequeño en cualquier punto de $C_p(X)$ y sea V una vecindad de p. Sea U un abierto de X tal que $p \in U \subset V$. Como $C(X)$ es conexo en pequeño en el punto $\{p\}$ y $\{p\} \in \langle U \rangle_{C(X)}$, existe una vecindad conexa $\mathcal{V}$ tal que $\{p\} \in \mathcal{V} \subset \langle U \rangle_{C(X)}$. Por el Lema 1.60, $u(\mathcal{V})$ es un subconjunto conexo de X y además $p \in u(\mathcal{V}) \subset U$. Como $\mathcal{V}$ es una vecindad de $\{p\}$, existe U_0 abierto de X tal que $\{p\} \in \langle U_0 \rangle_{C(X)} \subset \mathcal{V}$. Luego, $p \in U_0 \subset u(\mathcal{V})$ y de esta manera concluimos que $p \in Int_X(u(\mathcal{V}))$. Por lo tanto, X es conexo en pequeño en el punto p.

Recíprocamente, supongamos que X es conexo en pequeño en el punto p y sea $A \in C_p(X)$. Sea $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle_{C(X)}$ un abierto de $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$. Como $p \in A$ y $A \subset \cup_{i=1}^n U_i$, tenemos que $p \in U_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sea V una vecindad conexa de p tal que $V \subset Cl_X(V) \subset U_j$ y sea $\mathcal{V} = \langle V, U_1, \ldots, U_n \rangle_{C(X)}$. Note que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ y $A \cup Cl_X(V) \in \mathcal{V}$. Como $p \in A \cap Cl_X(V)$ tenemos que $A \cup Cl_X(V)$ es un subcontinuo de X. Probemos que $\mathcal{V}$ es arcoconexo. Sea $B \in \mathcal{V}$. Como $A \cup Cl_X(V) \subset A \cup Cl_X(V) \cup B$ y cada componente de $A \cup Cl_X(V) \cup B$ intersecta a $A \cup Cl_X(V)$, existe un arco de orden α de $A \cup Cl_X(V)$ a $A \cup Cl_X(V) \cup B$, por el Teorema 1.50. Observe que como $A \cup Cl_X(V) \in C(X)$ tenemos que $\alpha \subset C(X)$, por la Proposición 1.52. Ahora, como cada componente de $A \cup Cl_X(V) \cup B$ intersecta a $Cl_X(V) \cup B$ y $Cl_X(V) \cup B \subset A \cup Cl_X(V) \cup B$ tenemos que existe un arco de orden β de $Cl_X(V) \cup B$ a $A \cup Cl_X(V) \cup B$, usando nuevamente el Teorema 1.50. Note que $Cl_X(V) \cup B$ es un subcontinuo de X, así $\beta \subset C(X)$, por la Proposición 1.52. De la definición de arco de orden se sigue que los arcos α y β están contenidos en $\mathcal{V}$. Esto prueba que existe un arco γ contenido en $\mathcal{V}$ de $A \cup Cl_X(V)$ a $Cl_X(V) \cup B$. Por el Teorema 1.50 y la Proposición 1.52, existe un arco de orden $\lambda \subset C(X)$ de B a $Cl_X(V) \cup B$. Así, $\lambda \subset \mathcal{V}$ ya que $B \in \mathcal{V}$ y $Cl_X(V) \cup B \in \mathcal{V}$. De esta manera, concluimos que para cada $B \in \mathcal{V}$, existe un arco Γ contenido en $\mathcal{V}$ de $A \cup Cl_X(V)$ a B y se sigue que $\mathcal{V}$ es arcoconexo. Esto prueba que $C(X)$ es conexo en pequeño en $A \in C_p(X)$. □

Definición 1.65. Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{H} \subset 2^X$. Una *función de Whitney para* $\mathcal{H}$, es una función continua $w\colon \mathcal{H} \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:

1) para cada $A, B \in \mathcal{H}$ tales que $A \subset B$ y $A \neq B$, $w(A) < w(B)$;

2) $w(A) = 0$ si y sólo si $A \in F_1(X) \cap \mathcal{H}$.

Una demostración del siguiente teorema puede ser consultada en [16, Teorema 13.4].

Teorema 1.66. *Si X un espacio métrico compacto, entonces existe una función de Whitney para cualquier hiperespacio de X.*

Las siguientes nociones son de gran utilidad en la teoría de hiperespacios.

Definición 1.67. Sean X un espacio métrico compacto, $\mathcal{H} \subset 2^X$ y w una función de Whitney para $\mathcal{H}$, y tomemos $A_0, A_1 \in \mathcal{H}$. Una función $\sigma\colon [0, 1] \to \mathcal{H}$ se llama *segmento en $\mathcal{H}$ con respecto a w de A_0 a A_1* si σ tiene las siguientes propiedades:

1) σ es continua;

2) $\sigma(0) = A_0$ y $\sigma(1) = A_1$;

3) $w(\sigma(t)) = (1 - t)w(\sigma(0)) + tw(\sigma(1))$ para cada $t \in [0, 1]$;

4) $\sigma(t_1) \subset \sigma(t_2)$ si $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$.

El siguiente teorema nos muestra que las nociones de arco de orden y segmento son equivalentes (ver [24, Teorema 1.25]).

Teorema 1.68. *Sea X un continuo y sean $A_0, A_1 \in 2^X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) existe un segmento en 2^X (con respecto a cualquier función de Whitney) de A_0 a A_1;

2) $A_0 \subset A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0.

Además, si $A_0 \neq A_1$ entonces 1) y 2) son equivalentes a la afirmación:

3) existe un arco de orden en 2^X de A_0 a A_1.

Para una consulta más detallada acerca de hiperespacios, ver [16] y [24].

Capítulo 2

Continuos G-contraíbles

Una propiedad topológica muy estudiada en topología y, particularmente, en teoría de continuos es la contractibilidad. Como vimos en los Ejemplos 1.32 y 1.33 un arco, una n-celda o cualquier subconjunto compacto y convexo de un espacio normado son ejemplos de continuos contraíbles.

La g-contractibilidad es una generalización del concepto de contractibilidad; es decir, todo continuo contraíble es g-contraíble. Sin embargo, como veremos en el desarrollo de este capítulo, una curva cerrada simple es un ejemplo de un continuo g-contraíble que no es contraíble.

En este capítulo estudiaremos los continuos g-contraíbles. La definición de g-contractibilidad fue introducida por el profesor David Bellamy en [2] con el fin de estudiar los continuos que son imagen y preimagen continua de Cono($\mathcal{C}$). En este capítulo hacemos una recopilación de los resultados conocidos de los continuos g-contraíbles y presentamos nuevos resultados y ejemplos.

2.1. Definiciones y resultados

Introducimos a continuación la definición de g-contractibilidad de un espacio topológico dado.

Definición 2.1. Diremos que un espacio topológico X es *g-contraíble* si existe una función $f\colon X \to X$ continua y sobreyectiva homotópica a una función constante.

Observe que si en la definición anterior la función f es la identidad id_X entonces obtenemos la definición de espacio contraíble, esto es, todo espacio contraíble es g-contraíble.

La siguiente proposición da una condición necesaria para que un continuo sea g-contraíble.

Proposición 2.2. *Sea X un continuo. Si X es g-contraíble, entonces X es arcoconexo.*

Demostración. Como X es g-contraíble, existen una homotopía $H\colon X\times[0,1]\to X$, una función continua y sobreyectiva $f\colon X\to X$ y un punto $x_0\in X$ tales que $H(x,0)=f(x)$ y $H(x,1)=x_0$ para cada $x\in X$. Sean a y b en X y veamos que existe un arco $L\subset X$ que contiene a a y b. Por la sobreyectividad de f, existen u y v en X tales que $f(u)=a$ y $f(v)=b$. Definamos $h\colon[0,1]\to X$ por

$$h(t)=\begin{cases}H(u,2t), & \text{si } t\in[0,\frac{1}{2}];\\ H(v,2-2t), & \text{si } t\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$$

Note que h está bien definida y es continua, por [21, Teorema 18.3]. De lo anterior, el continuo $h([0,1])$ es un continuo arcoconexo, por la Proposición 1.18. Como $a,b\in h([0,1])$ se sigue que existe un arco L de a y b contenido en X. Esto prueba que X es arcoconexo. $\square$

La definición que se da a continuación fue introducida por los profesores Iwona Krzemińska y Janusz R. Prajs en [18, pág. 157].

Definición 2.3. Sean X y Y espacios topológicos. Diremos que X es *continuamente equivalente a* Y si existen funciones $f\colon X\to Y$ y $g\colon Y\to X$ continuas y sobreyectivas. Una propiedad (p) es un *invariante continuo generalizado* si cuando un espacio topológico X tiene la propiedad (p), cualquier espacio topológico continuamente equivalente a X tiene la propiedad (p)

La siguiente proposición muestra que la propiedad de ser g-contraíble es un invariante continuo generalizado.

Proposición 2.4. *Sean X y Y espacios topológicos tales que X es g-contraíble. Si X es continuamente equivalente a Y, entonces Y es g-contraíble.*

Demostración. Como X es g-contraíble, hay una función continua y sobreyectiva $h\colon X\to X$ homotópica a una constante. Así, existen una homotopía $H\colon X\times[0,1]\to X$ y un punto $x_0\in X$ tales que $H(x,0)=h(x)$ y $H(x,1)=x_0$ para cada $x\in X$. Sean $f\colon X\to Y$ y $g\colon Y\to X$ funciones continuas y sobreyectivas. Entonces $f\circ h\circ g\colon Y\to Y$ es una función continua y sobreyectiva que es homotópica a una constante, pues, la función $G\colon Y\times[0,1]\to Y$ definida por $G(y,t)=f(H(g(y),t))$ es una homotopía tal que $G(y,0)=(f\circ h\circ g)(y)$ y $G(y,1)=f(x_0)$ para cada $y\in Y$. Por lo tanto, Y es g-contraíble. $\square$

Como todo espacio contraíble es g-contraíble, se sigue de la Proposición 2.4 que cualquier continuo continuamente equivalente a un continuo contraíble es g-contraíble. Esto motiva la siguiente pregunta, propuesta en 1999 por los profesores I. Krzemińska y J. Prajs en [18].

Pregunta 2.5. ¿Dado un continuo g-contraíble X, existe un continuo contraíble Y continuamente equivalente a X?

Comentario 2.6. En el Teorema 2.15 damos una respuesta afirmativa a esta pregunta para el caso en el que el continuo es de la forma $X \times [0, 1]$.

Notemos que cualquier continuo localmente conexo X es continuamente equivalente a $[0, 1]$. En efecto como X es un espacio normal por el Teorema de extensión de Tietze [25, Teorema 5.38], existe una función continua y sobreyectiva de X en $[0, 1]$. De otra parte, por el Teorema 1.20, existe una función continua y sobreyectiva de $[0, 1]$ en X. Por lo que tenemos lo siguiente:

Comentario 2.7. Si X es un continuo localmente conexo entonces X es g-contraíble. En particular, una curva cerrada simple es un continuo g-contraíble que no es contraíble.

A continuación mostramos que la g-contractibilidad es una condición suficiente para que un continuo sea imagen continua de su propio cono.

Lema 2.8. *Sea X un continuo g-contraíble. Entonces existe una función continua y sobreyectiva de* $\mathrm{Cono}(X)$ *en X.*

Demostración. Sea $f \colon X \to X$ una función continua y sobreyectiva homotópica a una constante. Así, existe una homotopía $H \colon X \times [0, 1] \to X$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = x_0$ para cualquier $x \in X$ y para algún $x_0 \in X$. Entonces $G \colon \mathrm{Cono}(X) \to X$ definida por $G(x, t) = H(x, t)$, si $t \neq 1$ y $G(v_X) = x_0$ está bien definida, es sobreyectiva y continua por el Teorema 1.26. □

2.1.1. G-contractibilidad en productos

Dada una propiedad topológica es natural preguntarse si esta propiedad es hereditaria, productiva o es preservada por cocientes. Una propiedad es llamada *productiva* si dada una colección de espacios topológicos $\{X_j\}_{j\in J}$ el espacio producto $X = \prod_{j\in J} X_j$ también tiene dicha propiedad. En esta sección estudiamos la g-contractibilidad en productos; mostraremos que la g-contractibilidad es una propiedad productiva. Más aún, veremos a lo largo de este capítulo que la g-contractibilidad no es ni hereditaria, ni preservada por cocientes.

El siguiente teorema muestra que la g-contractibilidad es una propiedad productiva.

Teorema 2.9. *Sea $(X_i)_{i\in J}$ una colección de espacios topológicos tales que X_i es g-contraíble para cada $i \in J$. Entonces $X = \prod_{i\in J} X_i$ es g-contraíble.*

Demostración. Para cada $j \in J$, existen una homotopía $H_j \colon X_j \times [0, 1] \to X_j$, $x_0^j \in X_j$ y una función continua y sobreyectiva $f_j \colon X_j \to X_j$ tales que $H_j(x, 0) = f_j(x)$ y $H_j(x, 1) = x_0^j$ para todo $x \in X_j$. Sea $f \colon X \to X$ definida como $f((x_j)_{j\in J}) = (f_j(x_j))_{j\in J}$. Note que f es continua y sobreyectiva [11, Teorema 2.5, pág. 102]. Veamos que f es homotópica a una constante. Sea $H \colon X \times [0, 1] \to X$ definida por $H(x, t) = (H_j(x_j, t))_{j\in J}$, donde $x = (x_j)_{j\in J}$. Usando nuevamente [11, Teorema 2.5, pág. 102] tenemos que H es una homotopía. Además, para cada $x \in X$, $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = x_0$, donde $x_0 = (x_0^j)_{j\in J}$. Por lo tanto X es g-contraíble. □

Comentario 2.10. En el Teorema 2.37 mostraremos que existe un continuo que no es g-contraíble tal que $X \times [0,1]$ sí es g-contraíble. Esto prueba que el recíproco del teorema anterior no es cierto.

Note que X^n es g-contraíble para cualquier continuo g-contraíble X. Sin embargo, no sabemos si el recíproco de este resultado es cierto.

Pregunta 2.11. ¿Si X es un continuo tal que X^n es g-contraíble para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces X es g-contraíble?

Hemos probado en el Teorema 1.34 que para cualquier espacio métrico compacto X, $\text{Cono}(X)$ es contraíble . Para $\text{Sus}(X)$ tenemos un resultado similar.

Teorema 2.12. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces* $\text{Sus}(X)$ *es g-contraíble.*

Demostración. Sea $q\colon \text{Cono}(X) \to \text{Sus}(X)$ la función cociente. Entonces q es continua y sobreyectiva. De otra parte, por el Lema 1.35 existe una función continua y sobreyectiva $\Gamma\colon \text{Sus}(X) \to \text{Cono}(X)$. Esto prueba que $\text{Sus}(X)$ es continuamente equivalente a $\text{Cono}(X)$. Como $\text{Cono}(X)$ es contraíble, $\text{Sus}(X)$ es g-contraíble por la Proposición 2.4. $\square$

El resultado mostrado a continuación nos será de utilidad para la prueba de nuestro siguiente teorema.

