

ANÁLISIS TEÓRICO Y NUMÉRICO DE SISTEMAS DIFERENCIALES DE TIPO
KLAUSMEIER DESCRIBIENDO LA INTERACCIÓN Y AUTOORGANIZACIÓN DE
ESPECIES VEGETALES

IVÁN MORENO VILLAMIL

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2024

ANÁLISIS TEÓRICO Y NUMÉRICO DE SISTEMAS DIFERENCIALES DE TIPO
KLAUSMEIER DESCRIBIENDO LA INTERACCIÓN Y AUTOORGANIZACIÓN DE
ESPECIES VEGETALES

IVÁN MORENO VILLAMIL

Trabajo de Grado para optar al título de
Magíster en Matemática Aplicada

Director

DIEGO ARMANDO RUEDA GÓMEZ
Ph.D en Matemáticas

Codirector

ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA
Ph.D en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

2024

AGRADECIMIENTOS

- ◇ Agradezco a Dios por conducir mi vida y permitirme alcanzar este gran logro.
- ◇ Agradezco a mi familia, en especial a mis padres: **Arelys Villamil** y **Eduardo Parra**, por ser mi fundamental apoyo y motivación durante mi formación.
- ◇ Quiero expresar un reconocimiento y agradecimiento a mis directores **Diego Armando Rueda Gómez** y **Élder Jesús Villamizar Roa**, por la dedicación, disposición y apoyo a lo largo de este proceso. Su experiencia, aportes y conocimientos permitieron el desarrollo de este trabajo.
- ◇ Agradezco a mis amigos con los cuales tuve la oportunidad de compartir durante toda esta etapa.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	9
1. ANÁLISIS TEÓRICO DEL MODELO AGUA-PLANTA	18
1.1. PRELIMINARES	18
1.2. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN	23
2. ANÁLISIS NUMÉRICO DEL MODELO AGUA-PLANTA	30
2.1. FORMULACIÓN DÉBIL EQUIVALENTE	30
2.2. ESQUEMA NUMÉRICO	31
2.2.1. Operadores de interpolación.	33
2.2.2. Definición del esquema numérico.	36
2.2.3. Positividad y buen planteamiento.	37
2.3. ESTIMACIONES UNIFORMES	40
2.4. ESTIMACIONES DE ERROR	49
2.5. SIMULACIONES NUMÉRICAS	57
3. APROXIMACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO DE VEGETACIÓN MULTI- ESPECIES	62
3.1. ESQUEMA NUMÉRICO	62
3.1.1. Definición del esquema numérico.	63
3.2. SIMULACIONES NUMÉRICAS	67
4. CONCLUSIONES	69
BIBLIOGRAFÍA	71

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. $\text{diám}(K)$ y $\rho(K)$ para un triángulo en K en \mathbb{R}^2 .	32
Figura 2. Comportamiento de la densidad de vegetación discreta b_h^n , considerando $\beta = 0$.	58
Figura 3. Comportamiento de la densidad de vegetación discreta b_h^n , considerando $\beta = 0.04$.	59
Figura 4. Comportamiento de la densidad de vegetación discreta $u_{1,h}^n$.	68
Figura 5. Comportamiento de la densidad de vegetación discreta $u_{2,h}^n$.	68

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Tasas de convergencia en espacio para w .	60
Tabla 2. Tasas de convergencia en espacio para b .	60
Tabla 3. Tasas de convergencia en tiempo para w .	60
Tabla 4. Tasas de convergencia en tiempo para b .	61

RESUMEN

TÍTULO: ANÁLISIS TEÓRICO Y NUMÉRICO DE SISTEMAS DIFERENCIALES DE TIPO KLAUSMEIER DESCRIBIENDO LA INTERACCIÓN Y AUTOORGANIZACIÓN DE ESPECIES VEGETALES

*

AUTOR: IVÁN MORENO VILLAMIL **

PALABRAS CLAVE: MODELOS TIPO KLAUSMEIER, DIFUSIÓN CRUZADA, PATRONES DE TURING, SOLUCIONES GLOBALES, ELEMENTOS FINITOS.

DESCRIPCIÓN:

Este trabajo está dedicado al análisis teórico y numérico de dos sistemas acoplados de Ecuaciones Diferenciales Parciales no lineales parabólicas que describen la evolución de especies vegetales sujetas a una fuente hídrica, cuando las especies se encuentran en ambientes áridos. El primer modelo describe la interacción entre una especie de plantas y el agua del suelo, y el segundo modelo incorpora la dinámica de competición multiespecies. En lo que respecta al análisis teórico, se demuestra la existencia, unicidad y regularidad de soluciones globales en una clase amplia de datos iniciales, para el primer sistema (agua-planta). En lo que respecta al análisis numérico de ambos modelos, se estudian esquemas de tipo mixto, usando los métodos de elementos finitos para la aproximación espacial y diferencias finitas para la aproximación temporal. Por un lado, el esquema para el modelo agua-planta se basa en un sistema equivalente que incorpora una nueva variable, la cual permite tratar el término de difusión cruzada presente en la ecuación de densidad de agua. Para este esquema se prueban algunas propiedades cualitativas tales como su buen planteamiento, la no negatividad de las variables discretas, algunas estimaciones uniformes y órdenes óptimos de convergencia hacia soluciones regulares. Por otro lado, para el modelo multiespecies, se diseña un esquema basado en las variables originales del sistema, y se prueba su buen planteamiento y la no negatividad de las variables discretas. Finalmente, para ambos esquemas numéricos, se realizan algunas simulaciones que permiten validar su buen comportamiento.

* Tesis de maestría

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Diego Armando Rueda Gómez, Ph.D en Matemáticas. Codirector: Élder Jesús Villamizar Roa, Ph.D en Matemáticas

ABSTRACT

TITLE: THEORETICAL AND NUMERICAL ANALYSIS OF KLAUSMEIER-TYPE DIFFERENTIAL SYSTEMS DESCRIBING THE INTERACTION AND SELF-ORGANIZATION OF PLANT SPECIES *

AUTHOR: IVÁN MORENO VILLAMIL **

KEYWORDS: KLAUSMEIER-TYPE MODELS, CROSS-DIFFUSION, TURING PATTERNS, GLOBAL SOLUTIONS, FINITE ELEMENTS.

DESCRIPTION:

This work is devoted to the theoretical and numerical analysis of two coupled systems of non-linear parabolic Partial Differential Equations that describe the evolution of plant species subject to a water source, when the species are found in arid environments. The first model describes the interaction between a plant species and soil water, and the second model incorporates the dynamics of multispecies competition. Regarding the theoretical analysis, the existence, uniqueness and regularity of global solutions in a large class of initial data are demonstrated for the first system (water-plant). Regarding the numerical analysis of both models, mixed type schemes are studied, using finite element methods for the spatial approximation and finite difference for the temporal approximation. On the one hand, the numerical scheme for the water-plant model is based on an equivalent system incorporating a new variable, which allows treating the cross-diffusion term present in the water density equation. For this scheme, some qualitative properties are proved such as its well-posedness, the non-negativity of the discrete variables, some uniform estimates and optimal orders of convergence towards regular solutions. On the other hand, for the multispecies model, a numerical scheme is designed based on the original variables of the system, and its well-posedness and the non-negativity of the discrete variables are proved. Finally, for both numerical schemes, some simulations are carried out to validate their good behaviour.

* Master Thesis

** Faculty of Sciences. School of Physics. Director: Diego Armando Rueda Gómez, Ph.D in Mathematics. Codirector: Élder Jesús Villamizar Roa, Ph.D in Mathematics

INTRODUCCIÓN

La exploración de la dinámica subyacente responsable de la formación de patrones en la naturaleza tiene gran importancia dentro del campo de la investigación en ecología. En particular, un área de estudio interesante en este contexto se centra en el surgimiento de patrones de vegetación en regiones áridas y semiáridas, producto de la competencia de especies vegetales por un suministro limitado de agua. Estos arreglos espaciales en la vegetación muestran configuraciones recurrentes y distintas, tanto en su distribución espacial como en su evolución temporal. Dentro de la vegetación se pueden manifestar diversos patrones que van desde un mosaico irregular ¹ marcado por una fase de alta cobertura y una fase de baja cobertura (con suelo expuesto), hasta patrones regulares como rayas, manchas, espacios y anillos (ver ²³⁴⁵⁶).

-
- ¹ M.R. AGUIAR y O.E. SALA. "Patch structure, dynamics and implications for the functioning of arid ecosystems". En: *Trends Ecol Evol* 7 (1999), págs. 273-277.
 - ² S. IAMS K. GOWDA Y. CHEN y M. SILBER. "Assessing the robustness of spatial pattern sequences in a dryland vegetation model". En: *Proc. R. Soc. A* 472 (2016).
 - ³ P.C. DE RUITER M. RIETKERK S. DEKKER y J. VAN DE KOPPEL. "Self-organized patchiness and catastrophic shifts in ecosystems". En: *Environmental Science, Biology* 305 (2004), págs. 1926-1929.
 - ⁴ C.M. ELLIOT y H. GARCKE. "Regular pattern formation in real ecosystems". En: *Trends Ecology Evolution* 23 (2008), págs. 169-175.
 - ⁵ C. A. KLAUSMEIER. "Regular and irregular patterns in semiarid vegetation". En: *Science* 284 (1999), págs. 1826-1828.
 - ⁶ et al F. BORGOGNO. "Mathematical models of vegetation pattern formation in ecohydrology". En: *Reviews of Geophysics* 47 (2009), págs. 1-36.

Un modelo base para el estudio de la dinámica de un determinado tipo de plantas en tierras secas (regiones áridas o semiáridas) fue propuesto por Klausmeier en 1999 ⁵. En ecología espacial, el modelo Klausmeier es un sistema de reacción-difusión de dos componentes con advección que describe la interacción dinámica entre la biomasa vegetal y el agua disponible en un ecosistema semiárido en un terreno espacial inclinado, y está dado por el siguiente sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP):

$$\begin{cases} \partial_t w = v \frac{\partial w}{\partial x_1} + R - wb^2 - w, \\ \partial_t b = \Delta b + wb^2 - \mu_0 b, \end{cases} \quad (1)$$

donde $w(\mathbf{x}, t)$ y $b(\mathbf{x}, t)$ son las densidades de agua y biomasa vegetal por unidad de área, respectivamente, con $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T)$, siendo Ω un dominio de \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$). En (1) hay tres parámetros: R denota la entrada de agua o tasa de lluvia, μ_0 mide las pérdidas de plantas, y v es la rapidez a la que el agua fluye cuesta abajo. Además, el término no lineal wb^2 representa la absorción de agua por parte de la planta, implicando a su vez su crecimiento y desarrollo.

Tomando como base este modelo, se han realizado múltiples estudios que proponen que la aparición de patrones de vegetación en regiones semiáridas se debe a intrincados circuitos de retroalimentación entre la biomasa y los recursos hídricos. Estas interacciones han llevado al desarrollo de varios modelos matemáticos destinados a comprender los mecanismos fundamentales detrás de la formación de patrones. Además, estos modelos pueden ofrecer información importante para comprender las transformaciones de los ecosistemas, incluida la desertificación y sus efectos

ambientales ³⁷⁸⁵⁹¹⁰.

Para analizar la formación de patrones de vegetación en las zonas áridas y semiáridas, en ¹¹ los autores propusieron el siguiente modelo de EDP para describir la interacción entre una especie de planta (arbustos o árboles) y un recurso (agua) en un terreno plano:

$$\begin{cases} \partial_t w = D_w \Delta w + R - \lambda w b - w & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t b = D_b \Delta b + w b - \mu_0 b - \frac{\mu_1 b}{1 + |b|} & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_\nu w = \partial_\nu b = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ w(\mathbf{x}, 0) = w_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad b(\mathbf{x}, 0) = b_0(\mathbf{x}) \geq 0 & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

donde ν denota el vector normal exterior unitario a la frontera del dominio Ω , la cual se denota por $\partial\Omega$. De nuevo, en (2) las incógnitas w y b representan, respectivamente, las densidades de agua y vegetación. Los parámetros involucrados son constantes positivas relacionadas con las propiedades físicas y la interacción entre el agua y las especies vegetales; específicamente, D_w y D_b representan los coeficientes de difusión de agua y biomasa respectivamente, R indica el aporte de agua

⁷ W. WANG X. WANG y G. ZHANG. "Vegetation pattern formation of a water-biomass model". En: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 42 (2017), págs. 571-584.

⁸ H. LAVÉE N. SHNERB P.SARAH y S. SOLOMON. "Reactive glass and vegetation patterns". En: *Physical Review Letters* 90 (2003), págs. 038-101.

⁹ M. SHACHAK J. VON HARDENBERG E. MERON e Y. ZARMI. "Diversity of vegetation patterns and desertification". En: *Physical Review* 87 (2001).

¹⁰ G. ZHANG C. LEI y J. ZHOU. "Pattern formation of a biomass-water reaction-diffusion model". En: *Applied Mathematics Letters* 123 (2022).

¹¹ A. MANOR y N. M. SHNERB. "Dynamical failure of Turing patterns". En: *Europhysics Letters* 74 (2006), 837-843.

o la tasa de lluvia, λ cuantifica el consumo de agua por las plantas y μ_0 denota la tasa de mortalidad de la vegetación. Además, $-\mu_1 b / (1 + |b|)$ es un coeficiente de degradación modificado para la densidad de la vegetación con el fin de capturar la “retroalimentación de infiltración” entre la planta y el agua subterránea (ver ¹¹). Como se señala en ⁷, este fenómeno biológico de “retroalimentación de infiltración” muestra la capacidad de las plantas de aflojar gradualmente el suelo, lo que favorece la infiltración del agua dentro de la mancha vegetal. Por lo tanto, una mayor densidad de biomasa vegetal conduce a una mayor infiltración, lo que disminuye las tasas de mortalidad de los arbustos debido al mayor contenido de agua en el suelo.

En ⁷, los autores proponen una variación bidimensional del modelo (2), incluyendo un mecanismo de difusión cruzada en la densidad del agua, es decir, reemplazando el término de autodifusión del agua por $D_w \Delta(w - \beta b)$, donde $\beta > 0$ representa un coeficiente de difusión constante inducido hidráulicamente por las raíces en la zona vadosa ¹²⁹. El modelo viene dado por el siguiente sistema parabólico acoplado:

$$\begin{cases} \partial_t w = D_w \Delta(w - \beta b) + R - \lambda w b - w & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t b = D_b \Delta b + w b - \mu_0 b - \frac{\mu_1 b}{1 + |b|} & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_\nu w = \partial_\nu b = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ w(\mathbf{x}, 0) = w_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad b(\mathbf{x}, 0) = b_0(\mathbf{x}) \geq 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

En lo que respecta al modelo (3), en ⁷ los autores analizan las condiciones de la inestabilidad inducida por la difusión y la inestabilidad inducida por la difusión cruzada, de un estado estacionario homogéneo y uniforme. Los autores también mues-

¹² Z. JIN Q. LIU y B. LI. “Numerical investigation of spatial pattern in a vegetation model with feedback function”. En: *Journal of Theoretical Biology* 254 (2008), págs. 350-360.

tran que una velocidad de difusión rápida del agua o una alta difusividad hidráulica debido a la succión de las raíces pueden impulsar la inestabilidad del estado estacionario homogéneo. Más allá del análisis de inestabilidad inducida por difusión, no se conocen resultados relativos al buen planteamiento ni al análisis numérico para el sistema (3).

Por otra parte, en ¹³ se propone un modelo de vegetación tipo Klausmeier que incorpora una interacción multiespecies. Específicamente, se considera un modelo para dos plantas en el mismo medio describiendo la competencia interespecífica directa de las dos especies, el cual está dado por el siguiente sistema de EDP:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_1 = \Delta u_1 + w u_1 (u_1 + H u_2) - B_1 u_1 - S u_1 u_2 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t u_2 = D \Delta u_2 + G w u_2 (u_1 + H u_2) - B_2 u_2 & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t w = d \Delta w + A - w - w (u_1 + u_2) (u_1 + H u_2) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2 = \partial_\nu w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ [u_1(\mathbf{x}, 0), u_2(\mathbf{x}, 0), w(\mathbf{x}, 0)] = [u_{10}(\mathbf{x}), u_{20}(\mathbf{x}), w_0(\mathbf{x})] & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (4)$$

donde A, B_1, B_2, d, D, G, H y S son parámetros positivos. Las constantes A, B_1 y B_2 representan las tasas de precipitación y mortalidad de las plantas, respectivamente. Las constantes G, H, D y d describen las diferencias en las tasas de conversión de agua a biomasa de las especies de plantas, los efectos sobre la capacidad de infiltración del suelo y los coeficientes de difusión, respectivamente. En el análisis del modelo (4) se puede asumir, por ejemplo, que u_1 es una especie herbácea y permitir que u_2 varíe entre otra especie de pasto y un tipo de vegetación leñosa. Este

¹³ L. EINGENTLER y J. A. SHERRAT. "Metastability as a Coexistence Mechanism in a Model for Dryland Vegetation Patterns". En: *Society for Mathematical Biology* 81 (2019), págs. 2290-2322.

modelo permite entender cómo se da la coexistencia de ambas especies a medida que varía la cantidad de agua.

Para el modelo multiespecies (4) se han realizado algunos trabajos recientes ¹³¹⁴. Desde la perspectiva del análisis teórico, en ¹³ se estudia la metaestabilidad como un mecanismo de coexistencia en el modelo (4) (en dominios 1D); específicamente, se prueba que la coexistencia no es una solución estable del sistema, pero tanto los estados espacialmente uniformes como los patrones de coexistencia ocurren como estados metaestables: un equilibrio inestable espacialmente uniforme y un patrón estable de una sola especie que es inestable a la introducción de un competidor. Además, los autores establecen dos mecanismos que causan la ocurrencia de soluciones metaestables. Desde la perspectiva del análisis numérico, en ¹⁴ se estudiaron esquemas de aproximación numérica (en dominios 1D) utilizando métodos de diferencias finitas no estándar, contruidos aprovechando propiedades de la solución conocidas *a priori*, tales como la positividad y el comportamiento oscilante en el espacio. Sin embargo, hasta donde conocemos, el análisis teórico y numérico en dominios bidimensionales y tridimensionales del modelo (4) no han sido previamente estudiados.

Teniendo en cuenta lo anterior, el objetivo de este trabajo se centra principalmente en el análisis teórico y numérico del modelo (3) en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \leq 3$. Además, se analizan algunas propiedades cualitativas desde el punto de vista del análisis numérico para el modelo multiespecies (4). La novedad de este trabajo se resume en tres aspectos. Primero, se analiza la existencia de soluciones blandas globales en

¹⁴ G. PAGANO D. CONTE y B. PATERNOSTER. “Nonstandard finite differences numerical methods for a vegetation reaction–diffusion model”. En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 419 (2023), págs. 2290-2322.

el tiempo para el problema de Cauchy (3), considerando una clase amplia de datos iniciales, incluyendo datos no continuos, es decir, se consideran datos iniciales en espacios $L^p(\Omega)$. La inclusión del mecanismo de difusión cruzada en el sistema (3) impide obtener información *a priori* que permita establecer cualquier resultado de la existencia de una solución débil (positiva); además, el sistema (3) no posee relación de escala alguna, lo que hace que este sistema sea más complicado que problemas relacionados tales como la ecuación de calor semilineal con no linealidades polinómicas de tipo u^p ¹⁵¹⁶¹⁷ o incluso varios modelos de quimiotaxis¹⁸. Sin embargo, para el sistema (3) se logran obtener normas adecuadas a partir de las cuales, a pesar de no tener una relación de escala, se consigue probar la existencia de soluciones blandas globales en el tiempo, que en realidad pueden ser soluciones clásicas para $t > 0$.

Habiendo obtenido un resultado de existencia global, el segundo objetivo de este trabajo es proponer un esquema numérico completamente discreto, basado en una discretización de Euler semi-implícita en el tiempo y una discretización de elementos finitos (con "mass lumping") en el espacio, para aproximar las soluciones del modelo continuo (3). La principal dificultad para desarrollar el análisis numérico del sistema

¹⁵ L. C. F. FERREIRA y E. J. VILLAMIZAR-ROA. "Self-similar solutions, uniqueness and long-time asymptotic behavior for semilinear heat equations". En: *Differential Integral Equations* 12 (2006), págs. 1349-1370.

¹⁶ L. C. F. FERREIRA y E. J. VILLAMIZAR-ROA. "On the stability problem for the Boussinesq equations in weak- L^p spaces". En: *Commun. Pure App. Anal.* 3 (2010), págs. 667-684.

¹⁷ L. C. F. FERREIRA y E. J. VILLAMIZAR-ROA. "On the heat equation with concave-convex nonlinearity and initial data in weak- L^p spaces". En: *Commun. Pure App. Anal.* 6 (2011), págs. 1715-1732.

¹⁸ L. C. F. FERREIRA y E. J. VILLAMIZAR-ROA. "Global existence for an attraction-repulsion chemotaxis fluid model with logistic source". En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B* 2 (2019), págs. 423-447.

