

# INFLACIÓN VECTORIAL

CARLOS ALBERTO SIERRA ORDÓÑEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2010

# INFLACIÓN VECTORIAL

CARLOS ALBERTO SIERRA ORDÓÑEZ<sup>1</sup>

TRABAJO PRESENTADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FISICO

DIRECTOR : DR. YEINZON RODRÍGUEZ GARCÍA<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN RELATIVIDAD Y GRAVITACIÓN - UIS

<sup>2</sup>GRUPO DE FÍSICA - FENOMENOLOGÍA DE PARTÍCULAS ELEMENTALES Y  
COSMOLOGÍA - UAN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2010

# Índice

<b>1. Resumen</b>	<b>8</b>
<b>2. Abstract</b>	<b>9</b>
<b>3. Introducción</b>	<b>10</b>
<b>4. Marco teórico</b>	<b>11</b>
4.1. Apartes sobre Relatividad General . . . . .	12
4.2. Modelamiento del contenido energético del Universo como un fluido perfecto . . . . .	13
4.3. Métrica de FLRW . . . . .	15
4.4. Ecuaciones de evolución cosmológica . . . . .	16
4.5. Problemas de la cosmología estándar . . . . .	17
4.5.1. Problema de Horizonte . . . . .	17
4.5.2. Problema de Planitud . . . . .	19
4.6. Mecanismo de Inflación . . . . .	20
4.6.1. Monto de Inflación . . . . .	22
4.6.2. Inflación mediante campos escalares . . . . .	23
4.7. Acople mínimo y no mínimo a la gravedad . . . . .	25
<b>5. Inflación vectorial</b>	<b>26</b>
5.1. Cálculo de las ecuaciones de movimiento . . . . .	28

5.2. Ecuaciones de evolución del campo vectorial . . . . .	29
5.3. Cálculo del tensor $Z_{\mu\nu}$ . . . . .	31
5.4. Definición de $Z_0^0$ para tres campos vectoriales . . . . .	34
5.5. Definición de $Z_j^i$ para tres campos vectoriales . . . . .	37
5.6. Ecuación de evolución para el parámetro $\kappa$ . . . . .	38
5.7. Cálculo del parámetro Q . . . . .	39
5.8. Cálculo del parámetro de Hubble durante el periodo inflacionario propuesto . . . . .	40
5.9. Inflación del tipo Slow-Roll con 3 campos vectoriales . . . . .	42
5.10. Número de e-folds obtenidos con inflación vectorial . . . . .	44
5.11. Solución a problemas de la cosmología estandar . . . . .	45
5.12. Potencial generador de inflación vectorial . . . . .	46
<b>6. Conclusiones</b>	<b>47</b>
<b>A. Obtención de la ecuacion de continuidad para la densidad de energía <math>\rho</math></b>	<b>50</b>
<b>B. Cálculo de las ecuaciones de movimiento</b>	<b>52</b>
<b>C. Obtención de relaciones a partir de ecuaciones de movimiento de <math>A_k</math></b>	<b>55</b>
C.1. Cálculo para $\mu = 0$ . . . . .	56
C.2. Cálculo para $\mu = i$ . . . . .	57

D. Obtención de las ecuaciones de evolución para $B_k$	59
E. Obtención del tensor $Z_{\mu\nu}$	60
F. Cálculo de $Z_0^0$	70
G. Cálculo de $Z_j^i$	72

# 1. Resumen

TITULO: INFLACIÓN VECTORIAL<sup>1</sup>

AUTOR: SIERRA ORDÓÑEZ CARLOS ALBERTO <sup>2</sup>

PALABRAS CLAVES: COSMOLOGÍA, MECANISMO INFLACIONARIO  
EXPANSIÓN ACELERADA, BOSONES VECTORIALES  
PRINCIPIO COSMOLÓGICO

La cosmología estudia el origen y evolución del Universo hasta la formación de estructuras a gran escala, dejando el estudio de subestructuras tales como cúmulos galácticos, nebulosas, galaxias, estrellas, agujeros negros, etc. a otras ramas de la ciencia, tales como la Astrofísica. A escalas cosmológicas el Universo luce homogéneo e isotropo, aun cuando existan galaxias y espacio vacío. Uno de los mecanismos de evolución espaciotemporal del universo (no de creación) es el de inflación propuesto por Alan Guth mediante el cual el universo se expandió aceleradamente en fracciones de segundo y permitió que el contenido energético siguiera evolucionando hasta adquirir hoy en día la estructura que podemos observar. Los escenarios que muchos científicos han propuesto, incluyendo a Guth, se basan en un campo escalar primordial llamado inflatón mediante el cual se inicia la inflación primordial del universo y se heredan del campo características como homogeneidad e isotropía. En la naturaleza aún no se han podido observar campos escalares fundamentales, y es ésta la principal motivación para buscar otra alternativa que genere inflación siendo una de ellas los campos vectoriales. El objetivo de este trabajo de grado es realizar un estudio sobre la inflación del tipo Slow-Roll utilizando campos vectoriales primordiales y así obtener los resultados asociados a la estadística de estructuras a gran escala sobre homogeneidad e isotropía, los cuales han sido confirmados experimentalmente y predichos por la ley de Hubble, lo que conduce a su vez a resolver los problemas de la cosmología estándar.

<sup>1</sup> Proyecto de Grado

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Director: Dr. Yeinzon Rodriguez

## 2. Abstract

TITLE: VECTORIAL INFLATION<sup>1</sup>

AUTOR: SIERRA ORDÓÑEZ CARLOS ALBERTO<sup>2</sup>

KEYWORDS: COSMOLOGY, INFLATIONARY MECHANISM  
ACCELERATED EXPANSION, VECTORIALS BOSONS  
COSMOLOGICAL PRINCIPLE

Cosmology studies the origin and evolution of the universe, until the formation of the great scale structures, leaving the study of substructures such as Galactic cumulus, nebulae, galaxies, stars, black holes, to another science branches like Astrophysics. At cosmological scales the universe looks very isotropic and homogeneous, although exist galaxies and empty space. One of the mechanisms for the primordial evolution of the Universe is the Inflation proposed by Alan Guth, that describes an Universe that had been expanded with acceleration and lets that the energetic content continues its evolution until today's large scale structure. The scenario that many scientist have proposed, including Guth, are based in a fundamental scalar field that ignites the primordial inflationary engine, maintaining the homogeneity and isotropy given by the nature of the field. In nature those fields haven't been seen yet and this is the principal cause for searching another alternative, and one of them is the vector fields. The aim of this work is to present a study that explains the Slow-Roll inflation using three orthogonal vector fields that maintains in the new model the characteristics of homogeneity and isotropy associated with the statistics of large scale structure that have been confirmed experimentally and predicted by Hubble law, and that conducts naturally to the solving of the cosmology standard problems.

<sup>1</sup> Degree Project

<sup>2</sup> Science Faculty, School of Physics, Director: Dr. Yeinzon Rodriguez

### 3. Introducción

La Cosmología y la Astronomía son ciencias que tratan sobre el origen, evolución y destino del universo y al igual que las demás ciencias, basan sus hipótesis y teorías en la comprobación mediante la observación de los fenómenos que intentan explicar. En el caso de la astronomía se cuenta con toda la radiación electromagnética proveniente de cada cuerpo celeste o fenómeno afuera del planeta tierra, mientras que la cosmología basa toda la construcción teórica en la débil radiación cósmica de fondo que permite reconstruir la imagen del Universo primitivo 380000 años después de su origen. De las observaciones realizadas mediante los satélites COBE [1] y WMAP [2], especializados en la captura de esta radiación dentro de la banda de 21[cm] o espectro de microondas, se ha determinado su espectro y características principales. La conclusión más extraordinaria obtenida de la RCF (Radiación Cósmica de Fondo) es que el universo presenta homogeneidad e isotropía a grandes escalas, es decir a escalas mayores a 100 Megaparsecs. Este hecho se conoce como principio cosmológico [3, 4, 5].

Uno de los aciertos teóricos que más ha tenido acogida en la comunidad científica es el mecanismo de inflación primordial propuesto por Alan Guth en 1981 [6], que posteriormente fue modificado para ajustarse a las observaciones, el cual permite explicar la formación de las estructuras a grandes escalas, componentes fundamentales del actual Universo observable.

En el estudio de la cosmología estándar, la inflación es un gran acierto intelectual y hace uso de campos escalares para generar el mecanismo de expansión acelerada. Sin embargo la existencia de campos escalares fundamentales en la naturaleza es actualmente un tema de investigación que concentra esfuerzos de muchos centros de investigación de física de partículas. Uno de los objetivos principales del Gran Colisionador de Hadrones (LHC) [7] es el de encontrar campos escalares fundamentales, tal como el bosón de Higgs. Desafortunadamente no hay evidencia contundente hasta el día de hoy que permita asegurar la existencia de tales campos.

La inflación generada por campos escalares permite explicar en un alto grado la fenomenología y compararla con la evidencia observacional, adquirida principalmente por los satélites que captan la RCF continuamente, además de dar solución a los problemas de la cosmología estándar: problema de horizonte, de planitud y reliquias no deseadas.

Es necesario que después de inflación el Universo continúe evolucionando

mediante el modelo de expansión desacelerada de Friedmann, ya que de otro modo la nucleosíntesis no tendría lugar, ni tampoco la parte del Universo que se compone de materia bariónica, razón por la cual la expansión acelerada debe durar por lo menos  $t_f = 10^{-35} s$  [4].

En cosmología los campos escalares son muy utilizados debido a las propiedades de homogeneidad e isotropía que son la base fundamental del principio cosmológico; sin embargo hay otra posibilidad para generar el mecanismo de inflación mencionado y mantener las tan atractivas características ya mencionadas. La inflación a través de campos vectoriales es la otra posibilidad [8]. Es evidente que un campo vectorial no es homogéneo ni isótropo de forma simultánea pues es direccional, razón por la que no es muy utilizado por los cosmólogos como generador de inflación, pero el uso de muchos de ellos aleatoriamente orientados, o sólo 3 ortogonales entre sí, permiten que se consiga la homogeneidad e isotropía necesarias para que sean los campos candidatos de la inflación primordial.

La razón más importante para elegir los campos vectoriales como generadores de inflación y no los escalares es que en la naturaleza se han observado los campos vectoriales. El fotón, el gluón, los bosones  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$  son ejemplos y es natural pensar que el campo primordial que generó la expansión sea también de naturaleza vectorial. Este argumento se debilita cuando en la naturaleza se logren observar bosones escalares fundamentales. Ésta es la principal motivación para estudiar la inflación vectorial propuesta por Ford [9] y posteriormente estudiada por Mukhanov, Golovnev y Vanchurin [8].

## 4. Marco teórico

A continuación se hará un breve repaso de todas las temáticas necesarias para comprender con mayor claridad el estudio que se va a realizar sobre inflación vectorial. La relatividad general y la cosmología estandar son la base teórica fundamental para tal propósito. Importante definir a partir de este momento la signatura con la que se va a trabajar a lo largo de todo el desarrollo del presente proyecto de investigación:

$$Signatura = (+, -, -, -). \tag{1}$$

## 4.1. Apartes sobre Relatividad General

Es conocido que la relatividad especial integra el espacio y tiempo como una sola entidad de cuatro dimensiones. La relatividad general explica los campos gravitacionales como el efecto que el contenido energético experimenta a causa de la curvatura del espaciotiempo. Podemos concluir que dicho contenido energético se acelera debido a la existencia de un campo gravitacional cuyas líneas de campo son llamadas geodésicas y se caracterizan mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{du^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0. \quad (2)$$

Esta ecuación deriva la cuadrivelocidad  $u^\alpha$  con respecto a un parámetro afín  $\lambda$  que puede ser el tiempo o cualquier otra variable independiente.  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  es llamado Conexión o símbolo de Cristoffel [10], depende directamente de la métrica  $g_{\mu\nu}$  y aparece en la ecuación debido a que el espaciotiempo es curvo y a que existe un campo gravitacional que genera dicha curvatura.

Los símbolos de Cristoffel son un elemento fundamental en la definición de la derivación covariante, necesaria para poder escribir la física en forma tensorial covariante y con ello hacerla invariante en cualquier sistema de referencia, cumpliendo así el principio de equivalencia propuesto por Einstein el cual se aplica para cualquier ley física.

Existe además el tensor de Riemman  $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ <sup>1</sup> el cual caracteriza la curvatura del espaciotiempo y está definido a través de símbolos de Cristoffel, de forma tal que en ausencia de curvatura su valor es cero, indicando que el espacio es plano o del tipo Minkowsky. Contrayendo el tensor de Riemman se obtiene el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  el cual va a ser fundamental para la formulación de la relatividad general de Einstein, junto con el tensor de Riemman.

La densidad del contenido energético (materia y energía) del Universo puede describirse mediante  $\rho$ , pero en Relatividad General este término no cumple el principio de covarianza general, de modo que es necesario describir dicho contenido mediante otro elemento, el Tensor de Momentum-Energía [10]. Éste se puede escribir de manera covariante para cualquier sistema de referencia y caracteriza todo lo que perturbe el campo gravitacional.

A partir del principio de acción estacionaria con extremos fijos es posible calcular la forma del tensor de Momentum-Energía. Este tensor permite caracterizar

---

<sup>1</sup>Para ver la definición formal del tensor de Ricci proveniente del tensor de curvatura, remitirse a la referencia [10]

el contenido energético (materia y energía). Para el caso de un campo escalar  $\phi$  y su respectivo lagrangiano  $\mathcal{L}$ , el tensor se define por la siguiente expresión:

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3)$$

Normalmente es utilizado el tensor Momentum-Energía canónico  $T_{\mu\nu}$ , que se diferencia de  $\Theta_{\mu\nu}$  en que el primero es simétrico, y esta cualidad permite que este tensor modele el contenido energético del Universo en el lado izquierdo de las ecuaciones de campo de Einstein. Dichas ecuaciones provienen de aplicar el principio de acción estacionaria, tomando como materia prima la acción Einstein-Hilbert (ver [11]) mostrada a continuación :

$$S = \frac{R - 2\Lambda}{2\alpha} + \mathcal{L}_m. \quad (4)$$

El término  $\alpha = \frac{8\pi G}{c^4}$ . Para obtener las ecuaciones de campo de Einstein a partir la acción propuesta remitirse a la referencia [11]. El término  $R$  es el escalar de curvatura o contracción del tensor de Ricci.  $\mathcal{L}_m$  es el lagrangiano de materia que caracteriza el contenido energético del universo.  $\Lambda$  es la constante cosmológica y representa la parte de la acción que genera una fuerza de repulsión la cual se opone a la atracción gravitatoria [3, 4, 5]. Haciendo variación con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\alpha T_{\mu\nu}. \quad (5)$$

Esta ecuación, escrita en unidades del sistema internac condensa la información de la geometría del Universo a un lado de la igualdad a través del escalar y tensor de Ricci, mientras que en el otro lado está el tensor momentum-energía que caracteriza el contenido energético del Universo. La igualdad entre ambos términos indica que dicho contenido curva el espaciotiempo que lo contiene y al mismo tiempo el campo gravitacional, efecto de la curvatura espaciotemporal, modifica la distribución del contenido energético.

## 4.2. Modelamiento del contenido energético del Universo como un fluido perfecto

H. Weyl postuló en 1923 que el Universo se comporta como un fluido o sustrato y que las galaxias son sus partículas fundamentales [12]. Este postulado exige que las geodésicas sólo se intercepten en un punto en el pasado (Big Bang)

y probablemente en el futuro (Big Crunch) de manera que cada galaxia posea una sola velocidad, despreciando las velocidades relativas debidas a las interacciones gravitacionales entre sí. Las observaciones de un Universo en expansión se ajustan al comportamiento descrito haciendo posible el modelamiento del sustrato como un fluido perfecto.

A escalas cosmológicas y según las observaciones realizadas podemos concluir que el Universo es homogéneo e isótropo, y es posible modelar su contenido energético mediante un Tensor de Momentum-Energía (M-E) para un fluido perfecto<sup>2</sup>:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (6)$$

en donde  $\rho$  y  $P$  son respectivamente la densidad de energía y la presión del fluido cósmico, medidos en un marco de referencia comóvil. De la definición del tensor M-E se deduce que éste contiene información fundamental sobre la energía y momentum del fluido. Dado que el sistema de referencia es cómovil con el fluido, la velocidad usual es igual a cero, mientras que la cuadrivelocidad  $u^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ . Despejando de la ecuación (6)  $T_{\mu\nu}$  toma la siguiente forma:

$$T^{00} = \rho, \quad (7)$$

$$T^{i0} = 0, \quad (8)$$

$$T^{ij} = P \delta^{ij}. \quad (9)$$

La definición de fluido perfecto exige que la presión que éste experimenta y ejerce sea isótropa. De la ecuación (7) se deduce que la componente  $T^{00}$  equivale a la densidad de energía. La ecuación (8) define la densidad de momentum que en este caso es igual a cero pues la velocidad usual (3D) del fluido respecto al sistema de referencia es cero. La componente  $T^{ij}$  mostrada en la ecuación (9) es equivalente al tensor de esfuerzos. Para grandes escalas (más de 100 Mpcs) el tensor M-E para un fluido perfecto es una aproximación válida y caracteriza el contenido de materia y energía.

Existe un principio de conservación que involucra al tensor Momentum-Energía :

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \quad (10)$$

Recordando que el punto y coma representa la derivada covariante, esta ecuación es una forma de expresar el principio de conservación del momentum-energía que aplica para nuestro Universo, siempre que éste sea un sistema aislado y no haya intercambio de energía entre él y otro sistema similar.

---

<sup>2</sup>Para ver detalles de la aproximación de fluido perfecto ver [5, 12]

### 4.3. Métrica de FLRW

El Universo es homogéneo e isótropo a grandes escalas. A escalas menores a cien megaparsecs se observan inhomogeneidades tales como galaxias, nubes de polvo y regiones semi-vacías. Una métrica que permita describir la distribución del contenido energético a grandes escalas, cumpliendo con el principio cosmológico, es la de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) [13] y se muestra a continuación:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Esta métrica, escrita en coordenadas esféricas, se deduce de la ley de Hubble  $V = Hd$  [14], uno de los pilares observacionales de la cosmología estándar para asegurar el cumplimiento del principio cosmológico (Homogeneidad e Isotropía), la cual expresa la velocidad de recesión entre galaxias  $V$  como una relación lineal dependiente de la distancia física que las separa  $d$ , agregando un parámetro de proporcionalidad  $H$  llamado parámetro de Hubble, el cual varía con el tiempo.

La forma de construcción de esta métrica es a partir de una hiperesfera 4-dimensional, ubicando el Universo tridimensional que podemos experimentar en su superficie. Las características de homogeneidad e isotropía se reproducen, logrando que todo punto esté en continuo distanciamiento de los demás, tal como sucede sobre la superficie de un globo mientras se está inflando. Para más detalles en la obtención de la métrica descrita remitirse a [4].

El término  $a(t)$  representa el factor de expansión de la hiperesfera descrita, mientras que  $(r, \theta, \phi)$  representan la posición angular de cualquier cuerpo celeste. Particularmente la posición de las galaxias se mantiene fija en determinada coordenada, lo que cambia en el tiempo es su distancia de separación.  $H$  es el parámetro de Hubble ya mencionado que se define en términos del factor de expansión  $H = \frac{\dot{a}}{a}$ .

Por último se menciona el parámetro  $K$  que determina la curvatura espacial. Si  $K = 0$  el Universo está inmerso en un espaciotiempo plano (como una hoja de papel extendida), si  $K = 1$  el espaciotiempo es cerrado (finito pero sin límites como un toroide, elipsoide, esfera o cualquier otra figura tridimensional cuyas aristas se unan) y para  $K = -1$  el espaciotiempo es abierto (carente de símil tridimensional).

#### 4.4. Ecuaciones de evolución cosmológica

A través de las ecuaciones de campo de Einstein y la métrica FLRW se obtiene la ecuación de Friedmann [3, 4, 5], la cual representa la evolución del Universo y permite determinar qué importancia y relevancia han tenido, tienen y tendrán los tres elementos fundamentales en cosmología: radiación, materia y constante cosmológica:

$$H^2 = \frac{\rho}{3m_p^2} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}. \quad (12)$$

Hay un valor para la densidad de energía  $\rho_{crit} = 3H^2m_p^2$  que al ser reemplazado en la ecuación anterior reproduce  $K = 0$ . Observaciones realizadas mediante el satélite WMAP indican que el universo es altamente plano [15].