Lema 2.13. *Si X es un espacio topológico, entonces existe una función continua y sobreyectiva de* $\text{Cono}(X) \times [0,1]$ *en* $\text{Cono}(X \times [0,1])$.

Demostración. Sea $f\colon (X\times[0,1])\times[0,1] \to \text{Cono}(X)\times[0,1]$ definida por $f((x,t),s) = (q_X(x,s),t)$ y probemos que f es una función cociente. Sea $h\colon (X\times[0,1])\times[0,1] \to (X\times[0,1])\times[0,1]$ definida como $h((x,t),s) = ((x,s),t)$. Claramente h es un homeomorfismo y por lo tanto h es una función cociente. Puesto que $[0,1]$ es un espacio localmente compacto de Hausdorff, la función $g\colon (X \times [0,1]) \times [0,1] \to \text{Cono}(X) \times [0,1]$ definida por $g((x,s),t) = (q_X(x,s),t)$ es una función cociente [11, Teorema 4.1, pág. 262]. Por lo tanto, $f = g \circ h$ es una función cociente. Veamos que para cada $((w,s),l) \in \text{Cono}(X) \times [0,1]$, la función $q_{X\times[0,1]}$ es constante sobre el conjunto $f^{-1}((w,s),l)$. Esto es evidente si $s \neq 1$. Si $s = 1$, $f^{-1}(v_X,l) = \{((x,l),1) \mid x \in X\}$ y así $q_{X\times[0,1]}(f^{-1}(v_X,l)) = \{v_{X\times[0,1]}\}$. De lo anterior se sigue que existe una función $\phi\colon \text{Cono}(X) \times [0,1] \to \text{Cono}(X \times [0,1])$ continua y sobreyectiva por el Teorema 1.26. $\square$

La siguiente prueba la tomamos de [3, Teorema 1].

Lema 2.14. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces existe una función de* $\text{Cono}(X)$ *en* $\text{Cono}(X) \times [0,1]$ *continua y sobreyectiva.*

Demostración. Por el Teorema 1.20 existe una función $\mu\colon [0,1] \to [0,1]\times[0,1]$ continua y sobreyectiva. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mu(1) = (1,1)$. Sea $f\colon X\times[0,1] \to (X\times[0,1])\times[0,1]$ definida por $f(x,t) = ((x,\mu_1(t)),\mu_2(t))$ en donde μ_1 y

μ_2 son funciones continuas definidas de $[0,1]$ en $[0,1]$ tales que $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t))$ para cada $t \in [0,1]$. Como μ es continua y sobreyectiva se sigue que f es continua y sobreyectiva. Sea $g\colon (X \times [0,1]) \times [0,1] \to \mathrm{Cono}(X) \times [0,1]$ definida por $g((x,t),s) = (q_X(x,t), s)$ donde $q_X\colon X \times [0,1] \to \mathrm{Cono}(X)$ es la función cociente; por [11, Teorema 2.5, pág. 102], la función g es continua y sobreyectiva. Probemos que para cada $(x,t) \in \mathrm{Cono}(X)$, la función $g \circ f$ es constante sobre el conjunto $q_X^{-1}(x,t)$. Si $t \neq 1$, el resultado es inmediato. Para $t = 1$ tenemos que $q_X^{-1}(x,t) = \{(y,1) \mid y \in X\}$. Sea $y \in X$. Entonces $(g \circ f)(y,1) = g((y, \mu_1(1)), \mu_2(1)) = g((y,1),1) = (v_X, 1)$. Esto prueba que $(g \circ f)(q_X^{-1}(v_X)) = \{(v_X, 1)\}$. Así, existe una función $\psi\colon \mathrm{Cono}(X) \to \mathrm{Cono}(X) \times [0,1]$ continua y sobreyectiva, por el Teorema 1.26. □

Con el siguiente teorema mostramos una respuesta afirmativa a la Pregunta 2.5 para el caso del producto $X \times [0,1]$, donde X es un continuo.

Teorema 2.15. *Sea X un continuo. Entonces $X \times [0,1]$ es g-contraíble si y sólo si $X \times [0,1]$ es continuamente equivalente a* $\mathrm{Cono}(X)$.

Demostración. Si $X \times [0,1]$ es continuamente equivalente a $\mathrm{Cono}(X)$, entonces $X \times [0,1]$ es g-contraíble, por la Proposición 2.4. Recíprocamente, supongamos que $X \times [0,1]$ es g-contraíble y probemos que existe una función continua y sobreyectiva de $\mathrm{Cono}(X)$ en $X \times [0,1]$. Como $X \times [0,1]$ es g-contraíble, por el Lema 2.8 existe una función $f\colon \mathrm{Cono}(X \times [0,1]) \to X \times [0,1]$ continua y sobreyectiva. Por el Lema 2.13 y el Lema 2.14, existe una función $\psi\colon \mathrm{Cono}(X) \to \mathrm{Cono}(X \times [0,1])$ continua y sobreyectiva. Por lo tanto, la función $f \circ \psi\colon \mathrm{Cono}(X) \to X \times [0,1]$ es continua y sobreyectiva. Ahora bien, es claro que existe una función continua y sobreyectiva de $X \times [0,1]$ en $\mathrm{Cono}(X)$. Esto prueba que $X \times [0,1]$ es continuamente equivalente a $\mathrm{Cono}(X)$. □

El siguiente teorema caracteriza a los continuos que son imagen continua de su propio cono.

Teorema 2.16. *Sea X un continuo. Entonces $X \times [0,1]$ es g-contraíble si y sólo si existe una función de* $\mathrm{Cono}(X)$ *en X continua y sobreyectiva.*

Demostración. Supongamos que $X \times [0,1]$ es g-contraíble, entonces por el Teorema 2.15, existe una función $f\colon \mathrm{Cono}(X) \to X \times [0,1]$ continua y sobreyectiva. Si $\pi_X\colon X \times [0,1] \to X$ es la proyección sobre la primera coordenada, $g = \pi_X \circ f\colon \mathrm{Cono}(X) \to X$ es una función continua y sobreyectiva. Recíprocamente, supongamos que existe una función $h\colon \mathrm{Cono}(X) \to X$ continua y sobreyectiva, entonces la función $h \times 1\colon \mathrm{Cono}(X) \times [0,1] \to X \times [0,1]$ definida por $(h \times 1)((x,s),t) = (h(x,s),t)$ es continua y sobreyectiva [11, Teorema 2.5, pág. 102]. De lo anterior y por el Lema 2.14 se sigue que existe una función de $\mathrm{Cono}(X)$ en $X \times [0,1]$ continua y sobreyectiva. De otra parte, sabemos que existe una función continua y sobreyectiva de $X \times [0,1]$ en $\mathrm{Cono}(X)$. Luego $X \times [0,1]$ es continuamente equivalente a $\mathrm{Cono}(X)$ y por lo tanto $X \times [0,1]$ es g-contraíble, por la Proposición 2.4. □

Nuestro siguiente resultado muestra la posibilidad de construir continuos g-contraíbles.

Proposición 2.17. *Sea X un espacio topológico tal que $X \times [0,1]$ es g-contraíble. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $X^n \times [0,1]$ es g-contraíble.*

Demostración. Puesto que $X \times [0,1]$ es g-contraíble, $(X \times [0,1])^n$ es g-contraíble para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 2.9. Claramente $(X \times [0,1])^n$ es homeomorfo a $X^n \times [0,1]^n$ y por lo tanto $X^n \times [0,1]^n$ es g-contraíble. Por el Teorema 1.20 y [25, Teorema 5.38], $[0,1]^n$ es continuamente equivalente a $[0,1]$ y por lo tanto $X^n \times [0,1]^n$ es continuamente equivalente a $X^n \times [0,1]$. Así, $X^n \times [0,1]$ es g-contraíble por la Proposición 2.4. □

2.2. Imágenes y preimágenes del cono sobre el conjunto de Cantor

En *"The cone over the Cantor set- continuous maps from both directions"* [2], el profesor Bellamy estudió condiciones para que un continuo sea imagen y preimagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor, Cono$(\mathcal{C})$. En dicho artículo, Bellamy prueba una caracterización de los continuos que son preimagen continua de Cono$(\mathcal{C})$. En este mismo artículo, el profesor Bellamy da la definición de g-contractibilidad de un espacio topológico y muestra que cualquier continuo con dicha propiedad debe ser imagen continua de Cono$(\mathcal{C})$. En esta sección hacemos una recopilación de los resultados de dicho artículo con sus respectivas pruebas.

Proposición 2.18. *[2, Proposición I] Sea X un espacio topológico. Si $f\colon X \to \mathrm{Cono}(\mathcal{C})$ es una función continua sobreyectiva, entonces X contiene un abierto O con una cantidad no numerable de componentes.*

Demostración. Como $\mathrm{Cono}(\mathcal{C}) \setminus \{v_{\mathcal{C}}\}$ es un abierto de $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$ y f es continua, el conjunto $O = f^{-1}(\mathrm{Cono}(\mathcal{C})) \setminus \{v_{\mathcal{C}}\})$ es un abierto de X. Puesto que $\mathrm{Cono}(\mathcal{C}) \setminus \{v_{\mathcal{C}}\}$ tiene una cantidad no numerable de componentes se sigue que O tiene una cantidad no numerable de componentes. □

Proposición 2.19. *[2, Proposición II] Si X es un continuo y $f\colon \mathrm{Cono}(\overline{S}_\Omega) \to X$ es continua y sobreyectiva, entonces X es unión numerable de continuos localmente conexos.*

Demostración. Sea $q_{\overline{S}_\Omega} : \overline{S}_\Omega \times [0,1] \to \mathrm{Cono}(\overline{S}_\Omega)$, la función identificación, y para cada $t \in [0,1]$ definamos

$$\begin{array}{rccl} f_t\colon & \overline{S}_\Omega & \to & X \\ & \alpha & \longmapsto & f_t(\alpha) = f(q_{\overline{S}_\Omega}(\alpha,t)). \end{array}$$

Claramente, f_t es continua para cada $t \in [0,1]$, y si $t = 1$ la función f_t es constante. En adelante vamos a suponer que $t \in [0,1)$. Por el Teorema 1.37 tenemos que para cada $t \in [0,1)$, existe $\alpha_t < \Omega$ tal que si $\alpha_t < \beta < \Omega$, tenemos $f_t(\beta) = f_t(\alpha_t)$.

Puesto que $\mathbb{Q}$ es numerable, por [11, Teorema 9.1, p.54], existe un ordinal $\alpha_0 \in S_\Omega$ numerable tal que $\alpha_0 > \alpha_t$ para cualquier $t \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$. Luego $f_t(\beta) = f_t(\alpha_0)$ para cada

$t \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ y para todo $\alpha_0 < \beta$, i.e. $f(q_{\overline{S}_\Omega}(\beta, t)) = f(q_{\overline{S}_\Omega}(\alpha_0, t))$ para todo $\alpha_0 < \beta$. Como $[0,1) \cap \mathbb{Q}$ es denso en $[0,1]$ y f es continua tenemos que $f(q_{\overline{S}_\Omega}(\beta, t)) = f(q_{\overline{S}_\Omega}(\alpha_0, t))$ para cada $t \in [0,1]$ y para todo $\alpha_0 < \beta$. Esto prueba que $f|_{\mathrm{Cono}([0,\alpha_0])} \colon \mathrm{Cono}([0,\alpha_0]) \to X$ es sobreyectiva. Por otra parte, el espacio $\mathrm{Cono}([0,\alpha_0])$ es una unión numerable de arcos, por lo que X es unión numerable de continuos de localmente conexos, por el Teorema 1.20. $\square$

Proposición 2.20. *El cono sobre el conjunto de Cantor* $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$ *no es unión numerable de continuos localmente conexos.*

Demostración. Sea $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una colección de subcontinuos de $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$, tales que su unión es $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$. Entonces existe W_j con un número no contable de elementos de $\mathcal{C}$. Por lo tanto, $W_j \setminus \{v_{\mathcal{C}}\}$ es un abierto de W_j con un número no numerable de componentes y esto implica que W_j no es un continuo localmente conexo. $\square$

A continuación mostramos un espacio topológico que aunque tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes, no es preimagen continua de $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$. Este ejemplo es tomado de [2, Ejemplo I].

Ejemplo 2.21. El espacio $\mathrm{Cono}(\overline{S}_\Omega)$ no es preimagen continua de $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$. En efecto, si existe una función continua y sobreyectiva de $\mathrm{Cono}(\overline{S}_\Omega)$ en $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$ entonces $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$ es unión numerable de continuos localmente conexos por la Proposición 2.19 pero esto contradice la Proposición 2.20. Sin embargo, el conjunto $\mathrm{Cono}(\overline{S}_\Omega) \setminus \left\{v_{\overline{S}_\Omega}\right\}$ es un abierto de $\mathrm{Cono}(\overline{S}_\Omega)$ que tiene una cantidad no numerable de componentes. Por lo tanto el recíproco de la Proposición 2.18 no es cierto.

El siguiente teorema da una caracterización de los espacios que son preimagen continua de $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$.

Teorema 2.22. *[2, Teorema I] Si X es un continuo de Hausdorff, entonces existe una función continua sobreyectiva $f\colon X \to \mathrm{Cono}(\mathcal{C})$ si y sólo si X contiene un abierto O y un conjunto perfecto no vacío A, $A \subset O$, tal que distintos puntos de A se encuentran en distintas componentes de O.*

Demostración. Sea $\beta(\mathcal{C}) = \{(x,0) \mid x \in \mathcal{C}\} \subset \mathrm{Cono}(\mathcal{C})$; claramente $\beta(\mathcal{C})$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$. Así, en adelante cuando escribamos $\mathcal{C} \subset \mathrm{Cono}(\mathcal{C})$ se debe entender como $\beta(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Cono}(\mathcal{C})$.

