

ECUACIONES PARABÓLICAS ULTRAMÉTRICAS SOBRE ADELES FINITOS.

JULIAN ANDRÉS GARNICA CRUZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2024

ECUACIONES PARABÓLICAS ULTRAMÉTRICAS SOBRE ADELES FINITOS.

JULIAN ANDRÉS GARNICA CRUZ

Trabajo de Grado para optar al título de  
Magíster en Matemática

Director:

Adriana Alexandra Albarracín Mantilla  
Ph.D. en Matemáticas

Codirector:

Edilberto Arroyo Ortiz  
Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2024

## **DEDICATORIA**

*A Lidis, mi hermana.*

## **Agradecimientos**

Agradezco a la profesora Adriana por todo su apoyo, no solo en lo académico sino también en la parte emocional a lo largo de la maestría.

A mi madre, padre y hermanas por estar presentes en todo momento.

A los compañeros que están desde el pregrado por compartirme sus conocimientos.

## CONTENIDO

	pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>9</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>12</b>
1.1. Números $p$ -ádicos	12
1.2. Topología en $\mathbb{Q}_p$	14
1.3. Integración en $\mathbb{Q}_p$ .	15
1.4. Anillo de adeles finitos	17
1.4.1. Una segunda función de Chebyshev extendida.	17
1.4.2. El anillo de los números adélicos finitos	20
1.4.3. Series Adélicas	22
1.4.4. Una ultramétrica adélica.	24
1.4.5. Una medida de Haar sobre números adélicos finitos	28
1.4.6. Topología no arquimediana del anillo de números adélicos finitos	28
1.5. Caracteres y teoría de integración en $\mathbb{A}_f$	30
1.5.1. El grupo de caracteres aditivos de $\mathbb{A}_f$	30
1.5.2. Teoría de integración en $\mathbb{A}_f$ y algunas integrales oscilatorias.	35
1.5.3. Integrales oscilatorias	38
<b>2. Operadores pseudo-diferenciales</b>	<b>41</b>
2.1. Funciones de Bruhat-Schwartz	41
2.2. La transformada de Fourier	45
2.3. Operadores pseudo-diferenciales	48
<b>3. Ecuaciones pseudodiferenciales</b>	<b>51</b>

3.1. Base ortonormal para $L^2(\mathbb{A}_f)$	51
3.2. El problema de Cauchy para una ecuación pseudodiferencial de tipo ondulatorio	59
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>65</b>

## RESUMEN

**TÍTULO:** ECUACIONES PARABÓLICAS ULTRAMÉTRICAS SOBRE ADELES FINITOS CONVERGENTES. \*

**AUTOR:** JULIAN ANDRÉS GARNICA CRUZ \*\*

**PALABRAS CLAVE:** ADELES FINITO, OPERADOR PSEUDO-DIFERENCIAL, ULTRAMÉTRICA.

**DESCRIPCIÓN:**

Sea  $p$  un número primo y  $\mathbb{Q}_p$  la completación no arquimediana de los números racionales  $\mathbb{Q}$  con respecto a la norma ultramétrica. El anillo de adeles finitos  $\mathbb{A}_f$  de  $\mathbb{Q}$  se define clásicamente como el producto directo restringido de los campos  $\mathbb{Q}_p$ , sobre todos los números primos (finitos), con respecto a los anillos correspondientes de números  $p$ -ádicos, es decir:

$$\mathbb{A}_f := \left\{ (x_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Q}_p \mid x_p \in \mathbb{Z}_p, \text{ para todos menos un número finito de } p \in \mathbb{P} \right\},$$

donde  $\mathbb{P}$  es el conjunto de números primos. El objetivo principal de este trabajo es estudiar las ecuaciones parabólicas, una ecuación parabólica en derivadas parciales es una ecuación diferencial parcial de segundo orden y se utilizan para describir una gran variedad de fenómenos dependientes del tiempo, como la conducción del calor, la difusión de partículas y la apreciación de instrumentos de inversión derivados. Para este trabajo se estudiará la construcción de soluciones del problema de Cauchy para ecuaciones parabólicas  $p$ -ádicas del tipo

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + (f(D, \beta)u)(x, t) = 0, \quad t > 0,$$

donde  $f(D, \beta), \beta > 0$ , es un operador pseudo-diferencial elíptico, sobre  $\mathbb{A}_f$ .

---

\* Trabajo de grado

\*\* Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Adriana Alexandra Albarracín Mantilla. Codirector: Edilberto Arrooyo.

## ABSTRACT

**TITLE:** ULTRAMETRIC PARABOLIC EQUATIONS ON FINITE ADELS \*

**AUTHOR:** JULIAN ANDRÉS GARNICA CRUZ. \*\*

**KEYWORDS:** FINITE ADELS, PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATOR, ULTRAMETRIC.

**DESCRIPTION:**

Let  $p$  be a prime number and  $\mathbb{Q}_p$  be the non-Archimedean completion of the rational numbers  $\mathbb{Q}$  with respect to the ultrametric norm. The ring of finite adels  $\mathbb{A}_f$  of  $\mathbb{Q}$  is classically defined as the restricted direct product of the fields  $\mathbb{Q}_p$ , over all prime (finite) numbers, with respect to the corresponding rings of  $p$ -adic numbers, that is:

$$\mathbb{A}_f := \left\{ (x_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Q}_p \mid x_p \in \mathbb{Z}_p, \text{ for all but a finite number of } p \in \mathbb{P} \right\},$$

where  $\mathbb{P}$  is the set of prime numbers. The main objective of this work is to study parabolic equations, a parabolic partial differential equation is a second-order partial differential equation and is used to describe a wide variety of time-dependent phenomena, such as heat conduction, particle diffusion and the pricing of derivative investment instruments. For this work, the construction of solutions to the Cauchy problem for  $p$ -adic parabolic equations of the type will be studied.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + (f(D, \beta)u)(x, t) = 0, \quad t > 0,$$

where  $f(D, \beta), \beta > 0$ , is an elliptic pseudo-differential operator, on  $\mathbb{A}_f$ .

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Mathematics School. Sciences Faculty. Universidad Industrial de Santander. Director: Javier Enrique Camargo García.

## INTRODUCCIÓN

Sea  $p$  un número primo y  $\mathbb{Q}_p$  la completación no arquimediana de los números racionales  $\mathbb{Q}$  con respecto a la norma ultramétrica. Desde que K. Hensel en 1897 introdujo los números  $p$ -ádicos  $\mathbb{Q}_p$ , se ha tenido una gran relevancia en la teoría de números y su incidencia en la física teórica, más explícitamente en la física de partículas, cuando I. Volovich conjeturó que en distancias menores que la longitud de Plank ( $10^{-33} \text{ cm}$ ), el espacio tiempo tiene una estructura no arquimediana. Como consecuencia de esta idea han surgido, la mecánica cuántica  $p$ -ádica y la teoría cuántica de campos  $p$ -ádicos. Una hipótesis de largo alcance afirma que la estructura del tiempo y el espacio es descrita por adeles. Recientemente se han realizado varios estudios de ecuaciones pseudo-diferenciales, procesos estocásticos y otras herramientas analíticas sobre los anillos de adeles <sup>1</sup>. El anillo de adeles finitos  $\mathbb{A}_f$  de  $\mathbb{Q}$  se define clásicamente como el producto directo restringido de los campos  $\mathbb{Q}_p$ , sobre todos los números primos (finitos), con respecto a los anillos correspondientes de números  $p$ -ádicos, es decir:

$$\mathbb{A}_f := \left\{ (x_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Q}_p \mid x_p \in \mathbb{Z}_p, \text{ para todos menos un número finito de } p \in \mathbb{P} \right\},$$

donde  $\mathbb{P}$  es el conjunto de números primos.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar las ecuaciones parabólicas, una ecuación parabólica en derivadas parciales es una ecuación diferencial parcial de segundo orden y se utilizan para describir una gran variedad de fenómenos de-

---

<sup>1</sup> Victor A Aguilar-Arteaga, Manuel Cruz-López y Samuel Estala-Arias. "Non-Archimedean analysis and a wave-type pseudodifferential equation on finite adèles". En: *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications* 11.3 (2020), págs. 1139-1181.

pendientes del tiempo, como la conducción del calor, la difusión de partículas y la apreciación de instrumentos de inversión derivados. Para este trabajo se estudiará la construcción de soluciones del problema de Cauchy para ecuaciones parabólicas  $p$ -ádicas del tipo

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + (f(D, \beta)u)(x, t) = 0, \quad t > 0,$$

donde  $f(D, \beta), \beta > 0$ , es un operador pseudo-diferencial elíptico, sobre el anillo de adeles finitos  $\mathbb{A}_f$  de  $\mathbb{Q}$  ver <sup>12</sup>.

En el primer capítulo se presenta la fundamentación teórica que estudia la construcción de los números  $p$ -ádicos dando las propiedades topológicas del espacio  $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ , donde  $|\cdot|_p$  es la norma ultramétrica  $p$ -ádica, con el propósito de construir el anillo de números adélicos y mostrar sus propiedades para definir las funciones parabólicas sobre el anillo  $\mathbb{A}_f$  <sup>3456728</sup>. El capítulo 2, se enfoca en desarrollar el análisis de Fourier y se definen los operadores pseudo-diferenciales <sup>1</sup>. En el capítulo 3, se implementa la teoría de los capítulos anteriores y se construye una base ortonormal del espacio  $L^2(\mathbb{A}_f)$  para dar solución al problema de Cauchy.

---

<sup>2</sup> WA Zúñiga-Galindo. "Parabolic equations and Markov processes over  $p$ -adic fields". En: (2006).

<sup>3</sup> Sergio Albeverio y VM Shelkovich. *Theory of  $p$ -adic distributions: linear and nonlinear models*. 370. Cambridge University Press, 2010.

<sup>4</sup> Anton Deitmar y Siegfried Echterhoff. *Principles of harmonic analysis*. Springer, 2014.

<sup>5</sup> Anatoly Kochubei. *Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedean fields*. Vol. 244. CRC Press, 2001.

<sup>6</sup> Vasiliĭ Sergeevich Vladimirov, Igor Vasilievich Volovich y Evgenii Igorevich Zelenov.  *$p$ -adic Analysis and Mathematical Physics*. World Scientific, 1994.

<sup>7</sup> Andrei Yu Khrennikov, Sergei V Kozyrev y Wilson A Zúñiga-Galindo. *Ultrametric pseudodifferential equations and applications*. Vol. 168. Cambridge University Press, 2018.

<sup>8</sup> Wilson A Zúñiga-Galindo. *Pseudodifferential equations over non-Archimedean spaces*. Vol. 2174. Springer, 2016.

**Teorema 0.0.1.** Sean  $f \in \text{Dom}(D^\alpha)$  y  $g \in \text{Dom}(D^{\alpha/2})$ , entonces para la ecuación homogénea de tipo onda

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D_x^\alpha u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{A}_f, t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \end{cases}$$

hay una solución  $u(x,t) \in \mathcal{U} = C([0, T]; \text{Dom}(D^\alpha)) \cap C^2([0, T]; L^2(\mathbb{A}_f))$  dada por una expansión en serie de Fourier sobre la base wavelet. Es decir,

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ v \in \{1, \dots, e^{\lambda(-n+1)} - 1\} \\ [y] \in \mathbb{A}_f / \mathfrak{a}^{-n+1}}} u_{n,v,y}(t) \omega_{n,v,y}(x).$$

Se espera que este trabajo sea pieza fundamental para quien desea estudiar en los adeles, las ecuaciones parabólicas (operadores pseudo-diferenciales).

## 1. PRELIMINARES

En este capítulo se mostrarán los conceptos básicos de los números  $p$ -ádicos y adeles finitos, dichos los resultados están tomados de <sup>16</sup>.

### 1.1. Números $p$ -ádicos

Se inicia la sección recordando la definición de norma sobre los números racionales. Una norma  $|\cdot|$  sobre  $\mathbb{Q}$  es una función de valor real que satisface las siguientes propiedades:

1.  $|x| \geq 0$ ,  $|x| = 0$  si y sólo si  $x = 0$ ,
2.  $|xy| = |x||y|$ ,
3.  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ,

para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{Q}$ .

**Definición 1.1.1.** Una norma  $\|\cdot\|$  es llamada no Arquimediana, si además satisface:

$$\|x + y\| \leq \max \{\|x\|, \|y\|\} \quad \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (\text{propiedad ultramétrica}) \quad (1)$$

Un espacio métrico se dice no arquimediano o ultramétrico si su norma es ultramétrica o no arquimediana.

Para definir una norma  $p$ -ádica, se fija un primo  $p$  y sea  $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ . Entonces es posible expresar de forma única a  $x$  como  $x = p^v \frac{a}{b}$ , donde  $v$  es un entero y  $a, b$  son números enteros primos relativos con  $p$ . Se define

$$|x|_p = p^{-v},$$

donde el entero  $v := v(x)$  se denomina el *orden  $p$ -ádico de  $x$*  y será denotado por  $\text{Ord}_p(x)$ , este número mide qué tan divisible es  $x$  por potencias de  $p$ . Por definición  $|0|_p = 0$  y  $\text{Ord}_p(0) = +\infty$ , que en otras palabras, dice que 0 es divisible por todas las potencias positivas de  $p$ . La función  $|\cdot|_p$  cumple la definición de norma, además satisface (1), que en este caso se escribirá como

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}. \quad (2)$$

**Nota 1.1.2.** Observe que  $|n|_p \leq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  y todo número primo  $p$ .

Los siguientes resultados muestran cuando dos normas son equivalentes y bajo qué condiciones se dice que es no arquimediana.

**Proposición 1.1.3.** Considere dos normas no triviales  $|\cdot|_1, |\cdot|_2$  sobre  $\mathbb{Q}$ . Entonces  $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$  si y solo si, existe  $c \in (0, \infty)$  tal que  $|\cdot|_1 = |\cdot|_2^c$ .

**Lema 1.1.4.** Sea  $\|\cdot\|$  una norma sobre  $\mathbb{Q}$ .  $\|\cdot\|$  es una norma no arquimediana si y sólo si,  $\|n\| \leq 1$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Una pregunta natural que surge en este momento es: ¿Qué normas existen sobre  $\mathbb{Q}$ ? La respuesta a este interrogante se da en el siguiente teorema.

**Teorema 1.1.5** (Teorema de Ostrowski). Cualquier norma no trivial sobre  $\mathbb{Q}$  es equivalente al valor absoluto usual, o a una norma  $p$ -ádica  $|\cdot|_p$ , para algún primo  $p$ .