Es usual definir una nueva función  $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$  e incluir en ella el efecto de la constante cosmológica  $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2}$ . Mediante esta nueva definición se reescribe la ecuación de Friedmann así:

$$\Omega_{total} = \Omega + \Omega_\Lambda, \quad (13)$$

$$\Omega_{total} - 1 = \frac{K}{a^2H^2}. \quad (14)$$

Las observaciones del WMAP + SN + BAO dan un valor de  $\Omega_{total} = 0,9996 \pm 0,0150 \pm 0,0015 \pm 0,0130$  (ver [15]) con lo cual se corrobora la planitud del Universo a grandes escalas.

El término  $m_p^2$  es la masa reducida de Planck y equivale a  $\frac{1}{8\pi G}$  en unidades naturales. En términos energéticos  $M_p = \sqrt{8\pi m_p} = \frac{1}{\sqrt{G}} = 1,22 \times 10^{19} GeV$  equivale a la cota superior en la escala de energías, por encima de la cual deja de ser válida la relatividad general. Para energías superiores es necesaria una teoría cuántica para la gravedad que sirva como puente entre la relatividad general y la física cuántica [3, 4, 5].

La masa de Planck  $M_p$  es interpretada de manera análoga como la masa contenida en una esfera cuyo radio es la longitud de Planck, la cual corresponde a la distancia que un fotón recorre en el tiempo de Planck y es aproximadamente  $1,61624 \times 10^{-35} m$ . Ésta esfera representa el tamaño del Universo cuando había transcurrido el tiempo de Planck  $t_p = 5,39 \times 10^{-44} s$ . Cabe aclarar que la inflación primordial ocurre después que el universo tenga  $t_p$  segundos de existencia, dejando los efectos cuánticos fuera del mecanismo que la genera [3, 4, 5].

Dividiendo el universo en subespacios cúbicos de lado 100 Mpc se puede apreciar la homogeneidad e isotropía del Universo sin olvidar que cada volumen

se está expandiendo a una tasa  $a(t)$ . Aplicando leyes de termodinámicas al sub-espacio y recordando el principio cosmológico que impide que dichas regiones intercambien calor, se puede obtener una expresión para la ecuación de continuidad de la densidad de energía [3] y se muestra a continuación:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (15)$$

La obtención de la ecuación anterior se muestra en el apéndice A. A través de esta ecuación se pueden concluir varios aspectos importantes del Universo temprano, tales como que inicialmente la radiación dominaba, posteriormente fue la materia y finalmente la constante cosmológica. Cabe aclarar que la época dominada por materia debe ser lo suficientemente larga para posibilitar la formación y evolución de estructuras.

## 4.5. Problemas de la cosmología estándar

Existen ciertas inconsistencias entre los planteamientos teóricos ofrecidos por la cosmología estándar y los resultados observacionales, que si bien explican muchos fenómenos y da el estatus de teoría al Big Bang al explicar la homogeneidad e isotropía a grandes escalas, la expansión de Hubble, la abundancia de elementos ligeros y la existencia de la RCF, genera ciertos problemas conocidos como los problemas de la cosmología estándar. A continuación se explican dos de ellos, los cuales se resuelven mediante la teoría inflacionaria explicada en la siguiente sección.

### 4.5.1. Problema de Horizonte

El problema de horizonte [5] es una discrepancia observacional entre los resultados obtenidos para las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo y los resultados predichos por modelos cosmológicos estándar de expansión desacelerada<sup>3</sup>. Para explicar el problema es necesario hablar de ciertos conceptos.

El horizonte de partículas hoy en día, que equivale a  $2H_0^{-1}$ , es simplemente la distancia máxima desde la cual hoy en día recibimos información en forma de radiación electromagnética. La distancia coordinada actualmente está dada por

---

<sup>3</sup>Para más información remitirse a la referencia [16]

la siguiente expresión:

$$d_c = \frac{2H_0^{-1}}{a_0}. \quad (16)$$

En la época de recombinación, cuando se formaron los primeros átomos y se generó la radiación cósmica de fondo, el valor de  $d_c$  es el mismo ya que se está analizando la misma región espacial, sin embargo la distancia física si varía a lo largo del tiempo, aumentando a medida que el Universo se expande. En el período de recombinación el valor de esta distancia física llamada también región correspondiente al Universo observable actualmente es:

$$\lambda_{rec} = a_{rec}d_c, \quad (17)$$

mientras que el valor del horizonte de partículas en la época de recombinación equivale a:

$$2H_{rec}^{-1} = 2H_o^{-1} \left[ \frac{T_o}{T_{rec}} \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (18)$$

De forma que en recombinación para la región física correspondiente al Universo observable llamado también horizonte óptico [4] caben aproximadamente  $10^4$  horizontes de partículas. Para detalles en el cálculo del horizonte de partículas mostrado remitirse a la referencias [4, 5].

Sabemos que el horizonte de partículas es el borde de la región espacial desde la cual podemos recibir información en forma de radiación electromagnética. Una región causalmente conectada es una subregión del horizonte de partículas dentro de la cual se puede conocer información desde cualquier punto y en cualquier punto. En otras palabras, es una región dentro de la cual los fotones emitidos desde un punto en el borde puede llegar al otro punto diametralmente opuesto en un tiempo igual al que tardaron los fotones el llegar del borde del horizonte de partículas a nosotros. El tamaño de esta zona es de  $\frac{1}{2}H^{-1}$ , lo que es igual a la mitad del radio del horizonte de partículas.

En recombinación para el horizonte óptico hay aproximadamente  $10^5$  regiones causalmente conectadas en su interior. Cada región causalmente conectada está desconectada de las demás, de modo que las  $10^5$  regiones tienen características independientes entre sí. Una de las características propias de cada región causalmente conectada es la temperatura, la cual debe necesariamente ser diferente en cada zona ya que no hay conexión causal entre ellas. Todo esto sucede en el momento que se genera la RCF de modo que la información proveniente desde cada burbuja puede ser obtenida hoy en día.

El problema de horizonte radica en que la diferencia de temperatura entre cada región causalmente conectada hoy en día es casi nula, con una leve anisotropía

de  $\delta T/T = 10^{-5}$ . Un cambio en la dirección de observación de la radiación cósmica de fondo de  $1,72^\circ$  es suficiente para pasar de una región causalmente conectada a otra. Si estas regiones en realidad estaban desconectadas causalmente entre sí, no hay razón física para que mantengan una temperatura casi igual.

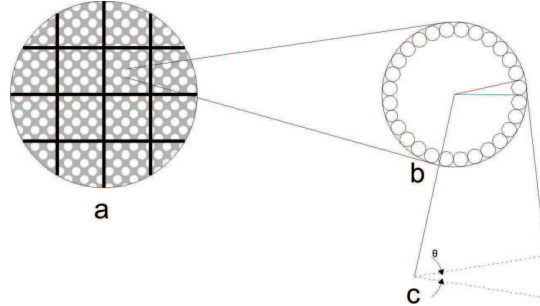


Figura 1: Esquema explicativo del problema de horizonte

En la figura 1 se esquematiza el problema de horizonte. En a) el horizonte óptico contiene  $10^5$  regiones espaciales causalmente conectadas y se genera la RCF durante recombinación. En b) se observa nuestro horizonte de partículas hoy en día expandido por el factor de escala  $a(t)$ , el cual colinda con regiones causalmente conectadas (círculos alrededor), las cuales se han expandido de igual modo y han enviado fotones desde recombinación formando un cono de recepción que no ha variado angularmente desde entonces. En c) se hace una ampliación al cono dibujado por la radiación emitida desde cada una de las regiones causalmente conectadas, indicando el ángulo  $\theta = 1,72^\circ$ , necesario para que nuestra recepción de RCF cambie de una región causalmente conectada a otra y por consiguiente se detecte variación en la temperatura.

#### 4.5.2. Problema de Planitud

Interpretando la ecuación (14) se deduce que si el Universo observable es absoluta y espacialmente plano,  $|\Omega - 1| = 0$  para cualquier tiempo dentro de la evolución del Universo. El término  $a$  se hace mas pequeño a medida que se va hacia atrás en el tiempo por definición, ya que el factor de escala redimensiona el volumen físico del Universo.

Suponiendo que  $K \neq 0$ , el valor de  $\Omega$  cambiará en el tiempo de la siguiente

forma:

$$|\Omega_{total} - 1| \propto \frac{1}{a^2 H^2}. \quad (19)$$

Para la época dominada por radiación  $H \propto a^{-4}$  y para la época dominada por materia  $H \propto a^{-3}$ . Se concluye que  $|\Omega_{total} - 1|$  crece con  $a$  linealmente en el caso de materia y cuadráticamente para el caso de radiación.

Si hoy en día  $|\Omega_0 - 1| \approx 0$  con una aproximación de  $10^2$  [15], al inicio de recombinación y generación de la radiación cósmica de fondo este valor debió ser mucho mas cercano a cero, del orden de  $10^{-32}$  aproximadamente.

El problema de planitud consiste en no tener un mecanismo que genere los órdenes de magnitud para  $|\Omega_0 - 1|$  requeridos, dejando solo la opción de un ajuste fino a las condiciones iniciales, pero esto no es físicamente satisfactorio ni consistente.

## 4.6. Mecanismo de Inflación

El mecanismo de inflación explica la expansión acelerada de una región del universo a partir de la cual se formó el Universo observable. En la época de inflación la gravedad tuvo que comportarse como una fuerza repulsiva que esparció el contenido energético, aumentando el tamaño del espaciotiempo que lo contiene. La fuerza repulsiva es concebida actualmente en el consenso científico como un tipo de energía oscura cuya composición es desconocida actualmente, pero los efectos son analizados mediante la adición de la constante cosmológica en la ecuación (12).

En la figura 2 se muestra la carencia de conexión causal entre el horizonte de partículas y el horizonte óptico o Universo observable. Esto, como ya se indicó en las secciones anteriores, imposibilita que las  $10^4$  regiones causalmente conectadas pudiesen termalizar y mantener todas una misma temperatura, tal como se observa actualmente.

La solución a los problemas de cosmología estándar se logra con el mecanismo de inflación mediante el cual se permite una conexión causal entre la región física correspondiente al Universo observable con el horizonte de partículas. Se observa en la figura 3 que durante inflación el valor del radio del horizonte de partículas se mantiene aproximadamente constante en un valor  $H_i^{-1}$ . Con esto se logra que haya termalización entre todas las regiones causalmente conectadas y el problema

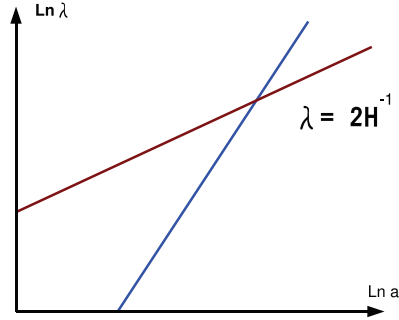


Figura 2: Gráfica en la que se observa la evolución temporal del horizonte de partículas (línea azul) y del horizonte óptico (línea roja).

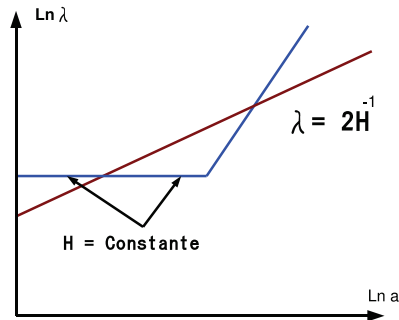


Figura 3: Gráfica en la que se observa la evolución temporal del horizonte de partículas para un valor de H constante durante inflación

de horizonte queda solucionado.

En terminos cuantitativos podemos explicar el mecanismo de inflación empezando por la ecuación de Friedmann. Tomando el caso para un espaciotiempo plano ( $K = 0$ ), y derivando respecto al tiempo la ecuación (12) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3P}{6m_p^2}. \quad (20)$$

Se observa que  $\ddot{a} > 0$  siempre que  $\rho + 3P < 0$ . Ésta es la condición necesaria para generar un período inflacionario, donde  $\ddot{a}$  representa la aceleración del proceso de expansión del espaciotiempo.

Durante el periodo inflacionario el parámetro de Hubble  $H \approx constante$ .

De la ecuación (12) se concluye que  $\rho$  también debe mantener su valor constante si el espaciotiempo es plano. Utilizando ahora la ecuación (15) se calcula su valor durante el periodo inflacionario:

$$\rho \approx -P. \quad (21)$$

Así bien, si durante el período inflacionario es requerido que el horizonte de partículas se congele, también lo debe hacer la densidad de energía, indicando que el contenido energético dentro del horizonte de partículas no debe cambiar, al menos durante inflación.

#### 4.6.1. Monto de Inflación

El monto de inflación llamado también número de e-folds, es un valor que cuantifica la cantidad de expansión que se logra en la época de inflación y se muestra a continuación:

$$N = \ln \frac{a_f}{a_i}, \quad (22)$$

donde  $a_i$  es el valor del factor de escala al principio de inflación y  $a_f$  es el valor del factor de escala al final de inflación.

La ecuación  $\lambda_i \leq H_i^{-1}$  es la condición que se debe cumplir para que con inflación se solucione el problema de horizonte. Realizando los cálculos correspondientes se puede calcular el valor que es aproximadamente  $N \geq 62$  e-folds [5, 17].

Para solucionar el problema de planitud se debe calcular cuántos e-folds se requieren. Primero se debe recordar de la ecuación (14) que  $|\Omega - 1|$  es proporcional a  $H^{-2}$  y a  $a^2$ . En inflación  $H$  es constante luego  $|\Omega - 1| \propto \frac{1}{a^2}$ , y esto genera que  $|\Omega - 1|$  tenga valores muy pequeños para que la ecuación (14) caracterice correctamente la evolución del Universo.

$$\frac{|\Omega - 1|_{t_f}}{|\Omega - 1|_{t_i}} = \left( \frac{a_i}{a_f} \right)^2 = e^{-2N} \leq O(10^{-32}). \quad (23)$$

Recordando el valor actual de  $|\Omega - 1|$  que se aproxima a cero con dos órdenes de precisión y que para la época al final de inflación (que sucede antes de la recombinación y la generación de radiación cósmica de fondo) debe aproximarse a cero con 32 órdenes de precisión, se calcula de la Ec. (23) un valor de  $N = 40$ , el cual es el límite inferior de e-folds necesario para solucionar el problema de planitud. Esto demuestra que solucionando el problema de horizonte a través del mecanismo de inflación con  $N \geq 62$  e-folds se solucionan ambos problemas de la cosmología estándar.

### 4.6.2. Inflación mediante campos escalares

En cosmología se estudian los campos escalares ya que son los preferidos por la comunidad científica para ser los generadores de inflación (campo de inflatón). La razón es sencilla: generan homogeneidad e isotropía estadística y explican las presiones negativas. Tales campos escalares fundamentales no han sido observados en la naturaleza hasta el momento. El Lagrangiano que se muestra a continuación corresponde al de un campo escalar (ver [4, 5]):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - V(\phi). \quad (24)$$

A través del lagrangiano mostrado es posible calcular la densidad de energía y presión que el campo escalar genera, tomando como premisa que el Universo se modela como un fluido perfecto, homogéneo e isótropo.  $V(\phi)$  representa el potencial generado por la existencia del campo escalar  $\phi$ . A continuación se muestran las ecuaciones para  $\rho$  y  $P$  :

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (25)$$

$$P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (26)$$

Recordando que  $\rho + 3P < 0$  es la condición para generar inflación, se pueden tomar las ecuaciones (25) y (26) y reescribir la condición en términos del campo escalar así:

$$\dot{\phi}^2 < V(\phi). \quad (27)$$

Además de las definiciones para  $\rho$  y  $P$  es posible reescribir la ecuación de continuidad (15) tal como se muestra a continuación:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (28)$$

Es fácil encontrar una relación entre la ecuación (28) y la ecuación para un oscilador armónico amortiguado, siempre que el término  $V'(\phi)$  sea un potencial generalizado ( $H \propto \sqrt{V}$ ), sólo que en este caso la constante de amortiguamiento es  $3H$ .

Podemos concluir que para un campo escalar generador de inflación, el término  $3H\dot{\phi}$  impone condiciones que afectarán este período. Un valor grande para el término de fricción, el cual depende de  $H$ , siendo  $H$  proporcional a su vez a  $\sqrt{\rho}$  (deducido de (12)) y  $\rho$  proporcional a  $V(\phi)$  (deducido de (25)), conducirán a a la siguiente expresión:

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|. \quad (29)$$

Asumiendo que  $\dot{\phi}^2$  representa la velocidad de variación del campo escalar se impone la restricción:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad (30)$$

la cual es aplicable a los modelos inflacionarios mas populares. Se interpreta  $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$  como la densidad de energía cinética, mientras que  $V(\phi)$  hará el papel de la densidad de energía potencial, ambos terminos relacionados con el campo escalar generador de inflación llamado Inflatón.

Las condiciones (29,30) generan un potencial muy plano, tal que el campo escalar  $\phi$  ruede lentamente desde los valores grandes de  $V(\phi)$  hasta un mínimo y la inflación se detenga.

Un potencial  $V(\phi)$  que cumpla las condiciones (29) y (30) es conocido como potencial del tipo Slow-Roll [Fig. 4] y permite que durante el periodo inflacionario, el factor de escala  $a(t)$  evolucione de manera exponencial [4] tal como se muestra a continuación:

$$a(t) = a_{ini} \exp\left(\int_{t_{ini}}^t H_{inf} dt\right), \quad (31)$$

donde  $a_{ini}$  es el parámetro de expansión para un tiempo  $t_{ini}$  y  $H_{inf}$  es el parámetro de Hubble durante inflación. La forma del potencial  $V(\phi)$  mantiene su amplitud casi constante para un intervalo en el que ocurre la expansión acelerada.

La inflación del tipo Slow-Roll se puede expresar mediante los siguientes dos parámetros:

$$\epsilon = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (32)$$

$$\eta_\phi = \epsilon - \frac{\ddot{\phi}_0}{H_{inf}\dot{\phi}_0}. \quad (33)$$

Haciendo que  $\epsilon < 1$  se obtiene inflación, mientras que si  $\epsilon \ll 1$  y  $|\eta_\phi| \ll 1$  se cumplen las condiciones de Slow-Roll [22] descritas en las ecuaciones (29) y (30).

Un potencial de este tipo hace que los resultados observacionales concuerden con los calculados analíticamente por el modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM (Constante Cosmológica con Materia Oscura Fría) [18].

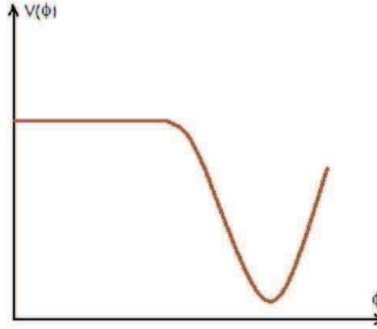


Figura 4: Ejemplo de potencial  $V(\phi)$  para que la inflación sea del tipo Slow-Roll

#### 4.7. Acople mínimo y no mínimo a la gravedad

A partir de una acción  $S$  es posible encontrar las ecuaciones de movimiento para una métrica espacio-temporal preestablecida y el tensor de momentum-energía para el contenido energético existente dentro del espacio-tiempo caracterizado por dicha métrica. Para ello se aplica el principio de acción estacionaria.

La acción Einstein-Hilbert [11] mostrada a continuación, se diferencia de (4) en la omisión de la constante cosmológica cuyo significado físico aún es desconocido. A través de esta acción (escrita en unidades naturales) se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein, base fundamental de la relatividad general.

$$S = \frac{R}{16\pi} + \mathcal{L}_m. \quad (34)$$

Se diferencian dos términos:  $\frac{R}{16\pi}$  y  $\mathcal{L}_m$ . El primero muestra el escalar de Ricci  $R$  que da información acerca de la geometría del espacio-tiempo. El segundo término es el lagrangiano de materia que caracteriza el contenido energético.

De (34) se observa que la acción no posee términos que relacionen explícitamente la geometría del espacio-tiempo con el contenido energético existente. Este hecho se conoce como *acople mínimo a la gravedad* y representa la relación entre la gravedad y el contenido energético.