(3) proviene del término de difusión cruzada Δb , ya que no está claro cómo controlar este término de acoplamiento y realizar un análisis de tasas de convergencia óptimas en un esquema de elementos finitos basado en la formulación variacional clásica. Entonces, para superar esta dificultad, se usa una estrategia inductiva para manejar el término de difusión cruzada, tratando con un sistema equivalente después de introducir la variable auxiliar $\sigma = \nabla b$ (ver sistema (27) más adelante). Esta idea permite proponer un esquema numérico que está bien planteado y preserva la no negatividad de la variable discreta de la biomasa vegetal. Además, se prueban otras propiedades cualitativas del esquema, incluidas algunas estimaciones uniformes requeridas en el análisis de convergencia, estimaciones de error óptimas y la convergencia hacia soluciones regulares. Finalmente, se presentan algunos experimentos numéricos con el fin de verificar el buen comportamiento del esquema numérico incluyendo la captura de la formación de patrones de Turing, así como validar el orden de convergencia en las estimaciones de error obtenidas en el análisis teórico.

El tercer objetivo de este trabajo se enfoca en definir un esquema numérico para el modelo de vegetación multiespecies definido en (4) preservando algunas propiedades cualitativas tales como la buena colocación y la positividad de las variables discretas. Así mismo, se presentan algunas simulaciones donde se evidencia la formación de patrones y el buen comportamiento del esquema.

El documento está organizado de la siguiente manera: En el Capítulo 1, se analiza la existencia de solución global para el modelo continuo (3) en el marco de los espacios de Lebesgue. Se establecen algunas estimaciones de decaimiento del semigrupo de calor con condiciones de frontera de tipo Neumann, se define la clase de espacios funcionales para los datos iniciales y las soluciones globales, y se prueba

la existencia de soluciones blandas globales mediante sucesiones contractivas de Banach.

En el Capítulo 2, se propone un esquema numérico basado en el método de los elementos finitos que permite aproximar las soluciones del modelo (3). Para este esquema numérico se prueban algunas propiedades, incluyendo la buena postura, la positividad y algunas estimaciones uniformes para las soluciones discretas, además se desarrolla el análisis de convergencia, demostrando tasas de convergencia óptimas. Finalmente, se realizan algunas simulaciones numéricas que evidencian resultados consistentes con los obtenidos en el análisis teórico, referentes a la captura de la formación de patrones de Turing, y la validación numérica de las estimaciones de error obtenidas.

En el Capítulo 3, se propone un esquema numérico para el modelo de vegetación multiespecies (4), y se demuestra la buena postura del esquema y la positividad de las variables discretas. Además, se llevan a cabo simulaciones numéricas que evidencian la captura de la formación de patrones de vegetación.

Estos resultados son nuevos y se encuentran plasmados en el manuscrito [Iván Moreno-Villamil, Diego A. Rueda-Gómez y Élder J. Villamizar-Roa, On a cross-diffusion model in ecohydrology: theory and numerics, manuscrito, 2023 (sometido)] y en el Capítulo del libro [Iván Moreno-Villamil, Diego A. Rueda-Gómez y Élder J. Villamizar-Roa, On the theoretical and numerical analysis of a vegetation model with cross-diffusion, Capítulo del libro: Analysis and PDE in Latin America - ICMAM 2022 Latin America, Springer, 2024]. Hasta donde sabemos, estos trabajos son los primeros dedicados al análisis teórico y numérico para el modelo (3).

1. ANÁLISIS TEÓRICO DEL MODELO AGUA-PLANTA

El objetivo de este capítulo es demostrar la existencia de soluciones globales para el modelo (3) en el marco de los espacios de Lebesgue. Para esto, se establecen algunas estimaciones de decaimiento del semigrupo de calor con condiciones de contorno de tipo Neumann, se define la clase de espacios funcionales para los datos iniciales, y se demuestra la existencia de soluciones blandas globales como el límite de sucesiones contractivas en un espacio de Banach. Este resultado de existencia es reciente y está plasmado en ¹⁹ y ²⁰.

1.1. PRELIMINARES

Se consideran los espacios estándar de Sobolev y Lebesgue $W^{m,p}(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$, con sus respectivas normas $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$ y $\|\cdot\|_{L^p}$. En particular, se denota $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$. El producto interno en el espacio $L^2(\Omega)$ estará representado por (\cdot, \cdot) . Los espacios correspondientes de funciones con valores vectoriales se denotarán por $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$, $\mathbf{L}^p(\Omega)$, $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, y así sucesivamente. Para un espacio de Banach X , se denota por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de funciones integrables de Bochner definidas en el intervalo $[0, T]$ con valores en X , dotado de la norma habitual $\|\cdot\|_{L^p(X)}$. También se considera el espacio $C([0, T]; X)$ de funciones continuas de $[0, T]$ con valores en X , con norma $\|\cdot\|_{C(X)}$; y el operador laplaciano Δ_p con dominio $D(\Delta_p) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Entonces, se sabe que Δ_p genera un semigrupo analítico

¹⁹ D. A. RUEDA-GÓMEZ I. MORENO-VILLAMIL y E. J. VILLAMIZAR-ROA. "On a cross-diffusion model in ecohydrology: theory and numerics". En: *Manuscrito* (2024).

²⁰ D. A. RUEDA-GÓMEZ I. MORENO-VILLAMIL y E. J. VILLAMIZAR-ROA. *On the theoretical and numerical analysis of a vegetation model with cross-diffusion*. Analysis y PDE in Latin America - ICMAM 2022 Latin America, Springer, 2024.

uniformemente acotado $\{e^{t\Delta_p}\}_{t \geq 0}$ de clase C_0 en L^p (ver Capítulo 3 de ²¹), el llamado semigrupo de calor de Neumann (si no hay ambigüedad, simplemente se denotará por $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$). Denotando por $z = R - w$, el sistema (3) se reescribe como

$$\begin{cases} \partial_t z = D_w(\Delta z + \beta \Delta b) - z + \lambda(R - z)b & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t b = D_b \Delta b + (R - \mu_0 - z)b - \frac{\mu_1 b}{1 + |b|} & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_\nu z = \partial_\nu b = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ z(\mathbf{x}, 0) = R - w_0(\mathbf{x}) = z_0(\mathbf{x}), \quad b(\mathbf{x}, 0) = b_0(\mathbf{x}) \geq 0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (5)$$

Usando el principio de Duhamel se obtiene la siguiente formulación integral asociada al sistema (5), donde por simplicidad en la escritura, se asume $D_w = D_b = 1$:

$$\begin{cases} z(\mathbf{x}, t) = e^{-t} e^{t\Delta} z_0 + \int_0^t e^{-(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\beta \Delta b + \lambda(R - z)b)(\tau) d\tau, \\ b(\mathbf{x}, t) = e^{(R-\mu_0)t} e^{t\Delta} b_0 - \int_0^t e^{(R-\mu_0)(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} \left(z b + \frac{\mu_1 b}{1 + |b|} \right) (\tau) d\tau. \end{cases} \quad (6)$$

Las soluciones del sistema (6) se llaman soluciones blandas. Se probará la existencia de soluciones blandas mediante un enfoque iterativo que proporciona una sucesión de Cauchy que converge a la solución. Sin embargo, para tratar con el sistema integral (6), se necesitan algunas propiedades de decaimiento en tiempo del semigrupo de calor de Neumann. Dado que se está tratando con un problema de frontera con condiciones de frontera sin flujo, en el caso del semigrupo de calor con condiciones de frontera de tipo Neumann se requieren estimaciones más precisas que en el caso del semigrupo de calor con condición de frontera de tipo Dirichlet (ver Lemas 1.1 y 1.2 más adelante). Algunas de estas estimaciones requieren la condición de media cero, lo que conlleva algunas dificultades a la hora de abordar la formulación

²¹ A. LUNARDI. *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1995.

integral en (6). Para superar este obstáculo, siguiendo las ideas de ¹⁸, se empleará el espacio cociente L^p / \sim de clases de equivalencia de funciones en espacios L^p cuya diferencia es una constante; y luego, se considerará el semigrupo de calor de Neumann sobre L^p / \sim y se usarán sus propiedades de decaimiento temporal. Es bien conocido que si Ω es un dominio acotado de \mathbb{R}^d , la función de Green $G(x, t; \xi, \tau)$ asociada a la ecuación de calor con condición de frontera de Neumann se puede expresar mediante una expansión de funciones propias. Considere el problema de valores propios

$$\begin{cases} -\Delta \Psi &= \lambda \Psi \text{ en } \Omega, \\ \partial_\nu \Psi &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Los valores propios son no negativos, y cero es un valor propio al que corresponde la función propia constante. Denotando por $\{\lambda_i\}_{i=0}^\infty$ la sucesión creciente de valores propios y $\{\Psi_i\}_{i=0}^\infty$ las funciones propias ortonormales, se tiene que (ver ²²)

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i(\mathbf{x}) \Psi_i(\mathbf{y}) e^{-\lambda_i(t-\tau)}.$$

En la notación de semigrupos, se cumple que $e^{t\Delta} w = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{y}, 0) w(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$.

Lema 1.1 ¹⁸ *Sea $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ el semigrupo de calor en Ω con condición de Neumann y $\rho_1 = \inf\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$. Entonces, existen constantes positivas $C_1, C_2,$ y C_3 tales que*

1. *Para $1 \leq q \leq p \leq \infty$ se cumple*

$$\|e^{t\Delta} w\|_{L^p} \leq C_1 t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} e^{-\rho_1 t} \|w\|_{L^q}, \quad (7)$$

para todo $t > 0$ y $w \in L^q(\Omega)$ que satisfacen $\int_{\Omega} w = 0$.

²² X. MORA. "Semilinear parabolic problems define semiflows on C^k spaces". En: *Transactions of the American Mathematical Society* 278 (1983), págs. 21-55.

2. Para $1 \leq q \leq p \leq \infty$ se cumple

$$\|\nabla e^{t\Delta} w\|_{L^p} \leq C_2 t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} e^{-\rho_1 t} \|w\|_{L^q}, \quad (8)$$

para todo $t > 0$ y $w \in L^q(\Omega)$.

3. Para $1 < q \leq p < \infty$ o $1 < q < p \leq \infty$ se cumple

$$\|e^{t\Delta} \nabla \cdot \mathbf{w}\|_{L^p} \leq C_3 t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} e^{-\rho_1 t} \|\mathbf{w}\|_{L^q}, \quad (9)$$

para todo $t > 0$ y $\mathbf{w} \in C_0^\infty(\Omega)$. Por lo tanto, para todo $t > 0$ el operador $e^{t\Delta} \nabla \cdot$ se extiende únicamente desde $L^q(\Omega)$ a $L^p(\Omega)$ con norma acotada por $C_3 t^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} e^{-\rho_1 t}$. Aquí $\nabla \cdot$ denota el operador de divergencia.

Para $1 \leq p \leq \infty$, se considera el conjunto L^p / \sim de todas las clases de equivalencia $[f]$ de funciones $f \in L^p(\Omega)$ cuya diferencia es una constante, es decir, si $f \in L^p(\Omega)$, entonces $g \in [f]$ si, y solo si, $f - g$ es una constante. El conjunto L^p / \sim dotado de la suma y el producto escalar definidos respectivamente por $[f] + [g] = [f + g]$ y $a[f] = [af]$, $a \in \mathbb{R}$, define un espacio vectorial. Además, el producto en L^p / \sim se define por $[f][g] = [(f - \bar{f})(g - \bar{g})]$, donde $\bar{f} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f$ y $\bar{g} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega g$. Más aún, L^p / \sim es un espacio de Banach con la norma

$$\|[f]\|_{L^p / \sim} := \inf\{\|f + c\|_{L^p} : c \text{ es una constante}\}.$$

Para $f \in L^p(\Omega)$ fijo, el mapeo $c \mapsto c + f$ es continuo desde \mathbb{R} a $L^p(\Omega)$. Por lo tanto, observando que la norma $\|\cdot\|_p$ define una función continua en $L^p(\Omega)$, se obtiene que para cada $[f] \in L^p / \sim$ existe $f^* \in [f]$ tal que $\|f^*\|_q = \|[f]\|_{q/\sim}$. Además, para $w \in L^p / \sim$, se cumple que $e^{t\Delta}[w] = [e^{t\Delta}w]$; entonces, el semigrupo de calor $e^{t\Delta}$ se puede extender naturalmente a L^p / \sim definiendo $e^{t\Delta}[w] = [e^{t\Delta}w]$ para $w \in L^p / \sim$. El siguiente lema proporciona una propiedad de decaimiento en tiempo de $e^{t\Delta}$ de

L^p / \sim en L^q / \sim .

Lema 1.2 ¹⁸ Sea $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ el semigrupo de calor en Ω con condición de Neumann. Entonces, para $1 \leq q \leq p \leq \infty$ existe una constante positiva $C = C(\Omega, p, q) > 0$ tal que

$$\|e^{t\Delta}[w]\|_{L^p/\sim} \leq Ct^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} e^{-\rho_1 t} \|[w]\|_{L^q/\sim}, \quad (10)$$

para todo $[w] \in L^q / \sim$.

Ahora se definen los espacios funcionales donde se analizará el sistema integral (6). Para $d < r \leq \infty$ y $0 < T \leq \infty$, se define el espacio de Banach \mathbf{X} de datos iniciales por

$$\mathbf{X} := \left\{ [[z_0], [b_0]] \in (L^\infty / \sim) \times (L^{d/2} / \sim) : \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2r}} \|\nabla e^{t\Delta} z_0\|_{L^r} < \infty \right\}, \quad (11)$$

con la norma $\|[[z_0], [b_0]]\|_{\mathbf{X}} := \|[z_0]\|_{\mathcal{X}_1} + \|[b_0]\|_{\mathcal{X}_2}$, donde

$$\begin{cases} \|[z_0]\|_{\mathcal{X}_1} := \|[z_0]\|_{L^\infty/\sim} + \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2r}} \|\nabla e^{t\Delta} z_0\|_{L^r}, \\ \|[b_0]\|_{\mathcal{X}_2} := \|[b_0]\|_{L^{d/2}/\sim}. \end{cases}$$

Para $d < p, r \leq \infty$ y $d/2 < q \leq \infty$, se considera el espacio de Banach \mathbf{Y} definido por

$$\mathbf{Y} := \left\{ [[z], [b]] : z \in L^\infty([0, T]; L^\infty), t^{1-\frac{d}{2q}} b \in BC([0, T]; L^q), t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2r}} \nabla b \in BC([0, T]; L^r) \right\} \quad (12)$$

dotado de la norma

$$\|[[z], [b]]\|_{\mathbf{Y}} := \|[z]\|_{\mathcal{Y}_1} + \|[b]\|_{\mathcal{Y}_2},$$

donde

$$\begin{cases} \| [z] \|_{\mathcal{Y}_1} := \sup_{0 < t < T} \| [z(t)] \|_{L^\infty / \sim}, \\ \| [b] \|_{\mathcal{Y}_2} := \sup_{0 < t < T} t^{1 - \frac{d}{2q}} \| [b(t)] \|_{L^q / \sim} + \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{2} - \frac{d}{2r}} \| \nabla b(t) \|_{L^r}. \end{cases}$$

De ahora en adelante, se denotarán las funciones en L^p y sus clases de equivalencia en L^p / \sim de la misma manera, es decir, se escribirá $[z, b] \in \mathbf{Y}$ en lugar de $[[z], [b]] \in \mathbf{Y}$. Ahora, se establece con precisión la noción de solución blanda para el modelo (3).

Definición 1.1 *Sea $[z_0, b_0] \in \mathbf{X}$. Una solución blanda para el problema de valor inicial (3) es un par $[z, b] \in \mathbf{Y}$ que satisface el sistema integral (6), donde cada ecuación debe entenderse en el sentido de clases de equivalencia.*

1.2. EXISTENCIA DE SOLUCIÓN

Teorema 1.1 *Suponga que $d < \min\{r, 2q\}$ y $\frac{1}{d} > \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$. Sea $0 < T < \infty$ arbitrario y $[z_0, b_0] \in \mathbf{X}$. Existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que si $\| [z_0, b_0] \|_{\mathbf{X}} < \delta_1$ y $\mu_1(1 + \beta + \lambda R) < \delta_2$, entonces el problema (5) tiene una única solución blanda $[z, b]$ en una bola cerrada adecuada en \mathbf{Y} . Si Ω es de clase $C^{2,\kappa}$, $\kappa > 0$, y $z_0, b_0 \in C^{2,\kappa}(\overline{\Omega})$, entonces la solución blanda es clásica, es decir, $z, b \in C([0, T]; C^{2,\kappa}(\overline{\Omega}))$ y $\partial_t z, \partial_t b \in C([0, T]; C^{0,\kappa}(\overline{\Omega}))$. Además, si $b_0 \geq 0$ en c.t.p. en Ω , entonces $b \geq 0$, y también, si $\beta = 0$ y $w_0 \geq 0$ en c.t.p. en Ω , entonces la solución w de (3) no es negativa.*

Demostración del Teorema 1.1.

Primero se estimará cada término en el sistema integral (6) en la norma del espacio \mathbf{Y} . Del Lema 1.2 se obtiene

$$\| e^{-t} e^{t\Delta} z_0 \|_{L^\infty} \leq C \| z_0 \|_{L^\infty}, \quad (13)$$

donde C no depende de t . Por otro lado, por las condiciones impuestas sobre p, r y

d , se tiene que $\frac{1}{2} - \frac{d}{2r} > 0$, $1 - \frac{d}{2q} > 0$; así, de los Lemas 1.1 y 1.2 se deduce

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\beta \Delta b + \lambda(R-z)b)(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty} \\
& \leq \left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\beta \nabla \cdot \nabla b)(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty} + \left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\lambda(R-z)b)(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty} \\
& \leq C\beta \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{d}{2r}-\frac{1}{2}} \|\nabla b\|_{L^r} d\tau + C\lambda \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{d}{2q}} (\|R\|_{L^\infty} + \|z\|_{L^\infty}) \|b\|_{L^q} d\tau \\
& \leq C\beta \left(\sup_{0 < \tau < T} \tau^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2r}} \|\nabla b(\tau)\|_{L^r} \right) \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{d}{2r}} \tau^{-\frac{1}{2}+\frac{d}{2r}} d\tau \\
& \quad + C\lambda \left(\sup_{0 < \tau < T} \tau^{1-\frac{d}{2q}} \|b(\tau)\|_{L^q} \right) \left(R + \sup_{0 < \tau < T} \|z(\tau)\|_{L^\infty} \right) \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{d}{2q}} \tau^{-1+\frac{d}{2q}} d\tau \\
& \leq C\beta \left(\sup_{0 < \tau < T} \tau^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2r}} \|\nabla b(\tau)\|_{L^r} \right) B\left(\frac{1}{2} - \frac{d}{2r}, \frac{1}{2} + \frac{d}{2r}\right) \\
& \quad + C\lambda \left(\sup_{0 < \tau < T} \tau^{1-\frac{d}{2q}} \|b(\tau)\|_{L^q} \right) \left(R + \sup_{0 < \tau < T} \|z(\tau)\|_{L^\infty} \right) B\left(1 - \frac{d}{2q}, \frac{d}{2q}\right), \quad (14)
\end{aligned}$$

donde $C = C(d, q, r) > 0$ y $B(\cdot, \cdot)$ denota la función beta. Usando (13) y (14), se concluye que existe $C = C(d, q, r) > 0$ tal que

$$\|z\|_{\mathcal{Y}_1} \leq C (\|z_0\|_{\mathcal{X}_1} + (\beta + \lambda R) \|b\|_{\mathcal{Y}_2} + \lambda \|z\|_{\mathcal{Y}_1} \|b\|_{\mathcal{Y}_2}). \quad (15)$$

Ahora se obtendrán estimaciones para la variable b . Del Lema 1.2 se deduce que

$$\|e^{(R-\mu_0)t} e^{t\Delta} b_0\|_{L^q} \leq C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} t^{-1+\frac{d}{2q}} \|b_0\|_{L^{d/2}}. \quad (16)$$

Por otro lado, de las condiciones impuestas sobre d, q, r , se cumple que $1 > \frac{d}{2q}$ y

$\frac{1}{2} > \frac{d}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})$. Así, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{(t-\tau)(R-\mu_0)} e^{(t-\tau)\Delta} \left(zb + \frac{\mu_1 b}{1+|b|} \right) d\tau \right\|_{L^q} \\
& \leq C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} \left(\|z(\tau)\|_{L^\infty} + \mu_1 \left\| \frac{1}{1+|b|}(\tau) \right\|_{L^\infty} \right) \|b(\tau)\|_{L^q} d\tau \\
& \leq C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} \left(\sup_{0<\tau<T} \tau^{1-\frac{d}{2q}} \|b(\tau)\|_{L^q} \right) \\
& \quad \times \left(\sup_{0<\tau<T} \|z(\tau)\|_{L^\infty} + \sup_{0<\tau<T} \left\| \frac{\mu_1}{1+|b|}(\tau) \right\|_{L^\infty} \right) \int_0^t \tau^{-1+\frac{d}{2q}} d\tau \\
& \leq C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} \left(\sup_{0<\tau<T} \tau^{1-\frac{d}{2q}} \|b(\tau)\|_{L^q} \right) \\
& \quad \times \left(\sup_{0<\tau<T} \|z(\tau)\|_{L^\infty} + \sup_{0<\tau<T} \left\| \frac{\mu_1}{1+|b|}(\tau) \right\|_{L^\infty} \right) t^{-1+\frac{d}{2q}} T, \tag{17}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \left\| \nabla \int_0^t e^{(t-\tau)(R-\mu_0)} e^{(t-\tau)\Delta} \left(zb + \frac{\mu_1 b}{1+|b|} \right) d\tau \right\|_{L^r} \\
& \leq C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}} \left(\|z(\tau)\|_{L^\infty} + \mu_1 \left\| \frac{1}{1+|b|}(\tau) \right\|_{L^\infty} \right) \|b(\tau)\|_{L^q} d\tau \\
& \leq C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} \left(\sup_{0<\tau<T} \tau^{1-\frac{d}{2q}} \|b(\tau)\|_{L^q} \right) \\
& \quad \times \left(\sup_{0<\tau<T} \|z(\tau)\|_{L^\infty} + \mu_1 \sup_{0<\tau<T} \left\| \frac{1}{1+|b|}(\tau) \right\|_{L^\infty} \right) \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}} \tau^{-1+\frac{d}{2q}} d\tau \\
& \leq C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} \left(\sup_{0<\tau<T} \tau^{1-\frac{d}{2q}} \|b(\tau)\|_{L^q} \right) \\
& \quad \times \left(\sup_{0<\tau<T} \|z(\tau)\|_{L^\infty} + \mu_1 \sup_{0<\tau<T} \left\| \frac{1}{1+|b|}(\tau) \right\|_{L^\infty} \right) t^{\frac{d}{2r}-\frac{1}{2}} B \left(\frac{1}{2} - \frac{d}{2} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right), \frac{d}{2q} \right). \tag{18}
\end{aligned}$$