Supongamos que existe una función continua y sobreyectiva $f\colon X \to \mathrm{Cono}(\mathcal{C})$. Definamos

$$\mathcal{M} = \{B \subset X \mid B \text{ es cerrado y } f(B) = \mathcal{C}\}.$$

Observe que $\mathcal{M} \neq \emptyset$ pues $f^{-1}(\mathcal{C}) \in \mathcal{M}$. Ordenemos a $\mathcal{M}$ por inclusión y veamos que toda cadena en $\mathcal{M}$ tiene una cota inferior en $\mathcal{M}$. Sea $\mathcal{L}$ una cadena en $\mathcal{M}$, entonces $\bigcap \mathcal{L}$ es un cerrado de X y por la compacidad de X, $\bigcap \mathcal{L}$ es compacto. Sea $f(\mathcal{L}) = \{f(L) \mid L \in \mathcal{L}\}$

entonces por [11, Problema 8, pág. 252] tenemos que $f(\bigcap \mathcal{L}) = \bigcap f(\mathcal{L}) = \mathcal{C}$. Por lo tanto $\bigcap \mathcal{L}$ es una cota inferior para $\mathcal{L}$ en $\mathcal{M}$. Por el Lema de Zorn, existe un elemento minimal A_0 en $\mathcal{M}$. Para cada $x \in \mathcal{C}$ tomemos un único punto de $f^{-1}(x) \cap A_0$, para cada $x \in \mathcal{C}$ y sea A el conjunto formado por estos puntos. Por construcción $A \neq \emptyset$, $f(A) = \mathcal{C}$ y es claro que $A \subset A_0$. Definamos $O = f^{-1}(\text{Cono}(\mathcal{C}) \setminus \{v_{\mathcal{C}}\})$. Entonces O es un abierto de X con un número no numerable de componentes y observe que $A \subset O$. Probemos que A no tiene puntos aislados. Supongamos que existe $a \in A$ tal que a es un punto aislado, entonces existe un abierto U de $\text{Cono}(\mathcal{C})$ tal que $U \cap A = \{a\}$. Como el conjunto $A_0 \setminus U$ es compacto, se sigue que $f(A_0 \setminus U)$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{C}$. Note que $f(A_0 \setminus U)$ contiene todos los puntos de $\mathcal{C}$ salvo, posiblemente, $f(a)$. Como $\mathcal{C}$ es perfecto, se sigue que $f(a) \in f(A_0 \setminus U)$, lo cual implica que $f(A_0 \setminus U) = \mathcal{C}$ pero esto es imposible pues A_0 es el elemento minimal de $\mathcal{M}$. Hemos probado que A no tiene puntos aislados. Por definición del conjunto A se tiene que cada punto de A tiene una imagen distinta en $\mathcal{C}$, así distintos puntos de A se encuentran en distintas componentes de O.

Recíprocamente, sean O un subconjunto abierto de X y A un conjunto perfecto no vacío de O tal que distintos puntos de A se encuentran en distintas componentes de O. Sin pérdida de generalidad supongamos que $Cl_X(A) \subset O$. Si no, sea $a \in A$ y U_a un abierto de X tal que $a \in U_a \subset Cl_X(U_a) \subset O$. Es fácil ver que el conjunto $A \cap U_a$ es perfecto. Por lo tanto podemos reemplazar A por $A \cap U_a$ si es necesario.

Ahora, note que podemos también suponer que distintos puntos de A se encuentran en distintas componentes de $Cl_X(O)$. En efecto, como X es un espacio compacto de Hausdorff tenemos que X es normal [21, Teorema 32.3], luego existe V abierto de X tal que $Cl_X(A) \subset V \subset Cl_X(V) \subset O$. Como distintos puntos de A se encuentran en distintas componentes de O, se sigue que distintos puntos de A se encuentran en distintas componentes de $Cl_X(V)$. Esto implica que podemos reemplazar a O por V si es necesario.

Veamos que existe una función continua $g\colon Cl_X(O) \to \mathcal{C}$ tal que $g(Cl_X(A)) = \mathcal{C}$.

Definamos $Cl_X(O) = R_{0,1}$. Puesto que A es un conjunto perfecto, A tiene al menos dos puntos y estos se encuentran en distintas componentes de $R_{0,1}$. Ningún subconjunto conexo de $R_{0,1}$ puede intersectar a estas componentes. Por el Teorema 1.58, existen subconjuntos compactos disyuntos $R_{1,1}$ y $R_{1,2}$ de $R_{0,1}$ tales que $R_{1,1} \cup R_{1,2} = R_{0,1}$ con $R_{1,j} \cap A \neq \emptyset$ para $j = 1, 2$. Procediendo inductivamente, supongamos que hemos definido $R_{i,k}$ para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ y $k \in \left\{1, \ldots, 2^i\right\}$ con la condición que para cada i con $2 \leq i \leq n$, $R_{i,2k}$ y $R_{i,2k-1}$ es una separación de $R_{i-1,k}$ y además $R_{i,k} \cap A \neq \emptyset$ para cualesquiera i, k. Note que para cada $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $R_{n,k} \cap A$ es un abierto no vacío de A y como A es un conjunto perfecto, $R_{n,k}$ contiene al menos dos puntos de A. Por lo tanto, distintos puntos de $R_{n,k} \cap A$ se encuentran en distintas componentes de $R_{n,k}$ para cada $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$. De nuevo, por el Teorema 1.58 existen subconjuntos compactos disjuntos $R_{n+1,2k-1}$ y $R_{n+1,2k}$ para cada $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tales que $R_{n,k} = R_{n+1,2k} \cup R_{n+1,2k-1}$ y $R_{n+1,j} \cap A \neq \emptyset$ para cada $j \in \left\{1, \ldots, 2^{n+1}\right\}$. Así definimos $R_{i,k}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y $k \in \left\{1, \ldots, 2^i\right\}$. Por definición de los conjuntos $R_{i,k}$ tenemos

$R_{i,k} \supset R_{i+1,k}$ donde $k \in \{2k_i, 2k_i - 1\}$, para todo i. Se sigue que $\bigcap_{i=0}^{\infty} R_{i,k_i} \neq \emptyset$. Como $R_{i,j}$ es compacto para todo i y $R_{i,j} \cap A \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, \ldots, 2^i\}$, tenemos $(\bigcap_{i=0}^{\infty} R_{i,k_i}) \cap Cl_X(A) \neq \emptyset$. Ahora, como los conjuntos $R_{i,j}$ son disyuntos dos a dos, su unión es todo $R_{0,1}$ y para cada n, $R_{n,2k}$ y $R_{n,2k-1}$ son una separación de $R_{n-1,k}$ para cada $x \in Cl_X(O)$, tenemos que existe una única sucesión $\{k_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ con la propiedad que $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} R_{i,k_i(x)}$. Definamos $g\colon Cl_X(O) \to \mathcal{C}$ por

$$g(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_p(x)}{3^p}, \quad \text{donde} \quad a_p(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } k_p(x) \text{ es impar;} \\ 2, & \text{si } k_p(x) \text{ es par.} \end{cases}$$

Veamos que g es sobreyectiva. Sea $z \in \mathcal{C}$ entonces $z = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$ donde $b_i \in \{0, 2\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Definimos inductivamente una sucesión $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ como sigue: $k_1 = 1$, si $b_1 = 0$ y $k_1 = 2$, si $b_1 = 2$. Si k_i está definido, entonces

$$k_{i+1} = \begin{cases} 2k_i - 1, & \text{si } b_{i+1} = 0; \\ 2k_i, & \text{si } b_{i+1} = 2. \end{cases}$$

Sean $y \in (\bigcap_{i=0}^{\infty} R_{i,k_i}) \cap Cl_X(A)$ y $(k_i(y))_{i \in \mathbb{N}}$, la única sucesión que satisface $y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} R_{i,k_i(y)}$; entonces $k_i(y) = k_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. De la definición de la sucesión $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tenemos

$$b_i = \begin{cases} 0, & \text{si } k_i \text{ es impar;} \\ 2, & \text{si } k_i \text{ es par.} \end{cases}$$

Por lo tanto $a_i(y) = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$; se sigue que $g(y) = z$ y así $g(Cl_X(A)) = \mathcal{C}$.

Probemos que g es continua. Sean $x \in Cl_X(O)$ y $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $Cl_X(O)$ tal que $\lim_{j \to \infty} x_j = x$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} < \varepsilon$. Sea $(k_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ la única sucesión en $\mathbb{N}$ tal que $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} R_{i,k_i(x)}$. Como $R_{N,k_N(x)}$ es abierto en $Cl_X(O)$ y $\lim_{j \to \infty} x_j = x$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq N_0$ tenemos $x_j \in R_{N,k_N(x)}$. Para todo $i \leq N$ se tiene que $R_{N,k_N(x)} \subset R_{i,k_i(x)}$; por lo tanto $x_j \in R_{i,k_i(x)}$ si $i \leq N$ y $j \geq N_0$. Por definición y unicidad de la sucesión $(k_i(x_j))_{i \in \mathbb{N}}$ concluimos que $k_i(x_j) = k_i(x)$ para cualquier $j \geq N_0$ e $i \leq N$. Luego $a_i(x_j) = a_i(x)$ para todo $i \leq N$ y $j \geq N_0$. Esto último implica que

$$|g(x_j) - g(x)| \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|a_i(x_j) - a_i(x)|}{3^i}, \quad \text{si } j \geq N_0.$$

Puesto que $a_p(x) \in \{0, 2\}$ para todo $x \in Cl_X(O)$ y para cada $p \in \mathbb{N}$, se sigue que $|a_i(x_j) - a_i(x)| \leq 2$ para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$. De esto se sigue que $|g(x_j) - g(x)| < \varepsilon$ si $j \geq N_0$ y por lo tanto g es continua.

Continuando con la prueba del teorema, como X es normal y $Cl_X(A)$, $X \setminus O$ son cerrados disyuntos en X, existe una función $h\colon X \to [0, 1]$ continua tal que $h(Cl_X(A)) =$

$\{0\}$ y $h(X \setminus O) = \{1\}$ [25, Teorema 5.36]. Definamos $f\colon X \to \text{Cono}(\mathcal{C})$ por

$$f(x) = \begin{cases} q_{\mathcal{C}}(g(x), h(x)), & \text{si } x \in Cl_X(O); \\ v_{\mathcal{C}}, & \text{si } x \notin O. \end{cases}$$

Puesto que f es continua en cada uno de los cerrados $Cl_X(O)$ y $X \setminus O$ y para cada $x \in Cl_X(O) \cap (X \setminus O)$ tenemos $q_{\mathcal{C}}(g(x), h(x)) = v_{\mathcal{C}}$, se sigue que f es continua en X [21, Teorema 18.3]. Veamos que f es sobreyectiva. Sea $u \in \text{Cono}(\mathcal{C})$ entonces existe $(x,t) \in \mathcal{C} \times [0,1]$ tal que $q_{\mathcal{C}}(x,t) = u$. Como $g(Cl_X(A)) = \mathcal{C}$, existe $y \in Cl_X(A) \subset O$ tal que $g(y) = x$. Sea L la componente de $Cl_X(O)$ tal que $y \in L$. Por el Teorema 1.59, existe $y_0 \in L \cap (X \setminus O)$. Como $y \in O$, $f(y) = q_{\mathcal{C}}(g(y), h(y))$ y $h(y) = 0$ pues $y \in Cl_X(A)$, tenemos $f(y) = q_{\mathcal{C}}(x, 0)$. Por otra parte como $y_0 \in X \setminus O$ se sigue que $f(y_0) = v_{\mathcal{C}}$. Note que L es un subcontinuo de X tal que $y, y_0 \in L$. Por la continuidad de f, $f(L)$ es un subcontinuo de $\text{Cono}(\mathcal{C})$ tal que $q_{\mathcal{C}}(x,0), v_{\mathcal{C}} \in f(L)$. Por lo tanto $u \in f(L)$. Esto completa la prueba del teorema. □

Note que el espacio $\text{Cono}(\overline{S}_{\Omega})$ no es metrizable. Para los espacios métricos tenemos la siguiente caracterización.

Teorema 2.23. *[2, Teorema II] Un continuo X es preimagen continua de* $\text{Cono}(\mathcal{C})$ *si y sólo si X tiene un abierto O con una cantidad no numerable de componentes.*

Demostración. Si X es preimagen continua de $\text{Cono}(\mathcal{C})$, entonces X tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes por la Proposición 2.18. Recíprocamente, supongamos que existe tal conjunto abierto O con una cantidad no numerable de componentes. Aplicando el axioma de elección, elegimos un punto de cada componente de O y definimos el conjunto A_0 como el conjunto de estos puntos. Sea

$$L = \{x \in A_0 \,|\, \text{existe un abierto } U \text{ de } A_0 \text{ tal que } x \in U \text{ y } U \text{ es numerable}\}.$$

Supongamos primero que $L \neq \emptyset$. Note que $L = \bigcup_{x \in L} U_x$, donde U_x es abierto numerable de A_0 para cada $x \in L$. Puesto que X es segundo contable [25, Teorema 1.31], cualquier subespacio de X es Lindelöf [25, Ejercicio 5, p.185]. Así existe un subcubrimiento numerable $\{U_{x_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ de L; por lo tanto L es numerable. Probemos que $A = A_0 \setminus L$ es un conjunto perfecto. Sea $x \in A$ y U un abierto en A_0 tal que $x \in U$, entonces U no es numerable. Se sigue que $U \setminus \{x\} \not\subset L$, pues L es numerable. Luego $U \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$ y concluimos que A es perfecto. Si $L = \emptyset$, entonces no es difícil ver que el conjunto $A = A_0$ es perfecto. Esto prueba que O contiene un conjunto perfecto A el cual satisface las condiciones del Teorema 2.22. Por lo tanto, existe una función $f\colon X \to \text{Cono}(\mathcal{C})$ continua y sobreyectiva. □

Ahora veamos cuándo un continuo es imagen continua de $\text{Cono}(\mathcal{C})$. El siguiente lema da una condición suficiente para que un continuo sea imagen continua de $\text{Cono}(\mathcal{C})$.

Lema 2.24. *[2, Lema II] Sea X un continuo g-contraíble. Entonces X es imagen continua de* $\text{Cono}(\mathcal{C})$.

Demostración. Por el Lema 2.8, existe una función $G\colon \operatorname{Cono}(X) \to X$ continua y sobreyectiva. Como todo espacio métrico compacto es imagen continua de $\mathcal{C}$ [23, Teorema 7.7], existe una función $g\colon \mathcal{C} \to X$ continua y sobreyectiva. Sea $\operatorname{Cono}(g)\colon \operatorname{Cono}(\mathcal{C}) \to \operatorname{Cono}(X)$ definida por

$$\operatorname{Cono}(g)(x,t) = \begin{cases} q_X(g(x),t), & \text{si } t \neq 1; \\ v_X, & \text{si } (x,t) = v_{\mathcal{C}}, \end{cases}$$

donde $q_X\colon X \times [0,1] \to \operatorname{Cono}(X)$ es la función identificación. Probaremos que esta función es continua. Sea $g\times 1\colon \mathcal{C}\times[0,1] \to X\times[0,1]$ definida por $(g\times 1)(x,t) = (g(x),t)$. Por [11, Teorema 2.5, pág. 102], la función $g \times 1$ es continua y sobreyectiva. Claramente la función $q_X \circ (g \times 1)\colon \mathcal{C} \times [0,1] \to \operatorname{Cono}(X)$ es continua y sobreyectiva. No es difícil ver que la función $h = q_X \circ (g \times 1)$ es constante sobre el conjunto $q_{\mathcal{C}}^{-1}(x,t)$ para cada $(x,t) \in \operatorname{Cono}(\mathcal{C})$, donde $q_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \times [0,1] \to \operatorname{Cono}(\mathcal{C})$ es la función identificación. Note que $\operatorname{Cono}(g)(x,t) = h(q_{\mathcal{C}}^{-1}(x,t))$ y por el Teorema 1.26 se sigue que la función $\operatorname{Cono}(g)$ es continua. La sobreyectividad de $\operatorname{Cono}(g)$ es consecuencia de su definición. □

En el siguiente resultado caracterizamos los continuos que son imagen y preimagen del cono sobre el conjunto de Cantor.

