SOBRE EL SEMIGRUPO DE ELLIS EN ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS Y NUMERABLES

ANDRÉS ENRIQUE QUINTERO SANTANDER

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

SOBRE EL SEMIGRUPO DE ELLIS EN ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS Y NUMERABLES

ANDRÉS ENRIQUE QUINTERO SANTANDER

Trabajo para optar por el título de Magister en Matemáticas

Director:
Ph.D. CARLOS ENRIQUE UZCÁTEGUI AYLWIN

Doctor en Ciencias de las Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

Índice general

RESUMEN

Título: Sobre el semigrupo de Ellis en espacios métricos compactos y numerables *

Autor: Andrés Enrique Quintero Santander**

Palabras clave: Sistemas dinámicos discretos, Semigrupo de Ellis, Espacio métrico compacto y numerable, p-iteradas, puntos p-límite.

Descripción:

El semigrupo de Ellis ($E(X, f)$) es un semigrupo topológico compacto asociado a todo sistema dinámico (X, f). Es mayormente utilizado para estudiar el concepto de **caos**. En la literatura hay 3 preguntas clásicas asociadas a este semigrupo y sobre las cuales planteamos este trabajo de investigación, las preguntas son:

1. ¿Cuál es la cardinalidad del semigrupo $E(X, f)$?

2. ¿Bajo qué hipótesis es $E(X, f)$ un grupo?

3. ¿Qué condiciones son necesarias y suficientes para que $E(X, f)$ contenga solo funciones continuas?

Particularmente decidimos considerar el caso de un sistema dinámico con X compacto métrico numerable para poder atacar estas preguntas de manera más efectiva. Dado que tratamos con preguntas clásicas, se decidió revisar los argumentos detrás de las pruebas clásicas en el campo. También estudiamos teoremas clásicos de maneras alternativas como por ejemplo: considere X un espacio compacto métrico y numerable y $f : X \to X$ un homeomorfismo. Mostramos que el sistema dinámico (X, f) es distal si, y solo si, todo punto es periódico. Usamos este resultado para dar una prueba más simple de un Teorema de Ellis que dice que (X, f) es distal si, y solo si, el semigrupo de Ellis $E(X, f)$ es un grupo.

* Trabajo de investigación.

** Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Director: PhD. Carlos Enrique Uzcátegui.

ABSTRACT

Título: On the Ellis Semigroup on compact metric countable spaces [**]

Author: Andrés Enrique Quintero Santander[***]

Keywords: Discrete dynamical system, Ellis semigroup, Compact metric countable space, p-iterates, p-limit points.

Description:
The Ellis semigrupo $(E(X, f))$ is a topological compact semigroup associated to a dynamical system (X, f). It is mostly applied in the study of the concept of **chaos**. On the main research about it, there exists 3 classic questions about this semigroup, these questions are the following:

1. Which is the cardinality of the semigroup $E(X, f)$?

2. Under what hyphothesis $E(X, f)$ is a group?

3. What are some enough and sufficient conditions to $E(X, f)$ being composed only of continuous functions?

In particular, we decided to study the case of a dynamical system with X compact metric and countable to attack these questions on a more effective way. Given that we try classical questions we have decided to check the arguments behind classical proofs of theorems in the field. Also we study classical theorems in alternative ways for example: let X be a compact metric countable space and $f : X \to X$ be an homeomorphism. We show that the dynamical system (X, f) is distal if, and only if, every point is periodic. We use this result to give a simpler proof of a theorem of Ellis saying that (X, f) is distal if, and only if, the Ellis semigroup $E(X, f)$ is a group.

[**]Research work.

[***]Faculty of Sciences, School of Matehmatics, PhD. Carlos Enrique Uzcátegui.

Introducción

Un sistema dinámico es un par (X, f) donde X es un espacio topológico compacto y $f : X \to X$ es una función continua. A tales sistemas se les asocia el semigrupo de Ellis, definido como:

$$E(X, f) = \overline{\{f^n : n \in \mathbb{N}\}} \text{ en el espacio producto } X^X.$$

Este semigrupo fue introducido por Ellis en 1960 [2] y desde entonces ha sido estudiado con mucha atención (ver por ejemplo el artículo de revisión de E. Glasner [7]). Dentro de este trabajo nos centraremos en tres tópicos generales. Estos tres temas podemos entenderlos como tres preguntas sobre los sistemas dinámicos que enumeraremos a continuación:

1. ¿Cuál es la cardinalidad del semigrupo de Ellis? y ¿qué importancia tiene esta?
2. ¿Cuándo el semigrupo $E(X, f)$ es en realidad un grupo con la composición como operación binaria?
3. ¿Qué condiciones son necesarias y suficientes para que el semigrupo de Ellis contenga solo funciones continuas?

Nuestra intención fue entonces la de trabajar sobre al menos un aspecto relacionado a cada una de estas preguntas. Particularmente estamos interesados en estudiar propiedades de $E(X, f)$ en el caso específico de los espacios métricos compactos numerables. Como queremos abordar estos tres interrogantes, el orden de este escrito respetará el orden en el que planteamos las preguntas.

En primera instancia nos centramos en la cardinalidad del semigrupo de Ellis. Un aspecto relevante relacionado con la cardinalidad del semigrupo es conocido como: "la dicotomía BFT", más particularmente, la versión dinámica de esta. Este resultado es bastante interesante, puesto que vincula la cardinalidad del semigrupo con su topología. Más particularmente, este teorema afirma que el semigrupo de Ellis es un compacto de Rosenthal si y solo si su cardinalidad es a lo sumo la de la recta. Por tal razón y también considerando que no es para nada trivial la prueba de este teorema, decidimos dedicarle una sección del capítulo 3 a la prueba de este resultado, siendo nuestro objetivo presentar dicho resultado. Además de la dicotomía BFT, en el capítulo 3 presentamos algunos resultados relacionados a la cardinalidad de X que hacen parte del artículo [5]. Dentro de estos resultados contamos con uno que nos dice qué condiciones son necesarias y suficientes sobre las órbitas de cada punto en un sistema dinámico (X, f) para que el semigrupo $E(X, f)$ sea finito. Otro resultado relevante que encontramos en el trabajo de [5] afirma que sobre un sistema (X, f) con X numerable, si se tiene que el conjunto de periodos posibles es infinito, entonces el semigrupo $E(X, f)$ es homeomorfo al espacio de Cantor.

En relación con el segundo problema, Ellis en la década de los 80 probó para todo sistema dinámico que el semigrupo $E(X,f)$ es un grupo si y solamente si (X,f) es un sistema dinámico distal. Esto quiere decir básicamente que $E(X,f)$ es grupo si y solo si todas las funciones que contiene son inyectivas. Esta respuesta en si misma causa interrogantes, interrogantes que nos dedicamos a resolver a lo largo del capítulo 4. Estas dudas surgieron antes y después de estudiar la prueba de este resultado (que por demás hace parte de lo que logramos hacer en este trabajo, dada su complejidad); una duda que nos asaltó es: ¿cómo prueban que de la inyectividad de todas las funciones del semigrupo se deduce inmediatamente que todas las funciones son biyecciones?, esto lo resolvimos estudiando con cuidado cada detalle de la demostración. Mientras estudiábamos los sistemas distales nos dimos cuenta a su vez que para X numerable solo lográbamos que el sistema fuera distal si todo punto en X era periódico. Por tanto uno de nuestros aportes fue la comprobación de que esa conjetura era verdadera.

Este teorema de nuestra autoría nos abrió varias posibilidades puesto que simplificaba bastante los sistemas distales numerables. Por ejemplo: nos ayudó a desarrollar una prueba nueva de que distal es equivalente a que $E(X,f)$ es grupo (para el caso numerable). Dicha prueba usa argumentos mucho más sencillos que la de Ellis y además con ella logramos también clarificar quién es la inversa de cada función h en $E(X,f)$ (algo con lo que no contábamos con la prueba clásica). También logramos probar que si (X,f) es un sistema dinámico con X numerable, la condición de distalidad es equivalente a que $E(X,f)$ sea un grupo abeliano.

El último problema que abordamos consiste en decidir cuándo las funciones de $E(X,f)$ son todas continuas. Este fenómeno estudiado por Szuca y García *et al.* (ver [7]), forma parte de una clase importante de sistemas dinámicos conocida por la siglas WAP. Del trabajo de P. Szuca [11] se tiene el siguiente teorema sobre estos sistemas: Si una función $h \in E([0,1],f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es continua, entonces todas las funciones del semigrupo son continuas. Un resultado análogo fue probado para algunos sistemas dinámicos sobre espacios métricos compactos y numerables en [3, 6]. Este resultado afirma que si (X,f) es un sistema dinámico con X numerable, tal que todo punto límite es periódico basta con que exista $h \in E(X,f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ continua para que el sistema sea WAP. Mostraremos que los sistemas distales numerables son WAP, este hecho no se cumple en general para espacios métricos no numerables (ver Ejemplo 4.4 [7]).

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1. SOBRE TOPOLOGÍAS

En esta sección recordamos algunos conceptos de topología que consideramos necesarios para el desarrollo de nuestros aportes a la temática. Dentro de ellos encontramos: la topología producto y el hiperespacio de Vietoris, también introducimos el concepto de **rango de Cantor-Bendixson** que no es tan ampliamente conocido, pero que para lo que pretendemos mostrar se torna indispensable. Por último introducimos algunos teoremas, entre ellos varios conocidos sobre estos conceptos y damos la respectiva prueba de los mismos.

Definición 1.1. *Sea* $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ *una familia de espacios topológicos. La función proyección para un* $i_0 \in I$ *es:*

$$\pi_{i_0} : \prod_{i \in I} X_i \to X_{i_0}$$

$$(x_i)_{i \in I} \mapsto x_{i_0}.$$

Definición 1.2. *Sea* $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ *una familia de espacios topológicos, la topología producto* τ_p *sobre el espacio* $X = \prod_{i \in I} X_i$ *es la topología generada por la subbase:*

$$S = \left\{\pi_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \in \tau_i\right\}.$$

Observación. *Si* (X, d) *es un espacio métrico también podemos considerar el espacio producto* X^X. *De la definición anterior de la topología producto podemos deducir que una vecindad abierta básica de* h *en* X^X *es un conjunto de la forma* $U_h(x_1, x_2, ...x_n; \epsilon) = \left\{g \in X^X : d(h(x_i), g(x_i)) < \epsilon, 1 \leq i \leq n\right\}$*, donde* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *y* $\epsilon > 0$.

A continuación definimos el espacio de Vietoris $K(X)$ y la topología asociada a él.

Definición 1.3. *Para un espacio métrico compacto* (X, d) *definimos el hiperespacio:*

$$K(X) = \{K \subset X : K \text{ es cerrado no vacío}\}.$$

A este espacio lo dotamos de la métrica de Hausdorff:

$$\delta(K, L) = Sup \{d(x, L), d(y, K) : x \in K, y \in L\},$$

$$\text{donde } \; d(x, L) = Inf \{d(x, z) : z \in L\}.$$

Este espacio es importante para nosotros porque con él definimos la función ω_f (bastante importante para [11]). Es de nuestro interés estudiar la continuidad de ω_f, puesto que en la literatura han surgido varios resultados equivalentes a esta (ver el Teorema 1 de [11]). Es por esta razón que definimos a continuación los conceptos de semicontinuidad superior e inferior para esta función.

Definición 1.4. *Si $\phi : X \longrightarrow K(X)$ decimos que f es* ***semicontinua inferiormente*** *si para cada abierto V en X se tiene que $\{x \in X : \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$ es abierto y decimos que es* ***semicontinua superiormente*** *si para cada abierto V en X se tiene que $\{x \in X : \phi(x) \subseteq V\}$ es abierto*

Existe otra forma de entender la topología del espacio de Vietoris que presentaremos a través del siguiente Teorema:

Teorema 1.5. *[10] Considere el espacio $K(X)$ y para cada $U \subset X$ abierto defina las colecciones $U^- = \{K \in K(X) : K \subseteq U\}$ y $U^+ = \{K \in K(X) : K \cap U \neq \emptyset\}$. Entonces el conjunto $S = \{U^+ : U \subseteq X \text{ abierto}\} \cup \{U^- : U \subseteq X \text{ abierto}\}$ forma una subbase para una topología sobre $K(X)$ y esta topología es la misma topología que la dada por la métrica de Hausdorff.*

Teorema 1.6. *Sea $\phi : X \longrightarrow K(X)$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *ϕ es semicontinua inferiormente y superiormente.*
2. *ϕ es continua.*

Demostración. **1)$\Longrightarrow$ 2).** De la semicontinuidad inferior y superior de ϕ se tiene que para cada U abierto los conjuntos $\{x \in X : \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$ y $\{x \in X : \phi(x) \subseteq V\}$ son abiertos. Note a su vez que:

$$\phi^{-1}(U^+) = \{x \in X : \phi(x) \cap V \neq \emptyset\}$$
$$\phi^{-1}(U^-) = \{x \in X : \phi(x) \subseteq V\}.$$

Por tanto todo elemento de la subbase tiene preimagen abierta bajo ϕ y no es difícil ver que esto implica que ϕ es continua.

2)$\Longrightarrow$ 1). Como ϕ es continua entonces la preimagen de todo abierto es abierta, particularmente esto es cierto para los abiertos subbásicos y por tanto ϕ es semicontinua inferior y superiormente. □

1.2. EL RANGO DE CANTOR BENDIXSON

Por otro lado una herramienta que usaremos bastante en nuestras pruebas es el concepto de rango de Cantor-Bendixson, es por eso que lo definimos a continuación. Con este fin, recordemos que si A es un subconjunto de un espacio X, entonces A' es el conjunto de puntos límite de A.

Definición 1.7. *Un espacio topológico X se dice disperso (scattered en inglés) si para todo subespacio Y de X no vacio existe $y \in Y$ aislado en Y.*

Lema 1.8. *Todo espacio métrico compacto y numerable X es disperso.*

Demostración. Suponga por reducción al absurdo que existe $Y \subseteq X$ no vacío tal que $Y = Y'$. De esta manera Y es cerrado y por tanto polaco, además del Teorema **1.53** de [15] tenemos que $|Y| = 2^{\aleph_0}$ lo que es absurdo pues Y es numerable. □

Definición 1.9. *Sea $\alpha < \omega_1$ un ordinal, definimos $X^{(\alpha)}$ así: Si $\alpha = \beta + 1$ es un ordinal sucesor entonces: $X^{(\alpha)} = (X^{(\beta)})'$. Por otro lado si α es un ordinal límite entonces $X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)}$.*

Definición 1.10. *Sea X un espacio métrico compacto, el rango de Cantor-Bendixson de X es el primer ordinal $\alpha < \omega_1$ tal que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$.*

El rango de Cantor-Bendixson de un espacio X lo denotaremos por $rcb(X)$.

El siguiente resultado es conocido pero incluimos su demostración para beneficio del lector.

Proposición 1.11. *(Comentario en [5]) Si X es un espacio métrico compacto y numerable, entonces $rcb(X)$ es el primer ordinal tal que $X^{(\alpha)} = \emptyset$.*

Demostración. Por reducción al absurdo suponga que $rcb(X) = \alpha$ pero $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$.

Como $X^{(\alpha)}$ es un subespacio de X no vacío, y X al ser numerable del lema 1.8 es un espacio disperso entonces $X^{(\alpha)}$ debe de tener al menos un punto aislado. Pero $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$, luego no tiene puntos aislados, lo que es una contradicción. □

Proposición 1.12. *Sea X un espacio métrico compacto numerable, entonces $rcb(X)$ es un ordinal sucesor.*

Demostración. Suponga por reducción al absurdo que $\alpha = rcb(X)$ es un ordinal límite. Esto implica que $X^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)}$ por ser límite y además α por la proposición anterior es el primer ordinal tal que $X^{(\alpha)} = \emptyset$.

De esta manera si $\beta < \alpha$ entonces $X^{(\beta)} \neq \emptyset$ luego por Teorema de intersección de Cantor $\bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)} \neq \emptyset$ entonces $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$ lo que es una contradicción. □

Definición 1.13. *Sea X un espacio métrico compacto y $x \in X$, el rango de Cantor-Bendixson del punto x, $rcb(x)$ es el primer ordinal $\alpha < \omega_1$ tal que $x \in X^{(\alpha)}$ pero $x \notin X^{(\alpha+1)}$.*

Lema 1.14. *Sea X un espacio métrico compacto numerable. Si $rcb(X) = \alpha + 1$ entonces existe $x_0 \in X$ tal que $rcb(x_0) = \alpha$, y para todo $x \in X$ $rcb(x) \leq \alpha$.*

Demostración. Sea $\beta = rcb(X)$ el rango de Cantor-Bendixson del espacio X entonces $\beta = \alpha + 1$, un ordinal sucesor por la proposición 1.12. Como X es numerable esto quiere decir que el primer espacio derivado que se hace vacío es $X^{(\alpha+1)}$, luego $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$. Por tanto existen puntos cuyo rango es α y claramente ese es el rango máximo que pueden alcanzar los elementos de X.

□

Lema 1.15. *Sea X un espacio métrico compacto y numerable entonces el conjunto de elementos de rango máximo es finito y no vacío.*

Demostración. Del lema 1.14, debe existir al menos un punto con rango máximo. Así sea $\alpha < \omega_1$ el rango máximo que pueden tener los elementos de X y sea A el conjunto de puntos de X con rango de Cantor-Bendixson α, suponga por reducción al absurdo que existe una sucesión de puntos distintos (x_n) en A. Como X es compacto podemos suponer que (x_n) converge a un punto $x \in X$, este punto tendrá claramente rango mayor que α por definición, lo cual es absurdo. □

Lema 1.16. *Sea X un espacio métrico compacto y numerable y $f : X \longrightarrow X$ una función inyectiva y continua. Si $x \in X$ es un elemento de rango máximo entonces x es periódico y los elementos de su órbita tienen todos ellos rango de Cantor Bendixson máximo en X.*

Demostración. Sea $Y = f(X)$ entonces f es un homeomorfismo de X en Y. Sea $x \in X$ como en la hipótesis, si $rcb(x) = \alpha$ entonces $rcb(f(x); Y) = \alpha$, es decir, el rango de $f(x)$ calculado en el subespacio Y. Sin embargo como Y es subespacio compacto de X podemos también hallar el rango de $f(x)$ visto como elemento de X, digamos $rcb(f(x); X)$ o simplemente $rcb(f(x))$.

Sabemos que α es el primer ordinal tal que $f(x) \in Y^{(\alpha)}$ y $f(x) \notin Y^{(\alpha+1)}$. De esta manera como $Y^{(\alpha)} \subseteq X^{(\alpha)}$ pues $Y \subset X$, entonces $f(x) \in X^{(\alpha)}$. Luego $rcb(f(x)) \geq \alpha$, pero α es el grado máximo en X luego $rcb(f(x)) = \alpha$. Notemos que ademas hemos mostrado que todo punto en la órbita de x tiene rango α visto como punto de X. Del lema 1.15 tenemos que x debe tener por tanto órbita finita, y como f es inyectiva entonces x es un punto periódico. □

1.3. ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

Definición 1.17. *Un espacio topológico X es polaco si es separable y completamente metrizable.*

Es un resultado sencillo el que todo espacio métrico compacto es polaco.

Notación 1.18. *Sean X y Y espacios métricos, denotamos por $C_p(X, Y)$ al espacio de funciones continuas de X en Y con la topología producto que hereda de Y^X.*

Introduciremos ahora otra topología sobre este espacio conocida como la topología uniforme. Por comodidad de notación cuando lo consideremos con la topología uniforme lo llamaremos siempre $C_u(X, Y)$. Además como es de bastante interés para nosotros el espacio $C(X, X)$ este lo notaremos $C_u(X, X)$ ó $C_p(X, X)$ según el caso que estemos tratando.

Lema 1.19. *Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos con X compacto con f y g dos funciones continuas de X en Y. Se define $d^\infty(f, g) = \text{máx}\{\rho(f(x), g(x)) : x \in X\}$ entonces d^∞ es una métrica bien definida sobre $C(X, Y)$.*

Demostración. Considere la función de valor real: $h(x) = \rho(f(x), g(x))$ para un par de funciones f y g en $C(X, Y)$. Como ρ es una métrica tenemos que:

$$\rho(f(x), g(x)) \leq \rho(f(x), f(y)) + \rho(f(y), g(y)) + \rho(g(x), g(y)) \text{ para cada } y \in X.$$

Luego

$$\rho(f(x), g(x)) - \rho(f(y), g(y)) \leq \rho(f(x), f(y)) + \rho(g(x), g(y))$$

Análogamente podemos ver también que:

$$\rho(f(y), g(y)) - \rho(f(x), g(x)) \leq \rho(f(x), f(y)) + \rho(g(x), g(y)).$$

Y por tanto:

$$|h(x) - h(y)| = |\rho(f(y), g(y)) - \rho(f(x), g(x))| \leq \rho(f(x), f(y)) + \rho(g(x), g(y)).$$

De esto se deduce que h es una función continua puesto que al ser f y g continuas entonces dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $\rho(f(x), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$ y $\rho(g(x), g(y)) < \frac{\epsilon}{2}$. De esta manera como X es compacto y h es continua de X en $\mathbb{R}$ entonces del Teorema de Weierstrass h debe tener un máximo lo que prueba que d^∞ esta bien definida.

