CONTINUOS DÉBILMENTE UNICOHERENTES

MAYER YULIAN PALACIOS ARENAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2017

CONTINUOS DÉBILMENTE UNICOHERENTES

MAYER YULIAN PALACIOS ARENAS

Trabajo de grado presentado para optar al
título de Magister en Matemáticas

Director
JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA
Doctor en Ciencia de la Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2017

DEDICATORIA

A mi familia por ser el pilar fundamental en todo lo que soy. También, por ser mi fuente de fortaleza y creer en mis sueños.

Al profesor Javier Camargo, por la paciencia, enseñanza, dedicación y empeño y a todos los maestros que me enseñaron en estos años.

Y a todos los que participaron directa o indirectamente en el desarrollo de este libro.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

TÍTULO: CONTINUOS DÉBILMENTE UNICOHERENTES*

AUTOR: MAYER YULIAN PALACIOS ARENAS**

PALABRAS CLAVES: Continuo, continuo unicoherente, hereditariamente unicoherente, débilmente unicoherente, hereditariamente débilmente unicoherente.

DESCRIPCIÓN:
La teoría de continuos estudia los espacios métricos, compactos, conexos y no vacíos llamados continuos; el estudio de los continuos, se concentra en identificar propiedades importantes en ellos, un ejemplo es la unicoherencia débil en continuos. Un continuo es débilmente unicoherente, si al ver el espacio como la unión de dos subcontinuos, cuya intersección tiene interior no vacío, se tiene que la intersección de los dos subcontinuos es conexa. Un arco y una 2-celda son continuos débilmente unicoherentes, mientras una curva cerrada simple no lo es.

Este trabajo se desarrolla de la siguiente manera: el primero consiste en la revisión de conceptos generales de topología y teoría de continuos, además de las herramientas básicas para la construcción de continuos como la intersección anidada de continuos y límites inversos de continuos; finalmente, se revisa algunas propiedades de continuos irreducibles, indescomponibles, unicoherentes y *s*-conexos.
El segundo capítulo profundiza sobre los continuos débilmente unicoherentes y hereditariamentes débilmente unicoherentes, se muestran ejemplos y propiedades; así mismo, se verá su relación con la unicoherencia y la unicoherencia hereditaria respectivamente.
Posteriormente, en el tercer capítulo se estudia las funciones monótonas, casimonótonas, cuasimonótonas, fuertemente libremente descomponibles y libremente descomponibles y se muestran las relaciones entre dichas funciones. Dado que las funciones continuas y abiertas no preservan unicoherencia débil, se estudia la imagen de continuos débilmente unicoherentes a través de las funciones definidas en el Tercer Capítulo y se muestra cuáles de estas funciones preservan unicoherencia débil. Además, se estudia la relación entre las funciones fuertemente libremente descomponibles y las funciones casimonótonas, cuando el dominio es un continuo que satisface ciertas propiedades.

*Trabajo de investigación

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.
Director: PhD. Javier Enrique Camargo García.

ABSTRACT

TITLE: WEAKLY UNICOHERENT CONTINUA***

AUTHOR: MAYER YULIAN PALACIOS ARENAS****

KEYWORDS: Continuum, unicoherent continuum, hereditarily unicoherent, weakly unicoherent, hereditarily weakly unicoherent.

DESCRIPTION:
The continuum theory study the spaces nonempty compacts, connected and metric named continuum; the study of the continua, is concentrated to identify important properties, how unicoherence weakly at continuum. A continuum is called weakly unicoherent, if the space see it how the union of two subcontinua such that intersection of the two subcontinua have nonempty interior, then intersection of the two subcontinua is connected. An arc and an 2-cell are continuum weakly unicoherents, while simple closed curve isn't it.

This monograph is developed of the following way: on the first some topological general and of theory continuum concepts are reviewed, also the construction of continuum are shown via the nested intersection on continua and inverse limits of continua; finally, in this chapter we review some properties of continua irreducible, indescomposable, unicoherents and *s*-connected.
On the second chapter explores over the weakly unicoherent continua and hereditarily weakly unicoherent, we introducing some examples and properties; also we will see your relationship with the unicoherence and unicoherence hereditary.
Subsequently, on the third chapter, we study almost monotone function, quasi-monotone function, strongly freely decomposable function y freely decomposable function and some relationships between these kinds of functions. Since that the weakly unicoherence isn't preserved by functions continuous and opens, we study the images of weakly unicoherent continua through the functions defined in Chapter 3 and it is shown which of those functions preserve weakly unicoherent continuum. Also, we study the relationship between strongly freely decomposable function and almost monotone function, when the domain is a continuum that satisfies certain properties.

***Research work
****Faculty of Sciences. School of Mathematics.
Director: PhD. Javier Enrique Camargo García.

INTRODUCCIÓN

Un continuo es un espacio metrizable, compacto y conexo diferente del vacío. En topología, particularmente en teoría de continuos, es importante definir y estudiar propiedades topológicas de manera local o global, que nos permitan describir, clasificar o caracterizar espacios. En el desarrollo histórico de la topología se han definido muchas propiedades que nos permiten describir espacios de manera diferente pero equivalentes.

En 1926, el profesor K. Kuratowski define unicoherencia de la siguiente manera: un espacio topólogico conexo X se dice *unicoherente*, siempre que para cualesquiera dos conexos cerrados A y B de X, tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Naturalmente, la recta real o cualquier intervalo son ejemplos de espacios unicoherentes. Particularmente, en teoría de continuos, el arco $[0, 1]$, un producto $[0, 1]^\alpha$, donde α es a lo más numerable, o cualquier árbol, son ejemplos de continuos unicoherentes. Intuitivamente, la unicoherencia se asocia a identificar un "hueco" en el espacio. La circunferencia unitaria en el plano complejo $\mathbb{C}$ denotada por S^1, o el toro $S^1 \times S^1$ son ejemplos de continuos no unicoherentes donde podemos imaginar y aceptar la existencia de tal "hueco". Desde la definición de Kuratowski, existen muchos trabajos de investigación relacionados con este concepto. Por ejemplo, investigadores con incuestionable influencia en el desarrollo de las matemáticas como K. Borsuk, S. Eilenberg, A. H. Stone, o Kuratowski, usaron en sus trabajos la unicoherencia. En [3], K. Borsuk introdujo su teoría de formas donde estudió y asoció el uso de funciones continuas en la circunferencia S^1 con la unicoherencia en continuos, y fue ampliamente desarrollado por S. Eilenberg en sus trabajos [10] y [11]. Por otro lado A. H. Stone, en [29], se dedicó a estudiar las propiedades de los espacios unicoherentes y localmente conexos. Posteriormente los autores en [13] ampliaron los estudios de unicoherencia realizados por Eilenberg y Stone.

Por otra parte, G. R. Gordh y C. B. Hughes en [14], introdujeron las funciones libremente descomponibles y fuertemente libremente descomponibles para estudiar la invarianza de la conexidad local en límites inversos, propiedad que satisfacen las funciones monótonas. Posteriormente en [5], se amplia el estudio de estas clases de funciones. Entre las propiedades presentadas por G. R. Gorth y C. B. Hughes está, que cada función fuertemente libremente descomponible de un continuo unicoherente sobre un localmente conexo es monótona. En [5, Teorema 4.2], los autores establecen que toda función fuertemente libremente descomponible definida en un continuo unicoherente es casimonótona. Con esta afirmación, es natural tratar de caracterizar la siguiente familia de continuos:

$$\mathcal{F} = \{X \text{ continuo } : \text{ Toda función } f\colon X \to Y \text{ fuertemente libremente descomponible es casimonótona}\}.$$

Note que todo continuo unicoherente está en $\mathcal{F}$, por [5, Teorema 4.2]. En [6], se define la noción de unicoherencia débil de la siguiente manera: Un continuo X se dice *débilmente unicoherente* si para cualesquiera subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$ y $\mathrm{Int}_X(A \cap B) \neq \emptyset$ se tiene que $A \cap B$ es conexo. Claramente todo continuo unicoherente es débilmente unicoherente. Esta noción se introduce como una condición natural que debe cumplir un continuo para estar en la familia $\mathcal{F}$. Un resultado interesante presentado en [6] es que todo continuo irreducible es débilmente unicoherente. Así, la familia $\mathcal{F}$ contiene a los continuos unicoherentes e irreducibles, clases de espacios ampliamente estudiadas en teoría de continuos. Sin embargo, existen continuos que no son débilmente unicoherentes y están en la familia $\mathcal{F}$ (ver [6, Ejemplo 5.3, pág. 6]).

Este trabajo se desarrolla de la siguiente manera: en el primer capítulo revisamos algunos conceptos generales de topología general y teoría de continuos. Se mostrarán mecanismos para construir continuos como: la intersección anidada de continuos, límites inversos de continuos y el espacio descomposición. Luego procedemos a estudiar teoría de grafos y poliedros los cuales serán importantes para resultados de nuestro trabajo; continuando se estudiarán los continuos irreducibles, indescomponibles, unicoherentes y s-conexos, las cuales son espacios ampliamente estudiados en teoría de continuos.
El segundo capítulo profundiza sobre variedad de ejemplos y propiedades de los continuos débilmente unicoherentes y hereditariamentes débilmente unicoherentes. Así mismo se verá su relación con la unicoherencia y la unicoherencia hereditaria, respectivamente. Además, se estudiará el comportamiento de la unicoherencia débil en productos, límites inversos y espacio adjunto de continuos. En el transcurso del capítulo se plantearán algunas preguntas abiertas.
En el tercer capítulo se estudia las funciones entre continuos: monótonas, casimonótonas, cuasimonótonas, fuertemente libremente descomponibles y libremente

descomponibles; y se muestran las relaciones entre dichas clases. Posteriormente se estudiará el comportamiento de la unicoherencia débil en funciones continuas, particularmente en estas clases de funciones. Para concluir este capítulo se estudia detalladamente la familia $\mathcal{F}$ y se establece un resultado que generaliza el continuo [6, Ejemplo 5.3, pág. 6] que se encuentra en la familia $\mathcal{F}$ y no es débilmente unicoherente.

1. PRELIMINARES

En este capítulo presentamos conceptos básicos de topología general y teoría de continuos que usamos en el estudio de continuos débilmente unicoherentes. En primera instancia, después de la definición de continuo y mostrar algunos ejemplos, vemos algunos resultados importantes que usamos constantemente relacionados con: conexidad local, conexidad en pequeño y puntos y conjuntos de corte. También introducimos las técnicas de intersección anidada de continuos y los límites inversos, como mecanismos para generar o construir continuos a partir de una familia de continuos dada. Finalmente, definimos los continuos unicoherentes, mostramos algunos ejemplos y presentamos propiedades de esta clase de continuos.

Dado X un espacio métrico y $K \subseteq X$, en el desarrollo de este trabajo notaremos por $\mathrm{Int}_X(K)$ al interior del conjunto K con respecto al espacio X; $\mathrm{Cl}_X(K)$, la cerradura del conjunto K con respecto al espacio X y $\mathrm{Fr}_X(K)$, la frontera del conjunto K con respecto al espacio X. $B(x;\epsilon)$ denota la bola abierta con centro en el punto x y radio ϵ.

1.1. CONTINUOS

Este trabajo lo desarrollamos en espacios topológicos con propiedades especiales que llamamos continuos y los definimos a continuación.

Definición 1.1.1. Un *continuo* es un espacio métrico compacto, conexo y diferente del vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en algún espacio métrico.

Diremos que un continuo K es un *subcontinuo propio* de un continuo X si $K \subseteq X$ y $K \neq X$. Además llamaremos *continuos no degenerados* aquellos continuos que tienen más de un punto. Algunos ejemplos en $\mathbb{R}^2$ se muestran a continuación.

Ejemplo 1.1.2.

1. Un *arco* es un continuo. Un arco es cualquier espacio homeomorfo al intervalo $[0,1]$. Además, si α es un arco y $h\colon [0,1] \to \alpha$ es un homemorfismo, entonces $h(0)$ y $h(1)$ son los puntos extremos de α.

2. Sea $A = \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0,1]\right\}$ y $W = \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^2}(A)$. Como $f\colon (0,1] \to [-1,1]$ definida por $f(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$ es continua, A es conexo y por tanto, W es un continuo. El continuo W se conoce como *la curva senoidal del topólogo*.

3. Una *curva cerrada simple* es un continuo. Una curva cerra simple es un espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$.

4. Sea $X = \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^2}\left(\left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0,1]\right\}\right) \cup (\{0\} \times [-1,-2]) \cup ([0, sen(1)] \times \{-2\}) \cup (\{1\} \times [-2, \operatorname{sen}(1)])$. Note que X es un continuo y se conoce como *círculo de Varsovia*.

5. Un *triodo simple* es un continuo homeomorfo a la letra "T", o al subespacio de $\mathbb{R}^3$,

$$([0,1] \times \{0\} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0,1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{0\} \times [0,1]).$$

   Un triodo simple es un continuo.

Los continuos enunciados en el Ejemplo 1.1.2 los representamos en la Figura 1.1.

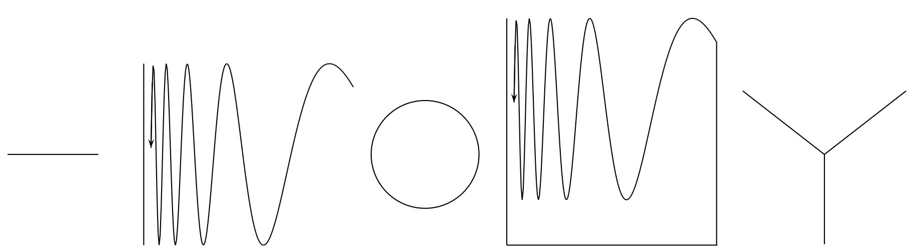


Figura 1.1: Continuos en el plano

El siguiente continuo será de gran importancia en nuestro trabajo.

Ejemplo 1.1.3. Sean X_1 y X_2 continuos homeomorfos a la curva senoidal del topólogo definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X_1 &= \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}\left(\left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0,1]\right\}\right), \\ X_2 &= \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}\left(\left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{-1}{x+1}\right)\right) : x \in [-2,-1)\right\}\right). \end{aligned}$$

Definimos $g\colon \{(0,-1),(0,1)\} \to \{(-1,-1),(-1,1)\}$, por $g(0,-1) = (-1,-1)$ y $g(0,1) = (-1,1)$ y tomamos el espacio adjunto $X = X_1 \cup_g X_2$.

Observe que $\{(0,-1),(0,1)\}$ es un subconjunto cerrado de X_1 y g es una función continua. De esta manera por [24, Teorema 3.20, pág. 43] se tiene que el espacio adjunto X es un continuo. La Figura 1.2 nos muestra la representación homeomorfa de este espacio adjunto.

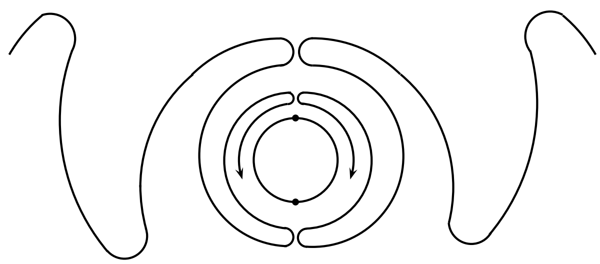


Figura 1.2: Espacio adjunto

Definición 1.1.4. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X *es localmente conexo en* x, si para cualquier abierto U de X tal que $x \in U$ existe un abierto conexo V de X tal que $x \in V \subseteq U$. Además diremos que X es *localmente conexo*, si X es localmente conexo en todo punto de X.

En el Ejemplo 1.1.2 el arco, el triodo y la curva cerrada simple son continuos localmente conexos. Sin embargo, la curva senoidal del topólogo definida, en el Ejemplo 1.1.2 no es localmente conexo, pues podemos ver que para cada punto en $\{0\} \times [-1,1]$, existen vecindades que no contienen un abierto conexo. De forma análoga se tiene que el círculo de Varsovia no es localmente conexo. Con este ejemplo vemos que la conexidad no implica la conexidad local.

Definición 1.1.5. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X *es conexo en pequeño en* x, si para cualquier abierto U de x, existe un subconjunto conexo V, tal que $V \subseteq U$ y $x \in \mathrm{Int}_X(V)$. Además diremos que X es *conexo en pequeño*, si X es conexo en pequeño en todo punto de X.

De la Definición 1.1.4 si X es localmente conexo en un punto x entonces X es conexo en pequeño en x. Sin embargo, estas dos nociones no son equivalentes puntualmente (véase [34, Ejemplo 27.15, pág. 201]).
El siguiente teorema muestra que de manera global la conexidad local y la conexidad en pequeño son equivalentes, este resultado puede ser encontrado en [34, Teorema 27.16].

Teorema 1.1.6. Un espacio topológico es localmente conexo si y sólo si es conexo en pequeño.

Los siguientes teoremas nos serán de gran utilidad, para probar algunas propiedades que preservan los continuos con relación a sus subcontinuos.

Teorema 1.1.7. Sea X un espacio topológico conexo y A un subconjunto cerrado y conexo de X. Si $X \setminus A = U \cup V$, donde U y V son abiertos disjuntos, entonces $A \cup U$ y $A \cup V$ son cerrados y conexos de X.

Demostración. Sean U y V abiertos disjuntos, tales que $X \setminus A = U \cup V$. Como $U \cap V = \emptyset$, se tiene que $X \setminus (A \cup V) = U$, y así es abierto, o equivalentemente $A \cup V$ es cerrado de X. Análogamente $A \cup U$ es cerrado en X. Así, debemos probar que $A \cup U$ y $A \cup V$ son conexos. Supongamos que $A \cup U = K \cup L$, donde K y L son dos cerrados disjuntos de X. Dado que A es conexo debe suceder que $A \subseteq K$ ó $A \subseteq L$. Sin pérdida de generalidad, tomemos $A \subseteq K$. Luego $L \subseteq U$ y por tanto $L \cap \mathrm{Cl}_X(K \cup V) = \emptyset$. Además $X = L \cup (K \cup V)$, contradiciendo la conexidad de X. De manera análoga demostramos que $A \cup V$ es conexo. □

El siguiente resultado es conocida como una versión el Teorema de golpes en la frontera, y será de gran ayuda para otros teoremas.

Teorema 1.1.8. Sean X un continuo y U un abierto no vacío y propio de X. Si K es una componente de $\mathrm{Cl}_X(U)$, entonces $K \cap \mathrm{Fr}_X(U) \neq \emptyset$.

Demostración. Sean U abierto propio de X diferente del vacío y K una componente de $\mathrm{Cl}_X(U)$. Supongamos que $K \cap \mathrm{Fr}_X(U) = \emptyset$. Nótese que K y $\mathrm{Fr}_X(U)$ son cerrados de $\mathrm{Cl}_X(U)$, tales que no existe un conexo que intersecte simultáneamente a K y $\mathrm{Fr}_X(U)$. Por [24, Teorema 5.2, pág. 72] existen X_1 y X_2 cerrados disjuntos de $\mathrm{Cl}_X(U)$, tales que $K \subseteq X_1$, $\mathrm{Fr}_X(U) \subseteq X_2$ y $\mathrm{Cl}_X(U) = X_1 \cup X_2$. Tomemos $X_3 = X_2 \cup (X \setminus U)$ y observe que X_3 es cerrado no vacío en X y $X = X_1 \cup X_3$. Finalmente, $X_1 \cap X_3 = \mathrm{Cl}_X(U) \cap (X \setminus U) = \mathrm{Fr}_X(U)$ y como $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, obtenemos que $X_1 \cap X_3 = \emptyset$, contradiciendo la conexidad de X. □

Proposición 1.1.9. Sean $X = Y \cup Z$, donde Y y Z son continuos, tales que $Y \cap Z = \{a, b\}$ y E un subcontinuo de X. Si $E \cap Y$ es disconexo, entonces $E \cap Y$ tiene exactamente dos componentes y cada una intersecta a $\{a, b\}$ y además, $E \cap Z$ es conexo.