Ahora se define una distancia sobre  $\mathbb{Q}$  por  $d(x, y) = |x - y|_p$ . Así  $(\mathbb{Q}, d)$  resulta ser un espacio métrico. La completación de  $\mathbb{Q}$  con respecto a  $|\cdot|_p$  se obtiene adjuntando a  $\mathbb{Q}$  los límites de las sucesiones de Cauchy con respecto a  $|\cdot|_p$ , y esto conduce al cuerpo de los números  $p$ -ádicos, que se denota por  $\mathbb{Q}_p$ . Por otra parte, cuando se completa  $\mathbb{Q}$  con respecto al valor absoluto usual se obtiene  $\mathbb{R}$ , el cuerpo de los números reales. Todo número  $p$ -ádico puede ser representado como una serie de

la forma

$$x = \sum_{i=v}^{\infty} x_i p^i, \text{ con } x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\} \text{ y } x_v \neq 0, \quad (3)$$

donde el entero  $v$  es precisamente el orden  $p$ -ádico de  $x$ . Esta serie converge en la norma  $|\cdot|_p$ , pero no converge en  $\mathbb{R}$ . La *parte fraccionaria* de  $x \in \mathbb{Q}_p$ , denotada como  $\{x\}_p$ , es el número racional

$$\{x\}_p = \begin{cases} 0, & \text{si } \text{Ord}_p(x) \geq 0, \\ \sum_{i=v}^{-1} x_i p^i, & \text{si } \text{Ord}_p(x) < 0. \end{cases}$$

El conjunto

$$\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\} = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : x = \sum_{i=i_0}^{\infty} x_i p^i, i_0 \geq 0 \right\},$$

está formado por todos los elementos cuya descomposición no incluye potencias negativas de  $p$ , estos son llamados *enteros  $p$ -ádicos*, puesto que tienen parte fraccionaria igual a cero. Dados  $x, y \in \mathbb{Z}_p$  se tiene  $|x + y|_p \leq 1$  y  $|x|_p |y|_p \leq 1$ , lo cual implica que  $(\mathbb{Z}_p, +)$  es un anillo. Además  $\mathbb{Z}_p$  es un dominio de ideales principales, más precisamente, cualquier ideal  $\mathbb{Z}_p$  tiene la forma

$$p^m \mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Z}_p : x = \sum_{i \geq m} a_i p^i \right\}, m \in \mathbb{N}.$$

Desde el punto de vista geométrico, los ideales de la forma  $p^m \mathbb{Z}_p, m \in \mathbb{Z}$ , forman un sistema fundamental de vecindades del origen en  $\mathbb{Q}_p$ . El conjunto  $\mathbb{Z}_p$  también es llamado el *anillo de enteros  $p$ -ádicos*.

## 1.2. Topología en $\mathbb{Q}_p$

En esta sección se introducen los conceptos de bolas y esferas en  $\mathbb{Q}_p$ .

**Definición 1.2.1.** Sean  $r \in \mathbb{Z}$  y  $a \in \mathbb{Q}_p$ , se denotará y se definirá

- $B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^r\}$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ , la bola con centro  $a$  y radio  $p^r$ .
- $S_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p = p^r\}$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ , la esfera con centro  $a$  y radio  $p^r$ .

**Proposición 1.2.2.** Sean  $a \in \mathbb{Q}_p$  y  $n \in \mathbb{Z}$ ,

- $a + p^n \mathbb{Z}_p$  son bolas en  $\mathbb{Q}_p$ , más precisamente,  $a + p^n \mathbb{Z}_p = B_{-n}(a)$ .
- $a + p^n \mathbb{Z}_p^\times$  son esferas en  $\mathbb{Q}_p$ , es decir,  $a + p^n \mathbb{Z}_p^\times = S_{-n}(a)$ .

A continuación se presentan resultados sobre la topología de  $\mathbb{Q}_p$ , que provienen de la propiedad ultramétrica.

**Lema 1.2.3.** Sean  $a, b \in \mathbb{Q}_p$  y  $r \in \mathbb{Z}$ , entonces

- $S_r(a), B_r(a)$  son conjuntos abiertos y cerrados en la topología de  $\mathbb{Q}_p$ .
- Si  $b \in B_r(a)$  entonces  $B_r(b) = B_r(a)$ , es decir, todo punto de la bola  $B_r(a)$  es su centro.

**Proposición 1.2.4.** Las bolas en  $\mathbb{Q}_p$  cumplen las siguientes condiciones:

- Si  $B_r(a), B_s(b) \subset \mathbb{Q}_p$  entonces  $B_r(a) \cap B_s(b) = \emptyset$  ó  $B_r(a) \subset B_s(b)$  ( $B_r(b) \subset B_s(a)$ ).
- La frontera de toda bola es vacía.

### 1.3. Integración en $\mathbb{Q}_p$ .

En  $\mathbb{Q}_p$  existe una medida que es una generalización de la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.3.1.** Sea  $(G, *)$  un grupo topológico localmente compacto. Existe una medida regular de Borel, única salvo multiplicación por constantes positivas, tal que:

1.  $\int_U dx > 0$ , para cada conjunto abierto de Borel  $U \neq \emptyset$ .
2.  $\int_{x^*E} dx = \int_E dx$ , para cada conjunto de Borel  $E$ .

**Definición 1.3.2.** La medida  $dx$  descrita en el teorema anterior es una **Medida de Haar** sobre  $G$ .

Se tiene que  $(\mathbb{Q}_p, +)$  es un grupo topológico abeliano localmente compacto, así que existe una medida de Haar  $dx$  sobre  $(\mathbb{Q}_p, +)$ . Por otro lado,  $\mathbb{Z}_p$  es compacto y por ser  $dx$  una medida regular se obtiene

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx < \infty.$$

Así, se puede normalizar esta medida por la condición

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1,$$

y entonces  $dx$  es única.

Los abiertos compactos de  $\mathbb{Q}_p$ , es decir,  $a + p^m \mathbb{Z}_p$ , generan una  $\sigma$ -álgebra de Borel. La medida  $dx$  asigna a cada subconjunto abierto compacto  $U$  un número real no negativo  $\int_U dx$ , que además satisface

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{U_n} dx,$$

para todos los subconjuntos abiertos compactos  $U_n$  en  $\mathbb{Q}_p$ , que son disjuntos dos a dos, tal que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$  es compacto. También se cumple,

$$\int_{x_0+U} dx = \int_U dx.$$

## 1.4. Anillo de adeles finitos

En esta sección, el anillo de adeles finito  $\mathbb{A}_f$  se representa como una completación de los números racionales  $\mathbb{Q}$  respecto a una ultramétrica definida en <sup>1</sup>.

Para cada primo  $p \in \mathbb{P}$  se denota por  $\mathbb{Z}_p$  y  $\mathbb{Q}_p$  el anillo de enteros  $p$ -ádicos y el cuerpo de los números  $p$ -ádicos, respectivamente. El anillo de adeles finito  $\mathbb{A}_f$  de los números racionales  $\mathbb{Q}$  se define clásicamente como el producto directo restringido de los cuerpos  $\mathbb{Q}_p$  con respecto a los subanillos abiertos y compactos de  $\mathbb{Z}_p$ . Es decir,

$$\mathbb{A}_f := \left\{ (x_p)_{p \in \mathbb{P}} \in \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Q}_p \mid x_p \in \mathbb{Z}_p, \text{ para todos menos un número finito de } p \in \mathbb{P} \right\},$$

con la topología de producto directo restringido, que es la única topología invariante aditiva generada por la base de vecindades del cero

$$\mathcal{N} = \left\{ q \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}_p \mid q \in \mathbb{Q}, q \neq 0 \right\},$$

y consiste en subgrupos abiertos y compactos de  $\mathbb{A}_f$ . Con esta topología, el anillo  $\mathbb{A}_f$  es 2-contable, totalmente desconexo, localmente compacto y conmutativo.

Se introducirá una función aritmética relacionada con la segunda función de Chebyshev para describir una familia de subgrupos aditivos y una ultramétrica en  $\mathbb{Q}$ . La completación de los números racionales con respecto a esta ultramétrica es un anillo topológico localmente compacto, abeliano y 2-contable, que es isomorfo al anillo finito de adeles.

**1.4.1. Una segunda función de Chebyshev extendida.** Se denota por  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  el conjunto de números naturales y sea  $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$  el conjunto de los números

primos.  $\psi(n)$  denota la segunda función de Chebyshev definida por la relación

$$e^{\psi(n)} = mcm(1, 2, \dots, n), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde  $mcm$  denota el mínimo común múltiplo.  $\Lambda(n)$  denota la función de Von Mangoldt dada por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{si } n = p^k \text{ para algún } p \in \mathbb{P} \text{ y entero } k \geq 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Estas funciones aritméticas están relacionadas por las ecuaciones equivalentes

$$\psi(n) = \sum_{k=1}^n \Lambda(k) \quad \text{y} \quad e^{\psi(n)} = \prod_{k=1}^n e^{\Lambda(k)}.$$

Luego, para cualquier  $n \in \mathbb{Z}$ , se define la segunda función simétrica de Chebyshev por

$$\psi(n) = \begin{cases} \frac{n}{|n|} \psi(|n|) & \text{si } n \neq 0, \\ 0 & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

y la función simétrica de Von Mangoldt (extendida) por la relación

$$e^{\Lambda(n)} = \frac{e^{\psi(n)}}{e^{\psi(n-1)}}.$$

Esto es,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \Lambda(n) & \text{si } n > 0, \\ \Lambda(|n-1|) = \Lambda(|n|+1) & \text{si } n \leq 0. \end{cases}$$

**Observación 1.4.1.** 1. Note que si  $e^{\psi(n)} < e^{\psi(n+1)}$  entonces  $\frac{\psi(n+1)}{e^{\psi(n)}}$  es un número primo dado por  $e^{\Lambda(n+1)}$ , de lo contrario  $e^{\psi(n)} = e^{\psi(n+1)}$  y  $e^{\Lambda(n+1)} = 1$ . Los valores donde ocurre el primer caso forman el conjunto

$$\mathcal{C} = \{-p^l | l \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}\} \cup \{p^l - 1 | l \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}\}.$$

2. Conforme al propósito del trabajo, se introduce el siguiente cambio de parámetro en  $\mathcal{C}$ . Sea  $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{C}$  la única biyección creciente tal que  $e^{\psi(\rho(n))}$  es una función estrictamente creciente con  $e^{\psi(\rho(0))} = 1$ . Para simplificar la notación se escribirá  $e^{\psi(n)}$  y  $e^{\Lambda(n)}$  en lugar de  $e^{\psi(\rho(n))}$  y  $e^{\Lambda(\rho(n))}$ , respectivamente.
3. Con la notación anterior,  $\frac{e^{\psi(n+1)}}{e^{\psi(n)}}$  es sin excepción un número primo positivo dado por  $e^{\Lambda(n+1)}$ .

Además, para cualquier número entero  $n > m$ , las funciones  $\psi(n)$  y  $\Lambda(n)$  satisfacen las relaciones

$$\psi(n) - \psi(m) = \sum_{k=m+1}^n \Lambda(k) \text{ y } \frac{e^{\psi(n)}}{e^{\psi(m)}} = \prod_{k=m+1}^n e^{\Lambda(k)}.$$

**Proposición 1.4.2.** La segunda función extendida de Chebyshev, implica que las sucesiones  $\{e^{\psi(n)}\}_{n=0}^{\infty}$  y  $\{\frac{1}{e^{\psi(-n)}}\}_{n=0}^{\infty}$  son iguales. Además, empiezan en uno, están totalmente ordenadas por división, y son cofinales con  $\mathbb{N}$ , es decir dado cualquier número natural  $N$ , existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $N$  divide a  $e^{\psi(l)}$ .

La siguiente observación es de gran importancia para el análisis no arquimediano del anillo de adeles finito, dado que la representación es similar a la de  $\mathbb{Q}_p$  como serie de potencias, permitiendo trabajar en los adeles finitos de manera similar a  $\mathbb{Q}_p$ .

**Observación 1.4.3.** Usando un procedimiento similar al que se usa para escribir cualquier número racional con respecto a una base entera dada, cualquier número racional positivo  $q$  admite una representación única como una suma

$$q = \sum_{k=\gamma}^N a_k e^{\psi(k)}, \quad q \in \mathbb{Q}^+, \gamma \in \mathbb{Z},$$

con  $a_\gamma \neq 0$  y  $a_k \in \{0, 1, \dots, e^{\Lambda(k+1)} - 1\}$ ,  $\gamma < k \leq N$ .

**1.4.2. El anillo de los números adélicos finitos** A cada número entero  $n$  le corresponde un subgrupo aditivo  $e^{\psi(n)}\mathbb{Z}$  de los números racionales  $\mathbb{Q}$ . Si  $n$  no es negativo,  $e^{\psi(n)}\mathbb{Z}$  es un ideal de  $\mathbb{Z}$ ; de lo contrario, si  $n$  es negativo,  $e^{\psi(n)}\mathbb{Z}$  es un ideal fraccionario de  $\mathbb{Q}$ . La familia de todos estos subgrupos está totalmente ordenada por inclusión. De hecho, la filtración

$$\{0\} \subset \dots \subset e^{\psi(n)}\mathbb{Z} \subset \dots \subset \mathbb{Z} \subset \dots \subset e^{\psi(m)}\mathbb{Z} \subset \dots \subset \mathbb{Q}, \quad m < 0 < n$$

tiene las propiedades

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} e^{\psi(n)}\mathbb{Z} = \{0\} \quad \text{y} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} e^{\psi(n)}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}.$$

La colección  $\{e^{\psi(n)}\mathbb{Z}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base numerable de vecindades del cero para una topología invariante aditiva 2 -contable sobre  $\mathbb{Q}$ . Dado que  $\mathbb{Q}$  es numerable, la topología en  $\mathbb{Q}$  es generada por una colección numerable de conjuntos abiertos. Esta topología se denomina *topología adélica finita* de  $\mathbb{Q}$ . Por lo tanto, un subconjunto no vacío  $U \subset \mathbb{Q}$  es abierto si es unión de progresiones aritméticas racionales en  $\mathbb{Q}$ , es decir, una unión de conjuntos de la forma  $l\mathbb{Z} + q$ , donde  $l$  y  $q$  son números racionales fijos. Esto implica que un conjunto  $U$  es abierto si y sólo si dado cualquier  $q \in U$  existe un número racional distinto de cero  $l$  tal que  $l\mathbb{Z} + q \subset U$ . Observe que las progresiones aritméticas son tanto abiertas como cerradas puesto que

$$l\mathbb{Z} + q = \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Q}, 0 < j < l} l\mathbb{Z} + q + j.$$

Una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números racionales es un sucesión de Cauchy en la topología adélica finita, si para todo  $k \in \mathbb{Z}$  existe  $N > 0$  tal que, si  $n, m > N$ , entonces

$a_n - a_m \in e^{\psi(k)}\mathbb{Z}$  es decir, si  $e^{\psi(k)}$  divide a  $a_n - a_m$  en el sentido que exista  $c \in \mathbb{Z}$  tal que  $ce^{\psi(k)} = a_n - a_m$ . Por ejemplo, las sucesiones constantes con todos sus elementos iguales a un número racional fijo, son sucesiones de Cauchy. En particular, cuando la constante fija es cero, se dice que la sucesión es cero.

**Ejemplo 1.4.4.** Sea  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de sumas parciales, definida

$$S_n = \sum_{k=\gamma}^n a_k e^{\psi(k)},$$

con  $a_\gamma \neq 0$  y  $a_k \in \{0, 1, \dots, e^{\Lambda(k+1)} - 1\}$ . Note que si  $n \geq m$ , se tiene

$$S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^n a_k e^{\psi(k)},$$

por definición de la función de Chebyshev se tiene  $e^{\psi(m)} | e^{\psi(k)}$  si y sólo si  $k \geq m$ , por lo tanto  $S_n - S_m \in e^{\psi(m)}\mathbb{Z}$ . Lo cual implica que  $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy.