La relatividad general postula que la existencia de un campo gravitacional modifica la distribución del contenido energético y éste a su vez altera la curvatura espacio-temporal, lo cual se puede deducir de la igualdad en las ecuaciones de campo de Einstein mostradas en (5).

Se habla de *acople no mínimo a la gravedad* cuando la acción mediante la cual se calculan las ecuaciones de campo contiene términos que explícitamente relacionan la curvatura espacio-temporal con el contenido energético. En este caso no es posible obtener una igualdad entre términos geométricos y energéticos debido al término de acople.

Para el caso del presente estudio se busca generar inflación mediante un campo vectorial masivo o de corto alcance  $A_\mu$ . La acción propuesta (descrita en el siguiente capítulo) contiene un término  $\frac{1}{12}RA_\mu A^\mu$  el cual relaciona directamente la curvatura espacio-temporal  $R$  (específicamente  $R$  es el escalar de curvatura) con el campo vectorial  $A_\mu$ , que representa el contenido energético para este caso particular. Aplicando el principio de acción estacionaria no se llega a las ecuaciones de campo de Einstein ya que el término de acople descrito impide separar variables energéticas y geométricas.

## 5. Inflación vectorial

Existe una razón fundamental para elegir un campo vectorial como mecanismo generador de inflación y es que si bien los modelos de expansión acelerada que son aceptados por la comunidad científica son los que utilizan campos escalares fundamentales, éstos no han podido ser observados hasta la fecha. Para el caso de los campos vectoriales se tiene mucha base observacional [19] (por ejemplo la RCF) razón para tomarlos como campos fundamentales de la inflación primordial.

A partir de la acción propuesta en las Refs. [8, 9], se buscarán reproducir los resultados obtenidos por la inflación con campos escalares fundamentales del tipo slow roll, reemplazando  $\phi$  por un campo vectorial fundamental  $A_\nu$  masivo o de corto alcance. El término  $F_{\alpha\beta}$  es función de las derivadas covariantes del campo vectorial. Se muestra a continuación la acción mencionada:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^\alpha A_\alpha \right]. \quad (35)$$

La acción mostrada va a ser la materia prima del trabajo de grado propuesto, mediante la cual se van a calcular las condiciones de slow roll vectorial. Se pueden diferenciar fácilmente tres términos:

1. Geométrico :  $\frac{R}{16\pi}$ .
2. Contenido energético :  $\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$  y  $\frac{1}{2}m^2A^\alpha A_\alpha$ .
3. Acople no mínimo a la gravedad :  $\frac{R}{12}A^\alpha A_\alpha$ .

El tercer término es la clave para que, mediante un campo vectorial fundamental, se puedan obtener las condiciones de slow roll. La razón de este efecto tiene relación directa con la forma del escalar de curvatura  $R$  para un espaciotiempo espacialmente plano de Friedmann o en expansión.

Aplicando el principio de acción estacionaria se calcularán las ecuaciones de movimiento para el campo  $A_\nu$ , y así mismo  $Z_{\mu\nu}$  que si bien ya no representa el tensor de momentum-energía debido a que la acción incluye el término de acoplamiento no mínimo a la gravedad, se utilizará para calcular las condiciones de slow roll para el campo vectorial.

Finalmente se analizarán las restricciones que deben imponerse a los campos vectoriales para lograr el régimen de slow roll a través de tres campos vectoriales ortogonales entre sí.

Es importante observar que la forma que toma la ecuación (28), para el caso de campos vectoriales, va a ser muy importante al momento de comparar los resultados obtenidos del estudio sobre inflación vectorial. Si la forma de la ecuación de continuidad para el caso vectorial y escalar se mantiene invariante, esto será un buen indicio acerca de la validez del campo vectorial como generador de la inflación primordial del tipo Slow-Roll.

Este trabajo de investigación busca explicar y defender la propuesta de generar inflación a través de campos vectoriales. Una dificultad inherente al uso de este tipo de motores de expansión espaciotemporal es la generación de direcciones preferenciales causantes de anisotropía en la distribución del contenido energético [8, 17].

Como defensa principal para proponer como motor de inflación el uso de campos vectoriales, se tienen en cuenta tres aspectos importantes:

- Los campos vectoriales han sido observados en la naturaleza y puede razonablemente suponerse que uno o varios campos vectoriales fundamentales pudieron desencadenar el proceso inflacionario.

- Modelando el mecanismo inflacionario a través de 3 campos vectoriales ortogonales entre sí es posible obtener homogeneidad e isotropía en la distribución del contenido energético.
- El acoplamiento no mínimo a la gravedad incluido en la acción mostrada en (35) permite que la inflación vectorial propuesta sea del tipo Slow-Roll y de este modo el proceso de inflación dure lo suficiente para que el universo alcance a expandirse lo suficiente y de este modo se logren solucionar los problemas de cosmología estandar.

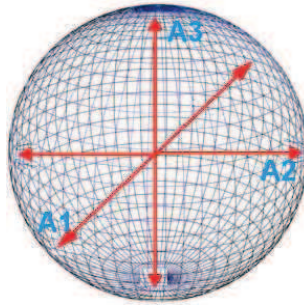


Figura 5: Ilustración que muestra el papel que desempeñan los campos vectoriales  $\vec{A}$  en el proceso inflacionario

Se observa en la figura 5 que los campos vectoriales generan la expansión de manera simultanea en las 3 direcciones ortogonales entre sí, impidiendo la generación de anisotropías en la distribución del contenido energético.

En las siguientes secciones se desarrollarán cálculos a fin de obtener resultados que corroboren la posibilidad propuesta de generar inflación del tipo Slow-Roll a partir de campos vectoriales fundamentales y solucionar con ellos los problemas de la cosmología estandar, específicamente de horizonte y planitud.

## 5.1. Cálculo de las ecuaciones de movimiento

A partir de la acción propuesta en [8] y mostrada en la ec.(35) se aplica el principio de acción estacionaria con extremos fijos para calcular las ecuaciones de evolución que regirán el comportamiento y evolución del campo vectorial  $A_\mu$  durante el periodo inflacionario propuesto en este caso.

Partiendo de (35) se aplica el principio variacional respecto a  $A_\mu$  y se obtienen las ecuaciones de movimiento <sup>4</sup>:

$$\left(m^2 - \frac{R}{6}\right) A_\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} (\sqrt{-g} F_{\gamma\mu}) = 0. \quad (36)$$

Se observa un término  $F_{\gamma\mu} = \partial_\gamma A_\mu - \partial_\mu A_\gamma$ . Con las ecuaciones de movimiento se calcularán ciertas condiciones iniciales y además las ecuaciones de evolución de las componentes del campo vectorial durante el periodo inflacionario.

## 5.2. Ecuaciones de evolución del campo vectorial

El modelo inflacionario se propone dentro de un espaciotiempo plano ( $K=0$ ) del tipo F.L.R.W. cuya métrica para coordenadas cartesianas se muestra a continuación:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Aplicando la métrica a las ecuaciones de movimiento (36) se encuentran las siguientes expresiones:<sup>5</sup>

$$-\frac{1}{a^2} \nabla^2 A_0 + \left(m^2 - \frac{R}{6}\right) A_0 + \frac{1}{a^2} \partial_i \dot{A}_i = 0. \quad (38)$$

$$\ddot{A}_i + \frac{\dot{a}}{a} \dot{A}_i - \frac{1}{a^2} \Delta A_i + \left(m^2 - \frac{R}{6}\right) A_i - \partial_i \dot{A}_0 - \frac{\dot{a}}{a} \partial_i A_0 + \frac{1}{a^2} \partial_i (\partial_k A_k) = 0. \quad (39)$$

Una condición fundamental para utilizar un campo vectorial como motor generador de la inflación primordial es que reproduzca las características favorables de un campo escalar, principalmente de la homogeneidad e isotropía. Haciendo que el campo sea altamente homogéneo por medio de  $\partial_i A_\beta = 0$  se obtiene de la ec.(38)

$$\left(m^2 - \frac{R}{6}\right) A_0 = 0, \quad (40)$$

---

<sup>4</sup>El cálculo completo de las ecuaciones de movimiento se muestra en el Apéndice B

<sup>5</sup>Para detalles en los cálculos ver Apéndice C

y por lo tanto:

$$A_0 = 0. \quad (41)$$

Este resultado impone una condición inicial para la parte temporal del campo vectorial. Se introduce una nueva variable  $B_k = \frac{A_k}{a}$  que representa el campo vectorial físico, escalado por la expansión espaciotemporal del universo.

A través de la ec.(41) y haciendo uso de la condición  $A_0 = 0$  se obtiene una ecuación diferencial que representa la evolución del campo vectorial generador de inflación <sup>6</sup> y se muestra a continuación:

$$\ddot{B}_k + 3H\dot{B}_k + m^2 B_k = 0. \quad (42)$$

Esta ecuación es muy similar a la ec. (28) que representa la evolución temporal de un campo escalar, planteada en el apartado de inflación mediante campos escalares. En este momento se puede hacer la similitud entre los términos que componen ambas ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{B}_k &\rightarrow \ddot{\phi} \\ 3H\dot{B}_k &\rightarrow 3H\dot{\phi} \\ m^2 B_k &\rightarrow V'(\phi) \end{aligned} \quad (43)$$

Es de notar que el caso escalar solo representa una ecuación mientras que para el caso vectorial son tres, una por cada dirección espacial ortogonal ya que la componente temporal se anula al aplicar la condición inicial  $A_0 = 0$ . Se requiere que las tres componentes evolucionen de la misma forma para no generar direcciones preferenciales; de este modo no se viola homogeneidad ni isotropía, lo que es un requisito fundamental de cualquier modelo inflacionario, recordando los pilares observacionales de la cosmología que se resumen en el principio cosmológico.

Es importante destacar la similitud que tienen las ecuaciones (28) y (42) con la ecuación de un oscilador armónico amortiguado. Esta relación se puede realizar siempre que el potencial  $V(B)$  generado por el campo vectorial es proporcional a  $B_k^2$ , y así al calcular la derivada de  $V(B)$  se obtiene el último término de la ecuación (42) en términos de  $B_k$  a la primera potencia [8].

Observando los coeficientes  $3H$  y  $m^2$  de la ecuación descrita es fácil ver

---

<sup>6</sup>Para ver los detalles del cálculo remitirse al Apéndice D

que para  $H \gg m$  el comportamiento del campo vectorial va a ser una respuesta sobreamortiguada o de variación lenta, mientras que para el caso  $H \approx m$  se obtiene un comportamiento oscilatorio propio del comportamiento subamortiguado.

El sobreamortiguamiento y subamortiguamiento pueden relacionarse directamente con la velocidad de expansión del campo vectorial  $B$ . Para el caso de un oscilador con términos de amortiguamiento, el coeficiente de  $\dot{B}_k$  es proporcional a la fricción, en otras palabras es el factor que se opone a la expansión espacial del campo. Así mismo el coeficiente de  $B_k$  da información acerca de la energía cinética que contiene el campo vectorial <sup>7</sup>.

Es así que para el caso sobreamortiguado  $B_k$  está restringido a expandirse, es decir se mantiene casi estático. Para el caso subamortiguado las restricciones se eliminan y el campo puede evolucionar espacialmente sin importar que el término de fricción siga teniendo valor.

Partiendo de la similitud funcional entre las ecuaciones (28) y (42) se puede hacer la siguiente observación: Un campo vectorial puede ser motor de la inflación primordial generadora de la expansión del espaciotiempo.

### 5.3. Cálculo del tensor $Z_{\mu\nu}$

Aplicando el principio de acción estacionaria con extremos fijos a la acción mostrada en la ec.(35) respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  es posible obtener el tensor  $Z_{\mu\nu}$  <sup>8</sup> que tendrá características similares a las del tensor de momentum-energía canónico  $T_{\mu\nu}$ :

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right]. \quad (44)$$

$$Z_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G} \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right]. \quad (45)$$

El tensor  $Z_{\nu}^{\mu}$  mantiene la misma forma de  $T_{\nu}^{\mu}$ , sin embargo la parte derecha de ambas definiciones no es equivalente, razón por la cual no podemos definirlo como el tensor de momentum-energía del modelo inflacionario propuesto.

---

<sup>7</sup>hay que recordar que el término  $m^2 B_k$  proviene para el oscilador armónico, de la fuerza restauradora del movimiento.

<sup>8</sup>Para ver el cálculo de  $Z_{\mu\nu}$  a partir de la acción propuesta remitirse al apéndice E

Para obtener el tensor de momentum-energía es necesario aplicar su definición formal<sup>9</sup> mostrada a continuación:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (46)$$

La parte derecha de  $Z_{\mu\nu}$  fue calculada en el apéndice E y se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} Z_{\mu\nu} = & \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\alpha A^\alpha g_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{6} (R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) A^\alpha A_\alpha. \\ & - g^{\beta\lambda} F_{\beta\mu} F_{\lambda\nu} + \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\mu A_\nu \end{aligned} \quad (47)$$

La ecuación (44) determina la igualdad preexistente entre el contenido energético y la geometría del espaciotiempo y es una relación causa-efecto en la que el campo gravitacional es generado y perturbado por la distribución del contenido energético. Este hecho es una consecuencia del *Acople Mínimo a la Gravedad* lo cual indica que la acción generadora de  $T_{\mu\nu}$  no posee productos entre términos que representen geometría y contenido energético.

A continuación se presenta la forma matricial de tensor momentum-energía en coordenadas cartesianas:

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix}. \quad (48)$$

El tensor es diagonal y su componente temporal representa la densidad de energía mientras que las componentes espaciales son iguales representando isotropía en la presión ejercida por el fluido cósmico modelado y propuesto por Weyl en [12].

La ecuación (47) muestra el tensor  $Z_\nu^\mu$  que contiene términos que dependen del campo vectorial, de las derivadas del campo vectorial, del tensor de Ricci (geometría) y de productos cruzados entre ellos. Éstos productos cruzados entre geometría y contenido energético son consecuencia del *Acople no Mínimo a la Gravedad*. La relación causa-efecto entre campos gravitacionales generados por

---

<sup>9</sup>Proveniente de [5, 10]

contenido energético tendrá un nuevo origen: los términos cruzados presentes en la acción propuesta (35) para campos vectoriales.

Aunque se encuentre cierta similitud entre los tensores  $T_{\mu\nu}$  y  $Z_{\mu\nu}$ , este último no puede ser llamado tensor de Momentum-Energía pues no cumple la ecuación de conservación mostrada en (10); sin embargo para el objetivo buscado a través de este desarrollo teórico de expansión vectorial acelerada, se aplicará la cosmología estandar de  $T_{\mu\nu}$  y campos escalares a la contraparte  $Z_{\mu\nu}$  con campos vectoriales. A continuación se pueden observar las marcadas diferencias entre ambos tensores:

$$T_0^0 = \rho \rightarrow Z_0^0 = \kappa. \quad (49)$$

$$T_j^i = -P\delta_j^i \rightarrow Z_j^i = -Q\delta_j^i. \quad (50)$$

Para el caso del tensor de momentum-energía las cantidades  $\rho$  y  $P$  son respectivamente densidad de energía y presión isotrópica en el caso particular de estar modelando el universo como un fluido perfecto. En el caso de  $\kappa$  y  $Q$  esta claro que, aunque las expresiones ya no representen las anteriores cantidades fundamentales, su forma funcional se mantiene y con ellas se posibilita el cálculo del parámetro de Hubble  $H$  y el número de e-folds  $N$  obtenido al final de inflación vectorial.

A partir de las sustituciones realizadas para el modelo inflacionario propuesto, mostradas en (49,50), se debe encontrar las condiciones necesarias para representar el tensor  $Z_\nu^\mu$  de forma diagonal, de manera que se mantenga la estructura funcional entre este tensor y  $T_\nu^\mu$ .

$$Z_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Q \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Estas condiciones las provee el conjunto de campos vectoriales que se van a utilizar como generadores del proceso inflacionario y se mostrarán en posteriores capítulos del presente trabajo. Una importante observación en este punto es que, logrando que  $Z_\nu^\mu$  tenga la forma mostrada en (51), se obtendrá isotropía en la presión, condición necesaria para que inflación evolucione espacialmente de la misma forma.

Recordando que el campo vectorial es homogéneo, tal como se muestra en la ec.(41), se concluye que sus derivadas espaciales son cero. Modelando el universo a partir de la métrica F.L.R.W. para un espaciotiempo plano se calculará  $Z_{00}$  y  $Z_{ij}$  en las siguientes secciones.

#### 5.4. Definición de $Z_0^0$ para tres campos vectoriales

De la expresión obtenida para  $Z_\nu^\mu$  se calcula su componente temporal mostrada a continuación <sup>10</sup>:

$$Z_0^0 = \frac{1}{2} \left( \dot{B}_k^2 + m^2 B_k^2 \right), \quad (52)$$

la cual está definida solo para un campo vectorial fundamental homogéneo, sin embargo es evidente que utilizar un solo campo vectorial como motor del mecanismo de inflación generaría una dirección preferencial en la que el universo tendería a expandirse, impidiendo reproducir los resultados de homogeneidad e isotropía, característica favorable que provee la inflación clásica a través de campos escalares.

De las expresiones para el tensor  $Z_\nu^\mu$  para un solo campo vectorial  $\vec{B}$  es posible generalizar para tres campos vectoriales. Para esta generalización debe tenerse en cuenta las siguientes condiciones

- Los tres campos deben ser ortogonales entre sí.
- La magnitud de los tres campos debe ser la misma, tal que al encender el motor inflacionario no existan direcciones de expansión preferenciales, generadoras de anisotropía.

La ortogonalidad de los tres campos vectoriales se caracteriza mediante la siguiente expresión:

$$\Sigma_i B_i^a \cdot B_i^b = |\vec{B}|^2 \delta_b^a, \quad (53)$$

donde se define  $a$  o  $B$  que son los identificadores de cada uno de los tres campos vectoriales fundamentales propuestos. Es posible relacionar a los tres campos vectoriales  $B_k$  con la base ortogonal del espacio tridimensional que están generando por medio de la expansión. Los superíndices  $a$  y  $b$  sirven para diferenciar productos cruzados entre los tres campos y así obtener siempre como producto la magnitud del campo elevada al cuadrado, con lo cual se mantiene la condición que los campos son de igual magnitud.

---

<sup>10</sup>Los detalles del cálculo de  $Z_0^0$  se muestran en el apéndice F

Es posible obtener una segunda condición que corrobore la ortogonalidad e igualdad en magnitud de los campos vectoriales. A partir de la ec.(53) se realizan los siguientes cálculos:

$$\Sigma_i B_i^a B_i^b = |\vec{B}|^2 \delta_b^a. \quad (54)$$

$$\Sigma_i B_i^a B_i^b B_j^a = |\vec{B}|^2 \delta_b^a B_j^a. \quad (55)$$

$$\Sigma_i (\Sigma_a B_i^a B_j^a) B_i^b = |\vec{B}|^2 \delta_b^a B_j^a. \quad (56)$$

$$\Sigma_i (\Sigma_a B_i^a B_j^a) B_i^b = |\vec{B}|^2 B_j^b. \quad (57)$$

$$\Sigma_i (\Sigma_a B_i^a B_j^a) B_i^b = |\vec{B}|^2 \delta_j^i B_i^b. \quad (58)$$

$$\Sigma_a B_i^a B_j^a = |\vec{B}|^2 \delta_j^i. \quad (59)$$

Mediante la última expresión obtenida se concluye que para el mismo campo vectorial  $B^a$  se pueden sumar los productos cruzados entre las componentes y el resultado corrobora la condición de igualdad en magnitud para los tres campos.