Ver que es en efecto una métrica es sencillo. Esta definida positiva pues es el máximo de un conjunto de números mayores o iguales a 0. Además si $f = g$ entonces las distancias puntuales siempre son cero y por tanto el máximo es 0. Por otro lado si $d^\infty(f, g) = 0$ entonces para cada $x \in X$, $0 \leq \rho(f(x), g(x)) \leq 0$, y por tanto $f = g$. Es simétrica pues ρ es simétrica. Bastará probar entonces que cumple con la desigualdad triangular, para esto sean f, g, h funciones en $C(X, Y)$. Recuerde que existe $x \in X$ tal que $d^\infty(f, g) = \rho(f(x), g(x))$ pues es un máximo entonces:

$$d^\infty(f, g) = \rho(f(x), g(x)) \leq \rho(f(x), h(x)) + \rho(h(x), g(x)) \leq d^\infty(f, h) + d^\infty(h, g).$$

Lo que concluye la prueba. □

La topología inducida por esta métrica sobre el espacio de funciones continuas de X en Y es conocida como la topología uniforme.

Observación. *Una sucesión $(f_n)_n$ de funciones en $(C_u(X, Y), d^\infty)$ converge a una función f si y solo si converge uniformemente. De ahí su nombre de topología uniforme.*

Un resultado conocido sobre el espacio $C_u(X, Y)$ es que Si X sea compacto y Y polaco, entonces $C_u(X, Y)$ es polaco. Para demostrar esto necesitaremos primero el siguiente resultado:

Teorema 1.20. ***(4.19 de[10])*** *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y (Y, ρ) un espacio métrico completo entonces $(C_u(X, Y), d^\infty)$ es completo.*

Demostración. Suponga que $(f_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $C(X, Y)$ y fije $x \in X$. Como tenemos:

$$\rho(f_m(x), f_n(x)) \leq d^\infty(f_m, f_n)$$

Dado que $(f_n)_n$ es de Cauchy, tenemos que $(f_n(x))_n$ es de Cauchy en Y y por tanto converge. Como x era arbitrario defina $f : X \longrightarrow Y$ por $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para cada x, de esta manera $f_n \to f$ puntualmente. Queremos probar que f es continua y que es el límite de (f_n) con la métrica d^∞, para esto bastará mostrar que la convergencia es uniforme. Así dado $\epsilon > 0$ debe de existir $n_0 \in \mathbb{N}$ $d^\infty(f_n, f_m) < \frac{\epsilon}{2}$ para $n, m \geq n_0$ pues es de Cauchy. De esta manera como es la métrica del máximo, para todo $x \in X$, tenemos que si $n, m \geq n_0$: $\rho(f_n(x), f_m(x)) \leq d^\infty(f_n, f_m) < \frac{\epsilon}{2}$.

Tomando entonces el límite cuando $m \to \infty$ y como la métrica es continua tenemos que:

$$\rho(f_n(x), f(x)) = \lim_{m\to\infty} \rho(f_n(x), f_m(x)) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Como vimos esto es independiente del x por tanto es una convergencia uniforme lo que termina la prueba. □

Teorema 1.21. ***(4.19 de[10])*** *Sea (X, d) un espacio métrico compacto y (Y, ρ) un espacio polaco entonces $(C_u(X, Y), d^\infty)$ es polaco.*

Demostración. Por el teorema 1.20 bastará probar la separabilidad de $C(X, Y)$. Para esto considere para $n, m \in \mathbb{N}$ la colección:

$$C_{m,n} = \left\{ f \in C(X, Y) : \forall x_1, x_2 \in X \text{ si } d(x_1, x_2) < \frac{1}{m} \Rightarrow \rho(f(x_1), f(x_2)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Como X es compacto y $\left\{B_{d^\infty}(x; \frac{1}{m}) : x \in X\right\}$ es un cubrimiento por abiertos de X para todo m, luego debe de tener una subcubierta finita. De esta manera para todo m podemos elegir un conjunto $X_m \subseteq X$ finito tal que todo punto de X está a una distancia menor que $\frac{1}{m}$ de algún punto en X_m.

Por tanto podemos elegir un conjunto numerable $D_{m,n} \subseteq C_{m,n}$ tal que para cada $f \in C_{m,n}$ y cada $\epsilon > 0$ existe $g \in D_{m,n}$ tal que $\rho(f(y), g(y)) < \epsilon$ para todo $y \in X_m$. Afirmamos que $D = \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} D_{m,n}$ es denso en $C(X, Y)$.

En efecto, sea $f \in C(X, Y)$ y $\epsilon > 0$, tome $n > \frac{3}{\epsilon}$ y elija $m \in \mathbb{N}$ tal que $f \in C_{m,n}$ (esto es posible por la continuidad uniforme de f). Así sea $g \in D_{m,n}$ tal que $\rho(f(y), g(y)) < \frac{1}{n}$ para cada $y \in X_m$. Dado $x \in X$ y $y \in X_m$ tales que $d(x, y) < \frac{1}{m}$ entonces $\rho(f(x), g(x)) < \epsilon$ y por tanto $d^\infty(f, g) < \epsilon$. Lo que termina la prueba. □

Se deduce directamente de este resultado el siguiente corolario:

Corolario 1.22. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto entonces $C_u(X, X)$ es polaco.*

Otros resultados bastantes conocidos son los 2 siguientes:

Teorema 1.23. ***(pg. 13 [7])*** *Sea (X, d) un espacio métrico compacto entonces $Homeo(X, X) \subseteq C_u(X, X)$ el grupo de homeomorfismos de X en si mismo es un espacio polaco con la topología que hereda de $C_u(X, X)$.*

La idea de la prueba de este teorema es la siguiente: considere la siguiente métrica sobre el espacio $Homeo(X, X)$:

$$\hat{d^\infty}(f, g) = d^\infty(f, g) + d^\infty(f^{-1}, g^{-1}).$$

Esta es una métrica completa sobre el espacio $Homeo(X, X)$ que genera la topología que $Homeo(X, X)$ hereda de $C_u(X, X)$, luego es polaco.

Teorema 1.24. *Si X es un espacio métrico compacto entonces todo abierto de $C_p(X, X)$ es abierto de $C_u(X, X)$.*

Demostración. Considere $f \in C_p(X, X)$ y recuerde que una vecindad de este con la topología producto es $V = U_f(x_1, x_2, ...; x_n; \epsilon) \cap C_p(X, X)$. Bastaría ver que este es un abierto con la topología uniforme. Esto es claro pues considere cualquier $h \in V$. Sabemos que para cada $1 \leq i \leq n$ debe existir $\epsilon_i > 0$ tal que $B_d(h(x_i); \epsilon_i) \subseteq B_d(f(x_i); \epsilon)$. De esta manera sea $\delta = \text{mín}\{\epsilon_i : 1 \leq i \leq n\}$ entonces la bola $B(h; \delta)$ en la topología uniforme cumple que $h \in B(h; \delta) \subseteq V$, lo que concluye la prueba. □

1.4. ULTRAFILTROS

En esta sección definimos el concepto de **ultrafiltro**. Este concepto será de gran importancia durante el trabajo, pues se usa para definir los $p-$límites. Los $p-$límites son relevantes pues permiten caracterizar los elementos de la clausura de un conjunto A en un espacio compacto, de manera más explicita, se puede demostrar que si A es una sucesión entonces la clausura de A es el conjunto de $p-$límites de dicha sucesión, este resultado que corresponde al 1.35 será enunciado formalmente y **1.5** que trata directamente los $p-$límites.

Definición 1.25. *$p \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es un ultrafiltro en los naturales si:*

1. *$\emptyset \notin p$.*
2. *$\mathbb{N} \in p$.*
3. *Si $A \in p$ y $A \subset B$ entonces $B \in p$.*
4. *Si $A \in p$ y $B \in p$ entonces $A \cap B \in p$.*
5. *Si $A \subset \mathbb{N}$ entonces $A \in p$ ó $\mathbb{N} \setminus A \in p$.*

Definimos en seguida la compactificación de Stone–Čech para un espacio X, esta compactificación se entiende como la compactificación más grande del espacio X.

Definición 1.26. *Sea X un espacio topológico de Tychonoff. La **compactificación de Stone–Čech** de X es un espacio compacto Hausdorff βX conteniendo a X tal que:*

1. *La topología subespacio que X hereda de βX es la topología que originalmente tenía X.*
2. *Para cada función $h : X \longrightarrow Y$ continua en un espacio compacto Hausdorff Y, existe una única función $\tilde{h} : \beta X \longrightarrow Y$ continua tal que $\tilde{h} \restriction_X = h$ (esto es conocido como la propiedad universal de la compactificación de Stone–Čech).*

La compactificación de Stone–Čech de los números naturales será bastante relevante en nuestro trabajo, por tanto daremos una notación apropiada de la misma y una caracterización de su topología enseguida:

Notación 1.27. *Denotaremos como $\beta\mathbb{N}$ a la compactificación de Stone–Čech de $\mathbb{N}$.*

Una manera usual de entender este espacio es identificarlo con el espacio donde viven todos los ultrafiltros sobre los naturales. Particularmente, a cada n en $\mathbb{N}$ lo hacemos corresponder con el ultrafiltro principal asociado a n:

$$\{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}.$$

Notación 1.28. *Denotaremos por $\mathbb{N}^*$ al conjunto $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.*

Observación. *Queremos entender la estructura de $\beta\mathbb{N}$ visto como espacio topológico, para esto note que cada $A \subset \mathbb{N}$ puede verse como un elemento de $2^{\mathbb{N}}$ (por medio de la función característica de A). Como un ultrafiltro p es una colección de subconjuntos de $\mathbb{N}$, podemos considerar entonces a p como una colección de sucesiones de ceros y unos. Es decir, podemos tomar a $\beta\mathbb{N}$ como subconjunto de $2^{2^{\mathbb{N}}}$. Concluimos de esto que a $\beta\mathbb{N}$ lo estaremos viendo como subespacio de $2^{2^{\mathbb{N}}}$ y por tanto consideraremos en todo momento que cuenta con la topología heredada de este espacio.*

En [4] encontramos una caracterización de una base para esta topología, que introducimos por medio de esta proposición:

Proposición 1.29. *(pg. 7 [4]) La topología de $\beta\mathbb{N}$ esta dada por los abiertos básicos de la forma: $\widehat{A} = \{p \in \beta\mathbb{N} : A \in p\}$ donde $A \subseteq \mathbb{N}$.*

Nos interesan bastante los ultrafiltros no principales, es por eso que definimos las siguientes colecciones:

Notación 1.30. *Para A un subconjunto de los naturales sea $A^* = \{p \in \mathbb{N}^* : A \in p\}$.*

Además de todo esto el conjunto $\beta\mathbb{N}$ cuenta con una operación binaria $+$, esta la definimos a continuación:

Definición 1.31. *Sean $p, q \in \beta\mathbb{N}$ y $A \subset \mathbb{N}$. Decimos que entonces $A \in q + p$ si y solo si $\{n \in \mathbb{N} : A - n \in q\} \in p$.*

Teorema 1.32. *(pg. 13 [4]) Sean $p, q \in \beta\mathbb{N}$ entonces $q + p \in \beta\mathbb{N}$.*

1.5. p-LÍMITES

Como ya hemos definido la estructura de los ultrafiltros sobre los naturales y sus particularidades, es momento de pasar a definir los p-límites, a través de los cuales definimos el concepto de la función p-iterada, que pasará a ser de aquí en adelante una de las piedras angulares de toda la estructura teórica sobre la que fundamos nuestro proyecto.

Definición 1.33. *Sea X un compacto métrico, $p \in \beta\mathbb{N}$ y (x_n) una sucesión en X decimos que $y = p - \lim_{n\to\infty} x_n$ si para toda vecindad abierta V de y se tiene $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V\} \in p$.*

Proposición 1.34. *Sea X un compacto métrico, $p \in \beta\mathbb{N}$ y (x_n) una sucesión en X entonces $p - \lim_{n\to\infty} x_n$ existe y es único.*

Demostración. Considere

$$T = \bigcap_{A \in p} \overline{\{x_n : n \in A\}}.$$

El conjunto T no es vacío puesto que si tenemos que $A_i \in p$ donde $1 \leq i \leq m$, entonces:

$$\left\{x_n : n \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i\right\} \subset \overline{\left\{x_n : n \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i\right\}} = \overline{\bigcap_{i=1}^{m} \{x_n : n \in A_i\}} \subset \bigcap_{i=1}^{m} \overline{\{x_n : n \in A_i\}}.$$

Pero $\{x_n : n \in \bigcap_{i=1}^{m} A_i\} \neq \emptyset$ puesto que $\bigcap_{i=1}^{m} A_i \neq \emptyset$ dado que p es un ultrafiltro. De esta manera la intersección finita es no vacía luego T es no vacío.

Sea $y \in T$ y U una vecindad abierta de y, entonces para todo $A \in p$ se tiene

$$U \cap \{x_n : n \in A\} \neq \emptyset.$$

Luego para todo $A \in p$, $A \cap \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \neq \emptyset$. De lo que se deduce que:

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \in p.$$

Esto dado que p es un ultrafiltro, podemos así concluír que $y = p - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Además como X es Hausdorff este y es único. □

Usando $p-$límites podemos identificar los elementos de una adherencia como se indica a continuación:

Lema 1.35. *Sea Y un espacio compacto Hausdorff y $A = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de puntos en Y entonces $\overline{A} = \left\{p - \lim\limits_{n\to\infty} y_n : p \in \beta\mathbb{N}\right\}$.*

Demostración. **Afirmación 1.** $B = \left\{p - \lim\limits_{n\to\infty} y_n : p \in \beta\mathbb{N}\right\}$ **es un cerrado:** para ver esto sea $x \in \overline{B}$. De esta manera para cada U vecindad de x se tiene que $U \cap B \neq \emptyset$.

Así pues, para cada $y \in U \cap B$ existe $p_U \in \beta\mathbb{N}$ tal que $y = p_U - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, por lo tanto $\{r \in \mathbb{N} : y_r \in U\} \in p_U$. Así este conjunto es no vacío y dada que la intersección finita de vecindades de x es a su vez vecindad de x tenemos que la colección $\{\{r \in \mathbb{N} : y_r \in U\} : U \text{ vecindad de } x\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tiene la propiedad de la intersección finita y así esta contenida en un ultrafiltro $p \in \beta\mathbb{N}$. No es difícil ver que $x = p - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, y de esta manera $x \in B$. Luego B es cerrado.

Afirmación 2. B **está contenido en** $\overline{A}$**:** Sea $x = p - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ para algún ultrafiltro p, si U es un abierto que contiene a x se tiene que: $\{r \in \mathbb{N} : y_r \in U\} \in p$. Así $\{r \in \mathbb{N} : y_r \in U\} \neq \emptyset$ y por tanto $U \cap A \neq \emptyset$. Concluimos que $x \in \overline{A}$.

Afirmación 3. A **está contenido en** B**:** Sea $y_m \in A$ así $m \in \mathbb{N}$ y sea p_m el ultrafiltro principal asociado a m, pero es claro que $y_m = p_m - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, así $y_m \in B$.

De **3** y **1** se deduce que $\overline{A} \subseteq B$, esto pues $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A y B es un cerrado que contiene a A. De **2** se concluye que son iguales.

□

Teorema 1.36. ***(1.5.9 de[4])*** *Sea X un espacio métrico compacto, $(x_n)_n$ una sucesión en X y $p, q \in \mathbb{N}^*$. Entonces se cumple la identidad:*

$$(q + p) - \lim_{n\to\infty} x_n = p - \lim_{m\to\infty} (q - \lim_{n\to\infty} x_{m+n}).$$

Demostración. Suponga que $x = (q + p) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y $y = p - \lim\limits_{m\to\infty} (q - \lim\limits_{n\to\infty} x_{m+n})$. Si ambos fuesen distintos por ser X un espacio Hausdorff existen U, V abiertos disjuntos, vecindades de x e y respectivamente. Así $A = \{k \in \mathbb{N} : x_k \in U\} \in q + p$. Por otro lado sabemos que $B = \{m \in \mathbb{N} : q + m \in A^*\} = \{m \in \mathbb{N} : A - m \in q\} \in p$ y $C = \left\{m \in \mathbb{N} : q - \lim\limits_{n\to\infty} x_{m+n} \in V\right\} \in p$. De esta manera fijemos $m \in B \cap C$. Tenemos que $q + m \in A^*$ y que $E = \{n \in \mathbb{N} : x_{m+n} \in V\} \in q$. Como $q + m = q - \lim\limits_{n\to\infty} m + n$, se debe tener que $F = \{n \in \mathbb{N} : m + n \in A\} \in q$. Ahora tome $n \in E \cap F$. Se sigue que $m + n \in A$ y que $x_{m+n} \in U \cap V$, lo que es absurdo. □

1.6. EL SEMIGRUPO DE ELLIS

En esta sección definimos las funciones f^p, conocidas como las $p-$iteradas, estas funciones guardan relación directa con nuestro objeto principal de estudio: El semigrupo de Ellis que introducimos también en este apartado.

Definición 1.37. *Diremos que un par (X, f) es un sistema dinámico (s.d.) siempre que X sea un espacio métrico compacto y f una función continua de X en sí mismo.*

Definición 1.38. *La órbita de un punto x en un s.d. (X, f) es el conjunto*

$$O_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Además decimos que un punto $x \in X$ es periódico si existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) = x$. Decimos que un punto $x \in X$ es eventualmente periódico si su órbita $O_f(x)$ es un conjunto finito.

En un sistema dinámico (X, f) para cada x y cada ultrafiltro p sobre $\mathbb{N}$ nos interesa el punto $y = p - \lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)$, es decir, el $p-$límite de la sucesión $(f^n(x))_n$, ya que de esta manera podemos extender el concepto de iteración de la función f como sigue:

Definición 1.39. *Sea (X, f) un s.d., para cada $p \in \beta\mathbb{N}$ definimos la función $f^p : X \longrightarrow X$, por $f^p(x) := p - \lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)$.*

Estas funciones están claramente bien definidas dada la proposición 1.34. Además, como se dijo anteriormente, estas funciones f^p son una herramienta que usaremos a lo largo de todo el texto. Por tanto podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1.40. *Sea (X, f) un s.d. Entonces, para cada $p \in \beta\mathbb{N}$ f^p está bien definida.*

Pasamos ahora a definir el semigrupo de Ellis $E(X, f)$ de manera formal, damos también la caracterización de este por medio de $p-$iteradas y un ejemplo.

Definición 1.41. *El semigrupo de Ellis se define como:*

$$E(X, f) = \overline{\{f^n : n \in \mathbb{N}\}} \text{ en el espacio producto } X^X.$$

Como se mencionó en la introducción, el principal objetivo de este trabajo es estudiar algunas propiedades de este semigrupo cuando X es un espacio métrico compacto. Del Lema 1.35 se deduce una caracterización de $E(X, f)$ en términos de las p-iteradas.

$$E(X, f) = \{f^p : \ p \in \beta\mathbb{N}\}.$$

Es usual también el considerar el semigrupo $E(X, f, \mathbb{Z})$ que es la adherencia de las $n-$iteradas (con n entero). Sobre este semigrupo ahondaremos más adelante.

Observación. *Si definimos a $E(X, f)^*$ como $E(X, f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ tenemos entonces que:*

$$E(X, f)^* = \{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}.$$

Ejemplo 1.42. *Considere $S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\} \cup \{0\}$ y $f : S \longrightarrow S$ definida por: $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ y $f(0) = 0$, de esta manera*

$$E(S, f) = \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{\tilde{0}\right\}$$

donde $\tilde{0}$ es la función constante 0.

Ahora definiremos la función ω_f que va del espacio X en el hiperespacio $K(X)$. Esta función fue ampliamente estudiada por: [1, 11], en estos trabajos se demostró que si $X = [0,1]$ la continuidad de ω_f es equivalente a que toda función del semigrupo de Ellis es continua, entre otras resultados.

Definición 1.43. *Para un s.d. (X, f) y un punto $x \in X$ el conjunto $\omega_f(x)$ es el conjunto de límites de subsucesiones de la sucesión $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.*

Observación. *Observemos que:*

$$\omega_f(x) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \overline{\{f^n(x) : n \geq m\}}.$$

y por tanto es un subconjunto cerrado de X, más aún, es un compacto no vació.

Observación. *De esta manera, note que con este conjunto podemos definir la función $\omega_f : X \to K(X)$ que envia a cada x en su conjunto $\omega_f(x)$.*

Un resultado bastante conocido sobre la función ω_f y que no es muy difícil de ver es el siguiente:

Lema 1.44. *Sea (X, f) un s.d. entonces:*

$$\omega_f(x) = \{f^p(x) : p \in \mathbb{N}^*\}.$$

Demostración. Para cada m sea $B_m = \overline{\{f^n(x) : n \geq m\}}$. Entonces tenemos que $\omega_f(x) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} B_m$.