Teorema 2.25. *[2, Teorema III] Un continuo X es imagen y preimagen continua de* $\operatorname{Cono}(\mathcal{C})$ *si y sólo si es g-contraíble y contiene un abierto O con una cantidad no numerable de componentes.*

Demostración. Como existe una función $f\colon X \to \operatorname{Cono}(\mathcal{C})$ continua y sobreyectiva, por la Proposición 2.18, X tiene un abierto O con una cantidad no numerable de componentes. Como $\operatorname{Cono}(\mathcal{C})$ es contraíble y X es continuamente equivalente a $\operatorname{Cono}(\mathcal{C})$ entonces X es g-contraíble por la Proposición 2.4.

Recíprocamente, si X es g-contraíble y contiene un abierto O con una cantidad no numerable de componentes, el Teorema 2.23 y el Lema 2.24 garantizan que X es imagen y preimagen continua de $\operatorname{Cono}(\mathcal{C})$. □

Observe que cualquier continuo que es imagen continua de $\operatorname{Cono}(\mathcal{C})$ es arcoconexo por la Proposición 1.18. Sin embargo el siguiente ejemplo, tomado de [2, Ejemplo II], muestra que el recíproco de esta afirmación no es cierto.

Ejemplo 2.26. Sean

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x \leq \frac{1}{\pi},\ y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right\}, \\ B &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = \frac{1}{\pi},\ -2 \leq y \leq 0\right\}, \\ C &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq \frac{1}{\pi},\ y = -2\right\}, \\ D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0,\ -2 \leq y \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

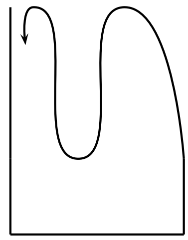

Figura 2.1: Círculo de Varsovia

Definamos $W = A \cup B \cup C \cup D$. El continuo W es conocido como el *Círculo de Varsovia*. Note que

$$W \text{ no es unión de dos subcontinuos propios arcoconexos.} \tag{2.1}$$

Veamos que W no es imagen continua de $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$. Supongamos que existe una función continua y sobreyectiva $f\colon \mathrm{Cono}(\mathcal{C}) \to W$ y sea

$$\mathcal{F} = \{M \subset \mathrm{Cono}(\mathcal{C}) \mid M \text{ es un continuo y } f(M) = W\}.$$

Como $\mathrm{Cono}(\mathcal{C}) \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Ordenemos a $\mathcal{F}$ por inclusión y veamos que toda cadena en $\mathcal{F}$ tiene una cota inferior en $\mathcal{F}$. Sea $\mathcal{E}$ una cadena en $\mathcal{F}$ entonces por [21, Ejercicio 11, pág. 171], $\bigcap \mathcal{E}$ es un subcontinuo de X. Sea $f(\mathcal{E}) = \{f(E) \mid E \in \mathcal{E}\}$ entonces por [11, Problema 8, pág. 252] tenemos que $f(\bigcap \mathcal{E}) = \bigcap f(\mathcal{E}) = W$. Esto prueba que $\bigcap \mathcal{E}$ es una cota inferior para la cadena $\mathcal{E}$ en $\mathcal{F}$. Por el Lema de Zorn, existe un elemento minimal W_0 de $\mathcal{F}$. Supongamos que $v_{\mathcal{C}}$ es un punto de no corte de W_0 entonces $W_0 \setminus \{v_{\mathcal{C}}\}$ es conexo y como W_0 es un subcontinuo de $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$, W_0 es un arco y como $f(W_0) = W$, W es localmente conexo por [23, Teorema 8.17], pero claramente W no es localmente conexo. Por lo tanto $v_{\mathcal{C}}$ es un punto de corte de W_0. Sean A y B abiertos de W_0 tales que $W_0 \setminus \{v_{\mathcal{C}}\} = A \cup B$ y $Cl_{W_0}(A) \cap B = Cl_{W_0}(B) \cap A = \emptyset$. Sean $W_1 = A \cup \{v_{\mathcal{C}}\}$ y $W_2 = B \cup \{v_{\mathcal{C}}\}$ entonces W_1 y W_2 son subcontinuos de W_0 [23, Proposición 6.3]. Como W_0 es un subcontinuo de $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$ y todo subcontinuo de un dendroide es un dendroide (Comentario 1.22) se sigue que W_1 y W_2 son subcontinuos propios arcoconexos tales que $W_0 = W_1 \cup W_2$. Por la minimalidad de W_0, $f(W_1)$ y $f(W_2)$ son subcontinuos arcoconexos propios de W tales que $W = f(W_1) \cup f(W_2)$. Esto contradice (2.1) y por lo tanto W no es imagen continua de $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$.

2.3. Un continuo uniformemente conexo por caminos que no es g-contraíble

En *"Uniformly pathwise connected continua"* [17], W. Kuperberg definió los continuos uniformemente conexos por caminos y probó que un continuo tiene dicha propiedad si y sólo si es imagen continua de $\mathrm{Cono}(\mathcal{C})$. El profesor Bellamy preguntó si cualquier continuo uniformemente conexo por caminos es g-contraíble. En 1999, los profesores I. Krezemińska y J. Prajs en *"A non-g-contractible uniformly path connected continua"* [18] dan una respuesta negativa a esta pregunta. Sin embargo, el continuo presentado en este artículo no es hereditariamente unicoherente. En esta sección mostramos que dado un subcontinuo L del plano, uniformemente conexo por caminos tal que $N(L) \neq \emptyset$ y $Cl_{\mathbb{R}^2}(N(L))$ sea localmente conexo, es posible construir un continuo X_L uniformemente conexo por caminos que no es g-contraíble. Como caso particular de esta construcción mostramos un dendroide uniformemente conexo por caminos que no es g-contraíble.

A continuación, introducimos la definición de continuo uniformemente conexo por caminos.

Definición 2.27. Diremos que un continuo X es *uniformemente conexo por caminos* si existe una familia de caminos $\mathcal{F}$ (i.e. funciones continuas de $[0,1]$ a X) tales que:

1) para cualesquiera $x, y \in X$, existe $\alpha \in \mathcal{F}$ tal que $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$;

2) dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ con la siguiente propiedad: para cualquier $\alpha \in \mathcal{F}$ podemos encontrar una partición $\mathcal{P} = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}, t_N = 1\}$ de $[0,1]$ tal que $\operatorname{diám} \alpha([t_{i-1}, t_i]) < \varepsilon$ para todo $i = 1, \ldots, N$.

El siguiente teorema caracteriza los continuos que son imagen continua de $\operatorname{Cono}(\mathcal{C})$.

Teorema 2.28. *[17, Teorema 3.5, p.322] Un continuo X es uniformemente conexo por caminos si y sólo si es imagen continua de* $\operatorname{Cono}(\mathcal{C})$.

Como una consecuencia inmediata del Teorema 2.28 y el Lema 2.24 se sigue el siguiente resultado:

Corolario 2.29. *Todo continuo g-contraíble es uniformemente conexo por caminos.*

El recíproco del corolario anterior no es cierto como lo probaremos en el Teorema 2.35.

2.3.1. La construcción del continuo X_L

El principal resultado de esta sección es mostrar una familia de continuos cada uno de ellos uniformemente conexo por caminos y ninguno de ellos g-contraíble. como una caso particular mostramos un dendroide de esta familia, uniformemente conexo por caminos que no es g-contraíble y tal que $X^n \times [0,1]$ es g-contraíble para cada $n \in \mathbb{N}$. Con esto mostramos que el recíproco del Teorema 2.9 no es cierto.

Definición 2.30. Dados $x, y \in \mathbb{R}^2$, sea $\overline{xy} = \{tx + (1-t)y \,|\, 0 \leq t \leq 1\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$, $d_n = (0, \frac{1}{n})$, $e_n = (0, -\frac{1}{n})$, y definamos

$$Z = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{ad_n} \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{be_n} \right) \cup \overline{ab}.$$

Recordemos que dado un continuo X, $N(X)$ denota el conjunto de puntos de no conexidad local de X (ver Definición 1.6). Sea L un subcontinuo del plano tal que $N(L) \neq \emptyset$, $Cl_{\mathbb{R}^2}(N(L))$ es localmente conexo y supongamos que L es uniformemente conexo por caminos. Sean $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de continuos disyuntos dos a dos, cada uno de ellos homeomorfo a L y tales que $\lim_{n\to\infty}$ diám $D_n = \lim_{n\to\infty}$ diám $E_n = 0$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $D_n, E_n \subset \mathbb{R}^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean $K_n = Cl_{\mathbb{R}^2}(N(D_n))$ y $v_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, identificamos el punto v_n de K_n con d_n. De igual forma, sea $T_n = Cl_{\mathbb{R}^2}(N(E_n))$ y $u_n \in T_n$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, identificamos u_n con e_n. Sea

$$X_L = Z \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

Sea $p = (0,0)$ entonces $\lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} E_n = \{p\}$.

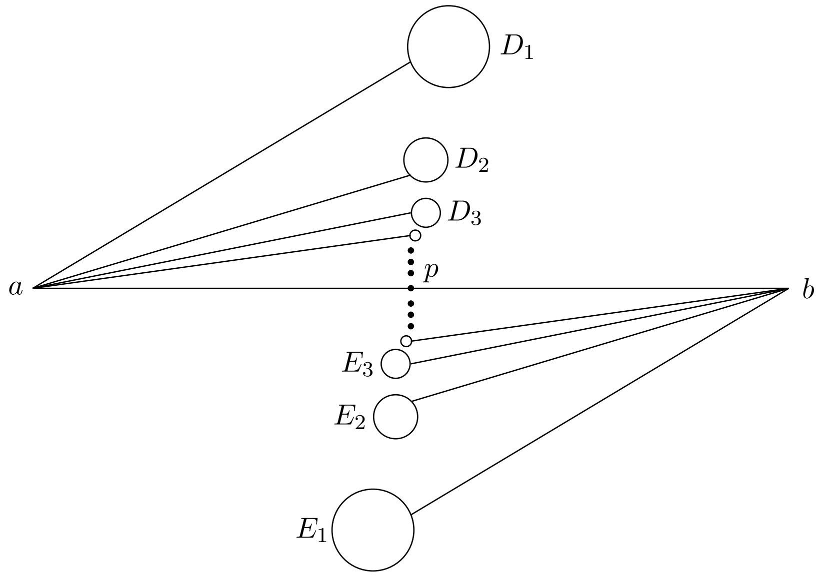

Figura 2.2: Un esbozo del continuo X_L

De la construcción de X_L es fácil ver el siguiente resultado.

Proposición 2.31. *El continuo X_L es uniformemente conexo por caminos.*

Los siguientes resultados nos permitirán probar que el continuo X_L no es g-contraíble.

Lema 2.32. *Sea $f\colon X_L \to X_L$ una función continua y sobreyectiva, y $Q = \overline{ab} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)$. Entonces*

1) $Q \subset f(Q)$;

2) para cada componente C de Q, $f(C)$ intersecta sólo un número finito de componentes de Q.

Demostración. Por el Corolario 1.14 tenemos que $Cl_{X_L}(N(X_L)) \subset f(Cl_{X_L}(N(X_L)))$. Claramente tenemos que $N(X_L) = (\overline{ab}) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} N(D_n)) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} N(E_n))$. También es claro que Q es un cerrado de X_L. Por [11, Problema 7, pág. 91] se sigue que $Cl_{X_L}(N(X_L)) = Q$. Como f es una función definida entre continuos, es claro que f es cerrada; esto implica que $f(Q)$ es un cerrado de X_L y por lo tanto $Q = Cl_{X_L}(N(X_L)) \subset Cl_{X_L}(f(Q)) = f(Q)$. De esta manera, concluimos la parte 1).

Puesto que cada C componente de Q es localmente conexa se sigue que $f(C)$ es localmente conexo [23, Proposición 8.16]. Ahora supongamos que existe una componente C_0 tal que $f(C_0)$ intersecta a un número infinito de componentes de Q. Entonces existe una sucesión en $f(C_0)$ que converge a p pero esto implica que $f(C_0)$ no es localmente conexo y esto es absurdo. Con lo que concluimos la segunda afirmación del Teorema. □

Lema 2.33. *Sea $f \colon X_L \to X_L$ una función continua y sobreyectiva, entonces $p \in \operatorname{lím\,sup} f^{-1}(d_n) \cap \operatorname{lím\,sup} f^{-1}(e_n)$.*

Demostración. Supongamos que $p \notin \operatorname{lím\,sup} f^{-1}(d_n)$, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $f^{-1}(d_n) \cap B(p, \varepsilon_0) = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\operatorname{lím}_{n\to\infty} D_n = \operatorname{lím}_{n\to\infty} E_n = \{p\}$ tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $D_n \cup E_n \subset B(p, \varepsilon_0)$. Sea $Q = \overline{ab} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)$; por la parte 1) del Lema 2.32, existe $z_n \in Q$ tal que $f(z_n) = d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $z_n \in f^{-1}(d_n)$ se sigue que $z_n \notin D_n \cup E_n$ para cada $n \geq N$. Por lo tanto $f^{-1}(d_n) \cap \left[\left(\bigcup_{j=1}^{N-1} K_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N-1} T_j\right)\right] \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ entonces como cada K_n es compacto y localmente conexo, tenemos que K_n tiene un número finito de componentes para cada $n \in \mathbb{N}$ [25, Teorema 4.32]; así, $\left[\left(\bigcup_{j=1}^{N-1} K_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N-1} T_j\right)\right]$ tiene un número finito de componentes. De esto último se sigue que existe una componente C de Q y una subsucesión $\{d_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $C \cap f^{-1}(d_{n_k}) \neq \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $f(C)$ intersecta a un número infinito de componentes de Q pero esto contradice el Lema 2.32. De esta manera concluimos que $p \in \operatorname{lím\,sup} f^{-1}(d_n)$ y similarmente se prueba que $p \in \operatorname{lím\,sup} f^{-1}(e_n)$. □

Lema 2.34. *Sea $f \colon X_L \to X_L$ una función continua y sobreyectiva. Si $H \colon X_L \times [0,1] \to X_L$ es una homotopía tal que $H(x,0) = f(x)$, para cada $x \in X_L$ y $H(p,1) = a$ (o $H(p,1) = b$) entonces existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $H(p,t_0) = b$ (o $H(p,t_0) = a$, respectivamente).*

Demostración. Supongamos que $H(p,1) = a$. Entonces $p \in \operatorname{lím\,sup} f^{-1}(e_n)$, por el Lema 2.33. Por lo tanto existe una sucesión $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ en X_L tal que $z_{n_k} \in f^{-1}(e_{n_k})$ y $\operatorname{lím}_{k\to\infty} z_{n_k} = p$. Luego $\operatorname{lím}_{k\to\infty} H(z_{n_k}, 1) = a$. Sea U un abierto de X_L tal que $a \in U$ y $U \subset X_L \setminus B_2$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(z_{n_k}, 1) \in U$, si $k \geq N$. Como $H(z_{n_k}, 0) = f(z_{n_k}) = e_{n_k}$, $e_{n_k} \in H(\{z_{n_k}\} \times [0,1])$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Note que si $k \geq N$, $H(\{z_{n_k}\} \times [0,1]) \cap U \neq \emptyset$. Puesto $H(\{z_{n_k}\} \times [0,1])$ es un continuo arcoconexo (ver Proposición 1.18) y Z es únicamente arcoconexo (Comentario 1.22), se sigue que $b \in H(\{z_{n_k}\} \times [0,1])$ para cualquier $k \geq N$. Sea $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,1]$ tal que $H(z_{n_k}, t_k) = b$ para todo $k \geq N$. Por la compacidad de $[0,1]$, podemos suponer que

$\lim_{k\to\infty} t_k = t_0 \in [0,1]$. La continuidad de H implica $H(p,t_0) = b$. Si $H(p,1) = b$, la prueba es similar. $\square$

Teorema 2.35. *El continuo X_L no es g-contraíble.*

Demostración. Supongamos que X_L es g-contraíble. Entonces existe una función f que es homotópica a una constante. Note que X_L es un continuo arcoconexo, por la Proposición 2.2. Así, podemos suponer que existe una homotopía $H\colon X_L \times [0,1] \to X_L$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = a$ para cada $x \in X_L$.