Sea  $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$  el conjunto de todas la sucesiones de Cauchy de números racionales. Con la adición y multiplicación por componentes, se tiene que  $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$  es un anillo conmutativo con unidad, dada por  $\{1\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión constante 1. Sean  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$  se dice que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son equivalentes si  $\{a_n - b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a cero, es decir, para todo  $l \in \mathbb{Z}$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  se tiene

$$a_n - b_n \in e^{\psi(l)}\mathbb{Z}.$$

Una sucesión de Cauchy se dice que es trivial, si esta converge a cero. El conjunto de todas las sucesiones de Cauchy triviales  $\mathcal{C}_0(\mathbb{Q})$ , es un ideal del anillo conmutativo  $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ . La completación  $\overline{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$  es el anillo cociente  $\mathcal{C}(\mathbb{Q})/\mathcal{C}_0(\mathbb{Q})$  con la topología dada por el concepto de convergencia de Cauchy. De esto se deduce que  $\overline{\mathbb{Q}}$  es un espacio topológico completo donde la inclusión natural de  $\mathbb{Q}$  es densa bajo la

topología adélica finita en  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

**1.4.3. Series Adélicas** Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy de números racionales. Si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no es equivalente a cero en  $\overline{\mathbb{Q}}$ , entonces existe un elemento máximo  $\gamma \in \mathbb{Z}$  tal que hay una subsucesión  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $b_n \notin e^{\psi(\gamma)}\mathbb{Z}$ . Dado que  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy, hay otra subsucesión  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $c_n \notin e^{\psi(\gamma)}\mathbb{Z}$  y  $(c_n - c_{n-1}) \in e^{\psi(\gamma)}\mathbb{Z}$ . Por lo tanto existe un único entero  $l_{\gamma-1} \in \{0, 1, \dots, e^{\Lambda(\gamma)} - 1\}$  tal que  $c_n - l_{\gamma-1}e^{\psi(\gamma-1)} \in e^{\psi(\gamma)}\mathbb{Z}$  para todo  $n$ . Una vez más, ya que  $c_n - l_{\gamma}e^{\psi(\gamma-1)}$  es una sucesión de Cauchy, existe una subsucesión  $d_n$  de  $c_n$  tal que

$$(d_n - d_{n-1}) \in e^{\psi(\gamma+1)}\mathbb{Z}.$$

Por eso, existe un único entero  $l_{\gamma}$  tal que  $l_{\gamma} \in \{0, 1, \dots, e^{\Lambda(\gamma+1)} - 1\}$  y

$$d_n - l_{\gamma-1}e^{\psi(\gamma-1)} - l_{\gamma}e^{\psi(\gamma)} \in e^{\psi(\gamma)}\mathbb{Z},$$

para todo  $n$  inductivamente, las sumas parciales

$$\left( \sum_{k=\gamma-1}^{\gamma-1+n} l_k e^{\psi(k)} \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

forma una sucesión que representa a  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Igual que en el caso  $\mathbb{Q}_p$  se tiene que todo elemento  $x \in \overline{\mathbb{Q}}$  diferente de cero, tiene una representación única de la siguiente manera:

$$x = \sum_{k=\gamma}^{\infty} l_k e^{\psi(k)}, \quad \gamma \in \mathbb{Z},$$

con  $l_k \in \{0, 1, \dots, e^{\Lambda(k+1)} - 1\}$ ,  $l_{\gamma} \neq 0$ .

El anillo  $\overline{\mathbb{Q}}$  es llamado el **anillo de los números adélicos finitos**.

Dada la representación de los adeles como series, las operaciones adición y multiplicación de dos adeles finitos es similar al proceso que se hace con los números  $p$ -ádicos. La siguiente proposición muestra como es la adición de dos adeles finitos.

**Proposición 1.4.5.** Sean  $x, y \in \overline{\mathbb{Q}}$  dos adéles finitos con series

$$x = \sum_{k=\gamma_1}^{\infty} a_k e^{\psi(k)}, \quad y = \sum_{k=\gamma_2}^{\infty} b_k e^{\psi(k)}.$$

Si  $\gamma_1 \leq \gamma_2$  entonces los coeficientes  $\{c_k\}_{k=\gamma_1}$  de la representación en serie de la suma

$$z = x + y = \sum_{k=\gamma_1}^{\infty} c_k e^{\psi(k)},$$

están dados por

$$c_k = \begin{cases} a_k, & k < \gamma_2 \\ a_k + b_k + r_{k-1} \pmod{e^{\Lambda(k+1)}}, & k \geq \gamma_2, \end{cases}$$

$r_{k-1}$  es uno o cero, dependiendo de si  $(a_{k-1} + b_{k-1})$  es mayor que  $e^{\Lambda(k)}$  o no.

Sean  $x, y \in \overline{\mathbb{Q}}$  dos adéles finitos con series representativas

$$x = \sum_{k=\gamma}^{\infty} a_k e^{\psi(k)} \quad \text{y} \quad y = \sum_{k=\gamma}^{\infty} b_k e^{\psi(k)}.$$

entonces los coeficientes  $\{c_k\}_{k=\gamma}$  de la representación en serie de la suma

$$z = x - y = \sum_{k=\gamma}^{\infty} c_k e^{\psi(k)},$$

están dados por

$$c_k = \begin{cases} a_k - b_k \pmod{e^{\Lambda(k+1)}}, & a_k \geq b_k \\ e^{\Lambda(k)} + a_k - b_k \pmod{e^{\Lambda(k+1)}}, & a_k < b_k, \end{cases}$$

**Ejemplo 1.4.6.**

$$-1 = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{\Lambda(n+1)} - 1) e^{\psi(n)}.$$

**1.4.4. Una ultramétrica adélica.** Similar al caso  $\mathbb{Q}_p$ , la función  $\text{ord}: \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  dada por

$$\gamma(x) = \text{ord}(x) := \min\{k | a_k \neq 0\},$$

define un orden sobre  $\overline{\mathbb{Q}}$ , en el sentido que satisface las propiedades

1.  $\text{ord}(x) \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  y  $\text{ord}(x) = \infty$  si y sólo si  $x = 0$ .
2.  $\text{ord}(x + y) \geq \min\{\text{ord}(x), \text{ord}(y)\}$ , para todo  $x, y \in \overline{\mathbb{Q}}$ .

Esto permite introducir una métrica sobre  $\overline{\mathbb{Q}}$  dada por

$$d_{\overline{\mathbb{Q}}}(x, y) = e^{-\psi(\text{ord}(x-y))}; \quad x, y \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Por la segunda propiedad de la función  $\text{ord}(\cdot)$  se tiene

$$d_{\overline{\mathbb{Q}}}(x, z) \leq \max\{d_{\overline{\mathbb{Q}}}(x, y), d_{\overline{\mathbb{Q}}}(y, z)\},$$

para todo  $x, y, z \in \overline{\mathbb{Q}}$ . La ultramétrica  $d_{\overline{\mathbb{Q}}}$  toma valores en el conjunto  $\{e^{\psi(n)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  y las bolas centradas en cero con radio distinto de cero son las terminaciones de la filtración original

$$B(0, e^{\psi(n)}) = \left\{ x \in \overline{\mathbb{Q}} : x = \sum_{k=\gamma}^{\infty} a_k e^{\psi(k)}, n \leq \gamma \right\}, n \in \mathbb{Z}.$$

**Definición 1.4.7.** La colección de enteros adélicos finitos  $\widehat{\mathbb{Z}}$  es la bola unitaria de  $\overline{\mathbb{Q}}$ :

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \left\{ x \in \overline{\mathbb{Q}} : x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{\psi(k)} \right\}.$$

De la definición de adición y multiplicación, se deduce que los enteros adélicos finitos  $\widehat{\mathbb{Z}}$  son un subanillo compacto y abierto de  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Además,  $\widehat{\mathbb{Z}}$  contiene el conjunto de números enteros como un subconjunto denso. Desde un punto de vista geométrico, la propiedad no arquimediana muestra que cualquier punto de una bola es su centro y que dos bolas están disjuntas o una está contenida en la otra.

La propiedad no arquimediana se puede describir algebraicamente de la siguiente manera. Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , se define

$$\mathfrak{a}_n = e^{-\psi(n)} \widehat{\mathbb{Z}}.$$

La colección  $\{\mathfrak{a}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forma un sistema fundamental de vecindades del cero para la topología adélica finita en  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Cada subgrupo  $\mathfrak{a}_n$  proporciona una partición disjunta

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{x \in \overline{\mathbb{Q}}/\mathfrak{a}_n} (x + \mathfrak{a}_n),$$

donde la unión se toma sobre un conjunto completo (contable) de representantes del cociente  $\overline{\mathbb{Q}}/\mathfrak{a}_n$ .

Para cada  $n \in \mathbb{Z}$  y  $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ , sea  $B_n(x)$  la bola con centro en  $x$  y radio  $e^{\psi(n)}$ . Por la propiedad no arquimediana, cada elemento de una bola es su centro y toda bola es compacta y abierta. Las bolas  $B_n(x)$  coinciden con los conjuntos  $x + \mathfrak{a}_n$  y la

descomposición anterior se puede escribir como

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{x \in \overline{\mathbb{Q}}/\mathfrak{a}_n} B_n(x),$$

donde la unión se toma sobre un conjunto completo de representantes del cociente  $\overline{\mathbb{Q}}/\mathfrak{a}_n$ . Un conjunto completo de representantes del cociente  $\mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n-1}$  determina la partición

$$\mathfrak{a}_n = \bigcup_{x \in \mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n-1}} (x + \mathfrak{a}_{n-1}),$$

que induce una partición correspondiente

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{\substack{y \in \overline{\mathbb{Q}}/\mathfrak{a}_n \\ x \in \mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n-1}}} (y + x + \mathfrak{a}_{n-1}).$$

Una forma equivalente de describir  $\overline{\mathbb{Q}}$  es la siguiente: la función

$$\gamma(q) = \min\{l : q \in e^{\psi(l)}\mathbb{Z}\}$$

es un orden sobre  $\mathbb{Q}$  y la función

$$d_{\mathbb{Q}}(p, q) = e^{-\psi(\gamma(p-q))},$$

para  $p, q \in \mathbb{Q}$ , es una ultramétrica sobre  $\mathbb{Q}$ . Por construcción, la ultramétrica  $d_{\mathbb{Q}}$  es la restricción de  $d_{\overline{\mathbb{Q}}}$  a  $\mathbb{Q}$  y, por lo tanto, la completación métrica de  $\mathbb{Q}$  con respecto a  $d_{\mathbb{Q}}$  es naturalmente isométrica a  $d_{\overline{\mathbb{Q}}}$ .

Como primera consecuencia de escribir cualquier elemento de  $\overline{\mathbb{Q}}$  como una serie convergente, se muestra el siguiente resultado que caracteriza a los subconjuntos compactos de  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

**Proposición 1.4.8.** El anillo topológico  $\overline{\mathbb{Q}}$  satisface la propiedad de Heine-Borel, es decir, un subconjunto  $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$  es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. Por lo tanto,  $\overline{\mathbb{Q}}$  es un anillo topológico localmente compacto.

*Demostración :* Puesto que  $\overline{\mathbb{Q}}$  es un espacio métrico, es suficiente mostrar que para cualquier conjunto  $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$  cerrado y acotado, es secuencialmente compacto. Sea  $\{x_k\}$  una sucesión acotada en  $\overline{\mathbb{Q}}$ , donde

$$x_k = \sum_{l=\gamma(x_k)}^{\infty} a_k(l)e^{\psi(l)}, \quad a_k(l) \in \{0, 1, \dots, e^{\Lambda(l+1)} - 1\},$$

como  $\{x_k\}$  es acotado, entonces  $\{\gamma(x_k)\}$  también es acotado, sea  $\gamma_0$  el mínimo. Si  $\{\gamma(x_k)\}$  no es acotado superiormente entonces  $\{x_k\}$  tiene una subsucesión convergente a cero. En el caso contrario implicaría que  $\{\gamma(x_k)\}$  es una sucesión con una cantidad finita de números, es decir existe al menos un elemento  $\gamma_i$  que se repite infinitas veces, se construye la subsucesión de los terminos  $x_k$  tal que  $\gamma(x_k) = \gamma_i$ . Note que para todo  $p$  y  $q$  números racionales distintos de cero, se tiene  $p\mathbb{Z} \cdot q\mathbb{Z} = pq\mathbb{Z}$ . Por lo tanto, para cualquier número racional  $l \neq 0$  la preimagen de  $l\mathbb{Z}$  bajo la multiplicación  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  es la unión de todos los  $p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  tales que  $pq = l$ . Dado que esta unión es un conjunto abierto, al completar los números racionales la filtración anterior produce un anillo topológico.

Dado que  $\overline{\mathbb{Q}}$  es un anillo topológico, para cualquier número racional  $q$  distinto de cero, el conjunto  $q\widehat{\mathbb{Z}}$  es un subgrupo compacto y abierto de  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Se puede ver que cualquier subgrupo compacto y abierto de  $\overline{\mathbb{Q}}$  es de la forma  $q\widehat{\mathbb{Z}}$  para algún número racional  $q$  distinto de cero .

**1.4.5. Una medida de Haar sobre números adélicos finitos** Considere la función aditiva  $dx$  sobre las bolas dada por

$$dx(B_n(x)) = dx(\mathfrak{a}_n) := e^{\psi(n)} = \begin{cases} [\mathfrak{a}_n : \widehat{\mathbb{Z}}], & \text{si } n > 0, \\ [\widehat{\mathbb{Z}} : \mathfrak{a}_n], & \text{si } n \leq 0, \end{cases}$$

para cualquier  $x \in \overline{\mathbb{Q}}$  y  $n \in \mathbb{Z}$ . Tanto el conjunto de todas las bolas de radio positivo como el vacío forman un subanillo y la función aditiva  $dx$  es una premedida  $\sigma$ -finita. Por el teorema de extensión de Carathéodory, existe una única medida de Borel en  $\overline{\mathbb{Q}}$ , también denotada por  $dx$ , que extiende esta fórmula. Dado que las bolas son compactas y abiertas, se deduce que  $dx$  es una medida de Radon en  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Además, por construcción,  $dx$  es un invariante aditivo y, por lo tanto, es una medida de Haar en  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Por definición se asigna  $dx(\widehat{\mathbb{Z}}) = 1$ .

**Proposición 1.4.9.** Para cualquier número racional  $q$ , la medida de Haar de  $q\widehat{\mathbb{Z}}$  es igual a  $q^{-1}$ .

*Demostración.* Solo es necesario calcular el índice de los subgrupos  $l\widehat{\mathbb{Z}}$  para cualquier entero natural  $l$ . Primero,  $l\mathbb{Z} \cap e^{\psi(n)}\mathbb{Z} = \text{mcd}(l, e^{\psi(n)})\mathbb{Z} = l\mathbb{Z}$  para  $n$  suficientemente grande. La completación de  $l\mathbb{Z}$  es  $l\widehat{\mathbb{Z}}$  y

$$[\widehat{\mathbb{Z}} : l\widehat{\mathbb{Z}}] = [\mathbb{Z} : l\mathbb{Z}] = l.$$

**1.4.6. Topología no arquimediana del anillo de números adélicos finitos** En resumen,  $\overline{\mathbb{Q}}$  es 2- contable, localmente compacto, totalmente desconexo, anillo topológico conmutativo. Se cumplen las siguientes propiedades

1. La inclusión  $\mathbb{Q} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$  es densa y  $\overline{\mathbb{Q}}$  es un espacio topológico separable.
2.  $\overline{\mathbb{Q}}$  tiene una métrica  $d_{\overline{\mathbb{Q}}}$  no arquimediana tal que  $(\overline{\mathbb{Q}}, d_{\overline{\mathbb{Q}}})$  es un espacio ultramétrico completo y por lo tanto es un espacio topológico totalmente desconexo.

3. Se puede elegir una medida de Haar en  $\overline{\mathbb{Q}}$  de tal manera que el subanillo maximal  $\widehat{\mathbb{Z}}$  compacto y abierto tenga una masa total uno.
4. La ultramétrica  $d_{\overline{\mathbb{Q}}}$  es la única ultramétrica invariante aditiva sobre  $\overline{\mathbb{Q}}$  cuyas bolas centradas en el cero es precisamente el conjunto  $\{\mathfrak{a}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , y tal que la medida de Haar de cualquier bola es igual a su radio. En particular,  $\widehat{\mathbb{Z}}$  tiene radio uno.
5. Para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , si  $x \in B_n(y)$  entonces  $B_n(x) = B_n(y)$ .
6. El conjunto de todas las bolas de cualquier radio fijo positivo forman una partición numerable de  $\overline{\mathbb{Q}}$ .
7. El conjunto de todas las bolas de radio positivo es numerable. Por lo tanto, la topología de  $\overline{\mathbb{Q}}$  es generada por una base numerable y la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\overline{\mathbb{Q}}$  es separable.

