

Criterios para el diseño de actividades dirigidas a estudiantes con talento matemático:
valoración de un diseño sobre secuencias y patrones

Luis Fernando Muñoz Gutiérrez

Código: 2192527

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Licenciado en
Matemáticas

Directora:

Sandra Evely Parada Rico

Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2023

Dedicatoria

A quienes trabajan en la constante construcción de un mejor mañana a través del poder transformador de la educación.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero dar gracias a Dios, por darme sabiduría y guiar cada paso de mi camino. También, quiero expresar mis más profundos y sinceros agradecimientos a todas las personas que de alguna manera han aportado a lo largo de mi trayectoria académica y a la culminación de mi carrera universitaria:

A mi familia, por todo su apoyo y cariño, en especial a mi madre y a mis hermanos, ejemplo de esfuerzo y dedicación. Con mucho aprecio a Arley y Mónica, por su generosidad y respaldo durante estos últimos años. A mi directora de tesis, Dra. Sandra Parada, quien con su entrega y conocimientos en nuestra disciplina impulsó el desarrollo de este trabajo. A mis evaluadores de tesis por tomarse el tiempo de leer, valorar y aportar a este producto de investigación. A mis profesores de toda la vida, quienes han contribuido en mi formación académica y personal. A mis compañeros y amigos, con quienes compartimos jornadas de trabajo y momentos cargados de muchas emociones.

¡Muchas gracias a todos!

Agradecimiento especial

La publicación de este trabajo de investigación se logra gracias al apoyo del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia – MINCIENCIAS, que financió el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro” (Código 1115-852 70767), con el proyecto “Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores”, financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología (Código 70783), con recursos del Patrimonio autónomo Fondo Nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas, contrato CT 183-2021.

Contenido

1. Introducción y planteamiento del problema.....	11
2. Antecedentes	15
2.1. Aspectos legales y normativos.....	15
2.1.1. Normativa internacional	16
2.1.2. Normativa nacional	18
2.2. Estudios asociados al talento matemático.....	20
2.3. Desarrollo temprano del pensamiento algebraico y talento matemático	24
3. Marco conceptual y de referencia	25
3.1. Talento Matemático	26
3.2. Diseño Universal para el Aprendizaje DUA.....	29
3.3. Talento y actividad matemáticos	31
3.4. Una propuesta curricular.....	49
4. Proceso metodológico	54
4.1. Fase i: Revisión de un diseño sobre secuencias y patrones	54
4.2. Fase ii: Identificación de criterios para diseñar actividades dirigidas a ETM	55
4.3. Fase iii: Elaboración de un instrumento para valorar actividades dirigidas a ETM	55
4.4. Fase iv: Valoración del instrumento propuesto por juicio experto	56
4.5. Fase v: Valoración del diseño didáctico mediante el instrumento ajustado	56

4.6. Fase vi: Ajustes al diseño didáctico a partir de la valoración realizada en la fase v

58

5. Resultados 58

5.1. Revisión del diseño didáctico sobre secuencias y patrones 59

5.2. Instrumento complementario para valorar las actividades dirigidas a ETM 62

5.3. Resultados del proceso de valoración del instrumento por juicio experto 65

5.4. Valoración del diseño didáctico mediante el instrumento 69

5.5. Diseño didáctico ajustado 78

6. Conclusiones 82

Referencias bibliográficas 84

Apéndices 93

Lista de figuras

Figura 1. <i>Escala de medición del IQ</i>	21
Figura 2. <i>Representación del Modelo de los Tres Anillos</i>	27
Figura 3. <i>Problema sobre secuencias y patrones</i>	33
Figura 4. <i>Actividad sobre invención de problemas y los patrones</i>	37
Figura 5. <i>Caracterización de los niveles de demanda cognitiva</i>	39
Figura 6. <i>Actividad con diferentes enfoques y métodos de resolución</i>	42
Figura 7. <i>Diferentes soluciones para la actividad de la figura 6.</i>	43
Figura 8. <i>Actividad que promueve la reflexión individual y la socialización de ideas</i>	46
Figura 9. <i>Applet Poly con los números triangulares</i>	48
Figura 10. <i>Valoración de propósitos y desempeños del diseño</i>	61
Figura 11. <i>Problema propuesto en el diseño didáctico</i>	72
Figura 12. <i>Preguntas del diseño con niveles de dificultad no progresivos</i>	74
Figura 13. <i>Pregunta del problema que promueve el criterio 5</i>	77
Figura 14. <i>Pregunta del problema que promueve el criterio 7</i>	78
Figura 15. <i>Pregunta del problema que promueve el criterio 8</i>	78
Figura 16. <i>Actividad de invención de problemas agregada al diseño</i>	79
Figura 17. <i>Applet con nueva modalidad de nadado para la invención de problemas</i>	80
Figura 18. <i>Modificaciones hechas al enunciado de la actividad 1</i>	80
Figura 19. <i>Pregunta suprimida en el diseño por su similitud a la pregunta 1</i>	81
Figura 20. <i>Preguntas suprimidas por su similitud y mecanización</i>	81

Lista de tablas

Tabla 1. <i>Misma actividad con diferentes niveles de dificultad en el estudio de patrón. ...</i>	40
Tabla 2. <i>Rúbrica para valoración del instrumento de la fase iii mediante juicio experto ..</i>	57
Tabla 3. <i>Instrumento complementario a la rúbrica versión 1</i>	64
Tabla 4. <i>Sistematización de las rubricas recibidas de juicio de experto.....</i>	66
Tabla 5. <i>Instrumento final para valorar actividades dirigidas a ETM</i>	68
Tabla 6. <i>Valoración del diseño didáctico</i>	69
Tabla 7. <i>Forma uno de resolver el problema del momento 3.....</i>	75
Tabla 8. <i>Forma dos de resolver el problema del momento 3</i>	76
Tabla 9. <i>Forma tres de resolver el problema del momento 3.....</i>	77

Lista de apéndices

Apéndice A. <i>Rúbrica general para valorar diseños didácticos del proyecto 70783.....</i>	93
Apéndice B. <i>Diseño ajustado</i>	97

Resumen

Título: Criterios para el diseño de actividades dirigidas a estudiantes con talento matemático: valoración de un diseño sobre secuencias y patrones*

Autor: Luis Fernando Muñoz Gutiérrez**

Palabras clave: Atención a la diversidad, talento matemático, diseño de actividades.

Descripción:

En las últimas décadas, las políticas educativas a nivel mundial han reconocido la importancia de entender las diversas características de los estudiantes, incluyendo habilidades, intereses y estilos de aprendizaje. Sin embargo, persisten desafíos en la atención a la diversidad en las aulas, especialmente con aquellos Estudiantes con Talento Matemático (ETM). Blanco (1990); Unesco (2004); y, Escrivá, et al (2017).

La investigación aquí documentada tuvo como objetivo postular algunos criterios para la formulación de actividades dirigidas a ETM, desde el análisis y valoración de un diseño sobre secuencias y patrones para estudiantes de primaria con estas características.

Entre los resultados, se lograron postular los siguientes criterios: 1) promover la resolución problemas desafiantes, que fomentan la creatividad y la persistencia; 2) posibilitar la invención de problemas, que permitan exponer la comprensión matemática; 3) proporcionar variados niveles de dificultad en las actividades; 4) ofrecer múltiples enfoques y/o métodos de resolución en las actividades; 5) favorecer la introspección sobre las soluciones propias del estudiante; 6) propiciar la socialización de ideas y el trabajo en equipo; 7) hacer uso integral de diferentes recursos, como la tecnología o material concreto; y, 8) promover el enriquecimiento curricular, ampliando el bagaje matemático de los estudiantes. Elia, et al (2009); Espinoza, et al (2016); Valbuena, et al (2022); Vale, et al (2012); y, Voica y Singer (2013). Estos criterios complementaron una rúbrica para evaluar diseños didácticos que pretenden atender a la diversidad en el aula, en el marco de una propuesta curricular.

Se concluye que cumplir con los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje no es suficiente; por lo que es esencial satisfacer criterios adicionales para atender las necesidades de los ETM. El instrumento generado se presenta como una contribución valiosa para profesores e investigadores que buscan diseñar actividades para este grupo de estudiantes.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Dra. Sandra Evely Parada Rico.

Abstract

Title: Criteria for the design of activities aimed at students with mathematical talent: evaluation of a design on sequences and patterns*

Author: Luis Fernando Muñoz Gutiérrez**

Key words: Attention to diversity, mathematical talent, activity design

Description:

In recent decades, educational policies worldwide have recognized the importance of understanding the diverse characteristics of students, including abilities, interests, and learning styles. However, challenges persist in addressing diversity in classrooms, especially with Mathematically Talented Students. Blanco (1990); UNESCO (2004); and, Escrivá, et al (2017).

The research documented here aimed to propose some criteria for the formulation of activities aimed at talented math students, from the analysis and assessment of a design on sequences and patterns for primary school students with these characteristics.

Among the results, the following criteria were proposed: 1) promote the resolution of challenging problems, which encourage creativity and persistence; 2) enable the invention of problems, which allow mathematical understanding to be exposed; 3) provide varied levels of difficulty in activities; 4) offer multiple approaches and/or resolution methods in the activities; 5) encourage introspection about the student's own solutions; 6) promote the socialization of ideas and teamwork; 7) make comprehensive use of different resources, such as technology or concrete material; and, 8) promote curricular enrichment, expanding the mathematical background of students. Elia, et al (2009); Espinoza, et al (2016); Valbuena, et al (2022); Vale, et al (2012); and, Voica and Singer (2013). These criteria complemented a rubric to evaluate didactic designs that aim to address diversity in the classroom, within the framework of a curricular proposal.

It is concluded that complying with the principles of Universal Design for Learning is not enough; therefore, it is essential to satisfy additional criteria to meet the needs of talented math students. The generated instrument is presented as a valuable contribution for teachers and researchers who seek to design activities for this group of students.

* Bachelor thesis

** Science Faculty. Mathematics school. Director: Dr. Sandra Evelyn Parada Rico.

1. Introducción y planteamiento del problema

A nivel global, las políticas educativas han venido experimentando transformaciones significativas en las últimas décadas, al reconocer las características (habilidades, intereses, estilos de aprendizaje y necesidades) de los estudiantes como un pilar fundamental de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Transformaciones que han permeado también al campo de la educación matemática.

La matemática, a menudo percibida como una disciplina abstracta y desafiante, puede convertirse en un obstáculo significativo para aquellos estudiantes que enfrentan barreras en su aprendizaje. Estas barreras pueden estar relacionadas con diferencias en las habilidades cognitivas, dificultades de aprendizaje, diferencias culturales, discapacidades, capacidades excepcionales o simplemente variaciones en las formas en que los estudiantes comprenden y procesan la información. Por tanto, se ha reconocido que ignorar estas diferencias podría conducir a la exclusión en el aula de clases y al desarrollo de brechas en el rendimiento académico (Blanco, 1990; Unesco, 2004; Velasco, 2022); por lo que se están buscando métodos que garanticen que todas las personas tengan acceso a una educación de calidad.

Por otra parte, otro aspecto que genera retrocesos en los avances sobre la atención a la diversidad es la falta de adaptación y flexibilización del currículo. Blanco (1990) afirma que “tradicionalmente la escuela se ha centrado en la satisfacción de las necesidades educativas comunes, expresadas a través de objetivos diseñados en función del engañoso e inexistente “alumno medio”, y no se ha preocupado de las necesidades individuales.” Hoy por hoy, ésta sigue siendo una realidad. La rigidez del currículo escolar ha generado propuestas homogeneizadoras, donde escasamente se especifican los aspectos de qué, cómo y cuándo enseñar y evaluar. De esta falta de adaptabilidad a diversos contextos de enseñanza

y aprendizaje resultan dificultades de aprendizaje y deficiencias en el desempeño académico de los estudiantes.

Velasco (2022) revela que cuando los profesores se preparan para sus clases escasamente efectúan el proceso de adaptación, flexibilización y aplicación de ajustes razonables en el currículo; y cuando lo hacen, se basan principalmente en un enfoque de prueba y error; proceso repetitivo que consiste en diseñar, implementar y corregir la guía de clase; lo anterior, tal vez sucede porque, como afirma Pineda (2018), los profesores del área no cuentan con la formación necesaria para atender a la diversidad del aula.

Ahora bien, dentro de la diversidad del aula se encuentran aquellos estudiantes identificados con capacidades y talentos excepcionales. Al respecto, la Unesco (2004) menciona que los estudiantes con talento “también precisan adaptaciones del currículum y entornos de aprendizaje que optimicen su desarrollo y aprendizaje” (p. 11); y que los profesores y profesionales de apoyo deben ser capaces de reconocer sus características y responder a sus necesidades, para estimular e impulsar sus capacidades, lo que se ve obstaculizado por la falta de caracterización, atención y de un consenso sobre los términos y nominaciones propios de este colectivo.

Sobre la falta de caracterización, muchos estudiantes con capacidades o talentos excepcionales pasan desapercibidos por los sistemas educativos, esto porque no se les aplica pruebas de identificación, sino que simplemente se incluyen planteándoseles las mismas exigencias, pensadas para el “alumno promedio”. Al respecto, la Unesco (2004) afirma que “es fundamental identificar a estos estudiantes, no con el fin de “ponerles una etiqueta”, sino para hacerlos visibles y asegurar que reciban una educación adecuada. De esta forma será posible asegurar la igualdad de oportunidades para este colectivo.” (p. 50).

Respecto a la falta de atención a estudiantes con capacidades o talentos excepcionales, se puede afirmar que éstos no son suficientemente atendidos por los sistemas educativos, pues muchos consideran que ellos pueden ser autosuficientes y pueden aprender por su propia cuenta. Así lo confirma la Unesco (2004) al afirmar lo siguiente:

No es extraño, entonces, que ante esta situación el primer grupo en ser ignorado sea el de los alumnos más capaces, ya que se supone, erróneamente, que a ellos “les irá bien” sin necesidad de mayores recursos o ajustes en la enseñanza. En la mayoría de los países no se considera que estos alumnos, al igual que aquellos que presentan discapacidad o problemas de aprendizaje, requieren ayudas y recursos especiales para que alcancen su máximo potencial. (p. 10)

La falta de consenso sobre los términos y nominaciones para dirigirse a estudiantes con altas capacidades y talentos, puede ser porque a pesar de existir modelos y teorías que permiten entender, explicar y categorizar la excepcionalidad de los estudiantes, estas se interpretan desde diferentes perspectivas o posturas disciplinares. En muchos países se adoptan expresiones como “superdotados” “estudiantes talento” “altas capacidades”, “capacidades excepcionales”, entre otros. Lo anterior supone un atraso en el progreso de las investigaciones sobre la atención educativa de Estudiantes con Talento Matemático (ETM de ahora en adelante), ya que varios autores se enfocan más en escoger una “etiqueta” a usar, en lugar de proponer posibles alternativas para atender a estos estudiantes de forma suficiente dentro del sistema educativo (Espinoza, 2018; y, Guirado, 2015).

Todo lo anterior daría lugar a una línea de investigación que responda a cuestiones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en Estudiantes con talento en esta área. El reporte de investigación que se está presentando aquí se cuestiona sobre las

características que deben tener las actividades que se proponen a los ETM, para potenciar sus habilidades y atenderlos de acuerdo a ellas. Puesto que, al no contar con profesores de matemáticas con suficiente formación para atender a la diversidad en el área, se requieren algunos criterios orientadores tanto para el diseño o adaptación de los materiales de apoyo, como para ofrecer una educación matemática adaptada y enriquecida que potencie sus habilidades (Jaime y Gutiérrez, 2014; Castaño y Robledo, 2008).

Por otra parte, en las últimas décadas surgió una corriente denominada álgebra temprana o *Early-Algebra* la cual sugiere introducir nociones algebraicas desde los primeros grados de primaria, en lugar de esperar hasta la educación secundaria para introducir temas algebraicos formales, como ecuaciones y variables. Según Vergel (2010) esta perspectiva de transformación en el currículo impulsa a los estudiantes a examinar y explicar patrones, conexiones y características matemáticas. Además, crea un entorno educativo en el cual los estudiantes pueden investigar, crear modelos, hacer predicciones, participar en discusiones, argumentar, validar ideas y también poner en juego sus habilidades de cálculo. Por tanto, el estudio de patrones ofrece un escenario especial para explorar relaciones entre cantidades, identificar regularidades y realizar generalizaciones y predicciones. Lo anterior, sienta las bases para un desarrollo progresivo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

En particular, Arbona, et al. (2017) al realizar un estudio sobre patrones geométricos como contexto para introducir a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas en el álgebra; logra concluir que las tareas propuestas permitieron que ellos pusieran de manifiesto características propias de las altas capacidades y que son una buena herramienta para introducirlos en el álgebra a través de “la generalización de relaciones

funcionales y la posterior simbolización de las expresiones verbales que describen dichas generalizaciones.” (p. 46).