Ahora, por el Lema 2.34, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $H(p,t_0) = b$. Definamos $t_a = \min\{t \in [0,1] \mid H(p,t) = a\}$ y $t_b = \min\{t \in [0,1] \mid H(p,t) = b\}$. Claramente $t_a \neq t_b$. Supongamos que $t_a < t_b$. Note que $H|_{X_L\times[0,t_a]}$ es una homotopía tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(p,t_a) = a$ para todo $x \in X_L$. Usando nuevamente el Lema 2.34, existe $t_1 \in [0,t_a]$ tal que $H(p,t_1) = b$; esto contradice la minimalidad de t_b y $t_a < t_b$. Por lo tanto f no es homotópica a una constante. $\square$

Lema 2.36. *Sea X un continuo y sean $B_1, B_2 \in C(X)$ tales que $X = B_1 \cup B_2$ y fijemos $p \in B_1 \cap B_2$. Para cada $i \in \{1,2\}$, suponga que existe $f_i\colon X \to B_i$ y una homotopía sobreyectiva $H_i\colon X \times [0,1] \to B_i$ tal que $H_i(x,0) = f_i(x)$ y $H_i(x,1) = p$ para cada $x \in X$. Entonces:*

1) *existe una homotopía sobreyectiva $H\colon X \times [0,1] \to X$ tal que $H(x,0) = f_1(x)$ y $H(x,1) = p$ para cada $x \in X$;*

2) *si $H_i(p,t) = p$ para cualquier $t \in [0,1]$ e $i \in \{1,2\}$, tenemos $H(p,t) = p$ para cada $t \in [0,1]$.*

Demostración. Definamos

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x,3t) & \text{si } t \in [0,\frac{1}{3}];\\ H_2(x,2-3t) & \text{si } t \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3}];\\ H_2(x,3t-2) & \text{si } t \in [\frac{2}{3},1]. \end{cases}$$

No es difícil ver que H está bien definida. Puesto que H_i es una función continua y sobreyectiva para cada $i \in \{1,2\}$, se sigue que $H\colon X \times [0,1] \to X$ es una función continua y sobreyectiva [21, Teorema 18.3]. La parte 2) del lema es inmediata. $\square$

Nuestro siguiente resultado es un caso particular del Teorema 2.35 y es importante resaltar que como consecuencia, a diferencia de la contractibilidad, la g-contractibilidad no es preservada por retracciones. Este teorema también prueba que el recíproco del Teorema 2.9 no es cierto.

A continuación mostramos un ejemplo de la familia de continuos X_L de acuerdo con la Definición 2.30. Sea

$$Z = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{ad_n}\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{be_n}\right) \cup \overline{ab},$$

donde $a = (-1, 0)$, $b = (1, 0)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ $d_n = (0, \frac{1}{n})$, $e_n = (0, -\frac{1}{n})$. Sean $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de abanicos armónicos (ver Ejemplo 1.25) disyuntos dos a dos y tales que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diám} D_n = \lim_{n\to\infty} \operatorname{diám} E_n = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, identificamos el vértice v_n de D_n con d_n. De igual forma identificamos el vértice u_n de E_n con e_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$X = Z \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right).$$

Sea $p = (0, 0)$ entonces $\lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} E_n = \{p\}$. En la Figura 2.3 se muestra el continuo X.

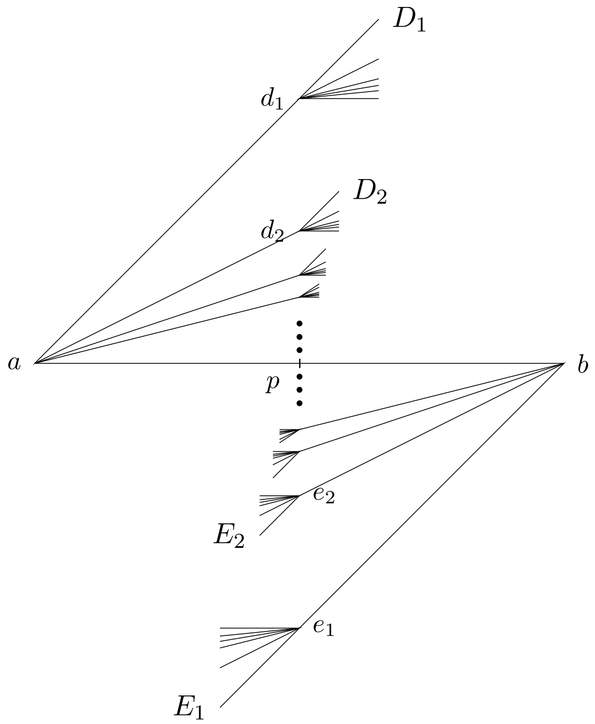

Figura 2.3: Un dendroide uniformemente conexo por caminos que no es g-contraíble

Teorema 2.37. *Si X es el dendroide mostrado en la Figura 2.3 entonces*

1) X no es g-contraíble;

2) $X \times [0, 1]$ es g-contraíble;

3) $X^n \times [0, 1]$ es g-contraíble para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. La parte 1) es una consecuencia inmediata de la definición de X y el Teorema 2.35. Para probar 2), sean L_a y L_b las componentes de $X \setminus \{p\}$ que contienen a a y b, respectivamente. Note que $B_1 = L_a \cup \{p\}$ y $B_2 = L_b \cup \{p\}$ son subcontinuos propios de X tales que $X = B_1 \cup B_2$ y $B_1 \cap B_2 = \{p\}$. No es difícil ver que existe un homeomorfismo $h\colon B_2 \to B_1$ tal que $h(p) = p$. Sea $f_1\colon X \to B_1$ definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in B_1; \\ h(x), & \text{si } x \in B_2. \end{cases}$$

Como $p = h(p)$, la función f_1 está bien definida y es continua por [21, Teorema 18.3]. Como $f_1|_{B_1}$ es la identidad, f_1 es sobreyectiva. De forma similar podemos definir una retracción $f_2\colon X \to B_2$. Observe que B_1 y B_2 son subcontinuos contraíbles de X. Por lo tanto para cada $i \in \{1, 2\}$, existe una homotopía $H_i\colon X \times [0, 1] \to B_i$ tal que $H_i(x, 0) = f_i(x)$ y $H_i(x, 1) = p$ para cada $x \in X$. Como f_i es sobreyectiva para cada $i \in \{1, 2\}$, se sigue que H_i es sobreyectiva para cada $i \in \{1, 2\}$. Por la Proposición 2.36 existe una homotopía sobreyectiva $H\colon X \times [0, 1] \to X$ tal que $H(x, 0) = f_1(x)$ y $H(x, 1) = p$ para cada $x \in X$. Sea $G\colon \text{Cono}(X) \to X$ definida por

$$G(x,t) = \begin{cases} H(x,t), & \text{si } t \neq 1; \\ p, & \text{si } (x,t) = v_X. \end{cases}$$

Por el Teorema 1.26, la función G es continua y como H es sobreyectiva, se sigue que G también es sobreyectiva. Así $X \times [0, 1]$ es g-contraíble, por el Teorema 2.16. La parte 3) es consecuencia inmediata de la Proposición 2.17. □

Como claramente $X \times [0, 1]$ contiene un subespacio homeomorfo a X, se sigue que la g-contractibilidad no es una propiedad hereditaria, por el Teorema 2.37. Ahora, como X es un espacio cociente de $X \times [0, 1]$ concluimos también que la g-contractibilidad no es preservada por cocientes, usando nuevamente el Teorema 2.37.

El Teorema 2.37 motiva las siguientes preguntas.

Pregunta 2.38. ¿Si X es un continuo uniformemente conexo por caminos, entonces $X \times [0, 1]$ es g-contraíble?

No es difícil ver que $X \times Y$ es un continuo uniformemente conexo por caminos si y sólo si X y Y son continuos uniformemente conexos por caminos [5, Teorema 3.4]. Por lo tanto el recíproco de la Pregunta 2.38 es cierto.

Pregunta 2.39. ¿Si X y Y son continuos tales que $X \times Y$ es g-contraíble, entonces X o Y deben ser g-contraíbles?

Como un comentario final mencionamos que el profesor Bellamy probó que cualquier continuo g-contraíble es uniformemente conexo por caminos (ver Corolario 2.29) y, como es natural, preguntó si el recíproco de esta afirmación es verdadero. Este problema permaneció abierto hasta 1999 cuando los profesores Krezemińka y Prajs probaron que existe un continuo uniformemente conexo que no es g-contraíble [18, Teorema 1]; sin embargo, el continuo presentado en este artículo no es hereditariamente unicoherente. A partir de este ejemplo surge el problema de encontrar más ejemplos de continuos que sean uniformemente conexos por caminos y no sean g-contraíbles. En [5, Teorema 4.19], mostramos que existe una familia $\mathcal{D}$ no numerable de dendroides uniformemente conexos por caminos tal que ninguno de ellos es g-contraíble. Esta familia es un caso particular de la familia $\mathcal{G}$ de continuos X_L de acuerdo con la Definición 2.30, ya que $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$. Comentamos también que todo elemento X de la familia $\mathcal{D}$ satisface además la siguiente propiedad: $X^n \times [0, 1]$ es g-contraíble para cada $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 3

Hiperespacios G-contraíbles

El propósito de este capítulo es estudiar la g-contractibilidad en hiperespacios. En [24], el profesor Sam B. Nadler, Jr. probó que para cualquier continuo X, el hiperespacio 2^X es g-contraíble [24, Teorema 4.10]. Es natural preguntar si para cualquier continuo X, los hiperespacios $C_n(X)$ y $F_n(X)$ son g-contraíbles. Es conocido que $C(X)$ es uniformemente conexo por caminos para cualquier continuo X [24, Teorema 1.33] y que si X tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes, el hiperespacio $C(X)$ es g-contraíble [24, Teorema 4.12]. El profesor Alejandro Illanes en *"A continuum whose hyperspace of subcontinua is not g-contractible"* mostró un ejemplo de un continuo cuyo hiperespacio $C(X)$ no es g-contraíble. Sin embargo, dicho continuo no es arcoconexo y por lo tanto no puede ser g-contraíble (ver Proposición 2.2). En este capítulo probaremos que existe una familia no numerable de continuos uniformemente conexos por caminos tales que para ningún elemento de esta familia el hiperespacio de subcontinuos es g-contraíble.

En este capítulo haremos una recopilación de los resultados conocidos alrededor de la g-contractibilidad en hiperespacios y presentaremos nuevos resultados.

3.1. G-contractibilidad en hiperespacios

En esta sección estudiamos la g-contractibilidad en los hiperespacios 2^X, $C_n(X)$ y $F_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Empezamos estudiando la g-contractibilidad en el n-ésimo producto simétrico $F_n(X)$.

Teorema 3.1. *Sean X un continuo g-contraíble y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $F_n(X)$ es g-contraíble.*

Demostración. Si X es g-contraíble entonces existe una función continua y sobreyectiva $f\colon X \to X$ homotópica a una constante. Sean $H\colon X \times [0,1] \to X$ una homotopía y $x_0 \in X$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = x_0$ para cada $x \in X$. Sea $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(X)$ definida por $F_n(f)(\{x_1,\ldots,x_n\}) = \{f(x_1),\ldots,f(x_n)\}$, entonces $F_n(f)$ está bien definida y es continua [16, Teorema 13.3]. Es fácil ver que como f es sobreyectiva,

$F_n(f)$ también es sobreyectiva. Veamos que $F_n(f)$ es homotópica a una constante. Sea $G\colon F_n(X) \times [0,1] \to F_n(X)$ definida por $G(\{x_1, \ldots, x_n\}, t) = H(\{x_1, \ldots, x_n\} \times \{t\})$. Entonces G es una función continua. Además $G(\{x_1, \ldots, x_n\}, 0) = F_n(f)(\{x_1, \ldots, x_n\})$ y $G(\{x_1, \ldots, x_n\}, 1) = \{x_0\}$. Por lo tanto, $F_n(X)$ es g-contraíble. □

Comentario 3.2. Si en la prueba del teorema anterior cambiamos a f por id_X, se sigue que si X es contraíble entonces $F_n(X)$ es contraíble para cada $n \in \mathbb{N}$.

No sabemos si el recíproco del Teorema 3.1 es cierto.

Pregunta 3.3. ¿Si X es un continuo y $F_n(X)$ es g-contraíble, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces X es g-contraíble?

Es importante resaltar que en particular, la Pregunta 3.3, no ha sido resuelta aún si se enuncia con contractibilidad en lugar de g-contractibilidad.
El lema que probamos a continuación nos será de utilidad para la prueba de nuestro siguiente teorema.