Volviendo a la definición de  $Z_0^0$  (ver ec.(52)) hay dependencia del campo vectorial  $B_k$  y de sus derivadas  $\dot{B}_k$ . De las condiciones anteriores se concluye que la magnitud de los tres campos es igual. Ahora se intentará hacer lo mismo con sus derivadas temporales. Derivando la ec.(53) :

$$\Sigma_i \frac{\partial}{\partial t} (B_i^a B_i^b) = 2|\vec{B}||\dot{\vec{B}}| \delta_b^a. \quad (60)$$

se obtiene el siguiente resultado:

$$\Sigma_i \left[ \left( B_i^a \frac{\partial B_i^b}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial B_i^a}{\partial t} B_i^b \right) \right] = 2|\vec{B}||\dot{\vec{B}}| \delta_b^a. \quad (61)$$

Si aplica el  $\delta_b^a$  a ambos lados de la igualdad se obtiene:

$$2\Sigma_i \left( B_i^a \frac{\partial B_i^a}{\partial t} \right) = 2|\vec{B}||\dot{\vec{B}}| \quad (62)$$

De la expresión anterior se obtiene el siguiente conjunto de igualdades:

$$\Sigma_i \left( B_i^1 \frac{\partial B_i^1}{\partial t} \right) = \Sigma_i \left( B_i^2 \frac{\partial B_i^2}{\partial t} \right) = \Sigma_i \left( B_i^3 \frac{\partial B_i^3}{\partial t} \right) = |\vec{B}||\dot{\vec{B}}| \quad (63)$$

lo cual muestra que la cantidad anterior  $\vec{B} \cdot \dot{\vec{B}}$  es un invariante para cualquier dirección que tomen los campos vectoriales. Se requiere el cálculo previo de

$\Sigma_a(\dot{B}_i)^a(\dot{B}_j)^a$ . De la condición mostrada en la ec.(59) se deriva a ambos lados de la igualdad:

$$\Sigma_a \left( \dot{B}_i^a B_j^a + \dot{B}_j^a B_i^a \right) = 2|\vec{B}||\dot{\vec{B}}|\delta_j^i, \quad (64)$$

se aplica nuevamente derivación a ambos lados:

$$\Sigma_a \left( \ddot{B}_i^a B_j^a + \ddot{B}_j^a B_i^a + 2\dot{B}_j^a \dot{B}_i^a \right) = 2|\dot{\vec{B}}|^2 \delta_j^i + 2|\vec{B}||\ddot{\vec{B}}|\delta_j^i, \quad (65)$$

y ya que existen segundas derivadas temporales de  $B_k$  a ambos lados de la ecuación es necesario encontrar una expresión para reemplazarla y dejar todo en términos de primeras derivadas del campo y del campo mismo. Despejando  $\ddot{B}_k$  de la ec. (42) se obtiene:

$$\ddot{B}_k = -3H\dot{B}_k - m^2 B_k, \quad (66)$$

que se reemplazará en la ecuación (65) así:

$$\Sigma_a \left[ \left( -3H\dot{B}_i^a - m^2 B_i^a \right) B_j^a + \left( -3H\dot{B}_j^a - m^2 B_j^a \right) B_i^a + 2\dot{B}_j^a \dot{B}_i^a \right] = 2|\dot{\vec{B}}|^2 \delta_j^i + 2|\vec{B}| \left( -3H\dot{B}_k - m^2 B_k \right) \delta_j^i, \quad (67)$$

teniendo en cuenta que  $B_k^2$  representa  $|\vec{B}|^2$  y reordenando términos se obtiene:

$$-3H\Sigma_a \left[ \dot{B}_i^a B_j^a + \dot{B}_j^a B_i^a \right] - 2m^2 \Sigma_a B_i^a B_j^a + 2\Sigma_a \dot{B}_i^a \dot{B}_j^a = \left[ 2\dot{B}_k^2 - 6HB_k \dot{B}_k - 2m^2 B_k^2 \right] \delta_j^i. \quad (68)$$

Utilizando las ecs. (59) y (64) para simplificar nuevamente la expresión anterior se obtiene:

$$-3H \left( 2B_k \dot{B}_k \delta_j^i \right) - 2m^2 B_k^2 + 2\Sigma_a \dot{B}_i^a \dot{B}_j^a = \left[ 2\dot{B}_k^2 - 6HB_k \dot{B}_k - 2m^2 B_k^2 \right] \delta_j^i, \quad (69)$$

de modo tal que al cancelar términos semejantes, la expresión se reduce a:

$$\Sigma_a \dot{B}_i^a \dot{B}_j^a = \dot{B}_k^2 \delta_j^i. \quad (70)$$

Con el resultado anterior es posible calcular la parte de  $Z_0^0$  que depende de  $\dot{B}$  para el caso de tres campos ortogonales entre sí:

$$\frac{1}{2}\Sigma_a \dot{B}_k^2 = \frac{1}{2}\Sigma_a \dot{B}_k \dot{B}_k = \frac{1}{2}\dot{B}_k^2 \delta_i^i = \frac{3}{2}\dot{B}_k^2. \quad (71)$$

La magnitud de  $(B_k^a)^2$  es igual para los tres campos, por ello la suma genera el término  $3B_k^2$  y aplicando el resultado anterior en la expresión de  $Z_0^0$  se obtiene:

$$Z_0^0 = \frac{3}{2} \left( \dot{B}_k^2 + m^2 B_k^2 \right) = \kappa. \quad (72)$$

En las expresión anterior no se muestra el carácter vectorial de  $B_k$ , solo se tiene en cuenta la magnitud del campo y de su derivada. Conociendo el valor de la componente netamente temporal de  $Z_\nu^\mu$  y de la comparación mostrada en (49) se deduce el valor de  $\kappa$ . Es importante observar que  $Z_0^0 = \kappa$  es una definición necesaria para que el tensor  $Z_\nu^\mu$  se aproxime a la forma funcional de  $T_\nu^\mu$  en su componente netamente temporal. El significado físico de  $\kappa$  se analizará en capítulos posteriores.

## 5.5. Definición de $Z_j^i$ para tres campos vectoriales

Utilizando nuevamente la definición de  $Z_\nu^\mu$  para calcular sus componentes espaciales, se obtiene la siguiente expresión <sup>11</sup>:

$$Z_j^i = \left[ -\frac{5}{6} \left( \dot{B}_k^2 - m^2 B_k^2 \right) - H \dot{B}_k B_k - \frac{1}{3} \left( \dot{H} + 3H^2 \right) B_k^2 \right] \delta_j^i + \dot{B}_i \dot{B}_j + H \left( \dot{B}_i B_j + B_i \dot{B}_j \right) + \left( \dot{H} + 3H^2 - m^2 \right) B_i B_j. \quad (73)$$

No se calcularon las componentes afuera de la diagonal pues el tensor  $Z_\nu^\mu$  es análogo a  $T_\nu^\mu$ , es decir, su forma funcional es idéntica, como se puede observar en las matrices (48) y (51).

Ahora se calculará  $Z_j^i$  debido a los tres campos vectoriales de igual magnitud y ortogonales entre si. De la ec.(73) reescribiremos  $Z_j^i$  realizando la suma  $\Sigma_a$  para los campos y para sus derivadas y al tiempo aplicando las condiciones de la ec. (59,63) generando la siguiente ecuación:

$$Z_j^i = \Sigma_a \left[ -\frac{5}{6} (\dot{B}_k^2)^a \delta_j^i + (\dot{B}_i)^a (\dot{B}_j)^a \right] + \left[ \Sigma_a \frac{5}{6} m^2 (B_k^2)^a - m^2 B_k^2 \right] \delta_j^i + \left[ \left( \dot{H} + 3H^2 \right) B_k^2 - \frac{1}{3} \Sigma_a \left( \dot{H} + 3H^2 \right) (B_k^2)^a - \Sigma_a H (B_k)^a (\dot{B}_k)^a + 2H B_k \dot{B}_k \right] \delta_j^i. \quad (74)$$

aplicando ahora la igualdad mostrada en la ec. (70) y desarrollando las sumatorias se obtiene:

$$Z_j^i = -\frac{15}{6} \dot{B}_k^2 \delta_j^i + \Sigma_a (\dot{B}_i)^a (\dot{B}_j)^a + \left[ \frac{15}{6} m^2 B_k^2 - m^2 B_k^2 \right] \delta_j^i + \left[ \left( \dot{H} + 3H^2 \right) B_k^2 - \frac{3}{3} \left( \dot{H} + 3H^2 \right) B_k^2 - 3H B_k \dot{B}_k + 2H B_k \dot{B}_k \right] \delta_j^i, \quad (75)$$

---

<sup>11</sup>Los detalles del cálculo de  $Z_j^i$  se muestran en el apéndice G

y simplificando la expresión anterior se obtiene:

$$Z_j^i = \left( -\frac{3}{2}\dot{B}_k^2 - HB_k\dot{B}_k + \frac{3}{2}m^2B_k^2 \right) \delta_j^i. \quad (76)$$

donde se demuestra que *la parte espacial del tensor  $Z_\nu^\mu$  no es diagonal para un solo campo vectorial, pero si para tres campos ortogonales entre sí*. Este hecho junto con el cálculo de  $Z_0^0$  permiten expresar este tensor mencionado de la forma mostrada en (51).

## 5.6. Ecuación de evolución para el parámetro $\kappa$

Si el Universo que podemos observar es homogéneo e isótropo, en esta región se cumple el principio cosmológico [3, 5], base experimental de la cosmología estandar. Para una región del universo que cumpla este principio, el cuadrado del parámetro de Hubble<sup>12</sup> se muestra en la ec.(12). Esta ecuación se conoce como ecuación de Friedmman y permite caracterizar la expansión del universo, explicando las observaciones realizadas por Edwin Hubble sobre las velocidades de recesión de las galaxias<sup>13</sup>.

Partiendo de la ecuación de Friedmman y aplicando algunas sustituciones algebraicas provenientes de las componentes espaciales del tensor de Ricci se obtiene la ecuación de continuidad para la densidad de energía  $\rho$ <sup>14</sup> mostrada en la ec.(15) la cual demuestra que la cantidad de contenido energético no cambia durante el proceso de expansión del Universo, partiendo desde su origen.

Para el caso de un campo escalar que sirve como motor inflacionario, las expresiones obtenidas para presión isótropa y densidad de energía permiten obtener la ecuación de evolución del campo escalar (ver ec. 28) a través de la ecuación de continuidad para la densidad de energía, mostrada en la ec.(15).

Aplicando la condición de ortogonalidad para los tres campos vectoriales, cuyas magnitudes son iguales entre sí, y además recordando que los campos son espacialmente homogéneos, es posible afirmar que la expansión generada debe ser isótropa y homogénea, ya que cada campo expande el espaciotiempo en su propia dirección, lo cual genera una simetría esférica en el proceso (ver fig.5) y

---

<sup>12</sup>La definición del parámetro de hubble en terminos del factor de escala es igual a  $\frac{\ddot{a}}{a}$

<sup>13</sup>Mas información sobre las observaciones de Hubble se puede encontrar en la referencia [14]

<sup>14</sup>Los detalles del cálculo de la ecuación de continuidad están descritos en el apéndice A

esto impide la aparición de direcciones preferenciales para la distribución espacial del contenido energético.

Con base en la condición de isotropía y homogeneidad, demostrada previamente a partir de argumentos físicos y lógicos, es posible generar una ecuación de continuidad para el parámetro análogo a la densidad de energía  $\kappa$ , haciendo un paralelo entre los términos que componen a  $T_\nu^\mu$  y  $Z_\nu^\mu$ , ya que ambos son diagonales:

- $\rho \rightarrow \kappa$
- $P \rightarrow Q$

Aplicando las comparaciones mostradas y partiendo de la ecuación de continuidad para  $\rho$  mencionada (15) se genera una nueva ley de conservación, descrita mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{\kappa} + 3H(\kappa + Q) = 0. \quad (77)$$

Podemos afirmar que  $\kappa$  es un parámetro análogo a la densidad de energía y que  $Q$  es un parámetro análogo a la presión isotrópica del fluido cósmico [12].  $\kappa$  no es la densidad de energía ya que no se conserva, para que  $\kappa$  se conserve, el tensor  $Z_\nu^\mu$  de cual proviene debe cumplir un principio de conservación análogo al que cumple el tensor de momentum-energía y que se muestra en la ec.(10).

## 5.7. Cálculo del parámetro Q

Considerando que el motor inflacionario propuesto se compone de tres campos vectoriales ortogonales entre si con igual magnitud, se concluye que la expansión generada por ellos debe ser isotrópica y homogénea, razón por la cual la presión ejercida por los campos debe ser isotrópica igualmente.

Recordando que tanto el tensor Momentum-Energía  $T_\nu^\mu$  como el tensor análogo  $Z_\nu^\mu$  son diagonales y que sus componentes están descritas matricialmente en las ecs.(48) y (51) se concluye que la parte espacial  $Z_j^i$  debe ser proporcional a  $\delta_j^i$  lo cual se demostró en la ec.(76).

Así pues con las condiciones impuestas a los campos vectoriales es posible continuar con el cálculo de  $Z_j^i$  partiendo de la definición de la ecuación (77) análoga a la ecuación de continuidad para la densidad de energía mostrada en la ec.(15).

Esta ecuación determina la evolución temporal del parámetro  $\kappa$  calculado para el modelo inflacionario.

Partiendo de la ec.(77) y reemplazando la definición de  $\kappa$  obtenida para tres campos vectoriales ortogonales entre sí y mostrada en (72) se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{3}{2} \left( \dot{B}_k^2 + m^2 B_k^2 \right) \right] + 3H \left[ \frac{3}{2} \left( \dot{B}_k^2 + m^2 B_k^2 \right) + Q \right] = 0, \quad (78)$$

continuando con el cálculo y desarrollando las respectivas derivaciones, la anterior expresión cambia a:

$$3\dot{B}_k\ddot{B}_k + 3B_k\dot{B}_k m^2 + \frac{9}{2}H\dot{B}_k^2 + \frac{9}{2}HB_k^2 m^2 = -3HQ, \quad (79)$$

en este punto es necesario obtener una expresión para  $\ddot{B}_k$ . Se utiliza para ello la ec.(42) que representa la evolución de cada uno de los campos vectoriales involucrados en el proceso inflacionario:

$$\ddot{B}_k = -3H\dot{B}_k - m^2 B_k, \quad (80)$$

la anterior expresión se reemplaza en la ec.(79) y el resultado representará el término  $Q$  análogo a la presión isotropa ejercida por el motor inflacionario propuesto:

$$Q = \frac{3}{2} \left( \dot{B}_k^2 - m^2 B_k \right). \quad (81)$$

Aplicando las definiciones de  $Q$  y  $\kappa$  (ver ecs. 72 y 81) en la ecuación de continuidad propuesta en (77) se obtiene de nuevo la ecuación de evolución temporal para los campos vectoriales que se proponen como motor de inflación, lo cual demuestra que estos parámetros son análogos a la densidad de energía y la presión isotropa respectivamente para el modelo propuesto inflacionario propuesto. Esto no quiere decir que físicamente representen las mismas cantidades, solo que su forma funcional y papel en las ecuaciones de caracterización del modelo inflacionario es equivalente.

## 5.8. Cálculo del parámetro de Hubble durante el periodo inflacionario propuesto

Para un espaciotiempo modelado por la métrica F.L.R.W. en un Universo plano, es válida la siguiente expresión para el cálculo del parámetro de Hubble en

el periodo inflacionario [13]:

$$H^2 = \frac{\rho}{3m_p^2}. \quad (82)$$

Esta expresión es solo una simplificación de la ec.(12) para el caso de un espacio plano  $K = 0$ , además haciendo que el aporte al parámetro debido a la constante cosmológica  $\Lambda$  sea muy pequeño para la época inflacionaria. Estas suposiciones se basan en dos hechos remarcables:

- El espaciotiempo en épocas primordiales (inflación, nucleosíntesis, generación de la RCF) lucía muy plano, lo cual se deduce de la ecuación (35) para épocas dominadas por radiación y/o materia [4, 5].
- La contribución a la expansión del universo<sup>15</sup> debida a  $\Lambda$  es apreciable para la época actual, mientras que para la época de inflación y hasta el desacople del baño de fotones era principalmente debida a la radiación o contenido energético con velocidades relativistas [5].

Para el caso de inflación vectorial se redefine el parámetro de Hubble en términos de  $\kappa$  y se obtiene la siguiente expresión (manteniendo la forma funcional de H):

$$H^2 = \frac{\kappa}{3m_p^2}. \quad (83)$$

Aplicando la expresión calculada para  $\kappa$  en un apartado anterior se reescribe el parámetro así:

$$H^2 = \frac{3\dot{B}_k^2 + m^2 B_k^2}{2 \cdot 3m_p^2}. \quad (84)$$

Simplificando la expresión se obtiene:

$$H^2 = \frac{1}{2m_p^2} \left( \dot{B}_k^2 + m^2 B_k^2 \right). \quad (85)$$

La masa de planck puede ser expresada por su equivalente en términos de la constante de gravitación de Newton así:

$$m_p^2 = \frac{1}{8\pi G}. \quad (86)$$

Reemplazando el equivalente de la masa de planck en la expresión encontrada para  $H$ :

$$H^2 = 4\pi \left( \dot{B}_k^2 + m^2 B_k^2 \right), \quad (87)$$

---

<sup>15</sup>Contribución medida a través de la evolución del parametro de escala  $a(t)$

La expresión (87) muestra el parámetro de Hubble encontrado para el período inflacionario generado por campos vectoriales en unidades naturales.

## 5.9. Inflación del tipo Slow-Roll con 3 campos vectoriales

De la sección de inflación mediante campos escalares, expuesta en el marco teórico, el parámetro  $\epsilon \ll 1$  (ver ref. [5]) es una de las condiciones para que el campo escalar genere un régimen slow roll durante el cual la magnitud del campo es casi invariante.

En esta sección se determinarán las condiciones que debe cumplir el conjunto de campos vectoriales generadores de inflación para que se cumplan condiciones de Slow-Roll.

Citando nuevamente la definición de epsilon  $\epsilon$  como parámetro que define si durante inflación existe o no período en el que los campos vectoriales fundamentales varíen muy lentamente (Slow-Roll), es decir, rodando lentamente por la pendiente que describa el potencial generador de los mismos, se procederá a calcular el valor que toma  $\epsilon$  con las condiciones impuestas por el modelo inflacionario vectorial propuesto:

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (88)$$

La expresión anterior se puede reescribir reemplazando la expresión encontrada del parámetro de Hubble en el período inflacionario (ver eq. 87) mediante campos vectoriales:

$$\epsilon = -\frac{\frac{\partial}{\partial t} \left[ 4\pi \left( \dot{B}_k^2 + m^2 B_k^2 \right) \right]}{4\pi \left( \dot{B}_k^2 + m^2 B_k^2 \right)}, \quad (89)$$

lo cual, después de simplificar conduce a:

$$\epsilon = -\frac{4\pi \dot{B}_k \left( \ddot{B}_k + m^2 B_k \right)}{\left( 4\pi \left( \dot{B}_k^2 + m^2 B_k^2 \right) \right)^{3/2}}. \quad (90)$$

De las condiciones de Slow-Roll encontradas en la sección de inflación escalar especificadas en las ecs.(29) y (30) es posible hacer una generalización de las mismas para el caso vectorial (ver ref. [8]) y se muestran en la siguiente tabla.

Inflación Escalar	Inflación Vectorial
$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$	$\dot{B}_k^2 \ll m^2 B_k^2$
$\dot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$	$\dot{B}_k \ll 3H\dot{B}_k$

Cuadro 1: Condiciones de Slow-Roll

Aplicando las condiciones de Slow-Roll vectorial mostradas en la tabla anterior para la expresión de  $\epsilon$  se obtiene:

$$\epsilon = -\frac{4\pi\dot{B}_k m^2 B_k}{(4\pi m^2 B_k^2)^{3/2}}. \quad (91)$$

De la ecuación de evolución para  $B_k$  descrita en la ec.(42) es posible aplicar las condiciones de Slow-Roll vectorial de la tabla nuevamente para obtener la siguiente expresión:

$$\dot{B}_k = -\left(\frac{m^2 B_k}{3H}\right), \quad (92)$$

la cual se aplica en la ec.(90) para obtener:

$$\epsilon = -\frac{4\pi m^2 B_k m^2 B_k}{3H (4\pi m^2 B_k^2)^{3/2}}. \quad (93)$$

Aplicando la condición  $\epsilon \ll 1$  a la expresión anterior se obtiene el siguiente resultado:

$$B_k^2 \gg \frac{1}{12\pi}, \quad (94)$$

y reescribiendo este resultado en términos de la masa de planck reducida  $m_p$  :

$$B_k \gg \sqrt{\frac{2}{3}} m_p, \quad (95)$$

La expresión anterior es la condición que deben cumplir la magnitud de los tres campos vectoriales simultaneamente para que la inflación sea del tipo Slow-Roll. La razón para que sea tan deseable que el modelo inflacionario sea de este tipo es lograr consistencia con los resultados observacionales, específicamente los relacionados con el origen de las estructuras a gran escalas que se caracterizan mediante el índice espectral  $n_k$ <sup>16</sup>.

