

ASPECTOS DE LA COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

NESTOR ENRIQUE JARABA RIVAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2024

ASPECTOS DE LA COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

NESTOR ENRIQUE JARABA RIVAS

Trabajo de grado para optar al título de Matemático

Director

Jurgen Alfredo Julio Batalla

Doctor en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2024

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción	8
1. Variedades Suaves	11
1.1. Variedades	11
1.2. Funciones y Aplicaciones diferenciables	14
1.3. Espacio Tangente, Fibrado Tangente y Cotangente	15
1.4. Diferencial de una aplicación suave	17
2. Campos sobre variedades	20
2.1. Campos de vectores	20
2.2. Flujo de un campo vectorial	20
3. Formas Diferenciales	22
3.1. Tensores alternantes	22
3.2. Formas diferenciales	23
3.3. Derivada exterior	25
3.4. Derivada de Lie para formas diferenciales	27
4. Homotopía	31
4.1. Nociones sobre homotopía	31
4.2. Existencia de operador de homotopía	31
5. Sucesiones exactas	35
5.1. Nociones sobre sucesiones exactas	35
6. Cohomología de De Rham	37
6.1. Formas cerradas y exactas	37
6.2. Invarianza bajo homotopías	37

	4
6.3. Teorema de Mayer-Vietoris	39
6.4. Cómputos	40
6.4.1 Grupos de cohomología del espacio euclidiano	40
6.4.2 Grupos de cohomología del círculo	41
6.4.3 Grupos de cohomología de la esfera	42
6.4.4 Grupos de cohomología de la n-esfera	44
6.4.5 Grupos de cohomología del toro	46
6.4.6 Grupos de cohomología del 3-toro	49
6.4.7 Grupos de cohomología del n-toro	53
6.4.8 Grupos de cohomología del plano real proyectivo	56
6.4.9 Grupos de cohomología del espacio real proyectivo	59
6.4.10 Grupos de cohomología del n-espacio real proyectivo	62
7. Conclusión	66
Referencias Bibliográficas	67

DEDICATORIA

A mi madre.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi madre, porque su amor, respaldo incondicional y deseo por verme como profesional, representó para mi la mayor motivación ante los momentos críticos y difíciles durante este proceso.

A mi padre, por su paciencia, por confiar en mi, apoyarme como padre y escucharme como amigo.

A mi compañera sentimental quien me brindo toda su comprensión, amor incondicional, gracias por entenderme y ayudarme cuando las cosas se me complicaban.

A mi director de tesis por el acompañamiento y tiempo dedicado.

Agradezco a cada persona que hizo que esta etapa de mi vida fuese amena y bonita.

RESUMEN

TÍTULO: Aspectos de la cohomología de De Rham *

AUTOR: Néstor Enrique Jaraba Rivas **

PALABRAS CLAVE: VARIEDADES, FORMAS DIFERENCIALES, DERIVADA EXTERIOR, HOMOTOPIA, COHOMOLOGÍA DE DE RHAM

DESCRIPCIÓN:

Este trabajo tiene interés en el cálculo de los grupos de cohomología de De Rham de una variedad, usando las relaciones que existen entre los grupos de cohomología de una variedad y los grupos de dos subconjuntos abiertos que la cubran, denominado como teorema de Mayer-Vietoris, así como, la invarianza de los grupos de cohomología bajo homotopías. Las variedades estudiadas son la n -esfera, el n -toro y el n -espacio real proyectivo.

Se abarca la teoría de funciones diferenciables definidas sobre una variedad suave M que asocian a cada punto p un k -tensor alternante covariante sobre $(T_p M)^*$, estas funciones reciben el nombre de k -formas y el conjunto de formas diferenciables se denota como $\Omega^*(M)$. La noción de derivada se puede extender a las k -formas a partir del concepto de derivada exterior, determinada como el único operador $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ lineal tal que $d^2 = 0$ y dada una 0-forma f se tiene que df es el diferencial de f . Decimos que una k -forma α es cerrada si $d\alpha = 0$ y exacta si existe ν una $(k - 1)$ -forma tal que $d\nu = \alpha$.

A partir de las definiciones se tiene que toda k -forma exacta es cerrada, lo cual motiva a preguntarse si se cumple el recíproco de la anterior proposición, ante la negativa de esta pregunta se motiva a definir los siguientes espacios, para cada entero k , el k -ésimo grupo de cohomología de De Rham es,

$$H_{dR}^k(M) = \frac{\{k\text{-formas cerradas}\}}{\{k\text{-formas exactas}\}}$$

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jurgen Alfredo Julio Batalla, Doctor en Ciencias Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: On the De Rham Cohomology *

AUTHOR: Néstor Enrique Jaraba Rivas **

KEYWORDS: MANIFOLDS, DIFFERENTIAL FORMS, EXTERIOR DERIVATIVE, HOMO-
TOPY, DE RHAM COHOMOLOGY

DESCRIPTION:

This work has been centred mainly in the computation of De Rham cohomology groups of a manifold, main tools developed are, a result about the relations between cohomology groups of manifold and groups of two open subsets whose union is whole manifold, it is known as Mayer-Vietoris theorem, and other tool is the invariance of cohomology groups for homotopic spaces. Manifolds studied are n -sphere, n -torus and n -projective real space.

Firstly, we study the theory of differential functions defined over smooth manifold M that each point $p \in M$ is related to a covariant alternate k -tensor on $(T_p M)^*$, these functions are called k -forms and the set of differentiable forms is denoted by $\Omega^*(M)$. The concept of derivative can be generalized to k -forms from the new concept of exterior derivative that it is the unique lineal operator $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$ such that $d^2 = 0$ and given a 0-form f , we have df is the differential of f . We say that a k -form α is closed if $d\alpha = 0$ and exact if there exists a $(k - 1)$ -form ν such that $d\nu = \alpha$.

From previous definitions we have that all exact k -form is closed, then we could ask if the reciprocal is true and the answer is false, then we define the following objects for each k integer called k -th de Rham cohomology group,

$$H_{dR}^k(M) = \frac{\{\text{closed } k\text{-forms}\}}{\{\text{exact } k\text{-forms}\}}$$

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jurgen Alfredo Julio Batalla, Doctor en Ciencias Matemáticas.

Introducción

Las formas diferenciales son funciones multilineales antisimétricas. Sea ω una forma de grado r , definida sobre un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , estas funciones son expresiones de la forma $\sum a_{i_1 i_2 \dots i_r} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_r}$, donde los coeficientes a son funciones diferenciables y los diferenciales dx son símbolos que relacionan las coordenadas x_i . Entre sus aplicaciones, permiten representar problemas en física como el trabajo realizado por mover un objeto a través de una curva en un campo de fuerza o el flujo de un campo vectorial a través de una superficie (Samelson, 2001).

Las formas diferenciales permiten generalizar expresiones de la forma $Pdx + Qdy$ o $Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$, y son comúnmente conocidas en el contexto de las integrales ya que proporcionan un enfoque para definir el integrando sobre curvas, superficies, sólidos y variedades. No obstante, estos objetos además de tener una noción de integración, a su vez existe una noción de derivación, llamada operación derivada exterior, donde al aplicar este operador sobre una k -forma, esta es convertida en una $(k + 1)$ -forma, su principal propiedad es que al aplicar el operador sobre una 0-forma, el resultado coincide con el diferencial.

Otra de las propiedades de la derivada exterior es que al aplicar este operador dos veces siempre resulta en la forma nula. Aquellas formas cuya derivada exterior es cero se denominan *formas cerradas*. Si ω es una forma de grado r y existe una forma α de grado $r - 1$ que cumple $d\alpha = \omega$, entonces ω es denominada una *forma exacta*. A partir de estas definiciones se cumple que toda forma exacta es una forma cerrada, por lo cual, surge la pregunta si su recíproco se cumple, sin embargo, no todas las formas cerradas son exactas, así, la cohomología de De Rham surge a partir de este hecho. Dado r un número entero se define el grupo de cohomología de grado r como el conjunto cociente de formas cerradas entre formas exactas. Estos objetos resultan ser espacios vectoriales y relacionan una propiedad topológica de la variedad llamada agujeros, la dimensión de estos grupos permite medir el tamaño de estos agujeros de dimensión r .

Este trabajo tiene como propósito estudiar las funciones denominadas formas diferenciales, el operador derivada exterior y a partir de estos, poder definir los grupos de cohomología de una variedad. No obstante, tiene especial interés en como calcular estos grupos de cohomología, para

ello se estudian algunas propiedades sobre variedades, y se introducen herramientas para encontrar la dimensión de estos espacios. Este trabajo analiza los grupos de cohomología de ciertas variedades como esferas, toros y espacios reales proyectivos.

Las principales herramientas usadas para el cálculo de estos grupos de cohomología son, el teorema de Mayer-Vietoris una herramienta fundamental en topología algebraica que relaciona los grupos de cohomología de la variedad y los grupos de dos subconjuntos abiertos que la cubran, este teorema relaciona los grupos de cohomología de estos conjuntos a través de sucesiones exactas. Por otro lado, el teorema de invarianza bajo homotopías de la cohomología de De Rham, establece que los grupos de cohomología de dos variedades homotópicamente equivalentes resultan ser difeomorfos, permitiendo a partir de la construcción de homotopías entre variedades relacionar los grupos de cohomología de una variedad con otra.

Los grupos de cohomología están intrínsecamente relacionados a las propiedades topológicas de la variedad, el grupo de cohomología de grado 0 relaciona el número de componentes conexas de la variedad. El grupo de cohomología de grado 1 guarda una relación con el primer grupo fundamental de la variedad. El teorema de Hurewicz permite relacionar los grupos de cohomología con los grupos de homotopía. Por último, los grupos de cohomología permiten la construcción de invariantes topológicos tales como los números de Betti o la característica de Euler, estos invariantes establecen condiciones para determinar si dos variedades no son difeomorfas o homotópicamente equivalentes, esto al comparar sus grupos de cohomología (Hatcher, 2002).

Este documento está organizado de forma que cada capítulo relaciona al anterior, el primer capítulo introduce los conceptos de variedad suave, aplicaciones suaves entre variedades, el espacio tangente de una variedad y el diferencial de una aplicación suave. El segundo capítulo, abarca la definición de campos sobre variedades y el flujo de un campo vectorial. El tercer capítulo, introduce los conceptos de tensores alternantes, formas diferenciales, derivada exterior y derivada de Lie para formas diferenciales. El cuarto capítulo, explora el concepto de homotopía entre variedades y se expone la existencia de un operador que permitirá relacionar los grupos de cohomología de variedades homotópicamente equivalentes. El quinto capítulo, introduce la definición de sucesión

exacta y algunas propiedades, que permite relacionar los grupos de cohomología de la variedad con los grupos de subconjuntos abiertos. El último capítulo, se definen los grupos de cohomología de De Rham, se presentan el teorema de invarianza bajo homotopías de los grupos de cohomología y el teorema de Mayer-Vietoris, este documento culmina con el computo de los grupos de cohomología de De Rham de los espacios euclidianos, n -esferas, n -toros y n -espacios reales proyectivos.

Variedades Suaves

Variedades

Las variedades son espacios que lucen localmente como espacios euclidianos, decimos que una variedad es suave cuando tiene la estructura suficiente para usar conceptos básicos del cálculo (Warner, 1983).

Definición 1. Una *variedad topológica* M de dimensión m es un espacio topológico que es segundo numerable, Hausdorff y para cada punto existe una vecindad abierta que es homeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m (Warner, 1983).

Definición 2. Un *atlas* \mathcal{A} sobre M es una colección de parejas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ donde U_α es un subconjunto abierto de M y $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \widehat{U}_\alpha$ es un homeomorfismo desde U_α a un subconjunto abierto \widehat{U}_α de \mathbb{R}^m , que satisface

- $\bigcup_{\alpha} U_\alpha = M$
- $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es C^∞ en el sentido usual del cálculo, para cada $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}$.

(Warner, 1983)

Definición 3. Una *estructura diferenciable* \mathcal{F} sobre M es un atlas que es maximal i.e. si \mathcal{A} es un atlas tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ entonces $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ (Warner, 1983).

Definición 4. Una *variedad suave* es una pareja (M, \mathcal{F}) donde M es una *variedad topológica* y \mathcal{F} es un *atlas maximal* sobre M (Warner, 1983).

Observación. Ténganse en cuenta las siguientes apreciaciones,

- Una m -variedad suave M denota que M es una variedad suave de dimensión n .
- Las parejas (U, φ) son llamadas *cartas* de M y U se denomina *dominio de coordenadas* y φ es llamada *función de coordenadas*.
- Dadas dos cartas (U, φ) y (V, ψ) , decimos que estas son *compatibles* si $\varphi \circ \psi^{-1}$ y $\psi \circ \varphi^{-1}$ son funciones C^∞ .

- La aplicación $\varphi \circ \psi^{-1}$ es llamada *cambio de coordenadas de ψ a φ* .

Ejemplo 1. (espacio euclidiano) Para cada entero no negativo n , el espacio euclidiano \mathbb{R}^n es una variedad suave de dimensión n a partir del atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})\}$.

Su estructura diferencial es el conjunto

$$\mathcal{F} = \{(U, \varphi) : \varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ y } \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} \text{ son } C^\infty \text{ para cada } \varphi_\alpha \in \mathcal{A}\}$$

\mathcal{F} es la única estructura diferenciable que contiene a \mathcal{A} y es llamada *estructura diferencial estándar del espacio euclidiano*.

Demostración. A continuación, veamos que \mathbb{R}^n es una n -variedad suave.