En esta investigación, se asume el estudio de patrones a través de secuencias figurales con apoyo tabular, puesto que se ofrecen elementos geométrico-espaciales (figuras) y la asociación con un número. De esta manera, los elementos de la secuencia están asociados con el número de una figura (Vergel, 2014).

Ante lo problematizado anteriormente, se plantea la pregunta ¿Qué criterios necesitan considerarse para diseñar actividades dirigidas a ETM, específicamente cuando se abordan secuencias y patrones en primaria? Para responder a este cuestionamiento, se ha planteado como objetivo: Postular algunos criterios para la formulación de actividades dirigidas a ETM, desde el análisis y valoración de un diseño sobre secuencias y patrones para estudiantes de primaria con estas características.

2. Antecedentes

En este apartado, se destacan resultados de investigación, previos a este trabajo y que están asociados a aspectos legales y didácticos, tanto internacionales como nacionales, referentes a la atención a la diversidad y para el caso específico de las capacidades excepcionales y el talento matemático. Además, se presentan algunos estudios asociados a las altas capacidades y el talento matemático. Finalmente, se muestran algunos trabajos relacionados con la propuesta *Early-Algebra* y el talento matemático.

2.1. Aspectos legales y normativos

En el ámbito legislativo, se ha observado un creciente reconocimiento de la importancia de la atención a la diversidad y la educación inclusiva para las personas con

Necesidades Educativas (NE), específicamente para aquellos estudiantes con capacidades y/o talentos excepcionales. En consecuencia, se han impulsado políticas, leyes y directrices con el objetivo de asegurar una educación de alta calidad para esta población. A continuación, se expone brevemente parte de la normativa que aborda el derecho a la educación que tienen las personas con capacidades o talentos excepcionales, en particular con talento Matemático, tanto en el ámbito internacional como nacional.

2.1.1. Normativa internacional

En el ámbito internacional diversos organismos e instituciones han contemplado la educación de estudiantes con necesidades educativas, en particular, aquí se rescatan algunos relacionado con estudiantes con capacidades y talentos excepcionales.

En España, 1994, se llevó a cabo la *Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales: acceso y calidad* organizada por la Unesco y el Gobierno de España. En el documento generado en esta conferencia se contempla el derecho a una educación inclusiva y de calidad. Allí se afirma que para lograr una verdadera inclusión hay que introducir cambios significativos en la práctica educativa tradicional en todos los niveles, desde el preescolar hasta el universitario, a través de estrategias adaptables y flexibles, según las necesidades educativas de cada estudiante. Además, se afirma que hay que replantear la formación de los profesores, de tal forma que se genere un cambio de actitud y mentalidad frente a la educación.

Por su parte la Unesco (2004) reconoce que al igual que los estudiantes con discapacidad o problemas de aprendizaje, los estudiantes con talento también requieren: ambientes de aprendizaje que optimicen su desarrollo y aprendizaje; adaptaciones curriculares; y, profesores y otros profesionales de apoyo capaces de atender sus necesidades

educativas. Esta misma organización menciona que se deben ofrecer estrategias educativas, entre la cuales la atención individualizada en el aula es la opción más inclusiva, recibiendo allí el apoyo cuando sea requerido. Para ello, “es preciso desarrollar procesos de formación que proporcionen a los profesores las herramientas necesarias para enriquecer el currículo y diseñar actividades de aprendizajes adecuadas a las capacidades de los alumnos.” (Unesco, 2004, p. 52).

También, se considera *la adaptación o modificación del currículo* la cual acoge dos formas: la compactación y el enriquecimiento. La primera se refiere a suprimir aquellos temas que el estudiante ya conoce y domina, para proponerle en cambio actividades que representen un desafío para él. La segunda se refiere a integrar temas o contenidos que no se encuentran en el currículo oficial o a profundizar más en lo que se propone en éste. Al respecto, se afirma lo siguiente:

El enriquecimiento curricular es, sin duda, la estrategia que más posibilidades y alternativas ofrece para la atención de la diversidad, y especialmente para la atención de niños con alta capacidad y talento, por lo que es muy idónea desde el punto de vista de una escuela comprensiva que debe dar respuesta a las necesidades, capacidades e intereses de todos los alumnos y alumnas (Unesco, 2004, p. 55)

Adicionalmente, se tiene que para la atención de ETM es necesario el diseño de actividades desafiantes, como la resolución de problemas, proyectos de investigación o tareas que involucren respuestas novedosas y creativas.

2.1.2. Normativa nacional

A partir de 1991, la Constitución Política de Colombia garantiza el derecho a la educación para todas las personas, donde se contempla a la educación, de manera general, como “un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura.” (Artículo 67). Así mismo, en el artículo 68 se plantea que es obligación del Estado la educación de las personas con limitaciones o con capacidades excepcionales.

Posteriormente, en 1994 se establece la *Ley 115, Ley general de educación*, que de manera más particular expresa el derecho que tienen los estudiantes con capacidades o talentos excepcionales a una atención integral dentro de las instituciones educativas oficiales del país, y a la flexibilidad que estas deben tener para con ellos.

El Gobierno Nacional facilitará en los establecimientos educativos la organización de programas para la detección temprana de los alumnos con capacidades o talentos excepcionales y los ajustes curriculares necesarios que permitan su formación integral. El reglamento definirá las formas de organización de proyectos educativos institucionales especiales para la atención de personas con talentos o capacidades excepcionales, el apoyo a los mismos y el subsidio a estas personas, cuando provengan de familias de escasos recursos económicos. (Artículo 49 de la Ley 115 de 1994).

Más adelante, en 1996 se expide el decreto 2082, por el cual se reglamenta la atención educativa para personas con limitaciones o con capacidades o talentos excepcionales. En el artículo 2 del decreto antes mencionado se afirma que, para atender las particularidades

educativas de esta población, se debe ofrecer un apoyo didáctico, tecnológico y espacios enfocados en la actividad pedagógica flexibles de acuerdo con su edad.

En 1997, surge la *Ley 361*, en la cual se dicta que los mecanismos de integración social y otras disposiciones decretadas para personas con limitación sean también aplicados a personas con excepcionalidad. En esta ley se recalca la necesidad de diseñar y producir materiales especiales y la realización de convenios con universidades y otras instituciones para apoyar los procesos educativos dirigidos a esta población.

Por su parte, el Ministerio de Educación Nacional (2001), propuso el documento *Lineamientos generales de política para la atención de personas con talentos y/o capacidades excepcionales*. En este documento se establece una definición de excepcionalidad propia para el país, estableciendo una diferencia entre estudiante con talento y estudiante dotado. Además, se hacen algunas sugerencias didácticas generales, entre las que se encuentra la importancia de adaptar y modificar los programas de enseñanza para esta población, pero con el mismo proceso estructural que los diseñados para todos los alumnos.

Adicionalmente, en 2003 se promulga la resolución 2565, en la que se reglamentan algunos parámetros y criterios para la prestación del servicio educativo a la población con Necesidades Educativas Especiales. Dentro de estas disposiciones, se incluyen diversas responsabilidades para los docentes y otros profesionales de apoyo. Entre ellas se encuentran la sugerencia y ejecución de proyectos de investigación en áreas de calidad e innovación educativa, así como para la difusión de sus resultados y progresos. Además, se espera que trabajen en colaboración con los profesores en la implementación de recursos pedagógicos para atender las necesidades de esta población, incluyendo proyectos personalizados y adaptaciones curriculares.

En 2009 el MEN expide el decreto 366, con el que reglamenta la organización del servicio de apoyo pedagógico para la atención de los estudiantes con discapacidad, con capacidades o talentos excepcionales en el marco de la educación inclusiva. El artículo 8 del decreto antes mencionado se enfoca en la atención a estudiantes con capacidades y talentos excepcionales donde, de manera semejante a la normativa antes citada, se orienta a las instituciones que tengan estudiantes con estas características para que organicen, flexibilicen, adapten y enriquezcan el currículo y el plan de estudios, teniéndolos en cuenta a ello. Asimismo, se busca establecer una colaboración con instituciones de educación superior del país o la región, a fin de desarrollar programas que impulsen y fortalezcan sus habilidades.

En 2015 se expide el decreto 1075, Decreto Único Reglamentario del Sector de Educación, que es compilatorio de normas reglamentarias preexistentes, y citadas anteriormente, por lo que podría accederse a toda esta normativa nacional relacionada con la educación para personas con NEE de forma directa en este documento.

2.2. Estudios asociados al talento matemático

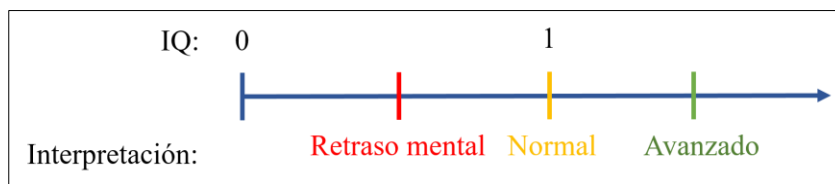
En las últimas décadas, la educación de estudiantes con altas capacidades, y en particular con talento matemático, ha captado el interés de los investigadores desde diferentes campos científicos, como el de la Psicología y la Didáctica de las Matemáticas. Por ello, existen diversas investigaciones a nivel internacional y nacional que han ayudado a entender y conceptualizar el talento matemático, desde distintos enfoques; así como aportar elementos al desarrollo académico y personal de las personas con estas características. En este apartado, se presentan de manera sintetizada algunos de estos trabajos.

Inicialmente, las investigaciones se centraban en el concepto de inteligencia y en su medición. Por ejemplo, en 1912 el psicólogo alemán William Stern presentó una propuesta

de medición denominada cociente intelectual (IQ, por sus siglas en inglés), la cual se convirtió en una de las ideas más difundidas y conocidas de la psicología en siglo XX, Kovacs & Pléh (2023). En Stern (1914) se presenta el IQ como un indicador para evaluar la capacidad intelectual de las personas; y, se expresa como un número obtenido mediante la fórmula
$$\text{Cociente intelectual} \sim \frac{\text{Edad mental}}{\text{Edad cronológica}}$$
. La edad mental representa el nivel de desarrollo cognitivo que una persona demuestra en una prueba de inteligencia, mientras que la edad cronológica es su edad real en años.

El autor interpreta dicho indicador de la siguiente manera: Si el IQ de la persona es 1, está justo en su nivel “normal”; si el valor es menor a la unidad, presenta “retraso mental”; y, si el valor es mayor a la unidad, la persona presenta niveles avanzados (ver **Figura 1**). Actualmente, esta propuesta sigue siendo empleada en varias evaluaciones para categorizar la inteligencia utilizando términos como "inferior", "promedio" o "superior".

Figura 1. Escala de medición del IQ



Fuente: Stern (1914)

No obstante, la propuesta del IQ y otras propuestas de medición de la inteligencia han sido cuestionadas por no considerar otros factores que también influyen en la inteligencia. De hecho, Stern mismo se convirtió en un crítico de su propio concepto de Coeficiente Intelectual (Kovacs & Pléh, 2023).

Posteriormente, aparecieron conceptos más amplios de inteligencia y talento, los cuales involucran el contexto de las personas y sus múltiples habilidades. Por ejemplo, Howard Gardner, presentó su propuesta conocida como la Teoría de las Inteligencias Múltiples, en la que adopta una perspectiva pluralista de la mente al reconocer múltiples facetas distintas de la cognición. También considera que las personas poseen diversos potenciales cognitivos y contrasta diferentes estilos cognitivos, por lo que el autor propone la existencia de nueve tipos de inteligencias, a saber: corporal-kinestésica, interpersonal, lingüístico-verbal, lógico-matemática, naturalista, intrapersonal, visual-espacial y musical. (Gardner, 2001). Otras propuestas teóricas, como el Modelo de Renzulli, son presentados el Capítulo 3 del marco referencial y conceptual.

De otro lado, cabe mencionar que, en la actualidad, el origen y concepción del talento aún es tema de debate, ya que hay quienes las describen como una característica genética o innata y otros como capacidades que la persona desarrolla gracias a ciertas condiciones favorables del medio. Por ello, hoy en día se habla de talento actual y talento potencial.

De acuerdo con Benavides (2008), el talento actual se refiere al desarrollo y manifestación de habilidades por parte de un individuo talentoso, mientras que el talento potencial se refiere a habilidades que aún no se han desarrollado o manifestado. Por lo tanto, el talento no solo tiene un componente relativo, sino que también implica un aspecto evolutivo. Este último aspecto está influenciado por diversos factores, como el contexto, la familia y las instituciones.

Por otra parte, en los últimos años, el estudio del talento matemático también ha sido tema de interés en el campo de la Didáctica de las Matemáticas. Por ejemplo, en Arbona et al (2017), Gutiérrez (2017) y Escrivá (2017) se ha realizado un extenso trabajo de

caracterización de los ETM, a través de la resolución de problemas que involucran el razonamiento algebraico y el razonamiento geométrico. Los autores utilizan el termino alta capacidad matemática (acm) para referirse a los estudiantes que demuestran un nivel de destreza matemática notablemente superior al de los estudiantes promedio de su misma edad o grado, aunque no sean catalogados como superdotados. Así mismo, consideran que este colectivo de estudiantes debe recibir atención diferenciada en clase de matemáticas. En Arbona et al (2017), se identifica como características principales de los estudiantes con altas capacidades matemáticas la destacada habilidad para generalizar patrones y su flexibilidad en el uso de estrategias para hacerlo; la destreza para localizar puntos clave en los problemas; invertir los procesos mentales; y, la rapidez de aprendizaje y uso de herramientas algebraicas. Por otra parte, en Gutiérrez (2017) y en Escrivá (2017) se mostró que los estudiantes con altas capacidades matemáticas ponen de manifiesto una gran cantidad de habilidades de visualización y manejo espacial ante diversas tareas de resolución de problemas.

En este mismo campo de investigación, Espinoza, Lupiañez y Segovia (2016) han realizado un amplio trabajo de investigación sobre la invención de problemas aritméticos por parte de estudiantes identificados con talento matemático. Los autores adoptan la definición de talento de Passow (1993) para referirse a estudiantes que han demostrado un logro y rendimiento destacado en matemáticas y, por tanto, aptitudes específicas en esta área. Además, para caracterizar a los estudiantes con talento, presentaron dos situaciones semiestructuradas de invención de problemas a dos grupos distintos denominados “grupo talento” y “grupo estándar”. Como su nombre lo indica, el primer grupo estuvo conformado por estudiantes caracterizados como talentos en matemáticas, mientras que el segundo estuvo conformado por estudiantes promedio. Al analizar las producciones de los estudiantes, los

autores presentan, entre otras cosas, que se evidenciaron diferencias estadísticamente significativas entre las producciones de los grupos estudiados; puesto que los problemas propuestos por el “grupo talento” tienen más proposiciones y diferentes relaciones semánticas, requieren mayor cantidad de pasos y niveles de cálculo, tienen mayor cantidad de operaciones, poseen distintos sistemas numéricos y usan el lenguaje matemático de forma más fluida que el “grupo estándar”. Finalmente, concluyen que “las actividades de invención de problemas pueden ser consideradas en la identificación de estudiantes con talento en matemáticas.” (Espinoza, Lupiañez y Segovia, 2016, p. 389).

2.3.Desarrollo temprano del pensamiento algebraico y talento matemático

A nivel internacional, se menciona la perspectiva de *Early-Algebra*, que según Vergel (2010), busca integrar y fomentar hábitos de pensamiento que permitan a los estudiantes pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas desde las primeras etapas escolares. Sin embargo, existen trabajos de investigación que abordan la perspectiva del álgebra temprana específicamente con ETM.