Demostración. Si $(E \cap Y) \cap (Y \setminus \{a, b\}) = \emptyset$, entonces $E \cap Y = \{a, b\}$ que claramente tiene dos componentes y cada una intersecta a $\{a, b\}$. Sean $z \in (E \cap Y) \cap (Y \setminus \{a, b\})$ y L la componente de $E \setminus \{a, b\}$, tal que $z \in L$. Por el Teorema 1.1.8, $\mathrm{Cl}_X(L) \cap \{a, b\} \neq \emptyset$. Además, como $L \subseteq (Y \setminus \{a, b\}) \cup (Z \setminus \{a, b\})$ y $L \cap (Y \setminus \{a, b\}) \neq \emptyset$, tenemos que $L \subseteq Y \setminus \{a, b\}$ y $\mathrm{Cl}_X(L) \subseteq Y \cap E$. Así, cada componente de $Y \cap E$ intersecta a $\{a, b\}$ y concluimos que si $E \cap Y$ es disconexo, entonces $E \cap Y$ tiene exactamente dos componentes y cada una intersecta a $\{a, b\}$. Ahora si $E \cap Z$ es disconexo, entonces con el argumento anterior, $E \cap Z$ tiene exactamente dos componentes donde cada una intersecta a $\{a, b\}$; esta aseveración fácilmente contradice la conexidad de E. Con esto concluimos la prueba la proposición. □

Como consecuencias de la Proposición 1.1.9 tenemos lo siguiente:

Corolario 1.1.10. Sean $X = Y \cup Z$, donde Y y Z son continuos, tales que $Y \cap Z = \{a, b\}$ y E un subcontinuo de X. Si E es un subcontinuo de X tal que $|E \cap \{a, b\}| = 1$, entonces $E \cap Y$ y $E \cap Z$ son continuos.

1.2. CONSTRUCCIÓN DE CONTINUOS

Existen diferentes técnicas para construir espacios topológicos a partir de un espacio o una familia de espacios dada. Los productos y cocientes son naturalmente las herramientas más empleadas para este fin. Particularmente, en teoría de continuos sabemos que si definimos una partición semicontinua superiormente el espacio cociente es nuevamente un continuo, y que un producto a lo más numerable de continuos es un continuo (ver [24]). En está sección mostramos otras herramientas muy conocidas que permiten construir continuos.

1.2.1. Intersección anidada

Es bien conocido que la intersección encajada de espacios métricos compactos es nuevamente compacto. En esta subsección vemos que este resultado se mantiene en continuos. Este resultado se conoce como la técnica de intersecciones anidadas para construir continuos.

Proposición 1.2.1. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de espacios compactos métricos, tales que $X_{n+1} \subseteq X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$. Si U es un abierto de X_1 tal que $X \subseteq U$, entonces existe N tal que $X_n \subseteq U$ para todo $n \geq N$.

Demostración. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X_n \setminus U$. Observe que $X_1 \setminus U$ es cerrado, ya que $X_n \subseteq X_1$ y U es abierto de X_1. Así, obtenemos

$X_1 \setminus U$ compacto y por lo tanto, existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, tal que $x_{n_k} \to x$, para algún $x \in X_1 \setminus U$. Como $X_j \subseteq X_{n_k}$, para todo $j \geq n_k$, entonces $x_{n_i} \in X_{n_k}$ para cada $i \geq k$. Además X_{n_k} es cerrado, por lo tanto $x \in X_{n_k}$; para cualquier $k \in \mathbb{N}$. No es difícil ver que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_{n_k}$. Así, $x \in X \subseteq U$, lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 1.2.2. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos, tales que $X_{n+1} \subseteq X_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, entonces X es un continuo.

Demostración. Supongamos que X es disconexo. Luego existen A y B abiertos disjuntos no vacíos, tales que $X = A \cup B$. Como X_1 es un espacio normal existen abiertos disjuntos U y V, tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Sea $W = U \cup V$, entonces por la Proposición 1.2.1 $X_n \subseteq W$, para algún $n \in N$. De la aseveración anterior obtenemos que $X_n = (X_n \cap U) \cup (X_n \cap V)$. Como A y B son no vacíos y $X \subseteq X_1$, se tiene que $X_n \cap U \neq \emptyset$ y $X_n \cap V \neq \emptyset$ lo que contradice la conexidad de X_n. $\square$

En el Ejemplo 1.4.3 utilizamos el Teorema 1.2.2 para argumentar la existencia de un continuo indescomponible.

1.2.2. Límite inverso

Los límites inversos son un subespacio muy particular del espacio producto, que mantiene propiedades de los espacios factor.

Definición 1.2.3. Sean $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos y $f_n^{n+1} \colon X_{n+1} \to X_n$ función continua, llamada *función de ligadura*, para cada $n \in \mathbb{N}$. Decimos que la doble sucesión $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ es una *sucesión inversa* de continuos.

Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos. Entonces el *límite inverso* de $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ denotado por $\varprojlim\{X_n, f_n^{n+1}\}$ o X_∞, es un subconjunto del producto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, el cual está definido como

$$X_\infty = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \colon f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Como X_∞ es un subespacio de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, la topología de X_∞ esta dada por la topología relativa por X_∞, donde $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ está dotada de la topología producto (véase [34, Definición 6.1, pág, 41]). Es decir, los abiertos básicos son de la forma $[\cap_{k=1}^{l} \pi_{n_k}^{-1}(U_{n_k})] \cap X_\infty$, donde U_{n_k} es un abierto de X_{n_k} y π_{n_k} es la proyección de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ en X_{n_k} para cada $k \in \{1, ..., l\}$.
Las funciones proyección en el producto cartesiano, son herramientas importantes para relacionar el espacio producto con sus factores. Con el fin de relacionar

el límite inverso con cada factor, usamos las proyecciones restringidas al límite inverso. De esta manera definimos $f_n \colon X_\infty \to X_n$, tal que $f_n = \pi_n|_{X_\infty}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, definimos $f_i^{n+1} = f_i^{i+1} \circ f_{i+1}^{i+2} \circ ... \circ f_{n-1}^{n} \circ f_n^{n+1}$, para cualquier $i \leq n$. En capítulos posteriores será de gran importancia la siguiente observación.

Observación 1.2.4. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos con límite inverso X_∞. Aunque las funciones π_m son sobreyectivas, las proyecciones f_m no necesariamente son sobreyectivas. Sin embargo, si todas las funciones de ligadura son sobreyectivas, entonces las proyecciones son sobreyectivas y viceversa. Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n^{n+1} \circ f_{n+1} = f_n$; es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[dr, "f_n^{n+1}"'] & & X_\infty \arrow[ll, "f_{n+1}"'] \arrow[dl, "f_n"] \\ & X_n & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

En el Teorema 1.2.6, probaremos que el límite inverso de una sucesión inversa de continuos es un continuo. Para poder realizar la prueba del teorema será de utilidad el siguiente lema.

Lema 1.2.5. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos:

$$Q_i(X_n, f_n^{n+1}) = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \colon f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para todo } n \leq i\right\}.$$

Entonces:

1. $Q_{i+1}(X_n, f_n^{n+1}) \subseteq Q_i(X_n, f_n^{n+1})$, para todo $i \in \mathbb{N}$.
2. $Q_i(X_n, f_n^{n+1})$ es homeomorfo a $\prod_{n=i+1}^{\infty} X_n$, para todo $i \in \mathbb{N}$.
3. $X_\infty = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i(X_n, f_n^{n+1})$.

Demostración. Probemos (1). Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_{i+1}(X_n, f_n^{n+1})$ y por tanto, $x_n = f_n^{n+1}(x_{n+1})$, para todo $n \leq i+1$. Así, $x_n = f_n^{n+1}(x_{n+1})$, para todo $n \leq i$, es decir $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i(X_n, f_n^{n+1})$.
Para probar (2). Para $i \in \mathbb{N}$ definimos

$$\rho_i \colon Q_i(X_n, f_n^{n+1}) \to \prod_{n=i+1}^{\infty} X_n,$$

por $\rho_i((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (x_n)_{n=i+1}^{\infty}$, para todo $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i(X_n, f_n^{n+1})$. Para ver la continuidad de ρ_i, note que $\pi_n \circ \rho_i = \pi_n$, para cada $n \leq i+1$ y como las proyecciones son continuas, ρ_i es continua. Definimos

$$\varphi_i \colon \prod_{n=i+1}^{\infty} X_n \to Q_i(X_n, f_n^{n+1}),$$

por $\varphi_i(x_{i+1}, x_{i+2}, ...) = (f_1^{i+1}(x_{i+1}), ..., f_i^{i+1}(x_{i+1}), x_{i+1}, ...)$. No es difícil ver que φ_i es continua para cada i, y además que $\rho_i \circ \varphi_i = id$, $\varphi_i \circ \rho_i = id$. De la anterior afirmación y [9, Teorema 12.3, pág. 89], ρ_i es un homeomorfismo.
Por último probemos (3). Tomemos $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X_\infty$. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, donde $x_n = f_n^{n+1}(x_{n+1})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular $x_n = f_n^{n+1}(x_{n+1})$, para todo $n \leq i$, donde $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i(X_n, f_n^{n+1})$, para cualquier $i \in \mathbb{N}$. De lo anterior tenemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i(X_n, f_n^{n+1})$, y así $X_\infty \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i(X_n, f_n^{n+1})$. Inversamente, si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i(X_n, f_n^{n+1})$, entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_i(X_n, f_n^{n+1})$, para cada i. Para cada $m \in \mathbb{N}$ $x_m = f_m^{m+1}(x_{m+1})$, ya que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in Q_m(X_n, f_n^{n+1})$. Así, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X_\infty$ y concluimos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i(X_n, f_n^{n+1}) \subseteq X_\infty$. $\square$

Del análisis del lema anterior, se puede concluir que todo limite inverso como una intersección anidada de continuos. Así garantizar que el límite inverso de continuos es un continuo es inmediato del Teorema 1.2.2.

Teorema 1.2.6. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos. Si X_n es un continuo, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X_∞ es un continuo.

La siguiente proposición muestran una base para el espacio límite inverso. Esta forma de ver los abiertos del límite inverso, será de vital importancia para probar que la unicoherencia débil se preserva bajo límites inversos con funciones de ligadura sobreyectivas.

Proposición 1.2.7. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos con límite inverso X_∞. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{B}_n = \{f_n^{-1}(U_n) \colon U_n \text{ es abierto de } X_n\}.$$

Si $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$, entonces $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X_∞.

Demostración. Dado que X_∞ es un subespacio de la topología producto, un abierto básico de X_∞ es de la forma $\bigcap_{j=1}^{k} f_{n_j}^{-1}(U_{n_j})$, donde U_{n_j} es abierto para X_{n_j}, para cada $j \in \{1, ..., k\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $n_k = \text{máx}\{n_i \colon i = 1, ..., k\}$ y sea $U = \bigcap_{j=1}^{k} (f_{n_j}^{n_k})^{-1}(U_{n_j})$. Entonces U es un abierto de X_{n_k} y

$$f_{n_k}^{-1}(U) = f_{n_k}^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{k}(f_{n_j}^{n_k})^{-1}(U_{n_j})\right) = \bigcap_{j=1}^{k}(f_{n_k}^{-1}\circ(f_{n_j}^{n_k})^{-1})(U_{n_j}),$$

donde $(f_{n_k}^{-1}\circ(f_{n_j}^{n_k})^{-1})(U_{n_j}) = (f_{n_j}^{n_k}\circ f_{n_k})^{-1}(U_{n_j}) = f_{n_j}^{-1}(U_{n_j})$, por lo tanto

$$f_{n_k}^{-1}(U) = \bigcap_{j=1}^{k} f_{n_j}^{-1}(U_{n_j}).$$

□

Terminaremos esta sección enunciando unas proposiciones que usaremos más adelante.

Proposición 1.2.8. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos, cuyo límite inverso es X_∞. Si A es un subconjunto cerrado de X_∞, entonces la doble sucesión $\{f_n(A), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A)}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa con funciones de ligadura sobreyectivas y

$$\varprojlim\{f_n(A), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A)}\}_{n=1}^{\infty} = A = \left[\prod_{n=1}^{\infty} f_n(A)\right] \cap X_\infty.$$

En consecuencia de la Proposición 1.2.8 tenemos:

Proposición 1.2.9. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos, cuyo límite inverso es X_∞. Si A y B son dos subconjuntos cerrados de X_∞, $C = A\cap B$ y $C_n = f_n(A)\cap f_n(B)$, para cada $n\in\mathbb{N}$, entonces

$$C = \varprojlim\{C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}.$$

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \varprojlim\{C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$. Como $x_n \in C_n = f_n(A)\cap f_n(B)$ para cada $n\in\mathbb{N}$, se tiene que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \varprojlim\{f_n(A), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A)}\}_{n=1}^{\infty}$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \varprojlim\{f_n(B), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(B)}\}_{n=1}^{\infty}$. Por la Proposición 1.2.8 tenemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in A$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in B$; es decir, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in C$. Lo anterior implica que $\varprojlim\{C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C$.

Sea $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in C$. Como $C = A\cap B$, tenemos que $y_n \in f_n(A)$ y $y_n \in f_n(B)$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Es decir, $y_n \in C_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$ y dado que $C = \varprojlim\{C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$ se obtiene que $y \in \varprojlim\{C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$. De lo anterior concluimos que $C \subseteq \varprojlim\{C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}\}_{n=1}^{\infty}$. □

Proposición 1.2.10. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos, con límite inverso X_∞. Si $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de naturales entonces X_∞ es homemorfo a $\varprojlim\{X_{n_k}, f_{n_k}^{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$.

1.3. CONTINUOS IRREDUCIBLES

El arco satisface la característica especial que no existe un subcontinuo propio que contenga sus valores extremos. Está aseveración nos da idea de la familia de continuos que definiremos a continuación. En esta sección definimos continuos irreducibles, mostramos algunos ejemplos y estudiamos algunas propiedades importantes.

Definición 1.3.1. Sean X un continuo y $Q \subseteq X$. Diremos que X es *irreducible en* Q si para cualquier subcontinuo K de X, tal que $Q \subseteq K$, se tiene que $K = X$. Así, llamaremos a X *irreducible* si es irreducible entre algún par de sus puntos.

Ejemplo 1.3.2. Algunos ejemplos sencillos de continuos irreducibles son:

1. Un arco α es irreducible. Si $f\colon [0,1] \to \alpha$ es un homeomorfismo, entonces α es irreducible entre $f(0)$ y $f(1)$.

2. $W = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}\left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0,1]\right\}$, la curva senoidal del topólogo, ver 1.1.2 (3), es irreducible entre $(1, \operatorname{sen}(1))$ y cualquier punto en $\{0\} \times [-1,1]$.

Los siguientes teoremas son complementarios para el desarrollo de nuestro trabajo, los cuales fueron tomados en [34].

Teorema 1.3.3. Sea X un continuo irreducible entre a y b. Si A es un subcontinuo propio de X tal que $a \in A$, entonces $X \setminus A$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $X \setminus A$ es disconexo. Existen abiertos no vacíos disjuntos U y V de X, tales que $X \setminus A = U \cup V$. Nótese que $b \in X \setminus A$, ya que A es propio, luego $b \in U$ ó $b \in V$. Sin pérdida de generalidad tomemos $b \in U$ y por el Teorema 1.1.7, obtenemos $U \cup A$ conexo. Como $\{a, b\} \subseteq U \cup A$, y el espacio es irreducible tenemos que $X = U \cup A$. Lo afirmado anteriormente garantiza que $V = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $X \setminus A$ es conexo. □

Un argumento similar muestra el siguiente resultado.

Teorema 1.3.4. Sea X un continuo irreducible entre a y b. Si A y B son subcontinuos propios de X tales que $a \in A$ y $b \in B$, entonces $X \setminus (A \cup B)$ es conexo.

Ahora tomaremos el conjunto definido por Janiszewski y Kuratowski llamado composante, que será de ayuda en resultados posteriores.

Definición 1.3.5. Sea X un continuo no degenerado y $a \in X$. La *composante* de a en X, que denotaremos por $\kappa(a)$, está dada por:

$$\kappa(a) = \bigcup \{K \colon a \in K \text{ y } K \text{ es un subcontinuo propio de } X\}$$

Si Y es un subcontinuo de X, tal que $a \in Y$, denotaremos a la composante de a en Y por $\kappa(a, Y)$.

Ejemplo 1.3.6. Veamos las composantes de los siguientes continuos:

1. Si $X = [0, 1]$, las composantes de a en X son: $\kappa(0) = [0, 1)$, $\kappa(1) = (0, 1]$ y $\kappa(a) = [0, 1]$, cuando $a \in (0, 1)$.
2. Si $X = S^1$ entonces, $\kappa(a) = S^1$, para todo $a \in S^1$.
3. Consideremos el continuo $W = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2} \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0, 1] \right\}$, la curva senoidal del topólogo, definida en el Ejemplo 1.1.2 (2), donde $J = \{0\} \times [-1, 1]$. Tenemos que:

   a) Si $a \in J$, entonces $\kappa(a) = X \setminus \{(1, \operatorname{sen}(1)\}$;

   b) Si $c \in \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0, 1) \right\}$, entonces $\kappa(c) = X$ y

   c) $\kappa((1, \operatorname{sen}(1))) = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0, 1] \right\}$.

De la definición todas las composantes son conexas. Pero como se pudo ver en el Ejemplo 1.3.6 no todas son compactas.

1.4. CONTINUOS INDESCOMPONIBLES

En está sección definimos los continuos indescomponibles y mostraremos algunos ejemplos y propiedades.

Definición 1.4.1. Un continuo X es *descomponible* si existen A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. Si un continuo X no es descomponible se dice que X es *indescomponible*. Si cada subcontinuo de un continuo X es indescomponible se dice que X es *hereditariamente indescomponible*.

Naturalmente, todo conjunto degenerado es indescomponible. A continuación mostramos un ejemplo de un continuo no degenerado indescomponible en $\mathbb{R}^2$ utilizando el teorema de intersecciones anidadas de continuos (ver Teorema 1.2.2). La construcción se encuentra en [24, 1.10, pág. 7]. Veamos algunas definiciones previas, que nos permitirán construir el ejemplo.

Definición 1.4.2. Sean X un continuo y $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ una colección de subconjuntos de X. Diremos que $\mathcal{C}$ es una *cadena simple* de x a y, a través de z, si:

1. $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$;
2. $x \in A_i$ si y sólo si $i = 1$;
3. $y \in A_i$ si y sólo si $i = n$;
4. $z \in A_i$ para algún i.

Los elementos de $\mathcal{C}$ son llamados *eslabones de cadena.*

Ejemplo 1.4.3. Existe un continuo no degenerado indescomponible en el plano.

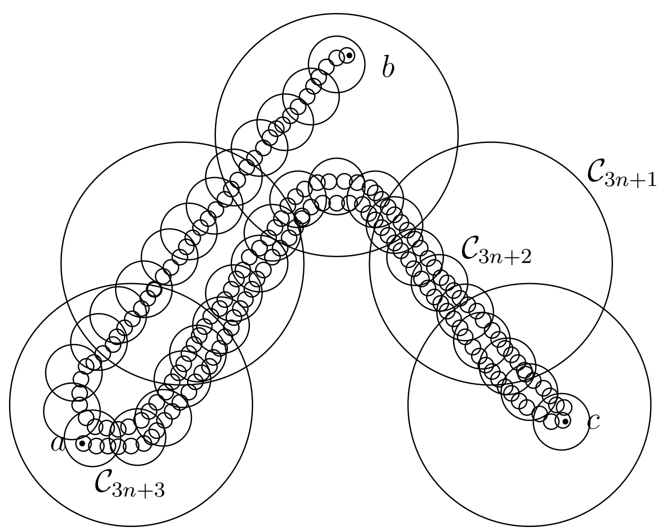


Figura 1.3: Continuo indescomponible en el plano

Sean a, b y c tres puntos distintos de $\mathbb{R}^2$. Existe una cadena simple $\mathcal{C}_n$ en el plano para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que cada eslabón es un disco con diametro menor que 2^{-n} que satisface las siguientes propiedades:

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_{3n+1}$ va de a hacia c, pasando por b, $\mathcal{C}_{3n+2}$va de b hacia c, pasando por a y $\mathcal{C}_{3n+3}$ va de a hacia b, pasando por c.