Las constantes $C > 0$ en (17) y (18) son independientes de T . Usando (16), (17), (18) y teniendo en cuenta que $\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}-\frac{d}{2r}} \|\nabla e^{t\Delta} b_0\|_{L^r} < \infty$, se concluye la existencia

de $C = C(d, q, r) > 0$ tal que

$$\|b\|_{\mathcal{Y}_2} \leq C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} (\|b_0\|_{\mathcal{X}_2} + \mu_1 \|b\|_{\mathcal{Y}_2} + \|z\|_{\mathcal{Y}_1} \|b\|_{\mathcal{Y}_2}). \quad (19)$$

Seguidamente, se probará la existencia de solución blanda global como límite del siguiente esquema iterativo:

$$\begin{cases} z^{(1)} = e^{-t} e^{t\Delta} z_0, & b^{(1)} = e^{(R-\mu_0)t} e^{t\Delta} b_0, \\ z^{(k+1)} = z^{(1)} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\beta \Delta b^{(k+1)} + \lambda(R - z^{(k)})b^{(k)})(\tau) d\tau, \\ b^{(k+1)} = b^{(1)} - \int_0^t e^{(R-\mu_0)(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} \left(z^{(k)} b^{(k)} + \frac{\mu_1 b^{(k)}}{1 + |b^{(k)}|} \right) (\tau) d\tau. \end{cases} \quad (20)$$

Observe que, aplicando las estimaciones (15) y (19) a (20), se tiene

$$\|b^{(k+1)}\|_{\mathcal{Y}_2} \leq C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} (\|b_0\|_{\mathcal{X}_2} + \mu_1 \|b^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} + \|z^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|b^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2}), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \|z^{(k+1)}\|_{\mathcal{Y}_1} &\leq C (\|z_0\|_{\mathcal{X}_1} + (\beta + \lambda R) \|b^{(k+1)}\|_{\mathcal{Y}_2} + \lambda \|z^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|b^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2}) \\ &\leq C (\|z_0\|_{\mathcal{X}_1} + (\beta + \lambda R) C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} (\|b_0\|_{\mathcal{X}_2} + \mu_1 \|b^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} + \|z^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|b^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2})) \\ &\quad + C \lambda \|z^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|b^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} \\ &\leq C (\|z_0\|_{\mathcal{X}_1} + (\beta + \lambda R) C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} \|b_0\|_{\mathcal{X}_2}) \\ &\quad + \mu_1 (\beta + \lambda R) C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} \|b^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} \\ &\quad + C \max\{\lambda, (\beta + \lambda R) C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\}\} \|z^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|b^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Sea $a_k = \|[z^{(k)}, b^{(k)}]\|_{\mathcal{Y}}$, $k = 1, 2, \dots$, $a_0 = \|[z_0, b_0]\|_{\mathcal{X}}$. Entonces, de (22) se deduce que

$$a_{k+1} \leq \tilde{C}_0 + \tilde{C}_1 a_k + \tilde{C}_2 a_k^2,$$

donde las constantes \tilde{C}_i ($i = 0, 1, 2$) están dadas por

$$\tilde{C}_0 = Ca_0 \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}, (\beta + \lambda R) \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\}\},$$

$$\tilde{C}_1 = \mu_1(1 + \beta + \lambda R)C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\},$$

$$\tilde{C}_2 = C \max\{\lambda, e^{(R-\mu_0)T}, (\beta + \lambda R)C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\}\}.$$

Por lo tanto, si $\tilde{C}_1 < 1$ y $4\tilde{C}_0\tilde{C}_2 < (1 - \tilde{C}_1)^2$, la sucesión $a_k = \|[z^{(k)}, b^{(k)}]\|_Y$ está uniformemente acotada y

$$\|[z^{(k)}, b^{(k)}]\|_Y \leq \frac{(1 - \tilde{C}_1) - \sqrt{(1 - \tilde{C}_1)^2 - 4\tilde{C}_0\tilde{C}_2}}{2\tilde{C}_2} := m < \frac{1}{2\tilde{C}_2}. \quad (23)$$

A continuación, se probará una cota para la diferencia $[z^{(k+1)} - z^{(k)}, b^{(k+1)} - b^{(k)}]$.

Para la segunda componente se tiene que

$$\begin{aligned} & b^{(k+1)} - b^{(k)} \\ &= \int_0^t e^{(R-\mu_0)(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} \left((z^{(k-1)}b^{(k-1)} - z^{(k)}b^{(k)}) + \mu_1 \left(\frac{b^{(k-1)}}{1 + |b^{(k-1)}|} - \frac{b^{(k)}}{1 + |b^{(k)}|} \right) \right) (\tau) d\tau, \end{aligned}$$

de lo cual, siguiendo (19), (21) y (23), se llega a

$$\begin{aligned} \|b^{(k+1)} - b^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} &\leq Ce^{(R-\mu_0)T} (\|b^{(k-1)}\|_{\mathcal{Y}_2} \|z^{(k-1)} - z^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} + \|b^{(k-1)} - b^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} \|z^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}) \\ &\quad + \mu_1 C \|b^{(k-1)} - b^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} \\ &\leq C(m + \mu_1) \|[z^{(k)} - z^{(k-1)}, b^{(k)} - b^{(k-1)}]\|_Y. \end{aligned} \quad (24)$$

Para acotar $z^{(k+1)} - z^{(k)}$ note que

$$\begin{aligned} & z^{(k+1)} - z^{(k)} \\ &= \int_0^t e^{-(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\beta\Delta(b^{(k+1)} - b^{(k)}) + \lambda R(b^{(k)} - b^{(k-1)}) - z^{(k)}b^{(k)} + z^{(k-1)}b^{(k-1)}) (\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Entonces, siguiendo (15) y (22), junto con (24) se obtiene que

$$\begin{aligned} \|z^{(k+1)} - z^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} &\leq C\mu_1(\beta + \lambda R) \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} \|b^{(k)} - b^{(k-1)}\|_{\mathcal{Y}_2} \\ &\quad + C \max\{\lambda, (\beta + \lambda R)C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\}\} \\ &\quad \times (\|z^{(k)} - z^{(k-1)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|b^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} + \|z^{(k-1)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|b^{(k)} - b^{(k-1)}\|_{\mathcal{Y}_2}). \end{aligned} \quad (25)$$

De (23), (24) y (25) se llega a

$$\| [z^{(k+1)} - z^{(k)}, b^{(k+1)} - b^{(k)}] \|_{\mathcal{Y}} \leq \tilde{C}(m + \mu_1) \| [z^{(k)} - z^{(k-1)}, b^{(k)} - b^{(k-1)}] \|_{\mathcal{Y}}, \quad (26)$$

donde $\tilde{C} = \tilde{C}(1 + (\beta + \lambda R) \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\} + \max\{\lambda, (\beta + \lambda R)C \max\{1, e^{(R-\mu_0)T}\})$. Reduciendo los datos (si es necesario), podemos tomar m, μ_1 tales que $m + \mu_1 < \frac{1}{\tilde{C}}$, y se concluye que la sucesión $[z^{(k)}, b^{(k)}]$, $k \in \mathbb{N}$, es una sucesión de Cauchy en \mathcal{Y} . Por lo tanto, el límite $[z, b]$ es la única solución blanda en la bola cerrada $\{[z, b] \in \mathcal{Y} : \|[z, b]\|_{\mathcal{Y}} \leq m\}$. La regularidad de la solución blanda se obtiene mediante el uso de regularidad parabólica (ver Teoremas 10.22 y 10.23 en ²³) e inmersiones de Sobolev. Finalmente, multiplicando la segunda ecuación en (3) por $b_- = \min\{0, b\}$, e integrando por partes, se encuentra que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|b_-(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla b_-(t)\|_{L^2}^2 + \mu_0 \|b_-(t)\|_{L^2}^2 + \mu_1 \int_{\Omega} \frac{(b_-(t))^2}{1 + |b(t)|} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} w(b_-(t))^2 d\mathbf{x},$$

de lo cual se deduce que

$$\frac{d}{dt} \|b_-(t)\|_{L^2}^2 \leq \|w(t)\|_{L^\infty} \|b_-(t)\|_{L^2}^2.$$

Luego, usando la desigualdad de Gronwall y el hecho de que $b_0 \geq 0$ en c.t.p. en Ω ,

²³ E. FEIREISL y A. NOVOTNÝ. *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids. Advances in Mathematical Fluid Mechanics*. Birkhäuser Verlag, 2009.

de la última desigualdad se concluye que $\|b_-(t)\|_{L^2} = 0$, es decir, $b \geq 0$ en c.t.p. en Ω . La prueba de la no negatividad de $w = R - z$ es análoga.

□

2. ANÁLISIS NUMÉRICO DEL MODELO AGUA-PLANTA

En este capítulo, se presentarán los resultados obtenidos desde el punto de vista del análisis numérico para el modelo de vegetación agua-planta definido en (3); específicamente se propone un esquema numérico que permite aproximar las soluciones del sistema. Para este esquema se introduce una nueva variable dada por el gradiente de la densidad de vegetación, permitiendo tratar el término de difusión cruzada presente en la ecuación de densidad de agua. Se prueban algunas propiedades cualitativas tales como el buen planteamiento y la no negatividad de las variables discretas. Así mismo, se realiza un análisis de error para el esquema de aproximación numérica definido, y se realizan algunas simulaciones para validar el buen comportamiento del esquema y los resultados teóricos obtenidos. Estos resultados son nuevos y se encuentran plasmados en ¹⁹ y ²⁰.

2.1. FORMULACIÓN DÉBIL EQUIVALENTE

Dado que uno de los objetivos principales de este trabajo es abordar el análisis numérico del sistema (3), se observa una dificultad al lidiar con el término no lineal de difusión cruzada $-\beta\Delta b$, en la ecuación de densidad de agua (3)₁. De hecho, no está claro cómo realizar un análisis de órdenes óptimos de convergencia en un esquema de elementos finitos basado en la formulación variacional clásica. Así, para superar esta dificultad, se introduce una variable auxiliar dada por el gradiente de la densidad de biomasa, $\sigma = \nabla b$, lo cual permite obtener la siguiente formulación débil

equivalente para las variables w , σ y b :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \partial_t w, \bar{w} \rangle + D_w(\nabla w, \nabla \bar{w}) = D_w \beta(\sigma, \nabla \bar{w}) + (R, \bar{w}) - \lambda(wb, \bar{w}) - (w, \bar{w}), \\ \langle \partial_t \sigma, \bar{\sigma} \rangle + D_b(\nabla \cdot \sigma, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + D_b(\text{rot } \sigma, \text{rot } \bar{\sigma}) + \mu_0(\sigma, \bar{\sigma}) \\ = (\nabla wb, \bar{\sigma}) + (w\sigma, \bar{\sigma}) - \mu_1 \left(\frac{\sigma}{(1+b)^2}, \bar{\sigma} \right), \\ \langle \partial_t b, \bar{b} \rangle + D_b(\nabla b, \nabla \bar{b}) = ([w]_+ b, \bar{b}) - \mu_0(b, \bar{b}) - \mu_1 \left(\frac{b}{1+|b|}, \bar{b} \right), \end{array} \right. \quad (27)$$

para todo $\bar{w} \in H^1(\Omega)$, $\bar{\sigma} \in \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega)$ y $\bar{b} \in H^1(\Omega)$, donde la ecuación (27)₂ se obtiene aplicando el operador gradiente de la ecuación (3)₂, y el espacio $\mathbf{H}_\sigma^1(\Omega)$ se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{H}_\sigma^1(\Omega) := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{v} \cdot \nu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \},$$

con la norma (ver ²⁴, Corolario 3.5):

$$\|\sigma\|_{\mathbf{H}^1}^2 = \|\sigma\|_{L^2}^2 + \|\text{rot } \sigma\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot \sigma\|_{L^2}^2, \quad \forall \sigma \in \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega). \quad (28)$$

2.2. ESQUEMA NUMÉRICO

En esta sección, se construye y se analiza un esquema numérico para aproximar las soluciones débiles del modelo matemático que describe la interacción entre la vegetación y el agua del suelo en ambientes áridos (3). Con este fin, para la discretización temporal, se asume una partición de $[0; T]$ con paso del tiempo $\Delta t = T/N$, donde $(t_n = n\Delta t)_{n=0}^{n=N}$. Para la discretización del espacio, se considera una familia de triangulaciones cuasiuniformes de $\bar{\Omega}$, $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$, formadas por símplices K (triángulos

²⁴ C. AMROUCHE y N. E. H SELOULA. “ L^p -theory for vector potentials and Sobolev’s inequalities for vector fields: application to the Stokes equations with pressure boundary conditions”. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 23 (2013), págs. 37-92.

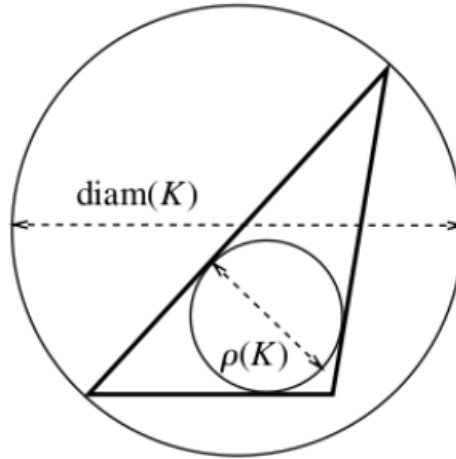


Figura 1. $\text{diam}(K)$ y $\rho(K)$ para un triángulo en K en \mathbb{R}^2 .

2D y tetraedos en 3D) con ángulos interiores menores o iguales que $\pi/2$ (triangulaciones no obtusas), tales que $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$, donde $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, siendo h_K el diámetro de K . Recordemos que una triangulación $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de Ω es llamada cuasi-uniforme, si existen constantes positivas C_1, C_2 , tales que para cada $K \in \{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$,

$$C_1 h \leq \rho(K) \quad \text{y} \quad \text{diam}(K) \leq C_2 h,$$

donde $\rho(K)$ es el diámetro del mayor círculo inscrito en K y $\text{diam}(K)$ es el diámetro del menor círculo que contiene a K (ver ²⁵, pág. 107). La condición de que la triangulación sea cuasiuniforme se requiere para el uso de desigualdades inversas (ver (33)). Se consideran los siguientes espacios de elementos finitos para $[w, \sigma, b]$:

²⁵ S. R. BRENNER. *The mathematical theory of finite element methods Vol. 15*. Springer Science Business Media, 2007.

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_w &= \{w \in C(\bar{\Omega}) : w|_K \in \mathbb{P}_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega), \\ \mathcal{X}_\sigma &= \{\sigma \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) : \sigma|_K \in \mathbb{P}_r \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega), \\ \mathcal{X}_b &= \{b \in C(\bar{\Omega}) : b|_K \in \mathbb{P}_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega),\end{aligned}$$

con $r \geq 1$, donde en general \mathbb{P}_r denota el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que r . Además, se denota el conjunto de todos los nodos de \mathcal{T}_h por $\mathcal{N}_h = \{a_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ y las funciones base estándar para \mathcal{X}_w y \mathcal{X}_b por $\{\varphi_{a_j}\}_{j \in \mathcal{J}}$.

2.2.1. Operadores de interpolación. Se consideran los siguientes operadores de interpolación

$$\mathcal{R}_w : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_w, \quad \mathcal{R}_\sigma : \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_\sigma, \quad \mathcal{R}_b : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_b,$$

tales que, para todo $w \in H^1(\Omega)$, $\sigma \in \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega)$ y $b \in H^1(\Omega)$, $\mathcal{R}_w w \in \mathcal{X}_w$, $\mathcal{R}_\sigma \sigma \in \mathcal{X}_\sigma$ y $\mathcal{R}_b b \in \mathcal{X}_b$ satisfacen

$$\begin{cases} D_w (\nabla (\mathcal{R}_w w - w), \nabla \bar{w}) + (\mathcal{R}_w w - w, \bar{w}) = 0, \\ D_b (\nabla \cdot (\mathcal{R}_\sigma \sigma - \sigma), \nabla \cdot \bar{\sigma}) + D_b (\text{rot} (\mathcal{R}_\sigma \sigma - \sigma), \text{rot} \bar{\sigma}) + \mu_0 (\mathcal{R}_\sigma \sigma - \sigma, \bar{\sigma}) = 0, \\ D_b (\nabla (\mathcal{R}_b b - b), \nabla \bar{b}) + \mu_0 (\mathcal{R}_b b - b, \bar{b}) = 0, \end{cases} \quad (29)$$

para todo $\bar{w} \in \mathcal{X}_w$, $\bar{\sigma} \in \mathcal{X}_\sigma$ y $\bar{b} \in \mathcal{X}_b$. No es difícil ver que los operadores de interpolación están bien definidos como consecuencia del Teorema de Lax-Milgram. En efecto, por ejemplo para el operador de interpolación \mathcal{R}_w , considerando la forma bilineal

$$\begin{aligned}a : \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_w &\rightarrow \mathbb{R} \\ [\omega, \bar{w}] &\rightarrow (\omega, \bar{w}) + (\nabla \omega, \nabla \bar{w}),\end{aligned}$$

se tiene que $a(\cdot, \cdot)$ es continua y coerciva. Además, dado $w \in H^1(\Omega)$, el funcional $f_w : \mathcal{X}_w \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f_w(\bar{w}) = (w, \bar{w}) + (\nabla w, \nabla \bar{w})$ pertenece a $(\mathcal{X}_w)'$. Por lo tanto, el Teorema de Lax-Milgram implica que existe un único elemento en \mathcal{X}_w , denotado por $\mathcal{R}_w w$, tal que $a(\mathcal{R}_w w, \bar{w}) = f_w(\bar{w})$, para todo $\bar{w} \in \mathcal{X}_w$. Además, se cumplen los

siguientes errores de interpolación (ver ²⁵):

$$\begin{cases} \|w - \mathcal{R}_w w\|_{L^2} + h \|w - \mathcal{R}_w w\|_{H^1} \leq Ch^2 \|w\|_{H^2}, & \forall w \in H^2(\Omega), \\ \|\sigma - \mathcal{R}_\sigma \sigma\|_{L^2} + h \|\sigma - \mathcal{R}_\sigma \sigma\|_{H^1} \leq Ch^{r+1} \|\sigma\|_{H^{r+1}}, & \forall \sigma \in \mathbf{H}^{r+1}(\Omega), \\ \|b - \mathcal{R}_b b\|_{L^2} + h \|b - \mathcal{R}_b b\|_{H^1} \leq Ch^2 \|b\|_{H^2}, & \forall b \in H^2(\Omega), \end{cases} \quad (30)$$

y las siguientes propiedades de estabilidad

$$\|[\mathcal{R}_w w, \mathcal{R}_\sigma \sigma, \mathcal{R}_b b]\|_{H^1} \leq \|[w, \sigma, b]\|_{H^1}, \quad (31)$$

$$\|[\mathcal{R}_w w, \mathcal{R}_\sigma \sigma, \mathcal{R}_b b]\|_{W^{1,6}} \leq C \|[w, \sigma, b]\|_{H^2}. \quad (32)$$

La desigualdad (31) se puede deducir de (29). Por ejemplo, tomando $\bar{w} = \mathcal{R}_w w$ en (29)₁ se obtiene

$$(\nabla \mathcal{R}_w w, \nabla \mathcal{R}_w w) + (\mathcal{R}_w w, \mathcal{R}_w w) - (\nabla w, \nabla \mathcal{R}_w w) - (w, \mathcal{R}_w w) = 0.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_w w\|_{H^1}^2 &\leq \|\nabla w\|_{L^2} \|\nabla \mathcal{R}_w w\|_{L^2} + \|w\|_{L^2} \|\mathcal{R}_w w\|_{L^2} \\ &\leq C \|w\|_{H^1} \|\mathcal{R}_w w\|_{H^1}, \end{aligned}$$

de lo cual se concluye que

$$\|\mathcal{R}_w w\|_{H^1} \leq \|w\|_{H^1}.$$

De forma análoga se deducen las desigualdades para las variables σ y b . La desigualdad (32), por ejemplo de la variable w , se puede obtener de (30)₁ usando la desigualdad inversa

$$\|w_h\|_{W^{1,6}} \leq Ch^{-p} \|w_h\|_{H^1} \text{ para todo } w_h \in \mathcal{X}_w, \quad (33)$$

con $p = 2/3$ (en el caso 2D) y $p = 1$ (en el caso 3D), y comparando R_w con un interpolador de promedios de tipo Clement o Scott-Zhang (que son estables en la norma del espacio $W^{1,6}$) (ver ²⁵ y ²⁶). Nuevamente, de manera similar, se deducen las desigualdades para las variables w, σ y b .