La inclusión de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{A}_f$  es densa, así que  $\mathbb{Q}$  tiene una topología única cuya completación  $\overline{\mathbb{Q}}$  es isomorfa como anillo topológico a  $\mathbb{A}_f$ , tal como se establece en el siguiente resultado:

**Proposición 1.4.10.** Existe un isomorfismo de anillos topológicos

$$\overline{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_f,$$

que conserva la inclusión de  $\mathbb{Q}$ .

De la proposición anterior, se sigue que la representación en serie de cualquier adele  $X$  finito es válida en  $\mathbb{A}_f$ . Es decir, las sumas parciales

$$s(x, N) = \sum_{l=\gamma}^N x_l e^{\psi(l)},$$

son convergentes en  $\mathbb{A}_f$ , con la topología de producto directo restringido. Usando la ultramétrica  $d_f$ , todo adele finito  $x \in \mathbb{A}_f$  puede escribirse como una serie

$$x = \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_l e^{\psi(l)}, \quad x_\gamma \neq 0, l \in \mathbb{Z},$$

con  $x_l \in \{0, 1, \dots, e^{\Lambda(l+1)} - 1\}$ . Esta serie es convergente en la ultramétrica de  $\mathbb{A}_f$ , los números  $x_l$  que aparecen en la representación de  $x$  son únicos y  $\text{ord}(x) = \gamma \in \mathbb{Z}$ .

Se identificará  $\overline{\mathbb{Q}}$  con  $\mathbb{A}_f$  y se establece  $d_f(x, y) = d_{\overline{\mathbb{Q}}}(x, y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{A}_f$ .

### 1.5. Caracteres y teoría de integración en $\mathbb{A}_f$

Esta sección introduce el grupo de caracteres aditivos del grupo abeliano localmente compacto  $(\mathbb{A}_f, +)$  junto con algunos elementos básicos de la teoría de integración en  $\mathbb{A}_f$  y algunas integrales oscilatorias. La parte fraccionaria de una serie ádica permite describir explícitamente un carácter canónico de  $\mathbb{A}_f$  y mostrar que el grupo de adeles finitos es un grupo autodual en el sentido de Pontryagin.

**1.5.1. El grupo de caracteres aditivos de  $\mathbb{A}_f$**  Un caracter aditivo del anillo  $\mathbb{A}_f$  es un homomorfismo de grupo continuo  $\chi : \mathbb{A}_f \rightarrow \mathbb{S}^1$ , donde  $\mathbb{S}^1$  es el grupo multiplicativo de números complejos con norma igual a uno. Denote por  $\text{Char}(\mathbb{A}_f)$  el grupo topológico que consta de todos los homomorfismos continuos de  $\mathbb{A}_f$  en  $\mathbb{S}^1$  dotados de la topología compacta y abierta. Este grupo se llama **Pontryagin dual de  $\mathbb{A}_f$**  o, el grupo de caracteres de  $\mathbb{A}_f$ . Dado que  $\mathbb{A}_f$  es localmente compacto,  $\text{Char}(\mathbb{A}_f)$  también es un grupo abeliano localmente compacto.

Todo  $x \in \mathbb{A}_f$  admite una única representación en serie

$$x = \sum_{k=\gamma(x)}^{\infty} a_k e^{\psi(k)}, \quad a_{\gamma(x)} \neq 0, k \in \mathbb{Z},$$

con  $a_k \in \{0, 1, \dots, e^{\Lambda(k+1)} - 1\}$ . Si  $\gamma(x) < 0$ ,  $x$  se puede descomponer como

$$x = \sum_{k=\gamma(x)}^{-1} a_k e^{\psi(k)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{\psi(k)}.$$

Esto lleva a lo siguiente:

**Definición 1.5.1.** La parte fraccionaria de un número adélico  $x \in \mathbb{A}_f$  es

$$\{x\} := \begin{cases} \sum_{k=\gamma(x)}^{-1} a_k e^{\psi(k)}, & \text{si } \gamma(x) < 0, \\ 0, & \text{si } \gamma(x) \geq 0. \end{cases}$$

De esta definición es claro que  $x \in \widehat{\mathbb{Z}}$  si y solo si  $\{x\} = 0$ . Además, para cualquier  $x \in \mathbb{A}_f$  con  $\gamma(x) < 0$ , su parte fraccionaria satisface las desigualdades:

$$e^{\psi(\gamma(x))} \leq \{x\} \leq 1 - e^{\psi(\gamma(x))}.$$

De la Proposición 1.4.5, la función parte fraccionaria satisface la relación

$$\{x + y\} = \{x\} + \{y\} - N, \quad x, y \in \mathbb{A}_f,$$

donde  $N = 0, 1$ . Por lo tanto la función  $x \mapsto \exp(2\pi i \{x\})$  es un homomorfismo bien definido del grupo  $\mathbb{A}_f$  al círculo unitario. Además, es trivial en  $\widehat{\mathbb{Z}}$ , lo cual implica que es una función continua y un caracter de  $\mathbb{A}_f$ . Esta observación permite enunciar la siguiente definición.

**Definición 1.5.2.** La función  $\chi : \mathbb{A}_f \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por

$$\chi(x) = \exp(2\pi i \{x\}),$$

es el carácter aditivo canónico de  $\mathbb{A}_f$ .

Si  $x \in \widehat{\mathbb{Z}}$ ,  $\chi(x) = 1$ ; sin embargo, si  $x \in \mathbb{A}_f \setminus \widehat{\mathbb{Z}}$ ,  $\gamma = \gamma(x) < 0$  y

$$\begin{aligned}\chi(x) &= \exp(2\pi i \{x\}) = \exp\left(2\pi i \sum_{k=\gamma}^{-1} a_k e^{\psi(k)}\right), \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i}{e^{-\psi(\gamma)}} \left(a_\gamma + a_{\gamma+1} e^{\psi(\gamma+1)-\psi(\gamma)} + \dots + a_{-1} e^{\psi(-1)-\psi(\gamma)}\right)\right), \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i l}{e^{-\psi(\gamma)}}\right),\end{aligned}$$

dónde  $l = a_\gamma + a_{\gamma+1} e^{\psi(\gamma+1)-\psi(\gamma)} + \dots + a_{-1} e^{\psi(-1)-\psi(\gamma)}$ , es un número entero menor que  $e^{-\psi(\gamma)}$ . Es decir, la imagen de cualquier elemento  $x \in \mathbb{A}_f$  bajo el carácter canónico es una raíz  $N$ -ésima no trivial de la unidad para algún  $N \in \mathbb{N}$ , siempre que  $x \notin \widehat{\mathbb{Z}}$ . Esto implica que el núcleo del carácter canónico es precisamente  $\widehat{\mathbb{Z}}$ . Como  $\mathbb{A}_f / \widehat{\mathbb{Z}}$  es un grupo discreto, la imagen de  $\mathbb{A}_f$  bajo el carácter canónico es isomorfa al grupo de raíces de la unidad  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  con la topología discreta. Esto se puede resumir como: El núcleo del carácter canónico  $\chi$  es el subgrupo compacto y abierto  $\widehat{\mathbb{Z}}$  de  $\mathbb{A}_f$  y  $\chi$  es constante en las clases laterales de  $\widehat{\mathbb{Z}}$ . Además,  $\chi$  puede factorizarse como una composición

$$\mathbb{A}_f \rightarrow \mathbb{A}_f / \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{S}^1.$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{A}_f / \widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

dónde  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  es el grupo de raíces de unidad con la topología discreta.

**Observación 1.5.3.** El carácter aditivo canónico no depende de la construcción dada aquí y coincide con el carácter aditivo canónico clásico de  $\mathbb{A}_f$ . De hecho, la parte fraccionaria de cualquier  $x \in \mathbb{A}_f$  corresponde al único número racional  $\{x\} \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$  tal que  $x - \{x\} \in \widehat{\mathbb{Z}}$  y existe una descomposición  $\mathbb{A}_f = \mathbb{Q} \cap [0, 1) + \widehat{\mathbb{Z}}$ .

$\mathbb{A}_f$  es **autodual**. Como la multiplicación es continua en el anillo  $\mathbb{A}_f$ , para cualquier  $\xi \in \mathbb{A}_f$ , la función  $\chi_\xi : \mathbb{A}_f \rightarrow \mathbb{S}^1$  definida por

$$\chi_\xi(x) = \chi(\xi x) = \exp(2\pi i \{\chi x\}),$$

es un carácter aditivo de  $\mathbb{A}_f$ . Para cualquier sucesión de adeles  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que converge a  $\xi \in \mathbb{A}_f$ , la secuencia de caracteres  $(\chi_{\xi_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en cada subconjunto compacto de  $\mathbb{A}_f$ . De ello se deduce que  $\text{Char}(\mathbb{A}_f)$  contiene  $\mathbb{A}_f$  como un subgrupo cerrado.

Observe ahora que si  $\chi \in \text{Char}(\mathbb{A}_f)$  es cualquier carácter aditivo no trivial, entonces existe un entero  $n$  tal que  $\chi$  es trivial en  $\mathfrak{a}_n$ , pero no es trivial en  $\mathfrak{a}_{n+1}$ . Esto se puede ver de la siguiente manera: suponga que  $V \subset \mathbb{S}^1$  es una vecindad abierta de la identidad  $1 \in \mathbb{S}^1$  tal que ningún subgrupo no trivial de  $\mathbb{S}^1$  está contenido en  $V$ . Por continuidad de  $\chi$ , la preimagen  $\chi^{-1}(V)$  es un entorno abierto de  $0$  en  $\mathbb{A}_f$ , y por tanto existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $\mathfrak{a}_n \subset \chi^{-1}(V)$ . Siendo  $\chi$  un homomorfismo, esto implica que  $\chi(\mathfrak{a}_n) \subset V$  es un subgrupo de  $\mathbb{S}^1$  y, por lo tanto, debe ser trivial. Dado que  $\chi$  no es trivial, existe un entero mínimo  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $\chi$  es trivial en  $\mathfrak{a}_n$ , pero no es trivial en  $\mathfrak{a}_{n+1}$ . Este número  $n$  se llama rango del carácter  $\chi$ .

**Teorema 1.5.4.** El grupo adeles finito  $\mathbb{A}_f$  es autodual. Es decir, existe un isomorfismo de grupos topológicos abelianos localmente compactos de  $\mathbb{A}_f$  a  $\text{Char}(\mathbb{A}_f)$  dado por  $\xi \mapsto \chi_\xi$ .

*Demostración.* Anteriormente se mostró que  $\chi_\xi$  es un carácter aditivo para cualquier  $\xi \in \mathbb{A}_f$  y que  $\mathbb{A}_f$  es cerrado en  $\text{Char}(\mathbb{A}_f)$ . Sea  $\tilde{\chi}$  un carácter aditivo no trivial sobre  $\mathbb{A}_f$ . Si  $n$  es el rango del carácter  $\tilde{\chi}$ , entonces  $\tilde{\chi}$  induce un carácter no trivial en el grupo cociente  $\mathfrak{a}_{n+1}/\mathfrak{a}_n$ . Dado que  $\chi_{e^{\psi(n)}} = \chi(e^{\psi(n)\cdot})$  es trivial sobre  $\mathfrak{a}_n$  pero no trivial sobre  $\mathfrak{a}_{n+1}$ , el carácter inducido de  $\tilde{\chi}$  en  $\mathfrak{a}_{n+1}/\mathfrak{a}_n$  proporciona un número  $\xi_n \in \{1, \dots, e^{\Lambda(n+1)} - 1\}$  de manera que el adele finito  $\xi_n e^{\psi(n)}$  representa un elemento

distinto de cero sobre  $\mathfrak{a}_{n+1}$  tal que

$$\chi(\xi_n e^{\psi(n)} x) = \chi(e^{\psi(n)} x)^{\xi_n} = \tilde{\chi},$$

donde  $\chi$  es el carácter canónico. Inductivamente, para cualquier  $m \geq n$ , se encuentra una suma finita

$$S_m(\xi) = \sum_{k=n}^m \xi_k e^{\psi(k)}, \quad (\xi_k \in \{0, 1, \dots, e^{\Lambda(k+1)} - 1\}, \xi_n \neq 0),$$

tal que  $\tilde{\chi}(x) = \chi(S_m(\xi)x)$  en  $\mathfrak{a}_m$ . Por lo tanto,

$$\xi = \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k e^{\psi(k)},$$

es un adele finito tal que  $\tilde{\chi}(x) = \chi(\xi x)$ . Finalmente, el emparejamiento  $\mathbb{A}_f \times \text{Char}(\mathbb{A}_f) \rightarrow \mathbb{C}$  dado por  $(x, y) \mapsto \chi_y(x) = \chi(xy)$  muestra el isomorfismo del grupo topológico,  $\text{Char}(\mathbb{A}_f) \cong \mathbb{A}_f$ .

**Definición 1.5.5.** Para cualquier  $q \in \mathbb{Q}$  el **anihilador** del subgrupo  $q\widehat{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{A}_f$ , en  $\text{Char}(\mathbb{A}_f)$ , se define como el subgrupo

$$\text{Ann}(q\widehat{\mathbb{Z}}) = \{\chi \in \text{Char}(\mathbb{A}_f) : \chi(x) = 1, \text{ para todo } x \in q\widehat{\mathbb{Z}}\}.$$

**Proposición 1.5.6.** Para todo  $q \in \mathbb{Q}$ , el annihilador de  $q\widehat{\mathbb{Z}}$  es el subgrupo  $q^{-1}\widehat{\mathbb{Z}}$ .

*Demostración.* Para cualquier número  $q \in \mathbb{Q}$  distinto de cero, si  $\xi \in \widehat{\mathbb{Z}}$  entonces  $\xi q^{-1}\widehat{\mathbb{Z}} \subset \widehat{\mathbb{Z}}$  y por lo tanto  $q^{-1}\widehat{\mathbb{Z}} \subset \text{Ann}(q\widehat{\mathbb{Z}})$ . Ahora si  $\xi \notin q\widehat{\mathbb{Z}}$ , entonces  $q^{-1}\xi \notin \widehat{\mathbb{Z}}$ . Se sigue que  $\chi(q\xi) \neq 1$ .

**Corolario 1.5.7.** El annihilador de  $\mathfrak{a}_n$  es el subgrupo  $\mathfrak{a}_{-n}$ . En particular,  $\text{Ann}(\widehat{\mathbb{Z}}) = \widehat{\mathbb{Z}}$ .

*Demostración.* Sea  $n \in \mathbb{Z}$  y la bola  $\mathfrak{a}_n = e^{-\psi(n)}\widehat{\mathbb{Z}}$ , note que  $e^{-\psi(n)} \in \mathbb{Q}$  entonces

usando la Proposición 1.5.6, se tiene

$$\text{Ann}(\mathfrak{a}_n) = (e^{-\psi(n)})^{-1}\widehat{\mathbb{Z}} = e^{-\psi(-n)}\widehat{\mathbb{Z}} = \mathfrak{a}_{-n}.$$

Por otra parte,  $\text{Ann}(\widehat{\mathbb{Z}}) = \text{Ann}(1\widehat{\mathbb{Z}}) = 1^{-1}\widehat{\mathbb{Z}} = \widehat{\mathbb{Z}}$ .