Lema 3.4. *Sea X un continuo y $\mathcal{B}$ una base para la topología de X. Si existe una función continua y sobreyectiva f de X en* $\text{Cono}(\mathcal{C})$*, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que B tiene una cantidad no numerable de componentes.*

Demostración. Sean $v_{\mathcal{C}}$ el vértice de $\text{Cono}(\mathcal{C})$ y $p_0 \in \text{Cono}(\mathcal{C}) \setminus \{v_{\mathcal{C}}\}$, entonces $f^{-1}(p_0) \subset f^{-1}(\text{Cono}(\mathcal{C}) \setminus \{v_{\mathcal{C}}\})$. Puesto que $f^{-1}(p_0)$ es compacto, existen $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}$ tales que $f^{-1}(p_0) \subset \cup_{i=1}^k B_i \subset f^{-1}(\text{Cono}(\mathcal{C}) \setminus \{v_{\mathcal{C}}\})$.
Probemos que existe un abierto W en $\text{Cono}(\mathcal{C}) \setminus \{v_{\mathcal{C}}\}$ tal que $p_0 \in W$ y $f^{-1}(W) \subset \cup_{i=1}^k B_i$. Supongamos que para cada V abierto en $\text{Cono}(\mathcal{C}) \setminus \{v_{\mathcal{C}}\}$ con $p_0 \in V$ tenemos que $f^{-1}(V) \cap (X \setminus \cup_{i=1}^k B_i) \neq \emptyset$. Entonces existe una sucesión $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\text{Cono}(\mathcal{C}) \setminus \{v_{\mathcal{C}}\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} p_n = p_0$ y $f^{-1}(p_n) \cap (X \setminus \cup_{i=1}^k B_i) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $z_n \in f^{-1}(p_n) \cap (X \setminus \cup_{i=1}^k B_i)$. Como el conjunto $X \setminus \cup_{i=1}^k B_i$ es compacto, podemos suponer que $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ con $z_0 \in X \setminus \cup_{i=1}^k B_i$. De la continuidad de f se sigue que $f(z_0) = p_0$, lo cual implica que $z_0 \in \cup_{i=1}^k B_i$; con esto contradecimos que $f^{-1}(p_0) \subset \cup_{i=1}^k B_i$.
Sea W un abierto en $\text{Cono}(\mathcal{C}) \setminus \{v_{\mathcal{C}}\}$ tal que $p_0 \in W$ y $f^{-1}(W) \subset \cup_{i=1}^k B_i$. Como $\text{Cono}(\mathcal{C}) \setminus \{v_{\mathcal{C}}\}$ tiene una cantidad no numerable de componentes y W es un abierto en $\text{Cono}(\mathcal{C}) \setminus \{v_{\mathcal{C}}\}$ tenemos que $f^{-1}(W)$ tiene una cantidad no numerable de componentes y por lo tanto $\cup_{i=1}^k B_i$ tiene una cantidad no numerable de componentes. De esta manera B_j tiene una cantidad no numerable de componentes para algún $j \in \{1, \ldots, k\}$. □

A continuación, usaremos nuevamente la función continua $u\colon 2^{2^X} \to 2^X$ definida por $u(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$ que fue de utilidad en el Capítulo 1.

Teorema 3.5. *Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces X tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes si y sólo si $F_n(X)$ tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes.*

Demostración. Supongamos que $F_n(X)$ tiene una abierto con una cantidad no numerable de componentes. Por el Teorema 2.23, existe una función continua y sobreyectiva $f\colon F_n(X) \to \text{Cono}(\mathcal{C})$. La función $g\colon X^n \to F_n(X)$ definida por $g(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ es continua y sobreyectiva, por el Teorema 1.47. Por lo tanto, $f \circ g\colon X^n \to \text{Cono}(\mathcal{C})$ es una función continua y sobreyectiva. Por el Teorema 2.23, X^n tiene una abierto con una cantidad no numerable de componentes y por el Lema 3.4, existen $B_1, \ldots, B_n$ abiertos en X tales que $B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$ tiene una cantidad no numerable de componentes. Por lo tanto, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que B_j tiene una cantidad no numerable de componentes por [11, Ejemplo 3, pág. 111].

Recíprocamente, supongamos que X tiene un abierto U con una cantidad no numerable de componentes y sea $\mathcal{U} = \langle U \rangle_{F_n(X)}$. Note que $\mathcal{U}$ es un abierto de $F_n(X)$ y $u(\mathcal{U}) = U$. Sea $x \in U$ y consideremos la componente $\mathcal{L}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\{x\} \in \mathcal{L}$. Por el Lema 1.61, $u(\mathcal{L})$ es conexo y $x \in u(\mathcal{L})$. Por lo tanto si L es la componente de U tal que $x \in L$ tenemos que $u(\mathcal{L}) \subset L$. Esto prueba que $\mathcal{U}$ tiene una cantidad no numerable de componentes. $\square$

El Teorema 3.5 nos da una condición necesaria y suficiente para que el hiperespacio $F_n(X)$ sea preimagen continua de $\text{Cono}(\mathcal{C})$. Ahora estudiamos bajo qué condiciones el hiperespacio $F_n(X)$ es imagen continua de $\text{Cono}(\mathcal{C})$. Por el Teorema 2.28, esto es equivalente a estudiar bajo qué condiciones el hiperespacio $F_n(X)$ es uniformemente conexo por caminos.

Lema 3.6. *Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cada $\mathcal{A} \in C(F_n(X))$ con $\text{diám}(\mathcal{A}) < \delta$ tenemos que $\text{diám}(K) < \varepsilon$, para cada componente K de $u(\mathcal{A})$.*

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $\{\mathcal{A}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $C(F_n(X))$ tal que $\lim_{j\to\infty} \text{diám}(\mathcal{A}_j) = 0$ y para cada $j \in \mathbb{N}$ existe una componente K_j de $u(\mathcal{A}_j)$ tal que $\text{diám}(K_j) \geq \varepsilon_0$, para algún $\varepsilon_0 > 0$. Por el Teorema 1.46 tenemos que $C(F_n(X))$ es compacto; así sin pérdida de generalidad supongamos que $\lim_{j\to\infty} \mathcal{A}_j = \mathcal{A}$, en donde $\mathcal{A} \in C(F_n(X))$. Por lo tanto $\text{diám}(\mathcal{A}) = 0$ y se sigue que $\mathcal{A} = \{B\}$ para algún $B \in F_n(X)$. Como $C(X)$ es compacto, podemos suponer que existe $K \in C(X)$ tal que $\lim_{j\to\infty} K_j = K$. Note que $\text{diám}(K) \geq \varepsilon_0$. Puesto que $K_j \subset u(\mathcal{A}_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y u es una función continua [24, Lema 1.48], tenemos $K \subset u(\mathcal{A}) = B$. Como K es conexo y $B \in F_n(X)$ se sigue que K debe ser un conjunto unitario y por lo tanto $\text{diám}(K) = 0$. Esta contradicción prueba el lema. $\square$

Teorema 3.7. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. El hiperespacio $F_n(X)$ es uniformemente conexo por caminos si y sólo si X es uniformemente conexo por caminos.*

Demostración. Supongamos que X es uniformemente conexo por caminos. Entonces por el Teorema 2.28 tenemos que existe una función $f\colon \text{Cono}(\mathcal{C}) \to X$ continua y sobreyectiva. Por [16, Teorema 13.3], la función $F_n(f)\colon F_n(\text{Cono}(\mathcal{C})) \to F_n(X)$ definida por $F_n(f)(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ es continua y sobreyectiva . Por el Comentario 3.2, $F_n(\text{Cono}(\mathcal{C}))$ es contraíble; luego por el Lema 2.29, existe una función $h\colon \text{Cono}(\mathcal{C}) \to F_n(\text{Cono}(\mathcal{C}))$ continua y sobreyectiva. Entonces $F_n(f) \circ h\colon \text{Cono}(\mathcal{C}) \to$

$F_n(X)$ es una función continua y sobreyectiva. Por lo tanto $F_n(X)$ es imagen continua de Cono($\mathcal{C}$) y por el Teorema 2.28 concluimos que $F_n(X)$ es uniformemente conexo por caminos.

Recíprocamente, supongamos que $F_n(X)$ es uniformemente conexo por caminos. Sean $\varepsilon > 0$ dado y $\delta > 0$ como en el Lema 3.6. Sea $N_1 \in \mathbb{N}$ como en la Definición 2.27 para $F_n(X)$ y sean $N = nN_1$ y $x, y \in X$. Entonces existe una función continua $g\colon [0,1] \to F_n(X)$ y una partición $\mathcal{P} = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_{N_1} = 1\}$ de $[0,1]$ tales que $g(0) = \{x\}$, $g(1) = \{y\}$ y $\operatorname{diám} g([t_{i-1}, t_i]) < \delta$ para cada $i \in \{1, \ldots, N_1\}$. Consideremos la colección

$$\mathcal{K} = \{K \mid K \text{ es una componente de } u(g([t_{i-1}, t_i])) \text{ para algún } i \in \{1, \ldots, N_1\}\}.$$

Por el Lema 1.61, $u(g([t_{i-1}, t_i]))$ tiene a lo más n componentes para cada $i = 1, \ldots, N_1$. Por el Lema 3.6 y la elección de δ tenemos que $\mathcal{K}$ tiene a lo más nN_1 elementos y $\operatorname{diám}(K) < \varepsilon$ para cada $K \in \mathcal{K}$.

Sea $i \in \{1, \ldots, N_1\}$. Como $g([t_{i-1}, t_i])$ es un subcontinuo localmente conexo de $F_n(X)$ tenemos que $u(g([t_{i-1}, t_i]))$ es un cerrado localmente conexo en X, por [10, Lema 2.2].

Sea $K \in \mathcal{K}$ entonces K es una componente de $u(g([t_{i-1}, t_i]))$ para algún $i \in \{1, \ldots, N_1\}$ y se sigue que K es un subcontinuo de $u(g([t_{i-1}, t_i]))$. Por lo tanto K es un subcontinuo localmente conexo de X para cada $K \in \mathcal{K}$. Se sigue de [23, Teorema 8.23] que K es conexo por caminos para cada $K \in \mathcal{K}$.

Ahora, como $g([0,1])$ es un subcontinuo de $F_n(X)$ y, $\{x\}$ y $\{y\}$ están en $g([0,1]) \cap F_1(X)$ por el Lema 1.61, $u(g([0,1]))$ es un subcontinuo de X que contiene a x y y. Note que

$$u(g([0,1])) = u\left(\bigcup_{i=1}^{N_1} g([t_{i-1}, t_i])\right) = \bigcup \{K \mid K \in \mathcal{K}\}.$$

Como $u(g([0,1]))$ es conexo, y $\mathcal{K}$ tiene a lo más nN_1 elementos, existen $r < nN_1$ y $K_0, \ldots, K_r \in \mathcal{K}$ tales que $x \in K_0$, $y \in K_r$ y $K_{j-1} \cap K_j \neq \emptyset$ para cada $j = 1, \ldots, r$. Sean $k_0 = x$, $k_{r+1} = y$ y para cada $j = 1, \ldots, r$ sea $k_j \in K_{j-1} \cap K_j$. Como K_j es conexo por caminos, existe un camino $h_j\colon [\frac{j}{r+1}, \frac{j+1}{r+1}] \to K_j$ tal que $h_j(\frac{j}{r+1}) = k_j$ y $h_j(\frac{j+1}{r+1}) = k_{j+1}$ para cualquier $j = 0, 1, \ldots, r$. Definamos $h\colon [0,1] \to X$ por $h(t) = h_j(t)$ si $t \in [\frac{j}{r+1}, \frac{j+1}{r+1}]$. Veamos que h está bien definida. Sea $j \in \{0, 1, \ldots, r\}$ y supongamos que $t \in [\frac{j}{r+1}, \frac{j+1}{r+1}] \cap [\frac{j+1}{r+1}, \frac{j+2}{r+1}]$ entonces $t = \frac{j+1}{r+1}$. Como $t \in [\frac{j}{r+1}, \frac{j+1}{r+1}]$ tenemos que $h(t) = h_j(\frac{j+1}{r+1}) = k_{j+1}$. Por otro lado, puesto que $t \in [\frac{j+1}{r+1}, \frac{j+2}{r+1}]$ y $t = \frac{j+1}{r+1}$ se sigue que $h(t) = h_{j+1}(\frac{j+1}{r+1}) = k_{j+1}$. Por [21, Teorema 18.3], la función h es continua. De la definición de h se sigue que $h(0) = h_0(0) = k_0 = x$, $h(1) = h_r(1) = k_{r+1} = y$, y como cada elemento de $\mathcal{K}$ tiene diámetro menor que ε, concluimos que $\operatorname{diám}(h([\frac{j}{r+1}, \frac{j+1}{r+1}])) < \varepsilon$ para todo $j \in \{0, 1, \ldots, r\}$. Esto prueba que X es uniformemente conexo por caminos y hemos completado la prueba del teorema. $\square$

La prueba del siguiente teorema es una consecuencia inmediata de los Teoremas 2.25, 3.5 y 3.7.

Teorema 3.8. *Sea X un continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) X es imagen y preimagen continua de $\text{Cono}(\mathcal{C})$*;*

2) $F_n(X)$ es imagen y preimagen continua de $\text{Cono}(\mathcal{C})$*;*

3) X es g-contraíble y contiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes;

4) $F_n(X)$ es g-contraíble y contiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes.

Continuamos nuestro estudio de la g-contractibilidad en hiperespacios con 2^X y $C_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que los hiperespacios 2^X y $C_n(X)$ siempre son imagen continua del cono sobre el conjunto de Cantor; i.e, 2^X y $C_n(X)$ son continuos uniformemente conexos por caminos. Introducimos la siguiente notación.

Notación 3.9. Sea X un espacio métrico compacto, $\mathcal{H} \subset 2^X$ y w una función de Whitney para $\mathcal{H}$. El *espacio de segmentos en $\mathcal{H}$ con respecto a w* es el espacio

$$S_w(\mathcal{H}) = \left\{\sigma \in \mathcal{H}^{[0,1]} \,|\, \sigma \text{ es un segmento con respecto a } w\right\}$$

junto con la topología uniforme (ver [21, pág. 266]).

Probaremos primero la conexidad uniforme por caminos de los hiperespacios 2^X y $C(X)$.

Teorema 3.10. *[24, Teorema 1.33] Si X es un continuo, entonces 2^X y $C(X)$ son imágenes continuas de* $\text{Cono}(\mathcal{C})$*.*

Demostración. Probemos el resultado para 2^X. Sea w una función de Whitney para 2^X (ver Teorema 1.68). Definamos

$$S_X(2^X) = \left\{\sigma \in S_w(2^X) \,|\, \sigma(1) = X\right\}.$$

Sea $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $S_X(2^X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$ y veamos que $\sigma \in S_X(2^X)$. Observe que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(1) = \sigma(1)$ y como tenemos $\sigma_n(1) = X$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\sigma(1) = X$. Por lo tanto $S_X(2^X)$ es cerrado en $S_w(2^X)$ y concluimos que $S_X(2^X)$ es compacto [24, Lema 1.29]. Por [23, Teorema 7.7], existe una función continua y sobreyectiva $f\colon \mathcal{C} \to S_X(2^X)$. Definamos

$$\begin{array}{rccl} g\colon & \mathcal{C} \times [0,1] & \to & 2^X \\ & (x,t) & \mapsto & g(x,t) = f(x)(t). \end{array} \tag{3.1}$$

Veamos que g es una función continua. Sean $(x_0,t_0) \in \mathcal{C} \times [0,1]$ y $((x_n,t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{C} \times [0,1]$ tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n,t_n) = (x_0,t_0)$. Por la continuidad de f tenemos que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Ahora bien, como la convergencia en $S_X(2^X)$ es la convergencia uniforme se sigue que $\lim_{n\to\infty} g(x_n,t_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)(t_n) = f(x_0)(t_0) = g(x_0,t_0)$ y por lo tanto g es continua.

Probemos que g es sobreyectiva. Sea $A \in 2^X$ con $A \neq X$ entonces por el Teorema 1.68 existe $\sigma \in S_X(2^X)$ tal que $\sigma(0) = A$. Puesto que f es sobreyectiva, existe $x_0 \in \mathcal{C}$ tal que $f(x_0) = \sigma$. Por lo tanto, $g(x_0, 0) = f(x_0)(0) = \sigma(0) = A$. De la definición de f y g tenemos que $g(x, 1) = X$ para cada $x \in \mathcal{C}$. Con esto concluimos que g es sobreyectiva.