Por su parte, Arbona (2016) investigó cómo introducir y trabajar pre-álgebra con estudiantes de Educación Primaria identificados con alta capacidad matemática, a través de problemas relacionados con patrones. Luego de haber diseñado e implementado una secuencia de enseñanza enfocada en la introducción del álgebra por medio de problemas de generalización de patrones y conceptos propios del álgebra, la autora logra concluir que los estudiantes pusieron en juego, características propias de las altas capacidades matemáticas, tales como: la identificación de patrones y relaciones, la capacidad de generalizar, la flexibilidad en el uso de estrategias, la localización de la clave en los problemas y, sobre todo, la rapidez de aprendizaje. Esta última característica fue evidenciada porque los

estudiantes lograron manipular rápidamente símbolos algebraicos y comprender el significado de su terminología básica del álgebra; entre tales logros se resalta la comprensión del significado de la variable como número generalizado.

En esta misma línea, Gutiérrez et al. (2018) sostiene que los ETM requieren enfoques de enseñanza específicos para fomentar su interés y compromiso en la resolución de problemas matemáticos; y, que los problemas de patrones geométricos se presentan como un contexto interesante para introducir el álgebra a estos estudiantes.

Por otro lado, Valbuena, et al. (2022) desarrollaron una investigación sobre el abordaje del álgebra temprana en estudiantes de básica primaria con capacidades excepcionales. El objetivo fue caracterizar secuencias didácticas para el desarrollo de las competencias de resolución de problemas y argumentación en el álgebra temprana en estudiantes con talentos excepcionales. Luego de implementar algunas secuencias propuestas, los autores observaron que los problemas numerales, figúrales y las situaciones problemas que presenta una incógnita promueven el desarrollo de competencias en la resolución de problemas y argumentación. Así mismo, concluyen que estas competencias permiten que los estudiantes con talento excepcional en matemáticas empleen su creatividad e ingenio para resolver problemas de múltiples maneras.

3. Marco conceptual y de referencia

En este apartado, se presentan los elementos conceptuales que sustentan el presente trabajo de investigación, y que fueron rastreados principalmente desde la literatura en Educación Matemática. En primer lugar, se presenta una conceptualización del talento matemático, y algunas características de las personas que lo poseen. Posteriormente, se presentan algunas generalidades del Diseño Universal para el Aprendizaje DUA, cuyos

principios y pautas para atender la diversidad del aula orientan, en parte, la propuesta curricular presentada en el marco de referencia. Luego, se presentan criterios para el diseño de actividades dirigidas a ETM. La identificación y postulación de estos criterios también se realiza siguiendo los principios y pautas del DUA, así como algunas orientaciones referidas dentro de la literatura en Educación Matemática. Finalmente, se describe la estructura y otros aspectos de una propuesta curricular, en la cual se enmarca este trabajo de investigación.

3.1. Talento Matemático

A pesar del esfuerzo que han realizado los profesionales expertos en estudiar el talento, aún en la actualidad referirse al tema puede resultar conflictivo, puesto que siguen existiendo términos como superdotado, genio, prodigio, talento, precoz, entre otros; lo cual causa confusión sobre cómo referirse a esta población. Sin embargo, la literatura actual sugiere hablar de altas capacidades, talento o capacidades excepcionales.

Autores como Guirado (2015) se refiere a las altas capacidades como un término que engloba, en una misma categoría, toda la diversidad presente en la inteligencia excepcional, incluyendo la superdotación y todas las habilidades y talentos desarrollados a través de la experiencia.

Por su parte, Renzulli (2005) propuso el Modelo de los Tres Anillos, donde, de manera más específica, entiende el talento como la interacción entre tres grupos básicos de características: capacidad por encima de la media, fuertes niveles de compromiso con la tarea y fuertes niveles de creatividad. (Ver figura 2).

Figura 2. *Representación del Modelo de los Tres Anillos*

Fuente: Adaptado de Renzulli (2005).

En cuanto a la primera característica, la habilidad por encima de la media, según el autor, puede manifestarse de dos maneras: habilidad general o habilidad específica. Respecto a la habilidad general, se sostiene que abarca rasgos que son aplicables en todos los ámbitos y se refiere a la capacidad de procesar información de manera amplia, integrar experiencias para obtener respuestas adecuadas y adaptativas ante nuevas situaciones, así como implicar en el pensamiento abstracto. Por otro lado, la habilidad específica se refiere a la capacidad de adquirir conocimientos, destrezas o habilidades para desempeñarse en uno o varios campos especializados dentro de un ámbito limitado.

En relación con el compromiso con la tarea, se aclara que ésta implica la dedicación de energía hacia un problema o un área de desempeño específica. Otros términos generalmente usados son persistencia, tenacidad, esfuerzo, práctica dedicada, confianza en uno mismo, y acción dirigida a las áreas de interés personal. Así mismo, la creatividad es definida como la capacidad de generar ideas, conceptos o soluciones originales y valiosas.

En estudios más recientes, se ha prestado especial atención a la investigación de los aspectos de la creatividad y el talento matemático, y se han establecido relaciones sólidas entre ambos conceptos en el campo de la Educación Matemática. Según Torrance (1995), citado por Leikin & Pitta-Pantazi (2013), la creatividad matemática se define como un proceso que involucra las siguientes funciones cognitivas: la fluidez, la flexibilidad y la originalidad. La fluidez es entendida como la cantidad de ideas que un individuo puede proponer ante un problema; la flexibilidad se percibe como la capacidad de realizar un cambio de enfoque al resolver un problema y para proporcionar diversas soluciones desde distintas perspectivas; y, la originalidad es la facultad para proponer soluciones poco frecuentes entre sus pares, y singulares para sus experiencias y características.

Asimismo, diversos estudios presentan listas de características observadas en estudiantes con talento en matemáticas. Por ejemplo, Greenes (1981) identifica ocho características: formulación espontánea de problemas, flexibilidad en el uso de datos, generación abundante de ideas, originalidad en la interpretación, habilidad para transferir ideas, capacidad de generalización, habilidad para organizar datos y preferencia por problemas en lugar de ejercicios repetitivos. Greenes ilustra cada una de estas características mediante diferentes tareas y respuestas de los estudiantes.

En Colombia, el MEN (2009) describe a un estudiante con capacidades o con talentos excepcionales como aquel que posee una habilidad general que le permite alcanzar resultados destacados en pruebas que evalúan tanto la capacidad intelectual como los conocimientos generales, o bien, exhibe un desempeño sobresaliente y temprano en un campo específico.

Teniendo en cuenta las consideraciones previas, en esta investigación se concibe a una persona con talento matemático como aquella que muestra habilidades destacadas en el

campo específico de las matemáticas. Además, se caracteriza por procesar información amplia y pensar de forma abstracta con mayor facilidad, su compromiso y perseverancia en diversas tareas, así como por su notable nivel de creatividad, lo cual se traduce en funciones cognitivas destacadas en términos de fluidez, flexibilidad y originalidad.

3.2.Diseño Universal para el Aprendizaje DUA

En el decreto 1421 de 2017, expedido por el MEN se propone el Diseño Universal para el Aprendizaje DUA como un elemento fundamental para atender a todos los estudiantes en el aula. En dicho decreto se menciona que el DUA se trata de una propuesta pedagógica que facilita un diseño curricular en el que tengan cabida todos los estudiantes, a través de objetivos, métodos, materiales, apoyos y evaluaciones formulados partiendo de sus capacidades y realidades. Según el decreto antes mencionado, el DUA se define como una estrategia educativa que permite elaborar un plan de estudios inclusivo que abarque a todos los alumnos, considerando sus habilidades y circunstancias individuales. Esto se logra mediante la formulación de metas, enfoques, recursos, asistencias y evaluaciones adaptadas a sus necesidades y contextos específicos.

El DUA está conformado por tres principios rectores, a saber: Presentar múltiples formas de representación, proporcionar múltiples formas de expresión y proporcionar múltiples formas de implicación. Cada principio establece tres pautas que pueden entenderse como estrategias para alcanzar un plan de estudios accesible para todos los estudiantes. A continuación, se explican estos tres principios, junto a las tres pautas que cada uno propone.

i) Proporcionar múltiples formas de representación

Este principio del DUA se enfoca en la búsqueda de estrategias y recursos didácticos que aseguren que todos los estudiantes tengan acceso a la información, considerando que cada uno de ellos tiene percepciones y comprensiones diferentes. Por lo tanto, es necesario proporcionar representaciones múltiples y variadas de los objetos matemáticos, para facilitar su aprendizaje. Este principio propone las siguientes pautas: proporcionar opciones para la percepción; proporcionar opciones para el lenguaje, expresiones, matemáticas y símbolos; y, proporcionar opciones para la comprensión.

ii) Proporcionar múltiples formas de acción y expresión

Este principio destaca la importancia de fomentar actividades en las que no se establezca un único enfoque de respuesta, permitiendo así que los estudiantes elijan entre diversos caminos para adquirir nuevos conocimientos. Según Pastor (2019) este principio “se refiere a las estrategias didácticas relacionadas con el «cómo» del aprendizaje.” (p. 62). En él se establecen las siguientes tres pautas: proporcionar opciones y medios físicos para la acción, proporcionar opciones para la expresión y la comunicación, proporcionar opciones para las funciones ejecutivas.

iii) Proporcionar múltiples formas de implicación

Este principio se centra en fomentar la motivación y comprensión de los estudiantes en su proceso de aprendizaje, y destaca la importancia de activar las emociones y afectos. Por tanto, resulta crucial identificar los intereses y motivaciones de los estudiantes, ya que algunos pueden sentirse más motivados por lo nuevo y espontáneo, mientras que otros prefieren enfoques tradicionales o rutinarios. Este principio propone las siguientes tres

pautas: proporcionar opciones para el interés; proporcionar opciones para sostener el esfuerzo y la persistencia; y, proporcionar opciones para la autorregulación.

3.3.Talento y actividad matemáticos

En el contexto de la atención a la diversidad, es esencial reconocer y nutrir el potencial de los ETM. Estos estudiantes poseen habilidades excepcionales que requieren desafíos educativos específicos para su pleno desarrollo. Las actividades diseñadas para ellos deben ser estimulantes, flexibles y adaptadas a sus necesidades individuales.

Es por ello, que a continuación se postulan ciertos criterios para el diseño de actividades dirigidas a ETM. Éstos fueron fundamentados desde la literatura en Educación Matemática y su identificación estuvo influenciada por los principios y pautas del DUA. A continuación, se enuncia cada criterio, seguido de su fundamentación teórica y un ejemplo que ilustra cómo se fomentaría la comprensión y aplicación dicho criterio para el caso del estudio de las secuencias y patrones.

I) Promover la resolución de diversos problemas no rutinarios, que fomentan la creatividad, la persistencia y el pensamiento crítico.

La resolución de problemas es un proceso propuesto en el currículo escolar hace más de un par de décadas; y, que hoy se considera como una de las principales maneras de promover la actividad matemática en el aula. Autores como Moreno y Waldegg (2002) consideran que las situaciones problema son el detonador de la actividad cognitiva, siempre que cumpla las siguientes características: involucre implícitamente los conceptos que se van a aprender; represente un verdadero problema para el estudiante, pero a la vez, sea accesible a él; y, permita al alumno utilizar conocimientos previos.

Por otra parte, en los últimos años, se han llevado a cabo investigaciones sobre estudiantes talentosos en el ámbito de la resolución de problemas, analizando cómo este proceso permite caracterizar a esta población y, a su vez, potenciar y aprovechar al máximo sus destrezas. Al respecto, Arbona et al (2020) afirman que “la mejor forma de identificar la alta capacidad matemática es mediante la realización de actividades que requieran usar razonamiento matemático, siendo la resolución de problemas matemáticos la más genuina.” (p. 32).

Así mismo, Gutiérrez (2017) afirma que los estudiantes con alta capacidad matemática suelen destacar por la originalidad de sus métodos para resolver problemas, ya que frecuentemente emplean enfoques de resolución no convencionales, sorprendiendo al combinar de manera inesperada sus conocimientos matemáticos.

Sriraman (2003), en el contexto de su investigación sobre la resolución de problemas y el talento matemático, señala que uno de los criterios utilizados para la selección de los problemas consiste en que deben ser enriquecedores desde un punto de vista matemático, es decir, deben ser no rutinarios, lo que implica que resolverlos requerirá que los estudiantes muestren persistencia y creatividad.

De acuerdo con Elia, et al. (2009) los problemas no rutinarios son más complejos y desafiantes que los rutinarios, por lo que se requiere que los estudiantes pongan en juego sus estrategias heurísticas para su resolución, lo cual obliga al estudiante a ir más allá de cálculos simples (cálculo de rutina).

Respecto a actividades o tareas para promover el proceso de resolución de problemas en el contexto del estudio de patrones Arbona, et al. (2017) diseñaron y experimentaron una

secuencia de enseñanza para iniciar el estudio del álgebra, a través de problemas de patrones, con un estudiante de 9 años, identificado como superdotado y especialmente destacado en el área de matemáticas y que había finalizado 4º de Educación Primaria. Una de las actividades propuestas dentro de la secuencia se puede apreciar en la figura 3.

Figura 3. Problema sobre secuencias y patrones

Este sábado, María va a realizar una comida con sus amigos y familiares para celebrar que ha cumplido 12 años. Para ello, quiere calcular cuántas mesas y sillas le harán falta. Quiere sentarlos del siguiente modo:

1 mesa 2 mesas 3 mesas

Pero María tiene un problema: no sabe cuántos invitados acudirán a su fiesta. ¿Podrías ayudarle a calcular cuántos invitados cabrán en función de cuántas mesas coloque?

- ¿Cuántos invitados cabrán con 6 mesas? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Cuántos invitados cabrán con 15 mesas? ¿Cómo lo sabes?
- ¿Sabrías algún modo de calcular cuántos invitados cabrán con 50 mesas? ¿Cómo lo sabes?
- Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? ¿Cómo lo sabes?

Fuente: Arbona, et al. (2017).

Los autores logran concluir que este tipo de tareas con patrones permite que los estudiantes pongan de manifiesto diferentes características propias de las altas capacidades en matemáticas, entre las que destacan: la identificación de patrones y relaciones, la capacidad de generalizar, la flexibilidad en el uso de estrategias de resolución, la localización de la clave en los problemas y, la rapidez de aprendizaje.

Arbona, et al. (2017) mencionan también que al implementar la actividad de la figura 3 con el estudiantes antes mencionado, éste puso de manifiesto algunas de las características enlistadas por Jaime y Gutiérrez (2014), tales como: producción de ideas originales, valiosas

y extensas; localización de la clave de los problemas; desarrollo de estrategias eficientes; pensamiento crítico y persistente en la consecución de los objetivos que se propone; capacidad de abstracción; optimización en el proceso de razonamiento, entre otras.

Con este tipo de tareas muchos estudiantes pueden calcular los primeros términos de una sucesión, pero a menudo se ven obstaculizados al intentar determinar términos más avanzados o generalizar la regularidad presente en la sucesión. En este punto, es donde la persistencia y la creatividad de los ETM marcan una notable diferencia, ya que están dispuestos a explorar desde diversos ángulos el problema, encontrar la regularidad presente la situación dada, expresar la regla de generalización y evaluarla para otros términos más lejanos. Al evaluar la regla de generalización para ciertos términos, los estudiantes potencian su pensamiento crítico, puesto que tienen que validar si dicha regla funciona o no para la situación dada.

II) Posibilitar la invención de problemas o preguntas, con los cuales los estudiantes demuestran su creatividad y comprensión matemática

La investigación realizada sobre la resolución de problemas ha dado origen al estudio de la invención de problemas como una temática de investigación. Documentos internacionales y nacionales que orientan la educación matemática, incluyen la invención de problemas como actividad escolar. En NCTM (2000) se menciona que los estudiantes deberían tener continuas oportunidades de formular sus propios problemas, de manera que resulten complejos y que surjan a partir de situaciones dadas previamente o a través de modificaciones hechas a un enunciado inicial. Por su parte, el MEN (2006) afirma que “el estudio y análisis de situaciones problema suficientemente complejas y atractivas, en las que

los estudiantes mismos inventen, formulen y resuelvan problemas matemáticos, es clave para el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas.” (p. 52).

Al igual que con la resolución de problemas, en los últimos años se han desarrollado diversas investigaciones que asocian al talento matemático con la invención de problemas. Espinoza (2018) sostiene que la invención de problemas puede utilizarse como una estrategia de evaluación y como un método para examinar el desempeño de niños con habilidades destacadas en el campo de las matemáticas. El autor plantea la idea de que investigaciones, como la realizada por Voica y Singer (2013), indican que la invención de problemas puede fomentar y resaltar la creatividad, posiblemente de manera más efectiva que la resolución de problemas.