**Corolario 1.5.8.** Existe un isomorfismo de grupos topológicos

$$\text{Char}(\mathfrak{a}_n) \cong \mathbb{A}_f/\mathfrak{a}_{-n} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

**1.5.2. Teoría de integración en  $\mathbb{A}_f$  y algunas integrales oscilatorias.** Dado que  $(\mathbb{A}_f, +)$  es un grupo topológico localmente compacto, entonces se tiene una medida de Haar,  $dx$ . En esta sección se presentan algunos aspectos de la teoría de la integración en el espacio de medida  $(\mathbb{A}_f, dx)$ . De la ultramétrica  $d_f$  surge un concepto de integral impropia y esto da sentido a algunas integrales oscilatorias sobre  $\mathbb{A}_f$ .

**Fórmula de cambio de variable** De la Proposición 1.4.9, si  $q$  es un número racional distinto de cero, se cumple el siguiente cambio de variables:

$$dx(qx) = q^{-1}dx,$$

entonces para todo  $b \in \mathbb{A}_f$ ,

$$\int_K f(x)dx = q^{-1} \int_{\frac{K-b}{q}} f(qx + b)dx,$$

donde  $K \subset \mathbb{A}_f$  es cualquier subconjunto compacto. En los siguientes ejemplos, se calcula el área de bolas y esferas multiplicada por un número racional. Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , la bola  $B_n$  con centro en cero y radio  $e^{\psi(n)}$  es precisamente el subgrupo  $\mathfrak{a}_n$ .

**Ejemplo 1.5.9.** Si  $q\mathfrak{a}_n = qe^{-\psi(n)}\widehat{\mathbb{Z}}$ , entonces

$$\int_{q\mathfrak{a}_n} dx = q^{-1}e^{\psi(n)} \int_{\widehat{\mathbb{Z}}} dx = q^{-1}e^{\psi(n)}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{Z}$  se denota la esfera de radio  $e^{\psi(n)}$  centrada en cero, por  $\mathfrak{s}_n$ , es decir

$$\mathfrak{s}_n = \mathfrak{a}_n \setminus \mathfrak{a}_{n-1}.$$

**Ejemplo 1.5.10.**

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{s}_n} dx &= \int_{\mathfrak{a}_n \setminus \mathfrak{a}_{n-1}} dx, \\ &= e^{\psi(n)} - e^{\psi(n-1)}, \\ &= e^{\psi(n)}(1 - e^{-\Lambda(n)}). \end{aligned}$$

**Definición 1.5.11.** Una función  $f : \mathbb{A}_f \rightarrow \mathbb{C}$  se dice que es radial si  $f(x) = f(y)$  cuando  $|x|_f = |y|_f$ .

**Ejemplo 1.5.12.** De los ejemplos anteriores, para una función radial se obtiene

$$\int_{\mathbb{A}_f} f(|x|_f) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(e^{\psi(n)}) e^{\psi(n)} (1 - e^{-\Lambda(n)}).$$

**Lema 1.5.13** (Criterio integral). Si  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$  es una función continua no creciente, entonces

$$\int_{\mathbb{A}_f} f(|x|_f) dx < \int_0^{\infty} f(t) dt.$$

*Demostración.* Esto se sigue del criterio integral clásico al observar que el área de

las bolas es igual a su radio:

$$\int_{\mathbb{A}_f} f(|x|_f) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(e^{\psi(n)})(e^{\psi(n)} - e^{\psi(n-1)}) < \int_0^{\infty} f(t) dt.$$

**Integrales impropias vs propias** Si  $f$  es una función integrable sobre  $\mathbb{A}_f$ , entonces

$$\int_{\mathbb{A}_f} f(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{s_n} f(x) dx.$$

Sin embargo, al considerar algunas integrales oscilatorias relacionadas con la ultramétrica  $d_f$  de  $\mathbb{A}_f$  que no son necesariamente funciones integrables, entonces dicha integral es igual al límite condicional

$$\int_{\mathbb{A}_f} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow -\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\gamma=n}^m \int_{s_\gamma} f(x) dx.$$

**Ejemplo 1.5.14.** Para  $\sigma = \text{Re}(s) > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\mathbb{Z}}} |x|_f^{s-1} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(s-1)\psi(n)} e^{\psi(n)} (1 - e^{-\Lambda(n+1)}), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-\Lambda(n+1)}}{e^{s\psi(n)}} < \int_0^1 x^{\sigma-1} dx. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.5.15.**

$$\begin{aligned} - \int_{\hat{\mathbb{Z}}} \log(|x|_f) dx &= - \sum_{n=0}^{\infty} \log(e^{-\psi(n)}) e^{-\psi(n)} (1 - e^{-\Lambda(n+1)}), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi(n) e^{-\psi(n)} (1 - e^{-\Lambda(n+1)}), \\ &< 1. \end{aligned}$$

**1.5.3. Integrales oscilatorias** Sea  $\chi$  el caracter canónico de  $\mathbb{A}_f$

**Ejemplo 1.5.16.** Para  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\int_{\mathfrak{a}_n} \chi(-\xi x) dx = \begin{cases} e^{\psi(n)}, & \text{si } |\xi|_f \leq e^{-\psi(n)}, \\ 0, & \text{si } |\xi|_f > e^{-\psi(n)}. \end{cases}$$

En efecto, si  $|\xi|_f \leq e^{-\psi(n)}$ , entonces  $\chi(-\xi x)$  es un caracter trivial sobre  $\mathfrak{a}_n$ . Por otro lado, si  $|\xi|_f > e^{-\psi(n)}$ ,  $\chi(-\xi x)$  no es trivial en  $\mathfrak{a}_n$  y existe un elemento  $b \in \mathfrak{a}_n$  tal que  $\chi(-\xi b) \neq 1$ . A continuación, a partir de la invariancia de la medida de Haar, se obtiene

$$\int_{\mathfrak{a}_n} \chi(-\xi x) dx = \int_{\mathfrak{a}_n} \chi(-\xi(x+b)) dx = \chi(-\xi b) \int_{\mathfrak{a}_n} \chi(-\xi x) dx.$$

Por lo tanto,  $\int_{\mathfrak{a}_n} \chi(-\xi x) dx = 0$ , y se cumple la fórmula del ejemplo.

Este último ejemplo implica:

**Ejemplo 1.5.17.** Para cualquier  $n \in \mathbb{Z}$ , se cumple lo siguiente

$$\int_{\mathfrak{s}_n} \chi(-\xi x) dx = \begin{cases} e^{\psi(n)} - e^{\psi(n-1)}, & \text{si } |\xi|_f \leq e^{-\psi(n)}, \\ -e^{\psi(n-1)}, & \text{si } |\xi|_f = e^{-\psi(n-1)}, \\ 0, & \text{si } |\xi|_f \geq e^{-\psi(n-2)}. \end{cases}$$

**Ejemplo 1.5.18.** Sea  $f$  una función radial no creciente en  $\mathbb{A}_f$ , es decir,  $f(x) =$

$f(|x|_f)$ . Para  $\xi \in \mathbb{A}_f$  se escribe  $\gamma = \text{ord}(\xi)$ , entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{A}_f} f(x)\chi(-\xi x)dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\mathfrak{s}_n} f(|x|_f)\chi(-\xi x)dx, \\
&= \int_{\mathfrak{a}_\gamma} f(|x|_f)\chi(-\xi x)dx - f(e^{\psi(\gamma)})e^{\psi(\gamma+1)}, \\
&= \sum_{n \leq \gamma} f(e^{\psi(n)})\left(e^{\psi(n)} - e^{\psi(n-1)}\right) - f(e^{\psi(\gamma)})e^{\psi(\gamma+1)}, \\
&= \sum_{n \leq \gamma} e^{\psi(n)}\left(f(e^{\psi(n)}) - f(e^{\psi(n+1)})\right).
\end{aligned}$$

**Ejemplo 1.5.19.** La siguiente integral condicional existe

$$\int_{\mathbb{A}_f} \chi(-\xi x)dx = 0, \text{ con } (\xi \neq 0).$$

**Ejemplo 1.5.20.** Este ejemplo es un análogo adélico finito del núcleo  $p$ -ádico de Riesz. Para  $\text{Re}(s) > 1$  y  $\xi \in \mathbb{A}_f$ , con  $\gamma = \text{ord}(\xi)$ , defina  $R_f(\xi, s)$  mediante la siguiente integral condicional convergente

$$\begin{aligned}
R_f(\xi, s) &= \int_{\mathbb{A}_f} |x|_f^{s-1}\chi(-\xi x)dx, \\
&= \sum_{n \leq \gamma} e^{\psi(n)}\left(e^{(s-1)\psi(n)} - e^{(s-1)\psi(n+1)}\right), \\
&= \sum_{n \leq \gamma} e^{s\psi(n)}\left(1 - e^{(s-1)\Lambda(n+1)}\right), \\
&= \sum_{n=-\gamma}^{\infty} e^{-s\psi(n)}\left(1 - \frac{1}{e^{(s-1)\Lambda(n)}}\right).
\end{aligned}$$

**Ejemplo 1.5.21.** Del anterior ejemplo surge el siguiente análogo adélico finito de la

función Gamma  $p$ -ádica

$$\begin{aligned}\Gamma_f(s) &= \int_{\mathbb{A}_f} |x|_f^{s-1} \chi(x) dx \quad (\operatorname{Re}(s) > 1), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s\psi(n)} \left( 1 - \frac{1}{e^{(s-1)\Lambda(n)}} \right).\end{aligned}$$

**Ejemplo 1.5.22.** Si  $\xi \neq 0$  y  $\gamma = \operatorname{ord}(\xi)$ , se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}_f} \log(|x|_f) \chi(-\xi x) dx &= \sum_{n \leq \gamma} e^{\psi(n)} \left( \log(e^{\psi(n)}) - \log(e^{\psi(n+1)}) \right), \\ &= \sum_{n \leq \gamma} e^{\psi(n)} (\psi(n) - \psi(n+1)), \\ &= - \sum_{n \leq \gamma} e^{\psi(n)} \Lambda(n+1), \\ &= - \sum_{n=-\gamma}^{\infty} e^{-\psi(n)} \Lambda(n).\end{aligned}$$

**Ejemplo 1.5.23.** Si  $\xi \neq 0$  y  $\gamma = \operatorname{ord}(\xi)$ , entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}_f} \frac{\chi(-\xi x)}{|x|_f^2 + M^2} dx &= \sum_{n \leq \gamma} e^{\psi(n)} \left( \frac{1}{e^{2\psi(n)} + M^2} - \frac{1}{e^{2\psi(n+1)} + M^2} \right), \\ &= \sum_{n=-\gamma}^{\infty} e^{-\psi(n)} \left( \frac{1}{e^{-2\psi(n)} + M^2} - \frac{1}{e^{-2\psi(n-1)} + M^2} \right).\end{aligned}$$

**Observación 1.5.24.** En el caso  $p$ -ádico, las integrales de los ejemplos 1.5.22-1.5.23 se resuelven mediante la fórmula para una serie geométrica y usando el criterio de la integral se muestra su convergencia.

## 2. Operadores pseudo-diferenciales

### 2.1. Funciones de Bruhat-Schwartz

Recuerda que  $\mathfrak{a}_l$  denota la bola de radio  $e^{\psi(l)}$  y centro en cero,  $B_l(0) = e^{-\psi(l)}\widehat{\mathbb{Z}}$ . Una función  $\varphi : \mathbb{A}_f \rightarrow \mathbb{C}$  es localmente constante, si para cualquier  $x \in \mathbb{A}_f$  existe un subconjunto abierto  $V_x \subset \mathbb{A}_f$  tal que  $\varphi(x + y) = \varphi(x)$ , para todo  $y \in V_x$ . Si  $\varphi : \mathbb{A}_f \rightarrow \mathbb{C}$  es una función localmente constante, para cualquier  $x \in \mathbb{A}_f$  existe un entero  $l(x) \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\varphi(x + y) = \varphi(x), \text{ para todo } y \in \mathfrak{a}_{l(x)}.$$

**Definición 2.1.1.** El espacio de Bruhat-Schwartz de funciones de prueba adélicas finitas  $\mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  es el espacio de funciones localmente constantes en  $\mathbb{A}_f$  con soporte compacto.

Siendo  $\mathbb{A}_f$  un grupo topológico localmente compacto, 2–contable, totalmente disconexo, la topología más débil en el espacio vectorial  $\mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  es una topología localmente convexa, para la cual es completa. Se describe esta topología en términos de la ultramétrica de  $\mathbb{A}_f$ . Si  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  es diferente de cero, existe un mayor  $l = l(\varphi) \in \mathbb{Z}$  tal que, para todo  $x \in \mathbb{A}_f$ ,

$$\varphi(x + y) = \varphi(x), \text{ para todo } y \in \mathfrak{a}_l.$$

Este número  $l$  se llama el parámetro de constancia de  $\varphi$ . Dados dos enteros  $l \leq k$ , el conjunto de funciones localmente constantes con soporte dentro de la bola compacta  $\mathfrak{a}_k$  y parámetro de constancia  $l$  se denotará por  $\mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f)$ .

Sea  $\mathbf{1}_l(x)$  la función característica (o indicadora) de la bola  $\mathfrak{a}_l$ :

$$\mathbf{1}_l(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathfrak{a}_l, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathfrak{a}_l. \end{cases}$$

**Lema 2.1.2.** El conjunto  $\mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f)$  forma un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{C}$  de dimensión  $e^{\psi(k)}/e^{\psi(l)}$ . Por lo tanto, tiene una topología única que lo convierte en un espacio vectorial topológico sobre  $\mathbb{C}$ .

*Demostración.* De la propiedad no arquimediana de  $\mathbb{A}_f$  se sigue que cualquier  $\varphi \in \mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f)$  se puede escribir como

$$\varphi(x) = \sum_{a \in \mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_l} \varphi(a) \mathbf{1}_l(x - a),$$

donde la suma se toma sobre un conjunto completo de representantes de las clases del cociente  $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_l$ . Dado que  $|\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_l| = e^{\psi(k)}/e^{\psi(l)}$ , se sigue que  $\mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f)$  tiene dimensión finita igual a  $e^{\psi(k)}/e^{\psi(l)}$ .

Note que las siguientes inclusiones continuas son válidas.

$$\mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f) \subset \mathcal{D}_{k'}^{l'}(\mathbb{A}_f) \text{ con } k' \leq k, l \geq l'.$$

Un orden parcial en el conjunto contable de todo par de enteros  $(k, l)$ , con  $l \leq k$ , viene dado por la siguiente relación:  $(k', l') \leq (k, l)$ , si y sólo si  $k' \leq k, l \geq l'$ . La topología de  $\mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  está descrita por el límite inductivo

$$\mathcal{D}(\mathbb{A}_f) = \varinjlim_{\substack{(l,k) \\ l \leq k}} \mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f),$$

que también se puede escribir como los límites inductivos

$$\mathcal{D}^l(\mathbb{A}_f) = \varinjlim_k \mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f) \text{ y } \mathcal{D}(\mathbb{A}_f) = \varinjlim_l \mathcal{D}^l(\mathbb{A}_f).$$

Por lo tanto, una sucesión de funciones  $(\varphi_j)_{j \geq 1}$  converge a  $\varphi$  si existen,  $l, k \in \mathbb{Z}$  tales que  $\varphi_j \in \mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f)$  para  $j$  lo suficientemente grande y  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  en  $\mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f)$ .

**Observación 2.1.3.** Dado que  $\mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  es el límite inductivo de una familia contable de espacios vectoriales de dimensión finita (nucleares)  $\mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_l)$ , es un espacio vectorial topológico localmente convexo completo sobre  $\mathbb{C}$  y un espacio nuclear.

**Observación 2.1.4.** El espacio  $\mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  y su topología sólo depende de la topología totalmente desconexa de  $\mathbb{A}_f$ . De hecho, el espacio de Bruhat-Schwartz del grupo topológico abeliano localmente compacto  $\mathbb{A}_f$  está dado por

$$\mathcal{D}(\mathbb{A}_f) = \varinjlim_{K \subset H} \mathcal{D}(H/K),$$

donde  $K \subset H \subset \mathbb{A}_f$  son subgrupos compactos y abiertos de  $\mathbb{A}_f$  y  $\mathcal{D}(H/K)$  es el espacio de funciones sobre  $\mathbb{A}_f$  con soporte en  $H$  y constante en las clases laterales de  $K$ . Por lo tanto, cualquier filtración cofinal con respecto a la colección de todos los subgrupos compactos y abiertos,  $\{\widehat{q\mathbb{Z}}\}_{q \in \mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{A}_f$  define el mismo espacio  $\mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  con una topología equivalente en él. Al ser un grupo totalmente desconexo, esta topología depende únicamente de la propiedad totalmente desconexa.

**Proposición 2.1.5.** Para cada subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{A}_f$ , sea  $\mathcal{D}(K) \subset \mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  el subespacio de funciones de prueba con soporte en un subconjunto compacto fijo  $K$  y sea  $C(K)$  el espacio de funciones continuas de valores complejos en  $K$ . El espacio  $\mathcal{D}(K)$  es denso en  $C(K)$ , luego  $\mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  es denso en  $L^\rho(\mathbb{A}_f)$  para  $1 \leq \rho < \infty$ . Por lo tanto  $L^\rho(\mathbb{A}_f)$  es separable para  $1 \leq \rho < \infty$ .

*Demostración.* Sea  $\varphi \in C(K)$ . Para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe  $l \in \mathbb{Z}$  tal que  $|\varphi(x) -$

$|\varphi(a) - \varphi_l(a)| < \epsilon$  siempre que  $x \in B_l(a) \cap K$  con  $a \in K$ . Como  $K$  es compacto,  $K$  es la unión de un conjunto disjunto de bolas  $\{B_l^j = B_l(x_j)\}_{j=1}^N$ . Las funciones características de estas bolas  $\mathbf{1}_{B_l^j}(x)$  son elementos en  $\mathcal{C}(K)$  con  $x \in K$ , que satisfacen

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{B_l^j}(x) = 1.$$

La función

$$\varphi_l(x) = \sum_{j=1}^N \varphi(x_j) \mathbf{1}_{B_l^j}(x),$$

es un elemento de  $\mathcal{D}(K)$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - \varphi_l(x)\|_{\mathcal{C}(K)} &= \sup_{x \in K} |\varphi(x) - \varphi_l(x)|, \\ &= \sup_{x \in K} \left| \varphi(x) - \sum_{j=1}^N \varphi(x_j) \mathbf{1}_{B_l^j}(x) \right|, \\ &= \sup_{x \in K} \left| \sum_{j=1}^N (\varphi(x) - \varphi(x_j)) \mathbf{1}_{B_l^j}(x) \right|, \\ &\leq \sup_{x \in K} \sum_{j=1}^N |\varphi(x) - \varphi(x_j)| \mathbf{1}_{B_l^j}(x), \\ &\leq \epsilon \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{B_l^j}(x), \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, dado que la topología de  $\mathbb{A}_f$  es generada por un conjunto numerable de bolas, el espacio de medida  $(\mathbb{A}_f, dx)$  con el  $\sigma$ -álgebra de Borel y todos los espacios de Banach  $L^\rho(\mathbb{A}_f)$ , para  $1 \leq \rho < \infty$ , son separables.

## 2.2. La transformada de Fourier

En esta sección se introduce la transformada de Fourier de una función de Bruhat-Schwartz y se extienden para funciones integrables y funciones cuadrado integrables.

La transformada de Fourier de  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  viene dada por

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{A}_f} \varphi(x)\chi(\xi x)dx, \quad (\xi \in \mathbb{A}_f).$$

Anteriormente ya se calculó la transformada de Fourier de algunas funciones. En particular, se cumple la siguiente afirmación.

**Lema 2.2.1.** La transformada de Fourier de la función característica de la bola unitaria  $\widehat{\mathbb{Z}}$  coincide consigo misma. Además, para cualquier número entero  $l$ ,

$$\mathcal{F}[\mathbf{1}_l(x)](\xi) = e^{\psi(l)}\mathbf{1}_{-l}(\xi).$$

*Demostración.* Sea  $l \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathbf{1}_l(x)] &= \int_{\mathbb{A}_f} \mathbf{1}_l(x)\chi(\xi x)dx, \\ &= \int_{\mathfrak{a}_l} \chi(\xi x)dx, \end{aligned}$$

si  $|\xi|_f \leq e^{-\psi l}$ , entonces  $\int_{\mathfrak{a}_l} \chi(\xi x)dx = e^{\psi(l)}$ , y en caso contrario si  $|\xi|_f > e^{-\psi(l)}$ , se tiene  $\int_{\mathfrak{a}_l} \chi(\xi x)dx = 0$ , por lo tanto

$$\mathcal{F}[\mathbf{1}_l(x)](\xi) = e^{\psi(l)}\mathbf{1}_{-l}(\xi).$$

Note que si  $l = 0$ , entonces  $\mathfrak{a}_l = \widehat{\mathbb{Z}}_f$ .

**Proposición 2.2.2.** La transformada de Fourier es una aplicación lineal de  $\mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f)$  a  $\mathcal{D}_{-l}^{-k}(\mathbb{A}_f)$ .

*Demostración.* Para  $\varphi \in \mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f)$  hay una representación

$$\varphi(x) = \sum_{a \in \mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_l} \varphi(a) \mathbf{1}_l(x - a),$$

donde la suma se toma sobre un conjunto completo de representantes de  $\mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_l$ . Basta tomar sólo funciones características  $\mathbf{1}_l(x - a)$  para  $a \in \mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_l$  fijo. Ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{1}_l(x - a))(\xi) &= \int_{\mathbb{A}_f} \chi(\xi x) \mathbf{1}_l(x - a) dx, \\ &= \int_{\mathbb{A}_f} \chi(\xi(x + a)) \mathbf{1}_l(x) dx, \\ &= \chi(\xi a) \int_{\mathbb{A}_f} \chi(\xi x) \mathbf{1}_l(x) dx, \\ &= \chi(\xi a) e^{\psi(l)} \mathbf{1}_{-l}(\xi). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{F}(\mathbf{1}_l(x - a))$  tiene soporte en  $\mathfrak{a}_{-l}$ . Además, dado que  $a \in \mathfrak{a}_k$ , el carácter  $\chi(\xi x)$  es localmente constante en bolas de radio  $e^{\psi(-k)}$ , es decir, tiene rango al menos  $-k$ . Por lo tanto

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f) \rightarrow \mathcal{D}_{-l}^{-k}(\mathbb{A}_f).$$

**Teorema 2.2.3.** La transformada de Fourier es un isomorfismo lineal continuo del espacio  $\mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  sobre sí mismo y la fórmula de inversión se cumple:

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{A}_f} \chi(\xi x) \widehat{\varphi}(-\xi) d\xi, \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_f)).$$

Además, la igualdad de Parseval-Steklov cumple

$$\int_{\mathbb{A}_f} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = \int_{\mathbb{A}_f} \widehat{\varphi}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(\xi)} d\xi.$$

*Demostración.* Se demostró que  $\mathcal{F}$  es una transformación lineal de  $\mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  en sí mismo.  $\mathcal{F}$  la fórmula de inversión, en efecto. De la Proposición 2.2.2, si  $\varphi \in \mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f)$  entonces  $\widehat{\varphi} \in \mathcal{D}_{-l}^{-k}(\mathbb{A}_f)$ . Así que,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{A}_f} \chi(\xi x) \widehat{\varphi}(-\xi) d\xi &= \int_{\mathfrak{a}_{-l}} \chi(\xi x) \int_{\mathfrak{a}_k} \varphi(-y) \chi(\xi y) dy d\xi, \\ &= \int_{\mathfrak{a}_k} \varphi(-y) \int_{\mathfrak{a}_{-l}} \chi(\xi(x+y)) d\xi dy, \\ &= \int_{\mathfrak{a}_k} \varphi(-y) e^{-\psi(l)} \mathbf{1}_l(x+y) dy, \\ &= \sum_{a \in \mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_l} \varphi(a) \int_{a+\mathfrak{a}_l} e^{-\psi(l)} \mathbf{1}_l(x+y) dy, \\ &= \sum_{a \in \mathfrak{a}_k/\mathfrak{a}_l} \varphi(a) \mathbf{1}_l(x-a), \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Esto muestra que la transformada de Fourier  $\mathcal{F} : \mathcal{D}_k^l(\mathbb{A}_f) \rightarrow \mathcal{D}_{-l}^{-k}(\mathbb{A}_f)$  es un isomorfismo lineal continuo, y por lo tanto  $\mathcal{F}$  es un isomorfismo lineal continuo de  $\mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  sobre sí mismo. De la fórmula de inversión de Fourier y el teorema de Fubini, se sigue la identidad de Parseval-Steklov.

Recuerde que los espacios de Banach  $L^\rho(\mathbb{A}_f)$  son separables para  $1 \leq \rho < \infty$ . La transformada de Fourier de cualquier función integrable se puede definir mediante la misma fórmula y el tratamiento clásico de la teoría de Fourier sobre este espacio se puede hacer como de costumbre. En particular,  $L^2(\mathbb{A}_f)$  es un espacio de Hilbert

separable y se cumple el siguiente enunciado: para  $f \in L^2(\mathbb{A}_f)$ , defina

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{a}_l} \chi(\xi x) f(x) dx,$$

donde el límite está en  $L^2(\mathbb{A}_f)$ . En general, se cumple la siguiente proposición clásica.

**Teorema 2.2.4.** La transformada de Fourier es una transformación unitaria en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{A}_f)$ . La fórmula de inversión de Fourier y la identidad de Parseval-Steklov se mantienen en  $L^2(\mathbb{A}_f)$ .

### 2.3. Operadores pseudo-diferenciales

Para cualquier  $\alpha > 0$ , considere el operador  $D^\alpha : \text{Dom}(D^\alpha) \subset L^2(\mathbb{A}_f) \rightarrow L^2(\mathbb{A}_f)$ , de diferenciación fraccionaria, definido como un operador pseudodiferencial dado por la fórmula

$$D^\alpha f(x) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} [|\xi|_f^\alpha \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[f]],$$

para toda  $f$  en el dominio

$$\text{Dom}(D^\alpha) = \{f \in L^2(\mathbb{A}_f) : |\xi|_f^\alpha \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{A}_f)\}.$$

Puede verse que el operador no acotado  $D^\alpha$ , con dominio  $\text{Dom}(D^\alpha)$ , es un operador autoadjunto positivo que está diagonalizado por la transformada (unitaria) de Fourier. En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{A}_f) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{A}_f) \\ D^\alpha \downarrow & & \downarrow m^\alpha \\ L^2(\mathbb{A}_f) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{A}_f) \end{array} \quad (4)$$

donde  $m^\alpha : L^2(\mathbb{A}_f) \rightarrow L^2(\mathbb{A}_f)$  es el operador de multiplicación dado por  $f(\xi) \mapsto |\xi|_f^\alpha f(\xi)$ , con dominio (denso)

$$\text{Dom}(m^\alpha) = \{f \in L^2(\mathbb{A}_f) : |\xi|_f^\alpha f(\xi) \in L^2(\mathbb{A}_f)\}.$$

**Observación 2.3.1.** El operador  $D^\alpha$  es un análogo adélico finito del operador de Vladimirov en  $\mathbb{Q}_p$ . Ver <sup>6</sup>

**Observación 2.3.2.** Naturalmente, la conmutatividad del diagrama en (4) es la definición misma del operador pseudodiferencial  $D^\alpha$  y varias de sus propiedades pueden traducirse en propiedades del operador multiplicativo  $m^\alpha$ . Por ejemplo, el operador  $D^\alpha$  restringido al dominio denso  $\mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  es un operador esencialmente autoadjunto positivo cuya clausura es  $(D^\alpha, \text{Dom}(D^\alpha))$ .

Los siguientes ejemplos muestran otro tipo de operador.

**Ejemplo 2.3.3.** Sea  $\alpha > 0$ , considere el operador  $A^\alpha : \text{Dom}(A^\alpha) \subset L^2(\mathbb{A}_f) \rightarrow L^2(\mathbb{A}_f)$ , definido como:

$$A^\alpha f(x) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}[\text{máx}\{1, |\xi|_f\}^\alpha \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[f]],$$

para toda  $f$  en el dominio

$$\text{Dom}(A^\alpha) = \{f \in L^2(\mathbb{A}_f) : \text{máx}\{1, |\xi|_f\}^\alpha \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{A}_f)\}.$$

**Observación 2.3.4.** Note que si  $\xi \notin \widehat{\mathbb{Z}}$  es decir  $|\xi|_f > 1$ , entonces  $A^\alpha f(x) = D^\alpha f(x)$ .

**Ejemplo 2.3.5.** Sea  $\alpha > 0$ , considere el operador  $E^\alpha : \text{Dom}(E^\alpha) \subset L^2(\mathbb{A}_f) \rightarrow L^2(\mathbb{A}_f)$ , definido como:

$$E^\alpha f(x) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}[\exp(|\xi|_f^\alpha) \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[f]],$$

para toda  $f$  en el dominio

$$\text{Dom}(E^\alpha) = \{f \in L^2(\mathbb{A}_f) : \exp(|\xi|^\alpha) \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{A}_f)\}.$$

### 3. Ecuaciones pseudodiferenciales

En esta sección se introduce una base para el espacio  $L^2(\mathbb{A}_f)$ , donde  $L^2(\mathbb{A}_f)$  es un espacio de Hilbert separable con el producto interno dado por  $(f, g) = \int_{\mathbb{A}_f} f(x)\overline{g(x)}dx$ .

#### 3.1. Base ortonormal para $L^2(\mathbb{A}_f)$

Recuerde que, para  $n \in \mathbb{Z}$  y  $x \in \mathbb{A}_f$ ,  $B_n(x)$  denota la bola con centro en  $x$  y radio  $e^{\psi(n)}$  y  $\mathfrak{a}_n = B_n(0)$ . Se Denota por

$$\mathbb{A}_f/\mathfrak{a}_n = \{\mathfrak{a}_n - y : y \in \mathbb{A}_f\},$$

el conjunto contable de todas las bolas de radio  $e^{\psi(n)}$  en  $(\mathbb{A}_f, d_f)$  y por  $[y] = \mathfrak{a}_n - y$ , la clase de equivalencia de  $y$  módulo  $\mathfrak{a}_n$ , equivalente a la bola con centro en  $y$  y radio  $e^{\psi(n)}$ .

Para cualquier entero  $n \in \mathbb{Z}$  y  $v = 1, \dots, e^{\Lambda(-n+1)} - 1$ , se define

$$\omega_{n,v}(x) = e^{\psi(n-1)/2} \chi(v e^{\psi(-n)} x) \mathbf{1}_{-n+1}(x),$$

donde,  $\mathbf{1}_{-n+1}$  denota la función característica de la bola  $\mathfrak{a}_{-n+1} \in \mathbb{A}_f/\mathfrak{a}_{-n+1}$ . Claramente,  $\omega_{n,v}(x)$  es un carácter aditivo no trivial sobre  $\mathfrak{a}_{-n+1}$ , trivial sobre  $\mathfrak{a}_{-n}$ , para cualquier  $v = 1, \dots, e^{\Lambda(-n+1)} - 1$ .

Luego, para cualquier entero  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $[y] \in \mathbb{A}_f/\mathfrak{a}_{-n}$ , y  $v \in \{1, \dots, e^{\Lambda(-n+1)} - 1\}$ , se define

$$\begin{aligned} \omega_{n,v,y}(x) &= \omega_{n,v}(x - y), \\ &= e^{\psi(n-1)/2} \chi\left(v e^{\psi(-n)}(x - y)\right) \mathbf{1}_{-n+1}(x - y). \end{aligned}$$

**Proposición 3.1.1.** La colección

$$\{\omega_{n,v,y} : n \in \mathbb{Z}, v = 1, \dots, e^{\Lambda(-n+1)} - 1, [y] \in \mathbb{A}_f/\mathfrak{a}_{-n+1}\},$$

es un subconjunto ortonormal de  $L^2(\mathbb{A}_f)$ .

*Demostración.* Para  $n, m \in \mathbb{Z}$ , sea  $C = C(n, m) = e^{\psi(n-1)/2 + \psi(m-1)/2}$ , así que,

- Si  $n = m$  y  $y_1 = y_2$ , se tiene  $C = e^{\psi(n-1)}$  entonces

$$\begin{aligned} (\omega_{n,v_1,y_1}, \omega_{n,v_2,y_1}) &= e^{\psi(n-1)} \int_{\mathbb{A}_f} \omega_{n,v}(x - y_1) \overline{\omega_{n,v_2}(x - y_1)} dx, \\ &= e^{\psi(n-1)} \int_{\mathfrak{a}_{-n+1}} \chi(e^{\psi(-n)}v_1x) \chi(-e^{\psi(-n)}v_2x) dx, \\ &= e^{\psi(n-1)} \int_{\mathfrak{a}_{-n+1}} \chi((e^{\psi(-n)}v_1 - e^{\psi(-n)}v_2)x) dx. \end{aligned}$$

note que si  $v_1 \neq v_2$ , entonces  $|e^{\psi(-n)}v_1 - e^{\psi(-n)}v_2|_f = e^{\psi(n)} > e^{-\psi(-n+1)}$ , lo cual implica  $(\omega_{n,v_1,y_1}, \omega_{n,v_2,y_1}) = 0$ . Si  $v_1 = v_2$ , entonces  $\chi((v_1 - v_2)e^{\psi(-n)}x) = \chi(0) = 1$ , por lo tanto

$$(\omega_{n,v_1,y_1}, \omega_{n,v_1,y_1}) = e^{\psi(n-1)} e^{\psi(-n+1)} = e^{\psi(n-1)} e^{-\psi(n-1)} = 1.$$

- Si  $n > m$ , entonces  $\mathfrak{a}_{-n+1} \subset \mathfrak{a}_{-m+1}$ , para cualquier  $y_1 \notin B_{-m+1}(y_2)$  implica que  $(\omega_{n,v_1,y_1}, \omega_{m,v_2,y_2}) = 0$ , puesto que  $B_{-n+1}(y_1) \cap B_{-m+1}(y_2) = \emptyset$ . Por lo tanto para

$y_1 \in B_{-m+1}(y_2)$  se tiene

$$\begin{aligned}
(\omega_{n,v_1,y_1}, \omega_{m,v_2,y_2}) &= C \int_{\mathbb{A}_f} \omega_{n,v}(x-y_1) \overline{\omega_{m,v_2}(x-y_2)} dx, \\
&= C \int_{B_{-n+1}(y_1)} \chi(e^{\psi(-n)} v_1(x-y_1)) \chi(-e^{\psi(-m)} v_2(x-y_2)) dx, \\
&= C \int_{\mathfrak{a}_{-n+1}} \chi(e^{\psi(-n)} v_1(x)) \chi(-e^{\psi(-m)} v_2(x-y_2+y_1)) dx, \\
&= C \chi(-v_2 e^{\psi(-m)}(y_1+y_2)) \int_{\mathfrak{a}_{-n+1}} \chi((v_1 e^{\psi(-n)} - v_2 e^{\psi(-m)})x) dx,
\end{aligned}$$

puesto que  $|v_1 e^{\psi(-n)} - v_2 e^{\psi(-m)}|_f = e^{\psi(n)} > e^{\psi(n-1)} = e^{-\psi(-n+1)}$ , se cumple que  $(\omega_{n,v_1,y_1}, \omega_{m,v_2,y_2}) = 0$ .

**Teorema 3.1.2.** Para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , se tiene

$$\|\mathbf{1}_n\|^2 = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ v=1, \dots, e^{\Lambda(-m+1)}-1 \\ [y] \in \mathbb{A}_f / \mathfrak{a}_{-m+1}}} |(\mathbf{1}_n, \omega_{m,v,y})|^2. \quad (5)$$

*Demostración.* Sean  $n, m \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$\|\mathbf{1}_n\|^2 = (\mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n) = \int_{\mathbb{A}_f} \mathbf{1}_n(x) \mathbf{1}_n(x) dx = \int_{\mathfrak{a}_n} dx = e^{\psi(n)}.$$

Si  $y = \mathfrak{a}_{-m+1}$ , eso significa que  $y \in \mathfrak{a}_{-m+1}$ , sea  $k = \min\{n, -m+1\}$ , entonces

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1}_n, \omega_{m,v,y}) &= \int_{\mathbb{A}_f} e^{\psi(m-1)/2} \chi(-v e^{\psi(-m)}(x)) \mathbf{1}_k(x) dx, \\
&= e^{\psi(m-1)/2} \int_{\mathfrak{a}_k} \chi(-v e^{\psi(-m)}(x)) dx.
\end{aligned}$$

- Si  $n = -m + 1$  entonces

$$e^{-\psi(-m+1)} = e^{\psi(m-1)} > e^{\psi(m)} = |-ve^{\psi(-m)}|_f,$$

lo cual implica  $(\mathbf{1}_n, \omega_{m,v,y}) = 0$ .

- Si  $n > -m + 1$ , entonces

$$(\mathbf{1}_n, \omega_{m,v,y}) = e^{\psi(m-1)/2} \int_{\mathfrak{a}_{-m+1}} \chi(-ve^{\psi(-m)}(x)) dx,$$

note que  $|-ve^{\psi(-m)}|_f = e^{\psi(m)} > e^{\psi(m-1)}$ , por lo tanto  $(\mathbf{1}_n, \omega_{m,v,y}) = 0$ .

- Si  $n < -m + 1$ , entonces

$$(\mathbf{1}_n, \omega_{m,v,y}) = e^{\psi(m-1)/2} \int_{\mathfrak{a}_n} \chi(-ve^{\psi(-m)}(x)) dx,$$

puesto que  $|ve^{\psi(-m)}|_f = e^{\psi(m)} < e^{\psi(-n+1)}$  entonces  $e^{\psi(m)} \leq e^{\psi(-n)}$ , así

$$(\mathbf{1}_n, \omega_{m,v,y}) = e^{\psi(m-1)/2} e^{\psi(n)}.$$

En el caso que  $y \neq \mathfrak{a}_{-m+1}$  y  $n < -m + 1$ , entonces  $\mathfrak{a}_{-m+1}(x) \cap \mathfrak{a}_{-m+1}(x-y) = \emptyset$ , lo cual implica  $\mathfrak{a}_n(x) \cap \mathfrak{a}_{-m+1}(x-y) = \emptyset$ . Por lo tanto  $(\mathbf{1}_n, \omega_{m,v,y}) = 0$ . Observe que si  $v_1 \in \{1, \dots, e^{\Lambda(-m+1)} - 1\}$  entonces  $|-v_1 e^{\psi(-m)}|_f = e^{\psi(m)}$ , así  $(\mathbf{1}_n, \omega_{m,v_1,y}) = e^{\psi(m-1)/2} e^{\psi(n)}$ , en consecuencia,

$$\sum_{v \in \{1, \dots, e^{\Lambda(-m+1)} - 1\}} (\mathbf{1}_n, \omega_{m,v,y}) = (e^{\Lambda(-m+1)} - 1) e^{\psi(m-1)/2} e^{\psi(n)},$$

entonces

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ v=1, \dots, e^{\Lambda(-m+1)}-1 \\ [y] \in \mathbb{A}_f / \mathfrak{a}_{-m+1}}} |(\mathbf{1}_n, \omega_{m,v,y})|^2 &= \sum_{m < -n+1} (e^{\Lambda(-m+1)} - 1) e^{\psi(m-1)} e^{2\psi(n)}, \\ &= e^{2\psi(n)} \sum_{m < -n+1} (e^{\Lambda(-m+1)} - 1) e^{\psi(m-1)}. \end{aligned}$$

Si  $m - 1 < 0$ , implica  $m < 0$ , así  $e^{\Lambda(m)} = e^{\Lambda(|m|+1)} = e^{\Lambda(-m+1)}$ . Si  $m - 1 > 0$ , implica  $-m + 1 < 0$ , entonces  $e^{\Lambda(-m+1)} = e^{\Lambda(|-m+1|+1)} = e^{\Lambda(m-1+1)} = e^{\Lambda(m)}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ v=1, \dots, e^{\Lambda(-m+1)}-1 \\ [y] \in \mathbb{A}_f / \mathfrak{a}_{-m+1}}} |(\mathbf{1}_n, \omega_{m,v,y})|^2 &= e^{2\psi(n)} \sum_{m-1 < -n} (e^{\Lambda(m)} - 1) e^{\psi(m-1)}, \\ &= e^{2\psi(n)} \sum_{i < -n} (e^{\Lambda(i+1)} - 1) e^{\psi(i)}, \\ &= e^{2\psi(n)} e^{-\psi(n)} = e^{\psi(n)}. \end{aligned}$$

Dado que una función de prueba es combinación lineal de funciones características entonces se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 3.1.3.** Sea  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$ , entonces

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z} \\ v=1, \dots, e^{\Lambda(-m+1)}-1 \\ [y] \in \mathbb{A}_f / \mathfrak{a}_{-m+1}}} |(\varphi, \omega_{m,v,y})|^2. \quad (6)$$

Dadas las funciones wavelet, con los parametros dados anteriormente, se mostrará que forman una base para  $L^2(\mathbb{A}_f)$ . Para demostrar que el conjunto  $\{\omega_{n,v,y}\}$  es una base, se usará el siguiente teorema,

**Teorema 3.1.4.** Sea  $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$  un conjunto ortonormal en  $\mathcal{H}$  (espacio de Hilbert). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i.  $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ .

- ii. Si  $\xi \in \mathcal{H}$ , entonces la serie de Fourier de  $\xi$ , en relación a  $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in J}$ , converge en  $\mathcal{H}$  para  $\xi$  (y no depende del orden en la suma), o sea,

$$\xi = \sum_{\alpha \in J} (\xi_\alpha, \xi) \xi_\alpha, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

- iii. [Identidad de Parseval] Para todo  $\xi \in \mathcal{H}$  se cumple

$$\|\xi\|^2 = \sum_{\alpha \in J} |(\xi_\alpha, \xi)|^2.$$

**Teorema 3.1.5.** El conjunto

$$\{\omega_{n,v,y} : n \in \mathbb{Z}, v = 1, \dots, e^{\Lambda(-n+1)} - 1, [y] \in \mathbb{A}_f/\mathfrak{a}_{-n+1}\}$$

es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{A}_f)$  que consta de vectores propios del operador  $D^\alpha f(x) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} [|\xi|_f^\alpha \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[f]]$ ,

$$D^\alpha(\omega_{n,v,y})(x) = e^{\alpha\psi(n)} \omega_{n,v,y}(x).$$

*Demostración :* Por la Proposición 3.1.1 se tiene que el conjunto de wavelet  $\{\omega_{n,v,y}\}$  es ortonormal. Puesto que  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_f)$  es denso en  $L^2(\mathbb{A}_f)$  y por el Corolario 3.1.3, dado que las funciones wavelet son invariantes bajo traslación y multiplicación por escalar entonces se cumple la identidad de Parseval, así el conjunto  $\{\omega_{n,v,y}\}$  es una base para  $L^2(\mathbb{A}_f)$ .

Ahora se aplicará el operador pseudodiferencial  $D^\alpha$  a las funciones  $\omega_{n,v,y}$ . Primero,

la transformada de Fourier de  $\omega_{n,v}$  es

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\omega_{n,v})(\xi) &= \int_{\mathbb{A}_f} \chi(x\xi)\omega_{n,v}(x)dx, \\ &= e^{\psi(n-1)/2} \int_{\mathfrak{a}_{-n+1}} \chi(x\xi)\chi\left(ve^{\psi(-n)}x\right)dx, \\ &= e^{\psi(n-1)/2} \int_{\mathfrak{a}_{-n+1}} \chi\left(x\left(\xi + ve^{\psi(-n)}\right)\right)dx,\end{aligned}$$

Si  $\xi \in B_{n-1}^a := B_{n-1}(ae^{\psi(-n)}) = ae^{\psi(-n)} + e^{\psi(-n+1)}\widehat{\mathbb{Z}}$ ,  $a = e^{\Lambda(-n+1)} - v$ , entonces  $|\xi + ve^{\psi(-n)}|_f \leq e^{\psi(n-1)} = e^{-\psi(-n+1)}$ , así

$$\mathcal{F}(\omega_{n,v})(\xi) = e^{\psi(n-1)/2}e^{\psi(-n+1)}\mathbf{1}_{B_{n-1}^a}(\xi) = e^{-\psi(n-1)/2}\mathbf{1}_{B_{n-1}^a}(\xi).$$

Como  $\mathbf{1}_{B_{n-1}^a}(\cdot)$  es la función característica de la bola de centro  $ae^{\psi(-n)}$  y radio  $e^{\psi(n-1)}$ , con  $v \in \{1, \dots, e^{\Lambda(-n+1)} - 1\}$ , se sigue que  $\mathcal{F}(\omega_{n,v})(\xi)$  es una función cuadrado integrable cuadrado con soporte en  $B_{n-1}^a$ . Por lo tanto,  $\omega_{n,v}$  es una función propia de  $D^\alpha$  con valor propio  $e^{\alpha\psi(n)}$ :

$$\begin{aligned}D^\alpha(\omega_{n,v})(x) &= \int_{\mathbb{A}_f} |\xi|_f^\alpha e^{-\frac{\psi(n-1)}{2}} \mathbf{1}_{B_{n-1}^a}(\xi)\chi(-\xi x)d\xi, \\ &= e^{-\frac{\psi(n-1)}{2}} \int_{B_{n-1}^a} |\xi|_f^\alpha \chi(-\xi x)d\xi, \\ &= e^{\alpha\psi(n)}e^{-\frac{\psi(n-1)}{2}} \int_{\mathfrak{a}_{n-1}} \chi(-x(ae^{\psi(-n)} + y))dy, \\ &= e^{\alpha\psi(n)}e^{-\frac{\psi(n-1)}{2}} \chi(-ae^{\psi(-n)}x) \int_{\mathfrak{a}_{n-1}} \chi(-xy)dy, \\ &= e^{\alpha\psi(n)}e^{-\frac{\psi(n-1)}{2}} \chi(ve^{\psi(-n)}x)\mathbf{1}_{-n+1}(x), \\ &= e^{\alpha\psi(n)}\omega_{n,v}(x).\end{aligned}$$

Luego, para cualquier  $[y] \in \mathbb{A}_f/\mathfrak{a}_{-n+1}$ ,

$$\mathcal{F}(\omega_{n,v,y})(\xi) = \chi(\xi y)\mathcal{F}(\omega_{n,v})(\xi),$$

también tiene soporte en  $B_{n-1}^a$ , entonces

$$D^\alpha(\omega_{n,v,y})(x) = e^{\alpha\psi(n)}\omega_{n,v,y}(x).$$

**Corolario 3.1.6.** Para cualquier  $f \in L^2(\mathbb{A}_f)$ , se tiene una única expansión en serie de Fourier:

$$f(x) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ v=1, \dots, e^{\lambda(-n+1)}-1 \\ [y] \in \mathbb{A}_f/\mathfrak{a}_{-n+1}}} f_{n,v,y} \omega_{n,v,y}(x) \text{ en } L^2(\mathbb{A}_f) \quad (7)$$

donde, los coeficientes de Fourier están dados por

$$f_{n,v,y} = \int_{\mathbb{A}_f} f(x) \overline{\omega_{n,v,y}(x)} dx, \quad (8)$$

y satisface

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ v=1, \dots, e^{\lambda(-n+1)}-1 \\ [y] \in \mathbb{A}_f/\mathfrak{a}_{-n+1}}} |f_{n,v,y}|^2 < +\infty$$

Además, si una serie  $\sum a_{n,v,y} \omega_{n,v,y}(x)$ , como en la ecuación 8 converge en  $L^2(\mathbb{A}_f)$  a una función  $f$ , entonces  $a_{n,v,y} = \int_{\mathbb{A}_f} f(x) \overline{\omega_{n,v,y}(x)} dx$ .

**Corolario 3.1.7.** Si  $f \in L^2(\mathbb{A}_f)$  viene dada por el desarrollo de la serie de Fourier en 8, cuyos coeficientes de Fourier se definen en la misma ecuación y pertenece al dominio del operador  $D^\alpha$ , entonces  $D^\alpha(f)$  se puede calcular término a término y viene dado por

$$D^\alpha(f) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ v \in \{1, \dots, e^{\lambda(-n+1)}-1\} \\ [y] \in \mathbb{A}_f/\mathfrak{a}_{-n+1}}} e^{\alpha\psi(n)} f_{n,v,y} \omega_{n,v,y}(x),$$

donde la serie es convergente en  $f \in L^2(\mathbb{A}_f)$ , es decir

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ v \in \{1, \dots, e^{\lambda(-n+1)} - 1\} \\ [y] \in \mathbb{A}_f / \mathfrak{a}_{-n+1}}} e^{2\alpha\psi(n)} |f_{n,v,y}|^2 < +\infty.$$

### 3.2. El problema de Cauchy para una ecuación pseudodiferencial de tipo ondulatorio

El objetivo de esta sección es aplicar el trabajo presentado en las secciones anteriores, resolviendo el problema de Cauchy para una ecuación pseudodiferencial de tipo onda no homogénea en el anillo de adeles finitos. Para resolver el siguiente problema de Cauchy para una ecuación pseudodiferencial de tipo onda no homogénea

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + D_x^\alpha u(x, t) = F(x, t) \quad x \in \mathbb{A}_f, t \in [0, T]$$

con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$u_t(x, 0) = g(x),$$

donde  $T$  es un número real positivo y  $F(x, t), f(x), g(x)$  son funciones de valor complejo que satisfacen algunas condiciones adecuadas. Aquí  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$  denota la derivada clásica con respecto a la variable real  $t$  de  $u(x, t)$ , y  $D_x^\alpha u(x, t)$  representa la derivada fraccionaria adélica finita de orden  $\alpha > 0$  con respecto a la variable adélica finita  $x$  de  $u(x, t)$ . Se comienza por el estudio de una ecuación pseudodiferencial de tipo onda homogénea en la siguiente proposición.

**Teorema 3.2.1.** Sean  $f \in \text{Dom}(D^\alpha)$  y  $g \in \text{Dom}(D^{\alpha/2})$ , entonces para la ecuación

homogénea de tipo onda

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + D_x^\alpha u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{A}_f, t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \end{cases}$$

hay una solución  $u(x,t) \in \mathcal{U} = C([0,T]; \text{Dom}(D^\alpha)) \cap C^2([0,T]; L^2(\mathbb{A}_f))$  dada por una expansión en serie de Fourier sobre la base wavelet. Es decir,

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ v \in \{1, \dots, e^{\lambda(-n+1)} - 1\} \\ [y] \in \mathbb{A}_f / a_{-n+1}}} u_{n,v,y}(t) \omega_{n,v,y}(x). \quad (9)$$

*Demostración.* Como  $f \in \text{Dom}(D^\alpha)$  y  $g \in \text{Dom}(D^{\alpha/2})$ , por los Corolarios, 3.1.6 y 3.1.7, se tiene

$$\begin{cases} f(x) = \sum f_{n,v,y} \omega_{n,v,y}(x) \text{ en } L^2(\mathbb{A}_f) \text{ con} \\ f_{n,v,y} = \int_{\mathbb{A}_f} f(x) \overline{\omega_{n,v,y}(x)} dx \text{ y } \sum |f_{n,v,y}|^2 < +\infty, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} (D^\alpha f)(x) = \sum e^{\alpha\psi(n)} f_{n,v,y} \omega_{n,v,y}(x) \text{ in } L^2(\mathbb{A}_f) \text{ con} \\ \sum e^{2\alpha\psi(n)} |f_{n,v,y}|^2 < +\infty, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} g(x) = \sum g_{n,v,y} \omega_{n,v,y}(x) \text{ en } L^2(\mathbb{A}_f) \text{ con} \\ g_{n,v,y} = \int_{\mathbb{A}_f} g(x) \overline{\omega_{n,v,y}(x)} dx \text{ y } \sum |g_{n,v,y}|^2 < +\infty, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} (D^{\frac{\alpha}{2}} g)(x) = \sum e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} g_{n,v,y} \omega_{n,v,y}(x) \text{ en } L^2(\mathbb{A}_f) \text{ y} \\ \sum e^{\alpha\psi(n)} |g_{n,v,y}|^2 < +\infty. \end{cases} \quad (13)$$

En primer lugar, sea  $u \in \mathcal{U}$  que satisfaga el problema de Cauchy planteado en el Teorema 3.2.1. Si  $u$  está representada por la expansión de la serie de Fourier 3.2.4, la expansión de la serie de Fourier de  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$  y  $D_x^\alpha u(x,t)$  se puede calcular término por término para obtener

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \sum (u_{n,v,y})''(t) \omega_{n,v,y}(x), \quad (14)$$

$$(D_x^\alpha u)(x, t) = \sum e^{\alpha\psi(n)} u_{n,v,y}(t) \omega_{n,v,y}(x). \quad (15)$$

Sustituyendo estas igualdades en la ecuación pseudodiferencial e identificando el coeficiente de  $\omega_{n,v,y}(x)$ , se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$(u_{n,v,y})''(t) + e^{\alpha\psi(n)} u'_{n,v,y}(t) = 0$$

para cada  $(n, v, y)$ . Para todo  $(n, v, y)$ , esta ecuación tiene una solución de la forma

$$u_{n,v,y}(t) = A_{n,v,y} \cos\left(e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t\right) + B_{n,v,y} \sin\left(e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t\right),$$

con  $A_{n,v,y}, B_{n,v,y}$  números complejos. Luego, usando las condiciones iniciales y las ecuaciones, (10) y (12), se tiene

$$A_{n,v,y} = f_{n,v,y} \text{ y } B_{n,v,y} = e^{-\frac{\alpha\psi(n)}{2}} g_{n,v,y}.$$

Finalmente, el desarrollo de la serie de Fourier por (9) tiene la forma

$$u(x, t) = \sum \left( f_{n,v,y} \cos\left(e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t\right) + e^{-\frac{\alpha\psi(n)}{2}} g_{n,v,y} \sin\left(e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t\right) \right) \omega_{n,v,y}(x). \quad (16)$$

Por otro lado, la función  $u(x, t)$  dada por el desarrollo en serie de Fourier en (16) es la solución del problema de Cauchy del Teorema de la introducción. De hecho, en este caso  $u(x, t)$  satisface:

a)

$$u \in \mathcal{U} = C([0, T]; \text{Dom}(D^\alpha)) \cap C^2([0, T]; L^2(\mathbb{A}_f)).$$

Primero, observe que  $\left| \sin\left(e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t\right) \right| \leq e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \leq e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} T$ , para cualquier  $t \in$

$[0, T]$ . A continuación, por las ecuaciones (10) y (12), la serie de Fourier en (16) converge en  $L^2(\mathbb{A}_f)$  en  $x$ , uniformemente en  $t \in [0, T]$ , porque

$$\begin{aligned} \sum |u_{n,v,y}(t)|^2 &\leq 2 \sum \left( |f_{n,v,y}|^2 + \left( e^{-\frac{\alpha\psi(n)}{2}} |g_{n,v,y}| \left| \sin \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \right) \right| \right)^2 \right), \\ &\leq 2 \sum \left( |f_{n,v,y}|^2 + T^2 |g_{n,v,y}|^2 \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma en (16) representa una función continua  $u(x, t)$  en  $x, t$ . Además, por (10) y (12),  $u \in C([0, T]; \text{Dom}(D^\alpha))$ ; y

$$\begin{aligned} (D_x^\alpha u)(x, t) &= \sum \left( e^{\alpha\psi(n)} f_{n,v,y} \cos \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \right) \right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} g_{n,v,y} \sin \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \right) \right) \omega_{n,v,y}(x). \end{aligned}$$

b)

$$u \in C^2([0, T]; L^2(\mathbb{A}_f)).$$

En primer lugar,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum \left[ -e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} f_{n,v,y} \sin \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \right) + g_{n,v,y} \cos \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \right) \right] \omega_{n,v,y}(x),$$

porque

$$\begin{aligned} &\sum \left[ -e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} f_{n,v,y} \sin \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \right) + g_{n,v,y} \cos \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \right) \right]^2 \\ &\leq \sum 2 \left( e^{2\alpha\psi(n)} T^2 |f_{n,v,y}|^2 + |g_{n,v,y}|^2 \right) < +\infty \end{aligned}$$

por las ecuaciones (10) y (12), y el lado derecho de  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$  converge en  $L^2(\mathbb{A}_f)$  uniformemente en  $t \in [0, T]$ . Además,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \sum \left[ -e^{\alpha\psi(n)} f_{n,v,y} \cos \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \right) \right. \\ &\quad \left. - e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} g_{n,v,y} \sin \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \right) \right] \omega_{n,v,y}(x) \end{aligned}$$

converge en  $L^2(\mathbb{A}_f)$  uniformemente en  $t \in [0, T]$ , ya que

$$\begin{aligned} & \sum \left[ -e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} f_{n,v,y} \cos \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \right) + g_{n,v,y} \sin \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \right) \right]^2 \\ & \leq \sum 2 \left( e^{2\alpha\psi(n)} |f_{n,v,y}|^2 + e^{\alpha\psi(n)} |g_{n,v,y}|^2 \right) < +\infty. \end{aligned}$$

c) Para concluir, de a) y b),  $u(x, t)$  satisface la ecuación pseudodiferencial de tipo onda homogénea y  $u \in \mathcal{U}$ . Claramente, la solución (9) satisface los valores iniciales requeridos.

**Teorema 3.2.2.** Sean  $f, g$  funciones cuadrado integrables en  $\mathbb{A}_f$  tal que  $f \in \text{Dom}(D^\alpha)$  y  $g \in \text{Dom}(D^{\alpha/2})$ , y sea  $F(x, t) \in C([0, T] : \text{Dom}(D^{\alpha/2}))$  entonces, para la ecuación pseudodiferencial de tipo de onda no homogénea

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + D_x^\alpha u(x, t) = F(x, t), & x \in \mathbb{A}_f, t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \end{cases}$$

existe una solución  $u(x, t) \in C([0, T]; \text{Dom}(D^\alpha)) \cap C^2([0, T]; L^2(\mathbb{A}_f))$  dada por una expansión en serie de Fourier sobre la base de wavelet. Es decir,

$$u(x, t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ v \in \{1, \dots, e^{\lambda(-n+1)} - 1\} \\ [y] \in \mathbb{A}_f / a^{-n+1}}} u_{n,v,y}(t) \omega_{n,v,y}(x).$$

*Demostración.* Similar al Teorema 3.2.1, dado  $F(x, t) \in C([0, T] : \text{Dom}(D^{\alpha/2}))$ , el principio de Duhamel da

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum \left( f_{n,v,y} \cos \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \right) + e^{-\frac{\alpha\psi(n)}{2}} g_{n,v,y} \sin \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} t \right) \right. \\ & \left. + e^{-\frac{\alpha\psi(n)}{2}} \int_0^t F_{n,v,y}(\tau) \sin \left( e^{\frac{\alpha\psi(n)}{2}} (t - \tau) \right) d\tau \right) \omega_{n,v,y}(x), \end{aligned}$$

donde

$$F_{n,v,y}(t) = \int_{\mathbb{A}_f} F(x, t) \overline{\omega_{n,v,y}(x)} dx.$$

Con base al Ejemplo 2.3.3, se tienen

**Corolario 3.2.3.** Si  $|\xi|_f < 1$ , es suficiente que  $f, g \in L^2(\mathbb{A}_f)$  para que la ecuación homogénea de tipo onda

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + A_x^\alpha u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{A}_f, t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \end{cases}$$

tenga solución  $u(x,t) \in \mathcal{U} = C([0,T]; L^2(\mathbb{A}_f)) \cap C^2([0,T]; L^2(\mathbb{A}_f))$  dada por una expansión en serie de Fourier sobre la base wavelet. Es decir,

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ v \in \{1, \dots, e^{\lambda(-n+1)} - 1\} \\ [y] \in \mathbb{A}_f / \mathfrak{a}_{-n+1}}} (f_{n,v,y} \cos t + g_{n,v,y} \sin t) \omega_{n,v,y}(x). \quad (17)$$

**Corolario 3.2.4.** Sean  $f \in \text{Dom}(E^\alpha)$  y  $g \in \text{Dom}(E^{\alpha/2})$ , entonces para la ecuación homogénea de tipo onda

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + E_x^\alpha u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{A}_f, t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \end{cases}$$

hay una solución  $u(x,t) \in \mathcal{U} = C([0,T]; \text{Dom}(E^\alpha)) \cap C^2([0,T]; L^2(\mathbb{A}_f))$  dada por una expansión en serie de Fourier sobre la base wavelet. Es decir,

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ v \in \{1, \dots, e^{\lambda(-n+1)} - 1\} \\ [y] \in \mathbb{A}_f / \mathfrak{a}_{-n+1}}} f_{n,v,y} \cos \left( \exp \left( \frac{e^{\alpha\psi(n)}}{2} \right) t \right) \omega_{n,v,y}(x) + \\ \exp \left( \frac{-e^{\alpha\psi(n)}}{2} \right) g_{n,v,y} \sin \left( \exp \left( \frac{e^{\alpha\psi(n)}}{2} \right) t \right) \omega_{n,v,y}(x).$$

## BIBLIOGRAFÍA

- Aguilar-Arteaga, Victor A, Manuel Cruz-López y Samuel Estala-Arias. “Non-Archimedean analysis and a wave-type pseudodifferential equation on finite adèles”. En: *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications* 11.3 (2020), págs. 1139-1181 (vid. págs. 9, 10, 12, 17).
- Albeverio, Sergio y VM Shelkovich. *Theory of p-adic distributions: linear and nonlinear models*. 370. Cambridge University Press, 2010 (vid. pág. 10).
- Deitmar, Anton y Siegfried Echterhoff. *Principles of harmonic analysis*. Springer, 2014 (vid. pág. 10).
- Khrennikov, Andrei Yu, Sergei V Kozyrev y Wilson A Zúñiga-Galindo. *Ultrametric pseudodifferential equations and applications*. Vol. 168. Cambridge University Press, 2018 (vid. pág. 10).
- Kochubei, Anatoly. *Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedean fields*. Vol. 244. CRC Press, 2001 (vid. pág. 10).
- Vladimirov, Vasiliĭ Sergeevich, Igor Vasilievich Volovich y Evgenii Igorevich Zelenov. *p-adic Analysis and Mathematical Physics*. World Scientific, 1994 (vid. págs. 10, 12, 49).
- Zúñiga-Galindo, WA. “Parabolic equations and Markov processes over p-adic fields”. En: (2006) (vid. pág. 10).
- Zúñiga-Galindo, Wilson A. *Pseudodifferential equations over non-Archimedean spaces*. Vol. 2174. Springer, 2016 (vid. pág. 10).