<sup>16</sup>Para mas información relacionada con el índice espectral remitirse a [20]

Inflación sólo permite explicar el origen de las estructuras a gran escala con base en la preexistencia de anisotropías en la distribución del contenido energético. Para mas detalles respecto al mecanismo de formación y evolución de las mencionadas estructuras ver refs.[3, 4, 5, 15, 17].

## 5.10. Número de e-folds obtenidos con inflación vectorial

El número de e-folds llamado tambien monto de inflación<sup>17</sup> es una medida que determina qué tanto se ha expandido el espaciotiempo debido al mecanismo de inflación estudiado. En esta sección se realizará el cálculo de la cantidad de e-folds que se logran obtener mediante inflación vectorial a través de tres campos ortogonales entre sí.

Partiendo de la definición del parámetro de Hubble en términos del factor de escala  $a(t)$ :

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (96)$$

es posible reescribirla así:

$$\int_{t_i}^{t_f} H dt = Ln \left( \frac{a_f}{a_i} \right). \quad (97)$$

Es posible escribir  $dt$  en términos de la derivada de la magnitud del campo vectorial  $B_k$ :

$$dt = \frac{dB}{\dot{B}}. \quad (98)$$

La expresión anterior relaciona un diferencial  $dt$  con diferenciales de la magnitud del campo vectorial  $\vec{B}$ . De este modo se cumple la igualdad  $B = \sqrt{B_k^2}$ . Se calcula la derivada de la magnitud del campo vectorial así:

$$\dot{B} = \frac{d}{dt} \left( \sqrt{B_k^2} \right) = \frac{B_k \dot{B}_k}{2\sqrt{B_k^2}}. \quad (99)$$

Reemplazando  $\dot{B}_k$  por la expresión encontrada en la ec.(92) que muestra una derivación respecto al tiempo pero solo de la componente k-esima de cualquiera de los tres campos vectoriales  $\vec{B}$  se obtiene la siguiente expresión:

$$\dot{B} = -\frac{\sqrt{B_k^2} m^2}{3H}. \quad (100)$$

---

<sup>17</sup>Mas información en la sección Monto de Inflación, expuesta en el marco teórico

De este modo la ec.(97) se reescribe asi:

$$\int_{B_i}^{B_f} 3H^2 \frac{dB}{\sqrt{B_k^2 m^2}} = Ln \left( \frac{a_f}{a_i} \right). \quad (101)$$

Aplicando la expresi3n obtenida del par3metro de Hubble en la ec.(87) se obtiene:

$$N = \int_{B_f}^{B_i} 3 \left( 4\pi \left( \dot{B}_k^2 + m^2 B_k^2 \right) \right) \frac{dB}{\sqrt{B_k^2 m^2}}. \quad (102)$$

Empleando las condiciones de Slow-Roll mostradas en el cuadro (1) se aplica  $\dot{B}_k^2 \ll m^2 B_k^2$  a la anterior expresi3n para obtener:

$$N = \int_{B_f}^{B_i} 3 \left( 4\pi m^2 B_k^2 \right) \frac{dB}{\sqrt{B_k^2 m^2}}. \quad (103)$$

Simplificando la expresi3n anterior se obtiene:

$$N = 12\pi \int_{B_f}^{B_i} \sqrt{B_k^2} dB = 12\pi \int_{B_f}^{B_i} B dB, \quad (104)$$

se observa que la integral para la expresi3n anterior es trivial y se muestra el resultado a continuaci3n:

$$N = 6\pi \left( B_i^2 - B_f^2 \right). \quad (105)$$

El resultado mostrado en la ec(105) se puede reducir si se aplica la condici3n de la ec.(95) la cual debe cumplir la magnitud de  $B_k$  para permanecer en el r3gimen de Slow-Roll. Se deduce que para que exista el regimen inflacionario propuesto las magnitudes del campo vectorial deben cumplir la siguiente condici3n:

$$B_f \ll B_i. \quad (106)$$

De este modo el monto de inflaci3n cambia al valor descrito a continuaci3n:

$$N = 6\pi B_i^2. \quad (107)$$

Determinando N es posible cuantificar la expansi3n generada por los tres campos vectoriales ortogonales entre s3.

## 5.11. Soluci3n a problemas de la cosmolog3a estandar

Conociendo el monto de inflaci3n en t3rminos de la magnitud inicial de uno de los tres campos vectoriales es posible encontrar un valor espec3fico para

dicha magnitud aplicando la condición  $N \geq 62$  e-folds tal que se solucionen los problemas de horizonte y planitud [5, 17]. A continuación se muestran los cálculos para obtener el valor del campo:

$$N = 6\pi B_i^2 \geq 62, \quad (108)$$

lo cual, cambiando de unidades naturales a convencionales ( $G \neq 1$ ) conduce a:

$$B_i \geq \sqrt{\frac{62}{6\pi G}}, \quad (109)$$

y reescribiendo la expresión anterior en términos de la masa de planck:

$$B_i \geq \sqrt{\frac{248}{3}} m_p \approx 9,1 m_p. \quad (110)$$

El valor encontrado en la expresión anterior es la magnitud mínima que cada uno de los tres campos vectoriales que debe cumplir para que el mecanismo de expansión acelerada solucione los problemas de la cosmología estandar.

Es importante notar que la condición encontrada en esta sección mantiene el modelo de inflación vectorial propuesto en el régimen de Slow-Roll tal como puede confirmarse al aplicar la ec.(95).

## 5.12. Potencial generador de inflación vectorial

La inflación del tipo Slow-Roll impone condiciones a la forma de evolución de los campos vectoriales. Partiendo de la ecuación de evolución para un campo escalar, mostrada en (28) se puede obtener la forma del potencial generador integrando respecto al campo el término  $V'(\phi)$ .

Para el caso vectorial, el término que depende del campo (no de sus derivadas) según la expresión (42) es igual a  $m^2 B_k$ . Integrando este término respecto al campo vectorial  $B_k$  se obtiene la forma del potencial generador de los campos vectoriales fundamentales. Se muestran a continuación el cálculo del potencial:

$$V(B_k) = \int m^2 B_k dB_k = \frac{1}{2} m^2 B_k^2. \quad (111)$$

La figura (6) muestra el potencial generador del campo vectorial. Observando la forma como evoluciona el potencial para distintos valores del campo es necesario que la magnitud de  $\vec{B}$  al inicio de inflación sea mayor que la final para que el

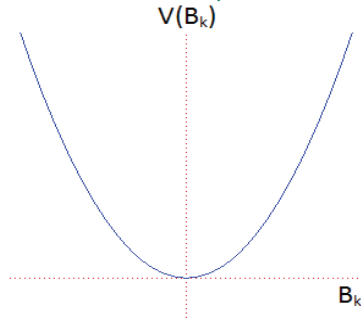


Figura 6: Potencial generador del campo vectorial  $\vec{B}$

campo *rueda o se desliza lentamente* por la pendiente del potencial  $V(B_k)$ . El requisito de rodamiento lento lo impone la condición  $\epsilon \ll 1$  que es propia del régimen de Slow-Roll [5, 17].

Cuando el campo ha rodado suficientemente abajo de la curva y su velocidad de cambio ha aumentado considerablemente ( $\dot{B}_k^2 \approx m_2 B_k$ ) el período inflacionario termina y el campo entra en un régimen oscilatorio, en el que su magnitud aumenta y disminuye acercándose cada vez más a  $\vec{B} = 0$ .

Una observación respecto a la última afirmación: si los tres campos vectoriales fundamentales decaen a otras partículas tiempo después de haber terminado el período inflacionario, lo cual se traduce en hacer el potencial generador del campo  $\vec{B} \approx 0$ , es posible que el acoplamiento no mínimo a la gravedad desaparezca y a partir de ese instante la gravedad sea de Einstein, en la que el contenido energético es la única causa de la curvatura espaciotemporal [10, 16].

## 6. Conclusiones

1. La ley de Hubble, los experimentos de Penzias y Wilson que han evolucionado a los proyectos COBE, WMAP y PLANCK (cada uno con su respectivo satélite en órbita) son la base experimental para defender la validez del principio cosmológico y para creer que el universo observable se originó a partir de una región espacial de tamaño mucho menor, lo cual indica que la edad del universo debe ser finita. Todo estos hechos los aborda y explica la teoría del Big-Bang cuyo pilar observacional es el principio cosmológico.

2. El mecanismo de inflación es un proceso físico que permite explicar la evolución del contenido energético de la región correspondiente al universo observable para nosotros hoy en día. Aun cuando su duración puede ser ínfima con una cota mínima de  $10^{-35}$  s su efecto es dramático ya que aumenta la distancia coordinada entre dos puntos inicialmente separados  $d_0$  por un factor mínimo de  $8,438 \times 10^{26} d_0$  (ver referencias [4, 5]).
3. Es muy importante tener presente que el proceso inflacionario solo es aplicable a grandes escalas, significando que a escalas del sistema solar y del planeta tierra, esta expansión es imperceptible. Si el universo se estuviese expandiendo en todas las escalas espaciales, no habría forma de detectar dicha expansión pues alteraría incluso los sistemas de medición que se diseñaran para detectarla.
4. En la comunidad científica se han hecho muchos estudios y propuestas sobre modelos de inflación para expandir el espaciotiempo y generar estructuras a gran escala. El mecanismo más estudiado es utilizar un campo escalar fundamental que expanda el espaciotiempo de forma omnidireccional, conservando la dos características más deseables para un motor inflacionario: homogeneidad e isotropía.
5. Una limitante importante para defender propuestas inflacionarias basadas en el uso de campos escalares fundamentales es la no observación de ese tipo de campos en la naturaleza. Una alternativa a la propuesta escalar es arrancar el motor inflacionario con campos vectoriales fundamentales. Estos campos son comunes en el universo, como ejemplo está el campo vectorial asociado al fotón o a los bosones  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z_0$ .
6. El motor inflacionario vectorial genera una dificultad natural: la anisotropía inherente a la dirección en la que evoluciona el campo vectorial fundamental, impidiendo que se cumpla el principio cosmológico. Esta dificultad, como se mostró en el actual trabajo de grado, puede eliminarse si se toman tres campos vectoriales de igual magnitud y ortogonales entre sí, de modo que el proceso de expansión espaciotemporal ocurra de la misma forma en todas las direcciones, haciendo el mismo papel que un campo escalar fundamental.
7. Aplicando el principio de acción estacionaria a la acción propuesta con el término de acoplamiento no mínimo a la gravedad se obtiene una ecuación de evolución temporal para los campos vectoriales, cuya forma funcional es idéntica a la obtenida por el mismo procedimiento para un campo escalar. Este hecho indica que es posible generar expansión acelerada de manera isotrópica y homogénea, encendiendo cualquiera de los motores inflacionarios, tanto el escalar como el vectorial.

8. Es necesario que inflación vectorial solucione los problemas de la cosmología estandar para considerar el modelo como una opción viable, específicamente hablando el problema de horizonte y de planitud. Una forma para determinar si el modelo inflacionario soluciona estos problemas es a través de la medida de e-folds que se conoce como monto de inflación. La cota mínima para solucionar estos problemas es 62 e-folds de inflación y esto se asegura para el modelo inflacionario propuesto si cada campo vectorial tiene una magnitud inicial bien definida de aproximadamente 9 veces la masa de planck.
9. Entre los modelos inflacionarios, los que mas aceptación han tenido entre la comunidad científica son los de tipo Slow-Roll en donde el campo rueda lentamente a lo largo de la pendiente impuesta por el potencial que lo genera. Son los modelos más aceptados porque este tipo de mecanismos permiten obtener al final del período inflacionario las condiciones necesarias para que siga evolucionando el universo observable hacia las estructuras a gran escala que observamos hoy en día. El modelo de inflación propuesto logra cumplir las condiciones de Slow-Roll, lo cual se comprueba a través del parámetro  $\epsilon$  que cumple la condición  $\epsilon \ll 1$ .
10. El hecho de aplicar tres campos vectoriales ortogonales entre sí hace que el tensor  $Z_{\nu}^{\mu}$ , proveniente de aplicar el principio de acción estacionaria en la acción propuesta, se pueda reescribir de forma diagonal. Es así como las cantidades  $\kappa$  y  $Q$  hacen el papel de la densidad de energía y a la presión isotropa para el modelo inflacionario propuesto, las cuales mantienen similitudes funcionales con las mismas cantidades obtenidas mediante el modelo inflacionario escalar.

# Apéndices

## A. Obtención de la ecuación de continuidad para la densidad de energía $\rho$

Partiendo de la ecuación de Friedmann mostrada en (12), se deriva a ambos lados respecto al tiempo y se obtiene:

$$2H\dot{H} = \frac{\dot{\rho}}{3m_p^2} + \frac{2K\dot{a}}{a^3}. \quad (112)$$

Derivando el parámetro de Hubble respecto al tiempo :

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2, \quad (113)$$

y reemplazando en la primera ecuación se obtiene:

$$2H \left( \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \right) = \frac{\dot{\rho}}{3m_p^2} + \frac{2KH}{a^2}, \quad (114)$$

lo cual, simplificando conduce a:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \frac{\dot{\rho}}{6m_p^2} + \frac{K}{a^2}. \quad (115)$$

En dos dimensiones es posible definir la curvatura de una superficie con un valor escalar en cada punto. Al subir el número de dimensiones la curvatura no se puede caracterizar por un valor, por lo tanto es necesaria una cantidad tensorial. Para representar la curvatura del espacio tridimensional se utiliza el tensor de Ricci y para el caso tetradimensional existe el tensor de Riemman.

Partiendo de la definición del tensor de Ricci [21] :

$$R_{\sigma\nu} = R^\rho{}_{\sigma\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\rho\sigma}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\lambda, \quad (116)$$

y de los símbolos de Cristoffel para la métrica F.L.R.W en un espaciotiempo plano (K=0) [5]:

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_j^i, \quad (117)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \quad (118)$$

el cálculo del escalar de Ricci  $R_{\mu\nu}$  se simplifica ya que la métrica F.L.R.W. es diagonal, por lo que el Ricci será diagonal también. Las componentes del tensor mencionado serán entonces:

$$R_{00} = 3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (119)$$

$$R_{11} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2), \quad (120)$$

$$R_{22} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2), \quad (121)$$

$$R_{33} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2). \quad (122)$$

Calculando la traza del tensor momentum-energía para un espaciotiempo plano (ver 6):

$$T = T_{\mu}^{\mu} = (\rho + P)U^{\mu}U_{\mu} - Pg_{\mu}^{\mu} = \rho - 3P. \quad (123)$$

Reescribiendo las ecuaciones de campo de Einstein (ver 5) en términos de la traza del tensor M-E se obtiene:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (124)$$

Se calcula  $R_0^0$  a partir de la expresión anterior:

$$R_0^0 = 3\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G \frac{1}{2}(\rho + 3P) + \Lambda. \quad (125)$$

Reemplazando el término  $\frac{\ddot{a}}{a}$  que se obtiene de la ecuación anterior, y aplicando ésta en la ec.(115) resulta:

$$-8\pi G \frac{1}{2}(\rho + 3P) + \Lambda = 3H^2 + \frac{\dot{\rho}}{2m_p^2} + \frac{3K}{a^2}. \quad (126)$$

El término  $H^2$  se reemplaza a partir de la ecuación de Friedmann en la expresión anterior para obtener:

$$-8\pi G \frac{1}{2}(\rho + 3P) + \Lambda = 3 \left( \frac{\dot{\rho}}{3m_p^2} - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \right). \quad (127)$$

Reduciendo términos semejantes la igualdad anterior se convierte en:

$$\frac{\dot{\rho}}{6m_p^2 H} = -\frac{\rho + P}{2m_p^2}. \quad (128)$$

La anterior expresión se puede reescribir y generar la ecuación de continuidad para la densidad de energía mostrada en la ecuación (15).

## B. Cálculo de las ecuaciones de movimiento

Partiendo de la acción (35) se aplica el principio de acción estacionaria con extremos fijos  $\delta S = 0$  respecto al campo vectorial  $A_\mu$  para calcular las ecuaciones de movimiento del campo propuesto como generador de inflación.

Se aplica el cálculo variacional respecto a  $A_\mu$  en la acción con términos de acoplamiento no mínimo:

$$\begin{aligned} \delta S = \int dx^4 \frac{\partial}{\partial A_\mu} \left[ \frac{\sqrt{-g}R}{16\pi} - \frac{1}{4}F_{\alpha\sigma}F^{\alpha\sigma}\sqrt{-g} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^\alpha A_\alpha \sqrt{-g} \right] \delta A_\mu + \\ \int dx^4 \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \left[ \frac{\sqrt{-g}R}{16\pi} - \frac{1}{4}F_{\alpha\sigma}F^{\alpha\sigma}\sqrt{-g} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^\alpha A_\alpha \sqrt{-g} \right] \delta(\partial_\nu A_\mu) = 0 \end{aligned} \quad (129)$$

De aquí se separan las operaciones en dos partes: la primera va a ser aplicar el principio variacional para los términos que dependen directamente de  $A_\mu$  y luego aplicar el principio variacional para los términos que dependen de las derivadas de  $A_\mu$ . Sabiendo que  $\delta A_\mu$  y  $\delta(\partial_\nu A_\mu)$  son variaciones arbitrarias del valor campo y de su derivada, es requerido que los integrandos de (F) se igualen a cero para cumplir  $\delta S = 0$ . Se muestra a continuación la igualación a cero del primer integrando de (F) que depende únicamente de las derivadas de  $A_\mu$ :

$$-\frac{\partial}{\partial A_\mu} \left[ \frac{\sqrt{-g}R}{16\pi} \right] - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial A_\mu} [F_{\alpha\sigma}F^{\alpha\sigma}\sqrt{-g}] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A_\mu} \left[ \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^\alpha A_\alpha \sqrt{-g} \right] = 0. \quad (130)$$

De la expresión anterior es fácil ver que  $R\sqrt{-g}$  es un término geométrico que no depende de  $A_\mu$ , así como  $(m^2 + \frac{R}{6})$  tampoco es función del campo. Por otra parte  $F_{\alpha\sigma}$  depende de las derivadas de  $A_\mu$  explícitamente<sup>18</sup>. Al aplicar la derivada parcial estos términos se eliminan quedando sólo derivadas directas del campo como se muestra a continuación:

$$\frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial A_\mu} [A^\alpha A_\alpha] = 0. \quad (131)$$

Se aplica la derivada parcial sobre el invariante  $A^\alpha A_\alpha$ :

$$\frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) \sqrt{-g} \left[ \frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\mu} A^\alpha + \frac{\partial A^\alpha}{\partial A_\mu} A_\alpha \right] = 0. \quad (132)$$

---

<sup>18</sup>Hay que recordar que  $F_{\gamma\mu} = \partial_\gamma A_\mu - \partial_\mu A_\gamma$ , así que sólo intervendrá en el cálculo variacional de las derivadas del campo vectorial.

Aplicando la relación  $\frac{\partial A_\nu}{\partial A_\mu} = \delta_\nu^\mu$  en la expresión anterior y recordando que  $A^\alpha = g^{\alpha\sigma} A_\sigma$  quedará:

$$\frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) \sqrt{-g} \left[ \delta_\alpha^\mu A^\alpha + A_\alpha \frac{\partial}{\partial A_\mu} (g^{\alpha\sigma} A_\sigma) \right] = 0. \quad (133)$$

Se utilizan de nuevo las propiedades de  $\delta_\mu^\nu$  y la expresión se modificará de nuevo:

$$\frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) \sqrt{-g} [A_\mu + A^\sigma \delta_\sigma^\mu] = \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) \sqrt{-g} A_\mu = 0. \quad (134)$$

Ésta expresión será la generada por variaciones del campo vectorial  $A_\mu$ . Ahora se igualará a cero el segundo integrando de la expresión (F) el cual representa las variaciones de las derivadas del campo ya que en este caso  $\delta(\partial_\nu A_\mu)$  es de nuevo un valor arbitrario.

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \left[ \frac{\sqrt{-g}R}{16\pi} - \frac{1}{4} F_{\alpha\sigma} F^{\alpha\sigma} \sqrt{-g} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^\alpha A_\alpha \sqrt{-g} \right] = 0. \quad (135)$$

En este caso los términos  $\sqrt{-g}R$  y  $(m^2 - \frac{R}{6})$  no dependen de las derivadas del campo vectorial así que no van a intervenir en este cálculo.

$$-\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} [F_{\alpha\sigma} F^{\alpha\sigma} \sqrt{-g}] = 0. \quad (136)$$

Se expresan los tensores  $F_\nu^\mu$  de manera covariante utilizando propiedades de la métrica:

$$-\frac{1}{4} \sqrt{-g} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} [F_{\alpha\sigma} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\gamma} F_{\beta\gamma}] = 0. \quad (137)$$

Se distribuye la derivación parcial entre los dos términos dependientes de las derivadas del campo:

$$-\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\gamma} \sqrt{-g} \left[ \frac{\partial(F_{\beta\gamma})}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} F_{\alpha\sigma} + \frac{\partial(F_{\alpha\sigma})}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} F_{\beta\gamma} \right] = 0. \quad (138)$$

Reemplazando  $F_{\beta\gamma} = \partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta$  y  $F_{\alpha\sigma} = \partial_\alpha A_\sigma - \partial_\sigma A_\alpha$  en la expresión anterior se obtiene:

$$-\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\gamma} \sqrt{-g} \left\{ \left[ \frac{\partial(\partial_\beta A_\gamma)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial(\partial_\gamma A_\beta)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right] F_{\alpha\sigma} + \left[ \frac{\partial(\partial_\alpha A_\sigma)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial(\partial_\sigma A_\alpha)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right] F_{\beta\gamma} \right\} = 0, \quad (139)$$

en este caso se aplica la definición  $\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\gamma A_\epsilon)} = \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\epsilon$  lo cual permite simplificar las derivadas parciales de la expresión anterior a productos de delta de kronecker:

$$-\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} g^{\sigma\gamma} \sqrt{-g} \left\{ [\delta_\beta^\nu \delta_\gamma^\mu - \delta_\gamma^\nu \delta_\beta^\mu] F_{\alpha\sigma} + [\delta_\alpha^\nu \delta_\sigma^\mu - \delta_\sigma^\nu \delta_\alpha^\mu] F_{\beta\gamma} \right\} = 0, \quad (140)$$

a continuación se realizan productos entre las métricas y los factores delta kro-  
necker:

$$-\frac{1}{4}\sqrt{-g} \{ [g_\nu^\alpha g_\mu^\sigma - g_\nu^\sigma g_\mu^\alpha] F_{\alpha\sigma} + [g_\nu^\beta g_\mu^\gamma - g_\nu^\gamma g_\mu^\beta] F_{\beta\gamma} \} = 0, \quad (141)$$

pero por definición una métrica mixta equivale a un delta dirac  $g_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{-g} \{ [\delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\sigma - \delta_\nu^\sigma \delta_\mu^\alpha] F_{\alpha\sigma} + [\delta_\nu^\beta \delta_\mu^\gamma - \delta_\nu^\gamma \delta_\mu^\beta] F_{\beta\gamma} \} = 0, \quad (142)$$

Ahora se aplican los productos  $\delta_\nu^\mu$  a los tensores  $F_{\alpha\beta}$  :

$$-\frac{1}{4}\sqrt{-g} \{ [F_{\nu\mu} - F_{\alpha\beta}] + [F_{\nu\mu} - F_{\alpha\beta}] \} = 0, \quad (143)$$

recordando que  $F_{\alpha\beta}$  es un tensor antisimétrico, es posible aplicar esta propiedad  
y obtener la siguiente expresión:

$$-\frac{1}{4}\sqrt{-g} [2F_{\nu\mu} + 2F_{\nu\mu}] = -\sqrt{-g}F_{\nu\mu}. \quad (144)$$

Utilizando las expresiones obtenidas en (134) y (144) es posible redefinir el cálculo  
de la acción estacionaria  $\delta S = 0$ .

$$\delta S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\mu \delta A_\mu - F_{\nu\mu} \delta(\partial_\nu A_\mu) \right] = 0. \quad (145)$$

El término  $\delta(\partial_\nu A_\mu)$  puede reescribirse como  $\partial_\nu(\delta A_\mu)$  pues la variación se aplica sólo  
respecto al campo vectorial  $A_\mu$ , mientras que  $\partial_\nu$  es aplicable sólo a las coordenadas  
 $x_\nu$  del campo. Por otra parte es importante recordar que:

$$\partial_\nu [\sqrt{-g}F_{\nu\mu}\delta A_\mu] = \delta A_\mu \partial_\nu [\sqrt{-g}F_{\nu\mu}] + \partial_\nu (\delta A_\mu) \sqrt{-g}F_{\nu\mu}. \quad (146)$$

Utilizando este resultado en la expresión (145) se obtienen dos términos, uno de  
los cuales es una derivada total:

$$\delta S = \int dx^4 \left[ \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\mu \sqrt{-g} \delta A_\mu + \delta A_\mu \partial_\nu (\sqrt{-g}F_{\nu\mu}) \right] - \int dx^4 \partial_\nu (\sqrt{-g}F_{\nu\mu} \delta A_\mu) = 0 \quad (147)$$

En la ec.(147) se muestra la variación de la acción en dos términos y uno de ellos  
es una derivada total. Teniendo en cuenta que la integral se realiza respecto a la  
región R, es posible aplicar el teorema de la divergencia así:

$$\int_R dx^4 [\partial_\nu (\sqrt{-g}F_{\nu\mu} \delta A_\mu)] = \int_{\partial R} d\sigma_r (\sqrt{-g}F_{\nu\mu} \delta A_\mu). \quad (148)$$

La segunda integral mostrada en (148) se evalúa en la superficie  $\partial R$  que rodea la región  $R$ . Teniendo en cuenta que para todo el cálculo realizado se está aplicando el principio de acción estacionaria con extremos fijos, la variación del campo  $A_\mu$  y de  $x_\nu$  para este límite se anula y así mismo la integral de superficie.

El cálculo de  $\delta S$  se simplifica aplicando los resultados anteriores y así se obtiene la siguiente expresión:

$$\delta S = \int dx^4 \left[ \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\mu \sqrt{-g} + \partial_\nu (\sqrt{-g} F_{\nu\mu}) \right] \delta A_\mu = 0. \quad (149)$$

Recordando que  $\delta A_\mu$  es un valor arbitrario, el integrando de (149) es igual a cero y así se obtienen las ecuaciones de movimiento que rigen la evolución del campo vectorial. A continuación se muestran tales ecuaciones:

$$\left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} F_{\nu\mu}) = 0. \quad (150)$$

## C. Obtención de relaciones a partir de ecuaciones de movimiento de $A_k$

El determinante para la métrica plana con expansión isótropa (ver F) se calcula a continuación:

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\left(-\frac{1}{a^6}\right)} = a^3. \quad (151)$$

Partimos de la ecuación (150) escrita de forma contravariante:

$$\left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g} F^{\nu\mu}) = 0. \quad (152)$$

y reemplazamos el determinante  $g$  por el valor encontrado en la ec. (151):

$$\left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^\mu + \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (a^3 F^{\nu\mu}) = 0. \quad (153)$$

reescribiendo  $A^\mu$  y  $F^{\nu\mu}$  de forma covariante se obtiene:

$$\left( m^2 - \frac{R}{6} \right) g^{\mu\sigma} A_\sigma + \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (a^3 g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} F_{\alpha\beta}) = 0. \quad (154)$$

### C.1. Cálculo para $\mu = 0$

Haciendo el subíndice  $\mu = 0$  en la expresión (154):

$$\left(m^2 - \frac{R}{6}\right) g^{0\sigma} A_\sigma + \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (a^3 g^{\nu\alpha} g^{0\beta} F_{\alpha\beta}) = 0. \quad (155)$$

Recordando que  $g^{\alpha\beta}$  es diagonal y está definida en la expresión (F) se pueden definir las siguientes condiciones útiles:

$$g^{00} = 1, \quad (156)$$

$$g^{ij} = -\frac{1}{a^2} \delta^{ij}, \quad (157)$$

$$g^{0\beta} = g^{00} + g^{0i} = 1, \quad (158)$$

$$g^{\alpha\beta} = g^{00} + g^{ij} = 1 - \frac{1}{a^2} \delta^{ij}, \quad (159)$$

donde se ha usado la notación de subíndices con letra griega que corren de 0 a 3 y con letra latina los subíndices espaciales que corren de 1 a 3. Continuando la simplificación de la expresión (158) se desarrolla la derivación:

$$\frac{1}{a^3} \left( \frac{\partial a^3}{\partial x^\nu} g^{\nu\alpha} g^{0\beta} F_{\alpha\beta} + a^3 \frac{\partial g^{\nu\alpha}}{\partial x^\nu} g^{0\beta} F_{\alpha\beta} + a^3 g^{\nu\alpha} \frac{\partial g^{0\beta}}{\partial x^\nu} F_{\alpha\beta} + a^3 g^{\nu\alpha} g^{0\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) + \left(m^2 - \frac{R}{6}\right) g^{00} A_0 = 0 \quad (160)$$

Para desarrollar el primer término de la expresión anterior se tiene en cuenta que  $a$  no tiene componentes espaciales y su derivación será sólo temporal. Así mismo las derivadas espaciales de la métrica  $g_{\mu\nu}$  propuesta en (F) debe anularse pues sólo dependen de  $a(t)$ . Desarrollando las derivadas parciales y usando las condiciones (156,157,158,159) se obtiene:

$$\frac{1}{a^3} \left( 3a^2 \dot{a} g^{00} g^{00} F_{00} + a^3 \frac{\partial g^{00}}{\partial x^0} g^{00} F_{00} + a^3 g^{\nu\alpha} \frac{\partial g^{00}}{\partial x^0} F_{\alpha 0} + a^3 g^{\nu\alpha} g^{00} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial x^\nu} \right) + \left(m^2 - \frac{R}{6}\right) g^{00} A_0 = 0 \quad (161)$$

reemplazando los factores  $g_{00} = 1$  y recordando la definición de  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$  la expresión se reduce a:

$$g^{\nu\alpha} \frac{\partial F_{\alpha 0}}{\partial x^\nu} + \left(m^2 - \frac{R}{6}\right) A_0 = 0, \quad (162)$$

utilizando propiedad de la métrica (ec. 159) :

$$g^{ij} \frac{\partial F_{j0}}{\partial x^i} + g^{00} \frac{\partial F_{00}}{\partial x^0} + \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_0 = 0, \quad (163)$$

y de la definición de  $F_{00}$  se anula el término y se obtiene:

$$g^{ij} \partial_i (\partial_j A_0 - \partial_0 A_j) + \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_0 = 0, \quad (164)$$

pero de la condición (157) se reduce la expresión a:

$$-\frac{1}{a^2} \partial_i (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) + \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_0 = 0, \quad (165)$$

y reescribiendo en términos de operadores de LaPlace:

$$-\frac{1}{a^2} \nabla^2 A_0 + \frac{1}{a^2} \partial_i \dot{A}_i + \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_0 = 0, \quad (166)$$

que corresponde con la expresión (38) que proviene directamente de aplicar condiciones a las ecuaciones de movimiento.

## C.2. Cálculo para $\mu = i$

Haciendo el subíndice  $\mu = i$  en la expresión (154):

$$\left( m^2 - \frac{R}{6} \right) g^{i\sigma} A_\sigma + \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (a^3 g^{\nu\alpha} g^{i\beta} F_{\alpha\beta}) = 0, \quad (167)$$

se desarrolla la derivación teniendo en cuenta que  $a(t)$  no tiene derivadas espaciales:

$$\frac{1}{a^3} \left( \frac{\partial a^3}{\partial x^\nu} g^{\nu\alpha} g^{i\beta} F_{\alpha\beta} + a^3 \frac{\partial g^{\nu\alpha}}{\partial x^\nu} g^{i\beta} F_{\alpha\beta} + a^3 g^{\nu\alpha} \frac{\partial g^{i\beta}}{\partial x^\nu} F_{\alpha\beta} + a^3 g^{\nu\alpha} g^{i\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) + \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) g^{i\sigma} A_\sigma = 0 \quad (168)$$

teniendo en cuenta que la parte espacial de la métrica depende de  $a(t)$ , al desarrollar las derivadas la expresión cambia por :

$$\frac{1}{a^3} \left( 3a^2 \dot{a} g^{00} g^{i\beta} F_{0\beta} + a^3 \partial_0 g^{00} g^{i\beta} F_{0\beta} + a^3 g^{\nu\alpha} \partial_\nu g^{i\beta} F_{\alpha\beta} + a^3 g^{\nu\alpha} g^{i\beta} \partial_n u F_{\alpha\beta} \right) + \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) g^{i\sigma} A_\sigma = 0 \quad (169)$$

recordando que la métrica propuesta es diagonal, que  $\partial_0 g_{00} = 0$  y que  $g^{i\beta} = g^{ij}$  :

$$\frac{1}{a^3} (3a^2 \dot{a} g^{00} g^{ij} F_{0j} + a^3 g^{\nu\alpha} \partial_\nu g^{ij} F_{\alpha j} + a^3 g^{\nu\alpha} g^{ij} \partial_\nu F_{\alpha j}) + \left(m^2 - \frac{R}{6}\right) g^{i\sigma} A_\sigma = 0 \quad (170)$$

teniendo en cuenta que :

$$\partial_\nu g^{i\beta} = \partial_\nu g^{ij} + \partial_\nu g^{00} = \frac{2\dot{a}}{a^3}, \quad (171)$$

reemplazando  $g^{ij}$  por el resultado de la ec.(157) y el resultado anterior en la expresión (170)

$$\frac{1}{a^3} [-3\dot{a} F_{0j} + 2\dot{a} g^{00} F_{0j} - a g^{\nu\alpha} \partial_\nu F_{\alpha j}] - \left(m^2 - \frac{R}{6}\right) \left(\frac{1}{a^2}\right) A_j = 0. \quad (172)$$

El término dependiente de la derivada de  $F_{\alpha j}$  se desarrolla a continuación:

$$g^{\nu\alpha} \partial_\nu F_{\alpha j} = g^{00} \partial_0 F_{0j} + g^{ik} \partial_i F_{kj}. \quad (173)$$

Aplicando la definición de  $F_{\alpha\beta}$ :

$$g^{\nu\alpha} \partial_\nu F_{\alpha j} = g^{00} \partial_0 (\partial_0 A_j - \partial_j A_0) + g^{ik} \partial_i (\partial_k A_j - \partial_j A_k). \quad (174)$$

Recurriendo a las propiedades halladas en las ecs.(156,157):

$$g^{\nu\alpha} \partial_\nu F_{\alpha j} = \partial_0 (\partial_0 A_j - \partial_j A_0) - \frac{1}{a^2} \partial_k (\partial_k A_j - \partial_j A_k). \quad (175)$$

Aplicando las derivadas parciales a cada término se obtiene:

$$g^{\nu\alpha} \partial_\nu F_{\alpha j} = \ddot{A}_j - \partial_j \dot{A}_0 - \frac{1}{a^2} (\nabla^2 A_j + \partial_j \partial_k A_k). \quad (176)$$

El resultado anterior se reemplaza en la ec. (172) junto con la definición de  $F_{\nu\mu}$  y se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{a^3} \left\{ -\dot{a} (\partial_0 A_j - \partial_j A_0) - a \left[ \ddot{A}_j - \partial_j \dot{A}_0 - \frac{1}{a^2} (\nabla^2 A_j + \partial_j \partial_k A_k) \right] \right\} - \frac{1}{a^2} \left(m^2 - \frac{R}{6}\right) A_j = 0 \quad (177)$$

Dividiendo todos los términos en  $-a^2$  y simplificando la expresión se llega a:

$$\frac{\dot{a}}{a} \dot{A}_j - \frac{\dot{a}}{a} \partial_j A_0 + \ddot{A}_j - \partial_j \dot{A}_0 - \frac{1}{a^2} [\nabla^2 A_j + \partial_j \partial_k A_k] + \left(m^2 - \frac{R}{6}\right) A_j = 0. \quad (178)$$

Así se han obtenido mediante los cálculos mostrados las ecs.(38,39) a partir de las ecuaciones de movimiento de  $A_\mu$ , las cuales van a ser utilizadas para encontrar condiciones iniciales del campo vectorial propuesto como generador del mecanismo de inflación.

## D. Obtención de las ecuaciones de evolución para $B_k$

Utilizando las condiciones encontradas para el campo vectorial primordial  $A_\mu$  en la ec. (41) y aplicando la homogeneidad espacial del campo vectorial  $\partial_i A_\nu = 0$ , la expresión (39) se modifica por:

$$\frac{\dot{a}}{a}\dot{A}_j + \ddot{A}_j = -\left(m^2 - \frac{R}{6}\right)A_j. \quad (179)$$

Para continuar los cálculos es necesaria la siguiente definición que representa el campo vectorial físico o escalado por la expansión del universo:

$$B_j = \frac{A_j}{a}. \quad (180)$$

Derivando la expresión anterior se obtiene:

$$\dot{B}_j = \frac{\dot{A}_j a - \dot{a} A_j}{a^2} = \frac{\dot{A}_j}{a} - \frac{A_j \dot{a}}{a^2}. \quad (181)$$

Derivando a su vez la expresión anterior :

$$\ddot{B}_j = \frac{\ddot{A}_j}{a} - \frac{2\dot{A}_j \dot{a}}{a^2} - \frac{\ddot{a} A_j}{a^2} + \frac{2\dot{a}^2 A_j}{a^3}. \quad (182)$$

Recordando la definición canónica del parámetro de Hubble en términos del factor de escala  $a(t)$ :

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (183)$$

Ahora se intentará escribir la expresión (42) en términos de las ecs. (180,181,182):

$$\ddot{B}_j + 3H\dot{B}_j = \frac{\ddot{A}_j}{a} - \frac{2\dot{A}_j \dot{a}}{a^2} - \frac{\ddot{a} A_j}{a^2} + \frac{2\dot{a}^2 A_j}{a^3} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left[ \frac{\dot{A}_j}{a} - \frac{\dot{a} A_j}{a^2} \right], \quad (184)$$

Simplificando la expresión anterior:

$$\ddot{B}_j + 3H\dot{B}_j = \left( \frac{\ddot{A}_j}{a} + \frac{\dot{A}_j \dot{a}}{a^2} \right) - \left( \frac{\ddot{a} A_j}{a^2} + \frac{\dot{a}^2 A_j}{a^3} \right). \quad (185)$$

Aplicando la condición (179) en (185) se obtiene:

$$\ddot{B}_j + 3H\dot{B}_j = -m^2 B_j - \frac{R}{6} B_j + \left( H^2 + \frac{\ddot{a}}{a} \right) B_j. \quad (186)$$

Para la métrica plana propuesta ( $K=0$ ) y mostrada en (F) se tiene el tensor de Ricci mostrado a continuación<sup>19</sup>:

$$R_{\mu\nu} = 3\frac{\ddot{a}}{a}\delta_{00} - (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\delta_{ij}, \quad (187)$$

cuya traza llamada también Escalar de Curvatura será:

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right). \quad (188)$$

La definición encontrada para  $R$  se reemplaza en la ec.(186) para obtener :

$$\ddot{B}_j + 3H\dot{B}_j = -m^2 B_j - \frac{R}{6}B_j + \frac{R}{6}B_j, \quad (189)$$

y así al simplificar se obtiene la ec.(42) que representa la evolución del campo vectorial primordial  $B_k$ .

## E. Obtención del tensor $Z_{\mu\nu}$

La obtención del tensor  $Z_{\mu\nu}$  se basa en aplicar el principio de acción estacionaria con extremos fijos a la acción mostrada en (35) respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$ . La definición de  $\delta S$  se muestra a continuación:

$$\delta S = \int dx'^4 \sqrt{-g'} \left[ \frac{R'}{16\pi} - \frac{1}{4}F'_{\alpha\beta}F'^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(m^2 - \frac{R'}{6}\right)A'^{\alpha}A'_{\alpha} \right] - \int dx^4 \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left(m^2 - \frac{R}{6}\right)A^{\alpha}A_{\alpha} \right] = 0, \quad (190)$$

donde la comilla indica que se realizó una transformación de coordenadas:

$$x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu}, \quad (191)$$

$$x'_{\mu} = x_{\mu} + \delta x_{\mu}, \quad (192)$$

y el diferencial de volumen tetradimensional  $d^4x$  se transforma del mismo modo:

$$d^4x' = J\left(\frac{x'}{x}\right)d^4x, \quad (193)$$

---

<sup>19</sup>Para ver los cálculos exactos para  $R_{\mu\nu}$  para la métrica F.L.R.W en un espaciotiempo plano, remitirse a las referencias [5, 10]

asi el Jacobiano se define en términos de la transformación de coordenadas:

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu} + \partial_{\nu} \delta x^{\mu}, \quad (194)$$

$$J \left( \frac{x'}{x} \right) = \det \left( \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) = 1 + \partial_{\mu} \delta x^{\mu}, \quad (195)$$

y el diferencial de volumen tetradimensional  $d^4x$  toma la forma:

$$d^4x' = (1 + \partial_{\mu} \delta x^{\mu}) d^4x, \quad (196)$$

asi la expresión (190) se modifica por:

$$\begin{aligned} \delta S = \int (1 + \partial_{\mu} \delta x^{\mu}) d^4x \sqrt{-g'} \left[ \frac{R'}{16\pi} - \frac{1}{4} F'_{\alpha\beta} F'^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R'}{6} \right) A'^{\alpha} A'_{\alpha} \right] \\ - \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16\pi} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^{\alpha} A_{\alpha} \right] = 0 \end{aligned} \quad (197)$$

definiendo las variaciones para los tensores involucrados así:

$$R' - R = \delta R, \quad (198)$$

$$F'_{\alpha\beta} - F_{\alpha\beta} = \delta F_{\alpha\beta}, \quad (199)$$

$$A'_{\mu} - A_{\mu} = \delta A_{\mu}, \quad (200)$$

$$F'^{\alpha\beta} - F^{\alpha\beta} = \delta F^{\alpha\beta}, \quad (201)$$

$$A'^{\mu} - A^{\mu} = \delta A^{\mu}, \quad (202)$$

$$\sqrt{-g'} - \sqrt{-g} = \delta \sqrt{-g}, \quad (203)$$

asi al reemplazar estas definiciones en la ec.(197) la expresión cambia por:

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x \left[ \frac{1}{16\pi} \delta (\sqrt{-g} R) - \frac{1}{4} \delta (\sqrt{-g} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \right] \\ + \int d^4x \left[ \frac{1}{2} m^2 \delta (\sqrt{-g} A^{\alpha} A_{\alpha}) - \frac{1}{12} \delta (\sqrt{-g} R A^{\alpha} A_{\alpha}) \right]. \quad (204) \\ + \int d^4x \partial_{\mu} \delta x^{\mu} \left[ \frac{R'}{16\pi} - \frac{1}{4} F'_{\alpha\beta} F'^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R'}{6} \right) A'^{\alpha} A'_{\alpha} \right] = 0 \end{aligned}$$

Aplicando el principio variacional respecto a la métrica<sup>20</sup>:

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int d^4x \left[ \frac{1}{16\pi} \frac{\partial(\sqrt{-g}R)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{4} \frac{\partial(\sqrt{-g}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \\
& \int d^4x \left[ \frac{1}{2}m^2 \frac{\partial(\sqrt{-g}A^\alpha A_\alpha)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{12} \frac{\partial(\sqrt{-g}RA^\alpha A_\alpha)}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (205) \\
& + \int d^4x \partial_\mu \delta x^\mu \left[ \frac{R'}{16\pi} - \frac{1}{4} F'_{\alpha\beta} F'^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R'}{6} \right) A'^\alpha A'_\alpha \right] = 0
\end{aligned}$$

De igual modo se reemplazan los tensores primados  $R'$ ,  $F'_{\alpha\beta}$  y  $A'_\alpha$  por sus equivalentes no primados a través de las expresiones (198,199,200,201,202,203):

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int d^4x \left[ \frac{1}{16\pi} \frac{\partial(\sqrt{-g}R)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{4} \frac{\partial(\sqrt{-g}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \\
& \int d^4x \left[ \frac{1}{2}m^2 \frac{\partial(\sqrt{-g}A^\alpha A_\alpha)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{12} \frac{\partial(\sqrt{-g}RA^\alpha A_\alpha)}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu}, \quad (206) \\
& + \int d^4x \partial_\mu \delta x^\mu \left[ \frac{R}{16\pi} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^\alpha A_\alpha \right] \\
& + \int d^4x \partial_\mu \delta x^\mu \left[ \frac{\delta R}{16\pi} - \frac{1}{4} \delta F_{\alpha\beta} \delta F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{\delta R}{6} \right) \delta A^\alpha \delta A_\alpha \right] = 0
\end{aligned}$$

donde se desprecian los productos entre variacionales y la expresión se reduce a:

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int d^4x \left[ \frac{1}{16\pi} \frac{\partial(\sqrt{-g}R)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{4} \frac{\partial(\sqrt{-g}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \\
& \int d^4x \left[ \frac{1}{2}m^2 \frac{\partial(\sqrt{-g}A^\alpha A_\alpha)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{12} \frac{\partial(\sqrt{-g}RA^\alpha A_\alpha)}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (207) \\
& + \int d^4x \partial_\mu \delta x^\mu \left[ \frac{R}{16\pi} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^\alpha A_\alpha \right] = 0
\end{aligned}$$

---

<sup>20</sup>No se realiza el cálculo variacional respecto al campo vectorial o a sus derivadas porque así se obtienen las ecuaciones de movimiento ya calculadas en el Apéndice B

las derivadas se desarrollan y los términos se subdividen:

$$\begin{aligned}
\delta S = \int d^4x & \left[ \frac{1}{16\pi} R \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{16\pi} \sqrt{-g} \frac{\partial R}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{4} \sqrt{-g} \frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \\
& + \int d^4x \left[ \frac{1}{2} m^2 A^\alpha A_\alpha \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2} m^2 \sqrt{-g} \frac{\partial (A^\alpha A_\alpha)}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \\
& - \int d^4x \left[ \frac{1}{12} A^\alpha A_\alpha R \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{12} A^\alpha A_\alpha \sqrt{-g} \frac{\partial R}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{12} \sqrt{-g} R \frac{\partial (A^\alpha A_\alpha)}{\partial g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \\
& + \int d^4x \left[ \frac{R}{16\pi} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^\alpha A_\alpha \right] \partial_\mu \delta x^\mu = 0
\end{aligned} \tag{208}$$

De la expresión anterior quedan dos integrandos fundamentales: uno dependiente de  $\delta g^{\mu\nu}$  y otro dependiente de  $\delta x^\mu$ . Ya que los variacionales son cantidades infinitesimales y arbitrarias, la única solución a la igualdad  $\delta S = 0$  es hacer los integrandos iguales a cero.

Igualando a cero el primer integrando es posible calcular  $Z_{\mu\nu}$  de este modo la ecuación que se debe resolver para calcularlo es la siguiente:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{R}{16\pi} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\alpha A^\alpha \right] \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} \\
& + \left[ \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} - \frac{1}{12} A_\alpha A^\alpha \sqrt{-g} \right] \frac{\partial R}{\partial g^{\mu\nu}}. \tag{209} \\
& - \frac{1}{4} \sqrt{-g} \frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) \frac{\partial (A^\alpha A_\alpha)}{\partial g^{\mu\nu}} = 0
\end{aligned}$$

Para continuar con el cálculo de  $Z_{\mu\nu}$  es necesario determinar el valor de cada derivada mostrada en la expresión anterior. Se calculará el valor de  $\frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}$  utilizando la siguiente identidad aplicable a matrices diagonalizables:

$$\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}, \tag{210}$$

así el determinante de  $g_{\mu\nu}$  mostrado a continuación:

$$g = \det(g_{\mu\nu}), \tag{211}$$

se reescribe así:

$$g = \det(e^{\ln(g_{\mu\nu})}) = e^{\text{Tr}(\ln(g_{\mu\nu}))}, \tag{212}$$

y al calcular el variacional a ambos lados de la igualdad:

$$\delta g = \delta e^{\text{Tr}(\ln(g_{\mu\nu}))}, \tag{213}$$

$$\delta g = e^{Tr(\ln(g_{\mu\nu}))} Tr \left( \frac{\delta g_{\mu\nu}}{g_{\mu\nu}} \right), \quad (214)$$

usando la definición del determinante de  $g_{\mu\nu}$  calculada en (212):

$$\delta g = g Tr \left( \frac{\delta g_{\mu\nu}}{g_{\mu\nu}} \right) \quad (215)$$

pero la traza de un escalar es el escalar mismo así pues:

$$\delta g = g \frac{\delta g_{\mu\nu}}{g_{\mu\nu}}. \quad (216)$$

Sabiendo que  $g_{\mu\nu}$  es una matriz cuadrada y diagonalizable para el caso estudiado (F.L.R.W. plana), es posible reescribir la expresión anterior así:

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (217)$$

Es posible reescribir esta expresión en términos de la variación del tensor contravariante recordando la siguiente propiedad de la métrica:

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4. \quad (218)$$

Al aplicar el variacional a ambos lados de la igualdad:

$$\delta (g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = \delta (4) = 0, \quad (219)$$

y así se obtiene la siguiente identidad:

$$g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (220)$$

que aplicada en (217) resulta:

$$\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (221)$$

Al aplicar el variacional a  $\sqrt{-g}$  se obtiene:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} = \frac{g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}}{2\sqrt{-g}} \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}. \quad (222)$$

Reemplazando el numerador de la expresión anterior por la obtenida en (221) se calcula el valor de la derivada de  $\sqrt{-g}$  respecto a la métrica contravariante, aproximando el variacional al diferencial <sup>21</sup>:

$$\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu}. \quad (223)$$

---

<sup>21</sup>Aproximación válida para pequeñas variaciones de la función argumento del operador  $\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}$ .

Se calculará la derivada del invariante  $A_\alpha A^\alpha$  respecto a la métrica. Se reescribe el invariante en términos de la métrica covariante así:

$$\frac{\partial (A_\alpha A^\alpha)}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial (A_\alpha g^{\alpha\beta} A_\beta)}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (224)$$

El campo vectorial  $A_\alpha$  no depende explícitamente de la métrica así que se saca del operador diferencial:

$$\frac{\partial (A_\alpha g^{\alpha\beta} A_\beta)}{\partial g^{\mu\nu}} = A_\alpha A_\beta \frac{\partial (g^{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (225)$$

La derivada mostrada se reemplaza por dos delta kronecker, uno por cada par de índices:

$$A_\alpha A_\beta \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} = A_\alpha A_\beta (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta). \quad (226)$$

Aplicando los delta kronecker el resultado de la derivación se reduce a:

$$\frac{\partial (A_\alpha A^\alpha)}{\partial g^{\mu\nu}} = A_\mu A_\nu + A_\nu A_\mu = 2A_\mu A_\nu. \quad (227)$$

Se calculará la derivada de  $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$  respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$

$$\frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial (F_{\alpha\beta} g^{\alpha\sigma} g^{\beta\lambda} F_{\sigma\lambda})}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (228)$$

donde los términos  $F$  no dependen explícitamente de la métrica, de manera que pueden sacar de la derivación :

$$\frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} = F_{\alpha\beta} F_{\sigma\lambda} (g^{\beta\lambda} \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\sigma + g^{\alpha\sigma} \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\lambda), \quad (229)$$

aplicando los delta kronecker a cada término dependiente del tensor  $F$ :

$$\frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} = (g^{\beta\lambda} F_{\mu\beta} F_{\nu\lambda} + g^{\alpha\sigma} F_{\alpha\mu} F_{\sigma\nu}), \quad (230)$$

y recordando la definición de  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$  se aplica su propiedad de antisimetría además de la simetría de  $g_{\mu\nu}$  y se obtiene:

$$\frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} = (g^{\lambda\beta} F_{\beta\mu} F_{\lambda\nu} + g^{\alpha\sigma} F_{\alpha\mu} F_{\sigma\nu}), \quad (231)$$

Se redefinen índices mudos  $\alpha \rightarrow \beta$  y  $\sigma \rightarrow \lambda$  y así se obtiene una expresión mas compacta para la derivada del invariante  $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$  respecto a la métrica :

$$\frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} = 2 (g^{\beta\lambda} F_{\beta\mu} F_{\lambda\nu}). \quad (232)$$

Finalmente se calculará la derivada  $\frac{\partial R}{\partial g^{\mu\nu}}$ . Se parte de la ley de transformación para un símbolo de Cristoffel, entre dos sistemas coordenados  $(X_1, \dots, X_n) \rightarrow (X'_1, \dots, X'_n)$  sabiendo que estos no transforman como un tensor. La transformación se define mediante:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}, \quad (233)$$

y se simplifica la escritura definiendo  $X^{\beta}_{\alpha}$ ,  $X'^{\beta}_{\alpha}$  y  $X^{\alpha}_{\beta\gamma}$  así

$$X^{\beta}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}, \quad (234)$$

$$X'^{\beta}_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}, \quad (235)$$

$$X^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta} \partial x'^{\gamma}}, \quad (236)$$

de este modo, al convertir un símbolo de Cristoffel del sistema no primado al primado:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^d_{ef} X'^{\rho}_d X^e_{\mu} X^f_{\nu} + X'^{\rho}_d X^d_{\mu\nu}. \quad (237)$$

La diferencia entre dos Cristoffels, uno de ellos perturbado ligeramente (se indica mediante el acento circumflejo) se define como:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^d_{ef} X'^{\rho}_d X^e_{\mu} X^f_{\nu} + X'^{\rho}_d X^d_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^d_{ef} X'^{\rho}_d X^e_{\mu} X^f_{\nu} + X'^{\rho}_d X^d_{\mu\nu}, \quad (238)$$

y esta resta elimina la parte de los Cristoffels que no transforma como tensor permitiendo así que  $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu}$  sea una cantidad tensorial.

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}, \quad (239)$$

donde la resta se escribe como un variacional del símbolo de Cristoffel, ya que la diferencia entre los dos Cristoffels es infinitesimal. Demostrado que  $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$  es tensor es necesario que la derivada covariante de esta cantidad también transforme como tensor (ver [10]). Se muestra a continuación la expresión para la derivación covariante de  $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ :

$$\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu;\lambda} = \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} \delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}. \quad (240)$$

Utilizando la definición del tensor de Riemman  $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$  (ver [10, 16]) :

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma,\mu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}, \quad (241)$$

y de este modo es posible escribir la variación del tensor de Riemman  $\delta R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$  así:

$$\delta R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \delta\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma,\mu} - \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma,\nu} + \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \delta\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}, \quad (242)$$

ésta variación del tensor de Riemman puede reescribirse como una diferencia entre dos derivadas covariantes de símbolos de Cristoffel. Se muestran a continuación las dos derivadas:

$$\delta\Gamma_{\nu\sigma;\mu}^{\rho} = \delta\Gamma_{\nu\sigma,\mu}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho}\delta\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho}, \quad (243)$$

$$\delta\Gamma_{\mu\sigma;\nu}^{\rho} = \delta\Gamma_{\mu\sigma,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho}\delta\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho}. \quad (244)$$

Restando las expresiones (243) y (244) se obtiene:

$$\delta R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \delta\Gamma_{\nu\sigma;\mu}^{\rho} - \delta\Gamma_{\mu\sigma;\nu}^{\rho}, \quad (245)$$

y usando propiedades de simetría entre los subíndices del Riemman y contrayendo un índice ( $\sigma \rightarrow \rho$ ), el variacional del tensor de Riemman cambia por:

$$\delta R^{\rho}_{\mu\rho\nu} = \delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma_{\nu\mu;\rho}^{\rho} - \delta\Gamma_{\mu\rho;\nu}^{\rho}. \quad (246)$$

Con el resultado anterior es posible calcular el variacional del escalar de curvatura:

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}, \quad (247)$$

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}, \quad (248)$$

asi mismo es posible reemplazar en esta expresión  $\delta R_{\mu\nu}$  por la ec.(246):

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} [\delta\Gamma_{\nu\mu;\rho}^{\rho} - \delta\Gamma_{\mu\rho;\nu}^{\rho}]. \quad (249)$$

Para calcular  $\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}$  es necesario que un término  $\delta g^{\mu\nu}$  pueda sacarse como factor común del segundo término y así posteriormente aproximar el variacional al diferencial para  $R$  y para  $g^{\mu\nu}$ . Para lograr esto se utiliza la definición de un símbolo de Cristoffel en términos de la métrica (ver [16]) que se muestra a continuación:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda a} (g_{a\nu,\mu} + g_{a\mu,\nu} - g_{\mu\nu,a}). \quad (250)$$

Habiendo mostrado que  $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  es una cantidad tensorial es posible definirla en términos de la métrica así:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda a} (\delta g_{a\nu,\mu} + \delta g_{a\mu,\nu} - \delta g_{\mu\nu,a}), \quad (251)$$

de modo que las derivadas covariantes de los símbolos de Cristoffel mostrados en las expresiones (243) y (244) pueden reescribirse del mismo modo:

$$\delta\Gamma_{\nu\mu;\rho}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho a} (\delta g_{a\nu,\mu\rho} + \delta g_{a\mu,\nu\rho} - \delta g_{\mu\nu,a\rho}), \quad (252)$$

$$\delta\Gamma_{\mu\rho;\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho a}(\delta g_{a\mu,\rho\nu} + \delta g_{a\rho,\mu\nu} - \delta g_{\mu\rho,a\nu}), \quad (253)$$

y al realizar la resta entre ambos términos:

$$\delta\Gamma_{\nu\mu;\rho}^{\rho} - \delta\Gamma_{\mu\rho;\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}[g^{\rho a}\delta g_{a\nu,\mu\rho} - g^{\rho a}\delta g_{\mu\nu,a\rho} - g^{\rho a}\delta g_{a\rho,\mu\nu} + g^{\rho a}\delta g_{\mu\rho,a\nu}]. \quad (254)$$

Multiplicando la expresión anterior por  $g^{\mu\nu}$  y teniendo en cuenta los índices mudos en la convencion tensorial es posible reducir la ec.(254) así :

$$g^{\mu\nu}[\delta\Gamma_{\nu\mu;\rho}^{\rho} - \delta\Gamma_{\mu\rho;\nu}^{\rho}] = \frac{1}{2}g^{\rho a}g^{\mu\nu}[2\delta g_{\rho\mu,\nu a} - 2\delta g_{\mu\nu,a\rho}], \quad (255)$$

El término derecho de la ec.(255) se desarrollará a continuación:

$$\begin{aligned} & g^{\rho a}g^{\mu\nu}\nabla_{\nu}\nabla_a\delta g_{\rho\mu} - g^{\rho a}g^{\mu\nu}\nabla_a\nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu} = \\ & g^{\rho a}g^{\mu\nu}\nabla_{\nu}\nabla_a(g_{\rho\alpha}g_{\mu\beta}\delta g^{\alpha\beta}) - g^{\rho a}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu,a\rho} = \\ & g^{\rho a}g^{\mu\nu}g_{\rho\alpha}g_{\mu\beta}\nabla_{\nu}\nabla_a\delta g^{\alpha\beta} - g^{\rho a}g^{\mu\nu}\nabla_a\nabla_{\rho}(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}) = \\ & \delta_{\beta}^{\nu}\delta_{\alpha}^a\nabla_{\nu}\nabla_a\delta g^{\alpha\beta} - \delta_{\alpha}^{\nu}g^{a\rho}g_{\nu\beta}\nabla_a\nabla_{\rho}\delta g^{\alpha\beta} = \\ & \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\delta g^{\alpha\beta} - g^{a\rho}g_{\alpha\beta}\nabla_a\nabla_{\rho}\delta g^{\alpha\beta} = \\ & \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\delta g^{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}(g^{a\rho}\nabla_a\nabla_{\rho})\delta g^{\alpha\beta} = \\ & \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\delta g^{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}\square\delta g^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (256)$$

donde se ha aplicado la definición del operador de D'Alembert  $\square = g^{a\rho}\nabla_a\nabla_{\rho}$ . El resultado final puede modificarse  $\alpha \rightarrow \mu$  y  $\beta \rightarrow \nu$  ya que estos son índices mudos en la expresión. Este resultado para  $g^{\mu\nu}[\delta\Gamma_{\nu\mu;\rho}^{\rho} - \delta\Gamma_{\mu\rho;\nu}^{\rho}]$  se reemplaza en la ec. (248) :

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + (\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta g^{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square\delta g^{\mu\nu})g^{\mu\nu}, \quad (257)$$

y de este modo se factoriza  $\delta g^{\mu\nu}$  y es posible realizar el cálculo de:

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial R}{\partial g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} + (\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - g_{\mu\nu}\square)g^{\mu\nu}, \quad (258)$$

donde se aproxima el operador  $\delta$  al operador  $\partial$  siempre que las variaciones del escalar de curvatura sean infinitesimales.