1. \mathbb{R}^n es un espacio topológico Hausdorff y segundo numerable.
2. Para cada punto en \mathbb{R}^n existe una vecindad abierta que lo contiene, de forma trivial esta es homeomorfa a si misma. Por lo tanto, \mathbb{R}^n es una n -variedad topológica.
3. Veamos que \mathcal{F} es una estructura diferencial para M . Como \mathcal{A} es un atlas sobre M y constá de una sola carta, está resulta compatible consigo misma. Por tanto, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, sabemos que $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = M$ y $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \subset \bigcup_{\beta \in \mathcal{F}} U_\beta$, no obstante, $\bigcup_{\beta \in \mathcal{F}} U_\beta \subset M$ puesto que los dominios de coordenadas son subconjuntos abiertos de M , por lo tanto, $\bigcup_{\beta \in \mathcal{F}} U_\beta = M$.
4. Sean (U, ψ) y (V, ϕ) cartas en \mathcal{F} , tenemos que si (U, ψ) o (V, ϕ) pertenece a \mathcal{A} , por la forma en que se definió el conjunto, se tiene que estas dos cartas son compatibles, por otro lado, si ninguna carta pertenece a \mathcal{A} , se cumple que $\psi \circ \phi^{-1} = \psi \circ \tau^{-1} \circ \tau \circ \phi^{-1}$ con $\tau \in \mathcal{A}$, por la definición de \mathcal{F} se tiene que $\psi \circ \tau^{-1}$ y $\tau \circ \phi^{-1}$ son C^∞ , por lo tanto, $\psi \circ \phi^{-1}$ lo es.

Observación. Una variedad topológica puede tener diferente atlas maximal, considere $M = \mathbb{R}$ y como atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}, x^3)\}$, nótese que esta *carta* no es compatible con $(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})$, por lo tanto, generan dos atlas maximal diferentes.

Ejemplo 2. (esferas) Para cada entero no negativo $n \geq 2$, el espacio topológico

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

es conocido como (n-1)-esfera y es una variedad suave de dimensión $n - 1$.

Sean $\hat{n} = (0, \dots, 1)$ y $\hat{s} = (0, \dots, -1)$ puntos en \mathbb{S}^{n-1} denominados norte y sur de la (n-1)-esfera.

Definimos $U_{\hat{n}} = \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{\hat{n}\}$, $\varphi_{\hat{n}} : U_{\hat{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ como,

$$\varphi_{\hat{n}}(x) = \left(\frac{x_1}{1 - x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 - x_n} \right)$$

$U_{\hat{s}} = \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{\hat{s}\}$ y $\varphi_{\hat{s}} : U_{\hat{s}} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ como,

$$\varphi_{\hat{s}}(x) = \left(\frac{x_1}{1 + x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 + x_n} \right)$$

Así, $\mathcal{A} = \{(U_{\hat{n}}, \varphi_{\hat{n}}), (U_{\hat{s}}, \varphi_{\hat{s}})\}$ es un atlas para \mathbb{S}^{n-1} y la estructura diferencial que contiene este atlas es llamada *estructura diferencial estándar de la (n-1)-esfera*.

Ejemplo 3. (productos de variedades) Dados (M_1, \mathcal{F}_1) y (M_2, \mathcal{F}_2) variedades suaves de dimensión m_1 y m_2 respectivamente, el espacio topológico $M = M_1 \times M_2$ es una variedad de dimensión $m_1 + m_2$ junto a la estructura diferencial

$$\mathcal{F} = \{(U \times V, \varphi \times \phi) : (U, \varphi) \in \mathcal{F}_1 \text{ y } (V, \phi) \in \mathcal{F}_2\}$$

A partir de este hecho, se tiene que las siguientes variedades topológicas son variedades suaves,

- (n-toro) $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ con $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1$ i.e n copias de \mathbb{S}^1 .
- (cilindro) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Ejemplo 4. (subconjuntos abiertos) Dado $U \subset M$ abierto con (M, \mathcal{F}_M) variedad suave de dimensión m , entonces U es una variedad suave de dimensión m con el atlas maximal

$$\mathcal{F} = \{(U_\alpha \cap U, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap U}) : (U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{F}_M\}$$

De este hecho concluimos que el grupo lineal general $Gl(n, \mathbb{R})$ es una variedad suave de dimensión n^2 , puesto que $Gl(n, \mathbb{R})$ es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^{n^2} .

Ejemplo 5. (espacios reales proyectivos) Sea $\mathbb{R}_x^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, definimos la siguiente relación de equivalencia $x \sim y$ si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Consideramos el conjunto $\mathbb{R}\mathbb{P}^n = \mathbb{R}_x^{n+1} / \sim$, este conjunto es conocido como *espacio real proyectivo de dimensión n* , a partir de la función $\pi : \mathbb{R}_x^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ definida por $\pi(x) = [x]$, se tiene que, $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es un espacio topológico con la topología cociente a partir de π .

Para cada $i = 1, \dots, n + 1$, consideramos los abiertos $U_i = \{\pi(x) : x \in \mathbb{R}_x^{n+1} \text{ y } x_i \neq 0\}$ y las funciones coordenadas

$$\varphi_i[x_1, \dots, x_{n+1}] = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Se entiende por el símbolo $\frac{\widehat{x_i}}{x_i}$ que se excluye la coordenada i -ésima. Así, el atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ define una estructura diferencial sobre $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, haciendo que sea una variedad suave de dimensión n .

Funciones y Aplicaciones diferenciables

Definición 5. Sea M una m -variedad suave, una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sobre una variedad es *suave* o *diferenciable* si para cada punto $p \in M$ existe una carta (U, φ) tal que $p \in U$ y $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ es C^∞ en el sentido usual del cálculo (Warner, 1983).

Observación. Sea M una m -variedad, el conjunto de todas las funciones suaves es denotado como $C^\infty(M)$.

Definición 6. Una aplicación $F : M \rightarrow N$ entre variedades es *suave* ó *diferenciable* si para cada punto $p \in M$ existen una carta (U, φ) en M y una carta (V, ψ) en N con $p \in U$ y $F(p) \in V$ tal que $F(U) \subset V$ y $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ es diferenciable en el sentido usual del cálculo (Warner, 1983).

Observación. Las palabras *función suave* se reserva para funciones de una variedad suave M en \mathbb{R} , y *aplicaciones suaves* para funciones de una variedad suave M en otra variedad suave N .

Teorema 1. Toda aplicación suave es continua.

Teorema 2. Sean M, N y P variedades suaves, entonces

- Toda función $f : M \rightarrow N$ o $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que sea constante es suave.
- La función identidad $\text{Id}_M : M \rightarrow M$ es suave.

- Si $U \subset M$ abierto y variedad, entonces la inclusión $i : U \hookrightarrow M$ es suave.
- Sean $F : M \rightarrow N$ y $G : N \rightarrow P$ aplicaciones suaves, entonces $G \circ F : M \rightarrow P$ es suave.

Teorema 3. Sean M_1, \dots, M_k y N variedades suaves, se define la proyección $\pi_i : M_1 \times \dots \times M_k \rightarrow M_i$ de la forma usual.

Una aplicación $F : N \rightarrow M_1 \times \dots \times M_k$ es suave si y solo si para cada i se tiene que $F_i = \pi_i \circ F : N \rightarrow M_i$ es suave.

Definición 7. Sean M y N variedades suaves, un *difeomorfismo* $F : M \rightarrow N$ es una aplicación suave que es biyectiva y cuya inversa es suave.

Teorema 4. A continuación, algunas propiedades de los difeomorfismos.

- La composición de difeomorfismos es un difeomorfismo.
- Dados $\{F_i\}_{i=1}^n$ difeomorfismos, la función producto $F_1 \times \dots \times F_n$ es un difeomorfismo.
- Un difeomorfismo es un homeomorfismo y una aplicación abierta.
- Dado $F : M \rightarrow N$ un difeomorfismo y $U \subset M$ abierto, se tiene que $F|_U : U \rightarrow F(U)$ es un difeomorfismo.

Teorema 5. Sean M y N variedades suaves conexas de dimensión m y n respectivamente y $F : M \rightarrow N$ un difeomorfismo, entonces $m = n$.

Espacio Tangente, Fibrado Tangente y Cotangente

Definición 8. Una *derivación* D en p es una función \mathbb{R} -lineal,

$$D : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface,

$$D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f)$$

para cualesquiera $f, g \in C^\infty(M)$ (Lee, 2012).

Definición 9. El conjunto $T_p M$ de todas las *derivaciones en p* sobre $C^\infty(M)$ es denominado el *espacio tangente* de M en p y sus elementos son llamados *vectores tangentes*.

Teorema 6. Sea M una variedad conexa, $p \in M$ y m la dimensión de M . Entonces, la dimensión de $T_p M$ es m .

Teorema 7. Sea M una variedad suave, $p \in M$, $v \in T_p M$ y $f, g \in C^\infty(M)$, se tiene que

- Si f es constante, entonces $v(f) = 0$.
- Si $f(p) = g(p) = 0$ entonces $v(fg) = 0$.

Definición 10. Sean M una m -variedad suave, un punto $p \in M$ y (U, φ) una carta tal que $p \in U$, para cada $i = 1, \dots, m$, definimos $\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ como $\varphi_i = x^i \circ \varphi$ donde $x^i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como la proyección en la i -ésima coordenada i.e. $x \mapsto x_i$.

Así, se define el vector tangente $\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p \in T_p M$ como,

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \Big|_p (f) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1})$$

donde $\frac{\partial}{\partial x_i}$ son las derivadas parciales en el sentido del cálculo, estos vectores son llamados *vectores coordenadas en p* (Lee, 2012).

Teorema 8. Sean M una m -variedad suave, $p \in M$ y (U, φ) una carta tal que $p \in M$, entonces

- el conjunto de vectores $\{\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p\}_i$ es una base para $T_p M$.
- Dado $v \in T_p M$, se tiene que,

$$v = \sum_{i=1}^m v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

Definición 11. El *fibrado tangente* de una m -variedad suave M se define como,

$$T(M) = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

y el *fibrado cotangente* se define como,

$$T^*(M) = \bigsqcup_{p \in M} (T_p M)^*$$

donde $(T_p M)^* = \{f : T_p M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es lineal}\}$ conocido como el dual topológico.

Diferencial de una aplicación suave

Definición 12. Sean $F : M \rightarrow N$ una aplicación suave y para cada $p \in M$, se define el *diferencial de F en p* ,

$$dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

tal que $v \in T_p M$ y $g \in C^\infty(V)$ donde V es una vecindad alrededor de $F(p)$,

$$dF_p(v)(g) = v(g \circ F)$$

(Lee, 2012)

Teorema 9. El *diferencial de una aplicación suave en un punto*, satisface las siguientes propiedades,

- $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ es lineal.
- $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$ para $F : M \rightarrow N$ y $G : N \rightarrow P$ aplicaciones suaves.
- $d(\text{Id}_M)_p = \text{Id}_{T_p M}$.
- Si $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, entonces $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ es un isomorfismo y $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Observación. el conjunto $T_p^* M = (T_p M)^*$ es llamado *espacio cotangente* y los elementos $\omega \in T_p^* M$ son llamados *vectores cotangentes*.

Definición 13. Una *curva suave* en M es una aplicación $\sigma : (a, b) \rightarrow M$ suave y dado $t_0 \in (a, b)$ se define el *vector tangente a la curva en t_0* como,

$$\sigma'(t_0) = d\sigma_{t_0} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} \right) \in T_{\sigma(t_0)} M$$

Observación. Sean M es una m -variedad suave y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ suave, si $v \in T_p M$ y $f(p) = t_0$, se tiene que,

$$df_p(v) = v(f) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t_0}$$

Así, df_p puede pensarse como un elemento de $T_p^* M$,

$$df(v) := v(f)$$

Definición 14. Se definen las proyecciones sobre el fibrado tangente y cotangente,

- $\pi : T(M) \rightarrow M$, como $\pi(v) = p$ si $v \in T_p M$.
- $\pi^* : T^*(M) \rightarrow M$, como $\pi^*(w) = p$ si $w \in T_p^* M$.

Estas proyecciones son naturales y permiten identificar el punto asociado a un vector del fibrado tangente o cotangente respectivamente.

Definición 15. Sea M una m -variedad suave, considere una carta (U, φ) , definimos las siguientes aplicaciones, $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ definida como,

$$v \mapsto (x_1(\pi(v)), \dots, x_m(\pi(v)), dx_1(v), \dots, dx_m(v))$$

y $\tilde{\varphi}^* : (\pi^*)^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ definida como

$$\tau \mapsto (x_1(\pi^*(\tau)), \dots, x_m(\pi^*(\tau)), \tau \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p \right), \dots, \tau \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_m} \right|_p \right))$$

Teorema 10. Los conjuntos $T(M)$ y $T^*(M)$ son variedades suaves de dimensión $2m$, teniendo en cuenta que,

- El conjunto $\{\tilde{\varphi}^{-1}(W) : W \subset \mathbb{R}^{2m} \text{ abierto}, (U, \varphi) \in \mathcal{F}_M\}$ forma una base para una topología en $T(M)$ y lo vuelve una variedad topológica. Análogamente, para el conjunto $T^*(M)$.
- El atlas estándar para $T(M)$ es el conjunto $\{(\tilde{\varphi}^{-1}(U), \tilde{\varphi}) : (U, \varphi) \in \mathcal{F}_M\}$. Análogamente, para el conjunto $T^*(M)$.

Definición 16. Dada una aplicación suave $F : M \rightarrow N$, el *diferencial global de F* es una función,

$$dF : T(M) \rightarrow T(N)$$

definida como $dF(p, v) = dF_p(v)$ para cualquier $v \in T_pM$.

Campos sobre variedades

Campos de vectores

Definición 17. Un campo vectorial suave X sobre un conjunto abierto U en M es una aplicación suave $X : U \rightarrow T(M)$ tal que $\pi \circ X = \text{Id}_U$ (Lee, 2012).