Se denota el operador de interpolación nodal por $I_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{X}_z$ (para la variable general $z = w, b$), el cual se define como

$$I_h(m(\mathbf{x})) = \sum_{j \in J} m(a_j) \varphi_{a_j}(\mathbf{x}).$$

Se introduce el semi-producto interno en $C(\bar{\Omega})$, conocido en la literatura como *mass lumping* (que es un producto interno en \mathcal{X}_z) y su semi-norma inducida (norma en \mathcal{X}_z), de la siguiente manera:

$$(m_1, m_2)^h := \int_{\Omega} I_h(m_1 m_2) d\mathbf{x} = \sum_{j \in J} m_1(a_j) m_2(a_j) \varphi_{a_j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (34)$$

$$|m|_h = \sqrt{(m, m)^h}.$$

La condición de que \mathcal{X}_w y \mathcal{X}_b son generados por elementos finitos \mathbb{P}_1 y el uso del operador mass lumping (definido en (34)), son necesarios para obtener una formulación discreta adecuada para las variables discretas $[w_h, b_h]$, con el fin de garantizar la propiedad de no negatividad para las soluciones discretas. Además, se introduce el operador de proyección $Q_z^h : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_z$ (para la variable general $z = w, b$) definido, para cada $z \in L^2(\Omega)$, por

$$(Q_z^h z, \bar{z})^h = (z, \bar{z}), \quad \forall \bar{z} \in \mathcal{X}_z. \quad (35)$$

²⁶ E. SÜLI y D. F. MAYERS. *An introduction to numerical analysis*. Cambridge university press, 2003.

Observación 2.1 En \mathcal{X}_w y \mathcal{X}_b , las normas $|\cdot|_h$ y $\|\cdot\|_{L^2}$ son uniformemente equivalentes con respecto a h (ver ²⁷). Además, la siguiente propiedad es válida para todos $m_1, m_2 \in \mathcal{X}_w$ (o \mathcal{X}_b) (ver ²⁸):

$$|(m_1, m_2)^h - (m_1, m_2)| \leq Ch^2 \|m_1\|_{H^1} \|m_2\|_{H^1}. \quad (36)$$

2.2.2. Definición del esquema numérico. Teniendo en cuenta la formulación débil definida en (27), se considera el siguiente esquema numérico de primer orden en el tiempo, lineal y desacoplado:

- **Inicialización:** Sea $[w_h^0, \sigma_h^0, b_h^0] = [Q_w^h w_0, \mathcal{R}_\sigma \sigma_0, Q_b^h b_0] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_b$.
- **[Paso 1]** Dado el vector $[w_h^{n-1}, \sigma_h^{n-1}, b_h^{n-1}] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_b$, encontrar $w_h^n \in \mathcal{X}_w$ resolviendo, para todo $\bar{w} \in \mathcal{X}_w$,

$$(\delta_t w_h^n, \bar{w})^h + D_w(\nabla w_h^n, \nabla \bar{w}) + (w_h^n, \bar{w})^h = (R, \bar{w}) - \lambda(w_h^n b_h^{n-1}, \bar{w})^h + D_w \beta(\sigma_h^{n-1}, \nabla \bar{w}). \quad (37)$$

- **[Paso 2]** Dado $[w_h^n, b_h^{n-1}] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_b$, encontrar $b_h^n \in \mathcal{X}_b$ resolviendo, para todo $\bar{b} \in \mathcal{X}_b$,

$$(\delta_t b_h^n, \bar{b})^h + D_b(\nabla b_h^n, \nabla \bar{b}) + \mu_0(b_h^n, \bar{b})^h = ([w_h^n]_+ b_h^{n-1}, \bar{b}) - \mu_1 \left(\frac{b_h^n}{1 + b_h^{n-1}}, \bar{b} \right)^h. \quad (38)$$

²⁷ X. FENG R. BECKER y A. PROHL. “Finite element approximations of the Ericksen-Leslie model for nematic liquid crystal flow”. En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 46 (2008), págs. 1704-1731.

²⁸ J. W. BARRET y J. F. BLOWEY. “Finite element approximation of a nonlinear cross-diffusion population model”. En: *Numerische Mathematik* 98 (2004), págs. 195-221.

- **[Paso 3]** Dado $[w_h^n, \sigma_h^{n-1}, b_h^n] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_b$, encontrar $\sigma_h^n \in \mathcal{X}_\sigma$ resolviendo, para todo $\bar{\sigma} \in \mathcal{X}_\sigma$,

$$\begin{aligned} & (\delta_t \sigma_h^n, \bar{\sigma}) + D_b(\nabla \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + D_b(\text{rot } \sigma_h^n, \text{rot } \bar{\sigma}) + \mu_0(\sigma_h^n, \bar{\sigma}) \\ & = (\nabla w_h^n b_h^n, \bar{\sigma}) + (w_h^n \sigma_h^{n-1}, \bar{\sigma}) - \mu_1 \left(\frac{\sigma_h^n}{(1 + b_h^n)^2}, \bar{\sigma} \right), \end{aligned} \quad (39)$$

donde, en general, se denota $\delta_t a_h^n = \frac{a_h^n - a_h^{n-1}}{\Delta t}$ y $a_+ = \max\{a, 0\} \geq 0$.

Observación 2.2 Observe que si $w_0, b_0 \geq 0$, entonces $w_h^0, b_h^0 \geq 0$. De hecho, de (35) se tiene que

$$(w_h^0, \bar{w})^h = (Q_w^h w_0, \bar{w})^h = (w_0, \bar{w}), \quad \forall \bar{w} \in \mathcal{X}_w,$$

y luego, tomando $\bar{w} = I_h([w_h^0]_-) \in \mathcal{X}_w$, donde $[w_h^0]_- = \min\{w_h^0, 0\} \leq 0$, se llega a

$$\int_{\Omega} I_h([w_h^0]_-)^2 dx = (w_0, I_h([w_h^0]_-)) \leq 0,$$

lo que implica que $I_h([w_h^0]_-) = 0$, y por lo tanto, $w_h^0 \geq 0$. Procediendo de manera análoga, tenemos que $b_h^0 \geq 0$. El signo de σ_h^0 no será relevante en el análisis posterior.

2.2.3. Positividad y buen planteamiento. En esta subsección, se demuestra la buena postura del esquema numérico definido en (37)-(39), así como la propiedad de no negatividad para las soluciones biológicas discretas w_h^n y b_h^n . Específicamente, se prueba que la solución b_h^n de (38) es no negativa; mientras que esta propiedad solo es válida para la solución w_h^n de (37) en el caso $\beta = 0$. En el caso general $\beta \neq 0$, la no negatividad de w_h^n no está clara. De ahora en adelante, se usará la notación $a_- = \min\{a, 0\} \leq 0$.

Lema 2.1 (Positividad de b_h^n). Sea $(b_h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por el esquema (38).

Si $b_h^{n-1} \geq 0$, entonces $b_h^n \geq 0$.

Demostración: Tomando $\bar{b} = I_h([b_h^n]_-) \in \mathcal{X}_b$ en (38), se tiene

$$\begin{aligned} (\delta_t b_h^n, I_h([b_h^n]_-))^h + D_b(\nabla b_h^n, \nabla I_h([b_h^n]_-)) + \mu_0(b_h^n, I_h([b_h^n]_-))^h & \quad (40) \\ = ([w_h^n]_+ b_h^{n-1}, I_h([b_h^n]_-)) - \mu_1 \left(\frac{b_h^n}{1 + b_h^{n-1}}, I_h([b_h^n]_-) \right)^h. & \end{aligned}$$

Observe que, teniendo en cuenta la definición de $(\cdot, \cdot)^h$ (dada en (34)) el operador de interpolación nodal I_h , usando el hecho de que $b_h^n = I_h([b_h^n]_+) + I_h([b_h^n]_-)$, $[w_h^n]_+ \geq 0$, y teniendo en cuenta que $b_h^{n-1} \geq 0$ y $(I_h(b))^2 \leq I_h(b^2)$ para todo $b \in C(\bar{\Omega})$, se obtiene:

$$(\delta_t b_h^n, I_h([b_h^n]_-))^h = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} I_h([b_h^n]_-^2) d\mathbf{x} - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} I_h(b_h^{n-1} [b_h^n]_-) d\mathbf{x} \geq \frac{1}{\Delta t} \|I_h([b_h^n]_-)\|_{L^2}^2, \quad (41)$$

$$\mu_0(b_h^n, I_h([b_h^n]_-))^h = \mu_0 \int_{\Omega} I_h(([b_h^n]_-)^2) d\mathbf{x} \geq \mu_0 \|I_h([b_h^n]_-)\|_{L^2}^2, \quad (42)$$

$$([w_h^n]_+ b_h^{n-1}, I_h([b_h^n]_-)) \leq 0, \quad (43)$$

y

$$-\mu_1 \left(\frac{b_h^n}{1 + b_h^{n-1}}, I_h([b_h^n]_-) \right)^h = -\mu_1 \int_{\Omega} I_h \left(\frac{([b_h^n]_-)^2}{1 + b_h^{n-1}} \right) d\mathbf{x} \leq 0. \quad (44)$$

Además, utilizando la Proposición 2.5 de ²⁹ (aquí, es necesario utilizar que \mathcal{X}_b es generado por elementos finitos \mathbb{P}_1 y la triangulación espacial constituida por símlices con ángulos interiores no obtusos), se deduce que $(\nabla I_h([b_h^n]_+), \nabla I_h([b_h^n]_-)) \geq 0$, y entonces

$$D_b(\nabla b_h^n, \nabla I_h([b_h^n]_-)) \geq D_b \|\nabla I_h([b_h^n]_-)\|_{L^2}^2. \quad (45)$$

²⁹ F. GUILLÉN-GONZÁLEZ y J. V. GUTIÉRREZ-SANTACREU. "From a cell model with active motion to a Hele-Shaw-like system: a numerical approach". En: *Numerische Mathematik* 143 (2019), págs. 107-137.

Por lo tanto, de (40)-(45), se llega a

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + \mu_0\right) \|I_h([b_h^n]_-)\|_{L^2}^2 + D_b \|\nabla I_h([b_h^n]_-)\|_{L^2}^2 \leq 0,$$

lo que implica que $[b_h^n]_- = 0$, y por tanto, $b_h^n \geq 0$.

□

Lema 2.2 (Buena postura del esquema (37)-(39)). Dado $[w_h^{n-1}, b_h^{n-1}, \sigma_h^{n-1}] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_b \times \mathcal{X}_\sigma$, existe una única $[w_h^n, b_h^n, \sigma_h^n] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_b \times \mathcal{X}_\sigma$ solución del esquema (37)-(39).

Demostración: Teniendo en cuenta que (37)-(39) son sistemas algebraicos lineales, basta con demostrar la unicidad. Primero, dado $[w_h^{n-1}, b_h^{n-1}, \sigma_h^{n-1}] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_b \times \mathcal{X}_\sigma$, suponga que $w_{h,1}^n, w_{h,2}^n \in \mathcal{X}_w$ son dos posibles soluciones de (37); entonces, $w_{h,1}^n = w_{h,2}^n$ satisface

$$\frac{1}{\Delta t} (w_h^n, \bar{w})^h + D_w (\nabla w_h^n, \nabla \bar{w}) + (w_h^n, \bar{w})^h = -\lambda (b_h^{n-1} w_h^n, \bar{w})^h, \quad \forall \bar{w} \in \mathcal{X}_w, \quad (46)$$

de lo cual, tomando $\bar{w} = w_h^n$ en (46) y usando la observación 2.1, se cumple

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + 1\right) \|w_h^n\|_{L^2}^2 + D_w \|\nabla w_h^n\|_{L^2}^2 = -\lambda (b_h^{n-1}, (w_h^n)^2)^h \leq 0,$$

lo que implica que $w_{h,1}^n = w_{h,2}^n$. Similarmente, dado $[w_h^n, b_{h,1}^n, b_{h,2}^n] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_b$, si $b_{h,1}^n, b_{h,2}^n \in \mathcal{X}_b$ son dos soluciones de (38), entonces definiendo $b_h^n = b_{h,1}^n - b_{h,2}^n$, de (38) se obtiene

$$\frac{1}{\Delta t} (b_h^n, \bar{b})^h + D_b (\nabla b_h^n, \nabla \bar{b}) + \mu_0 (b_h^n, \bar{b})^h = -\mu_1 \left(\frac{b_h^n}{1 + b_h^{n-1}}, \bar{b}\right)^h, \quad \forall \bar{b} \in \mathcal{X}_b,$$

de lo cual, tomando $\bar{b} = b_h^n$ y usando el hecho de que $\mu_1 \left(\frac{1}{1 + b_h^{n-1}}, (b_h^n)^2\right)^h \geq 0$, se concluye que $b_{h,1}^n = b_{h,2}^n$. Finalmente, dado $[w_h^n, \sigma_{h,1}^n, \sigma_{h,2}^n] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_b$, si $\sigma_{h,1}^n, \sigma_{h,2}^n \in$

\mathcal{X}_σ son dos soluciones de (39), entonces $\sigma_h^n = \sigma_{h,1}^n - \sigma_{h,2}^n$ resuelve

$$\frac{1}{\Delta t}(\sigma_h^n, \bar{\sigma}) + D_b(\nabla \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + (\text{rot } \sigma_h^n, \text{rot } \bar{\sigma}) + \mu_0(\sigma_h^n, \bar{\sigma}) = -\mu_1 \left(\frac{\sigma_h^n}{(1+b_h^n)^2}, \bar{\sigma} \right),$$

para todo $\bar{\sigma} \in \mathcal{X}_\sigma$, y tomando $\bar{\sigma} = \sigma_h^n$ y usando el hecho de que $\left(\frac{1}{(1+b_h^n)^2}, (\sigma_h^n)^2 \right) \geq 0$, se deduce que $\sigma_h^n = 0$.

□

Lema 2.3 (Positividad de w_h^n en el caso $\beta = 0$). *Asuma $\beta = 0$ en (37) y sea $(w_h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por el esquema (37). Si $w_h^{n-1}, b_h^{n-1} \geq 0$, entonces $w_h^n \geq 0$.*

Demostración: Tomando $\bar{w} = I_h([w_h^n]_-) \in \mathcal{X}_w$ en (37), se obtiene

$$\begin{aligned} (\delta_t w_h^n, I_h([w_h^n]_-))^h + D_w(\nabla w_h^n, \nabla I_h([w_h^n]_-)) \\ + \lambda(w_h^n b_h^{n-1}, I_h([w_h^n]_-))^h + (w_h^n, I_h([w_h^n]_-))^h = (R, I_h([w_h^n]_-)). \end{aligned}$$

Luego, usando el hecho de que $R, \lambda, w_h^{n-1}, b_h^{n-1} \geq 0$ y procediendo análogamente como en (41)-(45), se deduce que $w_h^n \geq 0$.

□

2.3. ESTIMACIONES UNIFORMES

En esta sección, se obtienen estimaciones uniformes débiles y fuertes (independientes de los parámetros discretos $[\Delta t, h]$) para cualquier solución del esquema (37)-(39), las cuales se requieren para probar órdenes óptimos de convergencia. Específicamente, se requiere demostrar que b_h^n, w_h^n están uniformemente acotadas en $l^\infty(H^1) \cap l^2(W^{1,6})$ y $\delta_t b_h^n, \delta_t w_h^n$ están acotadas en $l^2(H^1)$ (ver estimaciones (95), (97) y (101) más adelante). Para ello se plantea la siguiente hipótesis inductiva (cuya validez será verificada al final del análisis de convergencia): existe una constante

$K > 0$, independiente de n , tal que

$$\|\sigma_h^{n-1}\|_{L^2} \leq K, \quad \forall n \geq 1. \quad (47)$$

Además, se introduce el operador (para una variable general $z \in \mathcal{X}_z$) $A_h^z : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_z$ definido por

$$(A_h^z z, \bar{z}) = (\nabla z, \nabla \bar{z}) + (z, \bar{z}), \quad \forall \bar{z} \in \mathcal{X}_z, \quad (48)$$

el cual satisface (ver ³⁰, Lema 3.1)

$$\|z_h\|_{W^{1,6}} \leq C \|A_h^z z_h\|_{L^2}, \quad \forall z_h \in \mathcal{X}_z. \quad (49)$$

Primero, se prueba el siguiente resultado preliminar en el que se obtienen estimaciones débiles para b_h^n y w_h^n .

Lema 2.4 (Estimaciones débiles uniformes para w_h^n y b_h^n). *Asuma la hipótesis inductiva (47). Si $[w_h^n, b_h^n]$ es cualquier solución de (37)-(38), entonces $[w_h^n, b_h^n]$ está uniformemente acotada en $(l^\infty(L^2) \cap l^2(H^1))^2$.*

Demostración: Tomando $\bar{w} = w_h^n$ en (37), usando las desigualdades de Hölder y Young, y teniendo en cuenta la Observación 2.1, se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \delta_t \|w_h^n\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t w_h^n\|_{L^2}^2 + D_w \|\nabla w_h^n\|_{L^2}^2 + \|w_h^n\|_{L^2}^2 + \lambda (b_h^{n-1}, (w_h^n)^2)^h \\ & = (R, w_h^n) + D_w \beta (\sigma_h^{n-1}, \nabla w_h^n) \leq \frac{1}{2} \|w_h^n\|_{L^2}^2 + \frac{D_w}{2} \|\nabla w_h^n\|_{L^2}^2 + C D_w \beta^2 \|\sigma_h^{n-1}\|_{L^2}^2 + C. \end{aligned} \quad (50)$$

Así, teniendo en cuenta (47), definiendo $\gamma_w := \min\{D_w, 1\}$ y multiplicando (50) por

³⁰ M. A. RODRÍGUEZ-BELLIDO F. GUILLÉN-GONZALÉZ y D. A. RUEDA-GÓMEZ. "Study of a chemo-repulsion model with quadratic production. Part II: analysis of an unconditionally energy-stable fully discrete scheme". En: *Comput. Math. Appl* 80 (2020), págs. 636-652.

$2\Delta t$, se obtiene

$$\|w_h^n\|_{L^2}^2 - \|w_h^{n-1}\|_{L^2}^2 + \Delta t \gamma_w \|w_h^n\|_{H^1}^2 \leq \Delta t C,$$

de lo cual, sumando desde $n = 1$ hasta $n = r$ se concluye que w_h^n está acotada en $l^\infty(L^2) \cap l^2(H^1)$. De manera análoga, tomando $\bar{b} = b_h^n$ en (38), se deduce

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_t \|b_h^n\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t b_h^n\|_{L^2}^2 + D_b \|\nabla b_h^n\|_{L^2}^2 + \mu_0 \|b_h^n\|_{L^2}^2 \\ + \mu_1 \left(\frac{1}{1 + b_h^{n-1}}, (b_h^n)^2 \right)^h = ([w_h^n]_+ b_h^{n-1}, b_h^n), \end{aligned}$$

de donde, usando la desigualdad de interpolación (en 3D) $\|u\|_{L^3} \leq C \|u\|_{L^2}^{1/2} \|u\|_{L^6}^{1/2}$ para todo $u \in H^1(\Omega)$, y definiendo $\gamma_b := \min\{D_b, \mu_0\}$, se llega a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_t \|b_h^n\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t b_h^n\|_{L^2}^2 + \gamma_b \|b_h^n\|_{H^1}^2 &\leq \| [w_h^n]_+ \|_{L^2} \|b_h^{n-1}\|_{L^3} \|b_h^n\|_{L^6} \\ &\leq \frac{\gamma_b}{2} \|b_h^n\|_{H^1}^2 + \frac{\gamma_b}{4} \|b_h^{n-1}\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\gamma_b} \|b_h^{n-1}\|_{L^2}^2 \|w_h^n\|_{L^2}^4. \end{aligned} \quad (51)$$

Luego, multiplicando (51) por Δt , sumando desde $n = 1$ hasta $n = r$, teniendo en cuenta que w_h^n está acotada en $l^\infty(L^2)$ y aplicando el Lema de Gronwall discreto, se concluye que b_h^n está acotada en $l^\infty(L^2) \cap l^2(H^1)$. □

Ahora, se puede demostrar que b_h^n está acotada en norma $l^\infty(H^1) \cap l^2(W^{1,6})$; este es el contenido del siguiente lema.

Lema 2.5 (Estimaciones fuertes uniformes para b_h^n). *Si b_h^n es cualquier solución de (38), entonces se cumplen las siguientes estimaciones uniformes*

$$\|b_h^n\|_{H^1}^2 + \Delta t \sum_{m=1}^n \|\delta_t b_h^m\|_{L^2}^2 \leq C, \quad \forall n \geq 1, \quad (52)$$

$$\Delta t \sum_{m=1}^n \|b_h^m\|_{W^{1,6}}^2 \leq C, \quad \forall n \geq 1, \quad (53)$$

donde la constante $C > 0$ es independiente de n y $[\Delta t, h]$.