Además:

$$B_m = \overline{\{f^n(f^m(x)) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Del lema 1.35 se deduce que para cada m:

$$B_m = \left\{p - \lim_{n\to\infty} f^n(f^m(x)) : p \in \beta\mathbb{N}\right\}$$

entonces

$$B_m = \left\{p - \lim_{n\to\infty} f^n(x) : p \in \beta\mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., m-1\}\right\}$$

$$B_m = \{f^p(x) : p \in \beta\mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., m-1\}\}.$$

De lo que se obtiene que

$$\omega_f(x) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{f^p(x) : p \in \beta\mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., m-1\}\}$$

$$\omega_f(x) = \{f^p(x) : p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$$

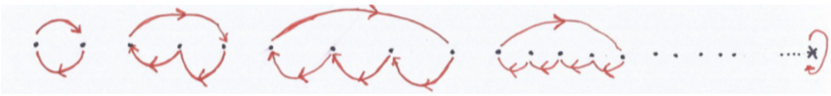
y por tanto

$$\omega_f(x) = \{f^p(x) : p \in \mathbb{N}^*\}.$$

□

1.7. ALGUNOS EJEMPLOS

1. Considere una vez más el espacio $S = \omega + 1$, deje fijo el único punto límite y haga que todos los puntos aislados sean periódicos con periodos cada vez más grandes como en la figura:

   Por un teorema de [5] el semigrupo de Ellis de este s.d. es el espacio de Cantor y por un teorema encontrado en el articulo de revisión [7] es un grupo bajo la composición.

2. Considere $X = \mathbb{Z} \cup \{d, -d\}$, donde d es el límite de la sucesión de los naturales y $-d$ el límite de la sucesión de los enteros negativos. Y sea f la función que a cada $n \in \mathbb{Z}$ le asigna $n - 1$ y deja fijos a los puntos límites, como en la figura:

   El semigrupo de este sistema es homeomorfo a $\omega + 1$ y el único punto límite en $E(X, f)$ es una función discontinua.

Capítulo 2

CARDINALIDA DEL SEMIGRUPO DE ELLOS

En la introducción se dijo que uno de los temas que queremos abordar en este trabajo de investigación era la cardinalidad del semigrupo de Ellis. La razón de esto no es trivial, pues el teorema **6.3** de [7] relaciona directamente la cardinalidad del semigrupo de Ellis con la topología del mismo. Resulta entonces de nuestro interés este teorema pues vincula dos temas aparentemente no conectados.

En este capítulo hablaremos entonces de la "Dicotomía de Bourgain, Fremlin y Talagrand"(BFT), particularmente de su **versión dinámica**. La primera versión nos proporciona un criterio para decidir cuando un espacio compacto y separable de funciones a valores reales es Fréchet verificando si cuenta o no con una copia de $\beta\mathbb{N}$. La versión dinámica permite hacer lo mismo para el semigrupo de Ellis que como sabemos no es necesariamente un espacio de funciones a valores en $\mathbb{R}$.

En la segunda sección revisaremos algunos de los resultados de García et al. [5] sobre la cardinalidad de $E(X, f)$ cuando X es un espacio métrico compacto y numerable y con base en uno de estos teoremas plantearemos un interrogante.

2.1. LA DICOTOMÍA DE BOURGAIN, FREMLIM Y TALAGRAND

En esta primera sección del capítulo 3 enunciaremos sin demostración un teorema de Bourgain, Fremlin y Talagrand de 1978. Para esto necesitamos definir algunos conceptos, como el concepto de compacto de Rosenthal para poder ver la relevancia de este resultado. El teorema del que hablamos es conocido como la dicotomía de BFT y lo necesitamos para poder entender la prueba de su versión dinámica que es uno de los objetivos de este capítulo.

Definición 2.1. *[10] Una función $f : X \to Y$ entre dos espacios métricos separables se dice que es de* ***primera clase de Baire*** *si la preimagen de todo abierto es un F_σ.*

$B_1(X, Y)$ denotará la colección de todas las funciones de primera clase de Baire.

Cuando $Y = \mathbb{R}$ lo denotaremos como $B_1(X)$. Un resultado clásico caracteriza las funciones de primera clase de la siguiente manera:

Teorema 2.2. ***(24.10 de [10])*** *Una función f de un espacio métrico separable X en $\mathbb{R}$ es de primera clase de Baire si y solo si f es límite puntual de una sucesión de funciones continuas.*

A continuación definimos qué es un compacto de Rosenthal, concepto primordial para los resultados principales de este capítulo, pues como veremos, los compactos Rosenthal separables tienen cardinalidad a lo sumo la de la recta.

Definición 2.3. *Un espacio topológico K es un* ***compacto de Rosenthal*** *si es homeomorfo a un subconjunto compacto de $B_1(X)$, donde X es un espacio polaco y $B_1(X)$ esta dotado con la topología de subespacio heredada de $\mathbb{R}^X$.*

Ejemplo 2.4. *El espacio de Helly $H = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1] |\, f \text{ es no decreciente}\}$ es un compacto de Rosenthal muy estudiado. Podemos encontrarlo referenciado en el trabajo de Godefroy sobre compactos de Rosenthal, particularmente lo da como ejemplo clásico en [9] en la página 283.*

El siguiente resultado se enuncia sin demostración en [9], pues lo consideran elemental, por su relevancia y para beneficio del lector incluimos sin embargo la prueba.

Lema 2.5. ***(pg. 298 de [9])*** *Todo subespacio cerrado de un compacto de Rosenthal es de Rosenthal y producto numerable de espacios de Rosenthal es de Rosenthal.*

Demostración. Ver que un subespacio cerrado de un compacto de Rosenthal es compacto de Rosenthal es directo, pues restringimos el homeomorfismo. Probaremos entonces simplemente que producto numerable de compactos de Rosenthal es de Rosenthal. Para esto considere $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de compactos de Rosenthal. Sin pérdida de generalidad podemos considerar que para cada n, existe un polaco X_n tal que $K_n \subseteq B_1(X_n)$.

Defina entonces la siguiente función:

$$\varphi : \prod_n \mathbb{R}^{X_n} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\prod_n X_n}$$

dada por:

$$\varphi(f_n)_n(k, (x_i)_i) = f_k(x_k)$$

Afirmación 1: φ es continua e inyectiva. En efecto, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $x = (x_i)_i \in \prod_n X_n$, defina $k^x = (k, (x_i)_i)$. Considere entonces la función proyección $\pi_{k^x} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\prod_n X_n} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\pi_{k^x}(f) = f(k, (x_i)_i).$$

Note que π_{k^x} es la proyección usual del espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\prod_n X_n}$ para el indice $k^x = (k, (x_i)_i)$ y por tanto es continua. Ahora observe que la función $\pi_{k^x} \circ \varphi$ está dada por:

$$(\pi_{k^x} \circ \varphi)(f_n)_n = f_k(x_k).$$

Así si $a < b$ entonces:

$$(\pi_{k^x} \circ \varphi)^{-1}(a,b) = \left\{ (f_n)_n \in \prod_n \mathbb{R}^{X_n} : f_k \in \pi^{-1}_{x_k}((a,b)) \right\}$$

que es un abierto subbásico. De aquí se deduce que φ es continua pues k^x era arbitrario.

Veamos ahora que φ es inyectiva. Sean $(f_n)_n$ y $(g_n)_n$ sucesiones de funciones en $\prod_n \mathbb{R}^{X_n}$ tales que $\varphi(f_n)_n = \varphi(g_n)_n$, por tanto $f_k(x_k) = g_k(x_k)$ para cada k y cada $x_k \in X_k$. Luego $(f_n)_n = (g_n)_n$ y φ es claramente inyectiva.

Tenemos que:

$$\prod_n K_n \subseteq \prod_n B_1(X_n) \subseteq \prod_n \mathbb{R}^{X_n}$$

y por lo tanto $\varphi \restriction \prod_n K_n$ es una inmersión topológica de $\prod_n K_n$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\prod_n X_n}$ pues $\prod_n K_n$ es un compacto por el Teorema de Tychonoff.

Afirmación 2. Si $(f_n)_n$ es tal que cada $f_n : X_n \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $\varphi(f_n)_n$ es continua. En efecto, recuerde que $\varphi(f_n)_n(k^x) = f_k(x_k)$ para cada $k^x = (k, (x_i)_i) \in Y = \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\prod_n X_n}$. Note también la siguiente igualdad:

$$(\varphi(f_n)_n)^{-1}(a, b) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{k\} \times \pi_k^{-1}(f_k^{-1}(a, b)).$$

De esta manera $(\varphi(f_n)_n)^{-1}(a, b)$ es entonces unión de abiertos subbásicos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\prod_n X_n}$ pues toda f_n es continua. Por tanto $\varphi(f_n)_n$ es continua.

Afirmación 3. Si $(f_n)_n$ es tal que cada $f_n : X_n \to \mathbb{R}$ es de 1era clase, entonces $\varphi(f_n)_n$ es de 1era clase. En efecto, del teorema 2.2 tenemos que para cada n

$$f_n = \lim_{m\to\infty} h_m^n$$

donde $(h_m^n)_m$ es una sucesión de funciones continuas. De esta manera

$$\varphi(f_n)_n = \varphi((\lim_{m\to\infty} h_m^n)_n) = \varphi(\lim_{m\to\infty} (h_m^n)_n).$$

Pero recordemos que φ es una función continua y por tanto $\varphi(f_n)_n = \lim_{m\to\infty} \varphi(h_m^n)_n$. Como de el resultado **2** $\varphi(h_m^n)_n$ es continua para cada m, entonces $\varphi(f_n)_n$ es de primera clase.

De la afirmacion **3**, hemos mostrado que

$$\varphi(\prod_n K_n) \subseteq B_1(\mathbb{N} \times \prod_n X_n).$$

Pero $\mathbb{N} \times \prod_n X_n$ es producto numerable de polacos (recuerde que $\mathbb{N}$ es polaco con la topología discreta) y como producto numerable de polacos es polaco, concluimos que $\prod_n K_n$ es un compacto de Rosenthal.

□

Definición 2.6. *Sea X un espacio polaco y $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^X$ se dice puntualmente acotada si* $(\forall x \in X)(\exists M_x > 0)(\forall n \in \mathbb{N}\, |f_n(x)| \leq M_x)$.

Notación 2.7. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ denotamos $[A]_{seq}$ el conjunto de límites de sucesiones en A.*

Definición 2.8. *Sea X un espacio topológico y $D \subseteq X$ decimos que D es secuencialmente denso en X si $X = [D]_{seq}$.*

El siguiente teorema es un resultado importante que indica que los compactos de Rosenthal separables son espacios Fréchet. La demostración de este resultado es compleja, hace uso de herramientas de la teoría de Ramsey (ver por ejemplo el libro [14], de la página 55 a la 59 donde ademas se puede conseguir las referencias originales y la motivación de este teorema).

Teorema 2.9. ***(Dicotomía de Bourgain Fremlin y Talagrand:)*** *Sea X un espacio polaco y $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset C_p(X, \mathbb{R})$ puntualmente acotada. Sea $K = \overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}$ en $\mathbb{R}^X$, entonces son equivalentes:*

1. *$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es secuencialmente denso en K.*
2. *K es Rosenthal.*
3. *K no tiene una copia de $\beta\mathbb{N}$.*

De este teorema Glasner deduce un corolario que implica que el espacio K puede tener o bien la cardinalidad de la recta o bien cuenta con una copia de $\beta\mathbb{N}$. Esta caracterización de la cardinalidad del espacio K es la que nos interesa ver para el semigrupo de Ellis de cualquier sistema dinámico (X, f).

Corolario 2.10. ***(6.3 de [7])*** *Bajo las mismas hipótesis del teorema 2.9. Son equivalentes:*

1. *K es de Rosenthal.*
2. *$|K| \leq 2^{\aleph_0}$.*
3. *K no tiene una copia de $\beta\mathbb{N}$.*

2.2. LA VERSIÓN DINÁMICA DE LA DICOTOMÍA BFT

El contexto más general donde se estudia el semigrupo de Ellis es el de acciones de grupos topológicos sobre espacios compactos [7], sin embargo reduciremos nuestro enfoque y abordaremos solo los sistemas (X, f). Como ya se dijo, un aspecto que ha sido analizado es la llamada dicotomía de Bourgain, Fremlin y Talagrand (BFT) para sistemas dinámicos la cual caracteriza cuándo el semigrupo de Ellis es un espacio Fréchet en términos de su cardinalidad, más precisamente, $E(X, f)$ es Fréchet si y solo si la cardinalidad de $E(X, f)$ es a lo sumo la de la recta. Aunque no profundizaremos sobre este aspecto, uno de los objetivos es presentar la demostración de ese resultado siguiendo el trabajo de [8]. En esta sección nos dedicaremos a revisar la prueba de dicha versión dinámica (deduciéndola del primer teorema de dicotomía 2.9 y su corolario 2.10) en el contexto que es de nuestro interés, que es el semigrupo de Ellis para un s.d. (X, f). Sin embargo, para tener una comprensión más completa de que tan amplio en realidad es el teorema daremos una pequeña introducción a los sistemas (G, X) pero no abordaremos en la versión dinámica para estos sistemas.

Por comodidad de notación para una acción φ de un grupo G sobre un espacio X, la literatura se refiere a $\varphi(g, x)$ como gx. Es por eso que en la definición siguiente y en lo posterior usamos este mismo estilo de notación. Si una acción a la izquierda φ (como la de la definición 2.11) es continua decimos que es una $G-$acción sobre X.

Definición 2.11. *Sea G un grupo topológico de módulo e y X un espacio completamente regular. Decimos que una función $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ es una acción a la izquierda si:*

1. *Para cada $x \in X$ $ex = x$.*

2. Para todo $g, h \in G$ y todo $x \in X$ $(gh)x = g(hx)$

Definición 2.12. *El par (G, X) es un $G-$ sistema (o simplemente un sistema) siempre que X sea un compacto T_2, G un grupo topológico y φ una $G-$acción sobre X.*

Definición 2.13. *Si tenemos un $G-$ sistema (G, X) donde $G = \mathbb{Z}$ decimos que este sistema es una cascada.*

Ahora vamos a demostrar un resultado muy conocido sobre G-sistemas.

Lema 2.14. *Sea (G, X) un sistema. Entonces para cada $g \in G$ la función $\hat{g}$ definida por $\hat{g}(x) := gx$ es un homeomorfismo de X en si mismo.*

Demostración. Sabemos que $\hat{g}$ es continua entre dos compactos (pues la acción φ que define el sistema es continua). Bastará probar que es una función biyectiva. En efecto, sean $x, y \in X$ tales que $\hat{g}(x) = \hat{g}(y)$, luego $\hat{h}(\hat{g}(x)) = \hat{h}(\hat{g}(y))$ para cualquier $h \in G$, particularmente para $h = g^{-1}$. De esta manera $g^{-1}(gx) = g^{-1}(gy)$ pero φ es una acción, por tanto $(g^{-1}g)x = (g^{-1}g)y$ de lo que se deduce que $x = y$. Por otro lado para $x \in X$ arbitrario tenemos que $g^{-1}x \in X$, así $\hat{g}(g^{-1}x) = x$ luego es sobreyectiva, lo que termina la prueba. □

Pasamos ahora a definir el semigrupo de Ellis asociado a un sistema (G, X). Pero como dijimos anteriormente, a pesar de que la versión dinámica también aplica para estos sistemas más generales solo daremos la prueba de esta para sistemas (X, f) que son los que realmente nos competen a nosotros, pues son el foco de este trabajo de investigación.

Definición 2.15. *El semigrupo envolvente (de Ellis) de un sistema (G, X) es el conjunto:*

$$E(G, X) = \overline{\{\hat{g} : g \in G\}} \subseteq X^X$$

Hemos presentado la definición de semigrupo de Ellis en su contexto más general, no es difícil ver que el semigrupo $E(X, f, \mathbb{Z})$ (que mencionamos brevemente) visto en este contexto es una cascada como en 2.13 (y por tanto un caso particular de esta definición). Sin embargo a partir de este momento nos centraremos solamente en el semigrupo $E(X, f)$ y plantearemos la versión dinámica de BFT también para un s.d. (X, f). Como ya dijimos esto es para no desviarnos mucho del contexto que realmente es de nuestro interés, pero otra razón de peso para esto es que la prueba del caso más general es análoga a la prueba para los sistemas (X, f), salvo que además se debe demostrar que el semigrupo de Ellis es separable, cosa que para el caso (X, f) es evidente. Esto se hace considerando que $\{\hat{g} : g \in G\} \subseteq Homeo(X, X)$ y por tanto podemos considerarlo con la topología uniforme, además se usan los teoremas 1.23 y 1.24 (este argumento lo encontramos más formalmente en la página 13 de [7]). Algunos resultados que necesitaremos más adelante son los siguientes:

Lema 2.16. *Sea (X, f) un s.d., $E = E(X, f)$ y $g \in C_p(X, \mathbb{R})$. Si $E^g = \{g \circ h : h \in E\}$ entonces E^g es un compacto separable.*

Demostración. Sea $\psi : E \longrightarrow E^g$ dada por $\psi(h) = g \circ h$.

Veamos que ψ es continua y por tanto E^g compacto. En efecto, observe que si $\epsilon > 0$ y $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, entonces por la definición que dimos en 1.2 sobre los abiertos de la topología producto tenemos:

$$\psi^{-1}(U_{g \circ h}(x_1, ..., x_n; \epsilon)) = \{l \in E : |g(l(x_i)) - g(h(x_i))| < \epsilon, 1 \leq i \leq n\}.$$

Y este conjunto es:

$$\bigcap_{i=1}^{n}\left\{l \in E : l(x_i) \in g^{-1}(B(g(h(x_i));\epsilon))\right\} = \bigcap_{i=1}^{n} {\pi_{x_i}}^{-1}(g^{-1}(B(g(h(x_i));\epsilon))).$$

Que es claramente un abierto pues g es continua.

Ahora para ver que E^g es separable, recuerde que E es separable por definición pues es la clausura de las $n-$iteradas. De esta manera sea $D \subseteq E$ denso numerable en E, afirmamos que $E^g = \overline{\{g \circ l : l \in D\}}$, si esto es cierto la separabilidad de este espacio será evidente. En efecto: si V es un abierto no vacio de E^g, digamos que existe $h_0 \in E$ tal que $g \circ h_0 \in V$. Como la función ψ asociada a E^g definida más arriba es una función continua, entonces $\psi^{-1}(V)$ es un abierto de E que contiene a h_0. Por tal razón existe $l \in D$ tal que $l \in \psi^{-1}(V)$ (pues D es denso en E). Concluimos que $g \circ l \in V$, por tanto E^g es separable. □

Las familias de funciones que separan puntos serán bastante relevantes para la prueba que vamos a hacer en esta sección, por tanto definimos este concepto a continuación:

Definición 2.17. *Decimos que una familia $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ de funciones sobre un espacio X (en espacios X_α) separa puntos si para cualquier par de puntos distintos $x, y \in X$ existe un $\alpha \in A$ tal que $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.*

Para la prueba del Teorema principal de esta sección necesitaremos de una familia de funciones continuas de X en valores reales que separe puntos, a continuación probaremos la existencia de dicha familia y evidenciaremos quien es dicha familia de manera constructiva.

Lema 2.18. *Si X es métrico compacto entonces existe una sucesión $(g_n)_n \subseteq C(X,\mathbb{R})$ que separa puntos.*

Demostración. Como X es un compacto métrico entonces es separable. Sea pues $(x_n)_n$ denso en X.

Defina para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$g_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \mapsto d(x_n, y).$$

Claramente g_n es continua por la continuidad de la métrica. Vamos a verificar que esta sucesión separa puntos, para esto queremos ver que si $x \neq y$ son dos puntos en X entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g_n(x) \neq g_n(y)$. Esto es cierto, pues suponga por reducción al absurdo que sus imagenes son iguales para toda g_n. De esta manera, dado que $(x_n)_n$ es denso en X entonces cuenta con una subsucesión $(x_{n_k})_k$ que converge a x. Así $g_{n_k}(x) = g_{n_k}(y)$ para cada k, pero $g_{n_k}(x) = d(x_{n_k}, x) \to 0$. Por tanto $d(x_{n_k}, y) = g_{n_k}(y) \to 0$ y como X es Hausdorff tenemos que $x = y$ lo que es absurdo.

□

También necesitaremos de los siguientes dos lemas, uno de estos lo encontramos referenciado en la sección 14 de [14] que nos da un método para demostrar que un espacio Y es homeomorfo a $\beta\mathbb{N}$. Incluimos la prueba de ambos lemas para beneficio del lector.

Lema 2.19. *Sean X y Y dos compactos T_2 y $h : X \to Y$ continua y sobreyectiva tal que:*

1. *Para todo $Z \subseteq X$ cerrado. Si $h(Z) = Y$ entonces $Z = X$.*

2. *Existe un conjunto* $D = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$ *denso en* Y *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$ $\{y_n\}$ *es un abierto.*

Entonces $h^{-1}(D)$ *es denso en* X *y para todo* $n \in \mathbb{N}$ $|h^{-1}(\{y_n\})| = 1$.

Demostración. Sea $Z = \overline{h^{-1}(D)} \subseteq X$, de esta manera $D \subseteq h(h^{-1}(D)) \subseteq h(Z)$ pero $h(Z)$ es un compacto (y por tanto cerrado) pues h es continua y X compacto. Luego $Y = \overline{D} \subseteq h(Z)$, de lo que se deduce que $h(Z) = Y$ y por hipótesis tenemos que $Z = X$, entonces $h^{-1}(D)$ es denso en X.

Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ elijamos un único $a_n \in h^{-1}(y_n)$. Sea $B = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$, tenemos que h es inyectiva sobre B y con un argumento análogo al usado anteriormente se tiene que B es denso en X. En efecto, note que $D \subseteq h(B) \subseteq h(\overline{B})$ y $h(\overline{B})$ es cerrado luego es válido el mismo argumento. Queremos ahora ver que para todo n se tiene que $|h^{-1}(\{y_n\})| = 1$. Por reducción al absurdo suponga que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|h^{-1}(\{y_m\})| \geq 2$. Como h es inyectiva sobre B y $X = \overline{B}$ entonces existe $x \in B'$ tal que $h(x) = y_m = h(a_m)$. Como $x \in B'$ existe una red $(a_{n_d})_{d \in F}$ en B que converge de manera no trivial a x. De la continuidad de h tenemos que:

$$y_m = h(a_m) = h(x) = lim h(a_{n_d}) = lim y_{n_d}$$

pero esto es absurdo pues y_m es un punto aislado por la hipótesis y h es inyectiva sobre B. Luego para todo n se tiene que $|h^{-1}(\{y_n\})| = 1$ y concluye la prueba. □

Lema 2.20. ***(Teorema 3 de la sección 14 de [14])*** *Suponga que* X *es compacto,* $j : X \to \beta\mathbb{N}$ *es una función continua y sobreyectiva,* $j^{-1}(n)$ *es unitario para todo* n*, y* $j^{-1}(\mathbb{N})$ *es denso en* X*. Entonces* j *es inyectiva y por tanto un homeomorfismo.*

Demostración. Como $j^{-1}(n)$ es unitario para todo n, y $j^{-1}(\mathbb{N})$ es denso en X entonces X es un espacio separable. En efecto, sea $x_n = j^{-1}(n)$ para cada n entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X. Considere la función $g : \mathbb{N} \to X$ dada por $g(n) = x_n$ para cada n. Claramente se tiene que g es continua, pues $\mathbb{N}$ cuenta con la topología discreta. Como X es compacto y $\beta\mathbb{N}$ es la compactificación de Stone–Čech de $\mathbb{N}$ por la propiedad universal podemos extender g a una función continua $G : \beta\mathbb{N} \to X$, que además es sobreyectiva pues un conjunto denso de X esta en el rango de G.

De esta manera $j \circ G : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ es continua y sobreyectiva. Además si $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$(j \circ G)(n) = j(G(n)) = j(g(n)) = j(x_n) = j(j^{-1}(n)) = n$$

Como $j \circ G$ es continua y sobreyectiva y es la identidad restringida a un denso de $\beta\mathbb{N}$ entonces $j \circ G$ es la identidad.

Suponga ahora que existen $y_1, y_2 \in X$ tales que $j(y_1) = j(y_2)$. Como $X = G(\beta\mathbb{N})$, existen $p_1, p_2 \in \beta\mathbb{N}$ tales que $y_1 = G(p_1)$ y $y_2 = G(p_2)$. De esto se deduce que $j(G(p_1)) = j(G(p_2))$ pero acabamos de probar que $j \circ G$ es la identidad. De esta manera $p_1 = p_2$ entonces

$$y_1 = G(p_1) = G(p_2) = y_2.$$

Concluimos que j es inyectiva y por tanto un homeomorfismo. □

Pasamos a demostrar el resultado principal de esta sección pues ya contamos con todas las herramientas necesarias para hacerlo:

Teorema 2.21. ***Glasner-Megrelishvili(3.2 de [8])*** *Sea (X, f) un s.d. Son equivalentes:*

1. *$E(X, f)$ de es Rosenthal, en particular $|E(X, f)| \leq 2^{\aleph_0}$.*

2. *$E(X, f)$ no tiene una copia de $\beta\mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $E = E(X, f)$. Sabemos del lema 2.18 que existe una sucesión en $C(X, \mathbb{R})$ que separa puntos, digamos $(g_n)_n$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $E^{g_n} = \{g_n \circ h : h \in E\}$, que es un compacto separable en el espacio producto $\mathbb{R}^X$ por el lema 2.16. Considere para cada n la función continua asociada a E^{g_n} (que se definió y probó que es continua como parte de la prueba del lema 2.16) dada por:

$$\phi_n : E \longrightarrow E^{g_n}$$

$$h \mapsto g_n \circ h.$$

De esta manera la sucesión $(\phi_n)_n$ separa puntos en E. En efecto, sean h_1, h_2 en E dos funciones distintas, entonces existe $x \in X$ tal que $h_1(x) \neq h_2(x)$ y sabemos que $(g_n)_n$ separa puntos en X. Por tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g_n(h_1(x)) \neq g_n(h_2(x))$ y en consecuencia $\phi_n(h_1) \neq \phi_n(h_2)$, que es lo que queríamos ver.

Definamos ahora la siguiente función:

$$\phi : E \longrightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} E^{g_n}.$$

$$h \mapsto (g_n \circ h)_{n\in\mathbb{N}} = (\phi_n(h))_{n\in\mathbb{N}}$$

La función ϕ es continua pues sus proyecciones son las funciones $(\phi_n)_n$ que sabemos que son continuas. Además vimos que $(\phi_n)_n$ separa puntos en E, por tanto ϕ es inyectiva, ya que dos funciones distintas h_1 y h_2 en E tienen imagen distinta bajo ϕ, pues sus imágenes bajo ϕ se diferencian en a lo menos una coordenada. Como E es compacto entonces ϕ es una inmersión topológica y por tanto tenemos que $E \cong \phi(E)$.

Ahora podemos demostrar el teorema.

1.) $\Longrightarrow$ **2.)** Se sigue del corolario 2.10.

2.) $\Longrightarrow$ **1.)** Si se tiene que E no contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$ probaremos que esto implica que $\prod_{n\in\mathbb{N}} E^{g_n}$ es de Rosenthal. Del corolario 2.10 y el lema 2.5 basta con ver que ningún espacio E^{g_n} contiene una copia de $\beta\mathbb{N}$. Por reducción al absurdo suponga que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\beta\mathbb{N} \cong Y \subseteq E^{g_n}.$$

Ahora considere la colección $A = \left\{Z \subseteq E : \overline{Z} = Z, \phi_n(Z) = Y\right\}$ parcialmente ordenada por $\supseteq$. Tenemos entonces que $A \neq \emptyset$ pues a lo menos $\phi_n^{-1}(Y)$ esta en A (esto dado que ϕ_n es continua y Y cerrado). Por otro lado si $\mathcal{C}$ es una cadena en A, entonces los elementos de $\mathcal{C}$ tienen por cota superior a $D = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \in A$. Esto dado que D es cerrado por ser intersección de cerrados, además

$$\phi_n(D) = \phi_n(\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C) \subseteq \bigcap_{C\in\mathcal{C}} \phi_n(C) = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} Y = Y.$$

Por otro lado note que para un $y \in Y$ arbitrario y una subcolección finita de la cadena $\mathcal{C}$ digamos, $C_1 \subseteq C_2 \subseteq ... \subseteq C_n$ existe $x \in C_1$ tal que $\phi_n(x) = y$ entonces $y \in \phi_n(\bigcap_{i=1}^n C_i)$, de lo que se deduce que $Y \subset \phi_n(D)$.

Por Lema de Zorn tenemos entonces que $(A, \supseteq)$ cuenta con un elemento maximal, o lo que es lo mismo $(A, \subseteq)$ cuenta con un elemento minimal M. Afirmamos $M \cong \beta\mathbb{N}$, en efecto, considere la función continua y sobreyectiva $\theta = \phi_n \restriction M$ que va de M en Y y sea g un homeomorfismo de Y en $\beta\mathbb{N}$.

Note que si $Z \subseteq M$ es cerrado tal que $\theta(Z) = Y$ entonces $Z = M$ (esto por la minimalidad de M). Como g es un homeomorfismo tenemos que $D = \{g^{-1}(n) : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en Y y para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\{g^{-1}(n)\}$ es un abierto. Podemos entonces aplicar el lema 2.19 a θ y tenemos en consecuencia que $\theta^{-1}(D)$ es denso en M y para todo $n \in \mathbb{N}$ $\theta^{-1}(\{g^{-1}(n)\})$ es unitario.

Si $j = g \circ \theta$, por lo anterior j es una función continua y sobreyectiva de M en $\beta\mathbb{N}$ tal que $j^{-1}(n)$ es unitario para todo n y $j^{-1}(\mathbb{N})$ es denso en M, esto implica del lema 2.20 que j es un homeomorfismo lo que es absurdo pues E no cuenta con una copia de $\beta\mathbb{N}$.

Luego $\prod_{n\in\mathbb{N}} E^{f_n}$ es de Rosenthal, entonces $\phi(E)$ es de Rosenthal por ser subespacio de $\prod_{n\in\mathbb{N}} E^{g_n}$ y así E es de Rosenthal. □

Estos sistemas (X, f) tal que su semigrupo de Ellis es de Rosenthal corresponden a una clase de semigrupos que han sido bastante estudiados, definiremos esta clase en seguida, pero no ahondaremos en las propiedades de los mismos. Con esta definición entonces damos fin a esta sección:

Definición 2.22. *Para un sistema dinámico (X, f) con X compacto métrico decimos que (X, f) es un* ***sistema dinámico dócil (tame)*** *si su semigrupo de Ellis $E(X, f)$ es un compacto de Rosenthal.*

2.3. CARDINALIDAD DE $E(X, f)$ CON X NUMERABLE

Cuando X es un espacio compacto métrico y numerable, en [5] los autores probaron varios resultados interesantes relacionados con la cardinalidad del semigrupo de Ellis. Por eso para que este capítulo cuente con una perspectiva más amplia sobre el problema de la cardinalidad del semigrupo, hemos decidido en esta sección comentar dichos resultados.

Teorema 2.23. ***(2.2 de [5])*** *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces $E(X, f)$ es finito si y solo si existe $M > 0$ tal que $|O_f(x)| < M$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Suponga que $|E(X, f)| < M$ entonces $|\{f_n : n \in \mathbb{N}\}| < M$ y por tanto $|O_f(x)| < M$ para todo $x \in X$. Inversamente si $|O_f(x)| < M$ para todo $x \in X$. Entonces $f^M(x)$ es un punto periódico para todo x y su periodo es menor que M. Por lo tanto f^M es una función periódica (bajo la composición) con periodo a lo sumo de $(M-1)!$ de lo que se deduce que $E(X, f)$ es finito. □

Evidentemente conocer quien es el $p-$límite de un punto x es bastante relevante para lo que queremos lograr, es por eso que presentamos a continuación un resultado tomado de [5] que nos permite decidir esto para algunos casos particulares. Este lema lo usaremos a lo largo de este trabajo en varias ocasiones, así que hay que tenerlo bastante en cuenta.

Lema 2.24. ***(2.1 de [5])*** *Sea (X, f) un s.d. y $x \in X$.*

1. *Sea x periódico con periodo n y sea $l < n$. Entonces, $p \in (n\mathbb{N}+l)^*$ si y solo si $f^p(x) = f^l(x)$.*

2. *Suponga que la órbita de x es infinita y $O_f(y) = \omega_f(x)$ para algún punto periódico $y \in X$ con periodo n. Si $p, q \in (n\mathbb{N}+l)^*$ entonces $f^p(x) = f^q(x)$.*

3. *Para todo $p \in \mathbb{N}^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$ $f^p(f^n(x)) = f^n(f^p(x))$.*

Demostración.

1. Sea U un abierto que contiene a $f^l(x)$. Dado que $f^{mn+l}(x) = f^l(x)$ para cada m entonces $n\mathbb{N}+l \subseteq \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in U\}$, como p es un ultrafiltro y $n\mathbb{N}+l \in p$, entonces:
$$\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in U\} \in p.$$
Como esto fue para un abierto U arbitrario entonces $f^p(x) = f^l(x)$.

2. Del ítem anterior tenemos que $f^p(y) = f^l(y) = f^q(y)$ y por hipótesis sabemos que $f^p(x), f^q(x) \in \{y, f(y), ..., f^{n-1}(y)\}$. Afirmamos que $f^p(x)$ y $f^q(x)$ son también $f^l(y)$, en efecto, si suponemos que $f^p(x) = f^r(y) \neq f^l(y)$, entonces existen U_1 y U_2 vecindades abiertas disjuntas de $f^r(y)$ y $f^l(y)$ respectivamente. Así por definición de $p-$límite: $\{n \in \mathbb{N} : f^n(y) \in U_1\}, \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in U_2\} \in p$. Luego estos dos conjuntos tienen una intersección no vacía, pero esto no es posible, luego $f^p(x) = f^l(y)$, análogamente se prueba que $f^q(x) = f^l(y)$ y termina la prueba de este resultado.

3. Esto en realidad es cierto para cualquier función continua en $E(X,f)$ (no solo las $n-$iteradas), este resultado lo revisaremos más adelante en toda su generalidad, más particularmente dirigirse a los lemas 4.15 y 4.16 y a las implicaciones que encontramos de los mismos.

□

El conjunto de periodos posibles para un sistema (X,f) es bastante importante pues existe un resultado de [5] que relaciona la cardinalidad de este con la topología del semigrupo $E(X,f)$; por tal razón definimos este conjunto a continuación.

Notación 2.25. *Sea (X,f) s.d. entonces $P_f = \{n \in \mathbb{N} : \exists x \in X \text{ de periodo } n\}$.*

El siguiente teorema nos da una condición equivalente a que $E(X,f)^* = E(X,f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ sea un conjunto finito.

Teorema 2.26. ***(2.3 de [5])*** *Sea (X,f) un s.d. $E(X,f)^*$ es finito si y solo si existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|\omega_f(x)| < M$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Asuma que $E(X,f)^*$ es finito y sea $M = |E(X,f)^*|$. Dado que $\omega_f(x) = \{f^p(x) : p \in \mathbb{N}^*\}$, tenemos que $|\omega_f(x)| \leq M$ para cada $x \in X$. Reciprocamente, suponga que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $|\omega_f(x)| \leq M$ para cada $x \in X$. Entonces, sabemos que todo punto de $\omega_f(x)$ es periódico para cada $x \in X$, además note que $|P_f| \leq M$. Por lo tanto, sea $P_f = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ para algún $n \leq M$. Defina para cada $p \in \mathbb{N}^*$, $\phi : \mathbb{N}^* \to \prod_{i=1}^{n} \{0, ..., b_i - 1\}$ por
$$\phi(p) = (j_1, ..., j_n)$$
de tal forma que $p \in (b_i\mathbb{N}+j_i)^*$ para cada $1 \leq i \leq n$. Para ver que $E(X,f)^*$ es finito, es suficiente mostrar que $\phi(p) = \phi(q)$ si y solo si $f^p = f^q$. Pero esto se sigue directamente del item **2** del Lema 2.24. □

Es necesario aclarar que se puede dar el caso de que $E(X, f)$ sea infinito y $E(X, f)^*$ finito, recuerde por ejemplo el sistema dinámico en 1.42, donde $S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\} \cup \{0\}$ y $f : S \longrightarrow S$ estaba definida por: $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ y $f(0) = 0$. Por tanto teníamos que:

$$E(S, f) = \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{\tilde{0}\right\}$$

donde $\tilde{0}$ es la función constante 0. De esta manera $E(S, F)$ es infinito pues las $n-$iteradas son infinitas pero $\left\{\tilde{0}\right\} = E(S, f)^*$ y por tanto es finito.

Destacamos el siguiente Teorema de [5] que relaciona la cardinalidad de P_f con la topología (y cardinalidad) de $E(X, f)$.

Teorema 2.27. ***(2.7 de [5])*** *Sea (X, f) un s.d. Si P_f es infinito, entonces $E(X, f)$ no tiene puntos aislados. En particular, si X es numerable y P_f es infinito, entonces $E(X, f)$ es homeomorfo al espacio de Cantor $2^{\mathbb{N}}$.*

El siguiente teorema que da condiciones suficientes para ver que la cardinalidad de $E(X, f)$ es menor igual que la de X.

Teorema 2.28. ***(2.9 de [5])*** *Sea (X, f) un s.d. tal que existe $x \in X$ con órbita densa en X. Suponga que f^p es continua para todo $p \in \mathbb{N}^*$. Entonces $f^p = f^q$ si y solo si $f^p(x) = f^q(x)$, para todo $p, q \in \mathbb{N}^*$. En particular $|E(X, f)| \leq |X|$.*

Preguntas:

Antes de terminar con esta sección queremos presentar un interrogante que dejan los teoremas 2.21 y 2.27 de este capítulo. Suponga que tenemos un sistema dinámico (X, f) tal que X es numerable entonces del teorema 2.21 sabemos que $|E(X, f)| \leq 2^{\aleph_0}$ pues X es numerable y por tanto $E(X, f)$ es metrizable. Y del teorema 2.27 tenemos que si P_f es infinito entonces $E(X, f)$ es homeomorfo a $2^{\mathbb{N}}$. Lo que nos hace preguntarnos: ¿Si P_f es finito, entonces $E(X, f)$ es numerable?, más adelante intentaremos responder a este interrogante por lo menos de manera parcial.

Capítulo 3

SISTEMAS DINÁMICOS DISTALES

En este capítulo discutiremos algunos resultados sobre el semigrupo $E(X, f, \mathbb{Z})$. Introduciremos en primer lugar el concepto de s.d. distal. Haremos también una revisión de la prueba de Ellis de que el semigrupo $E(X, f, \mathbb{Z})$ es un grupo si y solo si (X, f) es distal. Ellis demuestra esto en el contexto de acciones de grupo, sin embargo, nosotros revisamos solamente el caso de sistemas (X, f).

En la sección 4.4 daremos una demostración alternativa del Teorema de Ellis en el caso que X sea numerable. Estos resultados son un aporte de esta tesis. En particular mostraremos una caracterización de la inversa de la $p-$iterada f^p. Lo logramos demostrando que la condición de distalidad es equivalente a que todo punto en X es periódico. Por último en esta sección probamos que los semigrupos $E(X, f, \mathbb{Z})$ y $E(X, f)$ son el mismo si y solo si el sistema es distal cuando el sistema es numerable.

3.1. SEMIGRUPOS TOPOLÓGICOS

Definición 3.1. *Sea $(S, \circ)$, un conjunto S y una operación binaria sobre el mismo, decimos que es un semigrupo topológico a la izquierda si se cumple lo siguiente:*

1. *$\circ$ es una operación asociativa.*

2. *$(\forall s \in S)(x \mapsto s \circ x$ es continua$)$.*

De ahora en adelante denotaremos la operación en un semigrupo $s \circ t$ simplemente como st, a menos que nos refiramos a la operación binaria **composición**.

Definición 3.2. *Sea $(S, \circ)$ un semigrupo e $I \subseteq S$ no vacío. Diremos que I es un ideal si:*

$$(\forall i \in I)(\forall s \in S)(is \in I).$$

Notación 3.3. *Sea $(S, \circ)$ semigrupo topológico y $s \in S$. La función L_s es aquella definida por: $x \mapsto sx$.*

Definición 3.4. *Diremos que un ideal $I \subset S$ es un ideal minimal si es minimal en la colección de ideales respecto a la contenencia.*

Es bueno resaltar que el concepto de ideal minimal será esencial para la prueba del Teorema de Ellis que vamos a revisar en esta sección.

Teorema 3.5. ***(3.9 de [12])*** *Si S es un semigrupo topológico compacto de Hausdorff, entonces existe un idempotente s en S.*

Demostración. Probaremos usando Lema de Zorn que el órden $(\Sigma, \supseteq)$ tiene un elemento maximal, donde $\Sigma = \{T \subseteq S : \emptyset \neq T = \overline{T} \text{ y } T^2 \subseteq T\}$.

Como $S \in \Sigma$ entonces Σ es una colección no vacía. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $(\Sigma, \supseteq)$, queremos hallar una cota superior de esta en Σ, el claro candidato es:

$$C' = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Este conjunto es cerrado y no vacío dado que S es un compacto. Sean s_1, s_2 en C' entonces $(\forall C \in \mathcal{C})(s_1, s_2 \in C)$ luego $(\forall C \in \mathcal{C})(s_1 s_2 \in C)$. Así tenemos que $(C')^2 \subset C'$, luego C' es cota superior de la cadena $\mathcal{C}$ en $(\Sigma, \supseteq)$.

Por tanto del Lema de Zorn existe un elemento maximal en $(\Sigma, \supseteq)$, o lo que es lo mismo un minimal en $(\Sigma, \subseteq)$, que denotaremos por T. Fijemos $s \in T$. Mostraremos que $s^2 = s$.

Primero afirmamos que $sT = T$. En efecto, tenemos que $L_s(T) = sT \subset T$ es un cerrado no vacío, además $sTsT \subset sTT \subset sT$. Por lo tanto, $sT \in \Sigma$, y como T es minimal entonces $sT = T$. En particular, existe $t \in T$ tal que $st = s$.