Ejemplo 1. (campo vectorial de coordenadas) Si (U, φ) es una carta en M entonces la asignación,

$$p \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

determina un campo vectorial sobre U , llamado *campo vectorial de i -ésima coordenada* y denotado por $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Ejemplo 2. (campo vectorial de Euler) Un campo vectorial V en \mathbb{R}^n cuyo valor en $x \in \mathbb{R}^n$ es,

$$V_x = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_x + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_x$$

es llamado *campo vectorial de Euler*.

Observación. Si X es un campo vectorial sobre U y $p \in U$ entonces $X(p)$ se denota como X_p y es un elemento de $T_p M$. Si $f \in C^\infty(U)$ entonces $X(f)$ es una función sobre U cuyo valor en p es $X_p(f)$.

Flujo de un campo vectorial

Definición 18. Se define el *flujo global sobre M* , como una función de $\theta : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ que satisface que, para cualesquiera $t, s \in \mathbb{R}$, $\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p)$ y $\theta(0, p) = p$ (Lee, 2012).

Definición 19. Dado un flujo global sobre M , se define un campo vectorial V sobre M como $V_p = \theta'_p(0)$ llamado *generador infinitesimal de θ* .

Teorema 11. Sea V un campo vectorial sobre una m -variedad M . Existe un único flujo suave maximal cuyo generador infinitesimal es V .

Observación. A partir de un campo vectorial V , por el teorema anterior, vemos que existe un flujo asociado a este, es llamado *flujo a partir de V* , además, si el flujo es global, se dice que V es un campo vectorial completo.

Ejemplo 1. El flujo de $V = \frac{\partial}{\partial x}$ en \mathbb{R}^2 es la aplicación $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por,

$$\psi_t(x, y) = (x + t, y)$$

Para cada $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ψ_t traslada el plano a la derecha o a la izquierda en una distancia de $|t|$.

Ejemplo 2. El flujo de $X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ es la aplicación $\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por,

$$\theta_t(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, θ_t rota el plano alrededor del origen con ángulo t .

Formas Diferenciales

Las formas diferenciales constituyen un marco de trabajo para generalizar diversos conceptos del cálculo en varias variables como el producto vectorial, el rotacional, la divergencia y el determinante del Jacobiano. En este trabajo resultan esenciales para definir los grupos de cohomología de De Rham (Lee, 2012).

Tensores alternantes

Definición 20. Sean V_1, \dots, V_k espacios vectoriales, se define el producto tensorial de los espacios V_1, \dots, V_k como,

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_k = \left\{ \sum \alpha_i v_1 \otimes \dots \otimes v_k : \text{sumas formales finitas} \right\}$$

donde $v_i \in V_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tal que cumplen las siguientes propiedades,

$$v_1 \otimes \dots \otimes \alpha_i v_i \otimes \dots \otimes v_k = \alpha_i (v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_k)$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes (v_i + v'_i) \otimes \dots \otimes v_k = v_1 \otimes \dots \otimes v_i \otimes \dots \otimes v_k + v_1 \otimes \dots \otimes v'_i \otimes \dots \otimes v_k$$

(Dummit, 2004).

Observación. Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base, entonces el conjunto,

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$$

es una base para $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k\text{-veces}}$.

Teorema 12. Sean V_1, \dots, V_k espacios vectoriales de dimensión finita, se cumple que,

$$V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^* \cong L(V_1, \dots, V_k; \mathbb{R})$$

Definición 21. Sea V espacio vectorial de dimensión finita, decimos que $\alpha \in V^* \otimes \dots \otimes V^*$ es un tensor alternante si,

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

para cualesquiera $v_1, \dots, v_k \in V$ con $i \neq j$. El espacio de los tensores alternantes es denotado por $\Lambda_k(V^*)$, por convención $\Lambda_0(V^*) = \mathbb{R}$ y $\Lambda_1(V^*) = V^*$.

Definición 22. Sean $v \in \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{k\text{-veces}}$ y $w \in \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{l\text{-veces}}$, a partir de estos elementos podemos definir un elemento en $\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{(k+l)\text{-veces}}$, como $v \otimes w(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{k+l}) := v(e_1, \dots, e_k)w(e_{k+1}, \dots, e_{k+l})$.

Definición 23. Sean $v \in \Lambda_k(V^*)$ y $w \in \Lambda_l(V^*)$ se define el producto cuña o exterior \wedge como,

$$v \wedge w := \frac{(k+l)!}{k!l!} \left(\frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) (v \otimes w)^\sigma \right)$$

donde S_k es el grupo simétrico de k elementos y $(v \otimes w)^\sigma(v_1, \dots, v_k) = v \otimes w(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$ para cualesquiera $v_1, \dots, v_k \in V$.

Formas diferenciales

Definición 24. Sea M una m -variedad suave, se define el k -fibrado exterior sobre M como,

$$\Lambda_k^*(M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda_k(T_p^*M)$$

(Lee, 2012).

Observación. Sobre $\Lambda_k^*(M)$ podemos definir la proyección π a M de forma natural, donde a cada k -tensor alternate se le asigna un punto en M . A partir de esta, se puede dotar a este espacio de una topología y una estructura diferenciable que lo vuelve una variedad suave de dimensión $\binom{m}{k}$.

Definición 25. Una aplicación ω de M a $\Lambda_k^*(M)$ suave tal que $\pi \circ \omega = \text{Id}_M$ es una k -forma suave sobre M (Lee, 2012).

Observación. $\Omega^k(M)$ denota el conjunto de todas las k -formas suaves sobre M . Además, resulta útil identificar $\Omega^0(M)$ como $C^\infty(M)$.

Observación. Si $f \in C^\infty(M)$, el diferencial df es una aplicación suave de $T(M)$ a \mathbb{R} , que resulta ser lineal en cada espacio tangente, así, el diferencial de f puede ser considerado una 1-forma $df : M \rightarrow \Lambda_1^*(M)$, no obstante, es llamada la *derivada exterior* de la 0-forma f .

Definición 26. Sea $F : N \rightarrow M$ una función suave y $\omega \in \Omega^k(M)$, se define el *pullback* de ω bajo F como la forma diferencial $F^*\omega : N \rightarrow \Lambda_k^*(N)$, definida por

$$F^*(\omega)(p) = \omega(F(p))(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k))$$

donde $v_i \in T_pN$.

Observación. Recordemos que $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p\}_{i \leq m}$ es una base para T_pM , a partir de estos vectores podemos definir en T_p^*M una base,

$$\{dx_p^1, \dots, dx_p^m\}$$

donde $dx_p^i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} |_p \right)$ es 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$. Estas funciones se extienden de manera lineal a todo el espacio T_pM . Como $\Lambda_1(T_p^*M) = T_p^*M$, a partir del producto exterior podemos definir una base para $\Lambda_k(T_p^*M)$,

$$(dx_p^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_p^{i_k})_{i_1 < \dots < i_k}$$

Por lo tanto, para cada k -forma definida en M se puede escribir localmente como,

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 < \dots < i_k}(p) dx_p^{i_1} \wedge \dots \wedge dx_p^{i_k}$$

Así, decimos que ω es suave, si $\omega_{i_1 < \dots < i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ es suave para cada lista de índices, esta notación de índices se puede simplificar al considerar $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, de esta manera se puede representar la anterior ecuación como,

$$\omega(p) = \sum_I \omega_I(p) dx_p^I$$

Ejemplo 1. Considere $M = \mathbb{R}^2$, una 0-forma es una función $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Una 1-forma es una función $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Lambda_1^*(\mathbb{R}^2)$, para cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que $\omega(x, y) \mapsto f_{(x,y)}(u, v)$ tal que $f_{(x,y)} \in T_{(x,y)}^*\mathbb{R}^2$ y $(u, v) \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$. Sea $\omega(x, y) = xydx_{(x,y)} + (x + y)dy_{(x,y)}$, así, $\omega(1, 2) = 2dx + 3dy$. Si $(u, v) \in T_{(1,2)}\mathbb{R}^2$, entonces $\omega(1, 2)(u, v) = 2dx(u, v) + 3dy(u, v) = 2u + 3v$.

Una 2-forma es una función $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Lambda_2^*(\mathbb{R}^2)$. Dado $\eta \in \Lambda_2(T_p^*\mathbb{R}^2)$, se tiene que $\eta = \eta_1 dx \wedge dy$. Sea $\omega(x, y) = xy^2 dx \wedge dy$, entonces dado $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\omega(1, 2) = 1 \cdot 2^2 dx \wedge dy = 4dx \wedge dy$.

Si $v, w \in T_p\mathbb{R}^2$, entonces $\omega(1, 2)(v, w) = 4dx \wedge dy(v, w) = 4(v_1w_2 - w_1v_2)$.

Derivada exterior

Definición 27. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, si $\omega = \sum' \omega_I dx^I$ es una k -forma, definimos la *derivada exterior* $d\omega$ como la $(k+1)$ -forma,

$$d\left(\sum' \omega_I dx^I\right) = \sum' d\omega_I \wedge dx^I$$

Teorema 13. Se tienen las siguientes propiedades de la derivada exterior en subconjuntos abiertos de \mathbb{R}^n ,

- d es lineal sobre \mathbb{R} .
- Si ω y ν son k -forma y l -forma respectivamente, entonces

$$d(\omega \wedge \nu) = d\omega \wedge \nu + (-1)^k \omega \wedge d\nu$$

- $d \circ d \equiv 0$
- Si $F : U \rightarrow V$ es una función suave y ω una k -forma, entonces

$$F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$$

donde F^* fue introducido en la definición 26.

Observación. A partir de la definición de derivada exterior en conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n , podemos construir el operador derivada exterior para variedades suave de manera local, para cada punto a partir de sus coordenadas locales.

Teorema 14. Existe una única aplicación $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ llamada *derivada exterior* tal que,

- d es lineal sobre \mathbb{R}
- $d^2 = 0$

- Si ω y ν son k -forma y l -forma respectivamente, entonces

$$d(\omega \wedge \nu) = d\omega \wedge \nu + (-1)^k \omega \wedge d\nu$$

- Para cada $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, df es el diferencial de f .

Ejemplo 1. Sea $M = \mathbb{R}^3$, considere ω una 1-forma descrita por,

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

la derivada exterior de ω es,

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \\ &\quad + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy \\ &\quad + \frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz \end{aligned}$$

Definición 28. Sea ω una k -forma sobre M y X un campo vectorial sobre M , para cada punto p , se define

$$X \lrcorner \omega(p)(w_1, \dots, w_{k-1}) = \omega_p(X_p, w_1, \dots, w_{k-1})$$

como una $(k-1)$ -forma en M y recibe el nombre de *producto interior*.

Derivada de Lie para formas diferenciales

Definición 29. Sean M una variedad suave, X un campo vectorial suave sobre M y θ el flujo de X . Sea ω una k -forma sobre M . Se define la derivada de Lie de ω con respecto a X como,

$$(L_X\omega)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\theta_t^*\omega)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\theta_t)_p^*(\omega_{\theta_t(p)}) - \omega_p}{t}$$

Teorema 15. Sean M una variedad suave, X un campo vectorial suave sobre M , se tiene que,

- $L_X f = X(f)$ para cualquier $f \in C^\infty(M)$.
- $L_X(\omega \wedge \nu) = L_X(\omega) \wedge \nu + \omega \wedge L_X(\nu)$.

Teorema 16. Sea M una variedad y X un campo vectorial. θ es el flujo de X . Para cualquier k -forma ω y cualquier (t_0, p) en el dominio de θ , se tiene que,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (\theta_t^*\omega)_p = (\theta_{t_0}^*(L_X\omega))_p$$

Demostración. Veamos que,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (\theta_t^*\omega)_p = (\theta_{t_0}^*(L_X\omega))_p$$

Primero, reescribimos la definición del lado izquierdo

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (\theta_t^*\omega)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} d(\theta_t)_p^* \omega(\theta_t(p))$$

reescribimos la definición del lado derecho,

$$(\theta_{t_0}^*(L_X\omega))_p = d(\theta_{t_0})_p^*(L_X\omega)(\theta_{t_0}(p))$$

Así, realizamos un cambio de variable $t = s + t_0$,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} d(\theta_t)_p^* \omega(\theta_t(p)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} d(\theta_{s+t_0})_p^* \omega(\theta_{s+t_0}(p))$$

Como θ es el flujo de X , se tiene que $\theta_{s+t_0} = \theta_s \circ \theta_{t_0}$, así $\theta_{s+t_0}^* = \theta_{t_0}^* \theta_s^*$,

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} d(\theta_{s+t_0})^* \omega(\theta_{s+t_0}(p)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} d(\theta_{t_0})^* d(\theta_s)^*_{\theta_{t_0}(p)} \omega(\theta_s \theta_{t_0}(p))$$

Como los operadores $\frac{d}{ds}$ y $d(\theta_{t_0})^*$ conmutan, tenemos que

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} d(\theta_{t_0})^* d(\theta_s)^*_{\theta_{t_0}(p)} \omega(\theta_s \theta_{t_0}(p)) = d(\theta_{t_0})^* \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} d(\theta_s)^*_{\theta_{t_0}(p)} \omega(\theta_s \theta_{t_0}(p))$$

Por definición de derivada de Lie, obtenemos

$$d(\theta_{t_0})^* \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} d(\theta_s)^*_{\theta_{t_0}(p)} \omega(\theta_s \theta_{t_0}(p)) = d(\theta_{t_0})^* (L_X \omega)(\theta_{t_0}(p))$$

De esta forma obtenemos el resultado deseado.

Teorema 17. Sea M una variedad suave, V un campo vectorial sobre M , $\omega \in \Omega^k(M)$, entonces,

$$L_V(\omega) = V \lrcorner (d\omega) + d(V \lrcorner \omega)$$

Demostración. Veremos que se tiene para toda k -forma, realizando inducción sobre el grado de la forma. Para el grado 0, vemos que $V \lrcorner d\omega = d\omega(V)$ por definición, luego $d\omega(V) = V(\omega) = L_V \omega$, por otro lado, $d(V \lrcorner \omega) = d(0) = 0$. Así,

$$L_V(\omega) = V \lrcorner (d\omega) + d(V \lrcorner \omega)$$

cuando ω es una 0-forma. Veamos que se tiene para grado k , suponga que se cumple para los grados menores que k que $L_V(\alpha) = V \lrcorner (d\alpha) + d(V \lrcorner \alpha)$.