Demostración: Tomando $\bar{b} = \delta_t b_h^n \in \mathcal{X}_b$ en (38), usando que $\frac{1}{1 + b_h^{n-1}} \leq 1$ y recordando que $\gamma_b = \min\{D_b, \mu_0\}$, se deduce que

$$\begin{aligned} \|\delta_t b_h^n\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_b}{2} \delta_t \|b_h^n\|_{H^1}^2 + \frac{\Delta t \gamma_b}{2} \|\delta_t b_h^n\|_{H^1}^2 &\leq \| [w_h^n]_+ \|_{L^4} \|b_h^{n-1}\|_{L^4} \|\delta_t b_h^n\|_{L^2} + \mu_1 \|b_h^n\|_{L^2} \|\delta_t b_h^n\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\delta_t b_h^n\|_{L^2}^2 + C \|b_h^n\|_{L^2}^2 + C \|w_h^n\|_{L^4}^2 \|b_h^{n-1}\|_{L^4}^2, \end{aligned} \quad (54)$$

y entonces, multiplicando (54) por Δt , sumando desde $n = 1$ hasta $n = r$, teniendo en cuenta que $[b_h^n, w_h^n]$ está acotada en $l^\infty(L^2) \times l^2(H^1)$, y aplicando el Lema de Gronwall discreto, se deduce (52). Por otro lado, reescribiendo (38) usando el operador A_h^b (ver (48) aplicado a la variable b), se obtiene

$$\begin{aligned} (\delta_t b_h^n, \bar{b})^h + D_b(A_h^b b_h^n, \bar{b}) &= ([w_h^n]_+ b_h^{n-1}, \bar{b}) - \mu_0 (b_h^n, \bar{b})^h \\ &\quad - \mu_1 \left(\frac{b_h^n}{1 + b_h^{n-1}}, \bar{b} \right)^h + D_b(b_h^n, \bar{b}), \quad \forall \bar{b} \in \mathcal{X}_b, \end{aligned}$$

de lo cual, tomando $\bar{b} = A_h^b b_h^n \in \mathcal{X}_b$, usando que $\frac{1}{1 + b_h^{n-1}} \leq 1$, se llega a

$$D_b \|A_h^b b_h^n\|_{L^2}^2 \leq \frac{D_b}{2} \|A_h^b b_h^n\|_{L^2}^2 + C \|\delta_t b_h^n\|_{L^2}^2 + C \|b_h^n\|_{L^2}^2 + C \|w_h^n\|_{L^4}^2 \|b_h^{n-1}\|_{L^4}^2. \quad (55)$$

Luego, multiplicando (55) por $2\Delta t$, sumando desde $n = 1$ hasta $n = r$, y usando el Lema 2.4 y las estimaciones (49) y (52), se concluye (53). \square

En segundo lugar, se prueba una estimación débil adicional para σ_h^n , que es necesaria para demostrar estimaciones fuertes para w_h^n .

Lema 2.6 (Estimación débil adicional para σ_h^n). Si σ_h^n es cualquier solución de (39), entonces σ_h^n está uniformemente acotada en $l^2(H^1)$.

Demostración: Tomando $\bar{\sigma} = \sigma_h^n$ en (39), se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \delta_t \|\sigma_h^n\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \sigma_h^n\|_{L^2}^2 + \gamma_b \|\sigma_h^n\|_{H^1}^2 + \mu_1 \left(\frac{1}{(1+b_h^n)^2}, (\sigma_h^n)^2 \right) \\ & \leq \|\nabla w_h^n\|_{L^2} \|b_h^n\|_{L^3} \|\sigma_h^n\|_{L^6} + \|w_h^n\|_{L^3} \|\sigma_h^{n-1}\|_{L^2} \|\sigma_h^n\|_{L^6} \\ & \leq \frac{\gamma_b}{2} \|\sigma_h^n\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\gamma_b} \|\nabla w_h^n\|_{L^2}^2 \|b_h^n\|_{L^3}^2 + \frac{C}{\gamma_b} \|w_h^n\|_{L^3}^2 \|\sigma_h^{n-1}\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (56)$$

Luego, multiplicando (56) por Δt , sumando desde $n = 1$ hasta $n = r$, aplicando el Lema de Gronwall discreto y teniendo en cuenta el Lema 2.4 y la estimación (52), se concluye la prueba. □

Lema 2.7 (Estimaciones fuertes uniformes para w_h^n). Si w_h^n es cualquier solución de (37), entonces se cumplen las siguientes estimaciones

$$\|w_h^n\|_{H^1}^2 + \Delta t \sum_{m=1}^n \|\delta_t w_h^m\|_{L^2}^2 \leq C, \quad \forall n \geq 1. \quad (57)$$

$$\Delta t \sum_{m=1}^n \|w_h^m\|_{W^{1,6}}^2 \leq C, \quad \forall n \geq 1, \quad (58)$$

donde la constante $C > 0$ es independiente de n y $[\Delta t, h]$.

Demostración: Tomando $\bar{w} = \delta_t w_h^n \in \mathcal{X}_w$ en (37), usando la Observación 2.1, procediendo análogamente como en (50) y recordando que $\gamma_w = \min\{D_w, 1\}$, se obtiene

$$\begin{aligned} & \|\delta_t w_h^n\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_w}{2} \delta_t \|w_h^n\|_{H^1}^2 + \frac{\Delta t \gamma_w}{2} \|\delta_t w_h^n\|_{H^1}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|\delta_t w_h^n\|_{L^2}^2 + C \|w_h^n\|_{L^2}^2 \|b_h^{n-1}\|_{L^\infty}^2 + C \|\nabla \sigma_h^{n-1}\|_{L^2}^2 + C, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{2} \|\delta_t w_h^n\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_w}{2} \delta_t \|w_h^n\|_{H^1}^2 \leq C \|w_h^n\|_{L^2}^2 \|b_h^{n-1}\|_{W^{1,6}}^2 + C \|\nabla \sigma_h^{n-1}\|_{L^2}^2 + C. \quad (59)$$

Por lo tanto, multiplicando (59) por $2\Delta t$, sumando desde $n = 1$ hasta $n = r$ y usando (53) y los Lemas 2.4-2.6, se concluye (57). Por otro lado, reescribiendo (37) usando el operador A_h^w (ver (48), aplicado a la variable w), se obtiene para todo $\bar{w} \in \mathcal{X}_w$,

$$\begin{aligned} (\delta_t w_h^n, \bar{w})^h + D_w(A_h^w w_h^n, \bar{w}) &= (R, \bar{w}) - \lambda(w_h^n b_h^{n-1}, \bar{w})^h + D_w \beta(\sigma_h^{n-1}, \nabla \bar{w}) \\ &\quad - (w_h^n, \bar{w})^h + D_w(w_h^n, \bar{w}), \end{aligned}$$

de lo cual, tomando $\bar{w} = A_h^w w_h^n \in \mathcal{X}_w$, se llega a

$$\begin{aligned} D_w \|A_h^w w_h^n\|_{L^2}^2 &\leq \frac{D_w}{2} \|A_h^w w_h^n\|_{L^2}^2 + C \|\delta_t w_h^n\|_{L^2}^2 + C \|w_h^n\|_{L^2}^2 \\ &\quad + C \|w_h^n\|_{L^4}^2 \|b_h^{n-1}\|_{L^4}^2 + C \|\sigma_h^{n-1}\|_{H^1}^2 + C. \end{aligned} \quad (60)$$

Entonces, multiplicando (60) por $2\Delta t$, sumando desde $n = 1$ hasta $n = r$, y usando los Lemas 2.5-2.6 y las estimaciones (49) y (57), se deduce (58).

□

Queda por obtener las acotaciones para $\delta_t b_h^n$ y $\delta_t w_h^n$ en $l^2(H^1)$. Para eso, se probará el siguiente resultado preliminar correspondiente a una cota para $\delta_t \sigma_h^n$ en $l^2(L^2)$.

Lema 2.8 (Estimaciones fuertes uniformes para σ_h^n). *Si σ_h^n es cualquier solución de (39), entonces la siguiente estimación se tiene*

$$\|\sigma_h^n\|_{H^1}^2 + \Delta t \sum_{m=1}^n \|\delta_t \sigma_h^m\|_{L^2}^2 \leq C, \quad \forall n \geq 1, \quad (61)$$

donde la constante $C > 0$ es independiente de n y $[\Delta t, h]$.

Demostración: Tomando $\bar{\sigma} = \delta_t \sigma_h^n$ en (39), y usando la norma equivalente definida en (28), se obtiene

$$\begin{aligned} & \|\delta_t \sigma_h^n\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_b}{2} \delta_t \|\sigma_h^n\|_{H^1}^2 + \frac{\gamma_b \Delta t}{2} \|\delta_t \sigma_h^n\|_{H^1}^2 \\ & \leq \|\nabla w_h^n\|_{L^2} \|b_h^n\|_{L^\infty} \|\delta_t \sigma_h^n\|_{L^2} + \|w_h^n\|_{L^3} \|\sigma_h^{n-1}\|_{L^6} \|\delta_t \sigma_h^n\|_{L^2} + \|\sigma_h^n\|_{L^2} \|\delta_t \sigma_h^n\|_{L^2} \\ & \leq \frac{1}{2} \|\delta_t \sigma_h^n\|_{L^2}^2 + C \|\nabla w_h^n\|_{L^2}^2 \|b_h^n\|_{W^{1,6}}^2 + C \|w_h^n\|_{L^3}^2 \|\sigma_h^{n-1}\|_{L^6}^2 + C \|\sigma_h^n\|_{L^2}^2, \quad (62) \end{aligned}$$

luego, multiplicando por Δt y sumando desde $n = 1$ hasta $n = r$, y usando los Lemas 2.5-2.7, se concluye (61). □

Finalmente, terminamos esta sección demostrando que $\delta_t b_h^n, \delta_t w_h^n$ están acotados en $l^2(H^1)$, lo cual se establece en el siguiente resultado.

Lema 2.9 *Sea $[w_h^n, b_h^n]$ cualquier solución de (37)-(38). Existe una constante $C > 0$ tal que si $\Delta t < C$, entonces se cumple la siguiente estimación*

$$\|[\delta_t w_h^n, \delta_t b_h^n]\|_{L^2}^2 + \Delta t \sum_{m=1}^n \|[\delta_t w_h^m, \delta_t b_h^m]\|_{H^1}^2 \leq C, \quad \forall n \geq 1, \quad (63)$$

donde $C > 0$ es independiente de n y $[\Delta t, h]$.

Demostración: Denotando por $\tilde{w}_h^{n+1} = \delta_t w_h^{n+1}$ y $\tilde{b}_h^{n+1} = \delta_t b_h^{n+1}$, y calculando la derivada discreta en el tiempo de (37) y (38), se deduce que \tilde{w}_h^{n+1} y \tilde{b}_h^{n+1} satisfacen

$$(\delta_t \tilde{w}_h^{n+1}, \bar{w})^h + D_w(\nabla \tilde{w}_h^{n+1}, \nabla \bar{w}) + (\tilde{w}_h^{n+1}, \bar{w})^h = -\lambda(\tilde{w}_h^{n+1} b_h^n + w_h^n b_h^n, \bar{w})^h + D_w \beta(\delta_t \sigma_h^n, \nabla \bar{w}), \quad (64)$$

$$\begin{aligned}
& (\delta_t \tilde{b}_h^{n+1}, \bar{b})^h + D_b(\nabla \tilde{b}_h^{n+1}, \nabla \bar{b}) + \mu_0(\tilde{b}_h^{n+1}, \bar{b})^h \\
&= (\delta_t [w_h^{n+1}]_+ b_h^n + [w_h^n]_+ \tilde{b}_h^n, \bar{b}) - \frac{\mu_1}{\Delta t} \left(\frac{b_h^{n+1} + b_h^{n+1} b_h^{n-1} - b_h^n - b_h^n b_h^n}{(1 + b_h^{n-1})(1 + b_h^n)}, \bar{b} \right)^h \\
&= (\delta_t [w_h^{n+1}]_+ b_h^n + [w_h^n]_+ \tilde{b}_h^n, \bar{b}) - \mu_1 \left(\frac{\tilde{b}_h^{n+1} + b_h^{n-1} \tilde{b}_h^{n+1} - b_h^n \tilde{b}_h^n}{(1 + b_h^{n-1})(1 + b_h^n)}, \bar{b} \right)^h, \quad (65)
\end{aligned}$$

para todo $[\bar{w}, \bar{b}] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_b$. Tomando $[\bar{w}, \bar{b}] = [\tilde{w}_h^{n+1}, \tilde{b}_h^{n+1}] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_b$ en (64)-(65), usando las desigualdades de Hölder y Young, teniendo en cuenta que $[w_h^n]_+, b_h^n \geq 0$ y $\frac{b_h^n}{1 + b_h^n} \leq 1$ para todo $n \geq 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \delta_t \|\tilde{w}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t w_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \gamma_w \|\tilde{w}_h^{n+1}\|_{H^1}^2 + \lambda(b_h^n, (\tilde{w}_h^{n+1})^2)^h \\
& \leq \|w_h^n\|_{L^\infty} \|\tilde{b}_h^n\|_{L^2} \|\tilde{w}_h^{n+1}\|_{L^2} + D_w \beta \|\delta_t \sigma_h^n\|_{L^2} \|\nabla \tilde{w}_h^{n+1}\|_{L^2} \\
& \leq \frac{\gamma_w}{4} \|\tilde{w}_h^{n+1}\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\gamma_w} \|w_h^n\|_{L^\infty}^2 \|\tilde{b}_h^n\|_{L^2}^2 + \frac{C D_w^2 \beta^2}{\gamma_w} \|\delta_t \sigma_h^n\|_{L^2}^2, \quad (66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \delta_t \|\tilde{b}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t b_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \gamma_b \|\tilde{b}_h^{n+1}\|_{H^1}^2 + \mu_1 \left(\frac{1 + b_h^{n-1}}{(1 + b_h^{n-1})(1 + b_h^n)}, (\tilde{b}_h^{n+1})^2 \right)^h \\
&= (\delta_t [w_h^{n+1}]_+ b_h^n + [w_h^n]_+ \tilde{b}_h^n, \tilde{b}_h^{n+1}) + \mu_1 \left(\frac{\tilde{b}_h^n b_h^n}{(1 + b_h^{n-1})(1 + b_h^n)}, b_h^{n+1} \right)^h \\
& \leq \|b_h^n\|_{L^4} \|\tilde{w}_h^{n+1}\|_{L^4} \|\tilde{b}_h^{n+1}\|_{L^2} + \|w_h^n\|_{L^\infty} \|\tilde{b}_h^n\|_{L^2} \|\tilde{b}_h^{n+1}\|_{L^2} + \mu_1 \|\tilde{b}_h^n\|_{L^2} \|\tilde{b}_h^{n+1}\|_{L^2} \\
& \leq \frac{\gamma_w}{4} \|\tilde{w}_h^{n+1}\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\gamma_w} \|b_h^n\|_{H^1}^2 \|\tilde{b}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_b}{2} \|\tilde{b}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\gamma_b} (\|w_h^n\|_{L^\infty}^2 + \mu_1^2) \|\tilde{b}_h^n\|_{L^2}^2. \quad (67)
\end{aligned}$$

Sumando (66) y (67), multiplicando la expresión resultante por $2\Delta t$, sumando desde

$m = 1$ hasta $m = n$ y usando que b_h^n está acotada en $l^\infty(H^1)$, se llega a

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\tilde{b}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \Delta t \sum_{m=1}^n \left(\gamma_w \|\tilde{w}_h^{m+1}\|_{H^1}^2 + \gamma_b \|\tilde{b}_h^{m+1}\|_{H^1}^2 \right) &\leq \|[\tilde{w}_h^1, \tilde{b}_h^1]\|_{L^2}^2 \\ + C \Delta t \sum_{m=1}^n \left((\|w_h^m\|_{L^\infty}^2 + \mu_1^2 + \|b_h^{m-1}\|_{H^1}^2) \|\tilde{b}_h^m\|_{L^2}^2 + \|\delta_t \sigma_h^m\|_{L^2}^2 \right) &+ C \Delta t \|\tilde{b}_h^{n+1}\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (68)$$

Finalmente, necesitamos ver que $\|[\tilde{w}_h^1, \tilde{b}_h^1]\|_{L^2}^2 \leq C$. De hecho, de (37)-(38), para todo $[\bar{w}, \bar{b}] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_b$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_h^1, \bar{w})^h + \Delta t D_w(\nabla \tilde{w}_h^1, \nabla \bar{w}) + D_w(\nabla w_h^0, \nabla \bar{w}) + \Delta t (\tilde{w}_h^1, \bar{w})^h & \quad (69) \\ + (w_h^0, \bar{w})^h = (R, \bar{w}) - \lambda (w_h^1 b_h^0, \bar{w})^h + D_w \beta(\sigma_h^0, \nabla \bar{w}), & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{b}_h^1, \bar{b})^h + \Delta t D_b(\nabla \tilde{b}_h^1, \nabla \bar{b}) + D_b(\nabla b_h^0, \nabla \bar{b}) + \Delta t \mu_0 (\tilde{b}_h^1, \bar{b})^h & \quad (70) \\ + \mu_0 (b_h^0, \bar{b})^h = ([w_h^1]_+ b_h^0, \bar{b}) - \mu_1 \left(\frac{b_h^1}{1 + b_h^0}, \bar{b} \right)^h. & \end{aligned}$$

Entonces, considerando el operador general definido en (48) (aplicado a las variables w y b), se puede reescribir (69) y (70) como

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_h^1, \bar{w})^h + \Delta t D_w(\nabla \tilde{w}_h^1, \nabla \bar{w}) + D_w(A_h^w w_h^0, \bar{w}) - D_w(w_h^0, \bar{w}) + \Delta t (\tilde{w}_h^1, \bar{w})^h & \quad (71) \\ + (w_h^0, \bar{w})^h = (R, \bar{w}) - \lambda (w_h^1 b_h^0, \bar{w})^h + D_w \beta(\sigma_h^0, \nabla \bar{w}), & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{b}_h^1, \bar{b})^h + \Delta t D_b(\nabla \tilde{b}_h^1, \nabla \bar{b}) + D_b(A_h^b b_h^0, \bar{b}) - D_b(b_h^0, \bar{b}) & \quad (72) \\ + \mu_0 (\Delta t \tilde{b}_h^1 + b_h^0, \bar{b})^h = ([w_h^1]_+ b_h^0, \bar{b}) - \mu_1 \left(\frac{b_h^1}{1 + b_h^0}, \bar{b} \right)^h, & \end{aligned}$$

para todo $[\bar{w}, \bar{b}] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_b$. Tomando $[\bar{w}, \bar{b}] = [\tilde{w}_h^1, \tilde{b}_h^1] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_b$ en (71) y (72)

respectivamente, y usando los Lemas 2.5, 2.7 y 2.8, se llega a

$$\begin{cases} \|\tilde{w}_h^1\|_{L^2}^2 \leq C(\|w_h^0\|_{L^2}^2 + \|A_h^w w_h^0\|_{L^2}^2 + \|w_h^1\|_{H^1}^2 \|b_h^0\|_{H^1}^2 + \|\sigma_h^0\|_{H^1}^2 + 1) \leq K_0, \\ \|\tilde{b}_h^1\|_{L^2}^2 \leq C(\|b_h^0\|_{L^2}^2 + \|A_h^b b_h^0\|_{L^2}^2 + \|w_h^1\|_{H^1}^2 \|b_h^0\|_{H^1}^2 + \|b_h^1\|_{L^2}^2) \leq K_1. \end{cases} \quad (73)$$

Entonces, si $\frac{1}{2} - C\Delta t > 0$, usando (73) en (68) y teniendo en cuenta nuevamente los Lemas 2.5, 2.7 y 2.8, del Lema discreto de Gronwall se concluye (63).

□

2.4. ESTIMACIONES DE ERROR

En esta sección, el objetivo es obtener estimaciones de error óptimas para cualquier solución $[w_h^n, \sigma_h^n, b_h^n]$ del esquema (37)-(39) con respecto a una solución suficientemente regular $[w, \sigma, b]$ de (27). En este caso, para la aproximación de la condición inicial del esquema (37)-(39) y asumiendo una regularidad suficiente para los datos iniciales w_0, b_0 (ver segunda parte del Teorema 1.1), consideraremos $[w_h^0, b_h^0] = [I_h w_0, I_h b_0]$. Tenga en cuenta que, a partir de la definición del operador de interpolación nodal I_h , tenemos que si $w_0, b_0 \geq 0$ entonces $w_h^0, b_h^0 \geq 0$, y se cumple la siguiente propiedad de interpolación conocida

$$\|w_0 - I_h w_0\|_{L^2} + h\|w_0 - I_h w_0\|_{H^1} \leq Ch^2\|w_0\|_{H^2}. \quad (74)$$

Denotando los errores en el tiempo $t = t_n$ por $e_w^n = w^n - w_h^n$, $e_\sigma^n = \sigma^n - \sigma_h^n$ y $e_b^n = b^n - b_h^n$ donde, en general, z^n denota el valor de la solución exacta z en el momento

t_n , es sencillo deducir que $[e_w^n, e_\sigma^n, e_b^n]$ satisface, para todo $[\bar{w}, \bar{\sigma}, \bar{b}] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_b$,

$$\begin{aligned}
(\delta_t e_w^n, \bar{w}) + D_w(\nabla e_w^n, \nabla \bar{w}) + (e_w^n, \bar{w}) &= (\tau_w^n, \bar{w}) + (\delta_t w_h^n, \bar{w})^h - (\delta_t w_h^n, \bar{w}) \\
&- \lambda(w^n(b^n - b^{n-1}), \bar{w}) - \lambda(e_w^n b_h^{n-1}, \bar{w}) - \lambda(w^n e_b^{n-1}, \bar{w}) + (w_h^n, \bar{w})^h - (w_h^n, \bar{w}) \\
&+ \lambda(w_h^n b_h^{n-1}, \bar{w})^h - \lambda(w_h^n b_h^{n-1}, \bar{w}) + D_w \beta((\sigma^n - \sigma^{n-1}) + e_\sigma^{n-1}, \nabla \bar{w}), \quad (75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\delta_t e_\sigma^n, \bar{\sigma}) + D_b(\nabla \cdot e_\sigma^n, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + D_b(\text{rot } e_\sigma^n, \text{rot } \bar{\sigma}) + \mu_0(e_\sigma^n, \bar{\sigma}) &= (\tau_\sigma^n, \bar{\sigma}) \\
&+ (\nabla e_w^n b_h^n, \bar{\sigma}) + (\nabla w^n e_b^n, \bar{\sigma}) + (w^n(\sigma^n - \sigma^{n-1}), \bar{\sigma}) \quad (76) \\
&+ (e_w^n \sigma^{n-1}, \bar{\sigma}) + (w_h^n e_\sigma^{n-1}, \bar{\sigma}) - \mu_1 \left(\frac{\sigma^n}{(1+b^n)^2} - \frac{\sigma_h^n}{(1+b_h^n)^2}, \bar{\sigma} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\delta_t e_b^n, \bar{b}) + D_b(\nabla e_b^n, \nabla \bar{b}) + \mu_0(e_b^n, \bar{b}) &= (\tau_b^n, \bar{b}) + (\delta_t b_h^n + \mu_0 b_h^n, \bar{b})^h - (\delta_t b_h^n + \mu_0 b_h^n, \bar{b}) \\
&+ ([w^n]_+(b^n - b^{n-1}), \bar{b}) + (([w^n]_+ - [w_h^n]_+) b_h^{n-1}, \bar{b}) + ([w^n]_+ e_b^{n-1}, \bar{b}) \quad (77) \\
&+ \mu_1 \left(\frac{b_h^n}{1+b_h^{n-1}}, \bar{b} \right)^h - \mu_1 \left(\frac{b_h^n}{1+b_h^{n-1}}, \bar{b} \right) - \mu_1 \left(\frac{b^n}{1+b^n} - \frac{b_h^n}{1+b_h^{n-1}}, \bar{b} \right),
\end{aligned}$$

donde, en general, se usa la notación $\tau_z^n := \delta_t z^n - (\partial_t z)^n$. Además, se prueba el siguiente resultado preliminar:

Lema 2.10 *Sea $[w_h^n, b_h^n] \in \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_b$ cualquier solución de (37)-(38); entonces las siguientes estimaciones son válidas*

$$| (w_h^n b_h^{n-1}, \bar{w})^h - (w_h^n b_h^{n-1}, \bar{w}) | \leq Ch^2 \|w_h^n\|_{H^1} \|b_h^{n-1}\|_{W^{1,6}} \|\bar{w}\|_{H^1}, \quad (78)$$

$$\left| \left(\frac{b_h^n}{1+b_h^{n-1}}, \bar{b} \right)^h - \left(\frac{b_h^n}{1+b_h^{n-1}}, \bar{b} \right) \right| \leq Ch^2 \|b_h^n\|_{H^1} \|b_h^{n-1}\|_{W^{1,6}} \|\bar{b}\|_{H^1}, \quad (79)$$

donde $C > 0$ es independiente de $[h, \Delta t, n]$.

Demostración: Utilizando la Proposición 2.2 de ²⁹, se obtiene

$$\begin{aligned}
|(w_h^n b_h^{n-1}, \bar{w})^h - (w_h^n b_h^{n-1}, \bar{w})| &\leq \|w_h^n b_h^{n-1} \bar{w} - I_h(w_h^n b_h^{n-1} \bar{w})\|_{L^1(\Omega)} \\
&\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|w_h^n b_h^{n-1} \bar{w} - I_h(w_h^n b_h^{n-1} \bar{w})\|_{L^\infty(K)} \int_K 1 \\
&\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla^2(w_h^n b_h^{n-1} \bar{w})\|_{L^\infty(K)} \int_K 1. \tag{80}
\end{aligned}$$

Usando que ∇w_h^n , ∇b_h^{n-1} y $\nabla \bar{w}$ son constantes en cada $K \in \mathcal{T}_h$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\nabla^2(w_h^n b_h^{n-1} \bar{w})\|_{L^\infty(K)} &\leq 2\|\nabla w_h^n \nabla b_h^{n-1} \bar{w}\|_{L^\infty(K)} + 2\|\nabla w_h^n b_h^{n-1} \nabla \bar{w}\|_{L^\infty(K)} \\
&\quad + 2\|w_h^n \nabla b_h^{n-1} \nabla \bar{w}\|_{L^\infty(K)},
\end{aligned}$$

y por lo tanto, de (80) se llega a

$$\begin{aligned}
|(w_h^n b_h^{n-1}, \bar{w})^h - (w_h^n b_h^{n-1}, \bar{w})| &\leq C \|\bar{w}\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \int_K |\nabla w_h^n| |\nabla b_h^{n-1}| \\
&\quad + C \|b_h^{n-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \int_K |\nabla w_h^n| |\nabla \bar{w}| + C \|w_h^n\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \int_K |\nabla b_h^{n-1}| |\nabla \bar{w}| \\
&\leq C h^{-1/2} \|\bar{w}\|_{L^6(\Omega)} h^2 \|\nabla w_h^n\|_{L^2(\Omega)} h^{1/2} \|b_h^{n-1}\|_{W^{1,3}(\Omega)} \\
&\quad + C \|b_h^{n-1}\|_{W^{1,6}(\Omega)} h^2 \|\nabla w_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \bar{w}\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + C h^{-1/2} \|w_h^n\|_{L^6(\Omega)} h^2 \|\nabla \bar{w}\|_{L^2(\Omega)} h^{1/2} \|b_h^{n-1}\|_{W^{1,3}(\Omega)}, \tag{81}
\end{aligned}$$

lo que implica (78). La prueba de (79) se sigue de manera análoga. □

Ahora, se descomponen los errores totales en el tiempo inicial ($n = 0$) de la siguiente manera

$$e_w^0 = (w_0 - I_h w_0) + (I_h w_0 - w_h^0) := \theta_w^0 + \xi_w^0 = \theta_w^0, \tag{82}$$

$$e_b^0 = (b_0 - I_h b_0) + (I_h b_0 - b_h^0) := \theta_b^0 + \xi_b^0 = \theta_b^0, \tag{83}$$

$$e_{\sigma}^0 = (\sigma_0 - \mathcal{R}_{\sigma}\sigma_0) + (\mathcal{R}_{\sigma}\sigma_0 - \sigma_h^0) := \theta_{\sigma}^0 + \xi_{\sigma}^0 = \theta_{\sigma}^0, \quad (84)$$

y, para $n \geq 1$,

$$e_w^n = (w^n - \mathcal{R}_w w^n) + (\mathcal{R}_w w^n - w_h^n) := \theta_w^n + \xi_w^n, \quad (85)$$

$$e_{\sigma}^n = (\sigma^n - \mathcal{R}_{\sigma}\sigma^n) + (\mathcal{R}_{\sigma}\sigma^n - \sigma_h^n) := \theta_{\sigma}^n + \xi_{\sigma}^n, \quad (86)$$

$$e_b^n = (b^n - \mathcal{R}_b b^n) + (\mathcal{R}_b b^n - b_h^n) := \theta_b^n + \xi_b^n, \quad (87)$$

donde los operadores de interpolación \mathcal{R}_w , \mathcal{R}_{σ} y \mathcal{R}_b se definieron en (29); entonces se puede probar el siguiente resultado:

Teorema 2.1 *Sea $[w_h^n, \sigma_h^n, b_h^n]$ cualquier solución del esquema (37)-(39) y $[w, \sigma, b]$ una solución suficientemente regular de (27). Existe una constante $C > 0$ tal que si $\Delta t C < \frac{1}{2}$, entonces se cumple la siguiente estimación para los errores discretos*

$$\|[\xi_w^n, \xi_{\sigma}^n, \xi_b^n]\|_{l^{\infty}(L^2)} + \|[\xi_w^n, \xi_{\sigma}^n, \xi_b^n]\|_{l^2(H^1)} \leq C(T)(\Delta t + h^2 + h^{r+1}), \quad (88)$$

donde la constante $C > 0$ es independiente de n y $[\Delta t, h]$.

Demostración: Usando (85)-(87) en (75)-(77), tomando $[\bar{w}, \bar{\sigma}, \bar{b}] = [\xi_w^n, \xi_{\sigma}^n, \xi_b^n]$, teniendo en cuenta la definición de los operadores \mathcal{R}_w , \mathcal{R}_{σ} y \mathcal{R}_b dada en (29), y agrupando convenientemente, se tiene (recuerde que $\gamma_w = \min\{D_w, 1\}$ y $\gamma_b =$

$\min\{D_b, \mu_0\}$)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\delta_t\|\xi_w^n\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2}\|\delta_t\xi_w^n\|_{L^2}^2 + \gamma_w\|\xi_w^n\|_{H^1}^2 + \lambda \int_{\Omega} b_h^{n-1}(\xi_w^n)^2 d\mathbf{x} = (\tau_w^n, \xi_w^n) - (\delta_t\theta_w^n, \xi_w^n) \\
& + \lambda(w_h^n b_h^{n-1}, \xi_w^n)^h - \lambda(w_h^n b_h^{n-1}, \xi_w^n) + (\delta_t w_h^n, \xi_w^n)^h - (\delta_t w_h^n, \xi_w^n) + (w_h^n, \xi_w^n)^h \\
& - (w_h^n, \xi_w^n) - \lambda(w^n(b^n - b^{n-1}), \xi_w^n) - \lambda(\theta_w^n b_h^{n-1}, \xi_w^n) - \lambda(w^n \theta_b^{n-1}, \xi_w^n) \\
& - \lambda(w^n \xi_b^{n-1}, \xi_w^n) + D_w \beta((\sigma^n - \sigma^{n-1}) + (\theta_{\sigma}^{n-1} + \xi_{\sigma}^{n-1}), \nabla \xi_w^n) = \sum_{k=1}^{13} I_k,
\end{aligned} \tag{89}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\delta_t\|\xi_{\sigma}^n\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2}\|\delta_t\xi_{\sigma}^n\|_{L^2}^2 + \gamma_b\|\xi_{\sigma}^n\|_{H^1}^2 = (\tau_{\sigma}^n, \xi_{\sigma}^n) - (\delta_t\theta_{\sigma}^n, \xi_{\sigma}^n) + (b_h^n \nabla \theta_w^n, \xi_{\sigma}^n) \\
& + (b_h^n \nabla \xi_w^n, \xi_{\sigma}^n) + (\nabla w^n \theta_b^n, \xi_{\sigma}^n) + (\nabla w^n \xi_b^n, \xi_{\sigma}^n) \\
& + (w^n(\sigma^n - \sigma^{n-1}), \xi_{\sigma}^n) + (\xi_w^n \sigma^{n-1}, \xi_{\sigma}^n) + (\theta_w^n \sigma^{n-1}, \xi_{\sigma}^n) + (w_h^n \theta_{\sigma}^{n-1}, \xi_{\sigma}^n) \\
& + (w_h^n \xi_{\sigma}^{n-1}, \xi_{\sigma}^n) - \mu_1 \left(\frac{\sigma^n}{(1+b^n)^2} - \frac{\sigma_h^n}{(1+b_h^n)^2}, \xi_{\sigma}^n \right) = \sum_{j=1}^{12} K_j,
\end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\delta_t\|\xi_b^n\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2}\|\delta_t\xi_b^n\|_{L^2}^2 + \gamma_b\|\xi_b^n\|_{H^1}^2 = (\tau_b^n - \delta_t\theta_b^n, \xi_b^n) + (\delta_t b_h^n + \mu_0 b_h^n, \xi_b^n)^h \\
& - (\delta_t b_h^n + \mu_0 b_h^n, \xi_b^n) + ([w^n]_+, (b^n - b^{n-1}), \xi_b^n) + (([w^n]_+ - [w_h^n]_+) b_h^{n-1}, \xi_b^n) \\
& + ([w^n]_+ \xi_b^{n-1}, \xi_b^n) + ([w^n]_+ \theta_b^{n-1}, \xi_b^n) + \mu_1 \left(\frac{b_h^n}{1+b_h^{n-1}}, \xi_b^n \right)^h \\
& - \mu_1 \left(\frac{b_h^n}{1+b_h^{n-1}}, \xi_b^n \right) - \mu_1 \left(\frac{b^n}{1+b^n} - \frac{b_h^n}{1+b_h^{n-1}}, \xi_b^n \right) = \sum_{i=1}^{10} J_i.
\end{aligned} \tag{91}$$

Usando las desigualdades de Hölder y Young y (30), se controlan algunos términos en el lado derecho de (89) de la siguiente manera

$$I_1 \leq \frac{\gamma_w}{16} \|\xi_w^n\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\gamma_w} \|\tau_w^n\|_{(H^1)'}^2 \leq \frac{\gamma_w}{16} \|\xi_w^n\|_{H^1}^2 + \frac{C\Delta t}{\gamma_w} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\partial_{tt} w(t)\|_{(H^1)'}^2 dt, \tag{92}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \|\xi_w^n\|_{L^2} \|(\mathcal{I} - \mathcal{R}_w)\delta_t w^n\|_{L^2} \leq \frac{\gamma_w}{16} \|\xi_w^n\|_{H^1}^2 + \frac{Ch^4}{\gamma_w \Delta t} \|\delta_t w^n\|_{H^2}^2 \\
&\leq \frac{\gamma_w}{16} \|\xi_w^n\|_{H^1}^2 + \frac{Ch^4}{\gamma_w \Delta t} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\partial_t w(t)\|_{H^2}^2 dt, \tag{93}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=9}^{13} I_k &\leq \lambda \|w^n\|_{L^3} \|\xi_w^n\|_{L^6} (\|b^n - b^{n-1}\|_{L^2} + \|\xi_b^{n-1}\|_{L^2} + \|\theta_b^{n-1}\|_{L^2}) \\
&\quad + \|\xi_w^n\|_{H^1} (\lambda \|\theta_w^n\|_{L^2} \|b_h^{n-1}\|_{L^3} + D_w \beta \|\sigma^n - \sigma^{n-1}\|_{L^2} + D_w \beta \|\xi_\sigma^{n-1}\|_{L^2} + D_w \beta \|\theta_\sigma^{n-1}\|_{L^2}) \\
&\leq \frac{\gamma_w}{16} \|\xi_w^n\|_{H^1}^2 + \frac{C\lambda^2}{\gamma_w} \|w^n\|_{L^3}^2 (\|b^n - b^{n-1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_b^{n-1}\|_{L^2}^2 + h^4 \|b^{n-1}\|_{H^2}^2) + \frac{CD_w^2 \beta^2}{\gamma_w} \|\xi_\sigma^{n-1}\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{C\lambda^2}{\gamma_w} h^4 \|b_h^{n-1}\|_{L^3}^2 \|w^n\|_{H^2}^2 + \frac{CD_w^2 \beta^2}{\gamma_w} (\|\sigma^n - \sigma^{n-1}\|_{L^2}^2 + h^{2(r+1)} \|\sigma^{n-1}\|_{H^{r+1}}^2). \tag{94}
\end{aligned}$$

Además, usando (36) y (78), se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^8 I_k &\leq Ch^2 \|\xi_w^n\|_{H^1} (\|\delta_t w_h^n\|_{H^1} + \|w_h^n\|_{H^1} + \lambda \|w_h^n\|_{H^1} \|b_h^{n-1}\|_{W^{1,6}}) \\
&\leq \frac{\gamma_w}{16} \|\xi_w^n\|_{H^1}^2 + \frac{Ch^4}{\gamma_w} (\|\delta_t w_h^n\|_{H^1}^2 + \|w_h^n\|_{H^1}^2 + \lambda^2 \|w_h^n\|_{H^1}^2 \|b_h^{n-1}\|_{W^{1,6}}^2). \tag{95}
\end{aligned}$$

Ahora, procediendo de manera análoga, se acota el lado derecho en (90) de la siguiente manera: usando (28) y (30), se tiene que

$$K_1 + K_2 \leq \frac{\gamma_b}{8} \|\xi_\sigma^n\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\gamma_b} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left[\Delta t \|\partial_{tt} \sigma(t)\|_{(H^1)'}^2 + \frac{h^{2(r+1)}}{\Delta t} \|\partial_t \sigma(t)\|_{H^{r+1}}^2 \right] dt, \tag{96}$$

$$\begin{aligned}
K_3 + K_4 &\leq \|b_h^n\|_{W^{1,6}} \|\xi_\sigma^n\|_{H^1} \|\theta_w^n\|_{L^2} + \|b_h^n\|_{L^6} \|\nabla \xi_w^n\|_{L^2} \|\xi_\sigma^n\|_{L^3} \\
&\leq \frac{\gamma_b}{8} \|\xi_\sigma^n\|_{H^1}^2 + \frac{\gamma_w}{4} \|\xi_w^n\|_{H^1}^2 + \frac{Ch^4}{\gamma_b} \|b_h^{n-1}\|_{W^{1,6}}^2 \|w^n\|_{H^2}^2 + \frac{C}{\gamma_b} \|b_h^{n-1}\|_{H^1}^4 \|\xi_\sigma^n\|_{L^2}^2, \tag{97}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=5}^{11} K_i &\leq \|\nabla w^n\|_{L^3} \|\xi_\sigma^n\|_{L^6} (\|\xi_b^n\|_{L^2} + \|\theta_b^n\|_{L^2}) + \|w^n\|_{L^3} \|\sigma^n - \sigma^{n-1}\|_{L^2} \|\xi_\sigma^n\|_{L^6} \\
&\quad + \|\xi_\sigma^n\|_{L^6} (\|\sigma^{n-1}\|_{L^3} (\|\xi_w^n\|_{L^2} + \|\theta_w^n\|_{L^2}) + \|w_h^n\|_{L^3} (\|\xi_\sigma^{n-1}\|_{L^2} + \|\theta_\sigma^{n-1}\|_{L^2})) \quad (98) \\
&\leq \frac{\gamma_b}{8} \|\xi_\sigma^n\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\gamma_b} \|\nabla w^n\|_{L^3}^2 (\|\xi_b^n\|_{L^2}^2 + h^4 \|b^n\|_{H^2}^2) + \frac{C}{\gamma_b} \|w^n\|_{L^3}^2 \|\sigma^n - \sigma^{n-1}\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{C}{\gamma_b} \|\sigma^{n-1}\|_{L^3}^2 (\|\xi_w^n\|_{L^2}^2 + h^4 \|w^n\|_{H^2}^2) + \frac{C}{\gamma_b} \|w_h^n\|_{L^3}^2 (\|\xi_\sigma^{n-1}\|_{L^2}^2 + h^{2(r+1)} \|\sigma^{n-1}\|_{H^{r+1}}^2).
\end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta que $\frac{1}{(1+b^n)^2} \leq 1$ y $\frac{1}{(1+b^n)^2(1+b_h^n)^2} \leq 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}
K_{12} &= -\mu_1 \left(\frac{\theta_\sigma^n + \xi_\sigma^n}{(1+b_h^n)^2}, \xi_\sigma^n \right) - \mu_1 \left(\sigma^n \frac{2b_h^n + (b_h^n)^2 - 2b^n - (b^n)^2}{(1+b^n)^2(1+b_h^n)^2}, \xi_\sigma^n \right) \\
&\leq \frac{\gamma_b}{8} \|\xi_\sigma^n\|_{H^1}^2 + \mu_1 \|\xi_\sigma^n\|_{L^2}^2 + \frac{C\mu_1^2}{\gamma_b} h^{2(r+1)} \|\sigma^n\|_{H^{r+1}}^2 + \frac{C\mu_1^2}{\gamma_b} \|\sigma^n\|_{L^3}^2 (\|\xi_b^n\|_{L^2}^2 + h^4 \|b^n\|_{H^2}^2) \\
&\quad + \frac{C\mu_1^2}{\gamma_b} \|\sigma^n\|_{L^6}^2 \|b^n + b_h^n\|_{L^6}^2 (\|\xi_b^n\|_{L^2}^2 + h^4 \|b^n\|_{H^2}^2). \quad (99)
\end{aligned}$$

De manera similar, se acotan los términos J_i en (91) de la siguiente manera: Usando las desigualdades de Hölder y Young, (30), (36), (79) y teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{1+b_h^{n-1}} \leq 1 \text{ y } \frac{1}{(1+b^n)(1+b_h^{n-1})} \leq 1, \text{ se tiene}$$

$$J_1 \leq \frac{\gamma_b}{8} \|\xi_b^n\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\gamma_b} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left[\Delta t \|\partial_{tt} b(t)\|_{(H^1)'}^2 + \frac{h^4}{\Delta t} \|\partial_t b(t)\|_{H^2}^2 \right] dt, \quad (100)$$

$$\begin{aligned}
J_2 + J_3 + J_8 + J_9 &\leq Ch^2 \|\xi_b^n\|_{H^1} (\|\delta_t b_h^n\|_{H^1} + \|b_h^n\|_{H^1} + \mu_1 \|b_h^n\|_{H^1} \|b_h^{n-1}\|_{W^{1,6}}) \quad (101) \\
&\leq \frac{\gamma_b}{8} \|\xi_b^n\|_{H^1}^2 + \frac{Ch^4}{\gamma_b} (\|\delta_t b_h^n\|_{H^1}^2 + \|b_h^n\|_{H^1}^2 + \mu_1^2 \|b_h^n\|_{H^1}^2 \|b_h^{n-1}\|_{W^{1,6}}^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=4}^7 J_k &\leq \|\xi_b^n\|_{L^6} \left(\|w^n\|_{L^3} (\|b^n - b^{n-1}\|_{L^2} + \|\xi_b^{n-1}\|_{L^2} + \|\theta_b^{n-1}\|_{L^2}) \right) \\
&\quad + \|\xi_b^n\|_{L^6} \left(\|b_h^{n-1}\|_{L^3} (\|\xi_w^n\|_{L^2} + \|\theta_w^n\|_{L^2}) \right) \\
&\leq \frac{\gamma_b}{8} \|\xi_b^n\|_{H^1}^2 + \frac{C}{\gamma_b} \|w^n\|_{L^3}^2 (\|b^n - b^{n-1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_b^{n-1}\|_{L^2}^2 + h^4 \|b^{n-1}\|_{H^2}^2) \\
&\quad + \frac{C}{\gamma_b} \|b_h^{n-1}\|_{L^3}^2 (\|\xi_w^n\|_{L^2}^2 + h^4 \|w^n\|_{H^2}^2), \tag{102}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{10} &= -\mu_1 \left(\frac{\theta_b^n + \xi_b^n}{1 + b_h^{n-1}}, \xi_b^n \right) - \mu_1 \left(b^n \frac{(b_h^{n-1} - b^{n-1}) + (b^{n-1} - b^n)}{(1 + b^n)(1 + b_h^{n-1})}, \xi_b^n \right) \\
&\leq \frac{\gamma_b}{8} \|\xi_b^n\|_{H^1}^2 + \mu_1 \|\xi_b^n\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\gamma_b} h^4 \|b^n\|_{H^2}^2 \\
&\quad + \frac{C}{\gamma_b} \|b^n\|_{L^3}^2 (\|\xi_b^{n-1}\|_{L^2}^2 + h^4 \|b^{n-1}\|_{H^2}^2 + \|b^n - b^{n-1}\|_{L^2}^2). \tag{103}
\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene la siguiente estimación clásica

$$\Delta t \sum_{n=1}^r \|[b^n - b^{n-1}, \sigma^n - \sigma^{n-1}]\|_{L^2}^2 \leq C(\Delta t)^4 \|[\partial_{tt} b, \partial_{tt} \sigma]\|_{L^2(L^2)}^2 + C(\Delta t)^2 \|[\partial_t b, \partial_t \sigma]\|_{L^2(L^2)}^2. \tag{104}$$

Entonces, usando (92)-(104) en (89)-(91), sumando las expresiones resultantes, multiplicando por Δt , sumando desde $k = 1$ hasta $k = n$, teniendo en cuenta que $b_h^{n-1} \geq 0$, usando los Lemas 2.5, 2.7 y 2.9, y recordando que $[\xi_w^0, \xi_b^0, \xi_\sigma^0] = [0, 0, 0]$, se llega a

$$\begin{aligned}
&\|[\xi_w^n, \xi_b^n, \xi_\sigma^n]\|_{L^2}^2 + \Delta t \sum_{k=1}^n \left(\gamma_w \|\xi_w^k\|_{H^1}^2 + \gamma_b \|\xi_b^k\|_{H^1}^2 + \gamma_\sigma \|\xi_\sigma^k\|_{H^1}^2 \right) \leq C_1 ((\Delta t)^2 + (\Delta t)^4) \\
&\quad + C_2 (h^4 + h^{2(r+1)}) + C_3 \Delta t \sum_{k=1}^n \|[\xi_w^{k-1}, \xi_b^{k-1}, \xi_\sigma^{k-1}]\|_{L^2}^2 + C_4 \Delta t \|[\xi_w^n, \xi_b^n, \xi_\sigma^n]\|_{L^2}^2. \tag{105}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si Δt es lo suficientemente pequeño como para que $\frac{1}{2} - C_4 \Delta t > 0$, aplicando el Lema de Gronwall discreto a (105), se concluye (88).

□

Como consecuencia del Teorema 2.1 y (30), se tiene el siguiente resultado:

Corolario 2.1 *Bajo las hipótesis del Teorema 2.1, las siguientes estimaciones para los errores totales son válidas*

$$\| [e_w^n, e_b^n, e_\sigma^n] \|_{l^\infty(L^2)} \leq C(\Delta t + \max\{h^2, h^{r+1}\}),$$

$$\| [e_w^n, e_b^n, e_\sigma^n] \|_{l^2(H^1)} \leq C(\Delta t + \max\{h, h^r\}).$$

2.5. SIMULACIONES NUMÉRICAS

En esta sección, se presentan algunos experimentos numéricos con el fin de ilustrar el buen comportamiento del esquema definido en (37)-(39), así como validar algunos resultados teóricos presentados en las secciones anteriores. Se muestran dos experimentos numéricos: en el primer experimento se verifica que el esquema propuesto en (37)-(39) proporciona una buena aproximación de la evolución de la vegetación en ambientes áridos, en los que es evidente la formación de patrones de Turing; y, en el segundo experimento, se valida numéricamente el orden de convergencia probado en las estimaciones de error. Se consideran los espacios \mathcal{X}_w , \mathcal{X}_σ y \mathcal{X}_b generados por elementos finitos \mathbb{P}_1 continuos. Todos los resultados numéricos se obtuvieron utilizando el software **Freefem++**.

Experimento 1. Dinámica y formación de patrones de vegetación: Para ilustrar la dinámica de la formación de patrones de vegetación en un ecosistema árido, se consideró el dominio rectangular $\Omega = (0, 100) \times (0, 100) \subset \mathbb{R}^2$, y los siguientes datos iniciales (simulando una región semiárida)

$$w_0(x, y) = \frac{R - \sqrt{R^2 - 4\mu_0^2}}{2} + \xi_1 \quad \text{y} \quad b_0(x, y) = \frac{2\mu_0}{R - \sqrt{R^2 - 4\mu_0^2}} + \xi_2,$$

donde ξ_i ($i = 1, 2$) son términos pequeños de perturbación aleatoria. Se tomaron los parámetros $D_w = 10$, $D_b = 0.2$, $R = 14$, $\mu_0 = 5$, $\mu_1 = 5.2$ y $\lambda = 0.2$. Además, se consideraron los parámetros discretos $\Delta t = 0.001$ y $h = 1/100$. A continuación se muestra el comportamiento del esquema agua-planta definido en (37)-(39) tomando los resultados de las simulaciones para los tiempos $t = 0, 5, 10$.

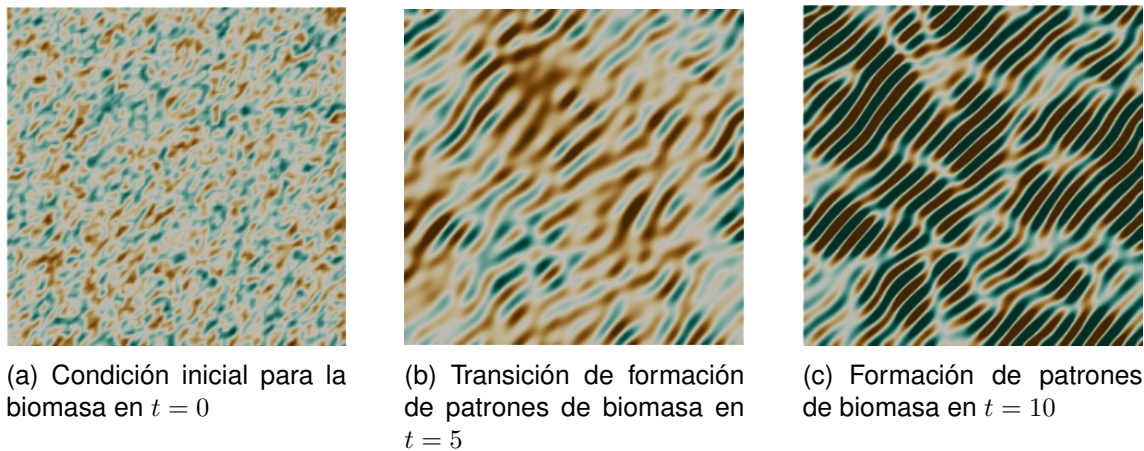


Figura 2. Comportamiento de la densidad de vegetación discreta b_h^n , considerando $\beta = 0$.

En la Figura 2 se muestra la evolución temporal de la dinámica de la vegetación, evidenciando la formación de franjas de vegetación en el ecosistema en el caso en que la difusión no es inducida por las raíces en la zona vadosa. La zona marrón corresponde a la zona árida, mientras que la verde corresponde a la zona con vegetación.

En la Figura 3 se muestra la formación de patrones de Turing en forma de parches de vegetación distribuidos a lo largo del respectivo dominio, inducidos por la difusividad hidráulica debida a la succión de agua por las raíces.

Experimento 2 (Tasas de convergencia): El objetivo de este experimento es validar numéricamente las tasas de convergencia obtenidas teóricamente. En este experi-



Figura 3. Comportamiento de la densidad de vegetación discreta b_h^n , considerando $\beta = 0.04$.

mento se consideró $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, y la siguiente solución exacta:

$$w = e^{-t}(\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y) + 3), \quad b = e^{-t}(\cos(2\pi x) + \sin(2\pi y) - 2\pi y + 9),$$

$$\sigma = \nabla b = 2\pi e^{-t}[-\sin(2\pi x), \cos(2\pi y) - 1],$$

y todos los parámetros en (37)-(39) se tomaron iguales a 1. Note que $\partial_\nu w = \partial_\nu b = 0$ sobre $\partial\Omega$. Además, se consideró una partición uniforme con $k + 1$ nodos en cada dirección (ejes x e y). En las Tablas 1-2 se muestran los resultados numéricos relacionados con las tasas de convergencia en el espacio, para un paso de tiempo fijo $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$ y con respecto al tiempo final $T = 1$. Se obtuvieron tasas de convergencia óptimas en el espacio, es decir, de segundo orden para los errores totales e_w^n y e_b^n en la norma $l^\infty(L^2)$, y de primer orden para la norma $l^2(H^1)$, lo que está de acuerdo con el análisis teórico realizado.

$k \times k$	$\ w(t_n) - w_h^n\ _{l^\infty(L^2)}$	Orden	$\ w(t_n) - w_h^n\ _{l^2(H^1)}$	Orden
15×15	2.743478×10^{-2}	-	5.011149×10^{-1}	-
20×20	1.553825×10^{-2}	1.9762	3.752221×10^{-1}	1.0057
25×25	9.961345×10^{-3}	1.9924	2.999719×10^{-1}	1.0031
30×30	6.912759×10^{-3}	2.0038	2.498925×10^{-1}	1.0018
35×35	5.068188×10^{-3}	2.0135	2.141543×10^{-1}	1.0012

Tabla 1. Tasas de convergencia en espacio para w .

$k \times k$	$\ b(t_n) - b_h^n\ _{l^\infty(L^2)}$	Orden	$\ b(t_n) - b_h^n\ _{l^2(H^1)}$	Orden
15×15	2.099720×10^{-2}	-	4.975529×10^{-1}	-
20×20	1.184016×10^{-2}	1.9914	3.737976×10^{-1}	0.9941
25×25	7.555810×10^{-3}	2.0130	2.992805×10^{-1}	0.9964
30×30	5.217789×10^{-3}	2.0307	2.495130×10^{-1}	0.9975
35×35	3.805950×10^{-3}	2.0468	2.139278×10^{-1}	0.9982

Tabla 2. Tasas de convergencia en espacio para b .

Por otro lado, algunos resultados numéricos de las tasas de convergencia en el tiempo se muestran en las Tablas 3-4 para $h = 1/600$ (es decir, $m = 600$ nodos en el espacio en cada dirección), con respecto al tiempo final $T = 1$. Se obtiene convergencia de primer orden en el tiempo para todas las variables en las normas $l^\infty(L^2)$ y $l^2(H^1)$, lo cual concuerda con el análisis teórico realizado.

Δt	$\ w(t_n) - w_h^n\ _{l^\infty(L^2)}$	Orden	$\ w(t_n) - w_h^n\ _{l^2(H^1)}$	Orden
2.777778×10^{-2}	1.001050×10^{-1}	-	1.577906×10^{-1}	-
2.380952×10^{-2}	8.681876×10^{-2}	0.9237	1.360717×10^{-1}	0.9607
2.083333×10^{-2}	7.667032×10^{-2}	0.9309	1.196670×10^{-1}	0.9621
1.851852×10^{-2}	6.863963×10^{-2}	0.9394	1.068422×10^{-1}	0.9624
1.666667×10^{-2}	6.212799×10^{-2}	0.9460	9.654419×10^{-2}	0.9620

Tabla 3. Tasas de convergencia en tiempo para w .

Δt	$\ b(t_n) - b_h^n\ _{l^\infty(L^2)}$	Orden	$\ b(t_n) - b_h^n\ _{l^2(H^1)}$	Orden
2.777778×10^{-2}	1.381839×10^{-1}	-	1.344131×10^{-1}	-
2.380952×10^{-2}	1.195990×10^{-1}	0.9370	1.162386×10^{-1}	0.9424
2.083333×10^{-2}	1.054264×10^{-1}	0.9446	1.024592×10^{-1}	0.9449
1.851852×10^{-2}	9.426013×10^{-2}	0.9505	9.165691×10^{-2}	0.9459
1.666667×10^{-2}	8.523453×10^{-2}	0.9553	8.296489×10^{-2}	0.9457

Tabla 4. Tasas de convergencia en tiempo para b .

3. APROXIMACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO DE VEGETACIÓN MULTIESPECIES

En este capítulo, se propone y se analiza un esquema numérico para aproximar las soluciones débiles del modelo (4), donde interactúan dos especies de plantas en un ecosistema árido. Se plantea un esquema numérico basado en el método de los elementos finitos, para el cual se analiza su buen planteamiento, y la no negatividad de las variables discretas correspondientes a la densidad de agua y las densidades de biomasa vegetal. Además, se presentan simulaciones numéricas que evidencian el buen comportamiento del esquema y la formación de patrones de Turing.

3.1. ESQUEMA NUMÉRICO

Para definir el esquema numérico usando el método de los elementos finitos, se considera la siguiente formulación débil del modelo (4):

$$\begin{cases} \langle \partial_t u_1, \bar{u}_1 \rangle + (\nabla u_1, \nabla \bar{u}_1) + B_1(u_1, \bar{u}_1) = (wu_1(u_1 + Hu_2), \bar{u}_1) - S(u_1 u_2, \bar{u}_1), \\ \langle \partial_t u_2, \bar{u}_2 \rangle + D(\nabla u_2, \nabla \bar{u}_2) + B_2(u_2, \bar{u}_2) = G(wu_2(u_1 + Hu_2), \bar{u}_2), \\ \langle \partial_t w, \bar{w} \rangle + d(\nabla w, \nabla \bar{w}) + (w, \bar{w}) = (A, \bar{w}) - (w(u_1 + u_2)(u_1 + Hu_2), \bar{w}), \end{cases} \quad (106)$$

para todo $[\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{w}] \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. La discretización temporal y espacial se asume como en el esquema (37)-(39); pero en este caso, definimos los espacios \mathcal{X}_{u_1} , \mathcal{X}_{u_2} y \mathcal{X}_w , para las variables $u_{1,h}$, $u_{2,h}$ y w_h , como:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{u_1} &= \{u_1 \in C(\bar{\Omega}) : u_1|_K \in \mathbb{P}_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega), \\ \mathcal{X}_{u_2} &= \{u_2 \in C(\bar{\Omega}) : u_2|_K \in \mathbb{P}_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega), \\ \mathcal{X}_w &= \{w \in C(\bar{\Omega}) : w|_K \in \mathbb{P}_1 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Observación 3.1 *Al igual que en el esquema (37)-(39), la definición de los anteriores espacios es mediante polinomios lineales en cada elemento, y el uso del operador mass lumping en el esquema (107)-(109), serán necesarios para obtener una formulación adecuada con el fin de demostrar la no negatividad de las soluciones discretas (ver Lema 3.1).*

3.1.1. Definición del esquema numérico. Teniendo en cuenta la formulación débil (106) y la definición del operador Q_z^h dada en (35) (en este caso, para la variable general $z = u_1, u_2, w$), se considera el siguiente esquema numérico de primer orden en el tiempo, lineal y desacoplado:

- **Inicialización:** Sea $[u_{1,h}^0, u_{2,h}^0, w_h^0] = [Q_{u_1}^h u_{10}, Q_{u_2}^h u_{20}, Q_w^h w_0] \in \mathcal{X}_{u_1} \times \mathcal{X}_{u_2} \times \mathcal{X}_w$.
- **[Paso 1]** Dado $[u_{1,h}^{n-1}, u_{2,h}^{n-1}, w_h^{n-1}] \in \mathcal{X}_{u_1} \times \mathcal{X}_{u_2} \times \mathcal{X}_w$, encontrar $u_{1,h}^n \in \mathcal{X}_{u_1}$ resolviendo, para todo $\bar{u}_1 \in \mathcal{X}_{u_1}$,

$$\begin{aligned} (\delta_t u_{1,h}^n, \bar{u}_1)^h + (\nabla u_{1,h}^n, \nabla \bar{u}_1) + B_1(u_{1,h}^n, \bar{u}_1)^h & \quad (107) \\ & = (w_h^{n-1} u_{1,h}^{n-1} (u_{1,h}^{n-1} + H u_{2,h}^{n-1}), \bar{u}_1) - S(u_{1,h}^n u_{2,h}^{n-1}, \bar{u}_1)^h. \end{aligned}$$

- **[Paso 2]** Dado $[u_{1,h}^n, u_{2,h}^{n-1}, w_h^{n-1}] \in \mathcal{X}_{u_1} \times \mathcal{X}_{u_2} \times \mathcal{X}_w$, encontrar $u_{2,h}^n \in \mathcal{X}_{u_2}$ resolviendo, para todo $\bar{u}_2 \in \mathcal{X}_{u_2}$,

$$\begin{aligned} (\delta_t u_{2,h}^n, \bar{u}_2)^h + D(\nabla u_{2,h}^n, \nabla \bar{u}_2) + B_2(u_{2,h}^n, \bar{u}_2)^h & = G(w_h^{n-1} u_{2,h}^{n-1} (u_{1,h}^n + H u_{2,h}^{n-1}), \bar{u}_2). \\ & \quad (108) \end{aligned}$$

- **[Paso 3]** Dado $[u_{1,h}^n, u_{2,h}^n, w_h^{n-1}] \in \mathcal{X}_{u_1} \times \mathcal{X}_{u_2} \times \mathcal{X}_w$, encontrar $w_h^n \in \mathcal{X}_w$ resolviendo, para todo $\bar{w} \in \mathcal{X}_w$,

$$\begin{aligned} (\delta_t w_h^n, \bar{w})^h + d(\nabla w_h^n, \nabla \bar{w}) + (w_h^n, \bar{w})^h & = (A, \bar{w}) - (w_h^n (u_{1,h}^n + u_{2,h}^n) (u_{1,h}^n + H u_{2,h}^n), \bar{w})^h. \\ & \quad (109) \end{aligned}$$

El esquema numérico definido en (107)-(109) está bien puesto y preserva la positividad de todas las variables. Este es el contenido de los siguientes lemas.