Considere el conjunto $R = \{t \in T : st = s\}$. Como $R = L_s^{-1}(\{s\}) \cap T$, entonces R es un cerrado no vacío. Mostraremos que $R = T$. En efecto, sean $t_1, t_2 \in R$ así $st_1 = s$ y $st_2 = s$, y por tanto $st_1t_2 = (st_1)t_2 = st_2 = s$, luego $t_1t_2 \in R$. Concluimos que $R \in \Sigma$, y por la minimalidad de T, tenemos que $R = T$. Luego $s \in R$ y así $s^2 = ss = s$.

□

Observemos que de la demostración se obtiene más información, pues no es difícil ver que $T = \{s\}$, por ser T minimal.

Lema 3.6. ***(3.7 de [12])*** *Sea $(S, \circ)$ un semigrupo topológico compacto. Si $I \subset S$ es un ideal minimal, entonces I es un cerrado.*

Demostración. Sea $i \in I$ entonces considere la colección $iS = \{is : s \in S\}$. Note que iS es un ideal, pues tome $t \in S$ y $is \in iS$, entonces $(is)t = i(st)$ y $i(st) \in iS$.

Por otro lado note que $iS \subseteq I$ pues I es un ideal. Por ser I un ideal minimal, entonces $iS = I$. Además $iS = L_i(S)$ luego iS es cerrado pues L_i es continua y S es compacto. Por tanto I es cerrado; más aún, es un compacto. □

Teorema 3.7. ***(3.12 de [12])*** *Sea $(S, \circ)$ un semigrupo topológico a la izquierda compacto. Si $I \subset S$ es un ideal minimal entonces se cumple lo siguiente:*

1. *J el conjunto de idempotentes en I es no vacío.*
2. *$(\forall v \in J)(\forall p \in I)(vp = p)$.*
3. *$(\forall v \in J)(Iv$ es un grupo con identidad $v)$.*

Demostración.
1. Por ser I un ideal es un semigrupo y por ser minimal es compacto. Entonces, por el Teorema 3.5, I tiene idempotentes.
2. Sean $v \in J$ y $p \in I$ así $vI \subseteq I$ pues I es un ideal, pero vI es un ideal también como ya vimos más arriba, como I es minimal tenemos que $vI = I$. De esta manera existe $q \in I$ tal que $vq = p$ así multiplicando por v tenemos $vvq = vp$ pero v es idempotente entonces $p = vq = vvq = vp$ lo que queríamos ver.

3. Sea $q \in Iv$, entonces existe $p \in I$ tal que $q = pv$ así $qv = pvv = pv = q$ además del punto anterior $vq = q$, luego v es la identidad en Iv con la operación habitual.

   Veamos que q tiene inverso en Iv, sabemos que $qI \subset I$ es un ideal, de esta manera $qI = I$ entonces existe $q' \in I$ tal que $qq' = v$. Luego $q'v \in Iv$ y además $q(q'v) = (qq')v = vv = v$, por otro lado, note que: $(q'q)(q'q) = q'(qq')q = q'(qq')vq = q'(qq'v)q = q'q$, de esta manera tenemos que $(q'v)q = q'(vq) = q'q = (q'q)v = v$, pues $q'q$ es un idempotente.

   Luego Iv es un grupo.

□

3.2. EL SEMIGRUPO TOPOLÓGICO COMPACTO $E(X, f)$

Ya hemos hablado del semigrupo de Ellis anteriormente, sin embargo, en esta sección nos dedicaremos enteramente a él. Y probaremos algunos resultados conocidos sobre él que nos permitan efectuar la demostración de que distal es equivalente a que el semigrupo sea grupo. Particularmente probaremos que $E(X, f)$ es un semigrupo topológico compacto a la izquierda, con esto podremos entonces utilizar los resultados que probamos para otros semigrupos de este tipo.

Teorema 3.8. ***(2.1.1 de [4])*** *Sea (X, f) un s.d., y sean p, q dos ultrafiltros en $\beta\mathbb{N}$ entonces $f^p \circ f^q = f^{q+p}$*

Demostración. Sea $x \in X$, así en virtud del Teorema 1.36:

$$f^{q+p}(x) = (q+p) - \lim_{n\to\infty} f^n(x) = p - \lim_{m\to\infty} (q - \lim_{n\to\infty} f^{m+n}(x)).$$

Por otro lado:

$$f^p \circ f^q(x) = f^p(f^q(x)) = p - \lim_{m\to\infty} f^m(f^q(x))$$

y

$$p - \lim_{m\to\infty} f^q(f^m(x)) = p - \lim_{m\to\infty} (q - \lim_{n\to\infty} f^m(f^n(x))).$$

Lo que concluye la prueba. □

Teorema 3.9. *$E(X, f)$ es un semigrupo topológico a la izquierda compacto.*

Demostración. $E(X, f)$ es subespacio cerrado del compacto X^X y por tanto compacto. Como la composición es asociativa y clausurativa del Teorema 3.8, bastará demostrar que las funciones a la izquierda son continuas.

Sea $f^q \in E(X, f) = E$ una función arbitraría en el semigrupo de Ellis, definimos:

$$L_{f^q} : E \longrightarrow E,$$

de manera que $L_{f^q}(f^p) := f^p \circ f^q = f^{q+p}$ (note que es un producto a la izquierda en el sentido de los ultrafiltros, pero a la derecha en el sentido de la composición, para no causar confusiones las seguimos considerando funciónes **operar a la izquierda** y es a estaa a las que demostraremos su continuidad). Recordemos que la topología en E es la heredada por X^X, también conocida como la topología de la convergencia puntual.

Así, sea: $(f^{p_n})_n \subseteq E$ un sucesión de funciones que convergen puntualmente a una función $g \in E$. Bastará entonces ver que $(L_{f^q}(f^{p_n}))_n$ converge a $L_{f^q}(g)$. Sean $x \in X$ arbitrario, y $y = f^q(x)$. De esta manera $f^{p_n}(y) \to g(y)$. Luego $f^{p_n}(f^q(x)) \to g(f^q(x))$, entonces $(L_{f^q}(f^{p_n}))(x) \to (L_{f^q}(g))(x)$ y como x era arbitrario, la función es continua. □

Podemos también considerar el semigrupo de Ellis para un s.d. (X, f) con f un homeomorfismo. En este caso, podemos definir una acción de $\mathbb{Z}$ sobre X de la manera siguiente: $a : X \times \mathbb{Z} \to X$ dada por $a(x, m) = f^m(x)$. A las acciones de grupo también se les asocia un semigrupo de Ellis, que definimos a continuación.

Definición 3.10. *Sea (X, f) s.d con f un homeomorfismo. Definimos*

$$E(X, f, \mathbb{Z}) = \overline{\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}}.$$

Lema 3.11. *Sea (X, f) s.d con f un homeomorfismo, entonces*

$$E(X, f, \mathbb{Z}) = E(X, f) \cup E(X, f^{-1}).$$

Demostración. Note que:

$$E(X, f, \mathbb{Z}) = \overline{\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}} = \overline{\{f^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f^{-n} : n \in \mathbb{N}\}}$$

$$= \overline{\{f^n : n \in \mathbb{N}\}} \cup \overline{\{f^{-n} : n \in \mathbb{N}\}} = E(X, f) \cup E(X, f^{-1})$$

□

Teorema 3.12. *$E(X, f, \mathbb{Z})$ es un semigrupo topológico compacto a la izquierda.*

Demostración. Para que este semigrupo tenga sentido dijimos que necesitamos que f sea un homeomorfismo. Luego (X, f) y (X, f^{-1}) son sistemas dinámicos y por tanto $E(X, f)$ y $E(X, f^{-1})$ son semigrupos topológicos compactos a la izquierda. De esta manera $E(X, f, \mathbb{Z})$ es un espacio compacto, y es un semigrupo con la operación composición. Bastará mostrar que las funciones a la izquierda de $E(X, f, \mathbb{Z})$ son continuas. Sea $h \in E(X, f, \mathbb{Z})$ probaremos que L_h es continua en $E(X, f, \mathbb{Z})$.

Así, sea: $(g_n)_n \subset E(X, f, \mathbb{Z})$ una sucesión de funciones que convergen puntualmente a una función $g \in E(X, f, \mathbb{Z})$. Bastará entonces ver que $(L_h(g_n))_n$ converge a $L_h(g)$, veamos esto. Sea $x \in X$ arbitrario, y sea $y = h(x) \in X$, de esta manera $g_n(y) \to g(y)$ (porque es convergencia puntual) luego $g_n(h(x)) \to g(h(x))$, entonces $(L_h(g_n))(x) \to (L_h(g))(x)$ y como x era arbitrario entonces la función es continua. □

3.3. UN TEOREMA DE ELLIS SOBRE SISTEMAS DISTALES

En el contexto más amplio de acciones de grupo, Ellis estudió el semigrupo que lleva su nombre. Estudió particularmente cuándo el semigrupo de Ellis es en efecto un grupo con la composición como operación binaria. Sus resultados lo llevaron a postular una condición equivalente: la condición de distalidad. Centrados en los s.d. (X, f), revisaremos el resultado de Ellis.

Definición 3.13. *Un s.d. (X, f) se dice distal si $(\forall p \in \beta\mathbb{N})$ f^p es inyectiva.*

Definición 3.14. *En un s.d. (X, f) decimos que $x, y \in X$ son puntos proximales si existe $p \in \beta\mathbb{N}$ tal que $f^p(x) = f^p(y)$.*

De esta manera tenemos que un sistema dinámico es distal si y solo si no existen un par de puntos distintos que sean proximales.

Lema 3.15. ***(2.5 de [7])*** *Sea (X, f) un sistema dinámico y $E = E(X, f)$. Entonces son equivalentes:*

1. *(X, f) es distal.*

2. *El único idempotente de E es la identidad.*

Demostración. **1) $\Longrightarrow$ 2)** Suponga que (X, f) es distal y sean $x \in X$ y $u \in E$ un idempotente arbitrario entonces claramente $u(x) = u^2(x) = u(u(x))$, de la distalidad entonces $u(x) = x$.

2) $\Longrightarrow$ 1) Suponga que para todo $x \in X$ y todo $u \in E$ idempotente se tiene $u(x) = x$. Sean $x, y \in X$ un par de puntos proximales, bastará con demostrar que $x = y$. Para esto, afirmamos que existe un ideal minimal $I \subset E$ tal que para todo $i \in I$ $i(x) = i(y)$. Esto es cierto pues sabemos que existe $p \in \beta\mathbb{N}$ tal que $f^p(x) = f^p(y)$ y considere la colección: $\{g \circ f^p : g \in E\}$ que es un ideal (esto no es difícil de ver) de estas características así por lema de Zorn debe existir un minimal. Sea I un ideal minimal con estas propiedades, por el Teorema 3.7 I debe de tener un elemento idempotente u, que por hipótesis debe ser la identidad, entonces $x = u(x) = u(y) = y$.

□

Como se dijo anteriormente [7] siempre considera el caso más general de un sistema (G, X), sin embargo nosotros enunciamos y demostramos el teorema de Ellis para un sistema tipo cascada, es decir, $G = \mathbb{Z}$ como sigue:

Teorema 3.16. ***(Proposición 2.5 de [7]*** *Sea (X, f) un s.d. donde f es un homeomorfismo, entonces son equivalentes:*

1. *(X, f) y (X, f^{-1}) son sistemas distales.*

2. *La identidad es el único idempotente de $E(X, f, \mathbb{Z})$.*

3. *$E(X, f, \mathbb{Z})$ es un grupo.*

Demostración. **1) $\Longrightarrow$ 2)** Se deduce del Lema 3.15.

2) $\Longrightarrow$ 3) Sea $I \subset E(X, f, \mathbb{Z})$ un ideal minimal. Por el Teorema 3.7, I tiene al menos un idempotente e, que es la identidad por hipótesis. Por ser I un ideal con la identidad entonces $I = E(X, f, \mathbb{Z})$. Por otra parte del Teorema 3.7 Ie es un grupo, entonces $E(X, f, \mathbb{Z})$ es un grupo.

3) $\Longrightarrow$ 1) Sean $x, y \in X$ puntos proximales, entonces existe $p \in \beta\mathbb{N}$ tal que $f^p(x) = f^p(y)$. Como $f^p \in E(X, f, \mathbb{Z})$ entonces tiene inversa luego es inyectiva, así $x = y$ y el sistema es distal.

□

Note que el Teorema 3.7 esta planteado para cualquier semigrupo topológico compacto a la izquierda. Por esta razón a su vez podemos reformular el teorema anterior y concluír lo siguiente:

Teorema 3.17. ***(Proposición 2.5 apartado 7 de [7])*** *Sea (X, f) un s.d., entonces son equivalentes:*

1. *(X, f) es distal.*
2. *La identidad es el único idempotente de $E(X, f)$.*
3. *$E(X, f)$ es un grupo.*

Note también que la prueba es análoga que la del Teorema 3.16, puesto que los argumentos usados son válidos para cualquier semigrupo topológico compacto particularmente para $E(X, f, \mathbb{Z})$ y tambíen para $E(X, f)$ (incluso sin pedir que f sea homeomorfismo como hipótesis). Como tal, este resultado no esta explicito en [7], sin embargo se deduce trivialmente de los resultados de este artículo de revisión y de trabajos anteriores de Ellis. Nuestra labor principal en esta sección fue trasladar los resultados para el caso particular de un sistema (X, f) y poder así evidenciar de manera más clara estas conclusiones.

Para cerrar esta sección introducimos un resultado original no trivial que se deduce de los anteriores teoremas en [7].

Teorema 3.18. *Sea (X, f) un s.d distal entonces $E(X, f, \mathbb{Z})$ es igual a $E(X, f)$*

Demostración. Del Teorema 3.17 se deduce que f tiene inversa luego es un homeomorfismo y por tanto $E(X, f, \mathbb{Z})$ tiene sentido. Por otro lado como $E(X, f)$ es un grupo, todas las f^n con $n \in \mathbb{N}$ tienen inversa y esta inversa esta en $E(X, f)$.

Por tanto:

$$\{f^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{f^{-n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset E(X, f) \subset E(X, f, \mathbb{Z}).$$

Luego como $E(X, f)$ es cerrado entonces $E(X, f, \mathbb{Z}) = E(X, f)$. □

3.4. SISTEMAS DISTALES NUMERABLES

En este apartado demostraremos de una forma alternativa los Teoremas 3.16 y 3.17. Ellis lo hizo ayudandose con el concepto de ideal minimal, nosotros en cambio aprovecharemos que X es numerable para probar que ser distal es equivalente a que todo punto del espacio es periódico. Con ayuda de este resultado probaremos que $(f^p)^{-1} = (f^{-1})^p$ para todo $p \in \beta\mathbb{N}$, siempre y cuando (X, f) sea distal.

Proposición 3.19. *Sea (X, f) un s.d., con X un espacio métrico compacto infinito numerable con f inyectiva. Si existe $x \in X$ tal que $\overline{O_f(x)} = X$, entonces (X, f) no es distal.*

Demostración. Existen puntos de rango máximo en X por Lema 1.14. Entonces sea $\alpha < \omega_1$ el rango de Cantor-Bendixson máximo que pueden alcanzar los elementos de X. Como X es infinito numerable, entonces $0 < \alpha < \omega_1$. Mostraremos que todo punto de rango α es periódico. Sabemos que el conjunto de puntos de rango α es finito (ver Proposición 1.15). Dado que f es inyectiva, f preserva el rango para puntos con rango máximo por el Lema 1.16. Así los puntos de rango α son periódicos.

Como x tiene órbita densa, necesariamente x es aislado y por lo tanto $rcb(x) = 0$. Para mostrar que (X, f) no es distal, conseguiremos un punto y de rango α y un $p \in \beta\mathbb{N}$ tal que $f^p(y) = f^p(x)$.

Sea $d \in X$ tal que $rcb(d) = \alpha$. Como la órbita de x es densa en X, existe $p \in \beta\mathbb{N}$ tal que $f^p(x) = d$. Ya vimos que d es periódico, digamos de periodo n. Sea $0 \leq r < n$ tal que $p \in (n\mathbb{N} + r)^*$. De 2.24 tenemos que:

$$f^p(f^{-r}(d)) = d = f^p(x).$$

Como $y = f^{-r}(d)$ tiene rango α hemos mostrado lo que afirmamos. □

Teorema 3.20. *Sea (X, f) un s.d. y $C \subseteq X$ un cerrado. Si para todo punto $x \in C$, se tiene que $O_f(x) \subseteq C$ y $g = f \upharpoonright C$ entonces para todo $p \in \beta\mathbb{N}$ $g^p = f^p \upharpoonright C$.*

Demostración. Sea $x \in C$ entonces $g^p(x) = p - \lim_{n\to\infty} g^n(x)$. Pero para cada $n \in \mathbb{N}$, $g^n(x) = f^n(x)$ puesto que la órbita de x está contenida toda en C. Así $g^p(x) = p - \lim_{n\to\infty} f^n(x) = f^p(x)$. Como x era arbitrario entonces $g^p = f^p \upharpoonright C$. □

Teorema 3.21. *Sea (X, f) s.d. con X espacio métrico compacto numerable, entonces son equivalentes:*

1. *Todos los puntos de X son periódicos.*

2. *(X, f) es distal.*

Demostración. **1) $\Longrightarrow$ 2)** Como todos los puntos son periódicos para cada x se tiene que $O_f(x) = \omega_f(x)$.

Sean $a, b \in X$ dos puntos distintos. Si $O_f(a) \neq O_f(b)$ entonces $O_f(a) \cap O_f(b) = \emptyset$ de lo que se concluye que a y b no pueden ser proximales.

Por otro lado si $O_f(a) = O_f(b)$, entonces sin pérdida de generalidad diga $a = f^r(b)$, con $0 < r < n$, donde n es el periodo de a y b. De esta manera para cada $p \in \beta\mathbb{N}$ debido al lema 2.24:

$$f^p(a) = f^p(f^r(b)) = f^r(f^p(b)) \neq f^p(b)$$

Luego no pueden ser proximales, es decir, que no hay un par de puntos distintos que sean proximales, entonces el sistema es distal.

2) $\Longrightarrow$ 1) Por reducción al absurdo, suponga que existe un punto x que no es periódico. Como f inyectiva pues el sistema es distal, entonces x tiene órbita infinita.

Así $g = f \upharpoonright \overline{O_f(x)} : \overline{O_f(x)} \longrightarrow \overline{O_f(x)}$ del Teorema 3.20 $(\overline{O_f(x)}, g)$ es un sistema distal sobre el espacio compacto infinito $\overline{O_f(x)}$. Sin embargo, este espacio tiene una órbita densa, lo que contradice la proposición 3.19. □

Corolario 3.22. *Sea (X, f) s.d. con X espacio métrico compacto numerable. Si (X, f) es distal entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Como (X, f) es distal ya tenemos que f es inyectiva, basta mostrar la sobreyectividad. Sea $y \in X$, veremos que y es imagen de algún elemento de X. Como (X, f) es distal entonces todo punto es periódico, luego y es periódico, digamos de periodo n, entonces $y = f(f^{n-1}(y))$, lo que concluye la prueba.

□

Ahora probaremos un lema muy útil ya que con la caracterización que hemos dado de los sistemas distales con X numerable este lema nos permitirá ver de manera muy sencilla que ser distal implica que $E(X, f, \mathbb{Z})$ es un grupo.

Lema 3.23. *Sea (X, f) un s.d con f un homemorfismo. Si $x \in X$ es un punto periódico y $g = f^{-1}$ entonces para todo $p \in \beta\mathbb{N}$ se tiene $f^p(g^p(x)) = x = g^p(f^p(x))$*

Demostración. Para ultrafiltros principales es evidente la afirmación, así que nos centraremos en el caso de p no principal. Sea n el periodo de x y $0 \leq r < n$ tal que $p \in (n\mathbb{N}+r)^*$. Entonces para cualquier $z \in X$ de periodo n se cumple que (ver Lema 2.24)

$$f^p(z) = f^r(z) \text{ y } g^p(z) = ((f^{-1})^p)(z) = f^{-r}(z).$$

Como $f^r(x)$ y $f^{-r}(x)$ tienen periodo n tenemos:

$$f^p(g^p(x)) = f^p(f^{-r}(x)) = f^r(f^{-r}(x)) = x = f^{-r}(f^r(x)) = g^p(f^r(x)) = g^p(f^p(x))$$

□

Ahora daremos una prueba diferente del teorema de Ellis para sistemas distales.

Teorema 3.24. *Sea (X, f) un s.d. con X espacio métrico compacto numerable, entonces son equivalentes:*

1. *(X, f) es distal.*
2. *$E(X, f, \mathbb{Z})$ es un grupo.*

Demostración. **1) $\implies$ 2)** Como el sistema es distal tiene sentido hablar de $E(X, f, \mathbb{Z})$, pues f es homeomorfismo del Corolario 3.22, además del Teorema 3.21:

$$(\forall x \in X)(x \text{ es periódico}).$$

Al ser un semigrupo topológico compacto a la izquierda, bastará probar que toda función en $E(X, f, \mathbb{Z})$ tiene inversa. Afirmamos que se tiene la siguiente identidad:

$$(\forall p \in \beta\mathbb{N})((f^p)^{-1} = (f^{-1})^p).$$

Esto es claro puesto que del lema 3.23 sabemos que f^p y $(f^{-1})^p$ se comportan como funciones inversas para los puntos periódicos, y todos los puntos son periódicos. Luego $E(X, f, \mathbb{Z})$ es un grupo.