Sea ω una k -forma, esta se puede expresar como $\sum_I \omega_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, nótese que $\omega_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = dx^{i_1} \wedge \omega_I dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, si denominamos $u = x^{i_1}$ y $b = \omega_I dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ vemos que $\omega_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = du \wedge b$, por lo tanto, ω es una suma de elementos de la forma $du \wedge b$, así, bastaría mostrar que se cumple para $du \wedge b$ y obtendremos que la igualdad se cumple para ω .

Por una parte, $L_V(du \wedge b) = L_V du \wedge b + du \wedge L_V b$, esto es $d(Vu) \wedge b + du \wedge (V \lrcorner db + d(V \lrcorner b))$ por lo tanto,

$$L_V(du \wedge b) = d(Vu) \wedge b + du \wedge (V \lrcorner db + d(V \lrcorner b))$$

Por otra parte, veamos que es $V \lrcorner d(du \wedge b) + d(V \lrcorner (du \wedge b))$, por definición de d obtenemos,

$$V \lrcorner (d(\mathbf{du}) \wedge \mathbf{b} + (-1)^1 \mathbf{du} \wedge d\mathbf{b}) + d(V \lrcorner (du \wedge b))$$

Como $d(du) = 0$, se tiene,

$$V \lrcorner (\mathbf{0} \wedge \mathbf{b} - \mathbf{du} \wedge d\mathbf{b}) + d(V \lrcorner (du \wedge b))$$

Aplicando la definición de \lrcorner obtenemos,

$$V \lrcorner (-du \wedge db) + d((\mathbf{V} \lrcorner \mathbf{du}) \wedge \mathbf{b} + (-1)^1 \mathbf{du} \wedge (\mathbf{V} \lrcorner \mathbf{b}))$$

Como $V \lrcorner du = V(u)$

$$V \lrcorner (-du \wedge db) + d(\mathbf{V}(u) \wedge \mathbf{b} - \mathbf{du} \wedge (\mathbf{V} \lrcorner \mathbf{b}))$$

Se aplica la definición del operador \lrcorner ,

$$(-\mathbf{V} \lrcorner \mathbf{du}) \wedge d\mathbf{b} + (-1)^1 (-\mathbf{du}) \wedge (\mathbf{V} \lrcorner d\mathbf{b}) + d(V(u) \wedge b - du \wedge (V \lrcorner b))$$

Reescribimos

$$-\mathbf{V}(u) \wedge d\mathbf{b} + \mathbf{du} \wedge (\mathbf{V} \lrcorner d\mathbf{b}) + d(V(u) \wedge b - du \wedge (V \lrcorner b))$$

Se aplica la definición del operador d ,

$$-V(u) \wedge db + du \wedge (V \lrcorner db)$$

$$+d(\mathbf{V}(u)) \wedge \mathbf{b} + (-1)^0 \mathbf{V}(u) \wedge d\mathbf{b} + d(-\mathbf{du}) \wedge (\mathbf{V} \lrcorner \mathbf{b}) + (-1)^0 \mathbf{du} \wedge d(\mathbf{V} \lrcorner \mathbf{b})$$

Como $d(-du) = 0$ y $V(u) \wedge db$ aparece en negativo y positivo, la ecuación se convierte en,

$$du \wedge (V \lrcorner db) + d(\mathbf{V}(u)) \wedge \mathbf{b} + \mathbf{du} \wedge d(\mathbf{V} \lrcorner \mathbf{b})$$

Esto es,

$$d(V(u)) \wedge b + du \wedge (V \lrcorner db + d(V \lrcorner b))$$

Que es igual a $L_V(du \wedge b)$, demostrando que $L_V(du \wedge b) = V \lrcorner d(du \wedge b) + d(V \lrcorner (du \wedge b))$, por tanto, se tiene para cada k -forma definida como $\omega_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, como $\omega = \sum_I \omega_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$, se cumple la propiedad para cada sumando, además, los operadores \lrcorner y d son lineales, entonces para ω también se cumple.

Homotopía

Nociones sobre homotopía

Definición 30. Sean X y Y espacios topológicos, f, g funciones continuas, una homotopía de f a g es una función continua $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que,

$$h(x, 0) = f(x)$$

$$h(x, 1) = g(x)$$

Si existe h , decimos que f y g son *homótopas* (Lee, 2012).

Definición 31. Sea $f : X \rightarrow Y$, se dice que f es una equivalencia de homotopía si existe una función $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \sim_H \text{Id}_Y$ y $g \circ f \sim_H \text{Id}_X$ donde \sim_H simboliza la relación de ser homótopas. Cuando existen f y g se dice que X e Y son equivalentes homotópicamente. (Lee, 2012)

Teorema 18. Sea I un intervalo abierto, M una variedad, se tiene que $M \times I \sim_H M$.

Demostración. Para ello, consideramos $t_0 \in I$, $F : M \rightarrow M \times I$ y $G : M \times I \rightarrow M$ definidas por,

$$F(x) = (x, t_0) \quad G(x, t) = x$$

Nótese que $G \circ F = \text{Id}_M$, por otro lado, $F \circ G = (x, t_0)$, definimos $H : M \times I \times [0, 1] \rightarrow M \times I$ como,

$$H(x, t, s) = (x, (1 - s)t + st_0)$$

Nótese que $H(x, t, 0) = (x, t) = \text{Id}_{M \times I}$ y $H(x, t, 1) = (x, t_0) = F \circ G$, como H es continua, se tiene que $F \circ G \sim_H \text{Id}_{M \times I}$, luego, se tiene que $M \times I \sim_H M$

Existencia de operador de homotopía

Definición 32. Definimos $i_t : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ como,

$$i_t(p) = (p, t)$$

Teorema 19. Sea M una variedad suave, existe una familia de aplicaciones suaves $h_k :$

$\Omega^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ tal que,

$$h_{k+1}(d\omega) + d(h_k\omega) = i_1^*\omega - i_0^*\omega$$

para $\omega \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$. Ver definición 26 para hallar expresión de i_1^* y i_0^* .

Demostración. Definimos X un campo vectorial sobre $M \times \mathbb{R}$ como,

$$(q, s) \rightarrow \left(0, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_s\right)$$

En efecto X es un campo vectorial, teniendo en cuenta que estamos representando los elementos de $T_{(q,s)}(M \times \mathbb{R})$ como elementos en $T_qM \times T_s\mathbb{R}$.

Dada $\omega \in \Omega^k(M \times [0, 1])$, definimos,

$$h_k\omega = \int_0^1 i_t^*(X \lrcorner \omega) dt$$

Esto es, para cada $p \in M$, $(h_k\omega)_p = \int_0^1 i_t^*(X \lrcorner \omega)_p dt$ y el integrando es una función de t con valores en el espacio vectorial $\Lambda_{k-1}(T_p^*M)$.

Tenemos que $d(h_k\omega) = \int_0^1 d(i_t^*(X \lrcorner \omega)) dt$ ya que en coordenadas locales observamos que es posible intercambiar el signo de la integral y la derivada.

Ahora, veamos la ecuación general

$$h_{k+1}(d\omega) + d(h_k\omega) = \int_0^1 i_t^*(X \lrcorner d\omega) dt + d\left(\int_0^1 i_t^*(X \lrcorner \omega) dt\right)$$

La ecuación anterior surge de sustituir los elementos $h_{k+1}(d\omega)$ y $d(h_k\omega)$ por su definición como integral

$$h_{k+1}(d\omega) + d(h_k\omega) = \int_0^1 i_t^*(X \lrcorner d\omega) dt + \int_0^1 d(i_t^*(X \lrcorner \omega)) dt$$

Se sustituye $d(h_k\omega) = \int_0^1 d(i_t^*(X \lrcorner \omega)) dt$,

$$h_{k+1}(d\omega) + d(h_k\omega) = \int_0^1 i_t^*(X \lrcorner d\omega) dt + \int_0^1 i_t^* d(X \lrcorner \omega) dt$$

En el segundo sumando es posible intercambiar los operadores i_t^* y d ,

$$h_{k+1}(d\omega) + d(h_k\omega) = \int_0^1 (i_t^*(X \lrcorner d\omega) + i_t^*d(X \lrcorner \omega))dt$$

Se agrupó la integral

$$h_{k+1}(d\omega) + d(h_k\omega) = \int_0^1 i_t^*(X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega))dt$$

En la anterior línea, se usa el hecho de que i_t^* es lineal,

$$h_{k+1}(d\omega) + d(h_k\omega) = \int_0^1 i_t^*(L_X\omega)dt$$

Por el teorema 17, es posible reemplazar $X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega)$ por $L_X\omega$.

Dado $(p, v) \in M \times \mathbb{R}$, podemos describir el flujo de X en M ,

$$\theta : \mathbb{R} \times M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$$

$$\theta(u, p, v) = (p, v + u)$$

Nótese que,

$$i_t = \theta_t \circ i_0$$

Así, por la ecuación anterior

$$i_t^*(L_X\omega) = i_0^*(\theta_t^*(L_X\omega))$$

Luego, por el teorema 16,

$$i_0^*(\theta_t^*(L_X\omega)) = i_0^*\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=t}(\theta_s^*\omega)\right)$$

Intercambiamos los operadores i_0^* y $\frac{d}{ds}$,

$$i_0^*\left(\frac{d}{ds}(\theta_s^*\omega)\right) = \frac{d}{ds}i_0^*(\theta_s^*\omega)$$

Como $i_s(x) = (x, s) = (x, s + 0) = \theta(s, x, 0) = \theta(s, i_0(x)) = \theta_s \circ i_0(x)$

$$\frac{d}{ds}i_0^*(\theta_s^*\omega) = \frac{d}{ds}(i_s^*\omega)$$

Sustituimos,

$$h_{k+1}(d\omega) + d(h_k\omega) = \int_0^1 \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} (i_s^*\omega) dt = (i_t^*\omega) \Big|_0^1 = i_1^*\omega - i_0^*\omega$$

Sucesiones exactas

Nociones sobre sucesiones exactas

Definición 33. Una sucesión exacta de espacios de vectoriales $\{A_i, \delta_i\}$ es una colección de funciones entre espacios vectoriales que se relacionan de la siguiente forma,

$$\dots \rightarrow A_{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} A_n \xrightarrow{\delta_n} A_{n+1} \rightarrow \dots$$

que satisfacen que,

$$\text{Im } \delta_{i-1} = \text{Ker } \delta_i$$

(Dummit, 2004).

Teorema 20. Sea $\{A_i, \delta_i\}_{i=0}^{n+1}$ una sucesión exacta de espacios vectoriales, tales que $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $A_0 = A_{n+1} = 0$, entonces,

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \dim A_i = 0.$$

Demostración. Considere $\{A_i, \delta_i\}_{i=0}^{n+1}$ una sucesión exacta de espacios vectoriales, tales que $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $A_0 = A_{n+1} = 0$, tenemos que,

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \dim A_i = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} [\dim \text{Ker } \delta_i + \dim \text{Im } \delta_i]$$

Recordemos que $\text{Im } \delta_{i-1} = \text{Ker } \delta_i$ para $i = 1, \dots, n$,

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} [\dim \text{Ker } \delta_i + \dim \text{Im } \delta_i] = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} [\dim \text{Im } \delta_{i-1} + \dim \text{Im } \delta_i]$$

Reorganizamos el sumatorio,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \dim \text{Im } \delta_{i-1} + \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \dim \text{Im } \delta_i \\ & \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \dim \text{Im } \delta_i + \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \dim \text{Im } \delta_i \\ & (-1) \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i-1} \dim \text{Im } \delta_i + \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \dim \text{Im } \delta_i \end{aligned}$$

Se eliminan los términos $(\dim \operatorname{Im} \delta_i)$ para $i = 1, \dots, n - 1$, resultando en,

$$\dim \operatorname{Im} \delta_0 + (-1)^{n-1} \dim \operatorname{Im} \delta_n$$

Como $\delta_0 : 0 \rightarrow A_1$ y $\delta_n : A_n \rightarrow 0$, ambas imágenes son el espacio trivial, por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \dim A_i = \dim \operatorname{Im} \delta_0 + (-1)^{n-1} \dim \operatorname{Im} \delta_n = 0.$$

Cohomología de De Rham

Formas cerradas y exactas

Definición 34. Sean M una variedad suave y $\alpha \in \Omega^k(M)$, decimos que α es cerrada, si $d\alpha = 0$ (Lee, 2012).

Definición 35. Sean M una variedad suave y $\alpha \in \Omega^k(M)$, decimos que α es exacta, si existe $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $d\omega = \alpha$ (Lee, 2012).

Definición 36. Sea M una variedad suave y sea k un entero, $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ es un operador lineal. Definimos los siguientes espacios,

- $\mathcal{Z}^k(M) = \ker(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))$, llamado *espacio de formas cerradas*.
- $\mathcal{B}^k(M) = \text{Im}(d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M))$, llamado *espacio de formas exactas*.

(Lee, 2012).

Definición 37. Sea M una variedad suave y k un entero, se define el *el grupo de cohomología de De Rham de grado k* como,

$$H_{dR}^k(M) = \frac{\mathcal{Z}^k(M)}{\mathcal{B}^k(M)}$$

Invarianza bajo homotopías

Teorema 21. Suponga que M y N son variedades suaves, $F, G : M \rightarrow N$ son aplicaciones suaves homótopas, entonces $F^*, G^* : H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M)$ son iguales.