Lema 3.1 (Positividad para $u_{1,h}^n$, $u_{2,h}^n$ y w_h^n). *Sea $([u_{1,h}^n, u_{2,h}^n, w_h^n])_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por el esquema (107)-(109). Si $u_{1,h}^{n-1}, u_{2,h}^{n-1}, w_h^{n-1} \geq 0$, entonces $u_{1,h}^n, u_{2,h}^n, w_h^n \geq 0$.*

Demostración: Tomando $\bar{u}_1 = I_h([u_{1,h}^n]_-) \in \mathcal{X}_{u_1}$ en (107), se tiene que

$$\begin{aligned} & (\delta_t u_{1,h}^n, I_h([u_{1,h}^n]_-))^h + (\nabla u_{1,h}^n, \nabla I_h([u_{1,h}^n]_-)) + B_1(u_{1,h}^n, I_h([u_{1,h}^n]_-))^h \\ & = (w_h^{n-1} u_{1,h}^{n-1} (u_{1,h}^{n-1} + H u_{2,h}^{n-1}), I_h([u_{1,h}^n]_-)) - S(u_{1,h}^n u_{2,h}^{n-1}, I_h([u_{1,h}^n]_-))^h. \end{aligned} \quad (110)$$

A partir de la definición del operador de interpolación nodal I_h , el semiproducto interno $(\cdot, \cdot)^h$ (dado en (34)), usando el hecho que $u_{1,h}^{n-1} \geq 0$ y $(I_h(u_1))^2 \leq I_h(u_1^2)$ para todo $u_1 \in C(\bar{\Omega})$, se obtiene que

$$\begin{aligned} (\delta_t u_{1,h}^n, I_h([u_{1,h}^n]_-))^h & = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} I_h([u_{1,h}^n]_-)^2 dx - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} I_h(u_{1,h}^{n-1} [u_{1,h}^n]_-) dx \\ & \geq \frac{1}{\Delta t} \|I_h([u_{1,h}^n]_-)\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (111)$$

Además, recordando que $u_{1,h}^n = I_h([u_{1,h}^n]_+) + I_h([u_{1,h}^n]_-)$, y usando la Proposición 2.5 de ²⁹ se deduce que $(\nabla I_h([u_{1,h}^n]_+), \nabla I_h([u_{1,h}^n]_-)) \geq 0$, y por lo tanto,

$$(\nabla u_{1,h}^n, \nabla I_h([u_{1,h}^n]_-)) \geq \|\nabla I_h([u_{1,h}^n]_-)\|_{L^2}^2. \quad (112)$$

Entonces, usando el hecho de que $w_h^{n-1}, u_{2,h}^{n-1}, B_1, H, S \geq 0$, se tiene

$$B_1(u_{1,h}^n, I_h([u_{1,h}^n]_-))^h = B_1 \int_{\Omega} I_h([u_{1,h}^n]_-)^2 dx \geq B_1 \|I_h([u_{1,h}^n]_-)\|_{L^2}^2, \quad (113)$$

$$(w_h^{n-1} u_{1,h}^{n-1} (u_{1,h}^{n-1} + H u_{2,h}^{n-1}), I_h([u_{1,h}^n]_-)) \leq 0, \quad (114)$$

$$-S(u_{1,h}^n u_{2,h}^{n-1}, I_h([u_{1,h}^n]_-))^h = -S \int_{\Omega} I_h(u_{2,h}^{n-1} ([u_{1,h}^n]_-)^2) \leq 0. \quad (115)$$

Por lo tanto, de (110)-(115), se llega a

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + B_1 \right) \|I_h([u_{1,h}^n]_-)\|_{L^2}^2 + \|\nabla I_h([u_{1,h}^n]_-)\|_{L^2}^2 \leq 0,$$

lo que implica que $[u_{1,h}^n]_- = 0$, y por tanto, $u_{1,h}^n \geq 0$. Tomando, $\bar{u}_2 = I_h([u_{2,h}^n]_-) \in \mathcal{X}_{u_2}$ en (108), desarrollando de manera análoga como en (110)-(115) y teniendo en cuenta $G(w_h^{n-1} u_{2,h}^{n-1} (u_{1,h}^n + H u_{2,h}^{n-1}), I_h([u_{2,h}^n]_-)) \leq 0$ (puesto que $u_{1,h}^n, u_{2,h}^{n-1}, w_h^{n-1}, B_2, G, H \geq 0$), se concluye que $u_{2,h}^n \geq 0$. Finalmente, tomando $\bar{w} = I_h([w_h^n]_-) \in \mathcal{X}_w$ en (109) se tiene que

$$\begin{aligned} & (\delta_t w_h^n, I_h([w_h^n]_-))^h + d(\nabla w_h^n, \nabla I_h([w_h^n]_-)) + (w_h^n, I_h([w_h^n]_-))^h \\ & = (A, I_h([w_h^n]_-)) - (w_h^n (u_{1,h}^n + u_{2,h}^n) (u_{1,h}^n + H u_{2,h}^n), I_h([w_h^n]_-))^h. \end{aligned} \quad (116)$$

Note que, $(w_h^n, I_h([w_h^n]_-))^h = \int_{\Omega} I_h(([w_h^n]_-)^2) d\mathbf{x} \geq \|I_h([w_h^n]_-)\|_{L^2}^2$. Así, similar a lo argumentado en (111)-(112), usando el hecho que $A, H, d, u_{1,h}^n, u_{2,h}^n, w_h^{n-1} \geq 0$ y

$$\begin{aligned} & (w_h^n (u_{1,h}^n + u_{2,h}^n) (u_{1,h}^n + H u_{2,h}^n), I_h([w_h^n]_-))^h \\ & = \int_{\Omega} I_h((u_{1,h}^n + u_{2,h}^n) (u_{1,h}^n + H u_{2,h}^n) ([w_h^n]_-)^2) d\mathbf{x} \geq 0, \end{aligned}$$

de (116) se sigue que

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + 1 \right) \|I_h([w_h^n]_-)\|_{L^2}^2 + d \|\nabla I_h([w_h^n]_-)\|_{L^2}^2 \leq 0,$$

lo cual implica que $w_h^n \geq 0$.

□

Lema 3.2 (Buena postura del esquema (107)-(109)). *Dado* $[u_{1,h}^{n-1}, u_{2,h}^{n-1}, w_h^{n-1}] \in$

$\mathcal{X}_{u_1} \times \mathcal{X}_{u_2} \times \mathcal{X}_w$, existe una única $[u_{1,h}^n, u_{2,h}^n, w_h^n] \in \mathcal{X}_{u_1} \times \mathcal{X}_{u_2} \times \mathcal{X}_w$ solución del esquema (107)-(109).

Demostración: Dado que (107)-(109) son esquemas lineales, para mostrar que existe una única solución $[u_{1,h}^n, u_{2,h}^n, w_h^n] \in \mathcal{X}_{u_1} \times \mathcal{X}_{u_2} \times \mathcal{X}_w$ de (107)-(109), es suficiente probar la unicidad. Se probará inicialmente la unicidad para $u_{1,h}^n$. Considerando $[u_{1,h}^{n-1}, u_{2,h}^{n-1}, w_h^{n-1}] \in \mathcal{X}_{u_1} \times \mathcal{X}_{u_2} \times \mathcal{X}_w$, suponga que existen $u_{11,h}^n, u_{12,h}^n \in \mathcal{X}_{u_1}$ dos posibles soluciones de (107). Denotando por $u_{1,h}^n = u_{11,h}^n - u_{12,h}^n$, y tomando la diferencia entre las dos ecuaciones resultantes de (107) satisfechas por $u_{11,h}^n$ y $u_{12,h}^n$ respectivamente, se obtiene

$$\frac{1}{\Delta t}(u_{1,h}^n, \bar{u}_1)^h + (\nabla u_{1,h}^n, \nabla \bar{u}_1) + B_1(u_{1,h}^n, \bar{u}_1)^h = -S(u_{2,h}^{n-1} u_{1,h}^n, \bar{u}_1)^h, \quad \forall \bar{u}_1 \in \mathcal{X}_{u_1}, \quad (117)$$

de lo cual, tomando $\bar{u}_1 = u_{1,h}^n$ en (117) y usando la observación 2.1, se deduce que

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + B_1 \right) \|u_{1,h}^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_{1,h}^n\|_{L^2}^2 = -S(u_{2,h}^{n-1}, (u_{1,h}^n)^2)^h \leq 0,$$

lo que implica que $u_{11,h}^n = u_{12,h}^n$. De manera análoga, conociendo la existencia y unicidad de un $u_{1,h}^n \in \mathcal{X}_{u_1}$, se muestra la unicidad de $u_{2,h}^n \in \mathcal{X}_{u_2}$ solución de (108). En efecto, si $u_{21,h}^n$ y $u_{22,h}^n$ son dos posibles soluciones de (108), tomando $u_{2,h}^n = u_{21,h}^n - u_{22,h}^n$, se tiene que $u_{2,h}^n$ satisface

$$\frac{1}{\Delta t}(u_{2,h}^n, \bar{u}_2)^h + D(\nabla u_{2,h}^n, \nabla \bar{u}_2) + B_2(u_{2,h}^n, \bar{u}_2)^h = 0, \quad \forall \bar{u}_2 \in \mathcal{X}_{u_2}, \quad (118)$$

luego, tomando $\bar{u}_2 = u_{2,h}^n$ en (118), se obtiene que

$$\left(\frac{1}{\Delta t} + B_2 \right) \|u_{2,h}^n\|_{L^2}^2 + D\|\nabla u_{2,h}^n\|_{L^2}^2 = 0,$$

concluyendo así que $u_{2,h}^n = 0$; luego, $u_{21,h}^n = u_{22,h}^n$. Finalmente, dado $[u_{1,h}^n, u_{2,h}^n, w_h^{n-1}] \in$

$\mathcal{X}_{u_1} \times \mathcal{X}_{u_2} \times \mathcal{X}_w$, si $w_{1,h}^n$ y $w_{2,h}^n$ son dos posibles soluciones de (109), tomando $w_h^n = w_{1,h}^n - w_{2,h}^n$, se tiene que w_h^n satisface

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(w_h^n, \bar{w})^h + d(\nabla w_h^n, \nabla \bar{w}) + (w_h^n, \bar{w})^h & \quad (119) \\ & = -(w_h^n(u_{1,h}^n + u_{2,h}^n)(u_{1,h}^n + H u_{2,h}^n), \bar{w})^h, \quad \forall \bar{w} \in \mathcal{X}_w. \end{aligned}$$

Tomando $\bar{w} = w_h^n$ en (119) y teniendo en cuenta que $((u_{1,h}^n + u_{2,h}^n)(u_{1,h}^n + H u_{2,h}^n), (w_h^n)^2)^h \geq 0$, se concluye que $w_{1,h}^n = w_{2,h}^n$.

□

3.2. SIMULACIONES NUMÉRICAS

En esta sección, se verifica que el esquema definido en (107)-(109) que describe la interacción multiespecies, presenta una buena aproximación del desarrollo y la evolución de la vegetación. Se consideran los espacios \mathcal{X}_{u_1} , \mathcal{X}_{u_2} y \mathcal{X}_w , generados por elementos finitos \mathbb{P}_1 continuos. Todos los resultados numéricos se obtuvieron utilizando el software **Freefem++**.

Para ilustrar la dinámica de la formación de patrones en el modelo de vegetación multiespecies, se consideró el dominio rectangular $\Omega = (0, 200) \times (0, 200) \subset \mathbb{R}^2$, y los siguientes datos iniciales (simulando una región semiárida):

$$u_{10}(x, y) = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B_1^2}}{2} + \xi_1, \quad u_{20}(x, y) = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B_2^2}}{2} + \xi_2,$$

$$w_0(x, y) = \frac{2\mu_0}{A - \sqrt{A^2 - 4B_1^2}} + \xi_3,$$

donde ξ_i ($i = 1, 2, 3$) son términos pequeños de perturbación aleatoria. Se tomaron los parámetros $D = 0.802$, $d = 500$, $A = 1.5$, $H = 0.802$, $G = 0.802$, $B_2 = 0.3611$, $B_1 = 0.45$ y $S = 0.0002$. Además, se consideraron los parámetros discretos $\Delta t =$

0.01 y $h = 1/100$. A continuación se muestra el comportamiento del esquema de vegetación multiespecies (107)-(109) tomando los resultados de las simulaciones para los tiempos $t = 0, 1, 5$. En las Figuras 4 y 5 se muestra la evolución temporal de

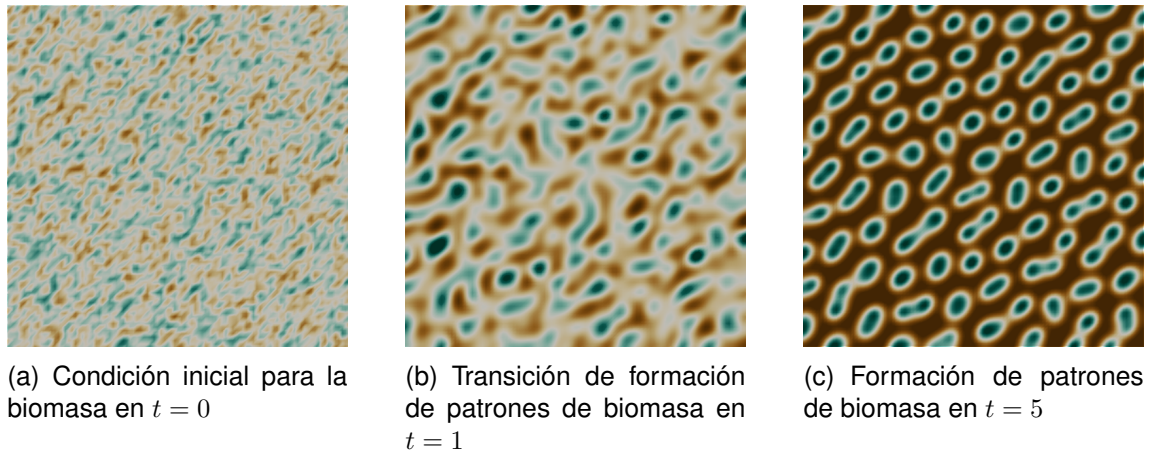


Figura 4. Comportamiento de la densidad de vegetación discreta $u_{1,h}^n$.

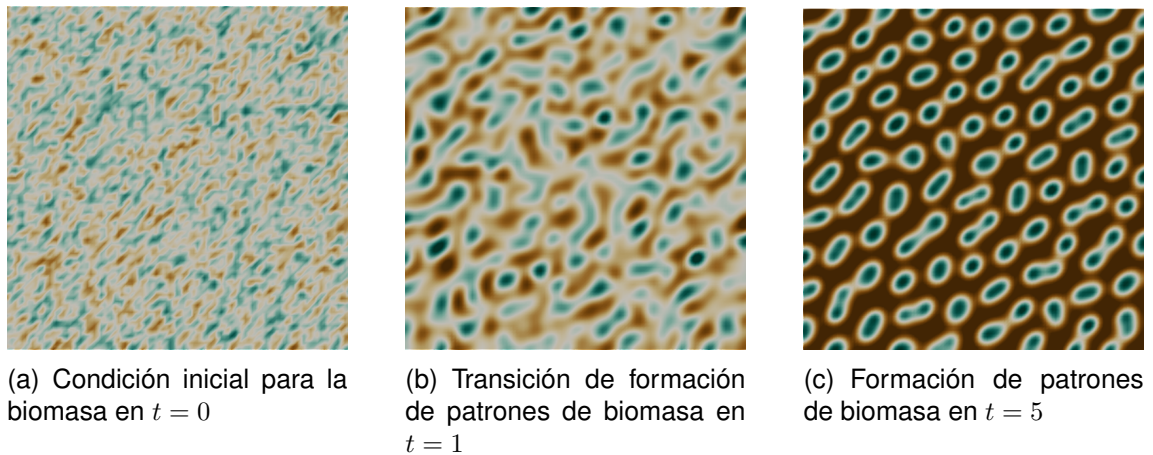


Figura 5. Comportamiento de la densidad de vegetación discreta $u_{2,h}^n$.

la dinámica de la vegetación multiespecies, evidenciando la formación de patrones de Turing en forma de parches de vegetación en el ecosistema. Se observa un estado de estabilidad para ambas especies en el que coexisten, ya sea en una configuración estampada o uniformemente en el espacio.

4. CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos en el presente trabajo, se tienen las siguientes conclusiones:

- Se realizó un estudio teórico y numérico de sistemas de EDP acoplados no lineales que describen la evolución de especies vegetales sujetas a una fuente hídrica, en ambientes áridos.
- Se analizó la existencia de soluciones blandas globales en el tiempo para el modelo agua-planta (3), considerando una clase de datos iniciales, en espacios $L^p(\Omega)$.
- Se diseñó un esquema completamente discreto para la aproximación de las soluciones del modelo agua-planta (3), usando los métodos de diferencias finitas en tiempo y elementos finitos en espacio, considerando un sistema de EDP equivalente. Se probó el buen planteamiento del esquema numérico, la positividad de las variables discretas, y algunas estimaciones uniformes, en normas débiles y fuertes, para las variables discretas (independientes de los parámetros discretos). Así mismo, se realizó el correspondiente análisis de convergencia hacia soluciones regulares del problema continuo bajo estudio, probando estimaciones de error óptimas en tiempo y en espacio.
- Se diseñó un esquema completamente discreto para la aproximación de las soluciones del modelo multiespecies (4), usando también los métodos de diferencias finitas en tiempo y elementos finitos en espacio. Se probó el buen planteamiento del esquema numérico y la positividad de las variables discretas.
- Se presentaron los resultados de tres experimentos numéricos realizados para

validar el buen comportamiento de los esquemas numéricos estudiados, los cuales incluyen la captura de la formación de patrones de Turing y la validación numérica de órdenes de convergencia.

BIBLIOGRAFÍA

- AGUIAR, M.R. y O.E. SALA. “Patch structure, dynamics and implications for the functioning of arid ecosystems”. En: *Trends Ecol Evol* 7 (1999), págs. 273-277 (vid. pág. 9).
- AMROUCHE, C. y N. E. H SELOULA. “ L^p -theory for vector potentials and Sobolev’s inequalities for vector fields: application to the Stokes equations with pressure boundary conditions”. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 23 (2013), págs. 37-92 (vid. pág. 31).
- BARRET, J. W. y J. F. BLOWEY. “Finite element approximation of a nonlinear cross-diffusion population model”. En: *Numerische Mathematik* 98 (2004), págs. 195-221 (vid. pág. 36).
- BRENNER, S. R. *The mathematical theory of finite element methods Vol. 15*. Springer Science Business Media, 2007 (vid. págs. 32, 34, 35).
- C. LEI, G. ZHANG y J. ZHOU. “Pattern formation of a biomass-water reaction-diffusion model”. En: *Applied Mathematics Letters* 123 (2022) (vid. pág. 11).
- D. CONTE, G. PAGANO y B. PATERNOSTER. “Nonstandard finite differences numerical methods for a vegetation reaction–diffusion model”. En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 419 (2023), págs. 2290-2322 (vid. pág. 14).
- EINGENTLER, L. y J. A. SHERRAT. “Metastability as a Coexistence Mechanism in a Model for Dryland Vegetation Patterns”. En: *Society for Mathematical Biology* 81 (2019), págs. 2290-2322 (vid. págs. 13, 14).

- ELLIOT, C.M. y H. GARCKE. “Regular pattern formation in real ecosystems”. En: *Trends Ecology Evolution* 23 (2008), págs. 169-175 (vid. pág. 9).
- F. BORGOGNO, et al. “Mathematical models of vegetation pattern formation in ecohydrology”. En: *Reviews of Geophysics* 47 (2009), págs. 1-36 (vid. pág. 9).
- F. GUILLÉN-GONZALÉZ, M. A. RODRÍGUEZ-BELLIDO y D. A. RUEDA-GÓMEZ. “Study of a chemo-repulsion model with quadratic production. Part II: analysis of an unconditionally energy-stable fully discrete scheme”. En: *Comput. Math. Appl* 80 (2020), págs. 636-652 (vid. pág. 41).
- FEIREISL, E. y A. NOVOTNÝ. *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids. Advances in Mathematical Fluid Mechanics*. Birkhäuser Verlag, 2009 (vid. pág. 28).
- FERREIRA, L. C. F. y E. J. VILLAMIZAR-ROA. “Global existence for an attraction-repulsion chemotaxis fluid model with logistic source”. En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B* 2 (2019), págs. 423-447 (vid. págs. 15, 20, 22).
- “On the heat equation with concave-convex nonlinearity and initial data in weak- L^p spaces”. En: *Commun. Pure App. Anal.* 6 (2011), págs. 1715-1732 (vid. pág. 15).
- “On the stability problem for the Boussinesq equations in weak- L^p spaces”. En: *Commun. Pure App. Anal.* 3 (2010), págs. 667-684 (vid. pág. 15).
- “Self-similar solutions, uniqueness and long-time asymptotic behavior for semilinear heat equations”. En: *Differential Integral Equations* 12 (2006), págs. 1349-1370 (vid. pág. 15).

- GUILLÉN-GONZÁLEZ, F. y J. V. GUTIÉRREZ-SANTACREU. “From a cell model with active motion to a Hele-Shaw-like system: a numerical approach”. En: *Numerische Mathematik* 143 (2019), págs. 107-137 (vid. págs. 38, 51, 64).
- I. MORENO-VILLAMIL, D. A. RUEDA-GÓMEZ y E. J. VILLAMIZAR-ROA. “On a cross-diffusion model in ecohydrology: theory and numerics”. En: *Manuscrito* (2024) (vid. págs. 18, 30).
- *On the theoretical and numerical analysis of a vegetation model with cross-diffusion. Analysis y PDE in Latin America - ICMAM 2022 Latin America*, Springer, 2024 (vid. págs. 18, 30).
- J. VON HARDENBERG E. MERON, M. SHACHAK e Y. ZARMI. “Diversity of vegetation patterns and desertification”. En: *Physical Review* 87 (2001) (vid. págs. 11, 12).
- K. GOWDA Y. CHEN, S. IAMS y M. SILBER. “Assessing the robustness of spatial pattern sequences in a dryland vegetation model”. En: *Proc. R. Soc. A* 472 (2016) (vid. pág. 9).
- KLAUSMEIER, C. A. “Regular and irregular patterns in semiarid vegetation”. En: *Science* 284 (1999), págs. 1826-1828 (vid. págs. 9-11).
- LUNARDI, A. *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1995 (vid. pág. 19).
- M. RIETKERK S. DEKKER, P.C. DE RUITER y J. VAN DE KOPPEL. “Self-organized patchiness and catastrophic shifts in ecosystems”. En: *Environmental Science, Biology* 305 (2004), págs. 1926-1929 (vid. págs. 9, 11).

- MANOR, A. y N. M. SHNERB. “Dynamical failure of Turing patterns”. En: *Europhysics Letters* 74 (2006), 837–843 (vid. págs. 11, 12).
- MORA, X. “Semilinear parabolic problems define semiflows on C^k spaces”. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 278 (1983), págs. 21-55 (vid. pág. 20).
- N. SHNERB P.SARAH, H. LAVEE y S. SOLOMON. “Reactive glass and vegetation patterns”. En: *Physical Review Letters* 90 (2003), págs. 038-101 (vid. pág. 11).
- Q. LIU, Z. JIN y B. LI. “Numerical investigation of spatial pattern in a vegetation model with feedback function”. En: *Journal of Theoretical Biology* 254 (2008), págs. 350-360 (vid. pág. 12).
- R. BECKER, X. FENG y A. PROHL. “Finite element approximations of the Ericksen-Leslie model for nematic liquid crystal flow”. En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 46 (2008), págs. 1704-1731 (vid. pág. 36).
- SÜLI, E. y D. F. MAYERS. *An introduction to numerical analysis*. Cambridge university press, 2003 (vid. pág. 35).
- X. WANG, W. WANG y G. ZHANG. “Vegetation pattern formation of a water-biomass model”. En: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 42 (2017), págs. 571-584 (vid. págs. 11, 12).