2) $\implies$ 1) Sean $x, y \in X$ y $p \in \beta\mathbb{N}$ tales que $f^p(x) = f^p(y)$. Como $f^p \in E(X, f, \mathbb{Z})$, entonces f^p tiene inversa y así f^p es inyectiva. Por lo tanto, $x = y$ y el sistema es distal. □

Hemos probado entonces usando argumentos más sencillos el Teorema de Ellis sobre sistemas distales para el caso de X numerable. Queremos ver para este caso también que la distalidad implica que el semigrupo $E(X, f, \mathbb{Z})$ y el semigrupo $E(X, f)$ (que también notamos como $E(X, f, \mathbb{N})$) son el mismo, como se deduce directamente del trabajo de Ellis. Nosotros mostraremos un poco más, pues nuestra caracterización nos permite mostrar que para X numerable se tiene que la distalidad es equivalente a que $E(X, f, \mathbb{N}) = E(X, f, \mathbb{Z})$. Para probar esto necesitaremos una versión generalizada del conocido teorema chino de los restos, que postularemos en seguida, inmediatamente después probaremos nuestro resultado.

Teorema 3.25. ***(Teorema chino de los restos):*** *Suponga que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones de congruencias:*

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \ (mod\ n_1) \\ x &\equiv a_2 \ (mod\ n_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv a_r \ (mod\ n_r) \end{aligned}$$

Este sistema tiene solución si y solo si para cada $1 \leq i, j \leq r$

$$a_i \equiv a_j \ (mod\ m.c.d(n_i, n_j))$$

Teorema 3.26. *Sea* (X, f) *un s.d. con* X *numerable, entonces son equivalentes:*

1. (X, f) *es distal.*
2. $E(X, f, \mathbb{Z}) = E(X, f)$.

Demostración. **1)** $\Longrightarrow$ **2)** Sabemos que

$$E(X, f, \mathbb{Z}) = \overline{\{f^n : n \in \mathbb{N}\}} \cup \overline{\{f^{-n} : n \in \mathbb{N}\}} = E(X, f, \mathbb{N}) \cup E(X, f^{-1}, \mathbb{N}).$$

Bastará con que probemos: $E(X, f^{-1}, \mathbb{N}) \subset E(X, f, \mathbb{N})$. Pero esto lo podemos probar demostrando simplemente que $f^{-1} \in E(X, f, \mathbb{N})$, dado que $E(X, f, \mathbb{N})$ es cerrado bajo composiciones. Tenemos entonces dos casos a considerar:

1. $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ **es finito:** Si se tiene esto, es inmediato que $f^{-1} \in E(X, f, \mathbb{N})$.
2. $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ **es infinito:** En este caso tenemos que: $f^{-1} \notin \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$. Por tanto si $f^{-1} \in E(X, f, \mathbb{N})$ es porque $f^{-1} = f^p$ para algún p no principal. En efecto, sea P_f el conjunto de todos los periodos posibles de f entonces afirmamos que si $p \in \bigcap_{k \in P_f} (k\mathbb{N} + (k-1))^*$ entonces $f^p = f^{-1}$. Esto es claro, puesto que si $x \in X$, entonces x tiene periodo $k \in P_f$ (pues el sistema es distal). De esta manera $f^p(x) = f^{k-1}(x)$ (por como se escogió a p), pero $f^{k-1}(x) = f^{-1}(x)$ y como x era arbitrario entonces tenemos que nuestra afirmación es verdadera.

   Bastará entonces ver que $\bigcap_{k \in P_f} (k\mathbb{N} + (k-1))^* \neq \emptyset$. Por la compacidad de $\beta\mathbb{N}$ es suficiente con mostrar que si $k_1, k_2, ..., k_r \in P_f$ son arbitrarios entonces

   $$\bigcap_{i=1}^{r} (k_i\mathbb{N} + (k_i - 1))^* \neq \emptyset,$$

   y esto es cierto siempre que $\bigcap_{i=1}^{r} (k_i\mathbb{N} + (k_i - 1)) \neq \emptyset$. Es decir, que lo que en realidad tenemos que comprobar es que el siguiente sistema de ecuaciones de congruencias tiene solución: $x \equiv (k_i - 1)$ (mod k_i) para $1 \leq i \leq r$. Por el Teorema chino de los restos debemos verificar si:

   $$(k_j - 1) \equiv (k_i - 1) \ (\text{mod } g.c.d(k_i, k_j))$$

   para $1 \leq i, j \leq r$, pero esto es ver si $g.c.d(k_i, k_j)$ divide a $(k_j - 1) - (k_i - 1) = k_j - k_i$ y esto es claramente cierto. Concluimos que en este caso también se tiene $f^{-1} \in E(X, f, \mathbb{N})$ y de esta manera $E(X, f, \mathbb{Z}) = E(X, f, \mathbb{N})$.

2) $\Longrightarrow$ 1) Suponga, por reducción al absurdo, que (X, f) no es distal. Así existe $x \in X$ no periódico (por el Teorema 3.21). Por ser f inyectiva, entonces x tiene órbita infinita. Por otro lado como $E(X, f, \mathbb{Z}) = E(X, f, \mathbb{N})$, existe $p \in \beta\mathbb{N}$ tal que $f^p = f^{-1}$, además p debe de ser no principal, pues en caso contrario se tendría que x es periódico. Sea $\alpha = rcb(x)$. Por ser p no principal y la órbita de x infinita, tenemos que $f^p(x)$ tiene rango mayor que α, pero $f^p = f^{-1}$ y f^{-1} es un homeomorfismo luego $f^{-1}(x)$ tiene rango α, lo que es una contradicción. □

Existen dos fortalezas que destacamos de esta nueva prueba para el caso numerable. En primer lugar, debemos destacar, como ya se dijo antes que probamos la equivalencia de la distalidad con la igualdad del semigrupo asociado a $\mathbb{Z}$ y el semigrupo asociado a $\mathbb{N}$, que es un poco más de lo que se tenía con la otra prueba. Sin embargo, lo más interesante de esta demostración es que podemos ampliarla para cualquier p no principal y dar una idea de quien es el ultrafiltro q tal que f^q es la inversa de f^p, criterio con el que tampoco se contaba puesto que la existencia de las inversas en la prueba clásica de Ellis estaba garantizada por la existencia de ideales minimales, más no por una construcción de dichas inversas. Este resultado lo enunciamos como un teorema y lo probamos a continuación:

Teorema 3.27. *Sea (X, f) un s.d. distal para un espacio X numerable. Si $p \in \mathbb{N}^*$ es tal que $p \in \bigcap_{k \in P_f} (k\mathbb{N} + r_k)^*$, (con $0 \leq r_k < k$), entonces existe $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $q \in \bigcap_{k \in P_f} (k\mathbb{N} + (k - r_k))^*$ y f^q es la inversa de f^p.*

Demostración. Es sencillo ver que si $q \in \bigcap_{k \in P_f} (k\mathbb{N} + (k - r_k))^*$ será la inversa de f^p. En efecto, dado x arbitrario, entonces por la distalidad (ver Teorema 3.21) x será periodico con periodo $k \in P_f$. Tenemos entonces que:

$$f^q(f^p(x)) = f^q(f^{r_k}(x)) = f^{k-r_k}(f^{r_k}(x)) = x.$$

Bastaría probar que esta q existe, pero como el sistema es distal, esto esta garantizado pues la inversa de f^p debe estar en $E(X, f)$ por el teorema 3.26 y además debe estar en $\bigcap_{k \in P_f} (k\mathbb{N} + r_k)^*$ (no es difícil ver que lo contrario no es posible). □

Hemos visto que esta caracterización de los sistemas distales numerables como aquellos para los que todo punto es periódico es bastante útil. A continuación mostraremos un resultado original sobre estos sistemas que nos dice un poco más que el resultado de Ellis.

Teorema 3.28. *Sea (X, f) un s.d. con X espacio métrico compacto numerable, entonces son equivalentes:*

1. *(X, f) es distal.*

2. *$E(X, f)$ es un grupo abeliano.*

Demostración. **1) $\Longrightarrow$ 2)** De los teoremas 3.24 y 3.26 se deduce que $E(X, f)$ es un grupo. Bastará que probemos que es conmutativo bajo la operación composición. En efecto, sean $p, q \in \beta\mathbb{N}$ veremos $f^p \circ f^q = f^q \circ f^p$. Sea $x \in X$ arbitrario, como (X, f) es distal tenemos por 3.21 que x es periódico. Si $n \in \mathbb{N}$ es el periodo de x entonces $p \in (n\mathbb{N} + l)^*$ y $q \in (n\mathbb{N} + r)^*$ para algún l y r con $0 \leq l, r < n$. De esta manera del lema 2.24 como todo punto de la órbita de x tiene periodo n obtenemos que:

$$f^p(f^q(x)) = f^p(f^r(x)) = f^l(f^r(x)) = f^r(f^l(x)) = f^q(f^l(x)) = f^q(f^p(x)).$$

Como x era arbitrario entonces concluimos que $f^p \circ f^q = f^q \circ f^p$, lo que termina la prueba.

2) $\Longrightarrow$ 1) De los teoremas 3.24 y 3.26 se deduce de manera trivial. □

3.5. CARDINAL DE UN SISTEMA DISTAL NUMERABLE

Para finalizar este capítulo queremos recordar una pregunta que se planteó terminando el capítulo **3**, específicamente en la sección 2.3 de este trabajo. Ahí nos preguntamos basándonos en el teorema 2.27 de [5] si es verdadera la siguiente afirmación: "Si P_f es finito, entonces $E(X, f)$ es numerable", es decir, nos gustaría saber si el teorema 2.27 es en realidad una doble implicación.

Dado que en este capítulo hemos podido dar una caracterización bastante completa de los sistemas distales, aprovechamos esto para resolver este interrogante de manera parcial, solamente para sistemas distales quedando todavía por descubrir qué pasa para sistemas no distales.

Para los siguientes resultados recuerde que para cada n el espacio:

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$$

es un grupo con la suma módulo n.

Lema 3.29. *Sea (X, f) un s.d con X numerable. Defina la función $h : E(X, f) \to \prod_{k\in P_f} \mathbb{Z}_k$ por $h(f^p) = (r_k^p)_{k\in P_f}$, si $k\mathbb{N} + r_k^p \in p$ para todo $k \in P_f$, donde $p \in \beta\mathbb{N}$. Entonces h esta bien definida y es continua.*

Demostración. Para cada $k \in P_f$ los conjuntos $k\mathbb{N}+j$ con $0 \leq j < k$ forman una partición de $\mathbb{N}$, por tanto h esta bien definida.

Como X es numerable entonces $E(X, f)$ es metrizable, de esta manera podemos probar la continuidad por medio de sucesiones.

Sea $(f^{p_n})_n$ una sucesión en E que converge puntualmente a f^p, queremos ver que:

$$(r_k^{p_n})_{k\in P_f} = h(f^{p_n}) \to h(f^p) = (r_k^p)_{k\in P_f}.$$

Bastará con probar entonces que para cada $k \in P_f$ se tiene que $r_k^{p_n} \to r_k^p$ cuando $n \to \infty$. En efecto, si $k \in P_f$ entonces existe $x \in X$ con periodo k. En consecuencia de la convergencia puntual y de la definición de h tenemos que $f^{p_n}(x) \to f^p(x) = f^{r_k}(x)$. Como x tiene periodo k entonces $(f^{p_n}(x))_n$ es una sucesión contenida en $\omega_f(x) = \left\{x, f(x), f^2(x), ..., f^{k-1}(x)\right\}$ que es claramente un conjunto finito. Por tanto como $(f^{p_n}(x))_n$ converge entonces es eventualmente constante. De esta manera podemos considerar sin pérdida de generalidad que para todo $n \in \mathbb{N}$ $f^{p_n}(x) = f^p(x) = f^{r_k}(x)$ pero para cada n por definición de h sabemos que $f^{p_n}(x) = f^{r_k^{p_n}}(x)$ y $p_n \in k\mathbb{N} + r_k^{p_n}$ $0 \leq r_k^{p_n} < k$. De lo que se deduce que para toda n $r_k^{p_n} = r_k^p$ lo que implica que $r_k^{p_n} \to r_k^p$.

Como k era arbitrario concluimos que h es continua.

□

Lema 3.30. *Si (X, f) es un s.d. distal con X numerable entonces $E = E(X, f)$ es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{k\in P_f} \mathbb{Z}_k$.*

Demostración. En efecto considere la función h definida para el lema 3.29, esta función es continua del espacio compacto E en $\prod_{k\in P_f} \mathbb{Z}_k$ equipado con la topología producto, de esta manera basta mostrar que h es inyectiva.

La inyectividad de h es clara pues sean $p, q \in \beta\mathbb{N}$ tales que $h(f^p) = h(f^q)$, de esta manera para todo $k \in P_f$ se tiene que $k\mathbb{N} + r_k^p \in p$ y $k\mathbb{N} + r_k^p \in q$.

Queremos ver que $f^p = f^q$ para esto sea x un punto arbitrario en X, como el sistema es distal entonces del lema 3.21 todo punto es periódico, en particular x tiene periodo $k \in P_f$, además note que solo hay tres casos posibles:

1. **p y q son no principales:** Si esto es así entonces por el lema 2.24 $f^p(x) = f^{r_k^p}(x) = f^q(x)$ y como x era arbitrario entonces $f^p = f^q$.

2. **p y q son ultrafiltros principales:** entonces $f^p = f^n$ y $f^q = f^m$ para $n, m \in \mathbb{N}$ y como $k\mathbb{N} + r_k^p \in p \cap q$ entonces $n, m \in k\mathbb{N} + r_k^p$, de lo que se deduce que $f^p(x) = f^{r_k^p}(x) = f^q(x)$ y como x era arbitrario entonces $f^p = f^q$.

3. **Uno de los dos es un ultrafiltro principal y el otro un ultrafiltro no principal:** Sin pérdida de generalidad suponga que $p \in \mathbb{N}^*$ y $f^q = f^m$, con un argumento similar tenemos que $m \in k\mathbb{N} + r_k^p$ y por tanto $f^q(x) = f^{r_k^p}(x)$ y del lema 2.24 $f^p(x) = f^{r_k^p}(x)$. Como x era arbitrario entonces $f^p = f^q$

Concluimos que h es inyectiva y por tanto una inmersión topológica.

□

Teorema 3.31. *Sea (X, f) un s.d. distal con X numerable. Entonces son equivalentes:*

1. *P_f es finito.*

2. *$E(X, f)$ es numerable, particularmente $E(X, f)$ es finito.*

Demostración. **1) $\Longrightarrow$ 2)** Suponga que P_f es finito entonces $\prod_{k \in P_f} \mathbb{Z}_k$ es finito y del lema 3.30 $E(X, f)$ es homeomorfo a un subespacio de $\prod_{k \in P_f} \mathbb{Z}_k$, por tanto $E(X, f)$ es finito.

2) $\Longrightarrow$ 1) Suponga que $E(X, f)$ es a lo sumo numerable y por reducción al absurdo suponga a su vez que P_f es infinito, entonces del teorema 2.27 $E(X, f)$ es homeomorfo a Cantor, lo que es absurdo. Por tanto P_f es finito, lo que termina la prueba. □

Queremos resaltar que como solo lo resolvimos para sistemas distales queda todavía pendiente analizar el caso de un sistema no distal. Pero dada nuestra caracterización de los sistemas distales esto es equivalente a pensar que solo falta revisar el caso de los sistemas que tengan a lo menos un punto no periódico, lo que creemos hace el problema más accesible para próximas investigaciones.

Capítulo 4

SISTEMAS DÉBILMENTE CASI PERIÓDICOS (WAP)

En este capítulo trataremos el tercer aspecto mencionado en la introducción. Analizaremos condiciones sobre un sistema (X, f) para que su semigrupo consista solamente de funciones continuas.

Definición 4.1. *Un s.d.* (X, f) *es* ***WAP (Weakly Almost Periodic)*** *si el semigrupo de Ellis* $E(X, f)$ *consiste solo de funciones continuas.*

Comenzaremos presentando algunos resultados de la literatura. En particular los resultados de Szuca (motivados por los de Bruckner y Ceder) que nos dice que para funciones del intervalo unitario en si mismo tenemos una situación muy especial: Si existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que f^p es continua, entonces todas las funciones en $E(X, f)$ son continuas, es decir (X, f) es WAP. No se sabe si existe otra espacio diferente a $[0, 1]$ que tenga esa propiedad. Los trabajos de García et al [3, 5] muestran resultados interesantes cuando X es compacto métrico numerable. Como un aporte a este problema, en la sección 4.3 mostramos que los sistemas distales con X métrico compacto y numerable son WAP.

4.1. ALGUNOS RESULTADOS DE LA LITERATURA

Ahora enunciamos los resultados que hemos encontramos más relevantes dentro de nuestra investigación bibliográfica sobre la temática.

Teorema 4.2. ***(Bruckner-Ceder, Teorema 1.2 de [1])*** *Para una función continua* $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\omega_f : [0, 1] \to K([0, 1])$ *es continua.*

(2) $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es equicontinuo.*

(3) ω_{f^2} *es continua.*

(4) $Fix(f^2) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^n([0, 1])$.

(5) $Fix(f^2)$ *es conexo y* $\forall x$ $(f^{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converje a un punto en* $Fix(f^2)$.

(6) $Fix(f^2)$ *es conexo.*

(7) *ω_f es semicontinua inferiormente.*

(8) *ω_f es semicontinua superiormente.*

Piotr Szuca en [11] amplío el resultado de [1] dando más condiciones equivalentes a que el s.d. en $[0,1]$ sea WAP. Estas condiciones están enunciadas en el siguiente teorema:

Teorema 4.3. ***(Szuca, Teorema 2 de [11])*** *Para una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ las siguientes condiciones son equivalentes a las condiciones* ***(1) -(8)*** *del Teorema 4.2:*

(9) *$\{f^p : p \in \beta\mathbb{N}\}$ es equicontinuo.*

(10) *Existe $g \in \mathbb{N}^*$ tal que f^p es continua.*

Otro teorema interesante lo encontramos en García *et al.* [3]. Este teorema afirma que en un espacio numerable donde todo punto límite sea periódico o bien el sistema (X,f) es WAP o bien toda $p-$iterada con $p \in \mathbb{N}^*$ es discontinua. Como en este trabajo también analizamos fuertemente el espacio $E(X,f,\mathbb{Z})$ queremos de alguna forma ampliar este resultado al semigrupo asociado a $\mathbb{Z}$.

Teorema 4.4. ***(Teorema 3.9 de [3])*** *Sea (X,f) un sistema dinámico donde X es métrico compacto y numerable y todo punto de X' es periódico. Entonces para cada $x \in X$ o bien toda $g \in E(X,f)\setminus\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es continua en x o toda $g \in E(X,f)\setminus\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es discontinua en x.*

El ejemplo 4.1 de [3] muestra que la hipótesis de que todo punto de X' debe ser periódico no puede ser debilitada por "todo punto de X' tiene órbita finita".

4.2. CONTINUIDAD DE ω_f

Observemos que de los teoremas 4.2 y 4.3, se deduce que un sistema $([0,1],f)$ es WAP si y solo si ω_f es continua. Es natural preguntarse si ese resultado se puede extender a otros sistemas dinámicos. En esta sección presentaremos algunos resultados preliminares sobre esta pregunta. Particularmente para el espacio $\omega+1$, que es el caso mas sencillo posible encontramos varios resultados.

Ejemplo 4.5. *Considere el ejemplo 1.42, como esta definido entonces para todo x en el espacio y toda $p \in \mathbb{N}^*$ se tiene que $f^p(x) = 0$ lo que implica que $\omega_f(x) = \{0\}$, por tanto ω_f es una función constante y por tanto continua.*

Teorema 4.6. *Sea (X,f) un s.d. WAP, entonces ω_f es semicontinua inferiormente.*

Demostración. Sea U una vecindad abierta de $y \in X$ bastará con ver que

$$\{x \in X : \omega_f(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

es un abierto. Por la definición de la función ω_f tenemos:

$$\{x \in X : \omega_f(x) \cap U \neq \emptyset\} = \{x \in X : \{f^p(x) : p \in \mathbb{N}^*\} \cap U \neq \emptyset\}$$

$$= \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \{x \in X : f^p(x) \in U\}.$$

de esta manera:

$$\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}\{x\in X : f^p(x)\in U\} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*}(f^p)^{-1}(U)$$

Por tanto es unión arbitraría de abiertos pues las f^p son continuas.

$\square$

Ahora queremos ver si la semicontinuidad superior de ω_f tiene algo que ver con la continuidad de las $p-$iteradas. Resulta que así es bajo la hipótesis de que el sistema cuente con un punto límite fijo, veamos el resultado a continuación:

Teorema 4.7. *Sean (X, f) un s.d., con $y \in X'$ un punto fijo. Si la función ω_f es semicontinua superiormente entonces* $(\forall p \in \mathbb{N}^*)(f^p$*es continua en* $y)$

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en X que converge a y, y sea $p \in \mathbb{N}^*$. Queremos mostrar que: $f^p(x_n) \to f^p(y) = y$, así pues sea $U \subset X$ una vecindad abierta de y, bastará mostrar que la sucesión $(f^p(x_n))_n$ se queda eventualmente en U.