Sea $F\colon$ Cono$(\mathcal{C}) \to 2^X$ definida por $F(x,t) = g(x,t)$ si $t \neq 1$ y $F(v_{\mathcal{C}}) = X$. Notemos que F está bien definida, es continua y sobreyectiva, por el Teorema 1.26. Con lo que concluimos nuestra prueba para el hiperespacio 2^X.

Probemos ahora que $C(X)$ es imagen continua de Cono$(\mathcal{C})$. La prueba es muy similar a la que acabamos de hacer, sin embargo, haremos los detalles a continuación. Sea

$$S_X^0(2^X) = \left\{\sigma \in S_w(2^X) \,|\, \sigma(0) \in C(X) \text{ y } \sigma(1) = X\right\}.$$

Veamos que $S_X^0(2^X)$ es cerrado en $S_w(2^X)$. Sea $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $S_X^0(2^X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$. Como $C(X)$ es cerrado en 2^X, $\sigma_n(0) \in C(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(0) = \sigma(0)$, se sigue que $\sigma(0) \in C(X)$. Note que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(1) = \sigma(1)$. Así $\sigma(1) = X$ y concluimos que $S_X^0(2^X)$ es cerrado en $S_w(2^X)$. Por lo tanto $S_X^0(2^X)$ es compacto, pues $S_w(2^X)$ es compacto [24, Lema 1.29]. Por [23, Teorema 7.7] tenemos que existe una función $f_0\colon \mathcal{C} \to S_X^0(2^X)$ continua y sobreyectiva. Definamos

$$\begin{array}{rccl} g_0\colon & \mathcal{C} \times [0,1] & \to & 2^X \\ & (x,t) & \mapsto & g_0(x,t) = f_0(x)(t). \end{array}$$

Un argumento similar al usado para probar que la función definida en (3.1) es continua aplica para probar que g_0 es una función continua. Puesto que $\sigma(0) \in C(X)$ tenemos que $\sigma(t) \in C(X)$ para cada $t \in [0,1]$, [24, Teorema 1.26]. Por lo tanto g_0 es una función continua de $\mathcal{C} \times [0,1]$ en $C(X)$. Sea $A \in C(X)$ con $A \neq X$ entonces por el Teorema 1.68, existe $\sigma \in S_X(2^X)$ tal que $\sigma(0) = A$. De otra parte, como f_0 es sobreyectiva existe $x_0 \in \mathcal{C}$ tal que $f(x_0) = \sigma$; luego $g_0(x_0, 0) = f(x_0)(0) = \sigma(0) = A$ y se sigue que g_0 es sobreyectiva. Definamos $F_0\colon$ Cono$(\mathcal{C}) \to C(X)$ por $F_0(x,t) = g_0(x,t)$ si $t \neq 1$ y $F_0(v_{\mathcal{C}}) = X$ si $t = 1$; entonces F_0 está bien definida y por Teorema 1.26, la función F_0 es continua. La sobreyectividad de F_0 es consecuencia inmediata de la sobreyectividad de g_0. □

A pesar de que podríamos usar el mismo argumento para probar que la conexidad uniforme por caminos del hiperespacio $C_n(X)$, decidimos incluir el siguiente argumento.

Proposición 3.11. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualquier continuo X, el hiperespacio $C_n(X)$ es imagen continua de* Cono$(\mathcal{C})$.

Demostración. Sabemos que, $C(X)$ es imagen continua de Cono$(\mathcal{C})$, por el Teorema 3.10. Tomemos $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una función $g\colon$ Cono$(\mathcal{C}) \to F_n(C(X))$ continua y sobreyectiva, por el Teorema 3.8. Por otra parte, tenemos la función $u\colon F_n(C(X)) \to C_n(X)$ continua y sobreyectiva. Esto prueba que la función $u \circ g\colon$ Cono$(\mathcal{C}) \to C_n(X)$ es continua y sobreyectiva. □

Hemos probado que para cualquier continuo X, 2^X y $C_n(X)$ son imágenes continuas de Cono($\mathcal{C}$). Ahora veamos qué condiciones implican que 2^X sea preimagen continua de Cono($\mathcal{C}$). Si X es localmente conexo entonces 2^X es localmente conexo [24, Teorema 1.92]. Por lo tanto 2^X no puede ser preimagen continua de Cono($\mathcal{C}$) cuando X es localmente conexo; luego debemos suponer que X no es localmente conexo.

Teorema 3.12. *[24, Teorema 1.38] Sea X un continuo. Si X no es localmente conexo, entonces 2^X contiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes.*

Demostración. Como X no es localmente conexo entonces por el Comentario 1.9 existe $p \in X$ tal que X no es conexo en pequeño en p. Por [24, Teorema 20.7], existe $\varepsilon_0 > 0$ y una sucesión de distintas componentes $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $B = Cl_X(B_d(p, \varepsilon_0))$ que converge a un subcontinuo K de X no degenerado con $p \in K$ y $K \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) = \emptyset$. Podemos suponer que $K_n \cap B_d(p, \varepsilon_0) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $p \in K$ y $K = \text{lím}_{n\to\infty} K_n$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = p$ y $x_n \in K_n \cap B_d(p, \varepsilon_0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $Z = \{p\} \cup \{x_1, x_2, \ldots\}$ y $2_p^Z = \{A \subset Z \,|\, p \in A\}$. Observe que 2_p^Z es no contable. Sea $\beta = B_{H_d}(\{p\}, \varepsilon_0) \subset 2^X$ y veamos que $\beta = \langle B_d(p, \varepsilon_0)\rangle$. Sea $W \in B_{H_d}(\{p\}, \varepsilon_0)$ entonces $H_d(W, \{p\}) < \varepsilon_0$. Por la definición de H_d, existe $r > 0$ tal que $r < \varepsilon_0$ y $\{p\} \subset N_d(W, r)$ y $W \subset N_d(\{p\}, r)$. Note que $N_d(\{p\}, r) = B_d(p, r)$; como $r < \varepsilon_0$ se sigue que $W \subset B_d(p, \varepsilon_0)$ y esto muestra que $W \in \langle B_d(p, \varepsilon_0)\rangle$. Por otro lado, si $W \in \langle B_d(p, \varepsilon_0)\rangle$ entonces $d(p, W) < \varepsilon_0$, luego $\{p\} \subset N_d(W, \varepsilon_0)$ y como $W \subset B_d(p, \varepsilon_0)$ se sigue que $W \subset N_d(\{p\}, \varepsilon_0)$; así $H_d(W, \{p\}) < \varepsilon_0$ y concluimos que $W \in B_{H_d}(\{p\}, \varepsilon_0)$. Ahora, como $Z \subset B_d(p, \varepsilon_0)$, tenemos que $2_p^Z \subset \beta$. Probaremos que cualesquiera dos elementos de 2_p^Z se encuentran en distintas componentes de $Cl_{2^X}(\beta)$.

Para cada $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ tenemos que $K_i \cap K_j = \emptyset$ y $Z \cap K_n = \{x_n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean $A_1, A_2 \in 2_p^Z$ y supongamos que $A_1 \not\subset A_2$ entonces existe $x_{n_1} \in A_1 \setminus A_2$. Como $x_{n_1} \notin A_2 \subset Z$ tenemos $A_2 \cap K_{n_1} = \emptyset$. Puesto que K_{n_1} es una componente de B, por el Teorema 1.58 existen cerrados disyuntos M_1 y M_2 de B tales que $K_{n_1} \subset M_1$, $A_2 \subset M_2$, y $B = M_1 \cup M_2$. Supongamos A_1 y A_2 se encuentran en la misma componente de $Cl_{2^X}(\beta)$ y sea Γ dicha componente. Note que Γ es un subcontinuo de $Cl_{2^X}(\beta)$ y $A_1, A_2 \in \Gamma$. Sean

$$\Gamma_1 = \{G \in \Gamma \,|\, G \cap M_1 \neq \emptyset\}, \text{ y}$$
$$\Gamma_2 = \{G \in \Gamma \,|\, G \subset M_2\}.$$

Puesto que $x_{n_1} \in A_1 \cap K_{n_1}$ y $K_{n_1} \subset M_1$ se sigue que $\Gamma_1 \neq \emptyset$. También $\Gamma_2 \neq \emptyset$ pues $A_2 \subset M_2$ y $A_2 \in \Gamma$. No es difícil ver que Γ_1 y Γ_2 son cerrados en Γ y como $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ se sigue que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Ahora bien, como $\beta = \langle B_d(p, \varepsilon_0)\rangle$, tenemos que $Cl_{2^X}(\beta) = \langle B\rangle$ [16, Ejercicio 1.21, pág. 8], y así $B = \bigcup Cl_{2^X}(\beta)$. Note que $B = M_1 \cup M_2$, luego para cada $D \in Cl_{2^X}(\beta)$ se tiene que $D \cap M_1 \neq \emptyset$ o $D \subset M_2$; por lo tanto $\Gamma \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Esto prueba que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ pero esto es absurdo pues Γ es conexo. Hemos probado que cualesquiera dos puntos en 2_p^Z se encuentran en distintas componentes de $Cl_{2^X}(\beta)$, y como toda componente de β está contenida en una componente de $Cl_{2^X}(\beta)$ se sigue que β tiene una cantidad no numerable de componentes. $\square$

Como una consecuencia inmediata de los Teoremas 3.12 y 2.23 tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.13. *Sea X un continuo. Si X no es localmente conexo, entonces existe una función continua y sobreyectiva de 2^X en* Cono($\mathcal{C}$).

Teorema 3.14. *[24, Teorema 4.10] Si X es un continuo, entonces 2^X es g-contraíble.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo entonces 2^X es localmente conexo [24, Teorema 1.92] y por lo tanto 2^X es g-contraíble por el Comentario 2.7. Si X no es localmente conexo, 2^X es imagen y preimagen continua de Cono($\mathcal{C}$) por los Teoremas 3.10 y 3.13, respectivamente. De esta manera, por el Teorema 2.25 concluimos que 2^X es g-contraíble. $\square$

Hemos probado que si un continuo X no es localmente conexo, su hiperespacio 2^X tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes. Sin embargo esto no es cierto para el hiperespacio $C(X)$ como lo mostramos en el siguiente ejemplo tomado de [24, Ejemplo 1.42].

Ejemplo 3.15. Consideremos la curva del topólogo X (Ejemplo 1.3). Probemos que el hiperespacio $C(X)$ no contiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes. Supongamos que $C(X)$ tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes. Por el Teorema 2.23, existe una función continua y sobreyectiva de $C(X)$ en Cono($\mathcal{C}$). Como $C(X)$ es homeomorfo a Cono(X) [22, 4.11], existe una función $f\colon$ Cono(X) $\to$ Cono($\mathcal{C}$) continua y sobreyectiva. Sea $q_X\colon X \times [0,1] \to$ Cono(X) la función cociente y consideremos la función $f \circ q_X\colon X \times [0,1] \to$ Cono($\mathcal{C}$). Por el Teorema 2.23 y el Lema 3.4, concluimos que X tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes. Por el Teorema 2.23 se sigue que existe una función continua y sobreyectiva de X en Cono($\mathcal{C}$). Esto es imposible por [6, Teorema 18].

El siguiente teorema da una condición suficiente para que en $C(X)$ exista un abierto con una cantidad no numerable de componentes.

Teorema 3.16. *[24, Lema 1.44] Sea X un continuo y supongamos que X tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes. Entonces $C(X)$ también tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes.*

Demostración. Sean U un abierto de X con una cantidad no numerable de componentes y $\Gamma = \langle U \rangle_{C(X)}$. Entonces Γ es un abierto en $C(X)$ y es claro que $u(\Gamma) \subset U$. Como $\{x\} \in \Gamma$ para cada $x \in U$ tenemos que $u(\Gamma) = U$. Sean $x \in U$ y Λ la componente de Γ tal que $\{x\} \in \Lambda$. Ahora, si $u(\Lambda)$ es conexo y L es la componente de U tal que $x \in L$ entonces $u(\Lambda) \subset L$. Por lo tanto Γ tiene una cantidad no numerable de componentes. $\square$

Comentario 3.17. El teorema anterior también es válido para $C_n(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$; la demostración de dicho resultado es muy parecida a la que presentamos en el Teorema 3.16. Una prueba puede ser encontrada en [19, Lema 6.7.1].

Por los Teoremas 3.10 y 3.16, el Comentario 3.17 y la Proposición 3.11 concluimos que:

Teorema 3.18. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si X tiene un abierto con una cantidad no numerable de componentes entonces $C_n(X)$ es g-contraíble.*

En el Teorema 3.1 probamos que la g-contractibilidad de un continuo X implica la g-contractibilidad del hiperespacio $F_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. No sabemos si la g-contractibilidad de X implique la del hiperespacio $C_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Pregunta 3.19. ¿Si X es un continuo g-contraíble, entonces $C_n(X)$ es g-contraíble para algún $n \in \mathbb{N}$?

Comentamos que el recíproco de la pregunta anterior no es cierto. En efecto, si X es la curva del topólogo (ver Ejemplo 1.3) entonces no es g-contraíble, por la Proposición 2.2. Sin embargo, como $C(X)$ es homeomorfo a Cono(X) [22, 4.11], tenemos que $C(X)$ es contraíble.

3.2. Un continuo uniformemente conexo por caminos cuyo hiperespacio $C(X)$ no es g-contraíble

El profesor Illanes en *"A continuum whose hyperspace of subcontinua is not g-contractible"* [15] mostró un ejemplo de un continuo cuyo hiperespacio de subcontinuos $C(X)$ no es g-contraíble. Sin embargo, el continuo mostrado en dicho ejemplo no es arcoconexo. En esta sección mostramos que para cada continuo X_L construido de acuerdo con la Definición 2.30, el hiperespacio de subcontinuos $C(X_L)$ no es g-contraíble. Note que este resultado implica que el hiperespacio de subcontinuos del dendroide presentado en el Teorema 2.37 no es g-contraíble.