Demostración. Queremos ver que $F^* = G^*$. Como existe $H : M \times [0, 1] \rightarrow N$ una homotopía entre F y G , se cumple

$$H(x, 0) = F(x) \quad H(x, 1) = G(x)$$

No obstante, vemos que

$$F(x) = H(i_0(x)) \quad G(x) = H(i_1(x))$$

Esto es,

$$F^* = H^* \circ i_0^* \quad G^* = H^* \circ i_1^*$$

i_t se describe en la definición 32, así,

$$F^* = (H \circ i_0)^* = i_0^* \circ H^*$$

$$G^* = (H \circ i_1)^* = i_1^* \circ H^*$$

Si $i_0^* = i_1^*$ entonces

$$F^* = i_0^* \circ H^* = i_1^* \circ H^* = G^*$$

Veamos que $i_0^* = i_1^*$. Por el teorema 19,

$$h_{k+1}(d\omega) + d(h_k\omega) = i_1^*\omega - i_0^*\omega$$

Si ω es cerrada, entonces,

$$h_{k+1}(d\omega) + d(h_k\omega) = h(0) + d(h_k\omega)$$

Luego, sobre el grupo de cohomología de De Rham,

$$[d(h_k\omega)] = [0]$$

Entonces,

$$i_1^*[\omega] - i_0^*[\omega] = [i_1^*\omega - i_0^*\omega] = [d(h_k\omega)]$$

Por lo tanto,

$$i_1^*[\omega] - i_0^*[\omega] = [0]$$

Esto es,

$$i_1^*[\omega] = i_0^*[\omega]$$

Así, F y G inducen la misma aplicación sobre los grupos de cohomología.

Teorema 22. Sean M y N variedades homotópicamente equivalentes, entonces $H_{dR}^p(M) \cong H_{dR}^p(N)$.

Demostración. Como M y N son homotópicamente equivalentes, existen $F : M \rightarrow N$ y

$G : N \rightarrow M$ tal que,

$$F \circ G \cong \text{Id}_N \quad G \circ F \cong \text{Id}_M$$

Por el teorema 21,

$$G^* \circ F^* = \text{Id}_{H_{dR}^k(N)} \quad F^* \circ G^* = \text{Id}_{H_{dR}^k(M)}$$

Así, F^* es un isomorfismo de $H_{dR}^k(N)$ a $H_{dR}^k(M)$.

Observación. Sea I un intervalo abierto, M una variedad, se tiene que $M \times I \sim_H M$.

Para ello, consideramos $t_0 \in I$, $F : M \rightarrow M \times I$ y $G : M \times I \rightarrow M$ definidas por,

$$F(x) = (x, t_0) \quad G(x, t) = x$$

Nótese que $G \circ F = \text{Id}_M$, por otro lado, $F \circ G = (x, t_0)$, definimos $H : M \times I \times [0, 1] \rightarrow M \times I$ como,

$$H(x, t, s) = (x, (1-s)t + st_0)$$

Nótese que $H(x, t, 0) = (x, t) = \text{Id}_{M \times I}$ y $H(x, t, 1) = (x, t_0) = F \circ G$, como H es continua, se tiene que $F \circ G \sim_H \text{Id}_{M \times I}$, luego, se tiene que $M \times I \sim_H M$

Teorema de Mayer-Vietoris

Teorema 23. (Mayer-Vietoris) Sean M una m -variedad suave, U, V abiertos de M cuya unión sea M , para cada s entero, existe una aplicación lineal $\delta : H_{dR}^s(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^{s+1}(M)$ tal que la siguiente sucesión es exacta.

$$\dots \xrightarrow{\delta} H_{dR}^s(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H_{dR}^s(U) \oplus H_{dR}^s(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H_{dR}^s(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H_{dR}^{s+1}(M) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \dots$$

donde, $i : U \cap V \rightarrow U, j : U \cap V \rightarrow V, k : U \rightarrow M, l : V \rightarrow M$ representan las inclusiones, las aplicaciones de la sucesión se definen como,

$$k^* \oplus l^*(\omega) = (k^*\omega, l^*\omega)$$

$$i^* - j^*(\omega) = i^*\omega - j^*\omega$$

Cómputos

Teorema 24. Si M es una variedad conexa, entonces $H_{dR}^0(M) = \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $[\alpha] \in H_{dR}^0(M)$, sin pérdida de generalidad, suponemos que $\alpha \in \Omega^0(M)$ es el representante de la clase de equivalencia $[\alpha]$, como α es cerrada, tenemos que $d\alpha = 0$, recordemos que $\alpha : M \rightarrow \Lambda_0^*(M)$, tal que $\pi \circ \alpha = \text{Id}_M$, además $\Lambda_0(T_p^*M) = \mathbb{R}$

$$\Lambda_0^*(M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda_0(T_p^*M) = \bigsqcup_{p \in M} \mathbb{R}$$

por lo tanto, α puede ser pensada como una función suave $\bar{\alpha} : M \rightarrow \mathbb{R}$, como $d\alpha := d\bar{\alpha}$ y M es una variedad conexa, podemos aplicar resultados sobre aplicaciones diferenciables, como $d\bar{\alpha} = 0$, se tiene que $\bar{\alpha} : M \rightarrow \mathbb{R}$ debe ser constante, por lo tanto, α lo es, como $\Omega^{-1}(M) = \{0\}$, vemos que,

$$H_{dR}^0(M) = \frac{\text{Ker}(d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M))}{\text{Im}(d : \Omega^{-1}(M) \rightarrow \Omega^0(M))} = \frac{\{\alpha : \alpha \text{ es constante}\}}{\{0\}} \cong \mathbb{R}$$

Grupos de cohomología del espacio euclidiano

Ejemplo 1.

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{Si } k = 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Debido a que \mathbb{R}^n es conexo, a partir del teorema 24 se concluye que $H_{dR}^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.

Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como,

$$f(x) = 0$$

y $i : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión del cero en \mathbb{R}^n , así, $f \circ i = \text{Id}_{\{0\}}$, es decir, $f \circ i$ es homótopa a $\text{Id}_{\{0\}}$ trivialmente.

Sea $h : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por,

$$h(x, t) = (1 - t)x$$

Así, $h(0, x) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ y $h(1, x) = 0 = i \circ f(x)$, por lo tanto, $i \circ f$ es homótopa a $\text{Id}_{\mathbb{R}^n}$, a partir del

teorema 22 y el hecho de que \mathbb{R}^n es homótopa a un punto, se concluye que $H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) = 0$ para $k > 0$.

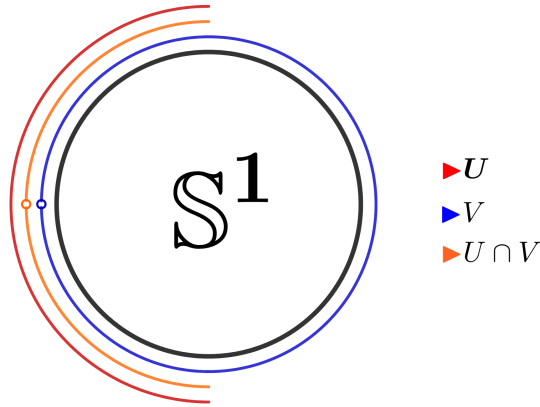
Grupos de cohomología del círculo

Ejemplo 2.

$$H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R} \quad H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$$

Demostración. A continuación, revisamos los grupos de cohomología de De Rham de \mathbb{S}^1 , para calcular $H_{dR}^0(\mathbb{S}^1)$, tengamos en cuenta el teorema 24, \mathbb{S}^1 es conexo, entonces $H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$.

Sean $U = \{e^{it} : t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})\}$ y $V = \{e^{it} : t \in (-\pi, \pi)\}$, tenemos que $U \cup V = \mathbb{S}^1$ y $U \cap V$ es difeomorfo a la unión disyunta de dos intervalos de la forma (a,b).



A partir del teorema 23, tenemos la siguiente sucesión exacta,

$$0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V)$$

Como U y V son difeomorfos a intervalos abiertos, podemos reemplazar los grupos de cohomología,

$$0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^0(I) \oplus H_{dR}^0(J) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^1(I) \oplus H_{dR}^1(J)$$

Donde I y J representan intervalos abiertos.

Teniendo en cuenta que,

$$H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) = H_{dR}^1(I) \oplus H_{dR}^1(J) = 0 \oplus 0 = 0$$

Obtenemos,

$$0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow 0$$

Sustituimos los espacios ya conocidos,

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^0(I \sqcup J) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow 0$$

Teniendo en cuenta que, $U \cap V \cong I \sqcup J$, podemos decir que, $H_{dR}^0(U \cap V) = H_{dR}^0(I) \oplus H_{dR}^0(J)$, entonces

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow 0$$

Teniendo en cuenta el teorema 20,

$$\dim \mathbb{R} - \dim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} + \dim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} - \dim H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) = 0$$

Despejando $\dim H_{dR}^1(\mathbb{S}^1)$, obtenemos que $\dim H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) = 1$. Se concluye que $H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$.

Grupos de cohomología de la esfera

Ejemplo 3.

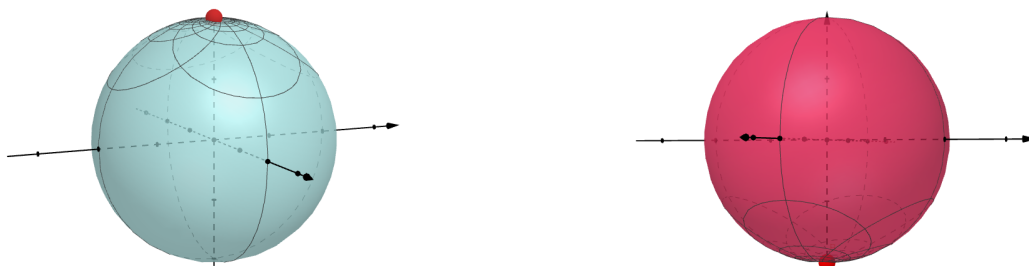
$$H_{dR}^0(\mathbb{S}^2) = \mathbb{R} \quad H_{dR}^1(\mathbb{S}^2) = 0 \quad H_{dR}^2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{R}$$

Demostración. El caso $k = 0$ se obtiene a partir del hecho de que \mathbb{S}^2 es conexo.

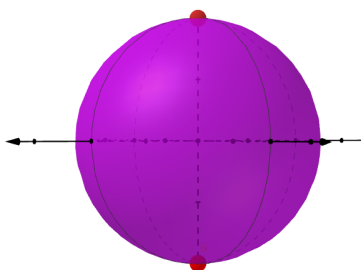
Sean $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{n\}$ y $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{s\}$ tal que $n = (0, 0, 1)$ y $s = (0, 0, -1)$.

A partir del teorema 23, tenemos que la sucesión exacta tiene esta forma,

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \rightarrow H_{dR}^1(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0$$



A partir de la construcción de \mathbb{S}^2 se tiene que, U y V son difeomorfos a \mathbb{R}^2 , por otro lado, se puede mostrar que $U \cap V$ es homotópicamente equivalente a \mathbb{S}^1 al contraer los meridianos de la esfera a un punto, por lo tanto,



$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0$$

De esta sucesión exacta, se puede extraer la siguiente sucesión exacta,

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0$$

Por el teorema 20,

$$\dim \mathbb{R} - \dim H_{dR}^2(\mathbb{S}^2) = 0 \rightarrow \dim H_{dR}^2(\mathbb{S}^2) = 1$$

Lo que implica que, $H_{dR}^2(\mathbb{S}^2) = \mathbb{R}$.

Así, la sucesión exacta inicial queda como,

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^2) \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0$$

Por el teorema 20,

$$\dim \mathbb{R} - \dim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} + \dim \mathbb{R} - \dim H_{dR}^1(\mathbb{S}^2) + \dim 0 - \dim \mathbb{R} + \dim \mathbb{R} = 0$$

Esto es,

$$1 - 2 + 1 - \dim H_{dR}^1(\mathbb{S}^2) + 0 - 1 + 1 = 0$$

Lo que implica que, $H_{dR}^1(\mathbb{S}^2) = 0$.

Grupos de cohomología de la n -esfera

Ejemplo 4.

$$H_{dR}^k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{Si } k = 0, n \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Para demostrar este resultado, realizamos inducción sobre la dimensión de \mathbb{S}^n .

La base inductiva se tiene por los casos anteriores.

Suponemos que se cumple para todos los enteros menores o iguales a $n - 1$,

$$H_{dR}^k(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{Si } k = 0, n - 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Veamos para n ,

El caso $k = 0$ corresponde a la conexidad de la variedad \mathbb{S}^n .

A continuación, consideremos los siguientes conjuntos y propiedades.

Sean $U = \mathbb{S}^n \setminus \{n\}$ y $V = \mathbb{S}^n \setminus \{s\}$ tal que $n = (0, \dots, 0, 1)$ y $s = (0, \dots, 0, -1)$, así, U y V son difeomorfos a \mathbb{R}^n .

$U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{n, s\}$, y es difeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, donde $0 \in \mathbb{R}^n$.

Veamos que $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim_H \mathbb{S}^{n-1}$. Consideramos $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ definida como $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ y la inclusión $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Tenemos que $r \circ i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ es $\text{Id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ por lo tanto, trivialmente son homótopas.

Por otro lado, $i \circ r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, consideramos $h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definida como,

$$h(x, t) = tx + (1 - t) \frac{x}{\|x\|}$$

Se tiene que, $h(x, 0) = i \circ r(x)$ y $h(x, 1) = x = \text{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$, concluyendo que $i \circ r \sim_H \text{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$.

Para $k = 1$, observamos lo siguiente,

$$0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V)$$

Al sustituir los espacios ya conocidos,

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^n) \rightarrow 0$$

Por lo tanto, $H_{dR}^1(\mathbb{S}^n) = 0$.