2. $\cup\mathcal{C}_n \subseteq \cup\mathcal{C}_{n+1}$.

Consideremos $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\cup\mathcal{C}_n)$, el cual es un continuo por Teorema 1.2.2. Probemos que X es indescomponible. Sea L un subcontinuo de X, tal que $\{a, c\} \subseteq L$ y supongamos que $X \setminus L \neq \emptyset$. Sea $x \in X \setminus L$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x; \delta) \cap L = \emptyset$. Como el diámetro de los eslabones de las cadenas tiende a cero, tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que un eslabón de $\mathcal{C}_{3n_0+1}$ está contenido en $B_d(x; \delta)$. Tomemos $\mathcal{C}_{3n_0+1} = \{E_1, E_2, ..., E_l\}$. Como $\mathcal{C}_{3n_0+1}$ es una cadena de a a c y $\{a, c\} \subset L$, tenemos que $E_r \subseteq B_d(x; \delta)$, para algún $r \in \{2, 3, ..., l-1\}$. Notemos que $L \subseteq (\cup_{i=1}^{r-1} E_i) \cup (\cup_{i=r+1}^{l} E_i)$, donde $(\cup_{i=1}^{r-1} E_i) \cap (\cup_{i=r+1}^{l} E_i) = \emptyset$. Esto contradice la conexidad de L. Por lo tanto, si $\{a, c\} \subseteq L$ para algún subcontinuo L de X, entonces $L = X$. De la misma forma podemos probar que si $\{a, b\} \subset L$ o $\{b, c\} \subset L$, entonces $L = X$. Sean A y B subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$.

Como $a, b, c \in X$, $|\{a, b, c\} \cap A| \geq 2$ o $|\{a, b, c\} \cap B| \geq 2$. Así, $A = X$ o $B = X$ por lo anterior. Así concluimos que X es indescomponible.

1.5. ÁRBOLES Y POLIEDROS

Las siguientes definiciones a cerca de teoría de grafos, complejos simpliciales y poliedros pueden ser encontradas en [2] y [19]. Las siguientes definiciones serán de importancia para un resultado posterior.

Definición 1.5.1. Un *grafo* $\mathcal{G}$ se define como un par (V, E), donde V es un conjunto no vacío cuyos elementos son denominados vértices o nodos y A es un subconjunto de pares no ordenados de vértices que reciben el nombre de aristas o arcos. Un *subgrafo* $\mathcal{G}^*$ es un par (V^*, A^*), tal que $V^* \subseteq V$ y $A^* \subseteq A$.

Si $V = \{v_1, ..., v_n\}$, entonces los elementos de A son representados de la forma $[v_i, v_j]$, donde $i \neq j$. Dos vertices v_i, v_j se dicen *adyacentes* si $[v_i, v_j] \in A$. Un grafo $\mathcal{G} = (V, A)$ se dice finito si $|V| < \infty$. A continuación definimos camino en un grafo.

Definición 1.5.2. Sea $\mathcal{G} = (V, A)$ un grafo. Un *camino* en el grafo $\mathcal{G}$ es una sucesión $v_0, a_1, v_1, ..., v_{n-1}, a_n, v_n$, donde $v_i \in V$ y $a_j = [v_{j-1}, v_j] \in A$, para todo i, j.

Definición 1.5.3. Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo. Decimos que $\mathcal{G}$ es un grafo conexo, si cada par de vértices están conectados por un camino.

En la Figura 1.4 se puede observar un grafo, tal que tiene dos subgrafos conexos, y además un subgrafo tiene finitos vértices, mientras el otro tiene infinitos vértices.

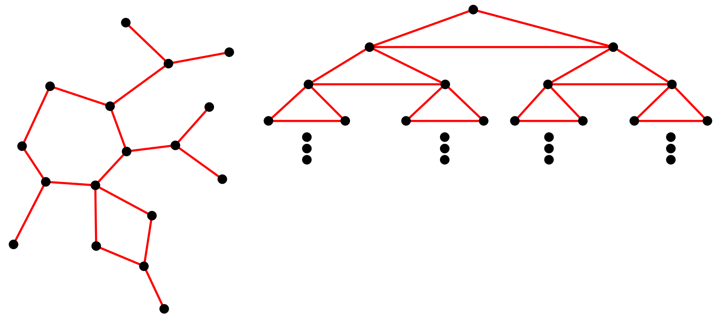


Figura 1.4: Grafos

Las siguientes definiciones serán útiles para identificar curvas cerradas simples en grafos.

Definición 1.5.4. Sean $\mathcal{G}$ un grafo y $v_0, a_1, v_1, ..., v_{n-1}, a_n, v_n$ un camino en G. Se dice que es un *camino cerrado* si $v_0 = v_n$. En caso contrario se denomina *camino abierto* que conecta v_0 con v_n.

Definición 1.5.5. Sean $\mathcal{G}$ un grafo y $v_0, a_1, v_1, ..., v_{n-1}, a_n, v_n$ un camino en G. Se dice que tal camino es un *ciclo*, cuando todos los vértices que aparecen son distintos salvo $v_0 = v_n$.

En el grafo de la Figura 1.4 se puede observar que una componente del grafo tiene una cantidad infinita de ciclos. Mientras la otra componente tiene dos ciclos.

Definición 1.5.6. Sea $\mathcal{G}$ un grafo. Se dice que $\mathcal{G}$ es un *árbol*, si es un grafo conexo y no contiene ciclos.

En la Figura 1.5, se pueden observar 4 árboles de 6 vértices.

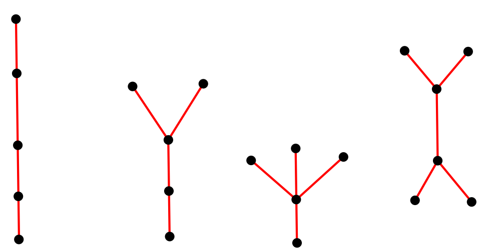


Figura 1.5: Árboles

Definición 1.5.7. Diremos que $r+1$ puntos $x_0, ..., x_r \in \mathbb{R}^n$ son *afinmente independientes*, si el conjunto $\{x_1 - x_0, ..., x_r - x_0\}$ es linealmente independiente.

Definición 1.5.8. Sea $\{x_0, ..., x_r\}$ un subconjunto afinmente independiente en $\mathbb{R}^n$. El *r-simplejo* generado por $\{x_0, ..., x_r\}$, denotado por $[x_0, ..., x_r]$ es el subespacio en $\mathbb{R}^n$:

$$[x_0, ..., x_r] = \left\{ \sum_{j=0}^{r} \varepsilon_j x_j : \forall j \in \{0, ..., r\}, \varepsilon_j \in [0,1] \text{ y } \sum_{j=0}^{r} \varepsilon_j = 1 \right\}.$$

El conjunto $\{x_0, ..., x_r\}$ es llamado el conjunto de los *vertices* del $r-$simplejo $[x_0, ..., x_r]$. Cada s-simplejo generado por $s+1$ puntos de $\{x_0, ..., x_r\}$ es llamado una *s-cara* de $[x_0, ..., x_r]$.

Observación 1.5.9. Todo $0-$simplejo es un punto, $1-$simplejo es un segmento y $2-$simplejo es una dos celda y un $3-$simplejo es un tetraedro (ver Figua 1.6).

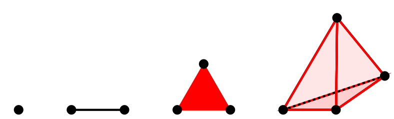
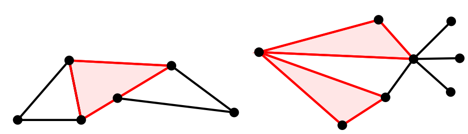


Figura 1.6: Simplejos de dimensión 0, 1, 2 y 3

Definición 1.5.10. Un *complejo simplicial* K es una colección finita de simplejos en $\mathbb{R}^n$, tal que:

1. Cada cara del simplejo K, también pertenece a K.
2. La intersección de dos simplejos es una cara de ambos simplejos.



No complejo simplicial Complejo simplicial

Figura 1.7: Complejos simpliciales

Definición 1.5.11. Un *poliedro* en $\mathbb{R}^n$ es la unión de los simplejos de un complejo simplicial.

Definición 1.5.12. Sean X un compacto y $\mathcal{U} = \{U_1, ..., U_n\}$ una colección finita de subconjuntos de X. El *nervio* de $\mathcal{U}$, denotado por $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ es el complejo simplicial definido a continuación:

1. Para cada U_j se le asocia un punto e_j en $\mathbb{R}^n$, donde $e_j = (0, ..., 1, ..., 0)$ (el número 1 aparece en la coordenada j-ésima). Cada vértice de los complejos son $\{e_1, ..., e_n\}$.

2. Para cada subfamilia $\{U_{n_1}, ..., U_{n_k}\}$ de $\mathcal{U}$, tal que $\bigcap_{i=1}^{k} U_{n_i} \neq \emptyset$, nosotros consideramos el simplejo donde los vértices son los puntos $\{e_{n_1}, ..., e_{n_k}\}$.

Entonces $\mathcal{N}(U)$ consiste en todos los posibles simplejos.

Nosotros denotamos por $\mathcal{N}^*(\mathcal{U})$ el poliedro asociado a $\mathcal{N}(\mathcal{U})$. De la definición de nervio, obtenemos que el poliedro del nervio de un continuo es conexo.

1.6. UNICOHERENCIA Y S-CONEXIDAD DE CONTINUOS

En está sección definiremos y daremos ejemplos de continuos unicoherentes y s-conexos, además veremos que todo continuo s-conexo es unicoherente.

Definición 1.6.1. Un continuo X es *unicoherente*, si para cualesquier par de subcontinuos A y B de X, tales que $X = A \cup B$, se tiene que $A \cap B$ es conexo. Diremos que X es *hereditariamente unicoherente* si cada subcontinuo de X es unicoherente.

Claramente de la definición tenemos que todo continuo indescomponible es unicoherente. A continuación mostraremos otros continuos unicoherentes y no unicoherentes.

Ejemplo 1.6.2.

1. El arco es unicoherente. Nótese que sin pérdida de generalidad, podemos decir que los subcontinuos propios A y B de $[0, 1]$, tales que $[0, 1] = A \cup B$, son de la forma $A = [0, a]$ y $B = [b, 1]$, donde $0 < b \leq a < 1$. Entonces $A \cap B = [b, a]$ el cual es conexo y por tanto el arco es unicoherente. X es hereditariamente unicoherente, ya que todo subcontinuo no degenerado es un arco.

2. La curva cerrada simple no es unicoherente. Sea $A = \{e^{i\theta} \colon 0 \leq \theta \leq \pi\}$ y $B = \{e^{i\theta} \colon \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$. Obtenemos $S^1 = A \cup B$ y $A \cap B = \{1, e^{i\pi}\}$, el cual es disconexo.

3. La curva del topólogo W definido en el Ejemplo 1.1.2 es unicoherente. Del Ejemplo 1.3.2 la curva del topólogo es irreducible entre $(1, \operatorname{sen}(1))$ y cualquier punto de $\{0\} \times [-1, 1]$. Así los subcontinuos propios A y B tales que $W = A \cup B$, son de la forma $A = \operatorname{Cl}_{\mathbb{R}^2} \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : 0 < x \leq s < 1 \right\}$ y $B = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : 0 < t \leq x \leq 1 \right\}$, donde $t \leq s$. Entonces se obtiene que $A \cap B = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : t \leq x \leq s \right\}$, el cual es conexo. No es difícil ver que W es hereditariamente unicoherente.

En 1983 Marsh en [22] introdujo el concepto de s-conexidad, el cual ha sido una herramienta para probar teoremas relacionados con la propiedad del punto fijo. Este concepto será de utilidad para garantizar que el cono de cualquier continuo es unicoherente. Iniciaremos con unas definiciones atribuidas a Marsh [22].

Definición 1.6.3. Sean X un espacio conexo y A, B subconjuntos cerrados, disjuntos de X. Un subconjunto cerrado F de X *corta débilmente* a X entre A y B, si para cualquier subcontinuo C de X tal que $C \cap A \neq \emptyset$ y $C \cap B \neq \emptyset$, se tiene que $C \cap F \neq \emptyset$.

Definición 1.6.4. Sean X un continuo y A, B subconjuntos cerrados, disjuntos de X. El continuo X es *s-conexo* entre A y B, si para cualquier subconjunto cerrado F de X, que corta débilmente a X entre A y B, existe una componente K de F que corta débilmente a X entre A y B. El continuo X es s-conexo si para cualquier par de subcontinuos A y B de X, se tiene que X es s-conexo entre A y B.

Marsh en [22] garantiza la siguiente relación entre la s-conexidad y la unicoherencia en continuos.

Teorema 1.6.5. Si un continuo X es s-conexo, entonces X es unicoherente.

La prueba del siguientes resultado se encuentra en [30, Teorema 3.3, pág. 31]. El cual Marsh garantiza la s-conexidad del cono de cualquier continuo.

Teorema 1.6.6. Para cualquier continuo X, se tiene que el $\operatorname{Cono}(X)$ es s-conexo.

De los Teoremas 1.6.5 y 1.6.6 se deduce el siguiente corolario.

Corolario 1.6.7. Para cualquier continuo X, se tiene que el $\operatorname{Cono}(X)$ es unicoherente.

Definimos ahora lo que es una dendrita, estos continuos son importantes en este trabajo, puesto que resultan ser hereditariamente unicoherentes.

Definición 1.6.8. Una dendrita es un continuo localmente conexo que no tiene curvas cerradas simples.

Los árboles con finitos vértices, son claros ejemplos de dendritas. Note que los continuos hereditariamente indescomponibles son continuos hereditariamente unicoherentes, pero no son locamente conexos. De lo anterior tenemos que no todo continuo hereditariamente unicoherente es una dendrita. El siguiente resultado caracteriza las dendritas con los continuos hereditariamente unicoherentes, la prueba se encuentra en [24].

Teorema 1.6.9. Sea X un continuo localmente conexo. X es hereditariamente unicoherente si y sólo si es una dendrita.

2. CONTINUOS DÉBILMENTE UNICOHERENTES

G. R. Gordh y C. B. Hughes en [14], introdujeron las funciones libremente descomponibles y fuertemente libremente descomponibles para estudiar la invarianza de la conexidad local en límites inversos, propiedad que satisfacen las funciones monótonas. Posteriormente en [5] los autores establecen que toda función fuertemente libremente descomponible definida en un continuo unicoherente es casimonótona. Con esta afirmación, es natural tratar de caracterizar la siguiente familia de continuos $\mathcal{F}$. Se dice que $X \in \mathcal{F}$ si para todo continuo Y y toda función $f\colon X \to Y$ fuertemente libremente descomponible es casimonótona.
Note que todo continuo unicoherente está en $\mathcal{F}$, por [5, Teorema 4.2, pág. 894]. En [6], se introduce la noción de unicoherencia débil como una condición natural que debe cumplir un continuo para estar en la familia $\mathcal{F}$. Está noción extiente la familia de continuos $\mathcal{F}$, ya que todo continuo unicoherentes es débilmente unicoherente.

Este capítulo está dedicado al estudio de la unicoherencia débil en continuos, que es el objetivo central del trabajo. Se desarrollará de la siguiente manera: primero se definirá continuo débilmente unicoherente, posteriormente se establecerán relaciones entre los continuos unicoherentes e irreducibles con los continuos débilmente unicoherentes. Seguidamente definiremos y estudiaremos los continuos hereditariamente débilmente unicoherentes y por último, estudiaremos el comportamiento de la unicoherencia débil en el producto, límites inversos y espacio cociente.

2.1. DEFINICIONES, RELACIONES Y EJEMPLOS

En está sección definiremos continuo débilmente unicoherente, mostraremos algunos ejemplos y estudiamos algunas propiedades importantes.

Definición 2.1.1. Sea X un continuo. Diremos que X es *débilmente unicoherente* si para cualesquier par de subcontinuos A y B de X, tales que $X = A \cup B$ y

$\mathrm{Int}_X(A \cap B) \neq \emptyset$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

Es claro que todo continuo unicoherente es débilmente unicoherente; por lo tanto: $[0,1]$, la curva senoidal del topólogo y los continuos indescomponibles son débilmente unicoherentes. Además, en el Corolario 1.6.7 se garantiza que el cono de cualquier continuo es unicoherente y por ende débilmente unicoherente.

Ejemplo 2.1.2. El círculo de Varsovia no es débilmente unicoherente.

El círculo de Varsovia lo denotaremos por X, y se define en el Ejemplo 1.1.2. Veamos que no es débilmente unicoherente. Sean A la unión curva del topólogo con el arco $\{0\} \times [-1,-2]$ y $B = \{0\} \times [-1,-2] \cup [0,1] \times \{-2\} \cup \{1\} \times [-2, \mathrm{sen}(1)]$. Nótese que $X = A \cup B$ y $A \cap B = (\{0\} \times [-1,-2]) \cup \{(1, \mathrm{sen}(1))\}$. Es claro que tiene interior no vacío y es disconexo (ver Figura 2.1.). De lo anterior, el círculo de Varsovia no es débilmente unicoherente.

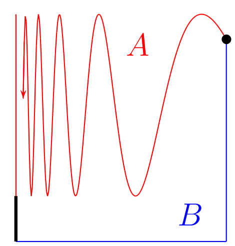


Figura 2.1: Círculo de Varsovia

La siguiente proposición nos permitirá concluir que la unicoherencia débil es un invariante topológico.

Proposición 2.1.3. Sean X y Y continuos. Si X es débilmente unicoherente y X es homeomorfo a Y, entonces Y es débilmente unicoherente.

Demostración. Sean A y B subcontinuos de Y, tales que $Y = A \cup B$ y $\mathrm{Int}_Y(A \cap B) \neq \emptyset$. Veamos que $A \cap B$ es conexo. Como X y Y son homeomorfos, existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$. Por ser h^{-1} un función continua, se tiene que $h^{-1}(A)$ y $h^{-1}(B)$ son subcontinuos de X y además $X = h^{-1}(A) \cup h^{-1}(B)$. Por otro lado $\mathrm{Int}_X(h^{-1}(A) \cap h^{-1}(B)) \neq \emptyset$, dado que $h^{-1}(\mathrm{Int}_X(A \cap B)) \subseteq h^{-1}(A) \cap h^{-1}(B)$. Siendo X débilmente unicoherente, podemos concluir que $h^{-1}(A) \cap h^{-1}(B)$ es conexo. Finalmente, utilizando sobreyectividad de h obtenemos que $h(h^{-1}(A) \cap h^{-1}(B)) = h(h^{-1}(A \cap B)) = A \cap B$ y por continuidad garantizamos que $A \cap B$ es conexo. $\square$

Sean X un continuo y K un subcontinuo propio de X. Diremos que K es un *subcontinuo terminal* de X, si para cada subcontinuo G de X, tal que $G \cap K \neq \emptyset$, se tiene que $G \subseteq K$ o $K \subseteq G$. Por ejemplo $\{0\} \times [-1, 1]$ es un subcontinuo terminal de la curva senoidal del topólogo (ver 2 del Ejemplo 1.1.2). Los continuos con subcontinuos terminales nos permitirán construir continuos débilmente unicoherentes que no son unicoherentes. Primero consideremos el siguiente lema.

Lema 2.1.4. Sean X un continuo y K un subcontinuo de X. Si K es un subcontinuo terminal de X, entonces $\mathrm{Int}_X(K) = \emptyset$.