Habiendo obtenido las derivadas respecto a la métrica mostradas en las ecs. (258,232,227,223) se puede continuar con el cálculo de  $Z_{\mu\nu}$  que se habia interrumpido en la ec.(209). Se reemplazan estas derivadas en la expresión (209) y se

obtiene:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{R}{16\pi} - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\alpha A^\alpha \right] \left( -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \right) \\
& - \left[ -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} + \frac{1}{12} A_\alpha A^\alpha \sqrt{-g} \right] (R_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square)) \cdot \\
& - \frac{1}{4} \sqrt{-g} (2 (g^{\beta\lambda} F_{\beta\mu} F_{\lambda\nu})) + \sqrt{-g} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\mu A_\nu = 0
\end{aligned} \tag{259}$$

se cancela el factor  $\sqrt{-g}$  y se reagrupan términos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8\pi} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) &= \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\alpha A^\alpha g_{\mu\nu} \\
-\frac{1}{6} (R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) A^\alpha A_\alpha &- (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \frac{1}{8\pi} \cdot \\
-g^{\beta\lambda} F_{\beta\mu} F_{\lambda\nu} + \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\mu A_\nu &
\end{aligned} \tag{260}$$

de la expresión anterior se buscará encontrar la parte derecha de las ecuaciones de campo de Einstein:

$$Z_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right), \tag{261}$$

expresando a  $Z_{\mu\nu}$  en unidades naturales con  $c = 1$ . Al aplicar las derivadas covariantes y el operador de D'Alembert a un valor constante se anula uno de los términos de la expresión (260) y se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
Z_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\alpha A^\alpha g_{\mu\nu} \\
&- \frac{1}{6} (R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) A^\alpha A_\alpha \cdot \\
&- g^{\beta\lambda} F_{\beta\mu} F_{\lambda\nu} + \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\mu A_\nu
\end{aligned} \tag{262}$$

Reescribiendo  $Z_{\mu\nu}$  como un tensor mixto resulta:

$$\begin{aligned}
Z_\nu^\mu &= \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \delta_\nu^\mu - \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\alpha A^\alpha \delta_\nu^\mu \\
&- \frac{1}{6} (R_\nu^\mu + \nabla^\mu \nabla_\nu - \delta_\nu^\mu \square) A^\alpha A_\alpha \cdot \\
&- F^{\lambda\mu} F_{\lambda\nu} + \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^\mu A_\nu
\end{aligned} \tag{263}$$

Así despues de realizar la variación de la acción propuesta en (35) se obtiene la expresión para el tensor  $Z_\nu^\mu$  análogo a  $T_\nu^\mu$ .

## F. Cálculo de $Z_0^0$

Para la obtención de  $Z_0^0$  se parte de la definición obtenida para  $Z_\nu^\mu$  cambiando los subíndices así:

$$Z_0^0 = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \delta_0^0 - \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\alpha A^\alpha \delta_0^0 + \frac{1}{6} (\delta_0^0 \square - \nabla^0 \nabla_0 - R_0^0) A^\alpha A_\alpha - F^{\lambda 0} F_{\lambda 0} + \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^0 A_0. \quad (264)$$

Aplicando la condición calculada en la ec.(41) es posible excluir términos de  $F_{\alpha\beta}$  y  $A_\alpha A^\beta$  que contengan  $A_0$

$$Z_0^0 = \frac{1}{4} (F_{00} F^{00} + F_{0i} F^{0i} + F_{i0} F^{i0} + F_{ij} F^{ij}) - \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_i A^i + \frac{1}{6} (\delta_0^0 \square - \nabla^0 \nabla_0 - R_0^0) A^i A_i - F^{i0} F_{i0}. \quad (265)$$

Aplicando la antisimetría del tensor  $F_{\mu\nu}$  se simplifican términos dependientes así:

$$Z_0^0 = -\frac{1}{2} (F_{0i} F^{0i}) - \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_i A^i + \frac{1}{6} (\delta_0^0 \square - \nabla^0 \nabla_0 - R_0^0) A^i A_i. \quad (266)$$

De la definición de  $g_{\mu\nu}$  se puede aplicar el hecho que  $g^{00} = 1$  y que  $g^{ij} = -\frac{1}{a^2} \delta_j^i$

$$Z_0^0 = \frac{1}{2a^2} (F_{0i} F_{0i}) + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_i \frac{A_i}{a^2} - \frac{1}{6} (\delta_0^0 \square - \nabla^0 \nabla_0 - R_0^0) \frac{A_i}{a^2} A_i. \quad (267)$$

Se aplica la definición de  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  a la expresión anterior y se obtiene:

$$Z_0^0 = \frac{1}{2a^2} \dot{A}_i^2 + \frac{1}{2a^2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_i^2 - \frac{1}{6} (\delta_0^0 \square - \nabla^0 \nabla_0 - R_0^0) \frac{A_i^2}{a^2}. \quad (268)$$

En el Apéndice B se obtienen las ecuaciones de movimiento para el campo vectorial  $A_\mu$  a través de la aplicación del principio de acción estacionaria con extremos fijos.

La expresión (150) se modificaría si el estudio se hubiese realizado para la métrica de Minkowsky ya que en el segundo término  $\sqrt{-g} = 1$  apareciendo allí la

definición  $\square = \partial_\mu \partial^\mu = g_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ , mostrando que esta ecuación es una expresión particular del caso mas general del operador de D'Alembert para métricas no euclideas.

El operador de D'Alembert llamado también operador de onda se define a continuación:

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu), \quad (269)$$

el cual incluye el determinante de la métrica aplicada. Para el caso de Minkowsky se reduce la expresión mostrada al operador de onda

$$\square = dt^2 - \nabla^2. \quad (270)$$

Aplicando la definición del operador  $\square$  para métricas diferentes a la de Minkowsky en la ec.(268) se obtiene:

$$\begin{aligned} Z_0^0 &= \frac{1}{2} \frac{A_i^2}{a^2} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) \frac{A_i^2}{a^2} + \frac{1}{6} R_0^0 \frac{A_i^2}{a^2} \\ &\quad - \frac{1}{6} \left( \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu) - g^{00} \nabla_0 \nabla_0 \right) \frac{A_i^2}{a^2}. \end{aligned} \quad (271)$$

El determinante de la métrica F.L.R.W mostrada en () equivale a  $g = \det[g_{\mu\nu}] = -a^6$  y al aplicarse en la expresión anterior :

$$\begin{aligned} Z_0^0 &= \frac{1}{2} \frac{\dot{A}_i^2}{a^2} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) \frac{A_i^2}{a^2} + \frac{1}{6} R_0^0 \frac{A_i^2}{a^2} \\ &\quad - \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{a^3} \left( \partial_0 \left( a^3 \partial^0 \left( \frac{A_i^2}{a^2} \right) \right) + \partial_i \left( a^3 \partial^i \left( \frac{A_i^2}{a^2} \right) \right) \right) - \partial_0^2 \left( \frac{A_i^2}{a^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (272)$$

Teniendo en cuenta que la derivación  $\partial_i A_k = 0$ , que representa un campo vectorial altamente homogéneo. Por otra parte  $\partial_0 \partial^0 = g^{00} \partial_0 \partial_0 = \partial_0^2$ , también recordando que el parámetro de escala es dependiente del tiempo, la expresión cambia así:

$$Z_0^0 = \frac{1}{2} \frac{\dot{A}_i^2}{a^2} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) \frac{A_i^2}{a^2} + \frac{1}{6} R_0^0 \frac{A_i^2}{a^2} - \frac{1}{6} \left[ 3a^2 \dot{a} \frac{1}{a^3} \partial_0 + \partial_0^2 - \partial_0^2 \right] \frac{A_i^2}{a^2}, \quad (273)$$

Simplificando la expresión se obtiene:

$$Z_0^0 = \frac{1}{2} \frac{\dot{A}_i^2}{a^2} + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) \frac{A_i^2}{a^2} + \frac{1}{6} R_0^0 \frac{A_i^2}{a^2} - \frac{1}{2a^2} H \partial_0 A_i^2 + H^2 \frac{A_i^2}{a^2}, \quad (274)$$

Aplicando la definición del campo vectorial fundamental físico  $B_k = \frac{A_k}{a}$  junto con la derivada respecto al tiempo cósmico  $\dot{B}_k = \frac{A_k}{a} - H B_k$  la expresión anterior

cambia por:

$$Z_0^0 = \frac{1}{2} \left( \dot{B}_i + H B_i \right)^2 + \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) B_i^2 + \frac{1}{6} R_0^0 B_i^2 - H \left( \dot{B}_i^2 + H B_i \right) B_i + H^2 B_i^2. \quad (275)$$

Agrupando términos semejantes se obtiene:

$$Z_0^0 = \frac{1}{2} \dot{B}_i^2 + \frac{1}{2} H^2 B_i^2 + \frac{1}{2} m^2 B_i^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} R - R_0^0 \right) B_i^2. \quad (276)$$

Para la métrica F.L.R.W los términos geométricos correspondientes al escalar de curvatura y al tensor de Ricci ( $R$  y  $R_\nu^\mu$ ) calculados a partir de las ecuaciones de campo de Einstein y mostrados en el apéndice A, se muestran a continuación [10]:

$$R = 6 \left( \dot{H} + 2H^2 \right), \quad (277)$$

$$R_0^0 = g^{00} R_{00} = 3 \frac{\ddot{a}}{a} = 3(\dot{H} + H^2), \quad (278)$$

$$R_j^i = g^{ik} R_{kj} = \frac{1}{a^2} (a\ddot{a} + 2a^2) \delta_j^i = (\dot{H} + 3H^2) \delta_j^i, \quad (279)$$

de este modo la expresión (276) toma la forma:

$$Z_0^0 = \frac{1}{2} \dot{B}_i^2 + \frac{1}{2} m^2 B_i^2. \quad (280)$$

Así se obtiene la expresión para  $Z_0^0$  mostrada en (52), la cual es necesaria para continuar con la argumentación del mecanismo de inflación tipo Slow-Roll.

## G. Cálculo de $Z_j^i$

Partiendo de la expresión (263) y realizando el cambio de índices ( $\mu \rightarrow i$ ) y ( $\nu \rightarrow j$ ) la parte espacial del tensor  $Z_\nu^\mu$  será:

$$\begin{aligned} Z_j^i &= \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \delta_j^i - \frac{1}{2} \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A_\alpha A^\alpha \delta_j^i \\ &\quad - \frac{1}{6} \left( R_j^i + \nabla^i \nabla_j - \delta_j^i \square \right) A^\alpha A_\alpha, \\ &\quad - F^{\lambda i} F_{\lambda j} + \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) A^i A_j \end{aligned} \quad (281)$$

al bajar índices a través de la métrica, recordando la condición del campo vectorial  $A_0 = 0$ , aplicando la definición del tensor  $F_{\mu\nu}$  y su propiedad antisimetría:

$$\begin{aligned}
Z_j^i = & \frac{1}{4}g^{00}g^{00}(\partial_0 A_0 - \partial_0 A_0)(\partial_0 A_0 - \partial_0 A_0)\delta_j^i + \frac{1}{4}g^{kl}g^{00}(\partial_l A_0 - \partial_0 A_l)(\partial_k A_0 - \partial_0 A_k)\delta_j^i \\
& + \frac{1}{4}g^{00}g^{kl}(\partial_0 A_l - \partial_l A_0)(\partial_0 A_k - \partial_k A_0)\delta_j^i + \frac{1}{4}g^{kl}g^{mn}(\partial_l A_n - \partial_n A_l)(\partial_k A_m - \partial_m A_k)\delta_j^i \\
& + \frac{1}{4}g^{mn}g^{kl}(\partial_n A_l - \partial_l A_n)(\partial_m A_k - \partial_k A_m)\delta_j^i - g^{ik}g^{00}(\partial_k A_0 - \partial_0 A_k)(\partial_j A_0 - \partial_0 A_j) \\
& + \left(m^2 - \frac{R}{6}\right)A^i A_j - \frac{1}{2}m^2 A_k A^k \delta_j^i - \frac{1}{6}\left(R_j^i - \frac{1}{2}\delta_j^i R\right)A_k A^k + \frac{1}{6}(\delta_j^i \square - \nabla^i \nabla_j)A_k A^k
\end{aligned} \tag{282}$$

Reemplazando valores de la métrica  $g^{00} = 1$  y  $g^{ij} = -\frac{1}{a^2}\delta_j^i$  y aplicando propiedad de isotropía del campo vectorial  $A_k$  mediante  $\partial_i A_k = 0$  es posible simplificar la expresión anterior y obtener:

$$\begin{aligned}
Z_j^i = & -\frac{1}{2}\frac{\dot{A}_k^2}{a^2}\delta_j^i + \frac{1}{a^2}\dot{A}_i \dot{A}_j - \left(m^2 - \frac{R}{6}\right)\frac{A_i A_j}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{A_k^2}{a^2}\delta_j^i \\
& + \frac{1}{2a^2}m^2 A_k^2 \delta_j^i - \frac{1}{6}\left(R_j^i - \frac{1}{2}\delta_j^i R\right)\frac{A_k^2}{a^2} + \frac{1}{6}\delta_j^i \square \frac{A_k^2}{a^2}
\end{aligned} \tag{283}$$

Reescribiendo en la expresión anterior el operador de D'Alambert para la métrica F.L.R.W. se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu) = \frac{1}{a^3}[3a^2\dot{a}\partial_0 + a^3\partial_0^2], \tag{284}$$

y aplicándola en (283):

$$\begin{aligned}
Z_j^i = & -\frac{1}{2}\frac{\dot{A}_k^2}{a^2}\delta_j^i + \frac{1}{a^2}\dot{A}_i \dot{A}_j - \left(m^2 - \frac{R}{6}\right)\frac{A_i A_j}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{A_k^2}{a^2}\delta_j^i \\
& + \frac{1}{6}\left(R_j^i - \frac{1}{2}\delta_j^i R\right)\frac{A_k^2}{a^2} - \frac{H}{a^2}\left(A_k \dot{A}_k - A_k^2 H^2\right)\delta_j^i + \frac{1}{2a^2}m^2 A_k^2 \delta_j^i \\
& - \frac{1}{3a^2}\left[\dot{A}_k^2 + A_k \ddot{A}_k - 4H A_k \dot{A}_k - A^2 \dot{H} + 2A_k^2 H^2\right]\delta_j^i
\end{aligned} \tag{285}$$

Reagrupando términos se observa que la parte espacial de  $Z_\nu^\mu$  se compone de una parte diagonal que es la dependiente de  $\delta_j^i$  y otra que se ubica en las componentes

$i \neq j$ :

$$\begin{aligned}
Z_j^i = \frac{1}{a^2} & \left[ -\frac{1}{2} \dot{A}_k^2 - \frac{1}{12} R A_k^2 - H A_k \dot{A}_k + H^2 A_k^2 + \frac{1}{2} m^2 A_k^2 \right] \delta_j^i \\
& - \frac{1}{3a^2} \left( \dot{A}_k^2 + A_k \ddot{A}_k - 4H A_k \dot{A}_k - A_k^2 \dot{H} + 2A_k^2 H^2 \right) \delta_j^i. \quad (286) \\
& + \frac{1}{6} R_j^i \frac{A_k^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} \dot{A}_i \dot{A}_j - \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) \frac{A_i A_j}{a^2}
\end{aligned}$$

Dividiendo la parte espacial del tensor  $Z_\nu^\mu$  en componentes diagonales y no diagonales se puede reescribir:

$$Z_j^i = Z_j^{i \text{ diagonal}} + Z_j^{i \text{ no-diagonal}}. \quad (287)$$

La parte que no está en la diagonal de  $Z_j^i$  se puede reescribir en términos del campo vectorial físico  $B_k = \frac{A_k}{a}$  así:

$$\frac{1}{a^2} \dot{A}_i \dot{A}_j - \left( m^2 - \frac{R}{6} \right) \frac{A_i A_j}{a^2} = (\dot{B}_i + H B_i)(\dot{B}_j + H B_j) - m^2 B_i B_j + \frac{R}{6} B_i B_j, \quad (288)$$

Aplicando la definición del escalar de curvatura para la métrica F.L.R.W. mostrada en (277) se obtiene

$$Z_j^{i \text{ no-diagonal}} = \dot{B}_i \dot{B}_j + H(\dot{B}_i B_j + B_i \dot{B}_j) + (\dot{H} + 3H^2 - m^2) B_i B_j. \quad (289)$$

Se continua el cálculo de  $Z_j^{i \text{ diagonal}}$  aplicando las definiciones de  $R$  (ver ec. 277) y  $R_j^i$  (ver ec. 279) y reescribiendo en términos del campo vectorial físico  $B_k = \frac{A_k}{a}$  se obtiene:

$$Z_j^{i \text{ diagonal}} = \left[ -\frac{5}{6} \dot{B}_k^2 + \frac{5}{6} m^2 B_k^2 - H B_k \dot{B}_k - \frac{1}{3} \dot{H} B_k^2 - H^2 B_k^2 \right] \delta_j^i. \quad (290)$$

Así finalmente se obtiene la parte espacial del tensor  $Z_\nu^\mu$  compuesto por una parte diagonal y otra no diagonal así:

$$\begin{aligned}
Z_j^i = & \left[ -\frac{5}{6} \dot{B}_k^2 + \frac{5}{6} m^2 B_k^2 - H B_k \dot{B}_k - \frac{1}{3} \dot{H} B_k^2 - H^2 B_k^2 \right] \delta_j^i + \\
& \dot{B}_i \dot{B}_j + H(\dot{B}_i B_j + B_i \dot{B}_j) + (\dot{H} + 3H^2 - m^2) B_i B_j
\end{aligned} \quad (291)$$

que equivale a la expresión (73) necesaria para continuar la obtención de las condiciones necesarias para generar inflación del tipo Slow-Roll.

## Referencias

- [1] COBE Satellite, <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>.
- [2] WMAP Satellite, <http://wmap.gsfc.nasa.gov>.
- [3] A. Liddle, *Introduction to modern cosmology*, Wiley (2003).
- [4] V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*, Cambridge University Press (2005).
- [5] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press (2008).
- [6] A. Guth, *Inflationary Universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. **D23**, 347 (1981).
- [7] Large Hadron Collider, <http://lhc.web.cern.ch/lhc/>.
- [8] A. Golovnev, V. Mukhanov and V. Vanchurin, *Vector Inflation*, JCAP **0806**, 009 (2008).
- [9] H. Ford, *Inflation driven by a vector field*, Phys. Rev. **D40**, 967 (1989).
- [10] C. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman Company (1973).
- [11] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik*, Mathematische Annalen, **A92**, 1 (1924).
- [12] H. Weyl, *Space, Time, Matter*, Methuen & Co. Ltd, (1922).
- [13] A. Friedmann, *Über die krümmung des raumes*, Z. Phys. **A10**, 377 (1922).
- [14] J. S. Bagla, *Hubble, Hubble's law and the expanding universe*, Resonance **14**, 216 (2009).
- [15] E. Komatsu et. al, *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe(WMAP) observations: cosmological interpretation*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **180**, 330 (2009).
- [16] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's relativity*, Oxford University Press, (1992).
- [17] D. H. Lyth and A. R. Liddle, *The primordial density perturbation: cosmology, inflation and the origin of structure*, Cambridge University Press, (2009).

- [18] J. Xia, H. Li, G. Zhao and X. Zhang, *Determining cosmological parameters with latest observational data*, Phys. Rev. **D78**, 083524 (2008).
- [19] C. Amsler et al. (Particle Data Group), Phys. Lett. **B667**, 1 (2008).
- [20] Y. Rodriguez, *The Origin of the Large-Scale Structure in the Universe: Theoretical and Statistical Aspects*, arXiv:astro-ph/0507701v3 (2005).
- [21] P. Dirac, *General Theory of Relativity*, Wiley Interscience Publications (1975).
- [22] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *COBE, gravitational waves, inflation and extended inflation*, Phys. Lett. **B291**, 391 (1992)