Para $1 < k < n$, consideramos la sucesión exacta,

$$H_{dR}^{k-1}(U) \oplus H_{dR}^{k-1}(V) \rightarrow H_{dR}^{k-1}(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V)$$

Como $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim_H \mathbb{S}^{n-1}$, reemplazamos en la sucesión,

$$0 \rightarrow H_{dR}^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{S}^n) \rightarrow 0$$

Por hipótesis inductiva, tenemos

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{S}^n) \rightarrow 0$$

Lo que concluye que $H_{dR}^k(\mathbb{S}^n) = 0$

Para n , observamos que,

$$H_{dR}^{n-1}(U) \oplus H_{dR}^{n-1}(V) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_{dR}^n(U) \oplus H_{dR}^n(V)$$

$$0 \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{S}^n) \rightarrow 0$$

Por hipótesis inductiva, tenemos

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{S}^n) \rightarrow 0$$

Lo que concluye que $H_{dR}^n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$.

Así, concluimos que si tiene para todo entero, a partir de inducción.

Grupos de cohomología del toro

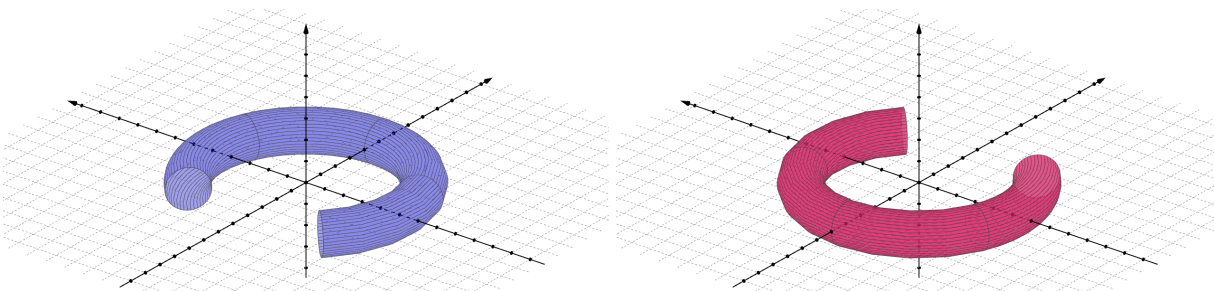
Ejemplo 5. Para el 2-toro, queremos ver que sus grupos de cohomología son,

$$H_{dR}^0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R} \quad H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}^2 \quad H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}$$

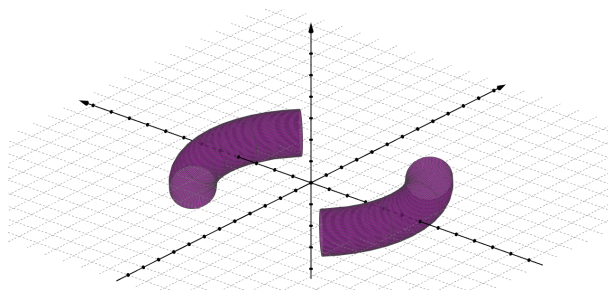
Inicialmente, definimos los siguientes subconjuntos en \mathbb{S}^1 ,

$$\widehat{(a, b)} = \{(\cos(\pi t), \sin(\pi t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in (a, b)\}$$

Consideramos los abiertos $U = \mathbb{S}^1 \times \widehat{(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})}$ y $V = \mathbb{S}^1 \times \widehat{(\frac{1}{4}, \frac{7}{4})}$, los cuales se representan en la siguiente figura.



Así, tenemos que $U \cap V = \mathbb{S}^1 \times \widehat{(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})} \cup \mathbb{S}^1 \times \widehat{(\frac{5}{4}, \frac{7}{4})}$,



A continuación, analizamos la sucesión exacta generada por \mathbb{T}^2 , U y V descrita en el teorema 23,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \\ \rightarrow H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \rightarrow H_{dR}^1(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

A partir del teorema 18,

$$U \sim_D \mathbb{S}^1 \times (0, 1) \sim_H \mathbb{S}^1$$

$$V \sim_D \mathbb{S}^1 \times (0, 1) \sim_H \mathbb{S}^1$$

$$U \cap V \sim_D \mathbb{S}^1 \times (0, 1) \sqcup \mathbb{S}^1 \times (0, 1) \sim_H \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$$

\sim_D significa equivalentes bajo difeomorfismos y \sim_H significa equivalentes bajo homotopía.

Así, sustituimos en la sucesión,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \\ \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \oplus H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Recordemos que, $H_{dR}^k(\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1) = H_{dR}^k(\mathbb{S}^1) \oplus H_{dR}^k(\mathbb{S}^1)$,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \\ \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \oplus H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \oplus H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Sustituimos los espacios ya conocidos,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \\ \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ahora, trataremos de ver cual es la dimensión de $H_{dR}^2(\mathbb{T}^2)$. Como es exacta, se tiene que,

$$H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \xrightarrow{i^* - j^*} H_{dR}^1(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \rightarrow 0$$

δ es sobreyectiva, esto es,

$$\text{Im } \delta = H_{dR}^2(\mathbb{T}^2)$$

Como es una aplicación lineal, se tiene

$$H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) = H_{dR}^1(U \cap V) / \text{Ker } \delta$$

Como para δ no conocemos su expresión, reescribimos el espacio en función de $i^* - j^*$,

$$H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) = H_{dR}^1(U \cap V) / \text{Im } i^* - j^*$$

Se tiene que $H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \cong \mathbb{R}^2$ y $H_{dR}^1(U \cap V) \cong H_{dR}^1(X) \oplus H_{dR}^1(Y) \cong \mathbb{R}^2$, donde X y Y son las componentes conexas de $U \cap V$, por definición de $i^* - j^*$,

$$(\omega, \nu) \xrightarrow{i^* - j^*} (i^*\omega - j^*\nu)|_{U \cap V}$$

Como $H_{dR}^1(U \cap V) \cong H_{dR}^1(X) \oplus H_{dR}^1(Y)$,

$$i^*\omega - j^*\nu \longleftrightarrow ((i^*\omega - j^*\nu)|_X, (i^*\omega - j^*\nu)|_Y)$$

Se tiene que los elementos de $H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V)$ se envían a $H_{dR}^1(X) \oplus H_{dR}^1(Y)$ de la siguiente forma,

$$(\omega, \nu) \longrightarrow ((i^*\omega - j^*\nu)|_X, (i^*\omega - j^*\nu)|_Y)$$

Si $((i^*\omega - j^*\nu)|_X, (i^*\omega - j^*\nu)|_Y) = 0$, implica que $\omega = \nu$ en los espacios X e Y , esto es $\omega = \nu$ en $U \cap V$. Por lo tanto, $\dim \text{Ker } i^* - j^* = 1$, así, se tiene que $\dim \text{Im } i^* - j^* = 1$, luego,

$$H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}$$

Obtenemos que,

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^2)$$

$$\rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 0$$

Aplicamos el Teorema 20, obteniendo que,

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{R} - \dim \mathbb{R}^2 + \dim \mathbb{R}^2 - \dim H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \\ + \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathbb{R}^2 + \dim \mathbb{R} = 0 \end{aligned}$$

Despejando obtenemos

$$H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{R}^2$$

Grupos de cohomología del 3-toro

Ejemplo 6. Para el 3-toro, se tiene que,

$$H_{dR}^0(\mathbb{T}^3) = \mathbb{R} \quad H_{dR}^1(\mathbb{T}^3) = \mathbb{R}^3 \quad H_{dR}^2(\mathbb{T}^3) = \mathbb{R}^3 \quad H_{dR}^3(\mathbb{T}^3) = \mathbb{R}$$

Consideramos los abiertos $U = \mathbb{T}^2 \times \widehat{\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)}$ y $V = \mathbb{T}^2 \times \widehat{\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)}$. Por consiguiente, tenemos que $U \cap V = \mathbb{T}^2 \times \widehat{\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)} \cup \mathbb{T}^2 \times \widehat{\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)}$.

A continuación, analizamos la sucesión exacta generada por \mathbb{T}^3 , U y V descrita en el teorema 23,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^3) \rightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^3) \\ \rightarrow H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \rightarrow H_{dR}^1(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{T}^3) \\ \rightarrow H_{dR}^2(U) \oplus H_{dR}^2(V) \rightarrow H_{dR}^2(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^3(\mathbb{T}^3) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

A partir del teorema 18,

$$U \sim_H \mathbb{T}^2$$

$$V \sim_H \mathbb{T}^2$$

$$U \cap V \sim_H \mathbb{T}^2 \sqcup \mathbb{T}^2$$

Así, sustituimos en la sucesión,

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^3) &\rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^2) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^2 \sqcup \mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^3) \\
&\rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \oplus H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^2 \sqcup \mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{T}^3) \\
&\rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \oplus H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{T}^2 \sqcup \mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^3(\mathbb{T}^3) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Recordemos que, $H_{dR}^k(\mathbb{T}^2 \sqcup \mathbb{T}^2) = H_{dR}^k(\mathbb{T}^2) \oplus H_{dR}^k(\mathbb{T}^2)$,

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^3) &\rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^2) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^2) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^3) \\
&\rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \oplus H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \oplus H_{dR}^1(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{T}^3) \\
&\rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \oplus H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \oplus H_{dR}^2(\mathbb{T}^2) \rightarrow H_{dR}^3(\mathbb{T}^3) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Sustituimos los espacios ya conocidos,

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^3) \\
&\rightarrow \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{T}^3) \\
&\rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^3(\mathbb{T}^3) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Ahora, trataremos de ver cual es la dimensión de $H_{dR}^1(\mathbb{T}^3)$,

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{f_2} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{f_3} H_{dR}^1(\mathbb{T}^3) \xrightarrow{f_4} \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_5} \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$$

Donde f_2, f_3, f_4, f_5 son las aplicaciones del teorema 23. Tengamos en cuenta que,

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{T}^3) = \dim \text{Im } f_4 + \dim \text{Ker } f_4$$

Como $\dim \text{Im } f_3 = \text{Ker } f_4$

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{T}^3) = \dim \text{Im } f_4 + \dim \text{Im } f_3$$

Como $\dim \text{Im } f_3 = \dim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} - \dim \text{Ker } f_3$,

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{T}^3) = \dim \text{Im } f_4 + \dim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} - \dim \text{Ker } f_3$$

Como $\dim \text{Im } f_4 = \dim \text{Ker } f_5$

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{T}^3) = \dim \text{Ker } f_5 + \dim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} - \dim \text{Im } f_2$$

Como $H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ y $H_{dR}^0(U \cap V) \cong H_{dR}^0(X) \oplus H_{dR}^0(Y) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, donde X y Y son las componentes conexas de $U \cap V$,

$$(\omega, \nu) \xrightarrow{f_2} (i^*\omega - j^*\nu)|_{U \cap V}$$

Como $H_{dR}^0(U \cap V) \cong H_{dR}^0(X) \oplus H_{dR}^0(Y)$,

$$i^*\omega - j^*\nu \longleftrightarrow ((i^*\omega - j^*\nu)|_X, (i^*\omega - j^*\nu)|_Y)$$

Se tiene que los elementos de $H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V)$ se envían a $H_{dR}^0(X) \oplus H_{dR}^0(Y)$ de la siguiente forma,

$$(\omega, \nu) \longrightarrow ((i^*\omega - j^*\nu)|_X, (i^*\omega - j^*\nu)|_Y)$$

Si $((i^*\omega - j^*\nu)|_X, (i^*\omega - j^*\nu)|_Y) = 0$, implica que $\omega = \nu$ en los espacios X e Y , esto es $\omega = \nu$ en $U \cap V$. Por lo tanto, $\dim \text{Ker } f_2 = 1$, así, se tiene que $\dim \text{Im } f_2 = 1$.

Como $H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \cong \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$ y $H_{dR}^1(U \cap V) \cong H_{dR}^1(X) \oplus H_{dR}^1(Y) \cong \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$, donde X y Y son las componentes conexas de $U \cap V$,

$$i^*\omega - j^*\nu \longleftrightarrow ((i^*\omega - j^*\nu)|_X, (i^*\omega - j^*\nu)|_Y)$$

Se tiene que los elementos de $H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V)$ se envían a $H_{dR}^1(X) \oplus H_{dR}^1(Y)$ de la siguiente forma,

$$(\omega, \nu) \longrightarrow ((i^*\omega - j^*\nu)|_X, (i^*\omega - j^*\nu)|_Y)$$

Si $((i^*\omega - j^*\nu)|_X, (i^*\omega - j^*\nu)|_Y) = 0$, implica que $\omega = \nu$ en los espacios X e Y , esto es $\omega = \nu$ en

$U \cap V$. Por lo tanto, $\dim \text{Ker } f_5 = 2$.