Demostración. Probemos el contrarecíproco. Supongamos que $\mathrm{Int}_X(K) \neq \emptyset$ y veamos que K no es un subcontinuo terminal. Como $\mathrm{Int}_X(K) \neq \emptyset$ y K es cerrado existen $x \in K$ y $r > 0$, tal que $\mathrm{Cl}_X(B(x; r)) \subseteq K$. Sea $y \in X \setminus K$ y L la componente de $X \setminus (B(x; r))$, tal que $y \in L$. Por el Teorema 1.1.8 $L \cap \mathrm{Cl}_X(B(x; r)) \neq \emptyset$, lo cual implica que $L \cap K \neq \emptyset$. Como $L \subseteq (X \setminus B(x; r))$ y $X \setminus B(x; r)$ es cerrado, obtenemos que $\mathrm{Cl}_X(L) \subseteq X \setminus B(x; r)$. La anterior aseveración garantiza que $\mathrm{Cl}_X(L)$ es un subcontinuo de X, que intersecta a K y $K \nsubseteq \mathrm{Cl}_X(L)$. Nótese que $\mathrm{Cl}_X(L) \nsubseteq K$, puesto que $y \in L \setminus K$. De está manera llegamos a que K no es un subcontinuo terminal. □

Teorema 2.1.5. Sea $Z = X \cup Y$ donde X y Y son continuos unicoherentes. Si existen subcontinuos terminales $X_1 \subseteq X$ y $Y_1 \subseteq Y$, tales que $X \cap Y = X_1 \cap Y_1$, entonces Z es débilmente unicoherente.

Demostración. Para probar el teorema usaremos la siguientes afirmaciones:

Afirmación 2.1.6. Si E es un subcontinuo de Z, tal que $E \cap X$ es disconexo, entonces para toda componente L de $E \cap X$, se tiene que $L \cap (X_1 \cap Y_1) \neq \emptyset$. Además, si $Y_1 \subseteq E$, entonces $E \cap Y$ es un continuo. (Obtenemos un resultado equivalente si $E \cap Y$ es disconexo y de igual manera si $X_1 \subseteq E$.)

Si $E \cap X \subseteq X_1 \cap Y_1$, entonces ya tenemos el resultado. Ahora tomemos un $z \in E \setminus Y$ y L la componente de $E \setminus Y$, tal que $z \in L$. Por el Teorema 1.1.8 $\mathrm{Cl}_Z(L) \cap Y \neq \emptyset$. Como $E \cap X$ es cerrado y $L \subseteq E \cap X$, obtenemos que $\mathrm{Cl}_Z(L) = L$. Dicho lo anterior obtenemos que L es una componente de $E \cap X$ tal que $E \cap (X_1 \cap Y_1) \neq \emptyset$. Esto quiere decir que todas las componentes de $E \cap X$, intersectan a X_1 y Y_1.
Ahora si $Y_1 \subseteq E$, entonces el argumento anterior asegura que todas las componentes de $E \cap Y$ intersecan a Y_1, lo cual indicaría que $E \cap Y$ es conexo. De esta manera terminamos la prueba de la Afirmación 2.1.6.

De la Afirmación 2.1.6 y usando la unicoherencia de los continuos, obtenemos como consecuencia la siguiente afirmación.

Afirmación 2.1.7. Si A y B son subcontinuos de Z, tales que $Z = A \cup B$ y $X_1 \subseteq A \cap B$, entonces $(A \cap B) \cap X_1$ es conexo. (Tenemos un resultado equivalente si $Y_1 \subseteq A \cap B$.)

Continuando con la prueba del teorema, supongamos que existen continuos A y B de Z, tales que $Z = A \cup B$ y $A \cap B$ disconexo. Para terminar la prueba, basta demostrar que $\mathrm{Int}_Z(A \cap B) = \emptyset$. Para lograr tal objetivo se realizarán por casos. Veamos primero para $A \cap B \subseteq X$ ó $A \cap B \subseteq Y$. Lo haremos cuando $A \cap B \subseteq X$, la prueba del otro caso es análoga. Para este caso obtenemos que $Y \subseteq A \setminus B$ ó $Y \subseteq B \setminus A$. Sin pérdida de generalidad tomemos $Y \subseteq A \setminus B$. Como $Y_1 \subseteq A$, entonces tenemos que $A \cap X \neq \emptyset$. Por la Afirmación 2.1.6, todas las componentes de $A \cap X$ intersecan a X_1. Dado que X_1 es un continuo terminal de X, tenemos que $A \cap X \subseteq X_1$ ó $X_1 \subseteq A \cap X$. Veamos que $X_1 \subseteq A \cap X$ no se puede dar. Si $X_1 \subseteq A \cap X$, por la Afirmación 2.1.6 $A \cap X$ es conexo y tendríamos que $X = B \cup (A \cap X)$, donde $A \cap B = (A \cap X) \cap B$ es disconexo. Lo anterior contradice la unicoherencia de X, por lo tanto concluimos que $A \cap X \subseteq X_1$. La anterior aseveración garantiza que $A \cap B \subseteq X_1$ y por el Lema 2.1.4 tendrá interior vacío.
Veamos cuando $(A \cap B) \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ y $(A \cap B) \cap (Y \setminus X) \neq \emptyset$. Por la Afirmación 2.1.6 tenemos que todas las componentes de $A \cap X$ y $B \cap X$ intersectan a X_1. Como X_1 es un continuo terminal de X podría suceder que $A \cap X \subseteq X_1$ ó $X_1 \subseteq A \cap X$ y $B \cap X \subseteq X_1$ ó $X_1 \subseteq B \cap X$. Observe que el anterior argumento garantiza que $(A \cap B) \cap X \subseteq X_1$ ó $X_1 \subseteq (A \cap B) \cap X$ y también $(A \cap B) \cap Y \subseteq Y_1$ ó $Y_1 \subseteq (A \cap B) \cap Y$. Veamos que $X_1 \subseteq A \cap B$, no se puede dar. Por la Afirmación 2.1.7 se asegura que $(A \cap B) \cap X$ es conexo. Observe que si $Y_1 \subseteq A \cap B$, de nuevo por la Afirmación 2.1.7 $(A \cap B) \cap Y$ es conexo y además $X_1 \cap Y_1 \subseteq [(A \cap B) \cap X) \cap ((A \cap B) \cap Y]$. Lo cual indicaría que $A \cap B$ es conexo. De lo anterior tenemos que $(A \cap B) \cap Y \subseteq Y_1$, lo cual implica que $A \cap Y \subseteq Y_1$ ó $B \cap Y \subseteq Y_1$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $A \cap Y \subseteq Y_1$. Como Y_1 es un continuo terminal, $A \cap Y \subseteq Y_1$, $B \cap Y_1 \neq \emptyset$ y $(A \cap Y) \cup (B \cap Y) = Y$, entonces obtenemos que $Y \subseteq B$. Lo anterior garantiza que $(A \cap B) \cap Y = A \cap Y$ y así obtenemos por la Afirmacíon 2.1.6, todas las componentes de $A \cap Y$ intersectan a X_1. De la aseveración anterior, $X_1 \subseteq (A \cap B)$ y $(A \cap B) \cap X$ es conexo, obtenemos como resultado $A \cap B$ conexo. Lo anterior contradice nuevamente nuestra suposición; por lo tanto, debe suceder que $(A \cap B) \cap X \subseteq X_1$. Análogamente probamos que $(A \cap B) \cap Y \subseteq Y_1$, lo cual afirma que $A \cap B \subseteq X_1 \cup Y_1$. Lo concluido anteriormente y por el Lema 2.1.4 garantiza lo requerido, es decir, $\mathrm{Int}_Z(A \cap B) = \emptyset$. □

Note que en el Teorema 2.1.5 si $X_1 \cap Y_1$ es disconexo, obtenemos claramente que Z no es unicoherente. Está observación junto con el teorema nos permite construir continuos débilmente unicoherentes que no serán unicoherentes.

Ejemplo 2.1.8. Existe un continuo débilmente unicoherente, que no es unicoherente.

Claramente el Ejemplo 1.1.3 cumple las hipotésis del Teorema 2.1.5, por lo tanto es débilmente unicoherente. Si se toman las dos espacios homeomorfos a las curvas del topólogo como los subcontinuos A y B, respectivamente. Se tiene claramente que la unión es X y la interesección de A y B es $\{\{(0,1),(-1,1)\},\{(0,-1),(-1,-1)\}\}$, el cual es disconexo (véase Figura 2.2), esto prueba que X no es unicoherente.

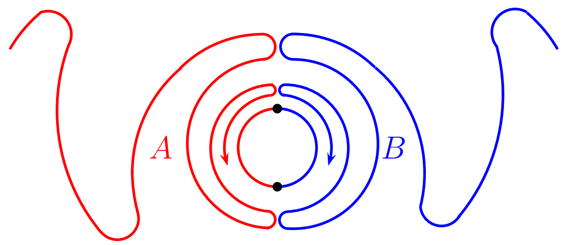


Figura 2.2: No unicoherencia de $X = X_1 \cup_g X_2$

Anteriormente se mencionó que todo continuo unicoherente es débilmente unicoherente, pero en el Ejemplo 2.1.8, tenemos que existe continuos débilmente unicoherentes que no son unicoherentes. La aseveración anterior implica que el conjunto de los continuos unicoherentes está contenida propiamente en el conjunto de los continuos débilmente unicohentes. Los profesores Camargo y Villanueva prueban en [6] que la unicoherencia y la unicoherencia débil son equivalentes en continuos localmente conexos.

Teorema 2.1.9. Sea X un continuo débilmente unicoherente. Si X es localmente conexo, entonces X es unicoherente.

Demostración. Supongamos que existen A y B subcontinuos de X, tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ es disconexo. Sean L una componente de $A \cap B$ y $p \in (A \cap B) \setminus L$. Como X es localmente conexo, existe una vecindad K de p cerrada y conexa, tal que $K \cap L = \emptyset$. Como $p \in A \cap B \cap K$ tenemos que $C = A \cup K$ y $D = B \cup K$ son subcontinuos de X. Claramente $X = C \cup D$ y $\text{Int}_X(C \cap D) \neq \emptyset$, ya que $K \subseteq C \cap D$. Nótese que $C \cap D = (A \cap B) \cup K = L \cup [((A \cap B) \setminus L) \cup K]$, donde L y $[(A \cap B) \setminus L] \cup K$ son cerrados disjuntos. La afirmado anteriormente garantiza que $C \cap D$ es disconexo y por lo tanto X no es débilmente unicoherente. $\square$

Por el Ejemplo 1.6.2 y Teorema 2.1.9, es clara la siguiente afirmación.

Ejemplo 2.1.10. Cualquier curva cerrada simple no es débilmente unicoherente.

Nótese que por [24, Teorema 8.23, pág. 132], cualquier continuo localmente conexo es arcoconexo; sin embargo, el círculo de Varsovia es un continuo arcoconexo que no es localmente conexo. Con el fin de debilitar la hipótesis de conexidad local en el Teorema 2.1.9 nos preguntamos lo siguiente:

Pregunta 2.1.11. ¿Si X es un continuo débilmente unicoherente y arcoconexo, entonces X es unicoherente?

Definición 2.1.12. Un continuo X se dice *aposindético* si para cualesquiera p y q en X, existe un subcontinuo L de X, tal que $p \in L^{\circ}$ y $q \notin L$. Además, diremos que X es *mutuamente aposindético* si para cualesquiera par de puntos p y q de X, existen subcontinuos L y K de X, tales que $p \in L^{\circ}$, $q \in K^{\circ}$ y $L \cap K = \emptyset$.

De la definición todo continuo mutuamente aposindético es aposindético. Además, de la Definición 1.1.4 obtenemos que todo continuo localmente conexo es mutuamente aposindético; así el arco y la curva cerrada simple son ejemplos de continuos mutuamente aposindéticos y aposindéticos. De esta forma proponemos la siguiente pregunta:

Pregunta 2.1.13. ¿Si X es un continuo débilmente unicoherente y aposindético, entonces X es unicoherente?

Veamos el siguiente ejemplo relacionado a la aposindesis.

Ejemplo 2.1.14. $\mathrm{Cyl}(X) = X \times [0,1]$, donde X es el continuo del Ejemplo 1.1.3.

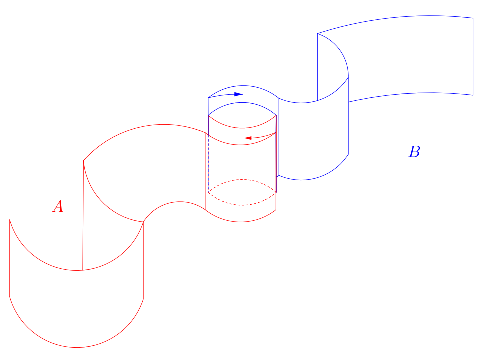


Figura 2.3: No unicoherencia del continuo aposindético

Por [19, Corolario 3.3.9, pág. 191] el producto de continuos es aposindético, por lo tanto, $\mathrm{Cyl}(X)$ es un continuo aposindético. Veamos que $\mathrm{Cyl}(X)$ no es unicoherente. Sean $A = \mathrm{Cyl}(q(X_1))$ y $B = \mathrm{Cyl}(q(X_2))$, donde q es la función cociente del espacio $X_1 \cup X_2$ a X en el Ejemplo 1.1.3. Claramente son continuos y $A \cap B = S_a \cup S_b$, donde $S_a = \mathrm{Cyl}(\{q((0,-1))\})$ y $S_b = \mathrm{Cyl}(\{q((0,1))\})$. Observe que S_a y S_b son dos cerrados disjuntos.

Pensamos que el continuo definido en el Ejemplo 2.1.14 dá respuesta negativa a la Pregunta 2.1.13. Sin embargo, no hemos podido dar respuesta a lo siguiente:

Pregunta 2.1.15. ¿El continuo del Ejemplo 2.1.14 es débilmente unicoherente?

El continuo del Ejemplo 2.1.14 no es mutuamente aposindético; así, nos planteamos lo siguiente:

Pregunta 2.1.16. ¿Si X es un continuo débilmente unicoherente y mutuamente aposindético, entonces X es unicoherente?

El siguiente resultado muestra otra clase de subcontinuos que se encuentran en el conjunto de los continuos débilmente unicoherentes. La prueba la tomamos de [6].

Teorema 2.1.17. Sea X un continuo. Si X es irreducible, entonces X es débilmente unicoherente.

Demostración. Sean A y B subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$ y $\mathrm{Int}_X(A \cap B) \neq \emptyset$. Sean a y b los puntos de irreducibilidad de X y veamos que $A \cap B$ es conexo. Nótese que si $\{a, b\} \subseteq A$ o $\{a, b\} \subseteq B$, entonces $X = A$ o $X = B$ y así $A \cap B$ sería conexo. Supongamos que $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$. Por Teorema 1.3.3, tenemos que $X \setminus A$ y $X \setminus B$ son conexos, pero $X \setminus A = B \setminus A$ y $X \setminus B = A \setminus B$, por lo tanto $A \setminus B$ y $B \setminus A$ son conexos. Observe que:

$$X \setminus (\mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cup \mathrm{Cl}_X(B \setminus A)) = \mathrm{Int}_X(X \setminus [(A \setminus B) \cup (B \setminus A))] = \mathrm{Int}_X(A \cap B).$$

Como $\{a, b\} \cap (A \cap B) = \emptyset$, $\{a, b\} \subseteq \mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cup \mathrm{Cl}_X(B \setminus A)$. Dado que $X \setminus [\mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cup (\mathrm{Cl}_X(B \setminus A)]$ es no vacío obtenemos que $\mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cap \mathrm{Cl}_X(B \setminus A) = \emptyset$. Así, $\mathrm{Int}_X(A \cap B)$ es conexo por el Teorema 1.3.4. Así, obtenemos que $\mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A \cap B))$ es un continuo y $\mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A \cap B)) \subseteq A \cap B$, ya que $A \cap B$ es cerrado. Supongamos que existe una componente L de $A \cap B$, tal que $L \cap \mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A \cap B)) = \emptyset$. Entonces $L \subseteq (\mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cup \mathrm{Cl}_X(B \setminus A))$, es decir, $L \subseteq \mathrm{Cl}_X(A \setminus B)$ ó $L \subseteq \mathrm{Cl}_X(B \setminus A)$, por la conexidad de L. Tomemos sin pérdida de generalidad que $L \subseteq \mathrm{Cl}_X(A \setminus B)$. Como

$$X = [\mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cup \mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A \cap B))] \cup \mathrm{Cl}_X(B \setminus A)$$

y $\mathrm{Cl}_X(A \setminus B) \cap \mathrm{Cl}_X(B \setminus A) = \emptyset$, se obtiene $\mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A \cap B)) \cap \mathrm{Cl}_X(B \setminus A) \neq \emptyset$. Lo anterior implica que $\mathrm{Cl}_X(B \setminus A) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Así, no existe ningún conexo que interseque a $\mathrm{Cl}_X(B \setminus A) \cap (A \cap B)$ y L. De la aseveración anterior y el [24, Teorema 5.2, pág. 72] existen cerrados disjuntos E y F tales que $A \cap B = E \cup F$, donde

$L \subseteq E$ y $\mathrm{Cl}_X(B \setminus A) \cap (A \cap B) \subseteq F$. Por lo tanto, $B = (A \cap B) \cup \mathrm{Cl}_X(B \setminus A) = E \cup (F \cup \mathrm{Cl}_X(B \setminus A))$, donde $E \cap (F \cup \mathrm{Cl}_X(B \setminus A)) = E \cap \mathrm{Cl}_X(B \setminus A)$. Si $p \in E \cap \mathrm{Cl}_X(B \setminus A)$, entonces $p \in A \cap B$ y $p \in \mathrm{Cl}_X(B \setminus A)$. Por lo tanto, ha de ser que $p \in F$, lo que contradice que $E \cap F = \emptyset$. Obtenemos $E \cap \mathrm{Cl}_X(B \setminus A) = \emptyset$, contradiciendo la conexidad de B. Así, concluimos que cada componente de $A \cap B$ interseca a $\mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A \cap B))$, lo que implica que $A \cap B = \mathrm{Cl}_X(\mathrm{Int}_X(A \cap B))$, equivalentemente $A \cap B$ es conexo. □

Como se vio anteriormente los continuos irreducibles y unicoherentes son débilmente unicoherentes. Pero estas dos clases de continuos son diferentes. Por ejemplo, cualquier triodo simple es un continuo unicoherente y no es irreducible, por otro lado no es difícil probar que el continuo X del Ejemplo 2.1.8 es irreducible en $\{(-2, \mathrm{sen}(1))\}$ y $\{(1, \mathrm{sen}(1))\}$ y no es unicoherente. El Teorema 2.1.17, junto con la siguiente caracterización, nos permite asegurar la existencia de un continuo débilmente unicoherente que no es unicoherente. La prueba de la siguiente proposición la tomamos de [6].

Proposición 2.1.18. Sea X un continuo débilmente unicoherente. Entonces, X no es unicoherente si y sólo si existen subcontinuos A y B de X, tales que $X = A \cup B$, $A \cap B$ es disconexo y si L es un subcontinuo tal que $\mathrm{Int}_X(L) \neq \emptyset$ y $L \cap (A \cap B) \neq \emptyset$, entonces L intersecta cada componente de $A \cap B$.

Demostración. Supongamos que X no es unicoherente; es decir, existen subcontinuos A y B de X, tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ es disconexo. Sea L un subcontinuo de X, tal que $\mathrm{Int}_X(L) \neq \emptyset$ y $L \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Por Teorema 1.1.7, tenemos que $L \cup A$ y $L \cup B$ son subcontinuos de X, tales que $X = (L \cup A) \cup (L \cup B)$. Se garantiza $\mathrm{Int}_X((L \cup A) \cap (L \cup B)) \neq \emptyset$, dado que $L \subseteq (L \cup A) \cap (L \cup B)$. Como X es débilmente unicoherente, obtenemos $(L \cup A) \cap (L \cup B)$ conexo. Sin embargo, $(L \cup A) \cap (L \cup B) = L \cup (A \cap B)$, lo cual garantizamos que L debe intersecar a cada componente de $A \cap B$.
Recíprocamente, si existen A y B subcontinuos de X tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ es disconexo, entonces X no es unicoherente. □

A continuación introducimos una familia de continuos débilmente unicoherentes. Antes definimos algunos conceptos.