Sabemos que $\{y\} = \omega_f(y) \subseteq U$ y de la semicontinuidad superior de ω_f se deduce que $V = \{x \in X : \omega_f(x) \subseteq U\}$ es un abierto y $y \in V$, luego $U \cap V = \{x \in U : \omega_f(x) \subseteq U\}$ es una vecindad abierta de y. De esta manera existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $x_n \in U \cap V$, por tanto $\omega_f(x_n) \subset U$ para $n \geq n_0$.

Concluimos entonces que si $n \geq n_0$ $f^p(x_n) \in U$, lo que termina la prueba.

$\square$

Recordemos que $\omega+1$ es una sucesión convergente junto a su punto límite que en esta sección denotaremos por d.

Teorema 4.8. *Sea $X = \omega+1$ y $f : X \longrightarrow X$ una función continua e inyectiva, entonces (X, f) es WAP.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{N}^*$, basta demostrar que la p-iterada f^p es continua para el punto límite d. Observe que por ser f inyectiva y continua, necesariamente $f(d) = d$ (Lema 1.16). Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $X \setminus \{d\}$ que converge a d, queremos ver que:

$$f^p(x_n) \to f^p(d) = d.$$

Por reducción al absurdo suponga que $f^p(x_n) \not\to d$. Como X es compacto podemos decír sin pérdida de generalidad que existe un punto aislado $z \in X$ tal que $f^p(x_n) \to z$ (pasandola a una subsucesión de ser necesario). Por tanto la sucesión $(f^p(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente igual a z. Y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f^p(x_n) = z$ para todo n. Como z es aislado cada x_n debe tener órbita finita y como f es inyectiva entonces cada x_n es periódico con z en su órbita. Se deduce así que todos los x_n tienen la misma órbita lo que es imposible. Concluimos entonces que el sistema es WAP.

$\square$

Corolario 4.9. *Sea $X = \omega+1$ y $f : X \longrightarrow X$ un homeomorfismo, entonces toda función en $E(X, f, \mathbb{Z}) = \overline{\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}}$ es continua.*

Demostración. Como (X, f) y (X, f^{-1}) son sistemas dinámicos donde las funciones f y f^{-1} son inyectivas entonces ambos sistemas son WAP y quedá demostrado. $\square$

Teorema 4.10. *Sea $(\omega + 1, f)$ un s.d donde d es un punto fijo. Si ω_f es semicontinua superiormente entonces el sistema es WAP.*

Demostración. Del Teorema 4.7 tenemos que las funciones f^p son continuas en d y como este es el único punto límite del sistema entonces las f^p son todas continuas, lo que concluye la prueba. □

Teorema 4.11. *Sea $(\omega + 1, f)$ un s.d. Suponga que d es fijo. Si ω_f es semicontinua superiormente entonces ω_f es continua.*

Demostración. Del teorema 1.6 bastará demostrar que es semicontinua inferiormente. Como d es un punto fijo entonces el sistema es WAP por el teorema 4.10. Por último como el sistema es WAP del teorema 4.6 ω_f es semicontinua inferiormente lo que concluye la prueba. □

4.3. SISTEMAS DISTALES VS. SISTEMAS WAP

En el capítulo 4 encontramos que la condición de distalidad es bastante fuerte. Particularmente en espacios numerables, pues implica que todo punto es periódico. Por tanto los sistemas dinámicos distales en espacios numerables no son bastante complejos. Es por esta razón que queremos saber si esto implica que sean sistemas WAP. La respuesta es afirmativa y probamos el resultado a continuación:

Teorema 4.12. *Sea (X, f) s.d. tal que X es numerable. Si (X, f) es distal entonces (X, f) es WAP.*

Demostración. Como (X, f) es distal de 3.22, 3.24 y 3.26 tenemos entonces que: f es un homeomorfismo y $E(X, f)$ es un grupo. Luego $f^{-1} \in E(X, f) = \{f^p : \ p \in \beta\mathbb{N}\}$. De aquí se deduce que hay dos casos posibles:

Caso 1. Suponga que existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p = f^{-1}$. Por ser distal del Teorema 3.21 todo punto de X es periódico. Luego del teorema 4.4 basta que una $q-$iterada con q no principal sea continua para que todas sean continuas pero $f^p = f^{-1}$ es continua y p es no principal. Por tanto el sistema es WAP.

Caso 2. Por otro lado considere que no existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $f^p = f^{-1}$. Como f^{-1} está en el semigrupo entonces $f^n = f^{-1}$ donde $n \in \mathbb{N}$, pero esto implica que el semigrupo es finito, luego el sistema es WAP.

□

Sin embargo que el sistema sea WAP no implica que sea distal, recordemos el ejemplo 1.42. En este ejemplo el s.d. es muy simple y sabemos que es WAP, pero la función nula (que no es inyectiva) es una de las p-iteradas y por tanto el sistema no es distal.

Otra problemática que exploramos en este trabajo es la siguiente: el teorema 4.4 afirma que si todo punto límite en un s.d. (X, f) es periódico entonces $E(X, f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ contiene solo funciones continuas ó solo funciones discontinuas. Nos hacíamos la siguiente pregunta: Considere un s.d. (X, f) con f homeomorfismo tal que todo punto límite es periódico. De esta manera el teorema 4.4 implica que $E(X, f^{-1}) \setminus \{f^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ contiene solo funciones continuas ó solo funciones discontinuas y que $E(X, f) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ contiene solo funciones continuas ó solo funciones discontinuas. ¿Esto implicará que $E(X, f, \mathbb{Z}) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ contiene solo funciones continuas ó solo funciones discontinuas ó ¿puede darse el caso de que toda función de $E(X,f)\setminus\{f^n : n\in\mathbb{N}\}$ sea continua y toda función de $E(X,f^{-1})\setminus\{f^{-n} : n\in\mathbb{N}\}$ discontinua?

Esta pregunta la resolvimos concluyendo que no es posible que toda función de $E(X,f)\setminus\{f^n : n\in\mathbb{N}\}$ sea continua y toda función de $E(X,f^{-1})\setminus\{f^{-n} : n\in\mathbb{N}\}$ discontinua ni viceversa. Esto amplía el teorema 4.4 siempre que tenga sentido hablar del semigrupo $E(X,f,\mathbb{Z})$, es decir, siempre que f sea un homeomorfismo. Para probar este resultado debemos demostrar algunos resultados previos que iremos dando a continuación:

Corolario 4.13. *Sea (X,f) un s.d. con X numerable y f un homeomorfismo. Si todo punto $x\in X'$ es periódico entonces para todo $p\in\beta\mathbb{N}$ $f^p\restriction X'$ es continua.*

Demostración. Observe que X' es un subconjunto cerrado de X. Como f es homeomorfismo si $x\in X'$ entonces $O_f(x)\subseteq X'$, luego podemos aplicar el teorema 3.20 para el s.d. (X',g), donde $g=f\restriction X'$. De lo que se deduce que: $g^p=f^p\restriction X'$. Observe también que el sistema (X',g) es distal por hipótesis, luego es un sistema WAP dado el Teorema 4.12, lo que termina la prueba. □

Es necesario aclarar que en el resultado anterior no se puede concluir que necesariamente las p-iteradas son continuas. Dado que lo que se demostró es que si obviamos los puntos aislados estas funciones deben de ser continuas, pero es posible que haya una sucesión (x_n) de puntos aislados que converge a un punto límite x tal que $f^p(x_n)\not\to f^p(x)$. Lo anterior lo verificamos mediante el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.14. *Considere $X=\mathbb{Z}\cup\{d,-d\}$, donde d es el límite de la sucesión de los naturales y $-d$ el límite de la sucesión de los enteros negativos (este espacio puede entenderse como la suma topológica de dos copias de $\omega+1$). Y sea f la función que a cada $n\in\mathbb{Z}$ le asigna $f(n)=n-1$ y deja fijos a los dos puntos límites. Por tanto (X,f) es un s.d. y f es un homeomorfismo. Observe que para todo $p\in\mathbb{N}^*$ y todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $f^p(n)=-d$, pero $f^p(d)=d$. De lo que concluimos que f^p es discontinua para toda $p\in\mathbb{N}^*$. Sin embargo quitando todos los puntos aislados y dejando sólo los límites d y $-d$ las f^p serían claramente continuas.*

Introducimos ahora un lema muy útil que encontramos en la literatura.

Lema 4.15. *(Teorema 1.3.5 de [4]) Sea $p\in\mathbb{N}^*$. Si $(x_n)_n$ es una sucesión en X tal que $x=p-\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ y f es continua entonces $f(x)=p-\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$.*

Demostración. Sea $U\subseteq X$ una vecindad abierta de $f(x)$. Como $f^{-1}(U)$ es una vecindad abierta de x (por la continuidad de f) entonces $\{n : x_n\in f^{-1}(U)\}\in p$. Pero esto implica que:

$$\{n : f(x_n)\in U\}\in p$$

lo que termina la prueba. □

Dejamos sin demostración el tercer ítem del lema 2.24, del lema 4.15 se deduce que las $p-$iteradas de f conmutan con las $n-$iteradas de f (que es mucho más general que este ítem de 2.24). Daremos su demostración por completitud.

Lema 4.16. *(Se deduce del lema 2.1 de [5]) Sea (X,f) un s.d entonces para todo $p\in\beta\mathbb{N}$ y todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que:*

$$f^p\circ f^n=f^n\circ f^p.$$

Demostración. Sean n y p como en la hipótesis. Como $p \in \beta\mathbb{N}$ podemos considerar dos casos posibles:

1. p **es un ultrafiltro principal:** Si esto es así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^p = f^m$ y esta función conmuta claramente con f^n.

2. p **es no principal:** Para ver esto considere un punto $x \in X$ arbitrario entonces del lema 4.15:

$$f^n(f^p(x)) = f^n(p - \lim_{m\to\infty} f^m(x)) = p - \lim_{m\to\infty} f^n(f^m(x)).$$

   Pero f^m y f^n conmutan pues n y m son números naturales luego:

$$f^n(f^p(x)) = p - \lim_{m\to\infty} f^m(f^n(x)) = f^p(f^n(x)).$$

□

Este resultado nos sirve para probar que si f es un homeomorfismo las $p-$iteradas de f conmutan tanto con las $n-$iteradas de f como con las $n-$iteradas de f^{-1}, este lema lo necesitamos para lo que pretendemos con $E(X, f, \mathbb{Z})$.

Lema 4.17. *Sea (X, f) un s.d con f un homeomorfismo, entonces para todo $p \in \beta\mathbb{N}$ y toda $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que:*

$$f^p \circ f^n = f^n \circ f^p.$$

Demostración. Por el lema 4.16 bastará probarlo para los enteros negativos. Por reducción al absurdo suponga que existen $p \in \beta\mathbb{N}$ y $n > 0$ tal que $f^p \circ f^{-n} \neq f^{-n} \circ f^p$.

De esta manera existe $x \in X$ tal que $f^p(f^{-n}(x)) \neq f^{-n}(f^p(x))$. Como f^n es inyectiva por ser f un homeomorfismo, tenemos que:

$$f^n(f^p(f^{-n}(x))) \neq f^n(f^{-n}(f^p(x))) = f^p(x).$$

Por tanto $f^n(f^p(f^{-n}(x))) \neq f^p(x)$. Pero del lema 4.16 f^p y f^n conmutan luego:

$$f^p(x) = f^p(f^n(f^{-n}(x))) = f^n(f^p(f^{-n}(x))).$$

Lo que es una contradicción y eso termina la prueba. □

De este resultado a su vez podemos deducir el siguiente más completo:

Corolario 4.18. *Sea (X, f) un s.d. con f un homeomorfismo entonces para toda $h \in E(X, f, \mathbb{Z})$ y toda $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que:*

$$h \circ f^n = f^n \circ h$$

Demostración. Hay dos casos posibles a considerar:

1. Si $h = f^p$ para algún $p \in \beta\mathbb{N}$ ya esta probado en el lema 4.17.

2. Suponga ahora que existe $p \in \beta\mathbb{N}$ tal que $h = g^p$ y $g = f^{-1}$. Pero este caso también esta cubierto puesto que el sistema (X, g) cumple las hipótesis del lema 4.17. Por tanto: $h \circ g^n = g^n \circ h$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Pero recuerde que $g = f^{-1}$, de esta manera $h \circ f^n = f^n \circ h$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

□

Usando los lemas 4.17 y 4.15 mostraremos que si una $p-$iterada de f es continua esta conmuta con toda $q-$iterada de f^{-1}. Recuerde que en este capítulo por comodidad de notación estamos llamando g a la inversa de f.

Lema 4.19. *Sea (X, f) un s.d tal que f es un homeomorfismo y $p \in \beta\mathbb{N}$. Si f^p es continua, entonces para todo $q \in \mathbb{N}^*$ se tiene que:*

$$f^p \circ g^q = g^q \circ f^p.$$

Demostración. Sea $x \in X$ queremos ver que $f^p(g^q(x)) = g^q(f^p(x))$. Sabemos que:

$$g^q(x) = q - \lim_{n\to\infty} g^n(x).$$

De esta manera, como f^p es continua, del lema 4.15 tenemos:

$$f^p(g^q(x)) = f^p(q - \lim_{n\to\infty} g^n(x)) = q - \lim_{n\to\infty} f^p(g^n(x)).$$

Aplicando el lema 4.17 tenemos:

$$f^p(g^q(x)) = q - \lim_{n\to\infty} g^n(f^p(x)) = g^q(f^p(x)).$$

□

De estos lemas y el corolario 4.18 se deduce un poco más:

Lema 4.20. *Sea (X, f) un s.d tal que f es homeomorfismo y h una función continua en $E(X, f, \mathbb{Z})$ entonces h conmuta con toda función en $E(X, f, \mathbb{Z})$.*

Demostración. Sea $h \in E(X, f, \mathbb{Z})$ continua, podemos considerar los dos casos posibles:

1. Suponga que $h \in E(X, f)$ entonces del corolario 4.18 h conmuta con las $n-$iteradas de f con n entero. Por otro lado del lema 4.19 h conmuta con toda $p-$iterada de g con p no principal. Bastará entonces ver que h conmuta con toda $p-$iterada de f no principal. Para ver esto usamos un argumento similar al que se usó en la prueba de 4.19:

$$h(f^p(x)) = p - \lim_{n\to\infty} h(g^n(x)).$$

   Esto es cierto para un x arbitrario por lema 4.15, además sabemos que h conmuta con las f^n por tanto:

$$h(f^p(x)) = p - \lim_{n\to\infty} f^n(h(x)) = f^p(h(x)).$$

2. Si tenemos que $h \in E(X, g)$ podemos aplicar un argumento análogo al del caso 1. En efecto, del corolario 4.18 h conmuta con las $n-$iteradas de g con n entero, y por tanto con todas las de f. También del lema 4.19 h conmuta con toda $p-$iterada no principal de la inversa de g (pero la inversa de g es f). Basta mostrar que h conmuta con toda $p-$iterada de g con p no principal. Pero esto es claro pues podemos volver a usar el lema 4.15 y el hecho de que h conmuta con toda f^n para ver que:

$$h(g^p(x)) = p - \lim_{n\to\infty} g^n(h(x)) = g^p(h(x)).$$

   Lo que termina la prueba.

□

Usaremos estos resultados para mostrar que no es posible que bajo la hipótesis de que todo punto límite sea periódico haya funciones continuas y funciones discontinuas en el semigrupo asociado a $\mathbb{Z}$. De esta manera resolvemos el problema planteado sobre el teorema 4.4 de [3].

Teorema 4.21. *Sea (X, f) un s.d. con f un homeomorfismo y X numerable. Si todo punto $x \in X'$ es periódico entonces $E(X, f, \mathbb{Z}) \setminus \{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$ contiene solo funciones continuas o contiene solo funciones discontinuas.*

Demostración. Como todo punto límite en el sistema (X, f) es periódico entonces por el teorema 4.4 toda función en $E(X, f)^*$ es continua o toda función en $E(X, f)^*$ es discontinua, sin pérdida de generalidad suponga que el sistema (X, f) es WAP. Análogamente para el sistema (X, f^{-1}) toda función en $E(X, f^{-1})^*$ es continua o toda función en $E(X, f^{-1})^*$ es discontinua.

Por reducción al absurdo suponga que toda función en $E(X, f^{-1})^*$ es discontinua. Sea $p \in \mathbb{N}^*$ y sea $g = f^{-1}$. Entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ que converge a $x \in X'$ de manera no trivial pero $g^p(x_n) \not\to g^p(x)$. Como X es compacto podemos suponer que existe un $y \in X$ tal que $g^p(x) \neq y \in X$ y que $g^p(x_n) \to y$.

Sin pérdida de generalidad como f es biyectiva entonces existen dos casos posibles:

1. **Todos los puntos de la sucesión son periódicos:** Recuerde que demostramos la igualdad $(f^p)^{-1} = g^p = (f^{-1})^p$ para s.d. distales sin embargo la prueba de este resultado iba más allá y realmente implicaba que para cualquier s.d. (X, f) tenemos esta igualdad sobre el conjunto de puntos periódicos de X. De esta manera como f^p es continua y $g^p(x_n) \to y$ entonces $f^p(g^p(x_n)) \to f^p(y)$. Pero como ya lo habíamos afirmado, estas funciones actúan como inversas para los puntos periódicos por tanto $x_n \to f^p(y)$. Es así que $f^p(y) = x$ y por tanto $g^p(f^p(y)) = g^p(x)$. Además $y \in X'$, puesto que $(x_n)_n$ converge de manera no trivial y x_n es periódico para todo n entonces $(g^p(x_n))_n$ es una sucesión de puntos distintos, lo que implica que y es un punto límite. Por último como $y \in X'$ por hipótesis y es un punto periódico y de esta manera $y = g^p(f^p(y))$ entonces $y = g^p(x)$ lo que es una contradicción.

2. **Todos los puntos de la sucesión tienen órbita infinita:** si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que x_n tiene órbita infinita entonces $f^p(x_n)$ es punto límite para todo $n \in \mathbb{N}$. Así $(f^p(x_n))_n$ es una sucesión en X' y sabemos que converge a $f^p(x)$. Por otro lado por el corolario 4.13 tenemos que $g^p \restriction X'$ es continua entonces $g^p(f^p(x_n)) \to g^p(f^p(x)) = x$. Pero del lema 4.19 g^p y f^p conmutan por la continuidad de f^p en X. Por tanto $f^p(g^p(x_n)) \to x$, pero también $f^p(g^p(x_n)) \to f^p(y)$. Entonces $f^p(y) = x$ y como y debe de ser un punto límite concluimos que $y = g^p(x)$ lo que es una contradicción.

Y así concluye la prueba. □

4.4. TEOREMAS DE SINCRONIZACIÓN

Otro resultado que descubrimos muestra que si una sucesión de puntos periódicos converge a un punto x en un s.d. (X, f) con X numerable tal que todo punto en X' es periódico, entonces las órbitas de la sucesión y de x se sincronizan de cierta forma.

Para esto usaremos un resultado de [3] que enunciamos a continuación, la prueba de este teorema es bastante compleja pues requiere de una inducción transfinita sobre el rango de Cantor-Bendixson de los puntos, por tal razón solo daremos su enunciado.

Proposición 4.22. *(Corolario 3.5 de [3]) Sea (X, f) un s.d. tal que X es numerable y todo punto de X' es periódico. Si $(x_n)_n$ es una sucesión de puntos periódicos de X que converge a x, entonces $O_f(x_n) \to O_f(x)$ (i.e para todo abierto U que contenga a $O_f(x)$ se tiene que $(O_f(x_n))_n$ estará eventualmente contenido en U).*

Ahora, definimos un par de conceptos, en particular definimos lo que entendemos como sincronización de órbitas. Luego de esto presentamos algunos resultados nuestros con respecto al tema.