Obtenemos que,

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{T}^3) = \dim \text{Ker } f_5 + \dim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} - \dim \text{Im } f_2$$

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{T}^3) = 2 + 2 \cdot 1 - 1$$

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{T}^3) = 3$$

Para $H_{dR}^2(\mathbb{T}^3)$, analizamos la siguiente sucesión exacta,

$$\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_4} \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_5} H_{dR}^2(\mathbb{T}^3) \xrightarrow{f_6} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{f_7} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

Vemos que es equivalente a,

$$\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_4} \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_5} H_{dR}^2(\mathbb{T}^3) \xrightarrow{f_6} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{f_7} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

Así,

$$\dim H_{dR}^2(\mathbb{T}^3) = \dim \text{Im } f_6 + \dim \text{Im } f_5$$

Como $\dim \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 = \dim \text{Im } f_5 + \dim \text{Ker } f_5$,

$$\dim H_{dR}^2(\mathbb{T}^3) = \dim \text{Im } f_6 + \dim \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 - \dim \text{Ker } f_5$$

$$\dim H_{dR}^2(\mathbb{T}^3) = \dim \text{Ker } f_7 + \dim \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 - \dim \text{Ker } f_5$$

Como $H_{dR}^2(U) \oplus H_{dR}^2(V) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ y $H_{dR}^2(U \cap V) \cong H_{dR}^2(X) \oplus H_{dR}^2(Y) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, donde X y Y son las componentes conexas de $U \cap V$,

$$(\omega, \nu) \xrightarrow{f_5} i^*\omega - j^*\nu \longleftrightarrow ((i^*\omega - j^*\nu)|_X, (i^*\omega - j^*\nu)|_Y)$$

De esto se sigue que $\dim \text{Ker } f_7 = 1$. Obtenemos que,

$$\dim H_{dR}^2(\mathbb{T}^3) = \dim \text{Ker } f_7 + \dim \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 - \dim \text{Ker } f_5$$

$$\dim H_{dR}^2(\mathbb{T}^3) = 1 + 4 - 2$$

$$\dim H_{dR}^2(\mathbb{T}^3) = 3$$

Para el grupo de cohomología $H_{dR}^3(\mathbb{T}^3)$, consideramos la siguiente sucesión exacta,

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{f_7} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{f_8} H_{dR}^3(\mathbb{T}^3) \xrightarrow{f_9} 0$$

$$\dim H_{dR}^3(\mathbb{T}^3) = \dim \text{Im } f_9 + \dim \text{Ker } f_9$$

Tenemos que $\dim \text{Im } f_9 = 0$,

$$\dim H_{dR}^3(\mathbb{T}^3) = \dim \text{Ker } f_9$$

$$\dim H_{dR}^3(\mathbb{T}^3) = \dim \text{Im } f_8$$

$$\dim H_{dR}^3(\mathbb{T}^3) = \dim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} - \dim \text{Ker } f_8$$

$$\dim H_{dR}^3(\mathbb{T}^3) = \dim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} - \dim \text{Im } f_7$$

$$\dim H_{dR}^3(\mathbb{T}^3) = \dim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} - \dim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} + \dim \text{Ker } f_7$$

$$\dim H_{dR}^3(\mathbb{T}^3) = 1$$

Grupos de cohomología del n-toro

Ejemplo 7. Para el n-toro, se tiene que,

$$H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$$

donde $\binom{n}{k}$ corresponde a las combinaciones de n en k (coeficiente binomial). Para este resultado aplicaremos inducción sobre n , la base inductiva fueron los ejemplos anteriores, y como hipótesis inductiva, afirmamos que,

$$H_{dR}^k(\mathbb{T}^{n-1}) = \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k}}$$

Consideramos los abiertos $U = \mathbb{T}^{n-1} \times \widehat{\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)}$ y $V = \mathbb{T}^{n-1} \times \widehat{\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)}$. Por consiguiente, tenemos que $U \cap V = \mathbb{T}^{n-1} \times \widehat{\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)} \cup \mathbb{T}^{n-1} \times \widehat{\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right)}$.

A continuación, analizamos la sucesión exacta generada por \mathbb{T}^n , U y V descrita en el teo-

rema 23,

$$\begin{aligned}
0 &\rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^n) \rightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^n) \rightarrow \dots \\
&\dots \rightarrow H_{dR}^k(U) \oplus H_{dR}^k(V) \rightarrow H_{dR}^k(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) \rightarrow \dots \\
&\dots \rightarrow H_{dR}^{n-1}(U) \oplus H_{dR}^{n-1}(V) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{T}^n) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Nótese que,

$$U \sim_H \mathbb{T}^{n-1}$$

$$V \sim_H \mathbb{T}^{n-1}$$

$$U \cap V \sim_H \mathbb{T}^{n-1} \sqcup \mathbb{T}^{n-1}$$

Así, sustituimos en la sucesión,

$$\begin{aligned}
0 &\rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^n) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^{n-1}) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{T}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^{n-1} \sqcup \mathbb{T}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^n) \rightarrow \dots \\
&\dots \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{T}^{n-1}) \oplus H_{dR}^k(\mathbb{T}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{T}^{n-1} \sqcup \mathbb{T}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) \rightarrow \dots \\
&\dots \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{T}^{n-1}) \oplus H_{dR}^{n-1}(\mathbb{T}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{T}^{n-1} \sqcup \mathbb{T}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{T}^n) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Recordemos que, $H_{dR}^k(\mathbb{T}^{n-1} \sqcup \mathbb{T}^{n-1}) = H_{dR}^k(\mathbb{T}^{n-1}) \oplus H_{dR}^k(\mathbb{T}^{n-1})$,

$$\begin{aligned}
0 &\rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^n) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^{n-1}) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{T}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}^{n-1}) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{T}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^n) \rightarrow \dots \\
&\dots \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{T}^{n-1}) \oplus H_{dR}^k(\mathbb{T}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{T}^{n-1}) \oplus H_{dR}^k(\mathbb{T}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) \rightarrow \dots \\
&\dots \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{T}^{n-1}) \oplus H_{dR}^{n-1}(\mathbb{T}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{T}^{n-1}) \oplus H_{dR}^{n-1}(\mathbb{T}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{T}^n) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Sustituimos los espacios ya conocidos,

$$\begin{aligned}
0 &\rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{n-1}{0}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{0}} \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{n-1}{0}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{0}} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{T}^n) \rightarrow \dots \\
&\dots \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k}} \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k}} \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) \rightarrow \dots \\
&\dots \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{n-1}{n-1}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{n-1}} \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{n-1}{n-1}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{n-1}} \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{T}^n) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Ahora, trataremos de ver cual es la dimensión de $H_{dR}^k(\mathbb{T}^n)$ para $0 < k < n$, analizamos la siguiente sucesión exacta,

$$\mathbb{R}^{\binom{n-1}{k-1}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k-1}} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k-1}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k-1}} \xrightarrow{g} H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{h} \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k}} \xrightarrow{q} \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k}}$$

donde f, g, h, q son las funciones del teorema 23. Tengamos en cuenta que,

$$\text{Im } f = \text{Ker } g \quad \text{Im } g = \text{Ker } h \quad \text{Im } h = \text{Ker } q$$

$$\dim H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) = \dim \text{Im } h + \dim \text{Ker } h$$

$$\dim H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) = \dim \text{Im } g + \dim \text{Ker } q$$

$$\dim H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) = \dim \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k-1}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k-1}} - \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } q$$

Observación. Como $H_{dR}^s(U \cap V) \cong H_{dR}^s(X) \oplus H_{dR}^s(Y) \cong \mathbb{R}^{\binom{n-1}{s}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{s}}$, donde X y Y son las componentes conexas de $U \cap V$, existe la siguiente equivalencia,

$$i^*\omega - j^*\nu \longleftrightarrow ((i^*\omega - j^*\nu)|_X, (i^*\omega - j^*\nu)|_Y)$$

Para $\Phi : H_{dR}^s(U) \oplus H_{dR}^s(V) \rightarrow H_{dR}^s(U \cap V)$ que envía $\Phi(\omega, \nu) = i^*\omega - j^*\nu$, se puede reescribir como,

$$(\omega, \nu) \xrightarrow{\Phi} ((i^*\omega - j^*\nu)|_X, (i^*\omega - j^*\nu)|_Y)$$

Esto es, $\Phi(a, b) = (a - b, a - b)$ como una aplicación lineal entre espacios vectoriales reales. Como $H_{dR}^s(U) \oplus H_{dR}^s(V) \cong \mathbb{R}^{\binom{n-1}{s}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{s}}$, se tiene que $\dim \text{Ker } \Phi = \dim\{(a, b) \in \mathbb{R}^{\binom{n-1}{s}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{s}} : (a - b, a - b) = 0\} = \binom{n-1}{s}$.

A partir de la observación,

$$\dim H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) = \dim \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k-1}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{k-1}} - \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } q$$

$$\dim H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) = 2 \binom{n-1}{k-1} - \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\dim H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Por propiedad del coeficiente binomial $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$, tenemos que

$$\dim H_{dR}^k(\mathbb{T}^n) = \binom{n}{k}$$

Para el grupo de cohomología $H_{dR}^n(\mathbb{T}^n)$, consideramos la siguiente sucesión exacta,

$$\mathbb{R}^{\binom{n-1}{n-1}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{n-1}} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{\binom{n-1}{n-1}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{n-1}} \xrightarrow{g} H_{dR}^n(\mathbb{T}^n) \xrightarrow{h} 0$$

Se tiene que,

$$\dim H_{dR}^n(\mathbb{T}^n) = \dim \text{Im } h + \dim \text{Ker } h$$

Tenemos que $\dim \text{Im } h = 0$,

$$\dim H_{dR}^n(\mathbb{T}^n) = \dim \text{Ker } h$$

$$\dim H_{dR}^n(\mathbb{T}^n) = \dim \text{Im } g$$

$$\dim H_{dR}^n(\mathbb{T}^n) = \dim \mathbb{R}^{\binom{n-1}{n-1}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{n-1}} - \dim \text{Ker } g$$

$$\dim H_{dR}^n(\mathbb{T}^n) = \dim \mathbb{R}^{\binom{n-1}{n-1}} \oplus \mathbb{R}^{\binom{n-1}{n-1}} - \dim \text{Im } f$$

$$\dim H_{dR}^n(\mathbb{T}^n) = 2 \binom{n-1}{n-1} - \binom{n-1}{n-1} = \binom{n-1}{n-1}$$

Luego, por propiedades del coeficiente binomial $\binom{0}{0} = \binom{1}{1} = \dots = \binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n}$, obtenemos

$$\dim H_{dR}^n(\mathbb{T}^n) = \binom{n}{n}$$

Con esto se concluye para n . Por inducción fuerte, tenemos el resultado para todo n .

Grupos de cohomología del plano real proyectivo

Ejemplo 8. Para \mathbb{RP}^2 , se tiene que,

$$H_{dR}^0(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{R} \quad H_{dR}^1(\mathbb{RP}^2) = 0 \quad H_{dR}^2(\mathbb{RP}^2) = 0$$

Definimos el conjunto $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{RP}^2 : z = 0\}$ y el punto $p = [0, 0, 1]$, así, consideraremos los siguientes conjuntos,

$$U = \mathbb{RP}^2 \setminus S$$

$$V = \mathbb{RP}^2 \setminus \{p\}$$

Luego, notamos que $p \notin S$, es decir, $p \in U$, por lo tanto, $U \cup V = \mathbb{RP}^2$. También afirmamos que $U \sim_D \mathbb{R}^2$, para ello consideramos,

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f([x_0, x_1, x_2]) = \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2} \right)$$

Si $x \sim y$ entonces $x = \lambda y$, así,

$$f(x) = \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2} \right) = \left(\frac{\lambda x_0}{\lambda x_2}, \frac{\lambda x_1}{\lambda x_2} \right) = f(y)$$

Por lo tanto, f está bien definida.

f es inyectiva.

$$f([x]) = f([y]) \Rightarrow \left(\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2} \right) = \left(\frac{y_0}{y_2}, \frac{y_1}{y_2} \right)$$

$$\Rightarrow x_0 = ky_0 \quad x_1 = ky_1 \quad k = \frac{x_2}{y_2}$$

$$\Rightarrow (x_0, x_1, x_2) = (ky_0, ky_1, ky_2) \Rightarrow x \sim y$$

f es sobreyectiva. Para cada $x = (x_0, x_1)$ definimos $b = (\|x\|x_0, \|x\|x_1, \|x\|)$, así,

$$f([b]) = \left(\frac{\|x\|x_0}{\|x\|}, \frac{\|x\|x_1}{\|x\|} \right) = x$$

f es un difeomorfismo ya que está definida a partir de cocientes.

Afirmamos que $V \sim_D \mathbb{RP}^1$, definiendo

$$g : V \rightarrow \mathbb{RP}^1$$

$$g([x_0, x_1, x_2]) = [x_0, x_1]$$

Es claro que g está bien definida, que es inyectiva y sobreyectiva. Veamos que no existe $x \in V$ tal que $g(x) = 0$. Si $g(x) = 0$ entonces $[x_0, x_1, x_2] = [0, 0, x_2]$, luego, $[0, 0, x_2] \sim p$, pero $p \notin V$, por lo tanto, g es una función que envía elementos de V a \mathbb{RP}^1 , por su definición como proyección y función cociente, podemos afirmar que es un difeomorfismo.

$U \cap V = U \setminus \{p\}$, luego, $f(U \setminus \{p\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, por lo tanto, $U \cap V \sim_H \mathbb{S}^1$.

Así, consideramos la sucesión exacta del Teorema 23,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{RP}^2) \rightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{RP}^2) \\ \rightarrow H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \rightarrow H_{dR}^1(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{RP}^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Reemplazamos los espacios conocidos,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{RP}^2) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{R}^2) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{RP}^1) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{RP}^2) \\ \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{R}^2) \oplus H_{dR}^1(\mathbb{RP}^1) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{RP}^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Bajo el hecho de que $\mathbb{RP}^1 \sim_D \mathbb{S}^1$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{RP}^2) \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{RP}^2) \\ \rightarrow 0 \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{RP}^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Para hallar la $\dim H_{dR}^1(\mathbb{RP}^2)$ analizamos la siguiente sucesión exacta de espacios vectoriales,

$$H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \xrightarrow{f} H_{dR}^0(U \cap V) \xrightarrow{g} H_{dR}^1(\mathbb{RP}^2) \xrightarrow{h} H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \xrightarrow{l} H_{dR}^1(U \cap V)$$

Por el teorema de dimensión en espacios vectoriales, afirmamos que

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{RP}^2) = \dim \text{Ker } h + \dim \text{Im } h$$

Como la sucesión es exacta, $\text{Ker } h = \text{Im } g$ y $\text{Ker } l = \text{Im } h$

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{RP}^2) = \dim \text{Im } g + \dim \text{Ker } l$$

Por el teorema de dimensión de espacios vectoriales $\dim \text{Im } g = \dim H_{dR}^0(\mathbb{RP}^2) - \dim \text{Ker } g$ y

$\text{Ker } g = \text{Im } f$

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{RP}^2) = \dim H_{dR}^0(U \cap V) - \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } l$$

Como $H_{dR}^0(U \cap V) \cong H_{dR}^0(S^1)$, tenemos que $\dim H_{dR}^0(U \cap V) = 1$

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{R}P^2) = 1 - \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} l$$

Recordemos que $f : H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V)$ está definida como $f(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{(a-b)|_{U \cap V}}$, bajo el hecho de que $\dim H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) = 2$ y $\dim H_{dR}^0(U \cap V) = 1$ se concluye que $\dim \operatorname{Im} f = 1$

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{R}P^2) = 1 - 1 + \dim \operatorname{Ker} l$$

Por otro lado $l : H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \rightarrow H_{dR}^1(U \cap V)$ está definida como $l(\bar{a}, \bar{b}) = \overline{(a-b)|_{U \cap V}}$, bajo el hecho de que $\dim H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) = 1$ y $\dim H_{dR}^1(U \cap V) = 1$ se concluye que $\dim \operatorname{Ker} l = 0$

$$\dim H_{dR}^1(\mathbb{R}P^2) = 1 - 1 + 0 = 0$$

Como $\mathbb{R}P^2$ es conexo, a partir del teorema 24 se sigue que $H_{dR}^0(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{R}$.