Lema 3.20. *Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto conexo de $C(X_L)$ tal que $\{p\} \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{K} \cap C(K_n) \neq \emptyset$ o $\mathcal{K} \cap C(T_n) \neq \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces* diám$(\mathcal{K}) \geq 1$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{K} \cap C(K_n) \neq \emptyset$. Por [24, Teorema 1.43], $u(\mathcal{K})$ es un subconjunto conexo de X_L tal que $p \in u(\mathcal{K})$ y $u(\mathcal{K}) \cap K_n \neq \emptyset$. Por lo tanto $a \in u(\mathcal{K})$ y se sigue que existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $a \in K$. Luego $H_d(K, \{p\}) \geq 1$ y concluimos que diám$\,\mathcal{K} \geq 1$. Si $\mathcal{K} \cap C(T_n) \neq \emptyset$, la prueba es similar. □

Lema 3.21. *Sean $g\colon C(X_L) \to C(X_L)$ una función continua y sobreyectiva y $Q = \overline{ab} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)$. Si $\mathcal{K}$ es una componente de $C(Q)$, entonces $g(\mathcal{K})$ intersecta sólo un número finito de componentes de $C(Q)$.*

Demostración. Observemos que para cada componente $\mathcal{K}$ de $C(Q)$ existe una componente K de Q tal que $C(K) = \mathcal{K}$, por el Corolario 1.62. Supongamos que existe una componente $\mathcal{K}_0 = C(K_0)$ tal que $g(\mathcal{K}_0)$ intersecta a una cantidad infinita de componentes de $C(Q)$. Como $\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} T_n = \{p\}$ y $g(\mathcal{K}_0)$ es compacto, tenemos que $\{p\} \in g(\mathcal{K}_0)$. De otra parte, puesto que cada componente K de Q es localmente conexa, K_0 es localmente conexo. De esta manera, $\mathcal{K}_0$ es localmente conexo, por [24, Teorema 1.92]. Por lo tanto $g(\mathcal{K}_0)$ también es localmente conexo (ver Teorema 1.20). Sea $\mathcal{W}$ un subcontinuo de $g(\mathcal{K}_0)$ tal que $\{p\} \in Int_{g(\mathcal{K}_0)}(\mathcal{W})$ y diám$(\mathcal{W}) < 1$. Como $g(\mathcal{K}_0)$ intersecta una cantidad infinita de componentes de $C(Q)$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $C(K_n) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$ o $C(T_n) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$. Pero esto contradice el Lema 3.20. De esta manera concluimos que $g(\mathcal{K})$ debe intersectar a lo más un número finito de componentes de $C(Q)$. $\square$

Proposición 3.22. *Sean $D \in C(X_L)$, $g\colon C(X_L) \to C(X_L)$ una función continua y sobreyectiva, y $Q = \overline{ab} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)$. Si $C(X_L)$ no es conexo en pequeño en D entonces $g^{-1}(D) \cap C(Q) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sabemos que X_L no es conexo en pequeño en ningún punto de D, por el Lema 1.64. Así, $D \subset Q$. Por el Teorema 1.13, $K(C(X_L)) \subset g(K(C(X_L)))$. Así, tenemos que existe $W \in g^{-1}(D)$ tal que $C(X_L)$ no es conexo en pequeño en W y por lo tanto $W \subset Q$. Esto prueba que $g^{-1}(D) \cap C(Q) \neq \emptyset$. $\square$

Lema 3.23. *Sea $g\colon C(X_L) \to C(X_L)$ una función continua y sobreyectiva. Sean $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en X_L tales que:*

1. *$p_n \in D_n$ y $q_n \in E_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$;*

2. *D_n no es conexo en pequeño en p_n y E_n no es conexo en pequeño en q_n, para ningún $n \in \mathbb{N}$.*

Entonces $\{p\} \in \limsup g^{-1}(\{p_n\}) \cap \limsup g^{-1}(\{q_n\})$.

Demostración. Supongamos que $\{p\} \notin \limsup g^{-1}(\{p_n\})$. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B_{H_d}(\{p\}, \varepsilon_0) \cap g^{-1}(\{p_n\}) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} E_n = \{p\}$, se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq N$, $D_n \cup E_n \subset B(p, \varepsilon_0)$. Como X_L no es conexo en pequeño en p_n, se sigue que $C(X_L)$ no es conexo en pequeño en $\{p_n\}$, por el Lema 1.64. Tomando $Q = \overline{ab} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)$, por la Proposición 3.22, obtenemos que $g^{-1}(\{p_n\}) \cap C(Q) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sea $Y_n \in g^{-1}(\{p_n\}) \cap C(Q)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $B_{H_d}(\{p\}, \varepsilon_0) \cap g^{-1}(\{p_n\}) = \emptyset$, $Y_n \notin B_{H_d}(\{p\}, \varepsilon_0)$, para ningún $n \in \mathbb{N}$. De lo anterior se sigue que $Y_n \not\subset B(p, \varepsilon_0)$ para ningún $n \in \mathbb{N}$.

Definamos $Q_1 = \left(\bigcup_{j=1}^{N-1} K_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N-1} T_j\right)$. Como $Y_n \subset Q$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $Y_n \not\subset D_n \cup E_n$ para ningún $n \geq N$, tenemos que $Y_n \subset Q_1$. Esto prueba que $g^{-1}(\{p_n\}) \cap C(Q_1) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $g(C(Q_1))$ intersecta un número infinito de componentes de Q. Por otra parte, $C(Q_1)$ tiene un número finito de componentes, por el Corolario 1.62. De esta manera, $C(Q_1)$ tiene una componente $\mathcal{K}$ tal que $g(\mathcal{K})$ intersecta una cantidad infinita de componentes de Q, pero esto contradice el Lema 3.21. De lo anterior, concluimos que $\{p\} \in \limsup g^{-1}(\{p_n\})$. Similarmente se muestra que $\{p\} \in \limsup g^{-1}(\{q_n\})$. $\square$

Para la prueba del resultado mostrado a continuación introducimos la siguiente notación: definamos L_a y L_b como las componentes de $X_L \setminus \{p\}$ que contienen a a y b, respectivamente. Note que $B_1 = L_a \cup \{p\}$ y $B_2 = L_b \cup \{p\}$ son subcontinuos de X_L.

Lema 3.24. *Sea $g\colon C(X_L) \to C(X_L)$ una función continua y sobreyectiva. Si $G\colon C(X_L) \times [0,1] \to C(X_L)$ es una homotopía tal que $G(D,0) = g(D)$ para cada $D \in C(X_L)$ y $G(\{p\},1) \in C_a(B_1)$ (o $G(\{p\},1) \in C_b(B_2)$) entonces existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $G(\{p\},t_0) \in C_b(B_2)$ (o $G(\{p\},t_0) \in C_a(B_1)$, respectivamente).*

Demostración. Sea $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en B_2 tal que $q_n \in E_n$ y E_n no es conexo en pequeño en q_n para ningún $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 3.23, tenemos que $\{p\} \in \limsup g^{-1}(\{q_n\})$. Entonces existe una subsucesión $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ y una sucesión $\{T_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C(X_L)$ tales que $T_{n_k} \in g^{-1}(\{q_{n_k}\})$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\lim_{k\to\infty} T_{n_k} = \{p\}$. Por lo tanto $\lim_{k\to\infty} G(T_{n_k},1) \in C_a(B_1)$.
Sea $\delta > 0$ tal que $B_d(a,\delta) \subset X \setminus B_2$. Note que $G(\{p\},1) \cap B_d(a,\delta) \neq \emptyset$. Como $\lim_{k\to\infty} G(T_{n_k},1) = G(\{p\},1)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $G(T_{n_k},1) \in \langle X, B_d(a,\delta)\rangle$. Notemos que $G(\{T_{n_k}\}\times[0,1])$ es un subcontinuo de $C(X_L)$ tal que $\{q_{n_k}\} \in G(\{T_{n_k}\} \times [0,1])$ y $G(\{T_{n_k}\} \times [0,1]) \cap \langle X, B_d(a,\delta)\rangle \neq \emptyset$. Así, $u(G(\{T_{n_k}\} \times [0,1]))$ es un subcontinuo de X_L que contiene a q_{n_k} para cada $k \in \mathbb{N}$ y si $k \geq N$ se tiene que $u(G(\{T_{n_k}\} \times [0,1])) \cap B_d(a,\delta) \neq \emptyset$. Puesto que $u(G(\{T_{n_k}\} \times [0,1]))$ es arcoconexo y Z es únicamente arcoconexo (Comentario 1.22) tenemos que si $k \geq N$, $b \in u(G(\{T_{n_k}\} \times [0,1]))$. Por lo tanto, para cada $k \geq N$, existe $s_k \in [0,1]$ tal que $b \in G(T_{n_k}, s_k)$. Sea $k \geq N$ y definamos $t_k = \min\{t \in [0,1] \mid b \in G(T_{n_k},t)\}$ entonces $G(T_{n_k},t_k) \in C_b(B_2)$ para cada $k \geq N$. Como $[0,1]$ es compacto podemos suponer que $\lim_{k\to\infty} t_k = t_0$; luego $\lim_{k\to\infty} G(T_{n_k},t_k) = G(\{p\},t_0) \in C_b(B_2)$ y esto prueba el teorema. □

Teorema 3.25. *El hiperespacio $C(X_L)$ no es g-contraíble.*

Demostración. Sea $g\colon C(X_L) \to C(X_L)$ una función continua, sobreyectiva y supongamos que g es homotópica a una constante. Entonces existe una homotopía $G\colon C(X_L) \times [0,1] \to C(X_L)$ tal que $G(D,0) = g(D)$ y $G(D,1) = \{a\}$ para cada $D \in C(X_L)$. Por el Lema 3.24 tenemos que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $G(\{p\},t_0) \in C_b(B_2)$. Sean $t_a = \min\{t \in [0,1] \mid G(\{p\},t) \in C_a(B_1)\}$ y $t_b = \min\{t \in [0,1] \mid G(\{p\},t) \in C_b(B_2)\}$, entonces es claro que $t_a \neq t_b$. Supongamos que $t_a < t_b$ entonces $G|_{C(X_L)\times[0,t_a]}$ es una homotopía tal que $G(D,0) = g(D)$ para cada $D \in C(X_L)$ y $G(\{p\},t_a) \in C_a(B_1)$. Usando nuevamente el Lema 3.24, se sigue que existe $t \in [0,t_a]$ tal que $G(\{p\},t) \in C_b(B_2)$ lo cual es imposible puesto que $t_b = \min\{t \in [0,1] \mid G(\{p\},t) \in C_b(B_2)\}$ y $t_a < t_b$. De igual forma $t_b < t_a$ nos lleva a una contradicción. Por lo tanto g no es homotópica a una constante y esto prueba que $C(X_L)$ no es g-contraíble. □

Con relación a la familia de continuos X_L, en [5, Teorema 4.18] mostramos que existe una familia $\mathcal{D}$ no numerable de dendroides uniformemente conexos por caminos tales que el hiperespacio de subcontinuos de cada miembro de esta familia no es g-contraíble. Esta familia es un caso particular de la familia de todos los continuos X_L construida en el Capítulo 2 y que volvimos a retomar en esta sección. El problema de encontrar continuos cuyo hiperespacio de subcontinuos no sea g-contraíble fue propuesto por el profesor Nadler. El Teorema 3.25 muestra que existe una familia no numerable de continuos cuyo hiperespacio no es g-contraíble.

Conclusiones

Entre los resultados que obtuvimos en este trabajo, destacamos los siguientes:

1. Probamos que existe una familia no numerable de continuos uniformemente conexos por caminos tales que ningún elemento de esta familia es g-contraíble. También probamos que el hiperespacio de subcontinuos de cada miembro de dicha familia no es g-contraíble. En particular, mostramos que existe un dendroide uniformemente conexo por caminos tal que ni él ni su hiperespacio de subcontinuos son g-contraíbles.

2. Dimos una respuesta afirmativa parcial a la pregunta formulada por los profesores Krezemińska y Prajs en [18, Pregunta 1]. Como un corolario de este resultado, encontramos una caracterización para los continuos que son imagen continua de su propio cono.

En este trabajo se expuso de manera detallada el origen del problema de la g-contractibilidad en continuos. Los resultados obtenidos en nuestra investigación junto con las preguntas que hemos propuesto, son muestra de que cumplimos con los objetivos que planteamos cuando iniciamos la realización de este trabajo.

El autor espera que este trabajo sirva como una herramienta para la comunidad matemática a la hora de investigar alrededor de los continuos g-contraíbles, tal como se ha hecho con los continuos contraíbles.

Referencias

[1] B. S. Baik, K. Hur and C. J. Rhee, *R^i Sets and Contractibility*, J. Korean Math. Soc. 34 (1997), 309-319.

[2] D.P. Bellamy, *The cone over the Cantor set- continuous maps from both directions*, Topology Conference, Emory University (Proceedings) (1970), 8-24.

[3] D.P. Bellamy and C.L. Hagopian, *Mapping Continua onto their Cones*, Colloquium Mathematicum 41 (1979), 53-56.

[4] K. Borsuk and S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 37 (1931), 875-882.

[5] J. Camargo, P. Pellicer-Covarrubias and M. Rincón, *On g-contractibility of continua*, preprint.

[6] J.J. Charatonik, *Two invariants under continuity and the comparability of fans*, Fund. Math. 53 (1964), 187-204.

[7] J.J. Charatonik, *On ramification points in the classical sense*, Fund. Math. 51 (1962), pág. 229-252.

[8] J.J. Charatonik and Z. Grabowski, *Homotopically fixed arcs and the contractibility of dendroids*, Fund. Math. **100** (1978), 229-239.

[9] W.J. Charatonik, *R^i-continua and Hyperspaces*, Topology Appl. 23 (1986), 207-216.

[10] D. Curtis and N. T. Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to χ_0-dimensional linear metric spaces*, Topology Appl. 19 (1985), 251-260.

[11] J. Dugundji, *Topology,* Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[12] R. Engelking and A. Lelek, *Cartesian Products and continuous images*, Colloq. Math. 8, (1961), 27-29.

[13] J. T. Goodykoontz, Jr., *More on connectedness im kleinen and local connectedness in $C(X)$*, Proc. Amer. Math. Soc. 65, (1977), 357-364.

[14] H. Hosokawa, *Induced mappings between hyperspaces*, Tsukuba J. Math., Vol. 21 (1997), 239-250.

[15] A. Illanes, *A continuum whose hyperspace of subcontinua is not g-contractible*, Proc. Amer. Math. Soc. 130, (2002), 2179-2182.

[16] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets: Fundamentals and Recent Advances*, M. Dekker, New York and Bassel, 1999.

[17] W. Kuperberg, *Uniformly pathwise connected continua*, Studies in Topology, in: Procedings Conf. Univ. North Carolina, Charlotte, NC, 1974, 315-324.

[18] I. Krezemińska and J. R. Prajs, *A non-g-contractible uniformly path connected continuum*, Topology Appl. 91, (1999), 151-158.

[19] S. Macías, *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman, Hall-CRC, Taylor, Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005

[20] J. R. Moon, K. Hur and C. J. Rhee, *Connecteness im Kleinen and Components in $C(X)$*, Bull. Korean Math. Soc. 34 (1997), no. 2, 225-231.

[21] J.R. Munkres, *Topology*, 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2000.

[22] S. Nadler, Jr.,*Continua whose cone and hyperspace are homeomorphic*, Trans. Amer. Math. Soc. **230**, (1977), 321-345.

[23] S. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York 1992.

[24] S. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets, A text with research questions*, Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textsbooks, vol. 49, Marcel Dekker, Inc. New York, 1978.

[25] C. W. Patty, *Foundations of Topology*, 2nd ed. Jones and Bartlett Publishers, Sudbury Massachusetts, 2009.

[26] P. Pellicer-Covarrubias, *Contractibility and Local Contractibility in the Hyperspaces $C_n(X)$*. Continuum Theory: in Honor of Professor David P. Bellamy on the Ocassion of his 60th Birthday. Aportaciones Matemáticas: Investigación, **19**. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2007. ISBN: 970-32-5046-2 (06/2006), 97-116.

[27] L.A. Steen and J.A. Seebach Jr., *Counterexamples in Topology*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1970.