Así mismo, Espinoza (2018) afirma que autores como Kilpatrick y Schlesinger (1990) reconocen que incluir actividades de invención de problemas en las clases de matemáticas promueve el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Por su parte, Kilpatrick (1987) destaca el valor de estas actividades en la enseñanza de las matemáticas y considera que son relevantes en todos los niveles educativos debido a la abundancia de relaciones que proporcionan.

En relación con las actividades o tareas para fomentar el proceso de invención de problemas en el marco del estudio de patrones, Cai y Hwang (2003) analizaron la relación existente entre las habilidades de resolución de problemas y la invención de problemas, esto en el contexto de patrones. Los autores apoyan la idea de que formular adecuadamente un problema puede ser más significativo que el descubrimiento de una solución al problema, esto debido a la demanda cognitiva que ambas tareas suponen.

Los autores plantearon tres pares de tareas de resolución de problemas y formulación de problemas, cada par contextualizado en la misma situación. Para el caso de la resolución de problemas, se les pidió a los estudiantes responder algunas preguntas basadas en un patrón dado; mientras que para el caso de la formulación de problemas se les pidió que plantearan un problema fácil, un problema moderadamente difícil y un problema difícil.

Luego de la experimentación, Cai y Hwang (2003) logran concluir que existe una relación entre el uso de estrategias abstractas de resolución de problemas y la tendencia a plantear problemas que van más allá de la información proporcionada.

En la figura 4, se muestra un par de actividades propuestas, la primera correspondiente a la resolución de un problema y la segunda a la invención de un problema, ambas actividades contextualizadas en la misma situación.

III) Proporcionar variados niveles de dificultad de forma progresiva y coherente en las actividades, permitiéndole a los estudiantes abordarlas según su propio ritmo y nivel de competencia.

Es esencial ofrecer a los ETM actividades que se ajusten a sus habilidades individuales, permitiéndoles abordar las tareas según su propio ritmo y nivel de competencia. Al proporcionar una variedad de niveles de dificultad, se les brinda la oportunidad de avanzar gradualmente, enfrentando retos cada vez más desafiantes a medida que desarrollan sus capacidades. Este enfoque personalizado les permite crecer de manera progresiva y fortalecer su dominio de las matemáticas.

Figura 4. Actividad sobre invención de problemas y los patrones

Dots Problem-Solving: Look at the figures below.



(Figure 1) (Figure 2) (Figure 3)

1. Draw the 4th figure.
2. How many black dots are there in the 6th figure? Explain how you found your answer.
3. How many white dots are there in the 6th figure? Explain how you found your answer.
4. Figure 1 has 8 white dots. Figure 3 has 16 white dots. If a figure has 44 white dots, which figure is this? Explain how you found your answer.

Dots Problem-Posing: Mr. Miller drew the following figures in a pattern, as shown below.



(Figure 1) (Figure 2) (Figure 3)

For his student's homework, he wanted to make up three problems BASED ON THE ABOVE SITUATION: an easy problem, a moderate problem, and a difficult problem. These problems can be solved using the information in the situation. *Help Mr. Miller make up the three problems.*

Fuente: Cai y Hwang (2003)

Según Sheffield (1999), las actividades deben permitir que los estudiantes demuestren habilidades en diferentes niveles, por lo que hay que organizar las preguntas gradualmente para que todos tengan la oportunidad de tener éxito en algún nivel y desafiando a los más preparados y motivados para avanzar. Esto se refiere a dividir un problema en partes, comenzando con preguntas simples y avanzando hacia cuestiones más difíciles. Esta estrategia permite que todos los estudiantes aborden un problema central adaptado a su nivel de competencia. Según el mismo autor, lo anterior es crucial para estudiantes con talento en matemáticas, especialmente en entornos inclusivos.

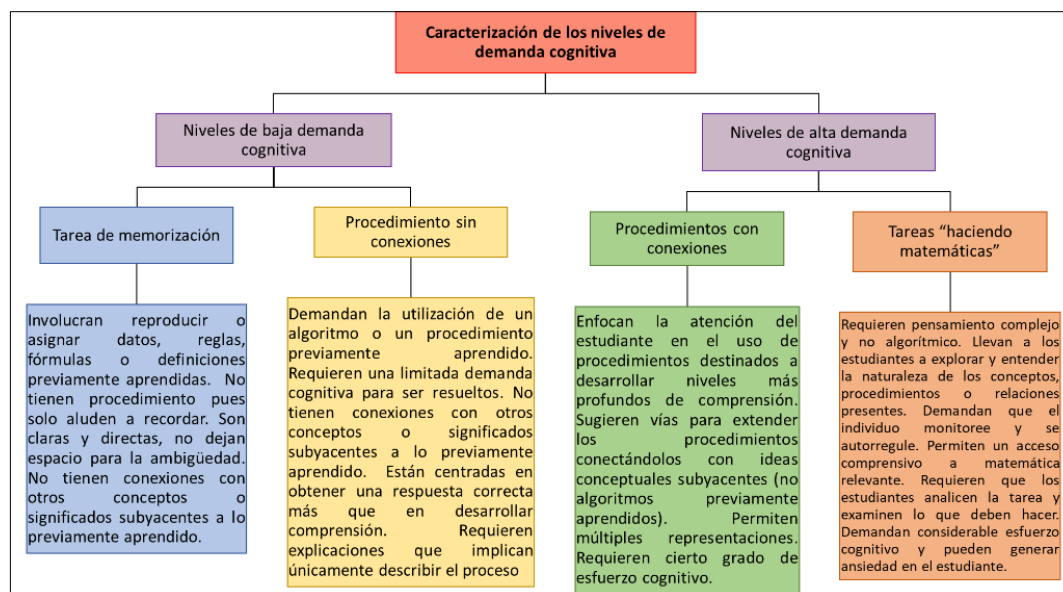
Por su parte, Ramírez y Cañadas (2018) afirman que presentar una tarea de enseñanza de manera progresiva en términos de dificultad posibilita al profesor identificar de forma gradual el nivel de avance que los estudiantes están logrando. Esto quiere decir que cuando se presenta una tarea de enseñanza con diferentes niveles de dificultad, los profesores pueden

observar cómo los estudiantes se desempeñan en las etapas iniciales y luego adaptar la instrucción en función de su comprensión y habilidades demostradas. Lo anterior facilita la identificación de las fortalezas y debilidades de los estudiantes y permite a los educadores ajustar su enfoque de enseñanza para satisfacer las necesidades específicas de cada estudiante.

La importancia de incorporar diversos niveles de dificultad en las tareas destinadas a ETM radica en reconocer que la percepción de un problema depende en gran medida de la persona que lo aborda. Según Piñero et al. (2017), esta perspectiva implica considerar al estudiante como el factor determinante para que una tarea se convierta en un auténtico desafío.

Por otra parte, es fundamental establecer una relación clara entre los distintos niveles de dificultad y la demanda cognitiva que cada tarea impone. En este contexto, Stein y Smith (1998) citadas por Piñero, et al. (2017) han identificado cuatro niveles de tareas según la demanda cognitiva para los estudiantes. Estos niveles se presentan de manera sintetizada en la figura 5.

Para el caso de las secuencias y patrones, Barraza (2020) propone varias tareas. Entre ellas, existe una denominada *Cubos de origami* con preguntas e indicaciones que mantienen una distancia procedimental entre ellas, es decir, las tareas no tienen pequeñas variaciones; porque, según la autora, podrían volverse tareas rutinarias y por tanto no fomentar la manifestación de la actividad matemática creativa.

Figura 5. Caracterización de los niveles de demanda cognitiva

Fuente: Adaptado de Piñero, et al. (2017).

El objetivo de la actividad es que los estudiantes generalicen un patrón, pero no necesariamente a través de expresiones algebraicas, sino a través de verbalizaciones de expresiones recursivas, como las que se muestran en la tabla 1. El patrón figural es representado con material manipulable.

La autora reconoce que una visión inclusiva del talento, que favorezca a un mayor grupo de estudiantes, implica la posibilidad de que todos puedan potenciar sus habilidades a través de un entorno adecuado y el enfrentamiento con tareas desafiantes de diversos niveles de dificultad, según sus conocimientos y experiencias.

Tabla 1. *Misma actividad con diferentes niveles de dificultad en el estudio de patrone.*

	Arreglo con cubos de origami	Regla algebraica	Verbalización
Nivel de dificultad 1	1	$a_n = n + 2$	En cada figura se va aumentando un cubo con respecto a la figura anterior
	2	$a_n = 3n + 1$	En cada figura se van aumentando tres cubos con respecto a la figura anterior
	3	$a_n = 2n^2$	La siguiente figura tendría un cuadrado de 4x4 dos veces, y la siguiente un cuadrado de 5x5 también dos veces, y así seguirá.
Nivel de dificultad 2	4	$a_n = n^2 + 3$	La siguiente figura sería un cuadrado de 4x4 más los 3 cuadrados que ya se tienen, y la siguiente un cuadrado de 5x5 más los 3 cuadrados que se tienen, y así.

Fuente: Adaptado de Barraza (2020)

IV) Ofrecer un conjunto de actividades matemáticas que desafían a los estudiantes a utilizar múltiples enfoques y métodos de resolución, fomentando la exploración, la flexibilidad y la aparición de estrategias originales y novedosas

Como se mencionó con anterioridad, en palabras de Torrance (1995), la flexibilidad se considera como una de las funciones cognitivas asociadas a la creatividad, característica fundamental en ETM. Por consiguiente, resulta crucial presentar a los estudiantes tareas que admitan múltiples respuestas y enfoques de resolución, dado que la flexibilidad se interpreta como la capacidad de cambiar de perspectiva al abordar un problema y generar diversas soluciones desde distintos ángulos.

Mann (2006) habla de potenciar el pensamiento matemático de los estudiantes con talento mediante problemas abiertos (problemas con múltiples respuestas correctas) en lugar de problemas cerrados con una única solución. Los problemas que implican flexibilidad cognitiva demandan un conjunto de habilidades más allá de lo que ya se ha aprendido, lo que a su vez proporciona a los estudiantes la posibilidad de demostrar sus conocimientos conceptuales y su comprensión de estos.

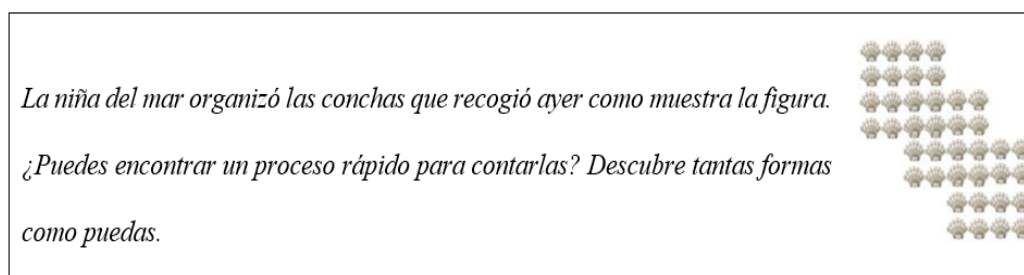
De igual manera, Mann (2006) sostiene que los problemas del mundo real no los presenta un libro de texto ni un maestro, sino que suelen ser cuestiones complejas y poco estructuradas que exigen la aplicación de diversos métodos y habilidades para su resolución. Por tanto, este tipo de experiencias son propicias para llevar el conocimiento adquirido en el entorno educativo hacia situaciones prácticas del mundo real.

Por otra parte, en cuanto a actividades sobre patrones que presentan diversos métodos de resolución, y fomentan la exploración, la flexibilidad y el análisis crítico en su abordaje,

Vale, Pimentel y Barbosa (2012) analizan diferentes tareas de resolución de problemas de patrones como un medio para fomentar la creatividad en matemáticas. Las autoras reconocen que la creatividad de los estudiantes se puede reflejar en su capacidad para proponer enfoques o soluciones novedosas. Además, afirman que los profesores deberían ofrecer actividades con múltiples enfoques y métodos de solución que fomenten la generación de ideas matemáticas, la flexibilidad del pensamiento y la originalidad.

Estas autoras proponen el siguiente ejemplo, para ilustrar el tipo de tareas con múltiples enfoques y métodos de resolución y que, por tanto, estimulan la flexibilidad, la exploración y el análisis crítico.

Figura 6. *Actividad con diferentes enfoques y métodos de resolución*



Fuente: Traducido de Vale, Pimentel y Barbosa (2012)

Hay varias maneras de realizar el conteo de cómo están dispuestas las conchas, y cada uno de estos conteos puede ser representado mediante una expresión numérica que refleje el pensamiento y la interpretación de los estudiantes. La Figura 7 muestra una síntesis de las soluciones más usuales, junto con las expresiones relacionadas a cada enfoque o método de conteo.

Las actividades que demandan que los estudiantes observen la disposición desde diversas perspectivas y la conviertan en una expresión numérica o algebraica pueden servir para darle sentido a esa expresión mediante la visualización. (Vale et al., 2012).

Si en el planteamiento del problema se exigen diferentes maneras de contar, los estudiantes tienen la oportunidad de desarrollar sus habilidades creativas, en particular, su capacidad para generar ideas con fluidez y originalidad. Además, estas actividades pueden ser particularmente efectivas para cultivar habilidades de percepción, como la identificación, la descomposición y la reorganización, lo que a su vez facilita la realización de tareas similares relacionadas con patrones en expansión. (Vale & Pimentel, 2011).

Figura 7. Diferentes soluciones para la actividad de la figura 6.

$(4 \times 4) + 4 + 4 + (4 \times 4)$	$4 \times 4 + 6 \times 4$	$3 \times (4 \times 4) - (4 + 4)$	10×4
$4 + 4 + 6 + 6 + 6 + 6 + 4 + 4$	$2 \times 4 + 2 \times 6 + 2 \times 6 + 2 \times 4$	$10 \times (2 \times 2)$	$4 \times 2 + 6 \times 2 + 6 \times 2 + 4 \times 2$

Fuente: Vale, Pimentel y Barbosa (2012).

V) Favorecer la introspección y reflexión individual sobre los razonamientos o soluciones propios de cada estudiante, y/o propiciar la socialización de ideas y el trabajo en equipo

De manera general, en Didáctica de las Matemáticas se habla de promover el proceso de comunicación en clase de matemáticas. Según Jiménez, et al. (2010) la comunicación en clase de matemáticas busca fomentar la construcción y negociación de significados por parte del estudiante. Esto implica que el alumno reflexione y analice de manera individual, para compartir interpretaciones de forma colectiva, lo que, a su vez, le capacita para expresar sus conjeturas utilizando el lenguaje específico de las matemáticas, todo ello mediante el intercambio de ideas y la confrontación de conocimientos.

Según el NCTM (2000) el proceso de comunicación en los niveles de 3 a 4 grado debería fomentar el compartir de forma oral y escrita el pensamiento, hacer preguntas, expresar conjeturas, explicar de forma cada vez más rigurosa y justificar ideas, procedimientos y resultados. Por tanto, la comunicación demanda al estudiante que organice y registre su pensamiento. Así mismo, se afirma que “los estudiantes necesitan oportunidades para poner a prueba sus ideas, sobre la base de un conocimiento compartido con la comunidad matemática de la clase, para ver si pueden ser entendidas y si ellos son suficientemente convincentes.” (p. 65).

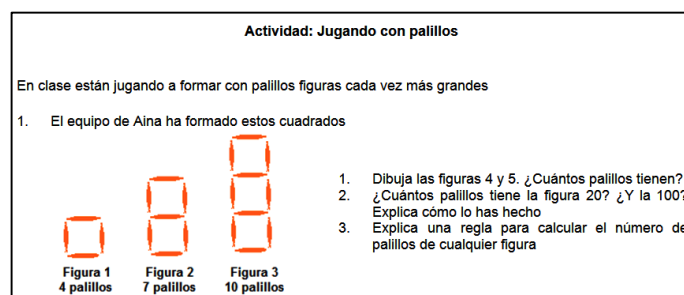
Por otra parte, Guirado (2015) reconocen que el aprendizaje tiene un origen social, por lo que es importante tener en cuenta técnicas y modelos de trabajo cooperativo, que permitan tratar temas o resolver problemas en solitario y en grupo. Por ejemplo, una de las posibilidades mencionadas por el autor es el *Trabajo individual con contraste grupal* la cual consiste en desarrollar una actividad de forma individual para posteriormente completarla o compartirla en una actividad colectiva. También, el autor menciona que estos estudiantes “deben tener la ocasión de compartir conocimientos con compañeros iguales o parecidos, pero también con compañeros distintos para que se den cuenta de la diversidad social

existente y para que se adapten mejor a contextos dispares en el futuro.” (Guirado, 2015, p. 97)

De acuerdo con Jiménez et al. (2010) es importante guiar al estudiante para que justifique su respuesta de manera coherente con el propósito y la meta de la clase. El profesor puede facilitar esto planteando preguntas como: ¿qué razones tienes para...? y ¿por qué crees que...?

También, otras maneras de promover la comunicación consigo mismo y con los demás es a través de enunciados del tipo: Discuta la solución del problema con sus compañeros y su profesor; escriba un párrafo en el que se concluya al respecto, no olvide explicar su proceso de resolución al problema, de qué manera lo ha hecho, etc. Por ejemplo, en la situación de generalización de patrones de la figura 3, se pregunta ¿cuántos invitados cabrán con 6 mesas?, pero adicionalmente, se pregunta ¿cómo lo sabes? esto con el fin de que el estudiante intente explicar y justificar su respuesta. En la figura 8, se presenta otro ejemplo que incluye preguntas que promueven favorecen el tiempo para la reflexión individual y para la exploración y el descubrimiento en grupo.

Por las consideraciones anteriores, podría afirmarse que la reflexión individual permite a los estudiantes profundizar en conceptos matemáticos y estimula la autonomía intelectual; mientras que el trabajo en grupo propicia el intercambio de ideas y el aprendizaje colaborativo, lo que puede llevar a descubrimientos matemáticos en conjunto que desafían las ideas convencionales. Esta combinación equilibrada podría impulsar el crecimiento de habilidades tanto cognitivas, como sociales en ETM

Figura 8. *Actividad que promueve la reflexión individual y la socialización de ideas*

Fuente: Zapatera (2018)

VI) Hacer uso integral de diferentes recursos, como tecnologías digitales o material concreto

La incorporación de diversas tecnologías en la educación de ETM es esencial para potenciar sus habilidades cognitivas. Estas herramientas proporcionan un entorno de aprendizaje interactivo, dinámico y desafiante, estimulando la exploración, la creatividad y el pensamiento crítico, preparándolos para enfrentar los desafíos matemáticos del mundo moderno.

En este mismo sentido, Johnson (2000) analiza cómo puede la tecnología satisfacer las necesidades de ETM en un aula diversa, y concluye que para cualquier estudiante la tecnología puede servir como una herramienta o entorno para el aprendizaje autónomo, “pero para los estudiantes con talento, a menudo es un medio para alcanzar la profundidad y amplitud adecuada del plan de estudios y oportunidades avanzadas de productos.” (p. 4)

La literatura reporta que la habilidad en el cálculo mental no necesariamente es una característica de los ETM; por el contrario, en su afán de enfocarse en aspectos más importantes y significativos de un problema, pueden sentir impaciencia por detenerse en cálculos aritméticos laboriosos (Sheffield, 1994). Por tanto, resultaría beneficioso que estos estudiantes tengan acceso a calculadoras y otras tecnologías que les permitan abordar

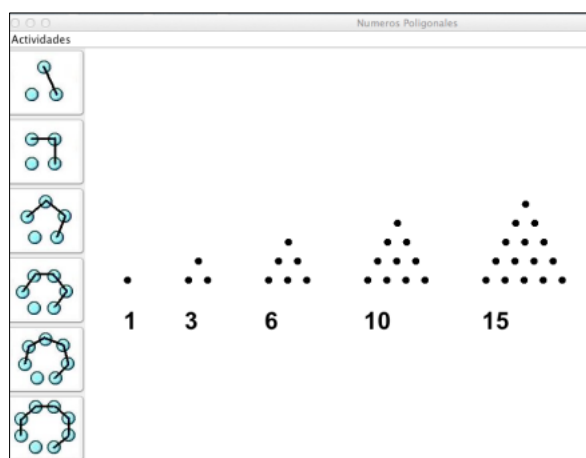
cálculos tediosos de manera eficiente, liberando su potencial para enfoques matemáticos más complejos y creativos. En esta misma línea, Johnson (2000) afirma que las calculadoras representan una valiosa herramienta de exploración para abordar problemas matemáticos desafiantes y complejos. Además, el empleo de bases de datos, hojas de cálculo y calculadoras especializadas, como las gráficas o científicas, facilita un análisis de datos efectivo y práctico, enriqueciendo la experiencia educativa de ETM.

Por otra parte, previamente se ha mencionado el enriquecimiento curricular como una estrategia para favorecer a los ETM. Siegle (2013) argumenta que la tecnología presenta ventajas como permitir a los maestros proporcionar contenido avanzado más allá de lo estipulado dentro del currículo. Johnson (2000) menciona que la World Wide Web (WWW por sus siglas en inglés) es una amplia fuente de información, problemas, concursos y recursos para profesores, que enriquecen el conocimiento matemático con ideas no presentes en los libros de texto.

El contenido temático es ilimitado cuando se utiliza la tecnología como herramienta para la productividad creativa (Kimball, 2001). Cortés, Cortés, et al. (2014) exploraron la conexión entre la aritmética y el álgebra al dirigir su análisis hacia la aplicación de patrones y la posibilidad de describir sus relaciones utilizando enfoques aritméticos, visuales y algebraicos. Para ello, los autores diseñaron una actividad sobre números poligonales y se preguntaron qué papel juega la tecnología allí. La actividad involucra el uso de un applet denominado *Poly* que permite calcular el número triangular deseado a través una representación visual, como se muestra en la figura 9. La actividad también integra el uso de Excel, para calcular algunos números triangulares y luego ser probados de manera visual mediante el uso del applet antes mencionado.

Con esta actividad se intenta promover los procesos iterativos relacionados con la visualización y relaciones aritmético-geométricas; así como estimular la generación de conjeturas y pruebas en el sentido de Balacheff (1997). Al final, se espera que los estudiantes logren encontrar una expresión algebraica para cualquier número triangular, promoviendo así los procesos de generalización, convirtiendo las conjeturas en resultados sólidos.

Figura 9. *Applet Poly con los números triangulares*



Fuente: Cortés, et al. (2014).

VII) Promover el enriquecimiento curricular al incorporar de manera efectiva una profundización en los contenidos curriculares, ampliando así el bagaje matemático de los estudiantes

En términos generales, el enriquecimiento curricular implica añadir contenidos nuevos al currículo en niveles más profundos, pero no de grados avanzados. Según Unesco (2004) una posible manera de implementar el enriquecimiento curricular es a través de proyectos de investigación, actividades de trabajo independiente, y conexiones interdisciplinarias.

Por su parte, Ramírez y Cañadas (2018) expresaron que el enriquecimiento curricular es un escenario adecuado para que los estudiantes pongan en juego características como las

siguientes: aprender con rapidez, ser críticos y generar ideas innovadoras; aplicar su conocimiento a situaciones matemáticas novedosas; realizar generalizaciones y poseer la capacidad de trabajar en un plano abstracto; demostrar un entusiasmo inusual, perseverar en la consecución de logros ante retos planteados, entre otras, que según Gutiérrez y Jaime (2013) se asocian al talento matemático.

Como ejemplo para el enriquecimiento curricular, se podrían mencionar la actividad de la figura 3, puesto que involucra no solo la variación de una variable, sino también la variación de dos variables relacionadas, lo que empieza a generar nociones de relaciones funcionales. También, las actividades de la tabla 1 involucra la potenciación, lo que profundizaría en conceptos derivados de la multiplicación. Además, las actividades de la figura 9 además de abordar patrones y secuencias, enseña al estudiante el concepto de número triangular. Por tanto, son actividades que profundizan en otros aspectos curriculares relacionados con las secuencias y patrones.

3.4. Una propuesta curricular

El proyecto 70783 *“Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores”* es una propuesta curricular financiada por el Ministerio de Ciencia y Tecnología de Colombia. Esta propuesta busca ofrecer a los profesores ciertos recursos y herramientas que atienden la diversidad del aula, a través de diseños didácticos que tienen en cuenta las diferentes características, antecedentes, habilidades, intereses, estilos de aprendizaje y necesidades de los estudiantes.

Para ello, se propone que cada diseño didáctico trabaje un mismo objeto matemático, pero en cuatro niveles de profundidad diferentes, cada uno ajustado a las características de

los estudiantes. Así mismo, se propone que las hojas de trabajo de cada nivel de profundidad se organicen en cuatro momentos: introducción de un nuevo objeto de estudio, matematización del objeto de estudio, afianzamiento de los saberes construidos, y valoración de los aprendizajes alcanzados.

A continuación, se describe de manera más detallada en qué consiste cada nivel de profundidad y cada uno de los momentos propuestos, tal como se hace en Delgado (2023).

- **Nivel de profundidad 1:** Las actividades de este diseño deben proporcionar múltiples representaciones del objeto matemático de estudio, especialmente representaciones concretas que permitan evidenciar atributos de los números y de las formas. Las situaciones problemas para este nivel deberán llevar instrucciones sencillas, que preferiblemente tengan poco texto, con mayor contenido visual, auditivo y que inviten a la manipulación de material concreto (geoplanos, regletas, papel, plastilinas, stickers, etc.). Además, el diseño debe proporcionar múltiples formas de acción y expresión como el uso de palabras claves mediante texto alternativo (imágenes, tablas, bits de información, video, fotografía, material físico o digital, títeres, etc.) con el fin de activar la percepción auditiva, visual, táctil de los estudiantes y así promover actividad matemática en ellos. De igual manera, en este diseño se requiere del acompañamiento permanente del profesor, fundamentalmente, para que puedan apoyar al estudiante en la medida que lo necesite, por ejemplo, ayudándolo a hacer conexiones y recordándoles reiterativamente información. Es importante posibilitar en los diseños de este nivel, diferentes formas de implicación, a través trabajo colaborativo con pares y de socialización permanente de sus avances frente al grupo, esto mediante el tratamiento de situaciones y necesidades cotidianas.

- **Nivel de profundidad 2:** Para este nivel de profundidad es necesario presentar múltiples formas de expresión y comunicación priorizando actividades de resolución de problemas que impliquen la interpretación de información presentada de forma verbal, numérica o gráfica, mediante material visual, auditivo y concreto. El diseño debe proporcionar múltiples formas de acción y expresión al utilizar situaciones culturalmente significativas de los estudiantes. Las situaciones problemas para este nivel deberán llevar instrucciones sencillas con texto moderado que impliquen la conexión de información para comprender y resolver una situación. El diseño debe proporcionar, para este nivel, variadas formas de acción y expresión dando lugar a las expresiones orales, gestuales, pictóricas, entre otras posibilidades de producción. De igual manera en este diseño se propone la mediación del docente que permita ir valorando el paso a paso, para dar nuevas instrucciones hasta el logro del propósito previsto. En este nivel sigue siendo importante el trabajo colaborativo con pares y de socialización permanente de sus avances frente al grupo, no obstante, se requiere ir dando autonomía para ir fortaleciendo el uso de los conocimientos aprendidos en la solución de situaciones y necesidades cotidianas. Para ello, el profesor puede dar apoyo con material o representaciones concretas (tapas, ábaco, software, etc.) que puede ir retirando en la medida que el estudiante avanza.

- **Nivel de profundidad 3:** para este nivel de profundidad es necesario presentar múltiples formas de expresión y comunicación priorizando actividades de resolución de problemas que impliquen la abstracción de interpretación presentada de forma verbal, numérica, grafica, tabular con diversas y variadas tecnologías (como pueden ser los entornos virtuales interactivos o software.) permitiendo la manipulación, variedad de feedback, y estrategias de resolución de problemas. Las actividades están mayormente diseñadas para que los estudiantes construyan expresiones numéricas o algebraicas que permitan modelar

una situación problema del contexto. De igual manera, en este nivel las actividades deben posibilitar el desarrollo de procesos matemáticos abstractos y con un lenguaje matemático preciso. El diseño debe proporcionar, para este nivel, variadas formas de acción y expresión haciendo uso del lenguaje matemático acorde con el objeto matemático de estudio. De igual manera en este diseño el docente asumirá la postura de mediación coadyuvando al estudiante para que se acerque y construya los objetos matemáticos según el propósito establecido. En este nivel es importante posibilitar variadas formas de implicación permitiéndole al estudiante mantenerse atento y motivado al resolver y discutir sobre situaciones del contexto matemático y cotidiano.

- **Nivel de profundidad 4:** Para este nivel de profundidad es necesario presentar múltiples formas de expresión, comunicación y argumentación priorizando actividades de resolución, deducción y planteamiento de conjeturas matemáticas con el uso de lenguaje matemático formal. Se sugiere promover la resolución de problemas con la mediación de diversas y variadas tecnologías (como pueden ser los entornos virtuales interactivos o software) permitiendo la visualización, variedad de feedback, argumentación y desarrollo de estrategias de resolución de problemas. Las actividades están mayormente diseñadas pero que los estudiantes modelen situaciones del contexto (matemático y no matemático), justificando y argumento sus procedimientos y deducciones. El diseño debe proporcionar, para este nivel, variadas formas de acción y expresión haciendo uso del lenguaje matemático formal propio del objeto matemático de estudio. De igual manera en este diseño el docente asumirá la postura de mediador, coadyuvando al estudiante para que acerque y profundice en sus los objetos de estudio hasta donde su interés, motivación y creatividad se lo permita, de esta forma se da lugar a las múltiples formas de implicación, siempre invitándolo a discutir y exponer avances con sus pares académicos y la comunidad educativa.

Respecto a los cuatro momentos que se propone para cada nivel de profundidad, se hace la siguiente descripción:

- **Momento 1:** Corresponde al momento inicial de la clase, en el que se proponen actividades motivadoras, lúdicas y dinámicas para introducir el objeto matemático de estudio a tratar con el diseño didáctico. Estas actividades parten del contexto que involucra el diseño y se espera que sirvan para que los estudiantes hagan una conexión con conocimientos previos.
- **Momento 2:** En este espacio de la clase, se construyen conceptos matemáticos emergentes de la situación planeada en el primer momento, a partir de la identificación de propiedades, relaciones, representaciones y conexiones del objeto matemático de estudio con el contexto. Se espera que en este momento el profesor haga intervenciones mediadoras.
- **Momento 3:** Corresponde al instante de la clase en el que los estudiantes utilizan y afianzan sus conocimientos construidos hasta el momento; a través de actividades de ejercitación, modelación, problematización, tareas lúdicas, proyectos, etc.
- **Momento 4:** En este momento se valoran los desempeños de los estudiantes, teniendo en cuenta las diferencias en los ritmos y maneras de aprender. Para ello, se proponen actividades retadoras, dinámicas, resolución de problemas, entre otras.

Por otra parte, dentro del proyecto en mención se ha propuesto una rúbrica de evaluación para valorar las siguientes cuatro componentes en cada uno de los diseños: propósitos y desempeños, orientaciones para el profesor, hoja de trabajo del estudiante y el cumplimiento de los principios y pautas del DUA. La rúbrica se presenta en el apartado 8.1. de anexos.

Sin embargo, en esta investigación, se propone complementar la cuarta componente de la rúbrica, es decir, el cumplimiento de los principios y pautas del DUA, haciendo énfasis en los criterios que deberían considerar para diseñar actividades dirigidas a ETM y que fueron presentados previamente. Por tanto, dicho complemento serviría para valorar diseños del nivel de profundidad 4.

4. Proceso metodológico

Acorde a la pregunta y objetivo propuestos en el capítulo 1, esta investigación es de corte cualitativo. El proceso metodológico siguió las siguientes seis fases: i) Revisión de un diseño didáctico sobre secuencias y patrones; ii) Identificación de criterios para diseñar actividades dirigidas a ETM; iii) Elaboración de un instrumento para valorar actividades dirigidas a ETM; iv) Valoración del instrumento propuesto por juicio experto; v) Valoración del diseño didáctico mediante el instrumento ajustado; y, vi) Ajustes al diseño didáctico a partir de la valoración realizada en la fase v. A continuación, se describe el trabajo realizado en cada una de estas fases.

4.1.Fase i: Revisión de un diseño sobre secuencias y patrones

En esta fase, se seleccionó un diseño didáctico creado en el marco del proyecto 70783 descrito en el apartado 3.4. Luego, se hizo una revisión que consistió en desarrollar las actividades del diseño, tomando el rol de un estudiante de cuarto grado de primaria. Lo anterior, con el fin de conocer el diseño y generar una apropiación por parte del investigador principal de este trabajo. Por otra parte, se revisó la valoración dada al diseño con la rúbrica interna del proyecto. Los resultados de esta fase se presentan en el apartado 5.1.

4.2.Fase ii: Identificación de criterios para diseñar actividades dirigidas a ETM

En esta fase, se hizo una revisión bibliográfica con el fin de identificar criterios para realizar diseños didácticos dirigidos a estudiantes con talento matemático. También, se rastrearon actividades y tareas sobre el estudio de patrones, y que tienen una relación estrecha con los criterios identificados anteriormente, por lo que sirven para ejemplificar a cada uno de ellos. Los resultados de esta etapa fueron presentados en el marco conceptual, específicamente en el apartado 3.3 y constituirán el sustento teórico para las siguientes fases de la investigación.

4.3.Fase iii: Elaboración de un instrumento para valorar actividades dirigidas a ETM

Como se mencionó previamente, la propuesta curricular en la que está enmarcada esta investigación cuenta con una rúbrica para valorar el tratamiento didáctico y epistemológico dado a los objetos matemáticos de estudio, además, el cumplimiento de los principios y pautas del DUA. En esta etapa de la investigación, se analizaron los componentes que evalúa dicha rúbrica, especialmente en lo relacionado con los principios y pautas del DUA. Este componente garantiza que la rúbrica valore la atención a la diversidad, en consonancia con los niveles de profundidad.

Sin embargo, se complementó el cuarto componente con los criterios que necesitan considerarse para diseñar actividades dirigidas a ETM, alrededor de diferentes objetos matemáticos de estudio. Lo anterior, con el fin de hacer que los diseños de nivel cuatro, dirigidos a ETM, atiendan de mejor manera a esta población. Los resultados de esta fase se presentan posteriormente en el apartado 5.2.

4.4.Fase iv: Valoración del instrumento propuesto por juicio experto

El instrumento generado en la fase anterior fue revisado mediante la técnica de *juicio de experto*, entendida como el proceso mediante el cual se evalúa la validez y la fiabilidad de un instrumento de medición por parte de personas con trayectoria y conocimientos en el tema. Lo anterior para suprimir aspectos sin importancia, incorporar los que son esenciales y/o modificar aquellos que lo necesiten. (Garrote y Rojas, 2015). Para aplicar dicha técnica, se siguieron los siguientes pasos: a) revisión del instrumento dentro de un grupo académico (integrado por investigadores consolidados y en formación en educación matemática), b) valoración del instrumento mediante juicio experto por parte de los integrantes del grupo mencionado anteriormente, a través de la rúbrica de la **Tabla 2**; y, c) recopilación de los resultados de la valoración por juicio experto; análisis de observaciones y comentarios; y, modificación del instrumento. Los resultados de esta fase son presentados en el apartado 5.3.

4.5.Fase v: Valoración del diseño didáctico mediante el instrumento ajustado

En esta fase de la investigación se hizo la valoración del diseño didáctico sobre sucesiones y patrones, utilizando únicamente el instrumento complementario de la rúbrica del proyecto 70783. La valoración del diseño no incluye la revisión de los otros componentes de la rúbrica, puesto que éste ya fue valorado, y se obtuvo resultados positivos, es decir: el diseño ofrece un buen tratamiento didáctico y epistemológico de los objetos matemáticos de estudio y cumple positivamente con los principios y pautas del DUA. No obstante, aún no se valoraba la atención a los ETM.

Tabla 2. Rúbrica para valoración del instrumento de la fase iii mediante juicio experto


Ciencias





Aniversario
 UIS 1948-2023



Proyecto: “Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores”

Rubrica para la valoración de instrumento creado para revisar las actividades del Nivel 4

Agradecemos valorar los criterios que aparecen en la siguiente tabla, con los que se espera valorar las actividades de Nivel 4. Calificar de 1 a 5 (siendo 5 el valor más alto), la calificación corresponde a la pertinencia, relevancia y claridad en la redacción. En la columna de la derecha puede agregar sus observaciones, comentarios o sugerencias, incluso puede incluir una posible mejor redacción.

Nº	Criterios	Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
1	El diseño promueve la resolución de problemas variados, que fomentan la creatividad, la persistencia y el pensamiento crítico de los estudiantes.						
2	El diseño posibilita la invención de problemas o cuestionamientos, con los cuales los estudiantes demuestran su creatividad y comprensión matemática.						
3	El diseño proporciona una variedad de niveles de dificultad en las tareas permitiéndole a los estudiantes abordarlas según su propio ritmo y nivel de competencia de forma progresiva.						
4	El diseño ofrece un conjunto de actividades matemáticas que desafían a los estudiantes a utilizar múltiples enfoques y métodos de resolución, fomentando la exploración, la flexibilidad y el análisis crítico en su abordaje.						
5	Las tareas favorecen el tiempo para la reflexión individual y para la exploración y el descubrimiento en grupo.						
6	Las tareas del diseño hacen un uso completo y apropiado de la tecnología, como calculadoras y ordenadores, manipulativos matemáticos y modelos.						
7	El diseño promueve un enriquecimiento curricular sólido al incorporar de manera efectiva una profundización en los contenidos curriculares, enriqueciendo la experiencia de aprendizaje.						

Para presentar los resultados de esta etapa, se realizó un análisis comparativo de las actividades del diseño original con las identificadas en la fase ii de esta investigación; la valoración dada al diseño según el cumplimiento de cada criterio; una explicación, justificación y evidencias del porqué se da dicha valoración; y, finalmente, se presentan algunas observaciones y sugerencias para refinar el diseño. Los resultados de esta etapa se presentan en el apartado 5.4.

4.6.Fase vi: Ajustes al diseño didáctico a partir de la valoración realizada en la fase v

En esta última fase del trabajo, se desarrollan algunos ajustes de acuerdo con los resultados de la fase anterior. El propósito de estos fue atender a los criterios definidos en el complemento de la rúbrica de valoración planteado en la fase iii. Para presentar los resultados de esta etapa, se muestran y se explican los ajustes realizados al diseño. Además, en la sección de anexos, se encuentran las dos versiones del diseño didáctico: la original y la ajustada. Los resultados de esta etapa se presentan en el apartado 5.5.

5. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados que dan cuenta del alcance del objetivo propuesto en esta investigación, el cual consistió en postular algunos criterios para la formulación de actividades dirigidas a estudiantes con talento matemático, desde el análisis y valoración de un diseño sobre secuencias y patrones para estudiantes de primaria con estas características. El capítulo se organiza en los siguientes cinco apartados: i) Revisión del diseño didáctico sobre secuencias y patrones; ii) Instrumento complementario para valorar las actividades dirigidas a ETM; iii) Resultados del proceso de valoración del instrumento

por juicio experto; iv) Valoración del diseño didáctico mediante el instrumento; y, v) Diseño didáctico ajustado.

5.1.Revisión del diseño didáctico sobre secuencias y patrones

El diseño didáctico que aquí se presenta, se ajusta a la estructura de la propuesta curricular descrita en 3.4, por lo que éste cuenta con cuatro niveles de profundidad y cada nivel se compone de cuatro momentos para la clase. A continuación, se describen tales características generales de manera sintetizada.

De manera general, los cuatro niveles de profundidad del diseño didáctico están dirigidos al conjunto de grados 4° - 5° y se enmarca en el estudio de secuencias y patrones en el contexto de los Juegos Olímpicos de Tokio 2020. El diseño tiene como pregunta orientadora *¿cómo organizar las competencias de natación sincronizada?* La cual busca preparar a los estudiantes para “predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica, y representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales” (MEN, 2006, p. 86). Así mismo, en el diseño se fomentan los procesos de: Elaboración, Comparación y Ejercitación de Procedimientos, Modelación, Razonamiento y Comunicación; contemplados en MEN (2006).

El cuarto nivel del diseño tiene como propósito: *predecir, representar y relacionar patrones de variación en una secuencia numérica y geométrica cuando conformamos competencias por parejas, tríos y cuartetos en nadado sincronizado*. Para ello, se espera que los estudiantes analicen secuencias y patrones con el objetivo de desarrollar una regla de correspondencia tanto simbólica como verbal, y que los términos de secuencias numéricas y figurativas. A continuación, se describe cada momento del diseño.

Momento 1: este momento de la clase inicia con la proyección de un video que ubica a los estudiantes en el contexto de los juegos olímpicos de Tokio 2020 y los conecta con el objeto matemático de estudio. Se inician trabajando las secuencias del siguiente modo: se les da los primeros términos de una secuencia de forma numérica y figural, y se espera que predigan otros términos de la secuencia, para lo que se requiere encontrar el patrón figural y numérico. También, se proponen otras preguntas exploratorias.

Momento 2: las actividades de este momento retoman la situación presentada en el momento 1, y se continua con problemas en los que tienen que representar la cantidad total de nadadores por medio del uso de operaciones matemáticas y generalicen tanto el patrón numérico como el patrón figural. Además, los procesos de validación de conjeturas, explicación y justificación son frecuentes en este nivel.

Momento 3: En el tercer momento se presentan ciertas secuencias más elaboradas, es decir, se aumenta el nivel de dificultad con relación al momento 2. Se espera que los estudiantes utilicen diversas representaciones para construir la regla de correspondencia. El nivel de dificultad es distinto, ya que los patrones numéricos y figurales tienen mayor nivel de dificultad.

Momento 4: en este momento se espera que los estudiantes consoliden lo encontrado en los momentos anteriores. Se presenta información en una tabla con un anuncio de una nueva situación problema. Aquí, se promueve la formulación de conjeturas y la validación de características generales de las secuencias estudiadas en el segundo y tercer momento. Esto se hace con el propósito de determinar qué cantidades representan los términos de las secuencias mostradas en un anuncio.

Ahora bien, este diseño fue valorado a través de la rúbrica en el marco del proyecto 70783, por lo que se valoraron aspectos relacionados los propósitos y desempeños, la hoja de trabajo del estudiante y el cumplimiento de los principios y pautas del DUA.

La valoración concerniente al ajuste de propósitos y desempeños se pueden observar en la figura 10.

Así mismo, se hicieron retroalimentaciones respecto a la hoja de trabajo del estudiante, en lo relacionado con coherencia horizontal (niveles de profundidad), y coherencia vertical (momentos de actividad matemática), los cuales se esbozan a continuación.

Figura 10. Valoración de propósitos y desempeños del diseño

P2. ¿Cómo organizar las competencias de natación sincronizada? Pensamiento variacional	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
Los propósitos están ajustados al nivel de conceptualización, según cada nivel de profundidad.			X			Estos propósitos se ajustan muy bien con los niveles de profundidad a desarrollar en las actividades
Los propósitos están vinculados estrechamente con la pregunta problematizadora y con el contexto					X	Los propósitos están vinculados con el contexto que se aborda es el de competencias en nadado sincronizado
El propósito se relaciona con estándares específicos para el grupo de grados					X	Los propósitos están relacionados con los estándares
El propósito, en cada nivel, comprende el mismo objeto matemático					X	Se trabaja durante todos los niveles de profundidad las secuencias figurales y numéricas.

Respecto a la coherencia horizontal, se observó que las actividades propuestas en el nivel 4 están ajustada al nivel de profundidad. En comparación con los otros niveles, el de cuarto nivel contiene más datos, representaciones e información. Se incluyen, además, no solo las secuencias numéricas, sino también las figurales. Además, los niveles de dificultad en las actividades son mayor.

En cuanto a la coherencia vertical, se observa que los procesos matemáticos se encuentran vinculados en las diferentes tareas propuestas. Sin embargo, se hace la sugerencia de promover más el proceso de razonamiento a través de tareas que promuevan habilidades como conjeturar o argumentar.

Del mismo modo, la rúbrica revela que el diseño fue bien valorado respecto al tratamiento didáctico y epistemológico que se da a los objetos matemáticos de estudio. Su sustento teórico estuvo basado en la perspectiva de autores como: Becker y Rivera (2008), D'Amore, et al. (2007), Radford (2009, 2010), Zapatera (2018), Vergel (2012), Blanton y Kaput (2005), entre otros, presentados en Jácome y Parada (en evaluación).

Por otra parte, la valoración del diseño no tuvo en cuenta las recomendaciones dadas por la literatura, acerca de las actividades y las características que éstas deberían tener para atender o incluir a los ETM en el aula regular. Por tanto, se necesitó complementar la rúbrica del proyecto 70783, tomando en cuenta tales criterios. A continuación, se presenta dicho instrumento complementario.

5.2. Instrumento complementario para valorar las actividades dirigidas a ETM

Luego de haber identificado, sustentado y ejemplificado cada uno de los criterios presentados anteriormente, se construyó un instrumento complementario a la rúbrica, el cual presenta tres columnas principales: En la primera se presenta cada uno de los criterios; en la segunda se presenta la escala de valoración tipo Likert (1: No cumple en absoluto; 2: Cumple esporádicamente; 3: Cumple moderadamente; 4: Cumple destacadamente; y, 5: Cumple plenamente); y, en la tercera columna se propone un espacio para escribir observaciones, explicaciones y/o justificaciones que den cuenta del porqué se ha asignado dicha valoración

en el cumplimiento del criterio correspondiente. A continuación, en la tabla 1 se presenta el instrumento en mención.

Con el fin de darle validez y confiabilidad de este instrumento, se valoró bajo la técnica de juicio experto, tal como se mencionó previamente en la metodología. En el siguiente apartado se presentan los resultados de dicho proceso.

Tabla 3. *Instrumento complementario a la rúbrica versión 1*

Nº	Criterios	Valoración					Observaciones-Justificación
		1	2	3	4	5	
1	El diseño promueve la resolución de problemas variados, que fomentan la creatividad, la persistencia y el pensamiento crítico de los estudiantes.						
2	El diseño posibilita la invención de problemas o cuestionamientos, con los cuales los estudiantes demuestran su creatividad y comprensión matemática.						
3	El diseño proporciona una variedad de niveles de dificultad en las tareas permitiéndole a los estudiantes abordarlas según su propio ritmo y nivel de competencia de forma progresiva.						
4	El diseño ofrece un conjunto de actividades matemáticas que desafían a los estudiantes a utilizar múltiples enfoques y métodos de resolución, fomentando la exploración, la flexibilidad y el análisis crítico en su abordaje.						
5	Las tareas favorecen el tiempo para la reflexión individual y para la exploración y el descubrimiento en grupo.						
6	Las tareas del diseño hacen un uso completo y apropiado de la tecnología, como calculadoras y ordenadores, manipulativos matemáticos y modelos.						
7	El diseño promueve un enriquecimiento curricular sólido al incorporar de manera efectiva una profundización en los contenidos curriculares, enriqueciendo la experiencia de aprendizaje.						

5.3.Resultados del proceso de valoración del instrumento por juicio experto

Como se mencionó en la metodología, esta fase de la investigación siguió tres pasos. A continuación, se describe el trabajo realizado en cada uno de ellos y los resultados generados.

a) Revisión del instrumento dentro de un grupo académico

Aquí, se hizo la presentación del instrumento de la tabla 3 junto con su sustento teórico, ante los integrantes que conformar el equipo de trabajo del proyecto 70783 a la fecha. A dicha sesión asistieron tres investigadores con amplia trayectoria en el campo de la educación matemática, cuatro investigadores en formación en el mismo campo (estudiantes de posgrado) y cuatro estudiantes tesistas de pregrado. Ante dicha presentación los integrantes hicieron algunos aportes y sugerencias al instrumento en mención. No obstante, con el fin de plasmar dichos aportes de manera escrita, dentro de la misma reunión se decidió crear la rúbrica presentada en la tabla 1. Los resultados se presentan en el siguiente ítem. Cabe mencionar que parte de las discusiones llevadas a cabo en la sesión del proyecto antes mencionada quedaron plasmadas en el Acta 22, del 10 de octubre del 2023.

b) Resultados de la valoración mediante la rúbrica por juicio experto

De los once asistentes a la sesión del proyecto antes mencionada, se recibió la valoración de cuatro estudiantes de posgrado y una investigadora consolidada. A continuación, en la tabla 4 se sintetizan los principales aportes realizados por todos ellos.

Tabla 4. Sistematización de las rubricas recibidas de juicio de experto

	Evaluador 1	Experto 2	Experto 3	Experto 4	Experto 5
Criterio 1	Valora el criterio con 5 y no ofrece observación alguna.	Valoración de 5. Sugiere reescribirlo como “El diseño promueve la resolución de variados problemas desafiantes, que fomentan la creatividad y el pensamiento crítico.”	Valoración de 5. Resalta la clara redacción, pero sugiere destacar con negrita las características propias del talento matemático mencionadas en cada criterio.	Valora el criterio con 5 y no ofrece observación alguna.	Valoración de 5. Se destaca la claridad y pertinencia del criterio.
Criterio 2	Valora el criterio con 5 y sugiere cambiar la palabra cuestionamientos por preguntas.	Valoración de 4. Sugiere utilizar un verbo más apropiado que “posibilitar”, como “incentivar o motivar”	Valoración de 4. Sugiere reescribirlo como: “El diseño permite a los estudiantes inventar problemas o preguntas que requieran la aplicación de su creatividad y comprensión de conceptos matemáticos.”	Valoración de 5. Sugiere reemplazar el término invención por creación y/o construcción.	Valoración de 5. Se destaca la claridad y pertinencia del criterio.
Criterio 3	Valoración de 4 y sugiere cambiarlo por: el diseño aumenta progresivamente la dificultad, lo cual les permite a los estudiantes abordar las tareas de acuerdo con su propio ritmo y nivel de competencia.	No valora el criterio, pero sugiere reescribirlo como: “El diseño proporciona variados niveles de dificultad de forma progresiva y coherente en las tareas que incentiven el uso de sus habilidades y competencias”	Valoración de 5. Se destaca la claridad y pertinencia del criterio.	No hay una valoración, pero sugiere reescribir el criterio como: “El diseño proporciona un conjunto de actividades con niveles de dificultad progresivo que permite a los estudiantes abordarlas según su propio ritmo de aprendizaje y niveles de competencia.”	Valoración de 5. Se destaca la claridad y pertinencia del criterio.
Criterio 4	Valora el criterio con 5 y no ofrece observación alguna.	Valoración de 3. Sugiere reescribirlo como: “El diseño ofrece actividades y problemas que permite desde la flexibilidad el uso de diversos métodos y habilidades para su abordaje para posibilitar la aparición de estrategias originales y novedosas.”	Valoración de 5. Se destaca la claridad y pertinencia del criterio.	Valora el criterio con 5 y no ofrece observación alguna.	Valoración de 5. Se destaca la claridad y pertinencia del criterio.
Criterio 5	Valoración de 4 y sugiere dividir el criterio en dos: - Las tareas favorecen la introspección y reflexión individual. - Las tareas propician la socialización de ideas y el trabajo en equipo.	Valoración con 2. Sugiere dividir el criterio en dos: - Favorecer momentos de reflexión individual. - Exploración y descubrimiento en grupo que favorezca la comunicación	No se valora el criterio, pero sugiere cambiarlo por: “las tareas permiten tiempo para la reflexión individual y promueven la exploración y el descubrimiento en grupos de estudiantes.”	No se valora el criterio, pero sugiere dividir el criterio en dos: uno que valide el trabajo individual y otro el grupal.	Valoración de 4. Sugiere cambiar “individual y exploración” por “individual o grupal”.
Criterio 6	Valoración de 5, sugiere cambiar las	Valoración de 4. Sugiere repensar los	Valoración de 4. Sugiere reescribirlo	No se valora el criterio, pero	Valoración de 4. Sugiere repensar

	palabras completo y tecnología por integral y recursos, respectivamente.	recursos mencionados en el criterio.	como: “El diseño aprovecha de manera efectiva e integral los recursos educativos, entre ellos calculadoras, ordenadores, manipulativos matemáticos y modelos.”	considera que hablar de “completo y apropiado” no es conveniente pues no es fácil de medir, es muy subjetivo.	los términos tecnología, completo y apropiado.
Criterio 7	No ofrece una valoración, pero sugiere hacer más énfasis en que el diseño promueve el enriquecimiento curricular, pero atendiendo a la delimitación por grados. Se trata de que el estudiante profundice en los contenidos propios de su grado.	Valoración de 4. No ofrece observaciones ni sugerencias.	Valoración de 5. Se destaca la claridad y pertinencia del criterio.	No se valora el criterio, pero sugiere que debería hablarse de la profundidad con la que se trabaja el objeto matemático, el ir más allá, el conocer en mayor medida características y atributos de dicho objeto.	Valoración de 5.

Ante tales valoraciones, observaciones y sugerencias se decidió hacer los siguientes cambios: Al criterio 1 se le hizo una breve modificación en su redacción, haciendo mayor énfasis en que los problemas son desafiantes; al criterio 2 se le cambió la palabra “cuestionamientos” por “preguntas” (no se cambió “invención de problemas” por “construcción de problemas” ya que ésta es la que aparece en la literatura al referirse a dicho proceso matemático); el criterio 3 se cambió su redacción, haciendo énfasis en el carácter progresivo de los niveles de dificultad; Al criterio 4 también se modificó brevemente su redacción, cambiado “análisis crítico” por “aparición de estrategias originales y novedosas”; el criterio 5 se dividió en dos criterios diferentes, uno enfocado en el trabajo en equipo y otro en el trabajo individual. Al criterio 6 se le cambió la redacción a una con mayor claridad, haciendo énfasis en el uso integral de recursos en general, no solo tecnológicos. Finalmente, al criterio 7 se le hicieron cambios en la redacción, para que fuera más coherente y clara.

c) Instrumento ajustado después de la valoración por juicio experto

Luego de desarrollar el proceso de revisión del instrumento descrita anteriormente, se presenta a continuación el instrumento de manera más refinada, listo para: ser incorporado a la rúbrica del proyecto 70783; ser usado en la valoración de un diseño didáctico; y, ser presentado como recurso orientador para profesores que diseñan o adaptan actividades para ETM en sus aulas de clase.

Tabla 5. *Instrumento final para valorar actividades dirigidas a ETM*

Nº	Criterios	Valoración					Observaciones- Justificación
		1	2	3	4	5	
1	El diseño promueve la resolución de diversos problemas desafiantes, que fomentan la creatividad, la persistencia y el pensamiento crítico.						
2	El diseño posibilita la invención de problemas o preguntas, con los cuales los estudiantes demuestran su creatividad y comprensión matemática.						
3	El diseño proporciona variados niveles de dificultad de forma progresiva y coherente en las actividades, permitiéndole a los estudiantes abordarlas según su propio ritmo y nivel de competencia.						
4	El diseño ofrece un conjunto de actividades matemáticas que desafían a los estudiantes a utilizar múltiples enfoques y métodos de resolución, fomentando la exploración, la flexibilidad y la						

	aparición de estrategias originales y novedosas.	
5	Las actividades favorecen la introspección y reflexión individual sobre los razonamientos o soluciones propios de cada estudiante.	
6	Las actividades propician la socialización de ideas y el trabajo en equipo.	
7	Las actividades del diseño hacen integral de diferentes recursos, como tecnologías digitales o material concreto.	
8	El diseño promueve el enriquecimiento curricular al incorporar de manera efectiva una profundización en los contenidos curriculares, ampliando así el bagaje matemático de los estudiantes.	

5.4. Valoración del diseño didáctico mediante el instrumento

AA continuación, se presentan los resultados de haber utilizado la rúbrica de la tabla 5, para valorar el diseño presentado anteriormente en el apartado 5.1. Este proceso se llevó a cabo en dos etapas: en primer lugar, fue realizado por el autor principal de este trabajo; y, posteriormente, la valoración fue sometida a discusión y ampliación en colaboración con las autoras del diseño.

Tabla 6. Valoración del diseño didáctico

N°	Criterios	Valoración					Observaciones-Justificación
		1	2	3	4	5	
1	El diseño promueve la resolución de diversos problemas desafiantes, que fomentan la creatividad, la persistencia y el pensamiento crítico.					x	El diseño plantea el estudio de patrones a través de la resolución de problemas variados en un contexto de la vida real, los Juegos Olímpicos de Tokio 2020. Los problemas fomentan la persistencia, puesto que los estudiantes podrían hacer varios intentos y cambiar sus heurísticas para encontrar una regularidad en las secuencias dadas. Además, se requiere usar el pensamiento crítico para evaluar con varios términos la validez de la regla de generalización que rige el comportamiento de la sucesión.
2	El diseño posibilita la invención de problemas o preguntas, con los cuales los estudiantes demuestran su creatividad y comprensión matemática.	x					No se evidencian espacios en el diseño didáctico en los que el estudiante tenga que formular o inventar sus propias preguntas o problemas.
3	El diseño proporciona variados niveles de dificultad de forma progresiva y coherente en las actividades, permitiéndole a los estudiantes abordarlas según su propio ritmo y nivel de competencia.				x		El contenido del diseño presenta varios niveles de dificultad en sus problemas y preguntas, los cuales están estructurados de forma progresiva para que los estudiantes las aborden según su nivel de competencia. No obstante, se observa la presencia de preguntas repetitivas, lo que fomenta un enfoque mecánico en lugar de un progreso gradual en diferentes niveles de competencia y dificultad. Además, se identifica una similitud significativa entre las preguntas del momento 1 y 2 del diseño, lo que limita la diversidad y complejidad de los problemas planteados. Adicionalmente, el diseño incluye tareas que requieren que los estudiantes realicen dibujos en abundancia. Esta característica no incrementa la dificultad de las tareas, sino que las vuelve tediosas, lo cual puede disminuir el interés de los estudiantes y por tanto desfavorecer la experiencia de aprendizaje.
4	El diseño ofrece un conjunto de actividades matemáticas que desafían a los estudiantes a utilizar múltiples enfoques y métodos de resolución, fomentando la exploración, la flexibilidad y la aparición de estrategias originales y novedosas.				x		El diseño promueve la utilización de múltiples enfoques y métodos de resolución en la mayoría de sus preguntas y problemas. Por ejemplo, para generalizar los patrones, los estudiantes pueden utilizar diferentes estrategias en un mismo problema, como las señaladas por Zapatera (2018): estrategias proporcionales, funcionales y aditivas. Estas últimas incluyen técnicas como el recuento con dibujos, el recuento iterativo y el recuento recursivo.
5	Las actividades favorecen la introspección y reflexión individual sobre los razonamientos o soluciones propios de cada estudiante.					x	El diseño favorece el tiempo para la reflexión individual de manera constante, puesto que en cada una de sus preguntas se pide explicar y/o justificar las respuestas. Esto último favorece el proceso de comunicación consigo mismo.

6	Las actividades propician la socialización de ideas y el trabajo en equipo.	x	El diseño favorece la creación de ambientes para la exploración y el descubrimiento en grupo, ya que de manera continua invita a los estudiantes a compartir, comparar, discutir descubrimientos y respuestas con los demás compañeros. Este enfoque promueve la negociación de significados entre los pares académicos y contribuye al desarrollo y fortalecimiento de las habilidades de comunicación colectiva entre los estudiantes.
7	Las actividades del diseño hacen integral de diferentes recursos, como tecnologías digitales o material concreto.	x	El diseño involucra de manera explícita el uso de la tecnología solo en el primer momento con el propósito de observar un video para contextualizar a los estudiantes en los Juegos Olímpicos de Tokio 2020. Sin embargo, no aparece de forma explícita la promoción del uso de calculadoras, ordenadores, material concreto, ni otros recursos.
8	El diseño promueve el enriquecimiento curricular al incorporar de manera efectiva una profundización en los contenidos curriculares, ampliando así el bagaje matemático de los estudiantes.	x	Desde una perspectiva curricular, no es común que los estudiantes de primaria se encuentren frecuentemente con el uso de variables, especialmente cuando se trata de generalizar patrones matemáticos. Sin embargo, el diseño introduce el concepto de variable como incógnita y en el contexto de relaciones funcionales. Además, se fomenta el uso de diversas representaciones para las relaciones funcionales, como la verbal, la tabular y la algebraica. También se introduce el reconocimiento y la aplicación de relaciones funcionales inversas. Además, se profundiza en los criterios de divisibilidad, proporcionando la oportunidad de resolver problemas y justificar procedimientos aritméticos por medio de propiedades básicas de la teoría de números, como las de la adición, sustracción, multiplicación, división y las de la igualdad. Además de estos aspectos, el diseño enriquece la experiencia de aprendizaje al incluir información sobre los Juegos Olímpicos y la natación sincronizada.

A continuación, se amplía por medio de evidencias, explicaciones y justificaciones la valoración dada al diseño didáctico en la tabla 6.

El diseño es bien valorado en cuanto al cumplimiento del primer criterio, puesto que está enfocado en promover el proceso de resolución de problemas, acatando orientaciones

del MEN (1998) y el MEN (2006). En los problemas presentados, los estudiantes tienen que calcular los primeros términos de una sucesión dada de forma pictórica, luego de forma aritmética, hasta llegar a calcular términos más amplios, encontrando así una regularidad entre los términos de la secuencia. La literatura expuesta previamente indica que en este tipo de tareas los estudiantes intentan calcular los términos más grandes de forma exhaustiva, es decir, para calcular un término dado, intentan calcular todos los antecesores a él, pero luego de hacerlo repetidamente, este proceso se vuelve una tarea tediosa, por lo que recurren a una estrategia de generalización novedosa. Es ahí donde los estudiantes ponen de manifiesto su creatividad y pensamiento crítico.

Figura 11. Problema propuesto en el diseño didáctico

Colombia decidió participar en el torneo de natación sincronizada en los Juegos Olímpicos de Tokio 2020, para ello fue necesario convocar a los nadadores profesionales y conformar los equipos que se presentarían en cada competencia. Margarita, la presidenta de la organización del comité de los juegos olímpicos 2020, quiso organizar los equipos para las competencias del primer día de nado sincronizado en los cuales solo podían participar parejas.

Ella logró organizar los grupos de algunas competencias formando una figura



Competencia 1 Competencia 2 Competencia 3 Competencia 4

1. Dibuje la figura que forman los nadadores en la competencia 5, 6, 7, 8 y 9.

La generalización de los patrones propuestos en el diseño implica la identificación de relaciones, regularidades o tendencias. Este proceso puede ser desafiante y requerir tiempo y esfuerzo para comprender completamente los patrones subyacentes. Los estudiantes podrían

utilizar varias heurísticas, como el ensayo y error o la exploración exhaustiva. Esto demanda persistencia por parte de los estudiantes, puesto que podrían rendirse luego de varios intentos.

Así mismo, las situaciones del diseño demandan el uso del pensamiento crítico para examinar minuciosamente los datos o situaciones dadas, identificar relaciones y regularidades subyacentes, crear hipótesis y valorar su solidez junto a conclusiones generadas.

Los problemas y las preguntas propuestas presentan una estructura similar a la del problema de la figura 3, propuesto por Arbona, et al. (2017) y que como se mencionó previamente, promueve la creatividad, el pensamiento crítico y la persistencia.

Por otra parte, el diseño no ha sido bien valorado respecto al cumplimiento del segundo criterio, ya que como se mencionó en la misma rúbrica no se evidencian espacios en los que el estudiante tenga que formular o inventar sus propias preguntas o problemas. Por tanto, se sugiere incluir este tipo de actividades.

Por otra parte, el diseño fue valorado con 4, *cumpliendo destacadamente este indicador*, puesto que el diseño sí aumenta gradualmente el nivel de dificultad en sus actividades, pero en algunos casos los niveles de dificultad se mantienen. Por ejemplo, en la pregunta 1 se pide dibujar la figura de cinco competencias diferentes, que implican dibujar treinta y cinco nadadores. Más adelante, en la pregunta 19 podría decirse que se presenta un retroceso en los niveles de dificultad puesto que vuelve a solicitarse al estudiante lo mismo que en la pregunta 1, pero para otras tres competencias diferentes que implican dibujar setenta y dos nadadores. Lo anterior, podría convertir las actividades del diseño en un trabajo tedioso,

además de ser innecesaria la pregunta 19, pues se espera que en ese momento los estudiantes ya hayan identificado la regularidad con las preguntas anteriores.