Definición 4.23. *Sea (X, f) un s.d. y $x \in X$. Decimos que A es un segmento de tamaño m de x si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $A = \left\{f^r(x), f^{r+1}(x), ..., f^{r+(m-1)}(x)\right\}$ donde $f^{r+i}(x) \neq f^{r+j}(x)$ para i y j distintos con $0 \leq i, j < m$*

Definición 4.24. *Sea (X, f) un s.d. y $(x_n)_n$ una sucesión de puntos que converge a un punto $x \in X$ de periodo m. Decimos que las órbitas de la sucesión (x_n) se sincronizan con la órbita de x si para cada $0 \leq i < m$ existe un abierto U_i vecindad de $f^i(x)$, de tal forma que los U_i son disyuntos dos a dos y si $r \in m\mathbb{N} + j$ con $0 \leq j < m$ entonces $f^r(x_n) \in U_j$ para todo n.*

Lema 4.25. *Sea (X, f) un s.d. tal que X es numerable y todo punto de X' es periódico. Si $(x_n)_n$ es una sucesión de puntos periódicos de X que converge a x donde el periodo de x es m y $U = \bigcup_{i=0}^{m-1} U_i$, donde los U_i son abiertos disjuntos dos a dos tales que para todo $0 \leq i < m$ $f^i(x) \in U_i$. Si $(n_r)_r$ es una sucesión de naturales estrictamente creciente tal que $(f^{k_{n_r}}(x_{n_r}))_r$ converge y esta contenida en U_j, entonces $f^{k_{n_r}}(x_{n_r}) \to f^j(x)$.*

Demostración. De la proposición 4.22 podemos suponer sin pérdida de generalidad que para todo n $O_f(x_n) \subseteq U$. Ahora suponga que $(f^{k_{n_r}}(x_{n_r}))_r$ converge a algún $y \in X$. Afirmamos que $y = f^j(x)$, en efecto, si se tiene que $y \neq f^j(x)$, note que y no puede pertenecer al cerrado $O_f(x)$ y como X es regular podemos separar a y de $O_f(x)$ por abiertos disyuntos. Sean entonces V_1 y V_2 abiertos disyuntos tales que $y \in V_1$ y $O_f(x) \subseteq V_2$. De esta manera podemos aplicar la proposición 4.22 para $U \cap V_2$ y por tanto $f^{k_{n_r}}(x_{n_r}) \not\to y$, lo que es absurdo. De lo que se deduce que $f^{k_{n_r}}(x_{n_r}) \to f^j(x)$. □

Teorema 4.26. *Sea (X, f) un s.d. tal que X es numerable y todo punto de X' es periódico. Si $(x_n)_n$ es una sucesión de puntos periódicos de X que converge a x donde el periodo de x es $m > 1$ y $U = \bigcup_{i=0}^{m-1} U_i$, donde los U_i son abiertos disjuntos dos a dos tales que para todo $0 \leq i < m$ $f^i(x) \in U_i$. Entonces para n suficientemente grande se cumple:*

1. *Para todo k, si $f^k(x_n) \in U_j$ entonces $f^{k+1}(x_n) \in U_i$ con $i \neq j$.*

2. *Para todo $0 \leq j < m$ todo segmento de tamaño m de x_n toca a U_j a lo menos una vez.*

Demostración. De la proposición 4.22 podemos suponer sin pérdida de generalidad que para todo n $O_f(x_n) \subseteq U$.

1. Considere ahora la colección de
$$A_j = \left\{n \in \mathbb{N} : \exists k_n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \quad f^{k_n}(x_n), f^{k_n+1}(x_n) \in U_j\right\}.$$
A_j debe de ser finito, pues si suponemos que es infinito existirá una sucesión de naturales estrictamente creciente $(n_r)_r$ de elementos de A_j. Por la compacidad de X podemos sin pérdida de generalidad suponer que $(f^{k_{n_r}}(x_{n_r}))_r$ converge y por el lema 4.25 converge a $f^j(x)$. Ahora por la continuidad de f tenemos que $f^{k_{n_r}+1}(x_{n_r}) \to f^{j+1}(x)$, pero esto es absurdo pues $f^{k_{n_r}+1}(x_{n_r}) \in U_j$ para todo r. Como j era arbitrario entonces existe una cola de la sucesión $(x_n)_n$, digamos $(x_{m_1+n})_n$ tal que $m_1 + n \notin A_j$ para todo n y para todo $0 \leq j < m$. De esta manera para la sucesión cola $(x_{m_1+n})_n$ no hay puntos que tengan dos iteradas consecutivas en un mismo U_j, lo que queríamos ver.

2. Queremos probar ahora que existe m_2 tal que para todo $n \geq m_2$ todo segmento de tamaño m de x_n toca a lo menos una vez a U_j, para cada $0 \leq j < m$. Para ver esto considere la colección:
$$B_j = \{n \in \mathbb{N} : \exists A_n \text{ un segmento de tamaño } m \text{ de } x_n \text{ tal que } A_n \cap U_j = \emptyset\}.$$
Afirmamos que B_j es finito, en efecto, si B_j fuese infinito entonces existe una sucesión de naturales $(n_l)_l$ estrictamente creciente tal que para cada l existe un segmento de tamaño m:
$$A_{n_l} = \left\{f^{r_{n_l}}(x_{n_l}), f^{r_{n_l}+1}(x_{n_l}), ..., f^{r_{n_l}+(m-1)}(x_{n_l})\right\}$$
contenido en $U \setminus U_j$. Particularmente para cada l $f^{r_{n_l}}(x_{n_l}) \notin U_j$, entonces por principio de palomar infinitos términos de la sucesión $(f^{r_{n_l}}(x_{n_l}))_l$ están en algún U_i con $i \neq j$. Una vez más sin pérdida de generalidad suponga que $f^{r_{n_l}}(x_{n_l}) \in U_i$ para todo l, además por compacidad de X podemos suponer que $(f^{r_{n_l}}(x_{n_l}))_l$ converge, y por lema 4.25 $f^{r_{n_l}}(x_{n_l}) \to f^i(x)$. Note que existen dos casos posibles a considerar el primero es que $0 \leq i < j < m$ si esto es así entonces $0 \leq j - i < m - i < m$ de esta manera como f^{j-i} es continua tenemos que:
$$f^{r_{n_l}+(j-i)}(x_{n_l}) \to f^{j-i}(f^i(x)) = f^j(x)$$
pero esto es absurdo dada la escogencia de los n_l. El otro caso posible es que $0 \leq j < i < m$ esto implica que $0 < m - i \leq m - i + j < m - i + i = m$, de esta manera por la continuidad de f^{m-i+j} tenemos que
$$f^{r_{n_l}+(m-i+j)}(x_{n_l}) \to f^{m-i+j}(f^i(x)) = f^{m+j}(x) = f^j(x)$$
que es absurdo dada la escogencia de los n_l. Como j era arbitrario existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que para cada punto de la sucesión $(x_{m_2+n})_n$ se tiene que cada segmento de tamaño m de ese punto pasa a lo menos una vez por cada U_j.

Si se toma el mayor entre m_1 y m_2 tenemos que se cumplen **1** y **2** a la vez lo que concluye la prueba. $\square$

Teorema 4.27. *Sea (X, f) un s.d. tal que X es numerable y todo punto de X' es periódico. Si $(x_n)_n$ es una sucesión de puntos periódicos de X que converge a x y el periodo de x es m. Entonces para n suficientemente grande se sincronizan las órbitas de la sucesión $(x_n)_n$ con la órbita de x.*

Demostración. Si $m = 1$ esta sincronización es evidente de la proposición 4.22, por tanto de aquí en adelante revisaremos el caso de $m > 1$.

Como X es métrico existen abiertos U_j con $0 \leq j < m$ disyuntos dos a dos tales que $f^j(x) \in U_j$. Así, si $U = \bigcup_{j=0}^{m-1} U_j$ tenemos que $O_f(x) \subseteq U$ además, de la continuidad de f, de la proposición 4.22 y del teorema 4.26 podemos suponer sin pérdida de generalidad que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes consideraciones:

1. $O_f(x_n) \subseteq U$.

2. Para todo k, si $f^k(x_n) \in U_j$ entonces $f^{k+1}(x_n) \in U_i$ con $i \neq j$.

3. Para todo $0 \leq j < m$ todo segmento de tamaño m de x_n toca a U_j a lo menos una vez.

4. El periodo de x_n es mayor ó igual a m.

Teniendo esto en cuenta afirmamos lo siguiente:

Afirmación I. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se sincronizan los $f^j(x_n)$ para todo $0 \leq j < m$: Para ver esto suponga por reducción al absurdo que para todo $r \in \mathbb{N}$ existe $n_r \geq r$ y existe $0 \leq j_r < m$ tales que $f^{j_r}(x_{n_r}) \notin U_j$. Como $(j_r)_r$ es una sucesión que puede tomar finitos valores podemos suponer que para todo r $j_r = j$ fijo. Del principio de palomar y de la consideración **1** podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe $i \neq j$ $f^j(x_{n_r}) = f^{j_r}(x_{n_r}) \in U_i$ para todo r. De la continuidad sabemos además que $f^j(x_{n_r}) \to f^j(x)$, pero esto es absurdo. Concluimos entonces que existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces los primeros m términos de la órbita de x_n se sincronizan.

Afirmación II. Si $n \geq n_0$ (el n_0 de la afirmación I.) entonces la órbita de x_n se sincroniza con la de x: Sea $n \geq n_0$, como de la afirmación **I** ya tenemos sincronización para los primeros m términos de $O_f(x_n)$ bastará probar que para todo $k \geq m$ si $k \in m\mathbb{N}+j$ entonces $f^k(x_n) \in U_j$.

En efecto, por principio de inducción matemático fuerte:

1. Sea $k = m$, queremos ver que $f^m(x_n) \in U_0$. Como x_n por la consideración **4** es periódico de periodo mayor igual a m existen dos casos posibles: uno de ellos es que m sea el periodo de x_n, si esto es así ya esta pues $f^m(x_n) = x_n \in U_0$, pues esta sincronizada a lo menos desde x_n hasta $f^{m-1}(x_n)$.

   Por otro lado si m no es el periodo de x_n entonces el periodo de x_n es mayor que m. De esta manera los puntos $f(x_n), f^2(x_n), ..., f^{m-1}, f^m(x_n)$ son distintos y por tanto forman un segmento de tamaño m, así de la consideración **3** el conjunto $\{f(x_n), f^2(x_n), ..., f^{m-1}, f^m(x_n)\}$ intersecta a U_0 y sabemos que

$$\left\{f(x_n), f^2(x_n), ..., f^{m-1}(x_n)\right\} \subseteq U \setminus U_0,$$

   de lo que se deduce que $f^m(x_n) \in U_0$, lo que queríamos ver.

2. Suponga que hay sincronización también para cada t tal que $m \leq t \leq k$. Queremos ver que hay sincronización para el indice $k+1$. Sea $r = k - m + 2 > 0$ entonces $r + (m-1) = k+1$ y suponga que $r + (m-1) = k+1 \in m\mathbb{N} + i$ con $0 \leq i < m$.

   Como el periodo de x_n es mayor o igual que m hay 2 casos posibles: si el periodo de x_n es mayor que m entonces el siguiente conjunto es un segmento de tamaño m

$$A = \left\{ f^r(x_n), f^{r+1}(x_n), ..., f^{r+(m-1)}(x_n) \right\}$$

$$= \left\{ f^{k-m+2}(x_n), f^{k-m+3}(x), ..., f^k(x_n), f^{k+1}(x) \right\}.$$

   De esta manera de la consideración **3** $A \cap U_i \neq \emptyset$. Además cada natural de la lista: $r, r+1, ..., r+(m-2), r+(m-1)$ es congruente módulo m a un único residuo de la lista: $0, 1, ..., m-2, m-1$ y los puntos $f^r(x_n), f^{r+1}(x_n), ...f^{r+(m-2)}(x_n)$ están sincronizados. Como sabemos que $r+(m-1)$ es congruente módulo m con i, de lo anterior tenemos que si $0 \leq l < m-1$ entonces $r + l \notin m\mathbb{N} + i$ y por tanto $f^{r+l}(x_n) \notin U_i$. Se tiene entonces que $f^{k+1}(x_n) \in U_i$.

   Por otro lado si el periodo de x_n es m y como $k+1 > m$ por hipótesis, entonces como $k+1 \in m\mathbb{N} + i$ entonces $f^{k+1}(x_n) = f^i(x_n)$ y sabemos que $f^i(x_n) \in U_i$, así se tiene que $f^{k+1}(x_n) \in U_i$ lo que queríamos ver.

En conclusión las órbitas se sincronizan para n mayor o igual a n_0 y concluye la prueba. □

Ya demostramos que la distribución de las iteradas en los U_i se sincroniza eventualmente, ahora enunciamos un teorema que afirma que bajo las hipótesis del teorema anterior es posible encontrar una cola de la sucesión $(x_n)_n$ donde los periodos de los elementos en dicha cola son todos múltiplos de m, lo que puede entenderse como una sincronización de los periodos.

Teorema 4.28. *Sea (X, f) un s.d. tal que X es numerable y todo punto de X' es periódico. Si $(x_n)_n$ es una sucesión de puntos periódicos de X que converge a x y el periodo de x es m. Entonces para todo n suficientemente grande se tiene que $|O_f(x_n)| \in m\mathbb{N}$.*

Demostración. Para $m = 1$ ya esta entonces suponga que $m > 1$. Del teorema 4.27 podemos suponer sin pérdida de generalidad que se sincronizan las órbitas de (x_n) con la órbita de x.

Ahora por reducción al absurdo suponga que (x_n) cuenta con una subsucesión con periodos en $\bigcup_{i=1}^{m-1} m\mathbb{N} + i$. Sin pérdida de generalidad considere que para todo n

$$|O_f(x_n)| \in \bigcup_{i=1}^{m-1} m\mathbb{N} + i.$$

Del principio de palomar podemos considerar sin pérdida de generalidad que existe $0 < l < m$ tal que para todo n se tiene:

$$|O_f(x_n)| \in m\mathbb{N} + l.$$

Digamos que $|O_f(x_n)| = mr_n + l$ para cada n.

Como $0 < l < m$, además para todo n tenemos que $mr_n + l \in m\mathbb{N} + l$ y las órbitas se encuentran sincronizadas entonces para todo n se tiene $f^{mr_n+l}(x_n) \in U_l$. Pero $x_n = f^{mr_n+l}(x_n)$ para todo n. Concluimos que para todo n se tiene:

$$f^{mr_n+l}(x_n) \in U_0 \cap U_l$$

pero los U_i son disyuntos dos a dos y $l \neq 0$ lo que es un absurdo. □

En el capítulo **4** probamos que los sistemas distales y numerables no son tan complejos y en la sección 4.3 probamos que son sistemas WAP (toda función en $E(X, f)$ es equicontinua). Aprovechando los teoremas de sincronización que acabamos de probar iremos más allá y mostraremos que para todo sistema (X, f) distal con X numerable se tiene que $E(X, f)$ es una colección equicontinua. Este concepto representa que la continuidad de las funciones en $E(X, f)$ es muy similar, por claridad definimos este concepto a continuación.

Definición 4.29. *Sea H una colección de funciones de un espacio métrico (X_1, d_1) en el espacio métrico (X_2, d_2) y $x_0 \in X_1$. Decimos que H es equicontinua en x_0 si:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall h \in H)(h(B_{d_1}(x_0; \delta)) \subseteq B_{d_2}(h(x_0); \epsilon)).$$

Decimos que H es **equicontinua** si esto se cumple para cada $x \in X_1$.

Recordemos que la equicontinuidad de una familia de funciones en X^X, donde X es un compacto métrico es equivalente a la equicontinuidad uniforme. En el libro de [4] encontramos un resultado importante sobre equicontinuidad que nos será útil, por tal razón lo comentamos a continuación:

Lema 4.30. *(Lema 2.9.1 de [4]) Sea (X, f) un s.d. Si la familia de funciones $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente equicontinua, entonces la familia $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ es también uniformemente equicontinua.*

Teorema 4.31. *Sea (X, f) un s.d. distal con X numerable entonces $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ y $x \in X$ arbitrario queremos ver que existe $\delta > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$. Suponga por reducción al absurdo que no es así, entonces para cada $n > 0$ existe $x_n \in X$ y $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$ y $d(f^{m_n}(x), f^{m_n}(x_n)) \geq \epsilon$.

Tenemos entonces que $x_n \to x$ y del Teorema 3.21 todo punto es periódico. De esta manera del Teorema 4.27 si el periodo de x es m podemos suponer que las órbitas de $(x_n)_n$ y x se sincronizan.

Sea $(U_j)_0^{m-1}$ la colección finita de abiertos sobre los cuales se sincronizan las órbitas, entonces se sincronizan también sobre:

$$(U_j \cap B_d(f^j(x); \epsilon))_0^{m-1}.$$

De esta manera para cada m_n existe un $0 \leq j_n < m$ tal que $m_n = mr_n + j_n$ entonces $f^{m_n}(x) = f^{j_n}(x)$ y $f^{m_n}(x_n)$ están en $U_{j_n} \cap B_d(f^{j_n}(x); \epsilon)$. Por tanto para cada n $d(f^{m_n}(x), f^{m_n}(x_n)) < \epsilon$, lo que es absurdo. □

Del lema de [4] y de nuestro resultado se obtiene directamente el siguiente

Corolario 4.32. *Sea (X, f) un s.d. distal con X numerable entonces $E(X, f)$ es uniformemente equicontinua.*

Demostración. Del teorema 4.31 y del lema 4.30 tenemos que $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ son equicontinuas, y por tanto uniformemente equicontinuas.

De esta manera dado $\epsilon > 0$ entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta_1$ entonces para todo n $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$ por otro lado, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta_1$ entonces para todo $p \in \mathbb{N}^*$ $d(f^p(x), f^p(y)) < \epsilon$.

Así, si tomamos $0 < \delta = \text{máx}\{\delta_1, \delta_2\}$ y si $d(x, y) < \delta$ entonces:

$$d(f^p(x), f^p(y)) < \epsilon \text{ y } d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon \ \forall n \in \mathbb{N} \, \forall p \in \mathbb{N}^*$$

Pero $E(X, f) = \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f^p : p \in \mathbb{N}^*\}$ lo que concluye la prueba. $\square$

Capítulo 5

CONCLUSIONES

1. Aclaramos los detalles de la prueba de la dicotomía de Bourgain Framlin y Talagrand para Sistemas Dinámicos 2.21. Abordamos además 2 preguntas clásicas sobre la cardinalidad del semigrupo envolvente, de las cuales resolvimos positivamente la primera para sistemas distales numerables por medio del Teorema 3.31. Las preguntas fueron las siguientes.

   - [5]¿Si P_f es finito entonces $E(X, f)$ es numerable?
   - [6] ¿Para toda compactificación K de $\mathbb{N}$ existe un s.d. (X, f) tal que $E(X, f)$ sea homeomorfo a K?

2. En el capítulo **3** se demostró que la condición de distalidad para un sistema dinámico sobre un espacio numerable es equivalente a que todo punto sea periódico (Teorema 3.21). Esta caracterización de los sistemas distales numerables simplificó bastante su tratamiento y permitió demostrar varias propiedades de estos como que siempre son uniformemente equicontinuos. Con todo lo que encontramos sobre los sistemas distales numerables nos permitimos plantear las siguientes preguntas:

   - Se demostró la identidad $(f^p)^{-1} = (f^{-1})^p$ para el caso de un sistema distal sobre X numerable. ¿Será esto cierto también para el caso de X no numerable?
   - En el caso de un s.d. (X, f) distal el semigrupo $E(X, f)$ tiene tanto una estructura topológica como una estructura algebraica de grupo. ¿En qué casos se tendrá que $E(X, f)$ sea un grupo topológico?

3. Con el teorema 4.21 resolvimos positivamente una pregunta que habiamos planteado en la propuesta del trabajo de grado, además de que ampliamos la perspectiva del teorema original de García et al. 4.4. Consideramos que un tratamiento similar puede darse a otros teoremas de la literatura sobre el semigrupo $E(X, f)$ para ampliarlos para el semigrupo $E(X, f, \mathbb{Z})$.

El autor espera que este trabajo sirva como una herramienta para la comunidad matemática, en posteriores investigaciones sobre el semigrupo envolvente de Ellis.

Capítulo 6

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía

[1] A. M. Bruckner and J. Ceder. Chaos in terms of the map $x \to \omega(x, f)$. *Pacific J. Math.*, 156(1):63–96, 1992.

[2] R. Ellis, *A semigroup associated with a transformation group*, Trans. Amer. Math. Soc. **94** (1960), 272–281.

[3] S. García-Ferreira, Y. Rodríguez-López, and C. Uzcátegui. Iterates of dynamical systems on compact metrizable countable spaces. *Topology and its Applications*, 180(0):100 – 110, 2015.

[4] S. García-Ferreira. Ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ y Sistemas Dinámicos Discretos. XXIII Escuela Venezolana de Matemáticas, 2010.

[5] S. García-Ferreira, Y. Rodríguez-López, and C. Uzcátegui. Cardinality of the Ellis semigroup on compact metrizable countable spaces. *Semigroup forum,* 97 (1), 162-176, 2018.

[6] S. García-Ferreira and M. Sanchis, *Ultrafilter-limit points in metric dynamical systems*, Comment. Math. Univ. Carolin **48** (2007), 465–485.

[7] Eli Glasner. Enveloping semigroups in topological dynamics. *TOPOL APPL* , 154(11):2344 – 2363, 2007.

[8] Eli Glasner and M. Megrelishvili. Hereditarily non-sensitive dynamical systems and linear representations. *COLLOQ MATH-*, 104(2):223 – 283, 2006.

[9] G. Godefroy. Compacts de Rosenthal. *Pacific J. Math.*, 91:293–306, 1980.

[10] A. Kechris. Classic descriptive Set Theory. *Springer, Verlag* 1994.

[11] P. Szuca. $\mathcal{F}$-limit points in dynamical systems defined on the interval. *Cent. Eur. J. Math.*, 11:170–176, 2013.

[12] D. Ellis and R. Ellis Automorphisms and equivalence relations in topological dynamics. *Cambridge University Press.* 2013.

[13] S.M. Srivastava. A course on Borel sets. *Springer, Verlag*, 156, 1998.

[14] S.Todorcevic. Topics in Topology. *Springer, Verlag*, 1997.

[15] Carlos Augusto Di Prisco, Carlos Enrique Uzcátegui. Una introducción a la teoría descriptiva de Conjuntos. [Material de clase], 2018.