Definición 2.1.19. Sean X un continuo, $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ una colección de subconjuntos de X y L, K subconjuntos de X. Diremos que $\mathcal{C}$ es una *cadena* de L a K, si:

1. $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$;
2. $L \subseteq A_i$ si y sólo si $i = 1$;

3. $K \subseteq A_i$ si y sólo si $i = n$.

Teorema 2.1.20. Sea X un continuo de tal manera que existe una colección de subcontinuos $\mathcal{U} = \{M_0, M_1, ..., M_n\}$, tal que $X = \bigcup_{i=0}^{n} M_i$ y $X \setminus \left(\bigcup_{i=0, i\neq l}^{n} M_i\right) \neq \emptyset$, para todo $l \in \{1, ..., n\}$. Si $\dim(\mathcal{N}^*(\mathcal{U})) = 1$ y X es débilmente unicoherente, entonces $\mathcal{N}^*(\mathcal{U})$ es un árbol.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{N}^*(\mathcal{U})$ no es un árbol y probemos que X no es débilmente unicoherente. Observe que $\mathcal{N}^*(\mathcal{U})$ es conexo, por lo tanto ha de tener un ciclo. Si $n = 2$, tenemos que $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ para cada $i \neq j$. Como $\dim(\mathcal{N}^*(\mathcal{U})) = 1$, $M_0 \cap M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Tomamos $A = M_0 \cup M_2$, $B = M_1 \cup M_2$ y así obtenemos $X = A \cup B$, con $\text{Int}_X(A \cap B) \neq \emptyset$, ya que $M_2 \subseteq A \cap B$. Por otro lado $A \cap B = M_2 \cup (M_0 \cap M_1)$, el cual es disconexo, pues $M_0 \cap M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Esto implicaría que X no es débilmente unicoherente.
Si $n > 2$, existe un ciclo $e_{n_0}, a_{n_1}, e_{n_1}, ..., e_{n_{r-1}}, a_{n_r}, e_{n_r}$ en $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, puesto que $\mathcal{N}^*(\mathcal{U})$ no es un árbol (ver Definiciones 1.5.6 y 1.5.5). Por las Definiciones 1.5.5, 1.5.8 y 1.5.12, existe una subcolección $\mathcal{V} = \{M_{n_0}, M_{n_1}, ..., M_{n_{r-1}}\}$, tal que e_{n_j} es el respectivo vertice en $\mathbb{R}^n$, al que se le asocia al subcontinuo M_{n_j}, para todo $j \in \{0, ..., r-1\}$ y además, $a_{n_t} = [e_{n_{t-1}}, e_{n_t}]$ son los caminos o los $1-$simplejos generados por los dos vertices respectivos, para todo $t \in \{1, ..., r\}$, donde $e_{n_r} = e_{n_0}$. Sean $A_1 = M_{n_0} \cup M_{n_1}$ y $B_1 = \bigcup_{i=1}^{r-1} M_{n_i}$. Definamos:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \{N \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V} \colon \text{existe una cadena simple en } \mathcal{U} \setminus \{M_{n_0}\} \text{ de } N \text{ a } B_1\}, \text{ y} \\ \mathcal{W}^* &= \mathcal{U} \setminus (\mathcal{V} \cup \mathcal{W}). \end{aligned}$$

Sean $A = A_1 \cup [\cup\{N \colon N \in \mathcal{W}^*\}]$ y $B = B_1 \cup [\cup\{N \colon N \in \mathcal{W}\}]$. Probemos las siguientes afirmaciones:

1. $X = A \cup B$.
   Sea $x \in X$ y observe que $\left(\bigcup_{N \in \mathcal{U}\setminus(\mathcal{V}\cup\mathcal{W})} N\right) \cup \left(\bigcup_{N \in \mathcal{V}} N\right) \cup \left(\bigcup_{N \in \mathcal{W}} N\right) = X$, puesto que $\mathcal{U}$ es una cubierta de X. Si $x \in \left(\bigcup_{N \in \mathcal{U}\setminus(\mathcal{V}\cup\mathcal{W})} N\right) \cup \left(\bigcup_{N \in \mathcal{W}} N\right)$, tenemos que $x \in A \cup B$, puesto que $\left(\bigcup_{N \in \mathcal{U}\setminus(\mathcal{V}\cup\mathcal{W})} N\right) \cup \left(\bigcup_{N \in \mathcal{W}} N\right) \subseteq (A \cup B)$. De forma similar tenemos cuando $x \in \left(\bigcup_{N \in \mathcal{V}} N\right)$, ya que $\left(\bigcup_{N \in \mathcal{V}} N\right) = (A_1 \cup B_1) \subseteq (A \cup B)$; de esta manera concluimos que $X = A \cup B$.

2. $Int_X(A \cap B) \neq \emptyset$.
   La veracidad de está afirmación se da, dado que $M_{n_1} \in (A_1 \cap B_1) \subseteq (A \cap B)$ y $X \setminus \left(\bigcup_{i=0, i\neq n_1}^{n} M_i\right)$, es un abierto no vacío contenido en M_{n_1}.

3. $A \cap B$ es disconexo

   Note que:

$$\begin{aligned} A \cap B &= (A_1 \cup [\cup\{N \colon N \in \mathcal{W}^*\}]) \cap (B_1 \cup [\cup\{N \colon N \in \mathcal{W}\}]) = A_1 \cap B_1, \\ A_1 \cap B_1 &= (M_{n_0} \cup M_{n_1}) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{r-1} M_{n_i} \right) = M_{n_1} \cup \left(\bigcup_{i=2}^{r-1} (M_{n_0} \cap M_{n_i}) \right) \end{aligned}$$

   Donde M_{n_1} y $\bigcup_{i=2}^{r-1}(M_{n_0} \cap M_{n_i})$ son cerrados disjuntos, pues $M_i \cap M_j \cap M_k = \emptyset$, para cualquier tres naturales diferentes i, j y k, lo cual sucede porque $\dim(\mathcal{N}^*(\mathcal{U})) = 1$. Esto prueba que $A \cap B$ es disconexo.

De las anteriores afirmaciones, obtenemos que X no es débilmente unicoherente.

□

El recíproco del Teorema 2.1.20 no se cumple. Observemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1.21. Existe un continuo X, tales que existen subcontinuos M_1, M_2 y M_3, que satisfacen que $X = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, $X \setminus \left(\bigcup_{i=0, i \neq l}^{3} M_i \right) \neq \emptyset$, para todo $l \in \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{N}^*(\{M_1, M_2, M_3\})$ es un árbol y X no es débilmente unicoherente.

Por [24, Teoremas 11.15, 11.17, pág. 203] tenemos que los continuos indescomponibles no degenerados tienen una cantidad no numerable de composantes disjuntas. Así, podemos garantizar un continuo $X = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, donde M_1, M_2, M_3 son continuos indescomponibles, tales que $M_1 \cap M_2 = \{a_1, a_2\}$, $M_2 \cap M_3 = \{b_1, b_2\}$, $M_1 \cap M_3 = \emptyset$ y $\kappa(a_1, M_2) \neq \kappa(a_2, M_2)$, con $b_1 \in \kappa(a_1, M_3)$ y $\kappa(b_2, M_3) \cap \{a_1, a_2\} = \emptyset$. Por definición $X = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ y para dos elementos i, j diferentes en $\{1, 2, 3\}$, $X \setminus (M_i \cup M_j) \neq \emptyset$. Claramente el $\mathcal{N}^*(\{M_1, M_2, M_3\})$ es un árbol. Para ver que X no es débilmente unicoherente, tomamos $A = M_1 \cup \mathrm{Cl}_X(\kappa(a_1, M_2)) \cup M_3$ y $B = M_1 \cup M_2 \cup \mathrm{Cl}_X(\kappa(b_2, M_3))$. A y B son subcontinuos de X, tales que $\mathrm{Int}_X A \cap B \neq \emptyset$, puesto que $M_1 \subseteq (A \cap B)$. Note que $A \cap B = (M_1 \cup \mathrm{Cl}_X(\kappa(a_1))) \cup \mathrm{Cl}_X((\kappa(b_2))$, es la unión de dos cerrados disjuntos, por lo tanto es disconexo.

2.2. UNICOHERENCIA DÉBIL HEREDITARIA

En [7] se establece que un continuo hereditariamente unicoherente y aposindético es una dendrita. El estudio de la aposindesis en los continuos unicoherentes han sido estudiadas entre varios matemáticos, como Bennet y Owens en [1] y [28], respectivamente. De está manera definimos lo que es un continuo hereditariamente débilmente unicoherente y nos adentramos en el estudio de sus propiedades y relaciones con la unicoherencia hereditaria. En está sección demostraremos que la unicoherencia hereditaria difiere de la unicoherencia débil hereditaria, se mostrará que todo continuo hereditariamente débilmene unicoherente y aposindético es hereditariamente unicoherente, particularmente es una dendrita.

Definición 2.2.1. Un continuo es hereditariamente débilmente unicoherente, si cualquier subcontinuo es débilmente unicoherente.

Claramente ser hereditariamente unicoherente implica ser hereditaria débilmente unicoherente; sin embargo, la relación recíproca no se tiene. A continuación veremos como construir un continuo hereditariamente débilmente unicoherente que no es hereditariamente unicoherente.

Proposición 2.2.2. Sean X_1 y X_2 dos continuos, tales que $X_1 \cap X_2 = \{a, b\}$ y $a \neq b$. Si X_1 y X_2 son hereditariamente indescomponibles, entonces $Z = X_1 \cup X_2$ es hereditariamente débilmente unicoherente y no es hereditariamente unicoherente.

Demostración. Sea K un subcontinuo de Z y probemos que K es débilmente unicoherente. Si pasa que $K \subseteq X_1$ ó $K \subseteq X_2$, entonces K es indescomponible, y por lo tanto débilmente unicoherente. Tomemos ahora cuando $K \cap (X_1 \setminus X_2) \neq \emptyset$ y $K \cap (X_2 \setminus X_1) \neq \emptyset$. Definamos $K_1 = K \cap X$ y $K_2 = K \cap Y$. Por la Proposición 1.1.9 tenemos que alguno de los dos K_1 o K_2 tiene a lo más dos componentes y el otro resulta ser conexo. Analicemos primero cuando K_1 y K_2 son conexos; de ser así K_1 y K_2 son continuos indescomponibles. Luego por [17, Teoremas 5, 7, pág. 212] K es irreducible y por el Teorema 2.1.17, será débilmente unicoherente. Para concluir la prueba veamos que K es unicoherente cuando K_1 ó K_2 es disconexo. Realizaremos uńicamente cuando K_1 es diconexo. Por la Proposición 1.1.9 K_1 tiene dos componentes L_1 y L_2, tales que $a \in L_1$, $b \in L_2$ y además K_2 es conexo. Observe que K_2, L_1 y L_2 son indescomponibles, por lo tanto unicoherentes. Aplicando [27, Teorema 6.3, pág. 857] se obtiene que $(K_2 \cup L_1) \cup L_2 = K$ es unicoherente. De lo afirmado anteriormente concluimos que X es hereditariamente débilmente unicoherente.

Veamos que Z no es unicoherente. Note que $Z = X_1 \cup X_2$, donde X_1, X_2 son subcontinuos de Z y $X_1 \cap X_2 = \{a, b\}$. Por lo tanto Z no es hereditariamente unicoherente. $\square$

Tenemos que todo continuo hereditariamente unicoherente es hereditariamente débilmente unicoherente, pero todo continuo débilmente unicoherente no es hereditariamente unicoherente (véase Proposición 2.2.2). El siguiente lema nos permitirá concluir que la unicoherencia hereditaria y la unicoherencia débil hereditaria son equivalentes en continuos aposindéticos. La demostración de este lema fue basada en los resultados y demostraciones de Bennet en [1].

Lema 2.2.3. Sea X un continuo hereditariamente débilmente unicoherente. Si X es aposindético, entonces X es localmente conexo.

Demostración. Para probar que X es localmente conexo, basta ver que X es conexo en pequeño por el Teorema 1.1.6. Sean $p \in X$ y U un abierto de X con $p \in U$. Como X es aposindético, para cada $y \in X \setminus U$ existe un subcontinuo V_y de X tal que $p \in \mathrm{Int}_X(V_y)$ y $\mathrm{Int}_X(V_y) \subseteq V_y \subseteq X \setminus \{y\}$. Entonces tenemos que la familia $\{X \setminus V_y : y \in X \setminus U\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus U$, por la compacidad de $X \setminus U$ existe una subcubierta finita $\{X \setminus V_1, X \setminus V_2, ..., X \setminus V_n\}$ de $X \setminus U$, equivalentemente

$$p \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Int}_X(V_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subseteq U$$

Para finalizar la prueba, veamos que $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ es conexo aplicando inducción sobre n.

1. Si $n = 1$ se tiene inmediatamente; veamos para $n = 2$. Como $p \in V_1 \cap V_2$, se tiene que $V_1 \cup V_2$ es conexo, por lo tanto un continuo. Además V_1, V_2 son subcontinuos de $V_1 \cup V_2$ con $p \in \mathrm{Int}(V_1) \cap \mathrm{Int}(V_2)$, es decir $\mathrm{Int}(V_1 \cap V_2) \neq \emptyset$. Como X es hereditariamente débilmente unicoherente tenemos que $V_1 \cap V_2$ es conexo.

2. Supongamos que $\bigcap_{i=1}^{k} V_i$ es conexo y probemos que $\bigcap_{i=1}^{k+1} V_i$ es conexo. Como $p \in \bigcap_{i=1}^{k+1} V_i$ se tiene que $\left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i\right) \cup V_{k+1}$ es conexo, por lo tanto un continuo. Además $\bigcap_{i=1}^{k} V_i, V_{k+1}$ son subcontinuos de $\left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i\right) \cup V_{k+1}$ con $p \in \bigcap_{i=1}^{k+1} \mathrm{Int}_X(V_i)$. Dicho lo anterior y dado que $\bigcap_{i=1}^{k+1} \mathrm{Int}_X(V_i) = \mathrm{Int}_X\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} V_i\right)$, obtenemos que $\mathrm{Int}_X\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} V_i\right) \neq \emptyset$. Como X es hereditariamente débilmente unicoherente $\bigcap_{i=1}^{k+1} V_i$, será conexo.

Por el principio de inducción matemática se concluye que $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ es conexo. □

Teorema 2.2.4. Todo continuo hereditariamente débilmente unicoherente y aposindético es hereditariamente unicoherente.

Demostración. Sea K un subcontinuo débilmente unicoherente de X y supongamos que no es unicoherente. Es decir existen subcontinuos A y B, tales que $K = A \cup B$ y $A \cap B$ es disconexo. Sean L una componente de $A \cap B$ y $p \notin L$. Por Lema 2.2.3, X es localmente conexo; entonces existe un continuo con interior no vacío N, tal que $p \in N$ y $L \cap N = \emptyset$. Defino $T = K \cup N$, $C = A \cup N$ y $D = B \cup N$, los cuales son continuos. Note que $T = C \cup D$ y $\mathrm{Int}_T(C \cap D) \neq \emptyset$, ya que $K \subseteq C \cap D$. Sin embargo $C \cap D = (A \cap B) \cup N$ es disconexo, ya que L será una componente de $C \cap D$ que no intersecta a N. Así X no es hereditariamente débilmente unicoherente. Por lo tanto K ha de ser unicoherente. $\square$

El siguiente corolario es inmediato del Lema 2.2.3 y los Teoremas 1.6.9 y 2.2.4.

Corolario 2.2.5. Todo continuo hereditariamente débilmente unicoherente y aposindético es una dendrita.

2.3. PRODUCTO Y LÍMITES INVERSOS

En esta sección estudiaremos la unicoherencia débil y la unicoherencia débil hereditaria en productos y límites inversos de continuos. Particularmente, mostraremos que el producto de continuos débilmente unicoherentes no es débilmente unicoherente y demostraremos que el límite inverso de continuos débilmente unicoherentes o hereditariamente débilmente unicoherentes es débilmente unicoherente o hereditariamente débilmente unicoherente, respectivamente.

En [13, Ejemplo 5.5, pág. 48] muestran la existencia de un continuo unicoherente X tal que $X^2 = X \times X$ no es unicoherente. A continuación veremos que este producto tampoco es débilmente unicoherente.

Ejemplo 2.3.1. Existe un continuo débilmente unicoherente X, tal que X^2 no es débilmente unicoherente.

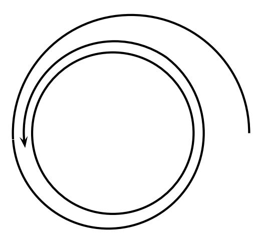


Figura 2.4: Producto de débilmentes unicoherentes

En [13] los profesores A. García y A. Illanes toma el continuo unicoherente X definido en el plano complejo por $X = S^1 \cup R$, donde $R = \{(1 + e^{-\theta})e^{i\theta} \colon \theta \geq 0\}$ (ver Figura 2.4). Nótese que X es débilmente unicoherente.
En [13, ejemplo 5.5, pág. 48] toman A, B, H y K en X^2 definidos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{(r_1e^{i\theta_1}, r_2e^{i\theta_2}) \in X^2 \colon \left\lfloor \frac{\theta_1-\theta_2}{\pi} \right\rfloor \text{ es par}\right\};\\
B &= \left\{(r_1e^{i\theta_1}, r_2e^{i\theta_2}) \in X^2 \colon \left\lfloor \frac{\theta_1-\theta_2}{\pi} \right\rfloor \text{ es impar}\right\};\\
H &= \left\{(r_1e^{i\theta_1}, r_2e^{i\theta_2}) \in X^2 \colon \frac{\theta_1-\theta_2}{\pi} \text{ es entero par}\right\};\\
K &= \left\{(r_1e^{i\theta_1}, r_2e^{i\theta_2}) \in X^2 \colon \frac{\theta_1-\theta_2}{\pi} \text{ es entero impar}\right\}.
\end{aligned}
$$

donde $\lfloor \theta \rfloor$ es el mayor entero menor ó igual a θ y se demostro que:

$$X^2 = \mathrm{Cl}_{X^2}(A) \cup \mathrm{Cl}_{X^2}(B) \text{ y } \mathrm{Cl}_{X^2}(A) \cap \mathrm{Cl}_{X^2}(B) = H \cup K,$$

donde $\mathrm{Cl}_{X^2}(A)$, $\mathrm{Cl}_{X^2}(B)$ son subcontinuos de X^2 y H, K son cerrados disjuntos. Nótese que $(R \times R) \cap (H \cup K) \neq \emptyset$ y $R \times R$ es abierto, conexo y localmente conexo, ya que R es abierto, conexo y localmente conexo. Sea $p = ((1+e^{-\theta})e^{i\theta}, (1+e^{-(\theta+\pi)})e^{i(\theta+\pi)})$, para algún $\theta > 0$. Tenemos que $p \in X^2 \setminus H$ y aplicando la conexidad local de $R \times R$ y la normalidad de X^2, garantizamos que existe una vecindad D de p cerrada y conexa, tal que $p \in \mathrm{Int}_{X^2}(D)$ y $D \subseteq X^2 \setminus H$. Tomemos $E = Cl_{X^2}(A) \cup D$ y $F = Cl_{X^2}(B) \cup D$, los cuales son subcontinuos de X^2, tales que $X^2 = E \cup F$ y $\mathrm{Int}_{X^2}(D) \subseteq \mathrm{Int}_{X^2}(E \cap F)$. Del argumento anterior resulta que $\mathrm{Int}_{X^2}(E \cap F) \neq \emptyset$ y además $E \cap F = (\mathrm{Cl}_{X^2}(A) \cup D) \cap (\mathrm{Cl}_{X^2}(B) \cup D) = (H \cup D) \cup K$, donde $H \cup D$ y K son dos cerrados disjuntos. De la aseveración anterior resulta que X^2 no es débilmente unicoherente.