Concluimos a partir del teorema 20 que $H_{dR}^1(\mathbb{R}P^2) \cong H_{dR}^2(\mathbb{R}P^2)$.

$$\overset{+}{\rightarrow} 1 \overset{-}{\rightarrow} 2 \overset{+}{\rightarrow} 1 \overset{-}{\rightarrow} \dim H_{dR}^1(\mathbb{R}P^2) \overset{+}{\rightarrow} 1 \overset{-}{\rightarrow} 1 \overset{+}{\rightarrow} \dim H_{dR}^2(\mathbb{R}P^2) = 0$$

Por lo tanto, $H_{dR}^2(\mathbb{R}P^2) \cong 0$.

Grupos de cohomología del espacio real proyectivo

Ejemplo 9. Para $\mathbb{R}P^3$, se tiene que,

$$H_{dR}^0(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{R} \quad H_{dR}^1(\mathbb{R}P^3) = 0 \quad H_{dR}^2(\mathbb{R}P^3) = 0 \quad H_{dR}^3(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{R}$$

Definimos el conjunto $S = \{[x, y, z, w] \in \mathbb{R}P^3 : w = 0\}$ y el punto $p = [0, 0, 0, 1]$, así, consideraremos los siguientes conjuntos,

$$U = \mathbb{R}P^3 \setminus S$$

$$V = \mathbb{R}P^3 \setminus \{p\}$$

Luego, notamos que $p \notin S$, es decir, $p \in U$, por lo tanto, $U \cup V = \mathbb{R}P^3$.

A partir del teorema 23, analizamos la siguiente sucesión exacta,

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{RP}^3) &\rightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{RP}^3) \\
&\rightarrow H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \rightarrow H_{dR}^1(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{RP}^3) \\
&\rightarrow H_{dR}^2(U) \oplus H_{dR}^2(V) \rightarrow H_{dR}^2(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^3(\mathbb{RP}^3) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Considerando que U es difeomorfo a \mathbb{R}^3 , V difeomorfo a \mathbb{RP}^2 , además, $U \cap V$ es equivalente a \mathbb{S}^2 homotópicamente. Podemos reescribir la sucesión anterior.

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{RP}^3) &\rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{R}^3) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{RP}^2) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{RP}^3) \\
&\rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{R}^3) \oplus H_{dR}^1(\mathbb{RP}^2) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{RP}^3) \\
&\rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{R}^3) \oplus H_{dR}^2(\mathbb{RP}^2) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_{dR}^3(\mathbb{RP}^3) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Reemplazando los espacios ya conocidos,

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{RP}^3) &\rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{RP}^3) \\
&\rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow 0 \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{RP}^3) \\
&\rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^3(\mathbb{RP}^3) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Como \mathbb{RP}^3 es una variedad conexa, por el teorema 24 se sigue que $H_{dR}^0(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{RP}^3) \\
&\rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow 0 \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{RP}^3) \\
&\rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^3(\mathbb{RP}^3) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

A partir de la sucesión exacta anterior podemos extraer las siguientes sucesiones exactas,

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{RP}^3) \rightarrow 0 \quad (6.1)$$

$$0 \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{RP}^3) \rightarrow 0 \quad (6.2)$$

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^3(\mathbb{RP}^3) \rightarrow 0 \quad (6.3)$$

Teniendo en cuenta el teorema 20 podemos concluir a partir de la ecuación 6.1

$$\overset{+}{\rightarrow} \mathbb{R} \overset{-}{\rightarrow} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \overset{+}{\rightarrow} \mathbb{R} \overset{-}{\rightarrow} H_{dR}^1(\mathbb{RP}^3) = 0$$

se sigue que $H_{dR}^1(\mathbb{RP}^3) \cong 0$, de la ecuación 6.2,

$$\overset{+}{\rightarrow} H_{dR}^2(\mathbb{RP}^3) = 0$$

se sigue que $H_{dR}^2(\mathbb{RP}^3) \cong 0$ y de la ecuación 6.3,

$$\overset{+}{\rightarrow} \mathbb{R} \overset{-}{\rightarrow} H_{dR}^3(\mathbb{RP}^3) = 0$$

concluyendo que $H_{dR}^3(\mathbb{RP}^3) \cong \mathbb{R}$.

Observación. Se observa que $H_{dR}^3(\mathbb{RP}^3)$ está determinado por el grupo $H_{dR}^2(\mathbb{RP}^2)$, como se aprecia en la siguiente sucesión,

$$\rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathbf{H}_{dR}^2(\mathbb{RP}^2) \rightarrow H_{dR}^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_{dR}^3(\mathbb{RP}^3) \rightarrow 0$$

Puesto que $H_{dR}^2(\mathbb{R}^3) \cong 0$ y $H_{dR}^2(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{R}$. Por lo tanto, al considerar \mathbb{RP}^n , junto al hecho de que $H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}^n) \cong 0$ y $H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{R}$, esperamos que la sucesión relacionada con \mathbb{RP}^n tenga la forma,

$$\rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbf{H}_{dR}^{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{RP}^n) \rightarrow 0$$

Esto es,

$$\rightarrow 0 \oplus \mathbf{H}_{dR}^{n-1}(\mathbb{RP}^{n-1}) \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{RP}^n) \rightarrow 0$$

Grupos de cohomología del n -espacio real proyectivo

Ejemplo 10. Para $\mathbb{R}P^n$, se tiene que,

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{Si } k = 0 \\ \mathbb{R} & \text{Si } k = n \text{ y } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{Otro caso} \end{cases}$$

Demostraremos que se tiene por inducción sobre n , la base inductiva se tiene respecto a los ejemplos anteriores. Suponemos que se cumple para $n - 1$, veamos que se tiene para n .

Definimos el conjunto $S = \{[x_0, x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}P^n : x_n = 0\}$ y el punto $p = [0, \dots, 0, 1]$, así, consideraremos los siguientes conjuntos,

$$U = \mathbb{R}P^n \setminus S$$

$$V = \mathbb{R}P^n \setminus \{p\}$$

Luego, notamos que V es un conjunto abierto y $p \notin S$ puesto que $p_n \neq 0$, es decir, $p \in U$, por lo tanto, $U \cup V = \mathbb{R}P^n$. Como $S^* = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_n = 0\}$ es un conjunto cerrado en \mathbb{R}^{n+1} , bajo la aplicación cociente $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$, tenemos que $S = \pi(S^*)$, esto es S es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}P^n$, por lo tanto, U es un conjunto abierto.

Consideramos la sucesión exacta del Teorema 23,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H_{dR}^{k-1}(U) \oplus H_{dR}^k(V) \rightarrow H_{dR}^{k-1}(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H_{dR}^{n-1}(U) \oplus H_{dR}^n(V) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Considerando que U es difeomorfo a \mathbb{R}^n bajo la función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$, se sigue que

$$H_{dR}^k(U) \cong H_{dR}^k(\mathbb{R}^n)$$

V es difeomorfo a $\mathbb{R}P^{n-1}$, bajo la aplicación $g : V \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ definida por $g([x_0, \dots, x_n]) =$

$[x_0, \dots, x_{n-1}]$, se sigue que

$$H_{dR}^k(V) \cong H_{dR}^k(\mathbb{R}P^{n-1})$$

$U \cap V = U \setminus \{p\}$, así, $U \cap V$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que es homotópicamente equivalente a \mathbb{S}^{n-1} , de esto se sigue que

$$H_{dR}^k(U \cap V) \cong H_{dR}^k(\mathbb{S}^{n-1})$$

Sustituimos los espacios en la sucesión exacta,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{R}^n) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{R}P^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H_{dR}^{k-1}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{dR}^{k-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Obtenemos,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0 \oplus 0 \dots \\ \dots \rightarrow H_{dR}^{k-1}(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow 0 \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0 \oplus H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}P^n$ es conexo, por el teorema 24 se sigue que $H_{dR}^0(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{R}$.

Al extraer la sucesión exacta,

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0$$

vemos que,

$$\overset{+}{\rightarrow} \mathbb{R} \overset{-}{\rightarrow} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \overset{+}{\rightarrow} \mathbb{R} \overset{-}{\rightarrow} H_{dR}^1(\mathbb{R}P^n) = 0$$

Esto es $H_{dR}^1(\mathbb{R}P^n) \cong 0$

Si $1 < k < n - 1$ entonces,

$$\dots \rightarrow H_{dR}^{k-1}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{dR}^{k-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \dots$$

es igual a,

$$\dots \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow 0 \rightarrow H_{dR}^k(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0 \oplus 0 \dots$$

Por lo tanto, $H_{dR}^k(\mathbb{R}P^n) = 0$.

Si n es par, entonces,

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_{dR}^{n-2}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{dR}^{n-2}(\mathbb{R}P^{n-1}) &\rightarrow H_{dR}^{n-2}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

es igual a,

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow 0 \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^n) &\rightarrow \\ &\rightarrow 0 \oplus H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Usando la hipótesis inductiva, como n es par, $n - 1$ es impar, se sigue que $H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathbb{R}$

$$\dots \rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow 0 \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0 \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{R}P^n) \rightarrow 0$$

Entonces, $H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^n) \cong H_{dR}^n(\mathbb{R}P^n)$. Analizamos las aplicaciones de la sucesión exacta

$$H_{dR}^{n-2}(U) \oplus H_{dR}^{n-2}(V) \xrightarrow{f} H_{dR}^{n-2}(U \cap V) \xrightarrow{g} H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^n) \xrightarrow{h} H_{dR}^{n-1}(U) \oplus H_{dR}^{n-1}(V) \xrightarrow{l} H_{dR}^{n-1}(U \cap V)$$

Por el teorema de dimensión de espacios vectoriales

$$\dim H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^n) = \dim \text{Ker } h + \dim \text{Im } h$$

Como $\text{Im } h = \text{Ker } l$ y $\text{Im } g = \text{Ker } h$

$$\dim H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^n) = \dim \text{Im } g + \dim \text{Ker } l$$

Como $\dim H_{dR}^{n-2}(U \cap V) = \dim \text{Im } g + \dim \text{Ker } g$

$$\dim H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}P^n) = \dim H_{dR}^{n-2}(U \cap V) - \dim \text{Ker } g + \dim \text{Ker } l$$

Como $\text{Im } f = \text{Ker } g$

$$\dim H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = \dim H_{dR}^{n-2}(\mathbb{S}^{n-1}) - \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } l$$

Esto es

$$\dim H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = 0 - 0 + \dim \text{Ker } l$$

Recordemos que $l : H_{dR}^{n-1}(U) \oplus H_{dR}^{n-1}(V) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(U \cap V)$ está definida por $l(a, b) = (a - b)|_{U \cap V}$, como $H_{dR}^{n-1}(U) \cong 0$, se sigue que $l(a, b) = -b|_{U \cap V}$, es decir, $l(a, b) = 0$ si y solo si $b = 0$, por lo tanto, $\text{Ker } l = \{0\}$.

$$\dim H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = 0$$

Además,

$$\dim H_{dR}^n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = 0$$

Si n es impar, analizamos la sucesión pero teniendo en cuenta que $n - 1$ es par y por la hipótesis inductiva $H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1})$ es el espacio trivial.

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow H_{dR}^{n-2}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{dR}^{n-2}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{n-2}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow 0 \rightarrow H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \rightarrow \\ &\rightarrow 0 \oplus 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_{dR}^n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

A partir del teorema 20, se concluye que $H_{dR}^{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = 0$ y $H_{dR}^n(\mathbb{R}\mathbb{P}^n) = \mathbb{R}$.

Conclusión

En este estudio de la cohomología de De Rham se evidenció como las herramientas del análisis y la topología convergen para describir de forma estructurada las propiedades intrínsecas de una variedad suave. A través del desarrollo de la teoría de sucesiones exactas, el teorema de Mayer-Vietoris y los teoremas que relacionan la teoría homotopía con la cohomología de De Rham, se estableció un marco teórico para el cálculo de invariantes topológicos.

La aplicación de estas herramientas a variedades como el espacio euclidiano, n -esferas, n -toros y espacios proyectivos permitió comprobar que la cohomología de De Rham ofrece una vía natural para capturar propiedades topológicas mediante el análisis de formas diferenciales, así como, mostrar métodos prácticos para la determinación de los grupos de cohomología.

Bibliografia

Dummit, D. S. & Foote, R. M. (2004). *Abstract algebra*. John Wiley & Sons.

Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lee, J. (2012). *Introduction to smooth manifolds*. Springer.

Samelson, H. (2001). Differential Forms, the Early Days; or the Stories of Deahna's Theorem and of Volterra's Theorem. *American Mathematical Monthly*, 108(6), 522.

Warner, F. W. (1983). *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer.