ANILLOS DE GRUPOS TORCIDOS ARTINIANOS

Jerson Enrique Pérez Carrillo

Universidad Industrial de Santader
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2017

ANILLOS DE GRUPOS TORCIDOS ARTINIANOS

Jerson Enrique Pérez Carrillo

Propuesta de trabajo de grado para optar al título de Matemático

Director

Héctor Edonis Pinedo Tapia
Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santader
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2017

Contenido

RESUMEN

TÍTULO: ANILLOS DE GRUPOS TORCIDOS ARTINIANOS.[1]

AUTOR: JERSON ENRIQUE PÉREZ CARRILLO [2]

PALABRAS CLAVE: MÓDULOS; RADICAL DE JACOBSON; MÓDULOS ARTINIANOS; ANILLOS ARTINIANOS; ANILLOS DE GRUPOS TORCIDOS.

DESCRIPCIÓN:

Sean $\mathcal{R}$ un anillo con unidad, G un grupo y θ un homomorfismo de grupos de G a $Aut(\mathcal{R})$, donde el conjunto $Aut(\mathcal{R})$ es el grupo de automorfismos de $\mathcal{R}$. Con estos objetos definiremos su anillo de grupo torcido asociado $\mathcal{R} *_\theta G$ y demostraremos el Teorema de J. K. Park, el cual dice que el anillo $\mathcal{R} *_\theta G$ es artiniano si y solo si $\mathcal{R}$ es artiniano y G es finito. Para su demostración será muy importante el Teorema de Connell, ya que la demostración se basará en aplicarlo repetidas veces.

En el primer capítulo veremos el Lema de Zorn y mostraremos el porque nos resulta útil, luego introduciremos el concepto de módulo y estudiaremos sus propiedades básicas ya que este concepto es la base de los demás capítulos. En el segundo capítulo nos centraremos en algunas propiedades estructurales de los anillos y los módulos, como lo son la simplicidad y semisimplicidad en módulos, estas propiedades nos permitirán una facilidad al momento de estudiar los módulos, también los anillos primitivos y semiprimitivos, y por último la propiedad que más nos interesa la cual es la condición de cadena descendente o condición de Artin. En el tercer capítulo damos paso a la construcción de los anillos de grupos torcidos, luego nos centraremos en probar propiedades de estos objetos relacionadas a la propiedad de ser artiniano, principalmente dos versiones del Teorema de J. K. Park con más hipótesis y usandolos concluiremos con la demostración del Teorema de J. K. Park.

[1] Trabajo de grado

[2] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Dr. Héctor Edonis Pinedo Tapia

ABSTRACT

TITLE: ARTINIANS SKEW GROUP RINGS .[3]

AUTHOR: JERSON ENRIQUE PÉREZ CARRILLO [4]

KEYWORDS: MODULES; JACOBSON RADICAL; ARTINIAN MODULES; ARTINIAN RINGS; SKEW GROUP RINGS.

DESCRIPTION: *Let $\mathcal{R}$ be a ring with identity, G a group and θ a homomorphism from G to $Aut(\mathcal{R})$, being $Aut(\mathcal{R})$ the group of automorphism of $\mathcal{R}$. With this objects we define skew group ring associated $\mathcal{R} *_\theta G$ and we prove the J. K. Park's Theorem, which says that the skew group ring $\mathcal{R} *_\theta G$ is artinian if and only if $\mathcal{R}$ is artinian and G is finite. For the proof the Connell's Theorem is very important, since the proof is based on the application of this repeatedly.*

In the first chapter we see the Zorn's lemma and we indicate because it is very useful, next we introduce the concept of module and their basics properties, since this concept is fundamental for the other chapters. In the second chapter we focus in any structural properties of the rings and modules, for instance the simplicity and semisimplicity in modules, this properties will allow us to study the modules more easily, also the primitives and semiprimitives rings, and finally the property that most interesting us, the descending chain condition or Artin's condition. In the third chapter introduce to the construction of the skew group rings, then we focus on proof the properties of those objects related to the property of being artinian, mainly two versions of the J. K. Park's Theorem with more hypothesis and using them we conclude with the demonstration of the J. K. Park's Theorem.

[3]Bachelor Thesis

[4]Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Dr. Héctor Edonis Pinedo Tapia

INTRODUCCIÓN

Los productos cruzados son otro lugar de encuentro para la teoría de anillos y grupos. Históricamente surgieron en el estudio de álgebras de división de dimensión finita y algebras simples centrales. Recientemente, están estrechamente relacionados con el estudio de álgebras de grupos infinitos, anillos de grupos graduados y la teoría de Galois de anillos no conmutativos.

Nosotros trataremos un tipo especial de producto cruzado, los anillos de grupos torcidos, los cuales son una generalización de los anillos de grupo. La definición de anillo de grupo está inspirada en el anillo de los cuaternios de Hamilton, esta definición aparece por primera vez en un escrito de Cayley. Más tarde el tema gana mucha importancia por si solo luego de la inclusión de preguntas relacionadas con anillos de grupos torcidos en la famosa lista de problemas de I. Kaplansky. Otro hecho importante para estimular esta área de estudio fue el trabajo de I. G. Conell[5], asociado a preguntas anillo-teóricas acerca de los anillos de grupos, entre estas preguntas se encuentra la siguiente:
¿Cuándo un anillo de grupo es artiniano? La cual fue resuelta en su mismo trabajo.

En el contexto de los anillos de grupos torcidos, esta pregunta fue planteada por J. W. Fisher en el artículo[6], y fue resuelta por J. K. Park en el artículo[7]. Nuestro trabajo consistirá en estudiar la solución propuesta por J. K. Park para este interesante problema.

[5]CONNELL, Ian G. On the group ring. Canad. J. Math, 1963, vol. 15, no 49, p. 650-685.

[6]FISHER, Joe W.; MONTGOMERY, Susan. Semiprime skew group rings. Journal of Algebra, 1978, vol. 52, no 1, p. 241-247.

[7]PARK, Jae Keol. Artinian skew group rings. Proceedings of the American Mathematical Society, 1979, vol. 75, no 1, p. 1-7.

Capítulo 1

PRELIMINARES

1.1 EL LEMA DE ZORN

El lema de Zorn es un principio matemático muy importante ya que este nos permite obtener resultados muy importantes que sin la validez de este no serían posibles, como por ejemplo la existencia de bases en cualquier espacio vectorial y la existencia de ideales maximales en anillos con 1.

Antes de enunciar el lema de Zorn necesitamos unas definiciones previas.

Definición 1.1.1. *Una relación $\preceq$ sobre un conjunto P se dice que es una* ***relación de orden*** *si se cumplen las tres siguientes propiedades*

1. *Reflexividad: Para todo $x \in P$, se tiene que $x \preceq x$.*
2. *Antisimetría: Dados $x, y \in P$, si se cumple que $x \preceq y$ y $y \preceq x$, entonces se tiene que $x = y$.*
3. *Transitividad: Dados $x, y, z \in P$, si se cumple que $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces se tiene que $x \preceq z$.*

Una relación de orden $\preceq$ sobre un conjunto P se denotará por el par $(P, \preceq)$ y diremos que P está parcialmente ordenado.

Definición 1.1.2. *Sea $(P, \preceq)$ un conjunto* ***parcialmente ordenado****, un subconjunto C de P se dice que está totalmente ordenado si dados cualesquiera $x, y \in C$ se tiene que $x \preceq y$ o $y \preceq x$.*

Definición 1.1.3. *Sea $(P, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado.*
Un elemento $s \in P$ es llamado ***cota superior*** *de C si $x \preceq s$, para todo $x \in C$. Un elemento $m \in P$ es llamado* ***maximal*** *si el único elemento $x \in P$ tal que $m \preceq x$ es $x = m$.*

Con estas definiciones ya podemos enunciar el lema de Zorn.

LEMA DE ZORN
Todo subconjunto parcialmente ordenado no vacío en el que todo subconjunto totalmente ordenado tiene una cota superior, contiene un elemento maximal.

Ahora veamos dos ejemplos de aplicación del lema de Zorn, los cuales usaremos mas adelante.

Proposición 1.1.1. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo con $1_{\mathcal{R}}$ y sea I ideal de $\mathcal{R}$. Entonces existe un ideal maximal de $\mathcal{R}$ que contiene a I.*

Demostración. Sea $A = \{J \subseteq \mathcal{R} \mid J$ es ideal de $\mathcal{R}$, $I \subseteq J$ y $J \neq \mathcal{R}\}$, A es un conjunto parcialmente ordenado con la relación de contenencia.

1. $A \neq \emptyset$, ya que $I \in A$.

2. Sea $F = \{I_j\}_{j \in J}$ una familia de elementos de A, tal que F es totalmente ordenado, veamos que F tiene una cota superior.

   Sea $S = \bigcup_{j \in J} I_j$, veamos que S es cota superior de F.
   Es claro que $0 \in S$. Sean $x, y \in S$ y $r \in \mathcal{R}$, entonces existen $i, j \in J$ tales que $x \in I_i$ y $-y \in I_j$, como F es totalmente ordenado, podemos decir sin perdida de generalidad que $I_i \subseteq I_j$, por lo tanto $x, -y \in I_j$, como I_j es ideal, entonces $x - ry \in I_j$, así tenemos que $x - ry \in S$. Con esto se tiene que S es ideal de $\mathcal{R}$, y como $1 \notin I_j$, para todo $j \in J$, entonces $1 \notin S$, es decir que $S \neq \mathcal{R}$. También se tiene que $I \subseteq S$.

En resumen tenemos que $S \in A$, y como $I_i \subseteq S$, para todo $i \in J$, tenemos que S es cota superior de F. Luego por el Lema de Zorn, A tiene un elemento maximal, el cual es un ideal maximal de $\mathcal{R}$.

□

Proposición 1.1.2. *Sea $\mathbb{K}$ un campo y sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Entonces existe $\mathcal{B} \subseteq V$ una base de V.*

Demostración. Consideremos a $S \subseteq V$ un conjunto linealmente independiente, y veamos que existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que contiene a S.
Para ello definamos $T = \{A \subseteq V \mid S \subseteq A \text{ y } A \text{ es linealmente independiente}\}$. Sea $F = \{A_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos de T, tal que F es totalmente ordenado y sea $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Veamos que A es cota superior de F.

Es claro que $A_i \subseteq A$, para todo $i \in I$, por lo tanto solo falta demostrar que $A \in T$. Como $A_i \subseteq S$, para todo $i \in I$, entonces $A \subseteq S$. Ahora falta ver que A es linealmente independiente. Si A no fuera linealmente independiente existiría $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq A$ el cual es linealmente dependiente, pero como $\mathcal{F}$ es totalmente ordenado existe $i_0 \in I$ tal que $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq A_{i_0}$, lo cual implicaria que A_{i_0} no es linealmente independiente pero esto es contradictorio ya que $A_{i_0} \in T$.
Tenemos que T satisface las hipótesis del lema de Zorn, concluyendo que T posee un elemento maximal $\mathcal{B}$. Para terminar veamos que $\mathcal{B}$ es una base de V. Como $\mathcal{B} \in T$ se tiene que $\mathcal{B}$ es linealmente independinte y $S \subseteq \mathcal{B}$. Falta ver que $V = Gen(\mathcal{B})$. Si $V \neq Gen(\mathcal{B})$, existe $v \in V$ tal que $v \notin Gen(\mathcal{B})$ y por lo tanto $\mathcal{B} \cup \{v\}$ es linealmente independiente y $S \subseteq \mathcal{B} \cup \{v\}$, entonces $\mathcal{B} \cup \{v\} \in T$, lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{B}$. □

1.2 MÓDULOS

El concepto de módulo es una generalización del de espacio vectorial, en el cual los escalares no se restringen a un campo sino que se permite que constituyan tan solo un anillo. El uso de los módulos fue usado por primera vez por la gran matemática Emmy Noether quien demostró el gran potencial de esta estructura.

Definición 1.2.1. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo. Un* ***$\mathcal{R}$-módulo a la izquierda*** *es un grupo abeliano $(M, +)$ junto con una operación*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} \times M & \to & M \\ (r, m) & \to & rm \end{array},$$

tal que para todo $r, s \in \mathcal{R}, x, y \in M$ se tiene:

- $(rs)x = r(sx)$.
- $(r + s)x = rx + sx$.
- $r(x + y) = rx + ry$.

Nota

- Si además $\mathcal{R}$ tiene elemento identidad $1_{\mathcal{R}}$, exigimos que para todo $x \in M$, $1_{\mathcal{R}}x = x$. En este caso decimos que M es un $\mathcal{R}$-módulo unitario.
- Un $\mathcal{R}$-módulo a la derecha se define de forma análoga, sólo que el anillo actúa por la derecha, es decir se tiene una multiplicación por escalar de la forma $M \times \mathcal{R} \to M$.
- De ahora en adelante no distingueremos entre $\mathcal{R}$-módulo a izquierda o a derecha, a menos que sea muy necesario, sino que cuando hablemos de $\mathcal{R}$-módulo se entetenderá que es un $\mathcal{R}$-módulo a izquierda.
- Cuando M se pueda ver como módulo sobre distintos anillos escribiremos ${}_{\mathcal{R}}M$ para evitar confusiones.

Ejemplo 1.2.1. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo, entonces podemos ver a $\mathcal{R}$ como un $\mathcal{R}$-módulo con el producto del anillo.*

Ejemplo 1.2.2. *Si $\mathbb{F}$ es un cuerpo, entonces un $\mathbb{F}$-módulo es lo mismo que un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.*

Ejemplo 1.2.3. *Sea G un grupo abeliano, entonces podemos ver a G como un $\mathbb{Z}$-módulo, definiendo la acción como sigue:*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \times G & \longrightarrow & G \\ (n, g) & \longmapsto & ng = \begin{cases} 0 & si\ n = 0 \\ g + g + ... + g & si\ n > 0 \\ -g - g - ... - g & si\ n < 0 \end{cases} \end{array}$$

Ejemplo 1.2.4. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo, el conjunto de matrices de orden n con entradas en $\mathcal{R}$ es un $\mathcal{R}$-módulo, con la suma usual de matrices y multiplicación dada por:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} \times M_n(R) & \longrightarrow & M_n(\mathcal{R}) \\ (r, (a_{ij})) & \longrightarrow & (ra_{ij}) \end{array}.$$

Dado un anillo $\mathcal{R}$ podemos definir su anillo opuesto que lo denotaremos por $\mathcal{R}^{op}$, es decir, el anillo definido sobre el mismo conjunto, usando la misma suma de $\mathcal{R}$ y con multiplicación definida por $a.b = ba$, donde ba denota la multiplicación de b y a en $\mathcal{R}$.

El anillo opuesto es importante ya que nos permitira definir módulos a derecha a partir de módulos a izquierda, obteniendo la siguiente proposición.

Proposición 1.2.1. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo y M un $\mathcal{R}$-módulo a izquierda. Entonces M es un $\mathcal{R}^{op}$-módulo a derecha.*

Definición 1.2.2. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo y M un $\mathcal{R}$-módulo. Un subconjunto N de M es llamado un **submódulo** de M, si N es un subgrupo de M y si para todo $n \in N$ y $r \in \mathcal{R}$, se tiene que $rn \in N$.*

Nota

- Los submódulos triviales de un módulo M son $\{0\}$ y M.
- Un submódulo no trivial de M es llamado submódulo propio de M.

- El módulo M es llamado simple si sus únicos submódulos son los triviales.

Ejemplo 1.2.5. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo, si consideramos a $\mathcal{R}$ como $\mathcal{R}$-módulo a izquierda, entonces sus submódulos son precisamente sus ideales a la izquierda.*

Ejemplo 1.2.6. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos a $M_n(\mathcal{R})$, las matrices de orden n sobre $\mathcal{R}$, como un $\mathcal{R}$-módulo. Si I es un ideal de $\mathcal{R}$ entonces $M_n(I)$ es un $\mathcal{R}$-submódulo de $M_n(\mathcal{R})$.*

Ejemplo 1.2.7. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo y M un $\mathcal{R}$-módulo. Si I es un ideal a izquierda de $\mathcal{R}$, entonces el conjunto*

$$IM = \left\{ \sum_{finita} a_i m_i \mid a_i \in I \text{ y } m_i \in M \right\}$$

es un submódulo de M.

En efecto, dados $r \in \mathcal{R}$ y $x = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i \in IM$, entonces $rx = r(\sum_{i=1}^{n} a_i m_i) = \sum_{i=1}^{n} (ra_i)m_i$, y ya que I es un ideal a izquierda de $\mathcal{R}$, se tiene que $ra_i \in I$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, con lo cual $rx \in IM$, de esta forma se tiene que IM es un $\mathcal{R}$-submodulo de M.

Definición 1.2.3. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo y M un $\mathcal{R}$-módulo.*

- *Se define el **anulador** de M, como $ann(M) = \{r \in \mathcal{R} \mid rm = 0, \text{ para todo } m \in M\}$.*
- *Se dice que M es un **módulo fiel** si $ann(M) = \{0\}$.*

Se puede verificar que el $ann(M)$ es un ideal bilateral de $\mathcal{R}$. Además si $I \leq \mathcal{R}$, podemos conisderar a M como un $\mathcal{R}/I$-módulo, definiendo el producto

$$(x + I)m = xm, \text{ para todo } x \in \mathcal{R} \text{ y } m \in M.$$

Notemos que con esta definición, los $\mathcal{R}/I$-submódulos de M coinciden con los $\mathcal{R}$-submódulos. En particular, se sigue que M es un $\mathcal{R}/ann(M)$-módulo fiel.

1.3 HOMOMORFISMOS DE MÓDULOS

De la misma forma que en los grupos y los anillos, se definen funciones entre módulos que respeten sus operaciones, estos serán los homomorfismos de módulos. Para estos también se cumplen los Teoremas de Isomorfismos análogos a los de grupos y anillos.

Definición 1.3.1. *Sean M un $\mathcal{R}$-módulo y N un submódulo de M. Entonces una función $f : M \longrightarrow N$ es un* ***homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos*** *si para todos $m, n \in M$ y $r \in \mathcal{R}$, se cumple*

- $f(m+n) = f(m) + f(n)$.
- $f(rn) = rf(n)$.

Ejemplo 1.3.1. *Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, entonces decir que $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal equivale a decir que T es un homomorfismo de $\mathbb{F}$-módulos.*

Ejemplo 1.3.2. *Sean G y H grupos abelianos, dado que todo grupo abeliano es un $\mathbb{Z}$-módulo, entonces decir que $f : G \longrightarrow H$ es un homomorfismo de grupos equivale a decir que f es un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos.*

Definición 1.3.2. *Sean M y N dos $\mathcal{R}$-módulos. Entonces un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos $f : M \longrightarrow N$ es llamado*

- *monomorfismo si f es inyectivo, o equivalentemente a que $ker(f) = \{0\}$.*
- *epimorfismo si f es sobreyectivo.*
- *isomorfismo si f es biyectivo, en este caso escribimos $M \cong N$ y se dice que M es isomorfo a N.*

1.4 MÓDULO COCIENTE

Sea N un submódulo del $\mathcal{R}$-módulo M. Como en el caso de los anillos, sobre el grupo cociente aditivo M/N podemos definir una multiplicación que dé a M/N estructura de

$\mathcal{R}$-módulo.

Definición 1.4.1. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo, M un $\mathcal{R}$-módulo y N un submódulo de M. En M defina la siguiente relación de equivalencia:*

$$m \sim n \text{ si y solo si } m - n \in N.$$

La clase de equivalencia de $m \in M$ es

$$\overline{m} = \{n \in M \mid m - n \in N\} = m + N.$$

De lo anterior podemos definir el módulo cociente $M/N = \{\overline{m} \mid m \in M\}$, que resulta ser un $\mathcal{R}$-módulo con la operación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} \times M/N & \longrightarrow & M/N \\ (r, \overline{m}) & \longrightarrow & \overline{rm} \end{array} .$$

Ejemplo 1.4.1. *Sea M un $\mathcal{R}$-módulo y N un submódulo de M. La función*

$$\begin{array}{rccc} \pi: & M & \longrightarrow & M/N \\ & m & \longmapsto & m + N \end{array}$$

es un epimorfismo de $\mathcal{R}$-módulos, llamado el epimorfismo canónico.

Dado que todo $\mathcal{R}$-módulo M es un grupo abeliano, es natural pensar que los Teoremas de Isomorfismo análogos para módulos sean válidos. La demostración de los mismos siguen las pruebas de los respectivos para grupos haciendo necesario demostrar que los homomorfismos involucrados cumplen la segunda condición en la Definición 1.4.1.

TEOREMAS DE ISOMORFISMO

1. Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos, entonces

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}: & M/ker(f) & \longrightarrow & Im(f) \\ & m + ker(f) & \longmapsto & f(m) \end{array}$$

es un isomorfismo, en particular, si f es un epimorfismo $M/ker(f) \cong N$.

2. Sea M un $\mathcal{R}$-módulo, N y L submódulos de M, entonces $N+L$ es submódulo de M y
$$(N+L)/N \cong L/(N \cap L).$$

3. Sea $L \subseteq N \subseteq M$ una cadena de R-submódulos. Entonces N/L es submódulo de M/L y
$$(M/L)/(N/L) \cong M/N.$$

1.5 PRODUCTOS Y SUMAS DIRECTAS DE MÓDULOS

Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de $\mathcal{R}$-módulos. Entonces el producto directo de esa familia es el conjunto
$$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid m_\lambda \in M_\lambda\}$$
el cual es un $\mathcal{R}$-módulo con adición dada por:

$$(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + (m'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (m_\lambda + m'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

y la multiplicación definida como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} \times \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda & \longrightarrow & \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \\ (r, (m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) & \longrightarrow & (rm_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \end{array} .$$

Ahora veamos lo que es la suma directa de una familia de $\mathcal{R}$-módulos.

Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de $\mathcal{R}$-módulos. La suma directa de esta familia, es el subconjunto de $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, dado por

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mid m_\lambda \neq 0_{M_\lambda}, \text{ para un número finito de } \lambda\}$$

Veamos que $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ es un $\mathcal{R}$-submódulo de $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.
Sean $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ y $r \in \mathcal{R}$, entonces definamos los siguientes conjuntos

$$A = \{\lambda \in \Lambda : m_\lambda \neq 0\},$$

$$B = \{\lambda \in \Lambda : n_\lambda \neq 0\},$$

$$C = \{\lambda \in \Lambda : m_\lambda + rn_\lambda \neq 0\}.$$

Sabemos que A y B son finitos, veamos que C es finito. En efecto, sea $\lambda \in \Lambda - (A \cup B)$, entonces $m_\lambda = n_\lambda = 0$, y por lo tanto $m_\lambda + rn_\lambda = 0$, es decir que $\lambda \notin C$. Con esto tenemos que $\Lambda - (A \cup B) \subseteq \Lambda - C$, y entonces $C \subseteq A \cup B$, luego como $A \cup B$ es finito se concluye que C es finito, esto significa que $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + r(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, lo que demuestra que $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ es un $\mathcal{R}$-submódulo de $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

Veamos el caso en que todos los elementos de una familia de submódulos están todos contenidos en un mismo módulo, a esta la llamaremos suma interna y su definición será un poco distinta.

Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de $\mathcal{R}$-submódulos de M. Entonces el conjunto

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \left\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda \mid m_\lambda \in M_\lambda, \text{ con } m_\lambda = 0 \text{ para casi todo } \lambda \in \Lambda \right\}$$

es un submódulo de M.

Decimos que $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ es directa, si para todo $\beta \in \Lambda$, se tiene que $M_\beta \cap \sum_{\beta\neq\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{0\}$. En este caso escribimos $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, y a cada M_λ, para todo $\lambda \in \Lambda$, se le llamará sumando directo de M.

Ejemplo 1.5.1. *Los únicos sumandos directos de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo son $\{0\}$ y $\mathbb{Z}$. En efecto si $m\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$ son submodulos de $\mathbb{Z}$, tales que $\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \oplus n\mathbb{Z}$, entonces como $mn \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = \{0\}$, se tiene que $m = 0$ o $n = 0$.*

Ejemplo 1.5.2. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo y e un idempotente de $\mathcal{R}$, esto es $e^2 = e$, entonces $\mathcal{R} = e\mathcal{R} \oplus (1 - e)\mathcal{R}$, es decir, $e\mathcal{R}$ y $(1 - e)\mathcal{R}$ son sumandos directos de $\mathcal{R}$.*

Proposición 1.5.1. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo, y considemorolo como un $\mathcal{R}$-módulo. Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de ideales de $\mathcal{R}$. Entonces son equivalentes:*

1. $\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ *es directa.*

2. *Si* $\sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda = 0$*, con* $m_\lambda \in M_\lambda$*, entonces* $m_\lambda = 0$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$*.*

3. *Si* $\sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} m'_\lambda$*, con* $m_\lambda, m'_\lambda \in M_\lambda$*, entonces* $m_\lambda = m'_\lambda$*, para todo* $\lambda \in \Lambda$*.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Como $\sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda = 0$, fijando $\lambda_0 \in \Lambda$, tenemos que $m_{\lambda_0} = \sum_{\lambda\neq\lambda_0}(-m_\lambda)$, entonces $m_{\lambda_0} \in M_{\lambda_0} \cap \sum_{\lambda\neq\lambda_0} M_\lambda$, y ya que la suma es directa entonces $m_{\lambda_0} = 0$.

2. $\Rightarrow$ 3. Si $\sum_{\lambda\in\Lambda} m_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} m'_\lambda$, con $m_\lambda, m'_\lambda \in M_\lambda$, entonces $\sum_{\lambda\in\Lambda}(m_\lambda - m'_\lambda) = 0$, con $m_\lambda - m'_\lambda \in M_\lambda$, luego por 2) se tiene que $m_\lambda = m'_\lambda$.

3. $\Rightarrow$ 1. Sea $m \in M_\lambda \cap \sum_{k\neq\lambda} M_k$, como $m \in \sum_{k\neq\lambda} M_k$, se tiene que $m = \sum_{k\neq\lambda} m_k$, con $m_k \in M_k$, también $m = \sum_{j\in\Lambda} m'_j$, con $m'_j = m$ si $j = \lambda$ y $m'_j = 0$ si $j \neq \lambda$. Por lo tanto $m + \sum_{j\neq\Lambda} m'_j = 0 + \sum_{k\neq\lambda} m_k$, luego por 3. se tiene que $m = 0$.

□

Proposición 1.5.2. *Sea* $\mathcal{R}$ *un anillo con* $1_\mathcal{R}$*, el cual consideraremos como un* $\mathcal{R}$*-módulo. Sea* $\{A_i\}_{i=1}^s$ *una familia de ideales a izquierda de* $\mathcal{R}$*. Si* $A_iA_j = \{0\}$*, con* $i \neq j$*, y* $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^s A_i$*, entonces* $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^s A_i$*.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{i\in I} a_i = 0$, para $a_i \in A_i$. Entonces dado $x \in A_j$, se tiene que $x\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} xa_i = 0$, y como $xa_i \in A_jA_i = \{0\}$, para $i \neq j$, por lo tanto $xa_j = 0$, para todo $x \in A_j$. Como $1_\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ se tiene que $1_\mathcal{R} = \sum_{i=1}^s e_i$, por lo tanto $a_j = a_j 1_\mathcal{R} = \sum_{i=1}^s a_j e_i = 0$, luego por la Proposición 1.5.1 se tiene que $\sum_{i\in I} A_i$ es directa.

□

Capítulo 2

PROPIEDADES ESTRUCTURALES DE LOS ANILLOS Y LOS MÓDULOS

2.1 EL RADICAL DE JACOBSON

Definición 2.1.1. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo. El* ***radical de Jacobson*** *de $\mathcal{R}$, denotado por $J(\mathcal{R})$, es la intersección de todos los ideales maximales a izquierda de $\mathcal{R}$.*

Ejemplo 2.1.1. *Tomemos a $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$, entonces $J(\mathbb{Z}) = \{0\}$. Esto es por que todos los ideales maximales de $\mathbb{Z}$ son de la forma $p\mathbb{Z}$, con p siendo primo, por lo tanto si $n \in J(\mathcal{R})$, se tiene que $p|n$, para todo p primo, lo cual solo sucede si $n = 0$.*

Ejemplo 2.1.2. *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $J(\mathbb{Z}_{2^n}) = \overline{2}\mathbb{Z}_{2^n}$. Esto es porque el único ideal maximal de $\mathbb{Z}_{2^n}$ es $\overline{2}\mathbb{Z}_{2^n}$.*

Proposición 2.1.1. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo con $1_{\mathcal{R}}$ y $r \in \mathcal{R}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$r \in J(\mathcal{R})$.*
2. *$1_{\mathcal{R}} - ar$ tiene inverso para todo $a \in \mathcal{R}$.*
3. *$rM = \{0\}$ para todo $\mathcal{R}$-módulo M a izquierda simple.*

Demostración. Veamos que 1. $\Rightarrow$ 2. Supongamos que $r \in J(\mathcal{R})$ y $a \in \mathcal{R}$. Entonces $ar \in M$, para todo ideal maximal a izquierda M de $\mathcal{R}$, y como $1_{\mathcal{R}} \notin M$, se tiene que $1_{\mathcal{R}} - ar \notin M$ para todo ideal maximal a izquierda, con lo cual se concluye que $\mathcal{R}(1_{\mathcal{R}} - ar) \not\subset M$, para todo ideal maximal a izquierda de $\mathcal{R}$, entonces por Proposición 1.1.2 se tiene que $\mathcal{R}(1_{\mathcal{R}} - ar) = \mathcal{R}$, lo que significa que $1_{\mathcal{R}} - ar$ es invertible.

Lo siguiente es ver 2. $\Rightarrow$ 3. Supongamos ahora que $1_{\mathcal{R}} - ar$ es invertible para todo $a \in \mathcal{R}$. Sea M un $\mathcal{R}$-módulo a izquierda simple. Supongamos que $rm \neq 0$ para algún $m \in M$. Consideremos el submodulo $\mathcal{R}(rm)$, como M es simple, entonces $\mathcal{R}(rm) = \{0\}$ o $\mathcal{R}(rm) = M$, pero como $0 \neq rm \in \mathcal{R}(rm)$, entonces $\mathcal{R}(rm) = M$, y por lo tanto $m = a(rm)$ para algún $a \in \mathcal{R}$, y entonces $(1_{\mathcal{R}} - ar)m = 0$, lo cual es contradictorio ya que $1_{\mathcal{R}} - ar$ es invertible. De lo anterior se sigue que $rM = \{0\}$.

Para terminar, veamos que 3. $\Rightarrow$ 1. Supongamos que $rM = \{0\}$, para todo $\mathcal{R}$-módulo a izquierda simple M. Sea L un ideal maximal a izquierda de $\mathcal{R}$. Entonces, $\mathcal{R}/L$ es un $\mathcal{R}$-módulo a izquierda simple. Por lo tanto $r(\mathcal{R}/L) = \{0\}$, como $\mathcal{R}$ tiene $1_{\mathcal{R}}$, entonces $r + L = L$, esto significa que $r \in L$. Con lo anterior se deduce que $r \in J(\mathcal{R})$.

□

Usando la Proposición 2.1.1 podemos dar otro ejemplo de cálculo del radical de Jacobson de otros anillos.

Ejemplo 2.1.3. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, entonces $J(\mathbb{K}[x]) = \{0\}$. Supongamos que existe $p(x) \neq 0$ tal que $p(x) \in J(\mathbb{K}[x])$, entonces por la Proposición 2.1.1 se tiene que $1 - xp(x)$ es invertible, lo cual es contradictorio ya que su grado es ≥ 1.*

Proposición 2.1.2. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo tal que $J(\mathcal{R}) = \{0\}$. Entonces todo ideal minimal a izquierda es un sumando directo de $\mathcal{R}$ como $\mathcal{R}$-módulo a izquierda.*

Demostración. Sea $I \neq \{0\}$ un ideal minimal a izquierda. Como $J(\mathcal{R}) = \{0\}$, entonces debe existir M ideal maximal tal que $I \not\subseteq M$. Como $I \cap M \subseteq I$, entonces $I \cap M = I$ o $I \cap M = \{0\}$, pero $I \not\subseteq M$, por lo tanto $I \cap M = \{0\}$.
Ahora como $M \subseteq I + M$, entonces $M = I + M$ o $I + M = \mathcal{R}$, pero $I \not\subseteq M$, por lo tanto

$I + M = \mathcal{R}$, y así $\mathcal{R} = I \oplus M$.

□

El siguiente resultado muestra que existe una correspondencia entre los ideales de $\mathcal{R}/I$ y los ideales de $\mathcal{R}$ que comtienen a I.

Proposición 2.1.3. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo e I ideal de $\mathcal{R}$. Entonces*

1. *Si M es ideal de $\mathcal{R}$ y $I \subseteq M$, entonces M/I es ideal de $\mathcal{R}/I$.*
2. *Si M' es un ideal de $\mathcal{R}/I$, entonces existe M ideal de $\mathcal{R}$ tal que $I \subseteq M$ y $M' = M/I$.*

Corolario 2.1.1. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo e I ideal de $\mathcal{R}$. Entonces*

1. *Si M es ideal maximal de $\mathcal{R}$ y $I \subseteq M$, entonces M/I es ideal maximal de $\mathcal{R}/I$.*
2. *Si M' es un ideal maximal de $\mathcal{R}/I$, entonces existe M ideal maximal de $\mathcal{R}$ tal que $I \subseteq M$ y $M' = M/I$.*

Proposición 2.1.4. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo y $\phi : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ un isomorfismo de anillos, entonces ϕ deja fijo a $J(\mathcal{R})$, es decir que $\phi(J(\mathcal{R})) = J(\mathcal{R})$.*

Demostración. Sea $y \in \phi(J(\mathcal{R}))$, entonces existe $x \in J(\mathcal{R})$ tal que $y = \phi(x)$. Si M es un ideal maximal a izquierda de $\mathcal{R}$, entonces por Corolario 2.1.1, se tiene que $\phi^{-1}(M)$ es un ideal maximal a izquierda, por lo tanto $x \in \phi^{-1}(M)$, es decir que $y = \phi(x) \in M$, por lo tanto $y \in J(\mathcal{R})$. Lo que demuestra que $\phi(J(\mathcal{R})) \subseteq J(\mathcal{R})$.

Por otro lado, como ϕ^{-1} es también un isomorfismo de anillos, entonces por el resultado anterior, se tiene que $\phi^{-1}(J(\mathcal{R})) \subseteq J(\mathcal{R})$, y aplicando ϕ, tenemos que $J(\mathcal{R}) \subseteq \phi(J(R))$.

□

2.2 ANILLOS PRIMITIVOS Y SEMIPRIMITIVOS

Definición 2.2.1. *Un anillo $\mathcal{R}$ es **primitivo** si existe un $\mathcal{R}$-módulo M que es fiel y simple.*

Ejemplo 2.2.1. *Todo anillo simple con* 1 *es primitivo.*

Ejemplo 2.2.2. *Sea* $\mathcal{R}$ *un anillo y* M *un* $\mathcal{R}$*-módulo a izquierda simple, entonces* $\mathcal{R}/ann(M)$ *es un anillo a izquierda primitivo.*

En efecto, consideremos a M *como un* $\mathcal{R}/ann(M)$*-módulo con producto por escalar dado por*

$$\begin{array}{rccc} * : & \mathcal{R}/ann(M) \times M & \longrightarrow & M \\ & (r + ann(M), m) & \longrightarrow & rm \end{array}.$$

Primero veamos que esta operación está bien definida.
Supongamos que $r + ann(M) = s + ann(M)$*, entonces* $r - s \in ann(M)$*, por lo tanto* $(r - s)m = 0$*, para todo* $m \in M$*, y así* $rm = sm$*, para todo* $m \in M$*. Con lo cual queda demostrado que la operación está bien definida.*
Ahora veamos que M *es fiel como* $\mathcal{R}/ann(M)$*-módulo, es decir que* $ann_{(\mathcal{R}/ann(M)}M)$=$\{0\}$*.*
Sea $r + ann(M) \in ann(\mathcal{R}/ann(M))$*, entonces* $(r + ann(M)) * m = rm = 0$*, para todo* $m \in M$*, por lo tanto* $r \in ann(M)$*, y así* $r + ann(M) = 0$*.*

Por como está definida la operación se tiene que los submodulos de M *como* $\mathcal{R}/ann(M)$*-módulo son exactamente los submódulos de* M *como* $\mathcal{R}$*-módulo, y dado* M *es simple como* $\mathcal{R}$*-módulo, entonces* M *es simple como* $\mathcal{R}/ann(M)$*-módulo, es decir,* $\mathcal{R}/ann(M)$ *es primitivo.*

Ejemplo 2.2.3. *Sea* $\mathbb{K}$ *un campo, entonces el anillo de endomorfismos* $End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{K})$ *es un anillo a izquierda primitivo .*

En efecto, considere a $\mathbb{K}$ *como un* $End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{K})$*-módulo con la suma en* $\mathbb{K}$ *y multiplicación por escalar dada por*

$$\begin{array}{rccccc} End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{K}) & \times & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\ f & , & k \ ) & \longrightarrow & f(k) \end{array}.$$

Veamos que $\mathbb{K}$ *es fiel y simple como* $End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{K})$*-módulo. Sea* $f \in ann(_{End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{K})}\mathbb{K})$*, esto significa que* $f(k) = 0$*, para todo* $k \in \mathbb{K}$*, por lo tanto* $ann(_{End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{K})}\mathbb{K}) = \{0\}$*. Ahora sea* N *un submódulo de* $\mathbb{K}$ *como* $End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{K})$*-módulo, veamos que* N *es un ideal de* $\mathbb{K}$*. Sea* $n \in N$ *y* $k \in \mathbb{K}$*, considere el siguiente homomomorfismo de grupos*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longrightarrow & tk \end{array}.$$

Como $f \in End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{K})$ y $k \in \mathbb{K}$, entonces por ser N un submódulo de $\mathbb{K}$, se tiene que $f(n) = nk \in N$. Por lo tanto N es ideal de $\mathbb{K}$, y como $\mathbb{K}$ es campo, se tiene que $N = \{0\}$ o $N = \mathbb{K}$. Demostrando que $\mathbb{K}$ como $End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{K})$-módulo es simple.

Definición 2.2.2. *Un anillo $\mathcal{R}$ es **primo**, si dados I y J ideales de $\mathcal{R}$ tales que $IJ = \{0\}$, entonces $I = \{0\}$ o $J = \{0\}$.*

Proposición 2.2.1. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo. Si $\mathcal{R}$ es primitivo, entonces $\mathcal{R}$ es primo.*

Demostración. Como $\mathcal{R}$ es primitivo, existe un $\mathcal{R}$-módulo M, tal que M es fiel y simple. Sean I y J ideales de $\mathcal{R}$, tales que $IJ = \{0\}$, veamos que $I = \{0\}$ o $J = \{0\}$. Consideremos el conjunto JM, el cual es un submódulo de M, pero como M es simple entonces $JM = \{0\}$ o $JM = M$.
Si $JM = \{0\}$ entonces $J \subseteq ann(M) = \{0\}$ ya que M es fiel, entonces $J = \{0\}$.
Ahora si $JM = M$, entonces $IM = I(JM) = (IJ)M = \{0\}M = \{0\}$, y se tiene que $I \subseteq ann(M) = \{0\}$, con lo cual concluimos que $I = \{0\}$.

□

Definición 2.2.3. *Un anillo $\mathcal{R}$ es **semiprimitivo** si su radical de Jacobson es el ideal cero.*

Ejemplo 2.2.4. *Todo anillo con $1_{\mathcal{R}}$ que sea semisimple es semiprimitivo.*

Ejemplo 2.2.5. *Dado un cuerpo $\mathbb{K}$ se tiene que $\mathbb{K}[x]$ es semiprimitivo. Esto se debe al Ejemplo 2.1.3.*

Ejemplo 2.2.6. *El anillo $\mathbb{Z}$ es semiprimitivo, esto es porque sus ideales maximales son de la forma $p\mathbb{Z}$, con p primo, entonces $J(\mathbb{Z}) = \bigcap_{p\ primo} p\mathbb{Z}$, lo cual implica que $J(\mathbb{Z}) = \{0\}$.*

Proposición 2.2.2. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo con $1_{\mathcal{R}}$. Si $\mathcal{R}$ es primitivo, entonces $\mathcal{R}$ es semiprimitivo.*

Demostración. Como $\mathcal{R}$ es primitivo, entonces existe un $\mathcal{R}$-módulo N tal que N es fiel y simple. Ya que N es fiel, entonces $ann(N) = \{0\}$, y por la Proposición 2.1.1, se tiene que $J(\mathcal{R}) = \bigcap_{M simple} ann(M) = \{0\}$, por lo tanto $\mathcal{R}$ es semiprimitivo.

□

Proposición 2.2.3. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo. Entonces $\mathcal{R}/J(\mathcal{R})$ es semiprimitivo.*

Demostración. Veamos que $J(\mathcal{R}/J(\mathcal{R})) = \{0\}$. Sea $x \in J(\mathcal{R}/J(\mathcal{R}))$, esto significa que $x \in M'$, para todo M' ideal maximal de $\mathcal{R}/J(\mathcal{R})$, como $x = m + J(\mathcal{R})$ con $m \in \mathcal{R}$, por el Corolario 2.1.1, se tiene que $m \in M$, para todo M ideal maximal de $\mathcal{R}$, es decir que $m \in J(\mathcal{R})$, con lo cual tenemos que $x = 0$.
En conclusión tenemos que $J(\mathcal{R}/J(\mathcal{R})) = \{0\}$, lo que significa que $\mathcal{R}/J(\mathcal{R})$ es semiprimitivo.

□

2.3 MÓDULOS Y ANILLOS SEMISIMPLES

Definición 2.3.1. *Un $\mathcal{R}$-módulo M es **semisimple** si todo submódulo de M es un sumando directo.*

Ejemplo 2.3.1. *Todo espacio vectorial es semisimple. En efecto, dado V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, considere a $\mathcal{B}$ una base de V, entonces $V = \bigoplus_{b\in\mathcal{B}}\langle b\rangle$, donde $\langle b\rangle = \{kb \ : \ k \in \mathbb{K}\}$.*

Proposición 2.3.1. *Sea $N \neq \{0\}$ un submódulo de un módulo semisimple M. Entonces N es semisimple y este contiene un submódulo simple.*

Demostración. Primero veamos que N es semisimple. Sea S un submódulo de N. Entonces S es también un submódulo de M, por lo tanto existe S' submódulo de M tal que $M = S \oplus S'$. Ahora mostremos que $N = S \oplus (S' \cap N)$. En efecto, es claro que $S \cap (S' \cap N) \subset S \cap S' = \{0\}$. Por otro lado, dado $n \in N$, entonces $n = x + y$ con $x \in S$, $y \in S'$. Como $y = n - x \in N$, entonces $y \in N \cap S'$, con esto tenemos que $n \in S + (N \cap S')$, como queriamos.

Ahora veamos que N contiene un submódulo simple. Sea $x \in N$, $x \neq 0$, y consideremos la familia de submódulos de N que no contienen a x, $\mathcal{F} = \{L \leq N : x \notin L\}$, ordenada

por la inclusión. Esta familia es no vacía, ya que $\{0\} \in \mathcal{F}$. Ahora bien dada cualquier cadena $C \subseteq \mathcal{F}$, el elemento $\bigcup_{A \in C} A$ es una cota superior de C y así del Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal N_1. Dado que N es semisimple existe un submódulo N_2 tal que $N = N_1 \oplus N_2$. Veamos que N_2 es simple.
Si N_2 no es simple, este contiene un submódulo propio W y así existe W' tal que $N_2 = W \oplus W'$. Podemos notar que $N = N_1 \oplus W \oplus W'$ y por lo tanto $N_1 = (N_1 + W) \cap (N_1 + W')$. Como $x \notin N_1$, entonces $x \notin N_1 + W$ o $x \notin N_1 + W'$, lo que contradice la maximalidad de N_1.

□

Teorema 2.3.1. *Sea M un $\mathcal{R}$-módulo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *M es semisimple.*
2. *M es la suma directa de submódulos simples.*
3. *M es la suma (no necesariamente directa) de submódulos simples.*

Demostración. 1.⇒2. Sea $L = \{N \subseteq M \mid N \text{ es un submódulo simple}\}$, y a partir de este definamos $\mathcal{F} = \{W \subseteq M \mid W = \bigoplus_{N \in J} N,\ J \subseteq L\}$. Por la Proposición 2.3.1 se tiene que $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
Podemos definir en $\mathcal{F}$ una relación de orden de la siguiente manera:

Dados $\bigoplus_{N \in I} N$, $\bigoplus_{N \in J} N \in \mathcal{F}$, decimos que $\bigoplus_{N \in I} N \prec \bigoplus_{N \in J} N$, si y solo si $I \subset J$.

Es fácil verificar que $(\mathcal{F}, \prec)$ satisface las condiciones del Lema de Zorn, por lo tanto existe un elemento maximal M_0 en $\mathcal{F}$, el cual puede ser escrito en la forma $M_0 = \bigoplus_{N \in I} N$, con N simple. Veamos que $M_0 = M$. Supongamos que $M_0 \neq M$, por hipotesis, existe un submódulo N de M tal que $M = M_0 \oplus N$. Por la Proposición 2.3.1, N contiene un submódulo simple S. Pero entonces $M_0 \subset M_0 \oplus S$, contradiciendo la maximalidad de M_0.

2.⇒3. Es evidente.

3.⇒1. Supongamos que $M = \sum_{i \in I} M_i$, donde cada M_i, $i \in I$, es simple. Sea N un submódulo propio de M. Veamos que N es un sumando directo. Si $N = M_i$ para algún

$i \in I$, ya tendríamos lo pedido. Entonces supongamos que $N \neq M_i$, para todo $i \in I$. Consideremos la familia:

$$\mathcal{J} = \left\{ \sum_{i \in J} M_i \mid J \subset I, \ \left(\sum_{i \in J} M_i \right) \cap N = \{0\} \right\} .$$

Como M_i es simple, si se tiene que $N \cap M_i \neq \{0\}$ entonces $M_i \subset N$. Dado que $N \neq M$, debe existir un submódulo M_i tal que $N \cap M_i = \{0\}$ y así $\mathcal{J}$ es no vacío. Se puede comprobar que $\mathcal{J}$ con la inclusión satisface las hipotesis del Lema de Zorn, por lo tanto existe un elemento maximal M_0 en $\mathcal{J}$, visto como $M_0 = \sum_{i \in J_0} M_i$. Dado que $(\sum_{i \in J_0} M_i) \cap N = \{0\}$, solo falta demostrar que $M = M_0 + N$.

Si para todo $i \in I$ se tiene que $M_i \subset M_0 + N$, entonces $M = \sum_{i \in I} M_i \subset M_0 + N$, y por lo tanto $M = M_0 + N$, que es lo que necesitamos.

Supongamos, por contradicción, que existe un índice i_0 tal que $M_{i_0} \not\subset M_0 + N$, Como M_{i_0} es simple, se tiene que $M_{i_0} \cap (M_0 + N) = \{0\}$. Entonces $(M_{i_0} \cap M) + N = \{0\}$, lo cual significa que $(M_{i_0} \cap M) \in \mathcal{J}$, contradiciendo la maximalidad de M_{i_0}.

□

Definición 2.3.2. *Un anillo $\mathcal{R}$ es semisimple si $\mathcal{R}$ como $\mathcal{R}$-módulo es semisimple.*

Proposición 2.3.2. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo y $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de $\mathcal{R}$-módulos semisimples, entonces $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ es un $\mathcal{R}$-módulo semisimple.*

Demostración. Como cada M_i es semisimple entonces $M_i = \bigoplus_{k \in J_i} N_{ik}$, donde N_{ik} es un $\mathcal{R}$-submódulo simple de M_i, para todo $k \in J_i$. Ahora definamos para cada $i \in I$ y cada $k \in J_i$ el conjunto

$$L_{ik} = \{(m_j)_{j \in I} \mid m_i \in M_i \text{ y } m_j = 0 \text{ si } j \neq i\} .$$

Es claro que $L_{ik} \cong N_{ik}$, y por lo tanto L_{ik} es un $\mathcal{R}$-submódulo simple de M. También se puede ver que $M = \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{k \in J_i} L_{ik}$, es decir que M es la suma directa de $\mathcal{R}$-submódulos simples, y así queda demostrado que M es semisimple.

□

Proposición 2.3.3. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo, M y N dos $\mathcal{R}$-módulos, y $f : M \longrightarrow N$ un epimorfismo de $\mathcal{R}$-módulos. Si M es semisimple, entonces N es semisimple.*

Demostración. Sea L un submódulo de N, veamos que L es un sumando directo de N. Consideremos el submódulo $f^{-1}(L)$ de M, como M es semisimple, existe T submódulo de M tal que $M = f^{-1}(L) \oplus T$. Ahora veamos que $N = L \oplus f(T)$. Primero verifiquemos que $N = L + f(T)$. Sea $n \in N$, como f es sobreyectiva, existe $m \in M$ tal que $f(m) = n$, entonces $m = a + b$, con $a \in f^{-1}(L)$ y $b \in T$, como f es un homomorfismo, se tiene que $n = f(m) = f(a) + f(b)$, y como $f(a) \in L$ y $f(b) \in f(T)$, se tiene que $n \in L + f(T)$, y así tenemos que $N = L + f(T)$. Ahora falta ver que $L \cap f(T) = \{0\}$. Sea $x \in L \cap f(T)$, como $x \in f(T)$, existe $t \in T$ tal que $x = f(t)$, también como $x \in L$, se tiene que $t \in f^{-1}(L)$, por lo tanto $t \in f^{-1}(L) \cap T = \{0\}$, es decir que $t = 0$, y entonces $x = f(t) = f(0) = 0$.
□

Teorema 2.3.2. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. *Todo $\mathcal{R}$-módulo es semisimple a izquierda.*
2. *$\mathcal{R}$ es semisimple a izquierda.*
3. *$\mathcal{R}$ es la suma directa de ideales minimales a izquierda.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Como todo $\mathcal{R}$-módulo es semisimple a izquierda en especial viendo a $\mathcal{R}$ como $\mathcal{R}$-módulo se tiene que $\mathcal{R}$ es semisimple a izquierda.

2. $\Rightarrow$ 3. Como $\mathcal{R}$ como $\mathcal{R}$-módulo es semisimple entonces por 1. $\Rightarrow$ 2. del Teorema 2.3.1, se tiene que $\mathcal{R}$ es suma directa de $\mathcal{R}$-submódulos simples de $\mathcal{R}$ los cuales son ideales minimales de $\mathcal{R}$.

3. $\Rightarrow$ 1. Sea M un $\mathcal{R}$-módulo, y definamos $F = \bigoplus_{m \in M} \mathcal{R}m$ (suma directa externa), como $\mathcal{R}m \cong \mathcal{R}$, para todo $m \in M$, como $\mathcal{R}$-módulos, se tiene que $\mathcal{R}m$ es semisimple, para todo $m \in M$, y por la por la Proposición 2.3.2 se puede concluir que F es semisimple. Ahora definamos

$$\begin{array}{rccc} \phi: & F & \longrightarrow & M \\ & (r_m m)_{m \in M} & \longrightarrow & \sum_{m \in M} r_m m \end{array},$$

ϕ es un epimorfismo de $\mathcal{R}$-módulos, y como F es semisimple por Proposición la 2.3.3 se tiene que M es semisimple.

□

Proposición 2.3.4. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo con $1_{\mathcal{R}}$. Entonces, $\mathcal{R}$ es semisimple si y solo si $\mathcal{R}$ es suma directa de un número finito de ideales minimales a izquierda.*

Demostración. Por el Teorema 2.3.2, se tiene que $\mathcal{R}$ es suma directa de ideales minimales a izquierda. Entonces $\mathcal{R} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{R}_i$, siendo $\mathcal{R}_i$ ideal minimal a izquierda de $\mathcal{R}$, para todo $i \in I$.
Para completar la prueba solo falta ver que existen un número finito de índices $\{i_1, ..., i_n\} \subseteq I$, tales que $\mathcal{R} = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{R}_{i_k}$.

Como $\mathcal{R}$ tiene $1_{\mathcal{R}}$, entonces $1_{\mathcal{R}} \in \bigoplus_{i\in I} \mathcal{R}_i$, por lo tanto existen $\{i_1, ..., i_n\} \subseteq I$ y $r_{i_1} \in \mathcal{R}_{i_1}, ..., r_{i_n} \in \mathcal{R}_{i_n}$, tales que $1_{\mathcal{R}} = \sum_{k=1}^{n} r_{i_k}$ entonces dado $r \in \mathcal{R}$, se tiene que

$$r = r1_{\mathcal{R}} = r\sum_{k=1}^{n} r_{i_k} = \sum_{k=1}^{n} rr_{i_k}$$

y ya que cada $\mathcal{R}_{i_k}$ es un ideal a izquierda, entonces $rr_{i_k} \in \mathcal{R}_{i_k}$, y por lo tanto $r \in \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{R}_{i_k}$, es decir que $\mathcal{R} = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathcal{R}_{i_k}$.

□

Proposición 2.3.5. *Sea $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^{s} A_i$ la descomposición de un anillo semisimple como suma directa de ideales simples. Entonces*

1. *Si I es un ideal bilateral de $\mathcal{R}$, entonces este puede ser escrito de la forma $I = \bigoplus_{k=1}^{t} A_{i_k}$, con $1 \leq i_1 < ... < i_t \leq s$.*
2. *Si $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^{r} B_i$ es otra descomposición de $\mathcal{R}$ en suma directa de ideales simples, entonces $s = r$, y después de un reordenamiento de los índices, $A_i = B_i$ para todo $i \in \{1, ..., r\}$.*

Demostración. 1. Sea I un ideal de $\mathcal{R}$, entonces como $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^{s} A_i$, se tiene que

$$I = \bigoplus_{i=1}^{s} (A_i \cap I) \ .$$

En efecto, dado $x \in I$, como $\mathcal{R}$ tiene $1_{\mathcal{R}}$, entonces $1_{\mathcal{R}} = a_1 + \cdots + a_s$, con $a_i \in A_i$, para todo $i \in \{1, ..., s\}$, por lo tanto $x = x1_{\mathcal{R}} = xa_1 + \cdots + xa_s$, como I es un ideal bilateral, entonces $xa_i \in A_i \cap I$, y así $x \in \bigoplus_{i=1}^{s} (A_i \cap I)$.

Por otro lado, $A_i \cap I$ es ideal de $\mathcal{R}$ ya que I y A_i son ideales, también como $A_i \cap I \subseteq A_i$ y A_i es un ideal minimal, se tiene que $A_i \cap I = \{0\}$ o $A_i \cap I = A_i$ entonces considere $1 \leq i_1 < ... < i_t \leq s$ los índices tales que $A_i \cap I = A_i$, por lo tanto

$$I = \bigoplus_{k=1}^{t} A_{i_k} \ .$$

2. Supongamos que $s \leq r$. Por 1., cada B_i por ser ideal puede ser escrito de esta forma

$$B_i = \bigoplus_{j=1}^{n_i} A_{t_{ij}} \ ,$$

con $n_i < s$ y $1 \leq t_{i1} < ... < t_{in_i} \leq s$, para todo $i \in \{1, ..., r\}$.

Como la suma es directa, entonces $B_i \cap B_j = \{0\}$, para todo $i \neq j$, es decir que

$$\left(\bigoplus_{k=1}^{n_i} A_{t_{ik}}\right) \cap \left(\bigoplus_{k=1}^{n_j} A_{t_{jk}}\right) = \{0\}$$

y dado que $A_i \neq \{0\}$ por ser simple, se tiene que para todo $p \in \{1, ..., n_i\}$ y $k \in \{1, ..., n_j\}$, $A_{t_{ip}} \neq A_{t_{jk}}$.
Con lo anterior se deduce que $n_1 + \cdots + n_s \leq r$, y como $n_i \geq 1$, para todo $i \in \{1, ..., s\}$, entonces $s \leq n_1 + \cdots + n_s$ y por lo tanto $s \leq r$, con lo cual $r = s$.

Ahora, ya que $r = s$, se debe tener que $n_i = 1$, para todo $i \in \{1, ..., s\}$, lo que implica que para todo $i \in \{1, ..., s\}$, existe $j \in \{1, ..., r\}$, tal que $B_i = A_j$.

□

Proposición 2.3.6. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo con $1_\mathcal{R}$. Entonces, $\mathcal{R}$ es semisimple a izquierda si y solo si todo ideal a izquierda de $\mathcal{R}$ es de la forma $L = \mathcal{R}e$, donde $e \in \mathcal{R}$ es idempotente.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea L un ideal a izquierda de $\mathcal{R}$. Entonces como $\mathcal{R}$ es semisimple, existe L' ideal a izquierda de $\mathcal{R}$ tal que $\mathcal{R} = L \oplus L'$. Como $\mathcal{R}$ tiene $1_\mathcal{R}$, entonces $1_\mathcal{R} = x + y$, con $x \in L$ y $y \in L'$. Entonces $x = x1_\mathcal{R} = x^2 + xy$, luego $xy = x - x^2 \in L$, y como L' es ideal a izquierda de $\mathcal{R}$, entonces $xy \in L'$, por lo tanto $x - x^2 \in L \cap L'$, y ya que la suma es directa, entonces $x - x^2 = 0$, es decir que $x = x^2$ es idempotente. Ahora veamos que $\mathcal{R} = Lx$. Es claro que $Lx \subseteq \mathcal{R}$. Sea $a \in \mathcal{R}$, entonces $a = a1_\mathcal{R} = ax + ay$, luego $ay = a - ax \in L$, y ya que L' es ideal a izquierda de $\mathcal{R}$, $ay \in \mathcal{R}$, por lo tanto

$a - ax \in L \cap L' = \{0\}$, y así $a = ax \in Lx$.

$\Leftarrow$) Sea L un ideal a izquierda de $\mathcal{R}$. Veamos que L es un sumando directo de $\mathcal{R}$. Por hipótesis existe $e \in \mathcal{R}$ idempotente, tal que $L = \mathcal{R}e$. Sea $L' = \mathcal{R}(1-e)$. veamos que $\mathcal{R} = L \oplus L'$. Sea $x \in \mathcal{R}$, entonces $x = xe + x(1-e)$, por lo tanto $x \in L + L'$, así $\mathcal{R} = L + L'$. Ahora falta ver que $L \cap L' = \{0\}$. Sea $x \in L \cap L'$, luego $x = re = s(1-e)$, para algunos $r, s \in \mathcal{R}$, entonces $re + se = s$, como e es idempotente se tiene que $re + se = se$, y así $x = re = 0$.

□

Proposición 2.3.7. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo semisimple. Sean L un ideal minimal a izquierda de $\mathcal{R}$ y M un $\mathcal{R}$-módulo simple. Entonces, $LM \neq \{0\}$ si y solo si $L \simeq M$ como $\mathcal{R}$-módulos; en este caso $LM = M$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Como $LM \neq \{0\}$, entonces existen $x \in L$ y $m \in M$ tales que $xm \neq 0$, lo que implica que $Lm \neq \{0\}$. Sabemos que Lm es un submódulo de M el cual es simple, entonces tenemos que $Lm = M = LM$. Ahora considere la siguiente función

$$\begin{array}{rccc} f: & L & \longrightarrow & M \\ & x & \longrightarrow & xm \end{array}.$$

Es claro que f es un epimorfismo de módulos. Veamos que $ker(f) = \{0\}$. Como $Lm \neq \{0\}$, entonces $ker(f) \neq L$, y como L es un ideal minimal a izquierda entonces se tiene que $ker(f) = \{0\}$. Por lo tanto $L \simeq M$.

$\Leftarrow$) Como $L \simeq M$ como $\mathcal{R}$-módulos, existe un isomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos $f : L \longrightarrow M$. También $\mathcal{R}$ es semisimple, luego por la Proposición 2.3.6, existe $e \in \mathcal{R}$ idempotente tal que $L = \mathcal{R}e$. Vamos a ver que $LM \neq \{0\}$. Sea $m_0 = f(e)$. Como f es un homomorfismo de $\mathcal{R}$-módulos, entonces $f(re) = rf(e) = rm_0$ para todo $r \in \mathcal{R}$, esto implica que $m_0 \neq 0$, ya que si $m_0 = 0$, entonces $f(L) = \{0\} = M$, lo cual es contradictorio. Como se tiene que $m_0 = f(e) = f(e^2) = ef(e) = em_0$ y como $m_0 \neq 0$ entonces $em_0 \neq 0$, es decir que $LM \neq \{0\}$.

□

Proposición 2.3.8. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo semisimple con $1_{\mathcal{R}}$, con descomposición en ideales minimales a izquierda $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^{t} L_i$. Entonces todo $\mathcal{R}$-módulo simple a izquierda es isomorfo a uno de los L_i de la descomposición.*

Demostración. Sea M un $\mathcal{R}$-módulo simple a izquierda. Entonces como $\mathcal{R}M \neq \{0\}$ es un submódulo de M el cual es simple, entonces $\mathcal{R}M = M$. Se tiene que $\mathcal{R}M = \bigoplus_{i=1}^{t} L_i M$, y así existe un índice j tal que $L_j M \neq \{0\}$, y por la Proposición 2.3.7 se tiene que $L_j \simeq M$.

□

Proposición 2.3.9. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo semisimple con $1_{\mathcal{R}}$. Si L es un ideal minimal a izquierda de $\mathcal{R}$, entonces la suma de todos los ideales a izquierda de $\mathcal{R}$ isomorfos a L es un ideal bilateral de $\mathcal{R}$.*

Demostración. Sea $A = \sum_{J \simeq L} J$. Se tiene que A es ideal a izquierda de $\mathcal{R}$, ya que es suma de ideales a izquierda de $\mathcal{R}$. Ahora falta ver que A es ideal a derecha de $\mathcal{R}$. Como $\mathcal{R}$ es semisimple, entonces $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^{t} L_i$, donde cada L_i es un ideal minimal a izquierda de $\mathcal{R}$. Entonces $A\mathcal{R} = \sum_{J \simeq L} J\mathcal{R} = \sum_{J \simeq L} \sum_{i=1}^{t} JL_i$. Pero como cada L_i es minimal, se tiene que $JL_i = \{0\}$ o $JL_i = L_i$. Si $JL_i = L_i$, entonces $JL_i \neq \{0\}$ y por la Proposición 2.3.7 se tiene que $J \simeq L_i$, luego por la definición de A, se tiene que $L_i \subseteq A$. De lo anterior se tiene que $JL_i \subseteq A$, para todo $i \in \{1, ..., t\}$, por lo tanto $A\mathcal{R} \subseteq A$ y así A es un ideal bilateral de $\mathcal{R}$.

□

Proposición 2.3.10. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo semisimple e I un ideal bilateral de $\mathcal{R}$, tal que $L \subseteq I$ es un ideal minimal a izquierda de $\mathcal{R}$. Entonces I contiene todos los ideales a izquierda de $\mathcal{R}$ isomorfos a L.*

Demostración. Sea J un ideal a izquierda de $\mathcal{R}$ tal que $J \simeq L$. Veamos que $J \subseteq I$. Como $J \simeq L$ entonces por la Proposición 2.3.7 se tiene que $J = LJ$, como $L \subseteq I$ y I es un ideal bilateral de $\mathcal{R}$, entonces $J = LJ \subseteq IJ \subseteq I$.

□

Proposición 2.3.11. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo semisimple con $1_{\mathcal{R}}$ y L un ideal a izquierda minimal de $\mathcal{R}$. Sea B la suma de todos los ideales de $\mathcal{R}$ isomorfos a L. Entonces, B es un ideal bilateral minimal de $\mathcal{R}$.*

Demostración. Por la Proposición 2.3.9 se tiene que B es un ideal bilateral de $\mathcal{R}$. Veamos que B es un ideal minimal de $\mathcal{R}$. Sea B_1 un ideal bilateral de $\mathcal{R}$ tal que $B_1 \subseteq B$ y sea L_1 un ideal un ideal minimal a izquierda de $\mathcal{R}$ tal que $L_1 \subseteq B_1$. Si $L_1 \not\simeq L$, entonces por la Proposición 2.3.7 se tiene que $L_1 J = \{0\}$, para todo $J \simeq L$. Por lo

tanto $L_1B = \sum_{J\simeq L} L_1J = \{0\}$, y como $L_1 \subseteq B$, esto implica que $L_1L_1 = \{0\}$. Pero esto no puede pasar ya que por la Proposición 2.3.6 existe $e \in L_1$ idempotente tal que $L_1 = \mathcal{R}e$. Por lo tanto $L_1 \simeq L$, entonces por la Proposición 2.3.10 se tiene que $J \subseteq B_1$, para todo $J \simeq L$, por tanto $B = \sum_{J\simeq L} J \subseteq B_1$. Es decir que $B = B_1$. Quedando demostrado que B es un ideal bilateral minimal de $\mathcal{R}$.

□

Teorema 2.3.3. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo semisimple con $1_\mathcal{R}$. Entonces $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^{s} A_i$, siendo A_i un ideal bilateral minimal de $\mathcal{R}$, para todo $i \in \{1, ..., s\}$.*

Demostración. Como $\mathcal{R}$ es semisimple con $1_\mathcal{R}$, entonces $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^{s}(L_{i1}\oplus L_{i2}\oplus\cdots\oplus L_{ir_i})$, donde cada L_{ik} es un ideal a izquierda minimal, también $L_{ij} \simeq L_{ik}$ y $L_{ij} \not\simeq L_{kh}$ si $i \neq k$. Definamos los siguientes ideales de $\mathcal{R}$

$$A_i = \{\text{J ideal de } \mathcal{R}|\ J \simeq L_{i1}\},\ \text{para todo } i \in \{1, ..., s\}.$$

Por la Proposición 2.3.11 sabemos que cada A_i es un ideal minimal bilateral. Veamos que $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^{s} A_i$. Como $L_{i1} + L_{i2} + \cdots + L_{ir_i} \subseteq A_i$, entonces $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{s}(L_{i1} + L_{i2} + ... + L_{ir_i}) \subseteq \sum_{i=1}^{s} A_i$. Por lo tanto $\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{s} A_i$. Veamos ahora que esta suma es directa. Para ello veamos que $A_iA_j = \{0\}$, para todo $i \neq j$. Sea $I \simeq L_{i1}$ y $J \simeq L_{i2}$, entonces $I \not\simeq J$, luego por la Proposición 2.3.7 se tiene que $IJ = \{0\}$. Por lo tanto $A_iA_j = \sum_{I\simeq L_{i1}} \sum_{J\simeq L_{j1}} IJ = \{0\}$, para todo $i \neq j$. Entonces por la Proposición 1.5.1 se tiene que $\mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^{s} A_i$.

□

2.4 MÓDULOS Y ANILLOS ARTINIANOS

Definición 2.4.1. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo y M un $\mathcal{R}$-módulo a la izquierda. El módulo M es llamado un **módulo artiniano por la izquierda** si sus submódulos satisfacen la condición de cadena descendente, es decir dada una familia de submódulos $\{M_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tales que $M_1 \supseteq M_2 \supseteq ... \supseteq M_n \supseteq ...$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $M_m = M_{m+p}$, para todo $p \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 2.4.1. *Todo módulo finito es artiniano.*

Ejemplo 2.4.2. *Todo espacio vectorial de dimensión finita es artiniano. En efecto, sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Veamos que V es artiniano. Sea $W_1 \supseteq W_2 \supseteq ... \supseteq W_n \supseteq ...$ una cadena de subespacios de V, entonces como V es de dimensión finita se tiene la siguiente sucesión de enteros positivos, $dim(W_1) \geq dim(W_2) \geq ... \geq dim(W_n) \geq ...$, la cual debe estacionar, es decir existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $dim(W_n) = dim(W_{n+p})$, para todo $p \in \mathbb{N}$, y como $W_n \supseteq W_{n+p}$, entonces se tiene que $W_n = W_{n+p}$, para todo $p \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 2.4.3. *Consideremos el grupo de los números p-ádicos, definido como $\mathbb{Q}_p = \{\frac{m}{p^k} \mid m \in \mathbb{Z} \text{ y } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, con la suma usual de números reales, y consideremos a $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ como un $\mathbb{Z}$-módulo. Entonces $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo artiniano.*
En efecto, los $\mathbb{Z}$-submódulos de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ son exactamente de la forma $\langle \frac{1}{p^k} + \mathbb{Z} \rangle$, con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por lo tanto una cadena de $\mathbb{Z}$-submódulos de $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$ sería de la forma

$$\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z} \supseteq \langle \frac{1}{p^{k_1}} + \mathbb{Z} \rangle \supseteq \langle \frac{1}{p^{k_2}} + \mathbb{Z} \rangle \supseteq ...$$

Se puede probar que $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq ...$, es decir se obtiene una sucesión decreciente de enteros positivos, por lo tanto debe existir $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que $k_m = k_{m+r}$, para todo $r \in \mathbb{N}$, y de esta manera se tiene que

$$\langle \frac{1}{p^{k_m}} + \mathbb{Z} \rangle = \langle \frac{1}{p^{k_{m+r}}} + \mathbb{Z} \rangle, \text{ para todo } r \in \mathbb{N}.$$

Definición 2.4.2. *Un anillo $\mathcal{R}$ es llamado **artiniano por la izquierda** si $\mathcal{R}$ como $\mathcal{R}$-módulo a izquierda es artiniano.*

Ejemplo 2.4.4. *Todo anillo de división es artiniano.*

Ejemplo 2.4.5. *El anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ no es artiniano. Considere la siguiente cadena de ideales de $\mathbb{Z}$, la cual no es estacionaria*

$$\langle 2 \rangle \supseteq \langle 2^2 \rangle \supseteq \langle 2^3 \rangle \supseteq ... \supseteq \langle 2^n \rangle \supseteq ...$$

Ejemplo 2.4.6. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, entonces el anillo $\mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle$ es artiniano.*
Esto se debe a que $\mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle$ se puede ver como un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, con las operaciones de suma y producto por escalar usuales, este es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, también se puede ver que los ideales de $\mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle$ son subespacios de $\mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle$

como $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y por el Ejemplo 2.4.2 se tiene que $\mathbb{K}[x]/\langle x^n\rangle$ es un anillo artiniano.

Proposición 2.4.1. *Sea $\phi : M \longrightarrow N$ un epimorfismo de $\mathcal{R}$-módulos. Si M es artiniano, entonces N también es artiniano.*

Demostración. Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de $\mathcal{R}$-submódulos de N, tales que $I_n \supseteq I_m$, para todo $n < m$.

Veamos que esta cadena descendente de submódulos es estacionaria.
Por la Proposición 2.1.3, se tiene que $\phi^{-1}(I_n)$ es un $\mathcal{R}$-submódulo de M, para todo $n \in N$, y además

$$\phi^{-1}(I_n) \subseteq \phi^{-1}(I_m), \text{ para todo } n < m,$$

es decir que la familia $\{\phi^{-1}(I_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cadena descendente de submódulos de M, entonces por ser M un anillo artiniano, exsite $m \in N$ tal que

$$\phi^{-1}(I_m) = \phi^{-1}(I_{m+p}) \text{ para todo } p \in \mathbb{N},$$

entonces como ϕ es sobreyectiva, tenemos que $I_m = I_{m+p}$, para todo $p \in \mathbb{N}$, es decir que $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cadena descendente de submódulos que estaciona.
De lo anterior se deduce que N es un módulo artiniano.

□

Corolario 2.4.1. *Sea $\phi : \mathcal{R} \longrightarrow S$ un epimorfismo de anillos. Si $\mathcal{R}$ es artiniano, entonces S también es artiniano.*

La demostración del Corolario 2.4.1 es análoga a la de la Proposición 2.4.1.

Teorema 2.4.1. *Sea M un $\mathcal{R}$-módulo y N un submódulo de M. Entonces, M es artiniano si y solo si N y M/N son artinianos.*

Demostración. $\Leftarrow$)Sea $S_1 \supseteq S_2 \supseteq ... \supseteq S_n \supseteq ...$ una cadena descendente de submódulos de M. Ahora consideremos el epimorfismo canónico $f : M \longrightarrow M/N$, entonces $f(S_1) \supseteq f(S_2) \supseteq ... \supseteq f(S_n) \supseteq ...$, y ya que M/N es artiniano entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(S_m) = f(S_{m+p})$, para todo $p \in \mathbb{N}$.
También tenemos que $S_1 \cap N \supseteq S_2 \cap N \supseteq ... \supseteq S_1 \cap N \supseteq ...$, y como N es artiniano,

entonces existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $S_l \cap N = S_{l+p} \cap N$, para todo $p \in \mathbb{N}$.
Sea $r =$máx$\{m, l\}$, entonces $f(S_r) = f(S_{r+p})$ y $S_r \cap N = S_{r+p} \cap N$, para todo $p \in \mathbb{N}$.

De la igualdad $f(S_r) = f(S_{r+p})$, para todo $p \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$f^{-1}(f(S_r)) = f^{-1}(f(S_{r+p}))$$

y como $f^{-1}(f(S_n)) = S_n + N$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $S_r + N = S_{r+p} + N$, entonces $(S_r + N) \cap S_r = (S_{r+p} + N) \cap S_r$. También se puede ver que $(S_n + N) \cap S_n = S_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$S_r = (S_{r+p} + N) \cap S_r = (S_{r+p} \cap S_r) + (N \cap S_r).$$

Como $S_{r+p} \subseteq S_r$, obtenemos que $S_{r+p} \cap S_r = S_{r+p}$, entonces

$$S_r = S_{r+p} + (N \cap S_r).$$

Ahora, como sabemos que $S_r \cap N = S_{r+p} \cap N$, para todo $p \in \mathbb{N}$, tenemos que
$S_r = S_{r+p} + (N \cap S_{r+p})$ y como $(S_n + N) \cap S_n = S_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $S_r = S_{r+p}$, para todo $p \in \mathbb{N}$. lo que implica que M es artiniano.

$\Rightarrow$) N es artiniano ya que que todos los submódulos de N son también submódulos de M.
Veamos ahora que M/N es artiniano. Consideremos el epimorfismo canónico $f : M \longrightarrow M/N$. Entonces por la Proposición 2.4.1 se tiene que M/N es artiniano.

□

Proposición 2.4.2. *Sean M un $\mathcal{R}$-módulo, N y L submódulos de M tales que $M = N + L$. Si N y L son artinianos, entonces M es artiniano.*

Demostración. Consideremos el módulo cociente $M/L = (N + L)/L$, entonces por el Teorema de Isomorfismo se tiene que $M/L = N/(N \cap L)$. Como N es artiniano por el Teorema 2.4.1 se tiene que $N/(N \cap L)$ es artiniano, es decir que M/L es artiniano y como L es artiniano entonces por el Teorema 2.4.1 se tiene que M es artiniano.

□

Corolario 2.4.2. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo, N y L dos $\mathcal{R}$-módulos. Si N y L son artinianos, entonces $M = N \oplus L$ es artiniano.*

Demostración. Sean $N' = N \oplus \{0\}$ y $L' = \{0\} \oplus L$, es claro que N' y L' son submódulos de M tales que $M = N' \oplus L'$, y además como $N' \cong N$ y $L' \cong L$, tenemos que N' y L' son artinianos, luego por la Proposición 2.4.2 se tiene que M es artiniano.

□

Proposición 2.4.3. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo artiniano. Entonces todo ideal de $\mathcal{R}$ contiene un ideal minimal.*

Demostración. Sea I ideal de $\mathcal{R}$ y supongamos que todos los ideales que estan contenidos en I no son minimales. Sea I_0 ideal de $\mathcal{R}$ tal que $I_0 \subset I$, como I_0 no es minimal, existe I_1 ideal de $\mathcal{R}$ tal que

$$I_1 \neq I_0,\ I_1 \neq \{0\} \text{ e } I_1 \subset I.$$

Ahora como I_1 tampoco es minimal debe existir I_2 ideal de $\mathcal{R}$ tal que

$$I_2 \neq I_1,\ I_2 \neq \{0\} \text{ e } I_2 \subset I_1.$$

Siguiendo este proceso encontramos una familia $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de ideales no nulos tales que

$$I_n \subset I_m \text{ e } I_n \neq I_m, \text{ para todo } n > m.$$

Es decir, encontramos una cadena descendente de ideales que no es estacionaria, lo cual es contradictorio ya que $\mathcal{R}$ es artiniano. Por lo tanto debe existir un ideal minimal contenido en I.

□

Proposición 2.4.4. *Si $\mathcal{R}$ es un anillo artiniano y semiprimitivo, entonces $\mathcal{R}$ es un anillo semisimple.*

Demostración. Como $\mathcal{R}$ es artiniano, entonces por la Proposición 2.4.3 existe $\{0\} \neq I_1$ ideal minimal de $\mathcal{R}$ y por la Proposición 2.1.2 se tiene que $\mathcal{R} = I_1 \oplus K_1$, con K_1 ideal de $\mathcal{R}$, si $K_1 = \{0\}$, tendríamos el resultado.
Si $K_1 \neq \{0\}$, por ser $\mathcal{R}$ artiniano tenemos que existe $I_2 \subseteq K_1$ tal que I_2 es un ideal

minimal, y por la Proposición 2.1.2, tenemos que $\mathcal{R} = I_2 \oplus K_2$, con K_2 ideal de $\mathcal{R}$, con lo cual $K_1 = I_2 \oplus (K_1 \cap K_2)$, y así

$$\mathcal{R} = I_1 \oplus I_2 \oplus (K_1 \cap K_2).$$

Si $K_1 \cap K_2 = \{0\}$ terminariamos la prueba. Sino como $K_1 \cap K_2$ es un ideal de $\mathcal{R}$, entonces existe $I_3 \subseteq K_1 \cap K_2$ ideal minimal, y entonces $\mathcal{R} = I_3 \oplus K_3$, con K_3 ideal de $\mathcal{R}$. Por lo tanto $K_1 \cap K_2 = I_3 \oplus (K_1 \cap K_2 \cap K_3)$, y tenemos que

$$\mathcal{R} = I_1 \oplus I_2 \oplus I_3 \oplus (K_1 \cap K_2 \cap K_3).$$

Supongamos que podemos seguir este proceso infinitamente, entonces obtenemos las familias de ideales $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que

$$I_{n+1} \subseteq K_n \text{ y } \mathcal{R} = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i \oplus (\bigcap_{i=1}^{n} K_i).$$

Llamemos $T_n = \bigcap_{i=1}^{n} K_i$, entonces se tiene que $T_1 \supseteq T_2 \supseteq ... \supseteq T_n \supseteq ...$, y ya que $\mathcal{R}$ es artiniano existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $T_m = T_{m+p}$, lo que implica que $I_{m+1} = \{0\}$, lo cual es contradictorio. Lo que implica que no podiamos seguir ese procedimiento infinitamente, es decir existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_n = \{0\}$, y por lo tanto $\mathcal{R} = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$.

□

Proposición 2.4.5. *Si $\mathcal{R}$ es un anillo artiniano y primitivo, entonces $\mathcal{R}$ es un anillo simple.*

Demostración. Como $\mathcal{R}$ es primitivo, por la Proposición 2.2.2, tenemos que $\mathcal{R}$ es semiprimitivo, de esta manera tenemos que $\mathcal{R}$ es un anillo artiniano y semiprimitivo, entonces por la Proposición 2.4.4, se tiene que $\mathcal{R} = \bigoplus_{j=1}^{n} I_j$, con I_j siendo un ideal bilateral simple de $\mathcal{R}$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$.
Por otra parte, por la Proposición 2.2.1, se tiene que $\mathcal{R}$ es un anillo primo. Ahora, como I_i es ideal bilateral de $\mathcal{R}$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, entonces

$$I_1 I_i \subseteq I_1, \text{ para todo } i \in \{1, ..., n\}$$

y ya que I_1 es simple, entonces $I_1 I_i = \{0\}$ o $I_1 I_i = I_1$. Si suponemos que $I_1 I_i = \{0\}$, entonces por ser $\mathcal{R}$ un anillo primo, se tiene que $I_1 = \{0\}$ o $I_i = \{0\}$, lo cual no es

posible ya que $\{0\}$ no es simple, y así podemos concluir que

$$I_1 I_i = I_1 \text{ para todo } i \in \{1, ..., n\}.$$

También $I_1 I_i \subseteq I_i$, y usando el mismo argumento anterior, se demuestra que

$$I_1 I_i = I_i \text{ para todo } i \in \{1, ..., n\}$$

y por lo tanto $I_1 = I_i, \text{ para todo } i \in \{1, ..., n\}$.
Teniendo esto, veamos que $n = 1$. Si $n \geq 2$, entonces $I_1 \cap I_2 = \{0\}$, por ser sumandos directos, pero como $I_1 = I_2$, entonces se tendría que $I_2 = \{0\}$, lo cual es contradictorio, con lo cual concluimos que $n = 1$, y por lo tanto $\mathcal{R} = I_1$ es simple.

□

Capítulo 3

ANILLOS DE GRUPOS TORCIDOS

3.1 DEFINICIÓN

Definición 3.1.1. *Una* ***acción de un grupo*** $(G, *)$ ***sobre un conjunto*** X *es una aplicación* $\phi : G \times X \to X$ *que cumple:*

- *Para todo* $x \in X,\ \phi(e, x) = x$ *donde* e *es el elemento neutro del grupo.*
- *Para todo* $x \in X, g, h \in G,\ \phi(g * h, x) = \phi(g, \phi(h, x))$.

Nota

- De la Definición 3.1.1 podemos construir un homomorfismo de grupos $\theta : G \to S_X$, donde $S_X = \{f : X \to X \ \ ; f \text{ es biyectiva}\}$ es un grupo con la composición de funciones, definido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccl} \theta: & G & \longrightarrow & S_X \\ & g & \longmapsto & \theta_g: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & \phi(g,x) \end{array} \end{array} .$$

- Si en la Definición 3.1.1 consideramos a X como un anillo, pedimos que para todo $g \in G$, la función θ_g sea un homomorfismo de anillos, en este caso ϕ será llamada **acción de un grupo sobre un anillo**. Se sigue de la definición que $\theta_g \in Aut(X)$, para todo $g \in G$.

Definición 3.1.2. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo con $1_{\mathcal{R}}$, G un grupo y $\theta : G \to Aut(\mathcal{R})$ un homomorfismo de grupos. El* ***anillo de grupo torcido*** *asociado a el anillo $\mathcal{R}$, el grupo G y el homonorfismo θ es $\mathcal{R} *_\theta G = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{R}\delta_g$, donde los δ_g son símbolos, con adición componente a componente y multiplicación dada de la siguiente manera:*

$$\left(\sum_{g\in G} r_g\delta_g\right)\left(\sum_{h\in G} s_h\delta_h\right) = \left(\sum_{g,h\in G} r_g\theta_g(s_h)\delta_{gh}\right), \text{ donde } \theta_g = \theta(g).$$

Ejemplo 3.1.1. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo con $1_{\mathcal{R}}$, entonces podemos ver a $\mathcal{R}$ como un anillo de grupo torcido de la siguiente manera: $\mathcal{R} = \mathcal{R} *_\theta G$, donde $G = \{e\}$ y $\theta(e) = I_{\mathcal{R}}$.*

Ejemplo 3.1.2. *Sean $\mathcal{R} = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{Z}_2$ y $\theta : \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{C})$ tal que $\theta(\overline{0}) = I_{\mathbb{C}}$ y $\theta(\overline{1}) = \overline{I_{\mathbb{C}}}$. Entonces el anillo de grupo torcido asociado es $\mathbb{C} *_\theta \mathbb{Z}_2 = \mathbb{C}\delta_{\overline{0}} + \mathbb{C}\delta_{\overline{1}}$, con adición componente a componente y multiplicación dada de la siguiente manera:*
$(a\delta_{\overline{0}} + b\delta_{\overline{1}})(c\delta_{\overline{0}} + d\delta_{\overline{1}}) = (ac + b\overline{d})\delta_{\overline{0}} + (ad + b\overline{c})\delta_{\overline{1}}$.

Proposición 3.1.1. *Sean $\mathcal{R}$ un anillo con $1_{\mathcal{R}}$, G un grupo y $\theta : G \to Aut(\mathcal{R})$ un homomorfismo de grupos. Entonces $\mathcal{R} *_\theta G$ es un anillo con unidad.*

Demostración. Es fácil ver que $\mathcal{R} *_\theta G$ con la suma definida es un grupo abeliano.

Veamos que $\mathcal{R} *_\theta G$ es asociativo. Sean $x, y, z \in \mathcal{R} *_\theta G$, podemos escribir

$$x = \sum_{g\in G} p_g\delta_g,\ y = \sum_{h\in G} q_h\delta_h, \text{ y } z = \sum_{k\in G} r_k\delta_k.$$

Entonces

$$x(yz) = \left(\sum_{g\in G} p_g\delta_g\right)\left(\sum_{h,k\in G} q_h\theta_h(r_k)\delta_{hk}\right) = \sum_{g,h,k\in G} p_g\theta_g(q_h\theta_h(r_k))\delta_{ghk}.$$

Como para todo $g, h \in G$, θ_g es un homomorfismo de anillos para todo $g \in G$, y $\theta_{gh} = \theta_g \circ \theta_h$, entonces

$$x(yz) = \sum_{g,h,k\in G} p_g\theta_g(q_h)\theta_g(\theta_h(r_k))\delta_{ghk} = \sum_{g,h,k\in G} p_g\theta_g(q_h)\theta_{gh}(r_k)\delta_{ghk}.$$

Por otro lado

$$(xy)z = \left(\sum_{g,h\in G} p_g\theta_g(q_h)\delta_{gh}\right)\left(\sum_{g\in G} r_k\delta_k\right) = \sum_{g,h,k\in G} p_g\theta_g(q_h)\theta_{gh}(r_k)\delta_{ghk}.$$

Con lo cual tenemos que $x(yz) = (xy)z$.

Es fácil verificar que el elemento $1_{\mathcal{R}}\delta_e$ es la unidad en $\mathcal{R} *_\theta G$, donde e es el elemento neutro en G. □

Los anillos de grupos torcidos son una generalización de los anillos de grupo.
Sean $\mathcal{R}$ un anillo y G un grupo. Consideremos la función

$$\begin{array}{rccc} \theta: & G & \longrightarrow & Aut(\mathcal{R}) \\ & g & \longrightarrow & I_{\mathcal{R}} \end{array}.$$

Entonces $\mathcal{R} *_\theta G$ es un anillo de grupo torcido, este es conocido como **anillo de grupo** y se denota como $\mathcal{R}[G]$.

3.2 EL TEOREMA DE J. K. PARK

Todas las definiciones y proposiciones dadas en los capítulos anteriores fueron para lograr entender la demostración del Teorema de J. K. Park, el cual vamos a enunciar.

Teorema (J. K. Park) Sea $\mathcal{R}$ un anillo y θ un homomorfismo de grupos de G a $Aut(\mathcal{R})$. Entonces, $\mathcal{R} *_\theta G$ es artiniano a la izquierda si y solo si $\mathcal{R}$ es artiniano a la izquierda y G es finito.

Por ahora vamos a demostrar solo una de las implicaciones.

Demostración. $\Leftarrow$) Primero veamos que $\mathcal{R} *_\theta G$ como $\mathcal{R}$-módulo con multiplicación por escalar dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}\times\mathcal{R} *_\theta G & \longrightarrow & \mathcal{R} *_\theta G \\ (r, \sum_{g\in G} r_g\delta_g) & \longrightarrow & \sum_{g\in G} rr_g\delta_g \end{array}$$

es un $\mathcal{R}$-módulo artiniano.

Para esto, consideremos a $\mathcal{R}\delta_g$, para todo $g \in G$, como un $\mathcal{R}$-módulo con multiplicación por escalar dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} \times \mathcal{R}\delta_g & \longrightarrow & \mathcal{R}\delta_g \\ (r, s\delta_g) & \longmapsto & (rs)\delta_g \end{array}.$$

Es claro que $\mathcal{R}\delta_g \cong \mathcal{R}$ como $\mathcal{R}$-módulos, y ya que por hipótesis $\mathcal{R}$ es artiniano entonces $\mathcal{R}\delta_g$ es artiniano, para todo $g \in G$. Por el Corolario 2.4.2 se tiene que $\mathcal{R} *_\theta G$ como $\mathcal{R}$-módulo es artiniano, ya que G es finito.

Ahora veamos que $\mathcal{R} *_\theta G$ es artiniano. Sea $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$ una cadena descendente de ideales de $\mathcal{R} *_\theta G$. Veamos que I_n es un $\mathcal{R}$-submódulo de $\mathcal{R} *_\theta G$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $r \in \mathcal{R}$ y $\sum_{g\in G} r_g\delta_g \in I_n$, entonces

$$\sum_{g\in G} rr_g\delta_g = (r\delta_e)(\sum_{g\in G} r_g\delta_g) \ ,$$

y ya que I_n es ideal de $\mathcal{R} *_\theta G$ se tiene que

$$(r\delta_e)(\sum_{g\in G} r_g\delta_g) \in I_n \ ,$$

y así demostramos que I_n es un $\mathcal{R}$-submódulo de $\mathcal{R} *_\theta G$. Por lo tanto $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$ es una cadena de descendente $\mathcal{R}$-submódulos de $\mathcal{R} *_\theta G$, la cual estaciona ya que $\mathcal{R} *_\theta G$ es un $\mathcal{R}$-módulo artiniano, demostrando que $\mathcal{R} *_\theta G$ es artiniano.

□

Para la otra parte de la demostración necesitaremos más teoría sobre los anillos de grupos torcidos, en especifico las que tratan la propiedad de ser artiniano, por lo tanto retomaremos la demostración hasta la Proposición 3.2.5.

Uno de los primeros resultados que debemos tener en cuenta es el Teorema de I. G. Connell, el cual es la versión del Teorema de J. K. Park para anillos de grupos ordinarios, aunque este se puede obtener como corolario del Teorema de J. K. Park en realidad necesitamos usarlo para su demostración. La demostración del Teoema de Connell se

encuentra en su libro[1]. Su demostración no la vamos ver en este texto ya que es muy extensa.

Teorema (I. G. Connell) Sea $\mathcal{R}$ un anillo y G un grupo. Entonces, $\mathcal{R}[G]$ es artiniano a la izquierda si y solo si $\mathcal{R}$ es artiniano a la izquierda y G es finito.

La importancia del Teorema de Connell radica en que dado un anillo de grupo torcido $\mathcal{R} *_\theta G$, podemos definir el subanillo de $\mathcal{R}$ fijado por la acción de θ, el cual esta dado por $\mathcal{R}^{\theta(G)} = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid \theta_g(\alpha) = \alpha, \text{ para todo } g \in G\}$, y se tiene que $\mathcal{R}^{\theta(G)} *_\sigma G = \mathcal{R}^{\theta(G)}[G]$, donde $\sigma_g = \theta_g|_{\mathcal{R}^{\theta(G)}}$, y haciendo esto en algunos casos podremos aplicar el Teorema de Connell.

Proposición 3.2.1. *Sean S un anillo con 1_S y $\mathcal{R}$ un subanillo de S con $1_\mathcal{R} = 1_S$. Si $\mathcal{R}$ es un $\mathcal{R}$-sumando directo a izquierda de S, entonces para todo I ideal a derecha de $\mathcal{R}$, $IS \cap \mathcal{R} = I$.*

Demostración. Sea I ideal a izquierda de $\mathcal{R}$, como $\mathcal{R}$ es un $\mathcal{R}$-sumando directo a izquierda de S, existe un $\mathcal{R}$-submodulo $\mathcal{T}$ de S tal que $S = \mathcal{R} \oplus \mathcal{T}$.
Veamos ahora que $IS \cap \mathcal{R} = I$. Es claro que $I \subseteq IS \cap \mathcal{R}$, solo faltaría demostrar que $IS \cap \mathcal{R} \subseteq I$.
Sea $x \in IS \cap \mathcal{R}$, entonces

$$x = \sum i_k s_k, \text{ con } i_k \in I \text{ y } s_k \in S$$

y como $S = \mathcal{R} \oplus T$, tenemos que $s_k = r_k + t_k$, luego $x = \sum i_k(r_k + t_k)$ y así tenemos que $x - \sum i_k r_k = \sum i_k t_k$. Como $\mathcal{T}$ es un $\mathcal{R}$-sumando directo de S entonces $\sum i_k t_k \in \mathcal{T}$ y como $x - \sum i_k r_k \in \mathcal{R}$, tenemos que

$$x - \sum i_k r_k \in \mathcal{R} \cap \mathcal{T},$$

por lo tanto $x - \sum i_k r_k = 0$, ya que la suma es directa, ahora como I es ideal a derecha de $\mathcal{R}$, $\sum i_k r_k \in I$, con lo cual tenemos que $x \in I$.

□

[1]CONNELL, Ian G. On the group ring. Canad. J. Math, 1963, vol. 15, no 49, p. 650-685.

La Proposición 3.2.1 nos permitirá obtener una serie de propiedades importantes sobre los anillos de grupos torcidos, como por ejemplo la Proposición 3.2.2 y 3.2.3, las cuales serán claves en la demostración del Teorema de J. K. Park.

Corolario 3.2.1. *Sea $\mathcal{R}$ anillo con $1_{\mathcal{R}}$, G un grupo y $\theta : G \to Aut(\mathcal{R})$ un homomorfismo de grupos. Si H es un subgrupo de G, entonces para todo I ideal a derecha de $\mathcal{R} *_{\theta|_H} H$ se tiene que $I(\mathcal{R} *_\theta G) \cap \mathcal{R} *_{\theta|_H} H = I$.*

Demostración. Sea $T = \{\sum r_g\delta_g \in \mathcal{R} *_\theta G \mid r_g = 0 \text{ si } g \in H\}$, es claro que $\mathcal{R} *_\theta G = (\mathcal{R} *_{\theta|_H} H) \oplus T$, y como $1_{\mathcal{R}*_\theta G} = 1_{\mathcal{R}*_{\theta|_H} H}$, por la Proposición 2.1 tenemos el resultado. □

Las dos siguientes proposiciones son muy importantes ya que veremos como en los anillos de grupos torcidos se mantiene la propiedad de ser artiniano restringiendo su grupo a un subgrupo o su anillo a un subanillo.

Proposición 3.2.2. *Si el anillo de grupo torcido $\mathcal{R}*_\theta G$ es artiniano a derecha, entonces también lo es $\mathcal{R} *_{\theta|_H} H$, para todo subgrupo H de G.*

Demostración. Sea $\{I_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una familia de ideales a derecha de $\mathcal{R} *_{\theta|_H} H$ tales que $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$, entonces por el corolario anterior tenemos que

$$I_n(\mathcal{R} *_\theta G) \cap \mathcal{R} *_{\theta|_H} H = I_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $J_n = I_n(\mathcal{R} *_\theta G)$, es fácil ver que J_n es ideal a derecha de $\mathcal{R} *_\theta G$, y además $J_1 \supseteq J_2 \supseteq ... \supseteq J_n \supseteq ....$
Como $\mathcal{R} *_\theta G$ es artiniano a derecha, tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $J_m = J_{m+p}$, para todo, $p \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$J_m \cap \mathcal{R} *_{\theta|_H} H = J_{m+p} \cap \mathcal{R} *_{\theta|_H} H \text{ para todo } p \in \mathbb{N}.$$

es decir $I_m = I_{m+p}$ para todo $p \in \mathbb{N}$, con lo cual podemos concluir que $\mathcal{R} *_{\theta|_H} H$ es artiniano a derecha.

□

Corolario 3.2.2. *Si el anillo de grupo torcido $\mathcal{R} *_\theta G$ es artiniano a derecha, entonces $\mathcal{R}$ es artiniano a derecha.*

Demostración. Tome $H = \{e\}$, y por la Proposición 3.2.2 se tiene que $\mathcal{R}\delta_e$ es artiniano, y ya que $\mathcal{R}\delta_e \cong \mathcal{R}$, entonces por la Proposición 2.4.1 se tiene que $\mathcal{R}$ es artiniano.

□

Definición 3.2.1. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo, G un grupo y $\theta : G \longrightarrow Aut(\mathcal{R})$ un homomorfismo de grupos. Sea B un subanillo de $\mathcal{R}$. Decimos que B es invariante bajo la acción de $\theta(G)$ si se cumple que $\theta_g(B) = B$, para todo $g \in G$.*

Proposición 3.2.3. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo con $1_\mathcal{R}$ y $\theta : G \to Aut(\mathcal{R})$ un homomorfismo de grupos. Sea B un subanillo de $\mathcal{R}$ con $1_B = 1_R$ tal que B es invariante bajo la acción de $\theta(G)$. Si B es un B-sumando directo a izquierda de $\mathcal{R}$, entonces, para todo ideal a derecha I de $B *_\sigma G$, se tiene que $I(\mathcal{R} *_\theta G) \cap B *_\sigma G = I$, donde σ es el homomorfismo de grupos $\sigma : G \to Aut(B)$ inducido por θ.*

Demostración. Como B es un B-sumando directo a izquierda de $\mathcal{R}$, existe C un B-módulo tal que $\mathcal{R} = B \oplus C$.
Definamos

$$T = \left\{ \sum_{g \in G} c_g \delta_g : c_g \in C \text{ para todo } g \in G \right\}.$$

T es un $B *_\sigma G$-módulo, y ya que $\mathcal{R} = B \oplus C$, se tiene que $\mathcal{R} *_\theta G = (B *_\sigma G) \oplus T$, luego por la Proposición 3.2.1 se concluye lo deseado.

□

Corolario 3.2.3. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo con $1_\mathcal{R}$ y $\theta : G \to Aut(\mathcal{R})$ un homomorfismo de grupos. Sea $\mathcal{B}$ un subanillo de $\mathcal{R}$ con $1_\mathcal{B} = 1_\mathcal{R}$ tal que $\mathcal{B}$ es invariante bajo la acción de $\theta(G)$. Si $\mathcal{B}$ es un $\mathcal{B}$-sumando directo a izquierda de $\mathcal{R}$, entonces, si $\mathcal{R} *_\theta G$ es artiniano a derecha, también lo es $\mathcal{B} *_\sigma G$.*

Demostración. Es similar a la de la Proposición 3.2.2, aplicando la Proposición 3.2.3.

□

Ahora enunciaremos las dos Proposiciones más importantes, que son versiones del Teorema de J. K. Park pero con mas hipótesis, con estas proposiciones ya demostradas el Teorema de J. K. Park será muy sencillo de demostrar.

Lema 4.1. Sea $\mathcal{R}$ un anillo simple con $1_{\mathcal{R}}$, G un grupo y $\theta : G \to Aut(\mathcal{R})$ un homomorfismo de grupos. Entonces el centro de $\mathcal{R}$ es un campo e invariante bajo la acción de $\theta(G)$.

Demostración. Sea F el centro de $\mathcal{R}$, para ver que F es campo solo falta demostrar la existencia de inversos. Sea $0 \neq x \in F$, consideremos el ideal $\mathcal{R}x$, como $\mathcal{R}$ es simple, entonces $\mathcal{R}x = \{0\}$ o $\mathcal{R}x = \mathcal{R}$, como $x \neq 0$, se tiene que $\mathcal{R}x = \mathcal{R}$, lo cual implica que x tiene inverso, el cual también está en el centro de $\mathcal{R}$.
Ahora veamos que F es invariante bajo la acción de $\theta(G)$. Sea $g \in G$ y $y \in \theta_g(F)$, entonces existe $x \in F$ tal que $y = \theta_g(x)$. Veamos que $y \in F$. Sea $r \in \mathcal{R}$, como θ_g es sobreyectiva, existe $s \in \mathcal{R}$, tal que $r = \theta_g(s)$. Entonces tenemos que $ry = \theta_g(s)\theta(x) = \theta_g(sx)$, y como $x \in F$ se tiene que $sx = xs$, y así $ry = \theta_g(xs) = \theta_g(x)\theta_g(s) = yr$. Demostrando que $\theta_g(F) \subseteq F$. Para la otra contenencia, podemos deducir de la contenencia anterior que $\theta_{g^{-1}}(F) \subseteq F$, y por lo tanto $F = \theta_g(\theta_{g^{-1}}(F)) \subseteq \theta_g(F)$.

□

Proposición 3.2.4. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo primitivo, G un grupo, y sea $\theta : G \to Aut(\mathcal{R})$ un homomorfismo de grupos. Si $\mathcal{R} *_\theta G$ es artiniano a la izquierda, entonces G es finito.*

Demostración. Como $\mathcal{R} *_\theta G$ es artiniano a la izquierda, entonces $\mathcal{R}$ es artiniano a izquierda, por lo tanto $\mathcal{R}$ es artiniano a la izquierda y primitivo, por la Proposición 2.4.5 tenemos que $\mathcal{R}$ es simple. Luego el centro F es un campo y es invariante bajo la acción de $\theta(G)$, entonces $F *_\sigma G$ es artiniano a la izquierda por el Corolario 3.2.3.

Ahora sea $F^{\sigma(G)} = \{a \in F |\ \sigma_g(a) = a \text{ para todo } g \in G\}$. Entonces $F^{\sigma(G)} * G = F^{\sigma(G)}[G]$, y por el Corolario 3.2.3 es un anillo artiniano a la izquierda, luego por el Teorema de Conell, obtenemos que G es finito.

□

Proposición 3.2.5. *Sea $\mathcal{R}$ un anillo semiprimitivo, G un grupo, y sea $\theta : G \to Aut(\mathcal{R})$ un homomorfismo de grupos. Si $\mathcal{R} *_\theta G$ es artiniano a la izquierda, entonces G es finito.*

Demostración. Como $\mathcal{R} *_\theta G$ es artiniano a la izquierda, entonces por el Corolario 3.2.2 se tiene que $\mathcal{R}$ es artiniano a la izquierda. Como $\mathcal{R}$ es artiniano a la izquierda y semiprimitivo, por la Proposición 2.4.4 se tiene que $\mathcal{R}$ es un anillo semisimple.
Sea $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_n$ la descomposición de $\mathcal{R}$ en ideales simples y sea $H = ker(\theta)$.

Como $\mathcal{R} *_\theta G$ es artiniano a la izquierda, entonces $\mathcal{R} *_{\theta|_H} H = \mathcal{R}[H]$ es artiniano a la izquierda por la Proposición 3.2.2. Luego por el Teorema de Connell se tiene que H es finito.
Ahora probaremos que G es finito. Para ello es suficiente ver que $\theta(G)$ es finito, ya que $G/H \cong \theta(G)$. Como $\mathcal{R}$ es semisimple, entonces $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}_n$, y aplicando θ se tiene que

$$\mathcal{R} = \theta_g(\mathcal{R}_1) \oplus \theta_g(\mathcal{R}_2) \oplus \cdots \oplus \theta_g(\mathcal{R}_n), \text{ para todo } g \in G,$$

pero por la Proposición 2.3.5, la descomposición en ideales es única, por lo tanto θ_g permuta a los ideales $\mathcal{R}_i$.

Definamos

$$H_i = \{\theta_g \in \theta(G) : \theta_g(\mathcal{R}_i) = \mathcal{R}_1\}, \text{ para todo } i \in \{1, ..., n\}.$$

Veamos que si $\theta_g \in H_i$, entonces $H_i = H_1\theta_g$.

Sea $\theta_h \in H_i$, consideremos hg^{-1}, y veamos que $\theta_{hg^{-1}} \in H_1$. En efecto, $\theta_{hg^{-1}}(\mathcal{R}_1) = \theta_h(\theta_{g^{-1}}(\mathcal{R}_1))$, y como $\theta_g \in H_i$, entonces $\theta_{g^{-1}}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_i$, y así $\theta_{hg^{-1}}(\mathcal{R}_1) = \theta_h(\mathcal{R}_i) = \mathcal{R}_1$. Con lo cual tenemos que $\theta_{hg^{-1}} \in H_1$, y ya que $\theta_h = \theta_{hg^{-1}} \circ \theta_g$, se tiene que $\theta_h \in H_1\theta_g$, y por lo tanto hemos demostrado que $H_i \subseteq H_1\theta_g$.

Ahora sea $\theta_h \in H_1\theta_g$, entonces existe $\theta_{h'} \in H_1$ tal que $\theta_h = \theta_{h'} \circ \theta_g$, por lo tanto

$$\theta_h(\mathcal{R}_i) = \theta_{h'}(\theta_g(\mathcal{R}_i)) = \theta_{h'}(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_1,$$

es decir que $\theta_h \in \mathcal{R}_i$, y así podemos concluir que $H_i = H_1\theta_g$.

También debido a que θ_g permuta los ideales $\mathcal{R}_i$, para todo $g \in G$, se tiene que

$$\theta(G) = \bigcup_{i=1}^{n} H_i, \text{ y que } H_i \cap H_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j.$$

Para concluir que G es finito, veamos que H_1 es finito.
Por las Proposiciones 3.2.2 y 3.2.3 se tiene que $\mathcal{R}_1 * H_1$ es artiniano a izquierda, y como $\mathcal{R}_1$ es un ideal simple, por la Proposición 3.2.4 se tiene que H_1 es finito. Entonces también se tiene que H_i es finito, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, por lo tanto $\theta(G)$ es finito. Concluyendo que G es finito. □

Con este último resultado podremos realizar la otra implicación del Teorema de J. K. Park.

Teorema (J. K. Park) Sea $\mathcal{R}$ un anillo y θ un homomorfismo de grupos de G a $Aut(\mathcal{R})$. Entonces, $\mathcal{R} *_\theta G$ es artiniano a la izquierda si y solo si $\mathcal{R}$ es artiniano a la izquierda y G es finito.

Demostración. $\Rightarrow$) Por el Corolario 3.2.2 se tiene que $\mathcal{R}$ es un anillo artiniano a la izquierda.
Sea $J(\mathcal{R})$ el radical de Jacobson de $\mathcal{R}$. Entonces θ induce un homomorfismo de grupos $\sigma : G \to \mathcal{A}ut(\mathcal{R}/J(\mathcal{R}))$, ya que $J(\mathcal{R})$ es invariante bajo la acción de θ. Ahora sea

$$\phi : \mathcal{R} *_\theta G \longrightarrow \mathcal{R}/J(\mathcal{R}) *_\sigma G \ .$$

Definida de la siguiente manera

$$\phi\left(\sum_{g\in G} r_g\delta_g\right) = \sum_{g\in G}(r_g + J(\mathcal{R}))\delta_g.$$

Como ϕ es un epimorfismo de anillos, y como $\mathcal{R}*_\theta G$ es artiniano a la izquierda, entonces $\mathcal{R}/J(\mathcal{R}) *_\sigma G$ es artiniano a la izquierda por la Proposición 2.4.1.
Por la Proposición 2.2.3 se tiene que $\mathcal{R}/J(\mathcal{R})$ es semiprimitivo, entonces por la Proposición 3.2.5, se tiene que G es finito.

□

Hemos visto lo corta y aparentemente sencilla demostración de la segunda implicación del Teorema de J. K. Park, pero en realidad el verdadero reto era demostrar la Proposición 3.2.5, ya que esta es la que nos permite tal facilidad porque la demostración solo se basa en la construcción de $\mathcal{R}/J(\mathcal{R}) *_\sigma G$ y su aplicación. Con esto concluye mi trabajo, que consitió en una expansión de una parte del trabajo de J. K. Park en su artículo[2].

[2]PARK, Jae Keol. Artinian skew group rings. Proceedings of the American Mathematical Society, 1979, vol. 75, no 1, p. 1-7.

REFERENCIAS

[1] CONNELL, Ian G. On the group ring. Canad. J. Math, 1963, vol. 15, no 49, p. 650-685.

[2] DUMMIT, David Steven; FOOTE, Richard M. Abstract algebra. Hoboken: Wiley, 2004.

[3] FISHER, Joe W.; MONTGOMERY, Susan. Semiprime skew group rings. Journal of Algebra, 1978, vol. 52, no 1, p. 241-247.

[4] LEZAMA, Oswaldo. Cuadernos de ÁLgebra. Disponible en Internet: `https://sites.google.com/a/unal.edu.co/sac2/cuadernos-de-algebra`.

[5] PARK, Jae Keol. Artinian skew group rings. Proceedings of the American Mathematical Society, 1979, vol. 75, no 1, p. 1-7.

[6] PASSMAN, Donald S. Infinite crossed products. Academic Press, 1989.

[7] PASSMAN, Donald S. Radicals of twisted group rings. Proceedings of the London Mathematical Society, 1970, vol. 3, no 3, p. 409-437.

[8] MILIES, César Polcino; SEHGAL, Sudarshan K. An introduction to group rings. Springer Science Business Media, 2002.

BLBLIOGRAFÍA

CONNELL, Ian G. On the group ring. Canad. J. Math, 1963, vol. 15, no 49, p. 650-685.

DUMMIT, David Steven; FOOTE, Richard M. Abstract algebra. Hoboken: Wiley, 2004.

FISHER, Joe W.; MONTGOMERY, Susan. Semiprime skew group rings. Journal of Algebra, 1978, vol. 52, no 1, p. 241-247.

LEZAMA, Oswaldo. Cuadernos de ÁLgebra. Disponible en Internet: `https://sites.google.com/a/unal.edu.co/sac2/cuadernos-de-algebra`.

PARK, Jae Keol. Artinian skew group rings. Proceedings of the American Mathematical Society, 1979, vol. 75, no 1, p. 1-7.

PASSMAN, Donald S. Infinite crossed products. Academic Press, 1989.

PASSMAN, Donald S. Radicals of twisted group rings. Proceedings of the London Mathematical Society, 1970, vol. 3, no 3, p. 409-437.

MILIES, César Polcino; SEHGAL, Sudarshan K. An introduction to group rings. Springer Science Business Media, 2002.