En [13, Teorema 5.1, pág. 47] se encuentra que el producto finito de espacios localmente conexos unicoherentes es unicoherente. Recordemos que por el Teorema 2.1.9 la unicoherencia y la unicoherencia débil son equivalentes en espacios localmente conexos. De esta manera tenemos que el producto de continuos débilmente unicoherentes y localmente conexos es débilmente unicoherente, particularmente unicoherentes.

En [26, Teorema 2.12, pág. 37], se encuentra que el límite inverso con funciones de ligadura sobreyectivas de continuos unicoherentes, es unicoherente. De manera análoga establecemos que la unicoherencia débil se preserva bajo límites inversos con las mismas condiciones, pero modificando los espacios por débilmente unicoherentes, como mostramos en el siguiente resultado.

Proposición 2.3.2. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos, tal que $f_n^{n+1}\colon X_{n+1} \to X_n$ es sobreyectiva, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si X_n es débilmente unicoherente para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X_∞ es débilmente unicoherente.

Demostración. Sean A y B dos subcontinuos de X_∞, tales que $X_\infty = A \cup B$ y $\mathrm{Int}_{X_\infty}(A \cap B) \neq \emptyset$. Por Proposición 1.2.7 existe $U_k \subseteq X_k$ abierto, no vacío, para algún $k \in \mathbb{N}$, tal que $f_k^{-1}(U_k) \subseteq A \cap B$. Así, $U_k \subseteq f_k(A \cap B)$ y dado que $f_k(A \cap B) \subseteq f_k(A) \cap f_k(B)$ sucede que $U_k \subseteq Int_{X_k}(f_k(A) \cap f_k(B))$ y $Int_{X_k}(f_k(A) \cap f_k(B)) \neq \emptyset$. Por la Observación 1.2.4 $X_k = f_k(A) \cup f_k(B)$ y dado que X_k es débilmente unicoherente, $f_k(A) \cap f_k(B)$ es conexo.
Veamos que $f_n(A) \cap f_n(B)$ es conexo para todo $n \geq k$. Dado que las funciones de ligadura son sobreyectivas, tenemos que las funciones proyección son sobreyectivas, por la Observación 1.2.4. Por lo tanto, $X_n = f_n(A) \cup f_n(B)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ya que $f_k^n\colon X_n \to X_k$ es continua, existe un abierto $U_n \subseteq X_n$, tal que $f_k^n(U_n) \subseteq U_k$. Sea $z \in f_n^{-1}(U_n)$, entonces $f_n(z) \in U_n$ y así $z \in f_k^{-1}(U_k)$, puesto que $f_k(z) = f_k^n(f_n(z))$ y $f_k^n(f_n(z)) \in U_k$. De lo anterior sucede que $f_n^{-1}(U_n) \subseteq f_k^{-1}(U_k)$, para cada $n \geq k$. Como $f_k^{-1}(U_k) \subseteq A \cap B$, tenemos que $f_n^{-1}(U_n) \subseteq A \cap B$ y de esta manera obtenemos que $\mathrm{Int}_{X_n}(f_n(A) \cap f_n(B)) \neq \emptyset$, para cada $n \geq k$. De las aseveraciones anteriores y dado que X_n es débilmente unicoherente se obtiene $f_n(A) \cap f_n(B)$ conexo, para cada $n \geq k$. Luego $\left\{f_n(A) \cap f_n(B), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A) \cap f_{n+1}(B)}\right\}_{n=k+1}^{\infty}$ es una sucesión inversa de continuos. Por el Teorema 1.2.6 y la Proposición 1.2.9 su límite inverso es un continuo y $\varprojlim \left\{f_n(A) \cap f_n(B), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A) \cap f_{n+1}(B)}\right\}_{n=1}^{\infty} = A \cap B$. Además, $\varprojlim \left\{f_n(A) \cap f_n(B), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A) \cap f_{n+1}(B)}\right\}_{n=k+1}^{\infty}$ es homeomorfo a $\varprojlim \left\{f_n(A) \cap f_n(B), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(A) \cap f_{n+1}(B)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ por la Proposición 1.2.10. De esta manera obtenemos $A \cap B$ conexo. □

Para finalizar demostraremos que el límite inverso de continuos hereditariamente débilmente unicoherentes es hereditariamente débilmente unicoherente.

Corolario 2.3.3. Sea $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos, tal que $f_n^{n+1}\colon X_{n+1} \to X_n$ es sobreyectiva, para cada $n \in \mathbb{N}$. Si X_n es hereditariamente débilmente unicoherente para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X_∞ es hereditariamente débilmente unicoherente.

Demostración. Sea K un subcontinuo de X_∞ y veamos que K es débilmente unicoherente. Como las proyecciones son continuas, tenemos que $f_n(K)$ es un subcontinuo de X_n, para cada $n \in \mathbb{N}$ y además es débilmente unicoherente. Obtenemos $\left\{f_n(K), f_n^{n+1}|_{f_{n+1}(K)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión inversa de continuos débilmente unicoherentes, con funciones de ligadura sobreyectivas, la cual tiene como límite inverso K, por la Proposición 1.2.8. Así, por la Proposición 2.3.2 concluimos que K es débilmente unicoherente. □

2.4. ESPACIO COCIENTE

En está sección estudiaremos el comportamiento del espacio cociente de continuos débilmente unicoherentes, que intuitivamente consiste en pegar continuos débilmente unicoherentes por cerrados o particularmente por continuos. Este espacio adjunto se puede ver como la unión de dos continuos, cuya intersección es cerrada. En [27] Pierce establece que la unión de dos continuos unicoherentes, cuya intersección es un continuo, no basta para que el espacio sea unicoherente, para tal objetivo define:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{re^{i\theta}\colon -2 \leq r \leq -1 - e^{-\theta}, 0 \leq \theta < \pi\}, \\ X_2 &= \{re^{i\theta}\colon -1 - e^{\pi-\theta} \leq r \leq -1 - e^{-\theta}, \theta \geq \pi\}, \\ Y_1 &= \{re^{i\theta}\colon 1 + e^{-\theta} \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < \pi\}, \\ Y_2 &= \{re^{i\theta}\colon 1 + e^{-\theta} \leq r \leq 1 + e^{\pi-\theta}, \theta \geq \pi\}. \end{aligned}$$

Pierce en [27, Conjetura 6.4, pág. 866] toma los continuos $X = X_1 \cup X_2 \cup S^1$ y $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup S^1$ (ver Figura 2.5).

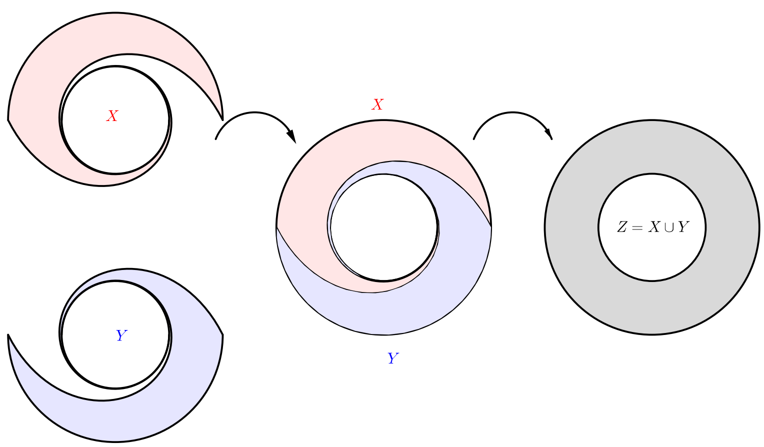


Figura 2.5: Unión de continuos unicoherentes

Pierce menciona que son continuos unicoherentes, por ende débilmente unicoherentes, cuya intersección es un continuo que no es localmente conexo y su unión es un anillo, que claramente no es débilmente unicoherente.

Pierce demuestra que la unión de continuos unicoherentes, cuya intersección es un continuo localmente conexo es unicoherente. El siguiente ejemplo garantiza que el teorema de Pierce modificando las hipotésis de unicoherentes por débilmente unicoherentes, no es suficiente para que el continuo resultante sea débilmente unicoherente.

Ejemplo 2.4.1. Existen continuos X y Y disjuntos, débilmente unicoherentes y una función $f\colon A \to Y$ continua, donde A es un continuo localmente conexo de X, tal que $X \cup_f Y$ no es débilmente unicoherente.

Sean X el continuo débilmente unicoherente del 1.1.3 y α un arco, tomamos $q\colon X_1 \cup X_2 \to X$ la función cociente respectiva y $h\colon [0,1] \to \alpha$ un homeomorfismo. Defino $f\colon \{a\} \to \{h(0)\}$ por $f(a) = h(0)$, donde $a = q(0,1)$ y por último tomamos el espacio cociente $Z = X \cup_f \alpha$. Note que el continuo satisface la hipotésis requeridas y veamos que no es débilmente unicoherente. Tomamos los continuos A como el continuo homeomorfo curva del topólogo junto con el arco y B el otro continuo homeomorfo a la curva del topólogo junto con el arco como muestra la Figura 2.6.

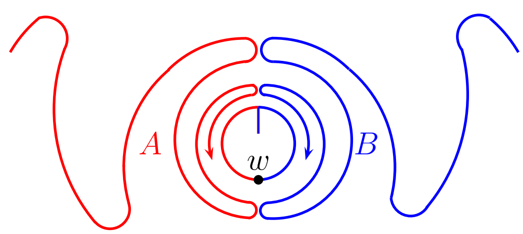


Figura 2.6: No unicoherencia débil del espacio adjunto

Claramente $Z = A \cup B$ y $A \cap B$ es el arco con el punto $w = \{q(-1,0)\}$. Lo afirmado anteriormente garantiza que Z no es débilmente unicoherente.

Del Teorema 2.1.17 tenemos que todo continuo irreducible es débilmente unicoherente. Sin embargo, $Z = \alpha \cup_f X$ es irreducible en $\{q(-2, \mathrm{sen}(1))\}$, $\{1\}$ y $\{q(1, \mathrm{sen}(1))\}$ y no es débilmente unicoherente. Así, obtenemos que no todo irreducible en un conjunto finito con cardinalidad mayor a 2 es débilmente unicoherente.

Dado lo ocurrido con el Ejemplo 2.4.1, en la siguiente proposición modificamos las hipotésis, de tal manera que se obtenga como conclusión un continuo débilmente unicoherente. El resultado nos permitirá ampliar la familia de continuos débilmente unicoherentes.

Proposición 2.4.2. Sea $X = Y \cup Z$ un continuo, tal que Y y Z son continuos que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Y y Z son débilmente unicoherentes;
2. $Y \cap Z = \{p\}$, para algún $p \in X$;
3. X es localmente conexo en p.

Entonces X es débilmente unicoherente

Demostración. Sean A y B subcontinuos de X, tales que $X = A \cup B$. Supongamos que $A \cap B$ no es conexo. Sea L una componente de $A \cap B$, tal que $p \notin L$. Sin pérdida de generalidad, supngamos que $L \subseteq Y \setminus Z$. Por el Teorema 1.1.7, $A \cap Y$ y $B \cap Y$ son continuos. Sean $A' = A \cap Y$ y $B' = B \cap Y$. Es claro que $Y = A' \cup B'$ y L es una componente de $A' \cap B'$, tal que $p \notin L$. Consideremos los dos siguientes casos:

1. $p \in A' \cap B'$. Como X es localmente conexo en p, entonces existe una vecindad K conexa y cerrada de p en X, tal que $L \cap K = \emptyset$. Por el Teorema 1.1.7 $K \cap Y$ es conexo. Así definimos $C = A' \cup K'$ y $D = B' \cup K'$, donde $K' = K \cap Y$. Así tenemos que $Y = C \cup D$ y $\mathrm{Int}_Y(C \cap D) \neq \emptyset$, ya que $\mathrm{Int}_Y(K')$ es no vacío y está contenido en $C \cap D$. Note que L es una componente de $C \cap D$, puesto que $K' \cap L = \emptyset$. Por lo tanto, $C \cap D$ es disconexo y así Y no es débilmente unicoherente.
2. $p \notin A' \cap B'$. En este caso $\mathrm{Int}_Y(A' \cap B') = \emptyset$.

Finalmente, nótese que si $p \notin A' \cap B'$, entonces $A \subseteq Y$ o $B \subseteq Y$. Luego $A \cap B = A' \cap B'$ y $\mathrm{Int}_X(A \cap B) = \emptyset$. De lo anterior, X es débilmente unicoherente. $\square$

De la Definición 2.1.1 y el Teorema 2.1.17, la familia de continuos unicoherentes e irreducibles están contenidos en la familia de continuos débilmente unicoherentes. Sin embargo, el ejemplo a continuación garantiza que existen continuos débilmente unicoherentes que no son unicoherentes y tampoco son irreducibles.

Ejemplo 2.4.3. Existe un continuo débilmente unicoherente que no es unicoherente ni irreducible.

Tomemos el continuo X del Ejemplo 1.1.3, el cual es débilmente unicoherente y no unicoherente. Sean $q\colon X_1 \cup X_2 \to X$, la respectiva función cociente, α un arco y $h\colon [0,1] \to \alpha$ un homeomorfismo. Sea p un punto de conexidad local en X que difiere de $q(-1, \mathrm{sen}(-1))$ y $q(1, \mathrm{sen}(1))$. Definimos $f\colon \{p\} \to \{h(0)\}$ y tomamos $Z = \alpha \cup_f X$. La Figura 2.7 representa nuestro espacio cociente Z.

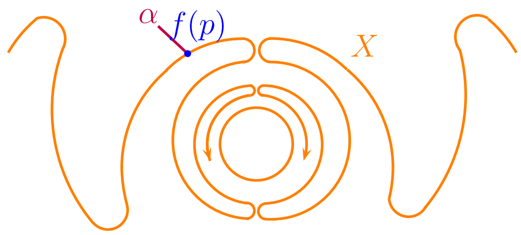


Figura 2.7: Continuo débilmente unicoherente, no unicoherente, ni irreducible

De la Proposición 2.4.2, Z es débilmente unicoherente. No es difícil ver que Z no es unicoherente, ni irreducible.
Buscando fortalecer la Proposición 2.4.2 nos planteamos lo siguiente.

Pregunta 2.4.4. Sea $X = Y \cup Z$ un continuo, tales que Y y Z son continuos débilmente unicoherentes y $Y \cap Z$ es un continuo. ¿Si X es localmente conexo en cada punto de $Y \cap Z$, entonces X es débilmente unicoherente?

3. FUNCIONES

En topología general se definen las funciones continuas como una herramienta natural para relacionar espacios topológicos. Además, con el fin de preservar alguna propiedad que no se mantiene únicamente con la continuidad, se introducen funciones continuas con propiedades adicionales, como: funciones abiertas, cerradas y homeomorfismos. Por ejemplo, la imagen continua de un continuo débilmente unicoherente no es necesariamente débilmente unicoherente. Basta tomar la función de $f\colon [0,1] \to S^1$, definida por $f(t) = e^{2\pi t i}$ para cada $t \in [0,1]$. De está manera, nos adentramos en el estudio de la invarianza de los continuos débilmente unicoherentes en algunos tipos de funciones continuas.

Por otro lado, en [6], los autores establecen que toda función fuertemente libremente descomponible definida en un continuo débilmente unicoherente es casimonótona. Con esta afirmación, es natural tratar de caracterizar la siguiente familia de continuos:

$$\mathcal{F} = \{X \text{ continuo } : \text{ Toda función } f\colon X \to Y \text{ fuertemente libremente descomponible es casimonótona}\}.$$

La unicoherencia débil es una condición suficiente para estar en la familia $\mathcal{F}$, como veremos en el Teorema 3.2.8. Sin embargo, está condición no es necesaria, puesto que en [6, Ejemplo 5.3, pág. 6] los autores construyen un ejemplo de un continuo que no es débilmente unicoherente y está en la familia $\mathcal{F}$. Buscando ampliar la familia de continuos que están en $\mathcal{F}$, en el Teorema 3.2.11 logramos introducir una colección de continuos en $\mathcal{F}$, que contiene al continuo definido en el Ejemplo 5.3.

En este capítulo definiremos las funciones monótonas, casimonótonas, cuasimonótonas, libremente descomponibles y fuertemente libremente descomponibles. Estudiaremos relaciones entre estas clases de funciones y mostraremos algunos ejemplos cuando una implicación no se cumpla. Estudiaremos la invarianza de continuos débilmente unicoherentes en estas clases de funciones y mostraremos condiciones y ejemplos para que un continuo esté en la familia $\mathcal{F}$.

3.1. DEFINICIONES, RELACIONES Y EJEMPLOS

A continuación definimos las funciones monótonas, casimonótonas, cuasimonótonas, libremente descomponibles y fuertemente libremente descomponibles, mostramos algunos ejemplos y algunas relaciones entre estas funciones.

Definición 3.1.1. Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, definida entre continuos. Diremos que f es *monótona*, si para cada subcontinuo K de Y, $f^{-1}(K)$ es un subcontinuo de X.

A continuación definimos una clase de funciones continuas que contienen a las funciones monótonas.

Definición 3.1.2. Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, definida entre continuos. Diremos que f es *casimonótona*, si para cada subcontinuo K de Y, tal que $\mathrm{Int}_Y(K) \neq \emptyset$, $f^{-1}(K)$ es subcontinuo de X.

De las Definiciones 3.1.1 y 3.1.2 es inmediato verificar que toda función mónotona es casimonótona. Sin embargo, recíproco no es verdadero, el ejemplo puede ser encontrado en [5].

Definición 3.1.3. Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, definida entre continuos. Diremos que f es *cuasimonótona*, si para cualquier subcontinuo con interior no vacío K de Y, $f^{-1}(K)$ tiene a lo más un número finito de componentes y si D es una componente de $f^{-1}(K)$, tenemos que $f(D) = K$.

De la Definición 3.1.2 y 3.1.3 toda función casimonótona es cuasimonótona; por lo tanto, las funciones monótonas son cuasimonótonas. A continuación mostraremos un ejemplo donde la implicación recíproca no es válida.

Ejemplo 3.1.4. Existe una función cuasimonótona que no es casimonótona.

Tomemos $X = [-1, 1]$, $Y = [0, 1]$ y la función $f\colon X \to Y$, dada por $f(x) = |x|$. No es difícil ver que f no es casimonótona. Note que la imagen inversa de un subcontinuo de Y tiene a lo más dos componentes.

Las funciones fuertemente libremente descomponibles fueron introducidas por G. Gordh y C. Hughes en [14]. Algunas propiedades de estas clases de funciones se pueden encontrar en [21].

Definición 3.1.5. Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, definida entre continuos. Decimos que f es *libremente descomponible*, siempre que $Y = C \cup D$, donde C y D son subcontinuos propios de Y, existen A y B subcontinuos de X, tales que $X = A \cup B$, $A \subseteq f^{-1}(C)$ y $B \subseteq f^{-1}(D)$. Si además, $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son subcontinuos de X diremos que f es *fuertemente libremente descomponible.*

De la definición anterior tenemos que toda función fuertemente libremente descomponible es libremente descomponible. Con el siguiente ejemplo mostramos que el recíproco de esta afirmación es falsa. Este ejemplo es tomado de [5, Ejemplo 2.1, pág. 892].

Ejemplo 3.1.6. Sean X el cono de Cantor, $Y = X/\left\{(\frac{1}{3}, 0), (\frac{2}{3}, 0)\right\}$ y $f\colon X \to Y$ la función cociente.

Sean $T = \left\{(x, y) \in X\colon 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$ y $W = \left\{(x, y) \in X\colon \frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$. Es claro que si tomamos $C = f(T)$ y $D = f(W)$, se tiene que $Y = C \cup D$ y $f^{-1}(C) = T \cup \left\{\left(\frac{2}{3}, 0\right)\right\}$ y $f^{-1}(D) = W \cup \left\{\left(\frac{1}{3}, 0\right)\right\}$ (véase Figura 3.1). Esto muestra que la función cociente f no es fuertemente libremente descomponible. No es difícil aceptar que f es libremente descomponible. Una prueba formal resulta difícil de escribir por la cantidad de subcontinuos con interior no vacío que tiene Y.

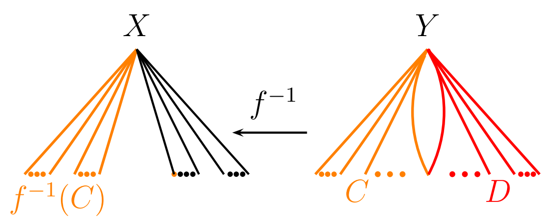


Figura 3.1: Función no fuertemente libremente descomponible

A continuación veremos la relación que existe entre las funciones casimonótonas y las funciones fuertementes libremente descomponibles.

Proposición 3.1.7. Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva, definida entre continuos. Si f es casimonótona entonces f es fuertemente libremente descomponible.

Demostración. Sean A y B subcontinuos propios de Y, tales que $Y = A \cup B$. Note que $Y \setminus B$ y $Y \setminus A$ son abiertos no vacíos contenidos en A y B, respectivamente. Como f es casimonótona entonces $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos. $\square$

Ejemplo 3.1.8. Existe una función fuertemente libremente descomponible que no es casimonótona.

Sea $f\colon S^1 \to [-1,1]$ la función definida por $f((x,y)) = x$. La función f resulta ser fuertemende libremente descomponible y no casimonótona, puesto que la imagen inversa de un arco de $[-1,1]$ que no contenga a $-1, 1$, resulta ser disconexa.

El siguiente diagrama ilustra algunas relaciones entre las funciones. Denotaremos las funciones fuertemente libremente descomponibles y libremente descomponibles por F.L.D y L.D, respectivamente.

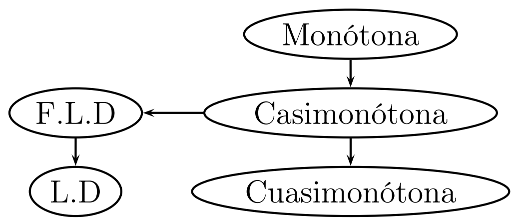


Diagrama 3.1

3.2. UNICOHERENCIA DÉBIL EN FUNCIONES

En está sección estudiamos las funciones continuas entre continuos que preservan unicoherencia débil. A continuación veremos un ejemplo de una función que garantiza que no todas las funciones abiertas preservan unicoherencia débil. El ejemplo fue tomado de [26] en relación a la funcion abierta en unicoherentes.

Ejemplo 3.2.1. Existe una función abierta que no preserva unicoherencia débil.

Tomemos el continuo $X = S^1 \cup S_1 \cup S_2 \cup C$, donde $S_1 = \left\{\left(1 + \frac{1}{\theta+2}\right) e^{i\theta}\colon \theta \geq 0\right\}$, $S_2 = \left\{\left(2 - \frac{1}{2-\theta}\right) e^{i\theta}\colon \theta \geq 0\right\}$ y $C = \{2e^{i\theta}\colon \theta \in [0, 2\pi]\}$ (ver Figura 3.2).

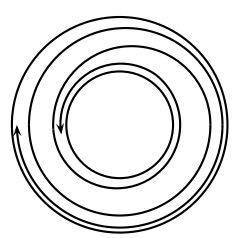


Figura 3.2: Ilustración del continuo del Ejemplo 3.2.1

El continuo X es irreducible entre p y q, donde $p \in S^1$ y $q \in C$. Así, del Teorema 2.1.17 se tiene que X es débilmente unicoherente. Ahora tomamos $f\colon X \to S^1$

la proyección radial, dada por $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Tenemos una función abierta de X en S^1. Por lo tanto, las funciones abiertas no preservan unicoherencia débil.

Veamos ahora qué sucede con la unicoherencia débil en las funciones definidas en la Sección 5.1. El siguiente lema será útil para garantizar que las funciones cuasimonótonas preservan continuos débilmente unicoherentes. La prueba del Lema puede ser encontrada en [32].

Lema 3.2.2. Sea X un espacio topológico conexo. Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son subconjuntos cerrados y conexos de X, tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, entonces existe l, $1 \leq l \leq n$, tal que $\bigcup_{i=l,i\neq l}^{n} A_i$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $B_1 = \bigcup_{i=2}^{n} A_i$ no es conexo, de lo contrario damos por terminada la prueba. Como B_1 no es conexo, entonces existen C_1 y D_1 cerrados disjuntos no vacíos de X, tales que $B_1 = C_1 \cup D_1$.
Veamos que $C_1 \cup A_1$ es conexo. Supongamos que ocurre lo contrario, es decir, existen cerrados disjuntos no vacíos E y F, tales que $A_1 \cup C_1 = E \cup F$. Como A_1 es conexo, se tiene que $A_1 \subseteq E$ ó $A_1 \subseteq F$. Sin pérdida de generalidad tomemos $A_1 \subseteq E$, así $F \subseteq C_1$. Por lo tanto $X = (E \cup C_1) \cup F$ y $(E \cup C_1) \cap F = \emptyset$, lo que contradice la conexidad de X. De lo anterior concluimos que $A_1 \cup C_1$ es conexo. Sea $A_{k_1} \subseteq E_1$ y consideremos $B_2 = \left(\bigcup_{i=1}^{k_1-1} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=k_1+1}^{n} A_i\right)$. Si B_2 es conexo terminamos la prueba. Supongamos que B_2 es conexo, entonces existen cerrados, disjuntos no vacíos C_2 y D_2 de X, tales que $B_2 = C_2 \cup D_2$. Como $C_1 \cup A_1$ es conexo, entonces $C_1 \cup A_1 \subseteq C_2$ ó $C_1 \cup A_1 \subseteq D_2$. Tomemos $C_1 \cup A_1 \subseteq C_2$ y análogamente como mostramos que $A_1 \cup C_1$ es conexo, tenemos que $A_{k_1} \cup C_2$ es conexo. De lo anterior $A_1 \cup C_1 \subseteq A_{k_1} \cup C_2$. Siguiendo con este procedimiento, llegamos a que $A_1 \cup C_1 \subseteq A_{k_1} \cup C_1 \subseteq A_{k_2} \cup C_3$. Repitiendo el procedimiento anterior y suponiendo que los B_i no son conexos, concluimos en un número finito de pasos $D_i = A_{k_l}$ y por último tenemos que $B = \left(\bigcup_{i=1}^{k_l-1} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=k_l+1}^{n} A_i\right)$ es conexo, para algún $k_l \in \{1, ..., n\}$. □

La demostración del siguiente teorema fue basada en los resultados de A. Wallace en [32] en relación a la unicoherencia en funciones cuasimonótonas.

Teorema 3.2.3. Sea $f \colon X \to Y$ una función cuasimonótona. Si X es débilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente.

Demostración. Sean A y B subcontinuos de Y, tales que $Y = A \cup B$ y $\mathrm{Int}_Y(A \cap B) \neq \emptyset$. Si $A = Y$ o $B = Y$ ya se tiene lo requerido. Supongamos que A y B son subcontinuos propios de Y. Dado que f es una función sobreyectiva, se tiene que $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Como $\mathrm{Int}_Y(A)$, $\mathrm{Int}_Y(B)$ son no vacíos y f es

cuasimonótona, tenemos que $f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} N_i$ y $f^{-1}(B) = \bigcup_{j=1}^{m} M_j$, donde N_i, M_j son componentes de $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$, respectivamente, $f(N_i) = A$ y $f(M_j) = B$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y $j \in \{1, ..., m\}$. Sin pérdida de generalidad, tomemos $D = (\bigcup_{i=2}^{n} N_i) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{n} M_j\right)$, siendo $E = N_1$ el subcontinuo adecuado que deja a D conexo, por el Lema 3.2.2. Observe que D y E son subcontinuos de X tales que $X = D \cup E$.
Veamos que $D \cap E = f^{-1}(A \cap B)$ o equivalentemente $f(D \cap E) = A \cap B$. Tomemos $y \in f(D \cap E)$, por lo tanto existe $x \in D \cap E$, tal que $f(x) = y$. Como $f(E) = A$, tenemos que $y \in A$. Note que $N_i \cap N_l = \emptyset$, para cada $i \neq l$ y $x \in N_1 \cap \left((\bigcup_{i=2}^{n} N_i) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} M_i\right)\right)$. Así, existe $k \in \mathbb{N}$, tal que $x \in M_k$, por lo tanto $y \in B$, puesto que $f(M_k) = B$. Así $y \in A \cap B$. Ahora tomemos $y \in A \cap B$ y probemos que $y \in f(D \cap E)$. Como $f(E) = A$, existe $x \in E$, tal que $f(x) = y$ y además $x \in \left(\bigcup_{j=1}^{m} M_i\right)$. Luego existe $k \in \{1, ..., m\}$, tal que $x \in M_k$. De lo anterior obtenemos que $x \in D \cap E$, lo cual implica que $y \in f(D \cap E)$. En conclusión obtenemos $A \cap B = f(D \cap E)$.
Veamos ahora que $\text{Int}_X(D \cap E) \neq \emptyset$. Supongamos que que $\text{Int}_X(D \cap E) = \emptyset$, es decir $B(x; \epsilon) \cap (X \setminus (D \cap E)) \neq \emptyset$, para cada $x \in D \cap E$ y $\epsilon > 0$. Por hipotésis, existen $y \in A \cap B$ y $r > 0$ tal que $B(y; r) \subseteq A \cap B$. De lo anterior tenemos que existe $x_0 \in C \cap D$, tal que $f(x_0) = y$, ya que $f(D \cap E) = A \cap B$. Así, existe $x_n \in B\left(x_0; \frac{1}{n}\right) \setminus (D \cap E)$, para cada $n \in N$. Por lo mencionado anteriormente $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $X \setminus (D \cap E)$, tal que $x_n \to x_0$. De está manera se obtiene que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $Y \setminus (A \cap B)$. Pero $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$, ya que $B(f(x_0); r) \cap \{f(x_n) \colon n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$, lo cual sucede por que $B(f(x_0); r) \subseteq A \cap B$. La anterior afirmación contradice la continuidad de f. Por lo tanto, concluimos que $\text{Int}_X(D \cap E) \neq \emptyset$.
Como X es débilmente unicoherente y $X = D \cup E$, con D, E subcontinuos de X tales que $\text{Int}_X(D \cap E) \neq \emptyset$ se tiene que $D \cap E$ es conexo y así $A \cap B = f(D \cap E)$ también es conexo. □

El siguiente resultado es inmediato del Teorema 3.2.3.

Corolario 3.2.4. Sea $f \colon X \to Y$ una función monótona o casimonótona. Si X es débilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente.

En el Corolario 1.6.7 se garantizo que el $\text{Cono}(X)$, donde X es un continuo es unicoherente y por lo tanto débilmente unicoherente. Además no es difícil probar que la función cociente $f \colon \text{Cono}(X) \to \text{Sus}(X)$ es monótona y por el Corolario 3.2.4 tenemos que la suspensión de todo continuo es débilmente unicoherente.
El siguiente ejemplo muestra que las funciones libremente descomponibles no siempre preservan la unicoherencia débil.

Ejemplo 3.2.5. Existe una función libremente descomponible que no preserva la unicoherencia débil.

Tomemos la función $f\colon X \to Y$ libremente descomponible del Ejemplo 3.1.6. En [20, Figura 4, pág. 319] se menciona que el cono de Cantor es unicoherente y así el continuo X es débilmente unicoherente. Por otro lado, no es difícil ver que Y no es débilmente unicoherente.

El siguiente resultado tomado de [6], indica que las funciones fuertemente libremente descomponibles preservan la unicoherencia débil.

Teorema 3.2.6. Sea $f\colon X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible. Si X es débilmente unicoherente, entonces Y es débilmente unicoherente.

Demostración. Sean A y B subcontinuos de Y tales que $Y = A \cap B$ y $\mathrm{Int}_Y(A \cap B) \neq \emptyset$. Si alguno de los subcontinuos es Y entonces ya se tiene el resultado. Por lo tanto, supongamos que A y B son subcontinuos propios de Y. Como f es fuertemente libremente descomponible, tenemos que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subcontinuos de X, tales que $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ y además $\mathrm{Int}_X(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) \neq \emptyset$. De lo anterior y dado que X es débilmente unicoherente obtenemos que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ es conexo. Como $f(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(A \cap B)) = A \cap B$ y f es continua obtenemos que $A \cap B$ es conexo. $\square$

Definición 3.2.7. Sea $\mathcal{F}$ una familia de continuos definida por:

$$\mathcal{F} = \{X \colon \forall Y \text{ y } \forall\, f\colon X \to Y \text{ F.L.D., se tiene que } f \text{ es casimonótona}\}.$$

En [23, Pregunta 4.3.4] se plantea ¿Si todo continuo irreducible está en $\mathcal{F}$? El siguiente resultado ha sido tomado de [6], que responde parcialmente la pregunta de [23].

Teorema 3.2.8. Si X es un continuo débilmente unicoherente entonces $X \in \mathcal{F}$.

Demostración. Sea $f\colon X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible. Veamos que f es casimonótona. Tomemos K un subcontinuo de Y con interior no vacío. Si $K = Y$, entonces ya tenemos el resultado, por lo tanto, tomemos K un subcontinuo propio de Y. Si $Y \setminus K$ es conexo, claramente $\mathrm{Cl}_Y(Y \setminus K)$ es un subcontinuo propio de Y y $Y = K \cup \mathrm{Cl}_Y(Y \setminus K)$. Como f es fuertemente libremente descomponible tenemos que $f^{-1}(K)$ es conexo. Supongamos que $Y \setminus K$ es disconexo, es decir, existen cerrados disjuntos no vacíos A y B, tales que $Y \setminus K = A \cup B$. Por el Teorema 1.1.7 $K \cup A$ y $K \cup B$ son conexos. Así $K \cup A$ y $K \cup B$ son subcontnuos de Y, ya que son conexos y cerrados. Además $Y = (K \cup A) \cup (K \cup B)$ y dado que f es fuertemente libremente descomponible se obtiene que $f^{-1}(K \cup A)$

y $f^{-1}(K \cup B)$ son subcontinuos de X. Observe que $X = f^{-1}(K \cup A) \cup f^{-1}(K \cup B)$ y $\mathrm{Int}_X(f^{-1}(K \cup A) \cap f^{-1}(K \cup B)) = \mathrm{Int}_X(f^{-1}(K)) \neq \emptyset$. De lo anterior y dado que X es débilmente unicoherente, se cumple que $f^{-1}(K)$ es conexo. Así concluimos que $X \in \mathcal{F}$. $\square$

El siguiente corolario es inmediato, ya que todo continuo unicoherente o irreducible es débilmente unicoherente.

Corolario 3.2.9. Si X es unicoherente o irreducible entonces $X \in \mathcal{F}$.

En 1948 F. B Jones introdujo la función $\mathcal{T}$ en [16], como herramienta para el estudio de la aposindesis en continuos.

Definición 3.2.10. Sea X un espacio métrico compacto. Se define:

$$\mathcal{T} \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

como

$$\mathcal{T}(A) = \{x \in X \colon \ \forall K \in C(X), \ x \in \mathrm{Int}_X(K), \ \text{se tiene que } K \cap A \neq \emptyset\},$$

donde $C(X)$ es el espacio de todos los subcontinuos de X.

En la curva del topólogo, para todo cerrado $A \subseteq \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0,1]\right\}$ se tiene que $\mathcal{T}(A) = A$. Sin embargo, $\mathcal{T}(\{x\}) = \{0\} \times [-1,1]$, si $x \in \{0\} \times [-1,1]$ (ver Ejemplo 1.1.2). Para estudiar ejemplos y propiedades relacionadas con la función $\mathcal{T}$ de Jones, recomendamos consultar [19].
En [6, Ejemplo 5.3] los autores construyen un continuo que no es débilmente unicoherente y está en la familia $\mathcal{F}$. Este ejemplo amplia la familia de continuos que están en la familia $\mathcal{F}$. Basado en las propiedades del continuo [6, Ejemplo 5.3], se establece condiciones sobre un continuo para estar en la familia $\mathcal{F}$.

Teorema 3.2.11. Sea $X = X_1 \cup X_2$ un continuo, tal que X_1 y X_2 son continuos, $X_1 \cap X_2 = \{x_1, x_2\}$ y para cada $i \in \{1,2\}$ se satisface:

1. X_i es unicoherente;
2. $X_i \setminus \{x_i\}$ es disconexo;
3. Existe C_i componente de $X_i \setminus \{x_i\}$, tal que $\mathrm{Cl}_X(C_i) = C_i \cup \{x_i\}$ y $\mathrm{Cl}_X(C_i)$ es irreducible entre x_1 y x_2;
4. $\mathrm{Cl}_X(C_i) \subseteq \mathcal{T}(\{x_i\})$.

Entonces $X \in \mathcal{F}$.

Demostración. Empezaremos nuestra prueba con una afirmación que es consecuencia de la Proposición 1.1.9 en el Teorema 3.2.11:

Afirmación 3.2.12. Si E es un subcontinuo de X tal que $C_i \subseteq E$, entonces $E \cap X_i$ es un continuo, para $i \in \{1, 2\}$.

Probemos dos afirmaciones adicionales.

Afirmación 3.2.13. Si L es un continuo de X_1, entonces $L \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$ es conexo. (Tenemos una conclusión equivalente si L es un continuo de X_2)

Claramente se tiene la conclusión si $L \cap \mathrm{Cl}_X(C_1) = \emptyset$. Supongamos que $L \cap \mathrm{Cl}_X(C_1) \neq \emptyset$ y que $L \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$ es disconexo. Así existen cerrados, no vacíos, disjuntos U y V, tales que $L \cap \mathrm{Cl}_X(C_1) = U \cup V$. Observe que $L \nsubseteq \mathrm{Cl}_X(C_1)$, por lo tanto $L \cap (X \setminus \mathrm{Cl}_X(C_1)) \neq \emptyset$. Dado que L es conexo, se tiene que $x_1 \in L$; sin pérdida de generalidad supongamos que $x_1 \in U$. De esta manera $L = ((L \cap (X_1 \setminus C_1)) \cup U) \cup V$, donde $((L \cap (X_1 \setminus C_1)) \cup U)$ y V son cerrados disjuntos, lo cual contradice la conexidad de L.

Afirmación 3.2.14. Si $X = E \cup F$, donde E y F son subcontinuos de X y $(E \setminus F) \cap C_1 \neq \emptyset$, entonces existe un subcontinuo L de $E \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$ tal que $x_1 \in L$. (Tenemos una conclusión equivalente si $(E \setminus F) \cap C_2 \neq \emptyset$.)

Sea $z \in (E \setminus F) \cap C_1$. Por la Proposición 1.1.9, $E \cap X_1$ tiene a lo más dos componentes, digamos $E \cap X_1 = L_1 \cup L_2$. Sin pérdida de generalidad, tomemos $z \in L_1$. Si $z = x_1$, se tiene lo requerido, por lo tanto supongamos $z \neq x_1$. Como $X = (E \cap X_1) \cup (F \cap X_1) \cup X_2$ y $z \notin (F \cap X_1) \cup L_2 \cup X_2$, es claro que $z \in \mathrm{Int}_X(L_1)$. Como $z \in C_1 \subseteq \mathcal{T}(\{x_1\})$, $x_1 \in L_1$. Por la Afirmación 3.2.13 tenemos que $L = L_1 \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$ es un conexo de $\mathrm{Cl}_X(C_1)$ y como $L \subseteq E \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$ tenemos que L es un subcontinuo en $E \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$, tal que $x_1 \in L$. Con esto concluimos la prueba de la Afirmación 3.2.14.

La prueba del Teorema 3.2.11 la realizaremos en varios pasos:

Paso 1: *Si A y B son subcontinuos de X, tales que $X = A \cup B$ y $A \cap B$ es disconexo, entonces $A \cap B$ tiene exactamente dos componentes y cada una intersecta a $\{x_1, x_2\}$.*

Sea K una componente de $A \cap B$. Nótese que para concluir la prueba del Paso 1, solamente debemos ver que $K \cap \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$. Supongamos que $K \cap \{x_1, x_2\} = \emptyset$. De esto, $K \subseteq X_1$ o $K \subseteq X_2$. Realizaremos unicamente el caso cuando $K \subseteq X_1$; $K \subseteq X_2$ es análogo.
Supongamos primero que $K \subseteq X_1 \setminus \mathrm{Cl}_X(C_1)$. Observe que si $x_1 \notin A$, tenemos que $A \cap X_1$ es conexo; pues podría suceder que $A \subseteq X_1 \setminus \{x_1, x_2\}$, o $x_2 \in A$

(ver Corolario 1.1.10). Así, $A \cap X_1$ es un continuo contenido en $X_1 \setminus \{x_1\}$. Como C_1 es una componente de $X_1 \setminus \{x_1\}$ y $(A \cap X_1) \cap (X_1 \setminus \mathrm{Cl}_X(C_1)) \neq \emptyset$, tenemos que $A \cap X_1 \subseteq X_1 \setminus \mathrm{Cl}_X(C_1)$ y $A = A \cap X_1$. Como $X = A \cup B$, $C_1 \subseteq B$; de esto, $A \cap X_1$ y $B \cap X_1$ son continuos (ver Afirmación 3.2.12), tales que $X_1 = (A \cap X_1) \cup (B \cap X_1)$ y $(A \cap X_1) \cap (B \cap X_1) = A \cap B$ disconexo, contradiciendo la unicoherencia de X_1. Así, $x_1 \in A$. De la misma forma tenemos que $x_1 \in B$. Definamos $D = (A \cap X_1) \cup \mathrm{Cl}_X(C_1)$ y $E = (B \cap X_1) \cup \mathrm{Cl}_X(C_1)$. Por la Proposición 1.1.9, D y E son subcontinuos de X_1 tales que $X_1 = D \cup E$. Como K es una componente de $A \cap B$, $K \subseteq X_1$ y $K \cap \mathrm{Cl}_X(C_1) = \emptyset$, tenemos que K es una componente de $C \cap D$; contradecimos nuevamente la unicoherencia de X_1. Así, $K \subseteq C_1$. Probemos que $\mathrm{Cl}_X(C_1) \subseteq A$ o $\mathrm{Cl}_X(C_1) \subseteq B$. Note que si $A \cap X_1$ es disconexo, por la Proposición 1.1.9, sucede que $A \cap X_1 = L_1 \cup L_2$ donde L_1 y L_2 son continuos disjuntos, tales que $x_1 \in L_1$ y $x_2 \in L_2$. Sean $M_1 = L_1 \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$ y $M_2 = L_2 \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$. Por la Afirmación 3.2.13, M_1 y M_2 son conexos, disjuntos, y además $A \cap \mathrm{Cl}_X(C_1) = M_1 \cup M_2$, tales que $x_1 \in M_1$ y $x_2 \in M_2$. Como $\mathrm{Cl}_X(C_1)$ es irreducible $V = \mathrm{Cl}_X(C_1) \setminus (M_1 \cup M_2)$ es conexo (ver Teorema 1.3.4), y $V \subseteq B \setminus A$. Por la Afirmación 3.2.14 y dado que V es conexo contenido en B, existe una subcontinuo L de $B \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$, tal que $V \subseteq L$ y $x_1 \in L$. Nótese que como $\mathrm{Cl}_X(C_1) = M_1 \cup V \cup M_2$ y $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $\mathrm{Cl}_X(V) \cap M_2 \neq \emptyset$. Así, $L \cap M_2 \neq \emptyset$ y, como $\mathrm{Cl}_X(C_1)$ es irreducible entre x_1 y x_2, $x_1 \in L$ y $x_2 \in M_2$, tenemos que $\mathrm{Cl}_X(C_1) = L \cup M_2$. Veamos ahora que $M_2 \subseteq B$. Supongamos que existe $x \in M_2 \setminus B$. Por la Afirmación 3.2.14, existe un subcontinuo R de $A \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$, tal que $\{x_1, x_2\} \subseteq R$. Pero esto contradice que $A \cap \mathrm{Cl}_X(C_1) = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $R \cap M_1 \neq \emptyset$ y $R \cap M_2 \neq \emptyset$. De lo anterior $M_2 \subseteq B$ y $\mathrm{Cl}_X(C_1) \subseteq B$. De forma similar concluimos que $\mathrm{Cl}_X(C_1) \subseteq A$, si $B \cap X_1$ es disconexo.

Supongamos ahora que $A \cap X_1$ y $B \cap X_1$ son conexos. Entonces, por la Afirmación 3.2.13, $S = A \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$ y $T = B \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$ son conexos. Si $\{x_1, x_2\} \subseteq S$ o $\{x_1, x_2\} \subseteq T$, por la irreducibilidad de $\mathrm{Cl}_X(C_1)$, tenemos que $\mathrm{Cl}_X(C_1) \subseteq A$ o $\mathrm{Cl}_X(C_1) \subseteq B$ como queremos. Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_1 \in S \setminus T$ y $x_2 \in T \setminus S$. Así, existe $z \in (T \setminus S) \cap C_1 \subseteq (B \setminus A) \cap C_1$. Luego, por la Afirmación 3.2.14, existe un subcontinuo L de $B \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$ tal que $x_1 \in L$, contradiciendo que $x_1 \notin T$. De lo anterior, concluimos que $\mathrm{Cl}_X(C_1) \subseteq A$ o $\mathrm{Cl}_X(C_1) \subseteq B$.

Finalmente, supongamos que $\mathrm{Cl}_X(C_1) \subseteq A$. Con las Proposición 1.1.9 y la Afirmación 3.2.14, tenemos que $B \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$ tiene a lo más dos componentes, donde cada una de las cuales tiene a los puntos de irreducibilidad x_1 y x_2. Una de estas componentes debe contener a K, contradiciendo que $K \cap \{x_1, x_2\} = \emptyset$. Con esto cada componente de $A \cap B$ debe intersectar a $\{x_1, x_2\}$ y por tanto, $A \cap B$ tiene exactamente dos componentes y cada una intersecta a $\{x_1, x_2\}$. Concluimos la prueba del Paso 1.

Sea $f\colon X \to Y$ una función fuertemente libremente descomponible y Q un subcontinuo de Y, tal que $\mathrm{Int}_Y(Q) \neq \emptyset$. Probemos que $f^{-1}(Q)$ es conexo, para concluir que f es casimonótona y $X \in \mathcal{F}$. Observe que si $Y \setminus Q$ es conexo, entonces $Y = Q \cup \mathrm{Cl}_Y(Q)$ y como f es fuertemente libremente descomponible, $f^{-1}(Q)$ es conexo como queremos. Así, supongamos que $Y \setminus Q$ es disconexo. De está manera existen dos cerrados disjuntos, tales que $Y \setminus Q = U \cup V$ y por el Teorema 1.1.7, tenemos que $Q \cup U$ y $Q \cup V$ son continuos. Podemos asegurar lo siguiente:

1. $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$.
2. $f^{-1}(U \cup Q)$ y $f^{-1}(V \cup Q)$ son subcontinuos de X y $X = f^{-1}(U \cup Q) \cup f^{-1}(V \cup Q)$.
3. $f^{-1}(Q) = f^{-1}(U \cup Q) \cap f^{-1}(V \cup Q)$.

Supongamos que $f^{-1}(Q)$ es disconexo; por 2, 3 y el Paso 1, $f^{-1}(Q)$ tiene dos componentes, digamos L_1 y L_2, tales que $x_1 \in L_1$ y $x_2 \in L_2$. Como $f^{-1}(U \cup Q)$ es un conexo que contiene a x_1 y x_2, por la Proposición 1.1.9, tenemos que $f^{-1}(U \cup Q) \cap X_1$ es conexo o $f^{-1}(U \cup Q) \cap X_2$ es conexo. Supongamos que $f^{-1}(U \cup Q) \cap X_1$ es conexo. Sea $W = f^{-1}(U \cup Q) \cap X_1$. Por la Afirmación 3.2.13, $W \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$ es un continuo. Como $\mathrm{Cl}_X(C_1)$ es irreducible entre x_1 y x_2, y $\{x_1, x_2\} \subseteq W \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$, tenemos que $\mathrm{Cl}_X(C_1) = W \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$ y por tanto, $\mathrm{Cl}_X(C_1) \subseteq W \subseteq f^{-1}(U \cup Q)$. Nótese que $(\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_1) \cup (\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_2) = f^{-1}(Q) \cap \mathrm{Cl}_X(C_1)$, donde $\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_1$ y $\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_2$ son continuos que contienen a x_1 y x_2, respectivamente. Así, $\mathrm{Cl}_X(C_1) \setminus ((\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_1) \cup (\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_2))$ es no vacío, conexo por el Teorema 1.3.3, y

$$\mathrm{Cl}_X(C_1) \setminus ((\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_1) \cup (\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_2)) \subseteq f^{-1}(U).$$

Como $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$, podemos asegurar que $C_1 \nsubseteq f^{-1}(V \cup Q)$ y por tanto, $f^{-1}(V \cup Q) \cap X_1$ no puede ser conexo. Además, por la Proposición 1.1.9, $f^{-1}(V \cup Q) \cap X_2$ es conexo y el mismo argumento del parágrafo anterior muestra que $\mathrm{Cl}_X(C_2) \subseteq f^{-1}(V \cup Q)$.

Paso 2: *U y V son conexos.*

Supongamos que $U = U_1 \cup U_2$, donde U_1 y U_2 son abiertos no vacíos y disjuntos. Observe que $Y \setminus Q = U_1 \cup (U_2 \cup V)$. De lo anterior, tenemos que $\mathrm{Cl}_X(C_2) \subseteq f^{-1}(V \cup Q) \subseteq f^{-1}(V \cup Q \cup U_2)$, luego $\mathrm{Cl}_X(C_1) \subseteq f^{-1}(U_1 \cup Q)$ y $\mathrm{Cl}_X(C_1) \setminus ((\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_1) \cup (\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_2)) \subseteq f^{-1}(U_1)$.
Además $Y \setminus Q = U_2 \cup (U_1 \cup V)$, de está manera concluimos que $\mathrm{Cl}_X(C_1) \subseteq f^{-1}(U_2 \cup Q)$ y $\mathrm{Cl}_X(C_1) \setminus ((\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_1) \cup (\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_2)) \subseteq f^{-1}(U_2)$. Lo cual

contradice que $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset$. Análogamente probamos que V es conexo. Con esto terminamos la prueba del Paso 2.

Paso 3: $f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(U)) \cap f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(V)) \neq \emptyset$.

Como U es conexo, $Y = \mathrm{Cl}_X(U) \cup (V \cup Q)$ y f es fuertemente libremente descomponible, tenemos que $f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(U))$ es un continuo. De la misma manera, $f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(V))$ es también un continuo. Como $\mathrm{Cl}_X(C_1) \setminus ((\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_1) \cup (\mathrm{Cl}_X(C_1) \cap L_2)) \subseteq f^{-1}(U)$, $f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(U)) \cap (C_1 \setminus (f^{-1}(V \cup Q))) \neq \emptyset$. Así, por la Afirmación 3.2.14, $x_1 \in f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(U))$. De la misma forma mostramos que $x_2 \in f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(V))$. Nótese que $X = f^{-1}(Q) \cup f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(U)) \cup f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(V))$. Además, $f^{-1}(Q) = L_1 \cup L_2$, donde L_1 y L_2 son continuos, $x_1 \in L_1$ y $x_2 \in L_2$. Sean $M = L_1 \cup f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(U))$ y $N = L_2 \cup f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(V))$ continuos tales que $X = M \cup N$. Como $x_2 \notin M$, $(N \setminus M) \cap C_1 \neq \emptyset$. Así, por la Afirmación 3.2.14, $x_1 \in N$. Como $x_1 \notin L_2$, $x_1 \in f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(V))$ y $f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(U)) \cap f^{-1}(\mathrm{Cl}_X(V)) \neq \emptyset$. Concluimos la prueba del Paso 3.

Finalmente, por el Paso 3 $\mathrm{Cl}_X(U) \cap \mathrm{Cl}_X(V) \neq \emptyset$. Así, $Y = Q \cup (\mathrm{Cl}_X(U) \cup \mathrm{Cl}_X(V))$, donde $\mathrm{Cl}_X(U) \cup \mathrm{Cl}_X(V)$ es un continuo. Como $f^{-1}(Q)$ es disconexo, contradecimos que f es fuertemente libremente descomponible. Así, f es casimonótona y $X \in \mathcal{F}$. $\square$

Un *abanico armónico* es un espacio homeomorfo a $F_H = \{t(1, 1/n) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}\} \cup ([0,1] \times \{0\})$. Note que el cono sobre el compacto $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ es un abanico armónico. El siguiente resultado es inmediato del Teorema 3.2.11 y puede ser encontrado en [6].

Corolario 3.2.15. Sean F_1 y F_2 abanicos armónicos, tales que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Sea $h_i \colon F_H \to F_i$ un homeomorfismo, para $i \in \{1, 2\}$, $F_j = \bigcup_{j=0}^{\infty} v_i e_{ij}$ tales que:

1. $v_i = h_i(v)$,
2. $e_{i0} = h_i((1, 0))$ y
3. $e_{ij} = h_i((1, \frac{1}{j}))$, para cada $i \in \{1, 2\}$.

Sea $g \colon \{v_1, e_{10}\} \to \{v_2, e_{20}\}$ definida por $g(v_1) = e_{20}$ y $g(e_{10}) = v_2$.
Si $X = F_1 \cup_g F_2$, entonces $X \in \mathcal{F}$.

4. CONCLUSIONES

Entre los resultados que obtuvimos en este trabajo destacamos los siguientes:

1. En el Teorema 2.1.5 se usó los continuos unicoherentes, con subcontinuos terminales, como mecanismo de construcción de continuos débilmente unicoherentes que no son unicoherentes. Este resultado fue probado durante la investigación.

   Los profesores Camargo y Villanueva en [6] determinaron que la unicoherencia y unicoherencia débil son equivalentes en espacios localmente conexos (ver Teorema 2.1.9). Con el fin de debilitar la hipotésis de conexidad local, dado que todo espacio localmente conexo es arcoconexo, aposindético y mutuamente aposindético, se tienen las siguientes preguntas que fueron abordadas, pero continúan abiertas.

   - ¿Si X es un continuo débilmente unicoherente y arcoconexo, entonces X es unicoherente?
   - ¿Si X es un continuo débilmente unicoherente y aposindético, entonces X es unicoherente?
   - ¿Si X es un continuo débilmente unicoherente y mutuamente aposindético, entonces X es unicoherente?

2. En la Sección 2.2 se definió y trabajo alrededor de la unicoherencia débil hereditaria, donde todos los resultados asociados a este concepto fueron producidos en esta investigación.

3. Se estudió la preservación de continuos débilmente unicoherentes bajo uniones. Se usó algunos ejemplos ya conocidos y se plantearon nuevos ejemplos donde esta propiedad no se preserva bajo ciertas condiciones ya conocidas en la unicoherencia. En la Proposición 2.4.2 se planteó y probó que la unión preserva unicoherencia débil bajo ciertas condiciones. Sin embargo, se requiere un ampliar el resultado; así, tenemos la siguiente pregunta abierta:

- Sea $X = Y \cup Z$ un continuo, tales que Y y Z son continuos débilmente unicoherentes y $Y \cap Z$ es un continuo. ¿Si X es localmente conexo en cada punto de $Y \cap Z$, entonces X es débilmente unicoherente?

4. En el Teorema 3.2.11 se generaliza el Ejemplo 5.3 de [6], y lo más significativo es que se prueba que el continuo definido en este Teorema está en la familia $\mathcal{F}$.

El autor espera que este trabajo sirva como una herramienta para la comunidad matemática en la investigación de continuos débilmente unicoherentes, tal como se ha hecho con los continuos unicoherentes.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BENNET D., *Aposyndetic properties of unicoherent continua*, Pac. J. Math. 37 (1971), 585-589

[2] BOLLOBÁS B., Graph Theory. An introductory course, Grad. Texts in Math. 63, Springer Verlag, Berlín (1979), 1-7, 99.

[3] BORSUK K., *Quelques thèorémes sur les ensembles unicoherents*, Fund. Math. 17 (1931), 171-209.

[4] BORSUK K. y ULAM S., *On symmetric products of topological space*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), 875-882.

[5] CAMARGO J. y MACÍAS S., *it On freely decomposable maps*, Topology Appl. 159 (2012), 891-899.

[6] CAMARGO J. y VILLANUEVA H., *On weakly unicoherence on continua*, preprint.

[7] CHARATONIK J.J. y CHARATONIK W.J., *Dendrites*, Aportaciones Mat. Comun. 22 (1998), 227-253.

[8] CASTAÑEDA E., *A unicoherent continuum whose second symmetric product is not unicoherent*, Topology Proc. 23 (1998), 63-67.

[9] DUGUNDJI J., Topology. Allyn y Bacon, Inc., Boston, 1966.

[10] EILENBERG S., *Sur les transformations d'espaces métriques en circonférence*, Fund. Math. 24 (1935), 160-176.

[11] EILENBERG S., *Sur les espaces multicoherent I*, Fund. Math. 27 (1936), 153-190.

[12] ESCOBEDO R., LÓPEZ M. y TENORIO J., *Universality of maps on suspensions over products of span zero continua*, Houston Jornal math. 39, (2013), 995-1004.

[13] GARCÍA A. y ILLANES A., *A survey on unicoherence and related properties*, An. Inst. Mat. Uni. Nac. Autónoma México 29 (1989), 17-67.

[14] GORDH G.R. Jr y HUGHES C.B., *On freely decomposable mappings of continua*, Glas. Mat. Ser. III, 14 (34) (1979), 137-146.

[15] JANISZEWSKI Z. y KURATOWSKI K., *Sur les continus indéscomposables,* Fund. Math., 1 (1920), 210-222.

[16] JONES F. L., *Concerning non-aposyndetic continua*, Amer. J. Math., 70 (1948), 403-413

[17] KURATOWSKI K., Topology, Vol 2, Academic press, New York and London, Warsawa, 1968.

[18] MACÍAS S., *On symmetric products of continua*, Topology Appl. 92 (1999), 173-182.

[19] MACÍAS S., Topics on continua, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[20] MACÍAS

[21] MAĆKOWIAK T., *Continuos mappings on continua*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 158 (1979), 1-95.

[22] MARSH M., s-*connected spaces and the fixed point property*, Topology Proc. 8 (1983), 85-97.

[23] MARTÍNEZ R., Funciones monótonas sobre continuos irreducibles, Tesis de Posgrado, Universidad Industrial de Santander, 2013.

[24] NADLER S. Jr., Continuum theory, An Introduction, Pure and Applied Mathematics, Vol 158, Marcel dekker, New York, 1992.

[25] NADLER S. Jr. e ILLANES A., Hyperespaces: Fundamentals and Recents Advances, Marcel dekker, New York, 1999.

[26] NOVA J., Unicoherencia en continuos, Tesis de Pregrado, Universidad Industrial de Santander, 2014.

[27] PIERCE B., *Special unions of unicoherent continua*, Houston Jornal math. 26 (2000), 833-868.

[28] OWENS M., *Unicoherence at subcontinua*, Topology Appl. 22 (1985), 145-155.

[29] STONE A., *Incidence relations in unicoherent spaces*, Tran. Amer. Math. Soc. 65 (1949), 427-447.

[30] TENORIO J., Productos tipo disco y funciones inducidas a funciones de productos de continuos, Tesis Doctoral, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2007.

[31] WALLACE A., *Monotone coverings and monotone transformation*, Duke Math. J. 6 (1940), 31-37.

[32] WALLACE A., *Quasi-monotone transformation*, Duke Math. J. 7 (1940), 136-145.

[33] WHYBURN G., *Not-alternating transformation*, Amer. J. Math., 56 (1934), 294-302.

[34] WILLARD S., General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1968.