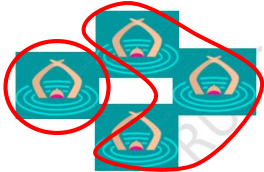
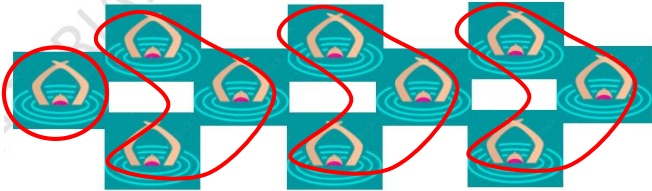
Figura 12. Preguntas del diseño con niveles de dificultad no progresivos

1. Dibuje la figura que forman los nadadores en la competencia 5, 6, 7, 8 y 9.
19. Margarita quiere dibujar la figura que los nadadores formaron en la competencia número 10, 11 y 15 ¿Puede ayudarle a hacerlo?

Por otro lado, respecto al criterio 4, el diseño se valoró con 4: *Cumple destacadamente* porque la mayoría de sus problemas y preguntas pueden abordarse de diferentes maneras. En las tablas 7, 8 y 9 se muestra tres formas diferentes para resolver el primer problema del momento 3.

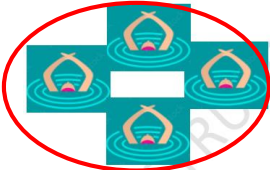
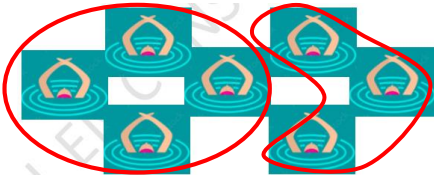
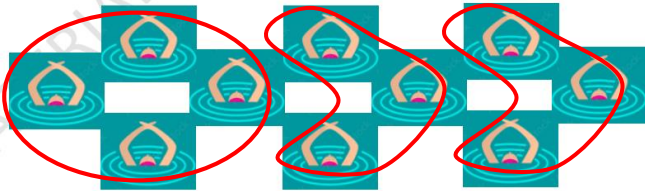
En la tabla 7 se evidencia que una forma de identificar el patrón consiste en tomar a un nadador como “término fijo” e ir agregando tres nadadores por cada competencia. De esta manera, el estudiante podría descubrir que el número de nadadores en cada competencia es igual a tres veces el número de la competencia más el nadador fijo. De esta manera, la generalización del patrón en forma algebraica sería $a_n = 3n + 1$.

Tabla 7. Forma uno de resolver el problema del momento 3

N° de la figura	Forma de identificar el patrón	Forma de generalizar el patrón
1		$a_1 = 1 + 3(1)$
2		$a_2 = 1 + 3(2)$
3		$a_3 = 1 + 3(3)$
n		$a_n = 1 + 3(n)$ $\rightarrow a_n = 3n + 1$

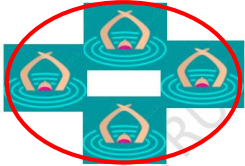
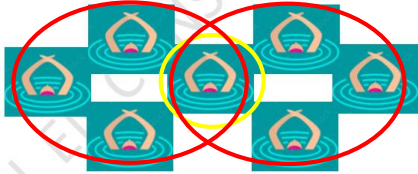
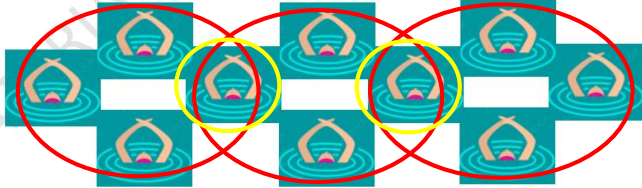
En la tabla 8 se presenta otra forma de identificar y llegar a la generalización del mismo patrón. Esta consiste en ver a cuatro nadadores como fijos y adicionar tres veces el número de la competencia disminuido en uno. Este camino de resolución podría considerarse más laborioso que el anterior, puesto que para llegar a la regla de generalización de forma algebraica tal como se presentó en caso anterior, se requiere aplicar algunas propiedades como la distributiva y la reducción de términos semejantes.

Tabla 8. Forma dos de resolver el problema del momento 3

Nº de la figura	Forma de identificar el patrón	Forma de generalizar el patrón
1		$a_1 = 4 + 3(0)$
2		$a_2 = 4 + 3(1)$
3		$a_3 = 4 + 3(2)$
n		$a_n = 4 + 3(n - 1)$ $\rightarrow a_n = 3n + 1$

Por otra parte, en la tabla 9 la forma de contar el número de nadadores por cada competencia, consiste en cuadruplicar el número de la competencia y quitar los nadadores que se han contado dos veces, valor que corresponde al número de la competencia disminuido en uno. Al igual que en el caso anterior, aplicando la propiedad distributiva y reduciendo términos semejantes, se llega a la misma regla de generalización que se encontró en el primer método de resolución.

Tabla 9. Forma tres de resolver el problema del momento 3

N° de la figura	Forma de identificar el patrón	Forma de generalizar el patrón
1		$a_1 = 4(1)$
2		$a_2 = 4(2) - 1$
3		$a_3 = 4(3) - 2$
n		$a_n = 4(n) - (n - 1)$ $\rightarrow a_n = 3n + 1$

Respecto al criterio 5, se valoró su cumplimiento con 5: cumple plenamente, ya que, en la mayoría de las preguntas planteadas, se pide justificar las respuestas y/o explicarlas.

Figura 13. Pregunta del problema que promueve el criterio 5

28. ¿Es posible que un equipo de 99 nadadores haya participado en una competencia en la modalidad MIXTA? ¿Por qué? Explique su respuesta y compare los resultados con sus compañeros.

A propósito del criterio 6, este fue valorado con 5: cumple plenamente, puesto que en el diseño se proponen enunciados como el de la figura 14 de manera constante. Estos enunciados generan en el aula de clases un ambiente de discusión y socialización de ideas, por parte de los estudiantes.

Figura 14. *Pregunta del problema que promueve el criterio 7*

¡Discuta los resultados con sus compañeros!

El cumplimiento del criterio 7 fue valorado con 2: Cumple esporádicamente, porque como se mencionó anteriormente, puesto que se hace poco uso del material concreto o tecnológico. Solo al inicio, se propone la proyección de un video para contextualizar a los estudiantes sobre el nadado sincronizado en los Juegos Olímpicos. Es por ello que se sugiere incluir actividades que permitan mejorar el cumplimiento de este criterio.

Finalmente, respecto al criterio 8, su cumplimiento se valoró con 4: Cumple destacadamente. El video mencionado anteriormente enseña a los estudiantes un aspecto referente a los deportes. Además, se promueve el uso del lenguaje algebraico simbólico, en preguntas como la que se muestra en la siguiente figura.

Figura 15. *Pregunta del problema que promueve el criterio 8*

14. ¿Cómo podemos encontrar la cantidad total de nadadores que participan en la competencia n ? ¿Por qué?

5.5. Diseño didáctico ajustado

Como se apreció en la valoración del diseño presentada anteriormente, no se incluyen actividades relacionadas con la invención de problemas o preguntas. Por tanto, se incluyó una actividad en la que los estudiantes tienen que inventar un problema, a partir de una nueva modalidad de nado, presentada a través de un applet en Geogebra, al cual se ingresa a través

del siguiente enlace: <https://www.geogebra.org/classroom/bnmsy6t8>. En la figura 16 se puede apreciar el enunciado de la actividad.

Figura 16. *Actividad de invención de problemas agregada al diseño*

16. Abra el siguiente applet de Geogebra:

<https://www.geogebra.org/classroom/bnmsy6t8>

Allí, se presenta la organización por grupos de algunas competencias formando una figura específica. Para cada competencia, aparece el número de nadadores específico. Cree un problema con alta dificultad con el que rete a un amigo y en el que utilice la situación presentada en el applet. Puede darle algún nombre a la modalidad de nadado, y hacer tantas preguntas como quiera.

La situación del *applet* promueve además el enriquecimiento curricular, puesto que el patrón incluido en la situación planteada involucra la potenciación, en particular, potencias cuadradas. Éste objeto matemático de estudio es incluido en el currículo para el conjunto de grados de 4 y 5. En MEN (2006) se propone para los grados cuarto y quinto de primaria el estándar “Identifico la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos.” (p. 82). De esta manera, se estaría profundizando en lo que podría considerarse como una extensión de la multiplicación.

Así mismo, la actividad de la figura 16 involucra el uso de tecnologías digitales, recurso que como se mencionó en el sustento teórico del criterio 8, estas herramientas proporcionan un entorno de aprendizaje interactivo, dinámico y desafiante, que estimula la exploración y la creatividad de los estudiantes.

Por ello, se espera que los estudiantes exploren el applet (ver figura 17) para comprender la nueva modalidad de nadado, encuentren una regularidad por sí mismos, y creen el enunciado y preguntas con el fin de desafiar a sus compañeros.

Figura 17. Applet con nueva modalidad de nadado para la invención de problemas



Por otra parte, se cambió el enunciado de la actividad 1, con el fin de involucrar el uso de material concreto para la exploración de la regularidad que se quiere encontrar en la primera situación. En la figura 18 se muestra el enunciado inicial y el enunciado modificado.

Figura 18. Modificaciones hechas al enunciado de la actividad 1

1. Dibuje la figura que forman los nadadores en la competencia 5, 6, 7, 8 y 9.
1. Pegue stickers en las piscinas para representar la figura que forman los nadadores en la competencia 5, 6, 7, 8 y 9.

Por otro lado, se suprimieron varias preguntas en los momentos 1 y 2, ya que tenían una estructura similar y generaba monotonía en la actividad matemática. Por ejemplo, en la figura 19 se muestra que la pregunta 19 tiene un enunciado similar, solo que para otros términos de la secuencia. Sin embargo, se espera que al llegar a la pregunta 19 los estudiantes ya hayan reconocido el patrón de la secuencia, por lo que podría considerarse innecesario volver a dibujar las figuras. Además, debido a que el número de nadadores por cada

competencia es 2, con las competencias propuestas en la pregunta 19, los estudiantes tendrían que realizar el dibujo de 72 nadadores, lo cual podría ser una tarea bastante tediosa.

Figura 19. *Pregunta suprimida en el diseño por su similitud a la pregunta 1*

19. Margarita quiere dibujar la figura que los nadadores formaron en la competencia número 10, 11 y 15 ¿Puede ayudarle a hacerlo?

En la figura 20 se muestra una lista de preguntas presentadas en los momentos 1 y 2 del diseño, pero cuya estructura es similar. En los antecedentes y marco conceptual se mencionó que una de las características de los estudiantes con talento es su habilidad para generalizar patrones, por lo que podría considerarse innecesario hacer todas estas preguntas. Por ello, solo se incluyeron dentro del diseño ajustado las preguntas 5 y 8 de la lista.

Figura 20. *Preguntas suprimidas por su similitud y mecanización*

5. ¿Qué debemos hacerle a la figura formada en la competencia 5 para obtener la figura formada en la competencia 6? Explique su respuesta.
6. ¿Qué debemos hacerle a la figura formada en la competencia 6 para obtener la figura formada en la competencia 7? Explique su respuesta.
7. ¿Qué debemos hacerle a la figura formada en la competencia 7 para obtener la figura formada en la competencia 8? Explique su respuesta.
8. ¿Qué debemos hacerle a la figura formada en la competencia 9 para obtener la figura formada en la competencia 15? Explique su respuesta.
10. ¿Qué debemos hacerle al número total de nadadores de la competencia 9 para obtener el número total de nadadores de la competencia 10? Explique su respuesta
11. ¿Qué debemos hacerle al número total de nadadores de la competencia 10 para obtener el total de nadadores de la competencia 11? Explique su respuesta

Finalmente, es importante mencionar que se corrigieron algunas faltas de cohesión y coherencia que presentaba el diseño, tales como: tutear y ustear de manera indistinta en algunos enunciados; signos de puntuación faltantes; breves faltas de ortografía, entre otras. La versión ajustada del diseño se presenta en el apartado de anexos.

6. Conclusiones

Respecto a la pregunta de investigación que se planteó en este trabajo, a saber: ¿qué criterios necesitan considerarse para diseñar actividades dirigidas a estudiantes con talento matemático, específicamente cuando se abordan secuencias y patrones en primaria? Se respondió a ella de la siguiente manera:

Se consolidaron a la luz de la literatura ocho criterios, a saber:

- i. Promover la resolución de diversos problemas desafiantes, que fomentan la creatividad, la persistencia y el pensamiento crítico.
- ii. Posibilitar la invención de problemas o preguntas, con los cuales los estudiantes demuestran su creatividad y comprensión matemática.
- iii. Proporcionar variados niveles de dificultad de forma progresiva y coherente en las actividades, permitiéndole a los estudiantes abordarlas según su propio ritmo y nivel de competencia.
- iv. Ofrecer un conjunto de actividades matemáticas que desafían a los estudiantes a utilizar múltiples enfoques y métodos de resolución, fomentando la exploración, la flexibilidad y la aparición de estrategias originales y novedosas.
- v. Favorecer la introspección y reflexión individual sobre los razonamientos o soluciones propios de cada estudiante.
- vi. Propiciar la socialización de ideas y el trabajo en equipo.

- vii. Hacer uso integral de diferentes recursos, como tecnologías digitales o material concreto.
- viii. Promover el enriquecimiento curricular al incorporar de manera efectiva una profundización en los contenidos curriculares, ampliando así el bagaje matemático de los estudiantes.

Luego de consolidar, justificar y ejemplificar (desde la propuesta del álgebra temprana) cada uno de estos criterios, se logró sistematizar un instrumento que entraría a complementar la rúbrica general de valoración de los diseños del proyecto 70783. Sin embargo, dentro de los alcances de esta investigación, se espera que dicho instrumento sea un aporte para aquellas personas (profesores e investigadores) que piensan diseñar o adaptar actividades para estudiantes con talento matemático, con el fin de atenderlos en el aula de clase.

El instrumento antes mencionado además de ser validado mediante juicio de expertos se validó mediante el uso de él mismo para valorar un diseño didáctico de nivel 4, tomado del proyecto 70783. Como producto de esta valoración se encontró que el diseño presentaba ciertos aspectos por mejorar ya que no atendía las características de los ETM.

Finalmente, en este trabajo se mencionó la perspectiva curricular *álgebra temprana* debido a que el diseño analizado aborda el objeto matemático de estudio de las secuencias patrones, valdrías la pena continuar profundizando más en este aspecto, por ejemplo indagar sobre qué relación existe entre las formas de pensamiento algebraico (*Factual, Contextual y Simbólica*) Vergel (2014) y el talento matemático; qué formas de pensamiento algebraico emergen en estos estudiantes; y, si trascienden de una forma a la otra con mayor facilidad que otros estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Arbona, E. (2016). *Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de educación primaria con altas capacidades matemáticas*. [Tesis de Máster]. Universitat de València.
- Arbona, E., Beltrán, M., Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2017). Los patrones geométricos como contexto para introducir a un estudiante de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas en el álgebra. En Codina, A. (Coord.), Puig, L. (Coord.), Arnau, D., Sánchez, M., Montoro, A., Claros, J., Arnal, M., y Baeza, M. A. (Eds.), *Investigación en pensamiento numérico y algebraico: 2017* (pp. 38-47). Madrid: Universidad Rey Juan Carlos y SEIEM.
- Arbona, E., Gutiérrez, A. y Beltrán-Meneu, M. (2020). Características diferenciadoras de estudiantes con alta capacidad matemática en la resolución de problemas de patrones geométricos. En Gutiérrez, Á., Beltrán-Meneu, M., Ribera, J., Ramírez, R., Jaime, A., Arbona, E., Sua, C., Rotger, L., Jiménez, C., Magreñán, A. y Damián, A. (eds.). *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática* (pp. 29-36). Logroño: Universidad de La Rioja.
- Arnáiz, P. (2004). *Fundamentos y principios de la Educación Inclusiva*. Actas de las jornadas de cooperación educativa con Iberoamérica sobre educación especial e inclusión educativa (p. 25-43).
- Asamblea Nacional Constituyente. (1991). *Constitución Política de Colombia 1991*. Bogotá.

- Barraza, Z. (2020). *Propuesta de un modelo teórico para el desarrollo del talento matemático a través de la creatividad*. [Tesis doctoral]. CICATA: Instituto Politécnico Nacional.
- Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. [Tesis doctoral no publicada]. Universidad de Granada.
- Blanco, M. (1990). La atención a la diversidad en el aula y las adaptaciones del currículo. *Desarrollo psicológico y educación*, 411-438.
- Cai, J., & Hwang, S. (2003). A Perspective for Examining the Link between Problem Posing and Problem Solving. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 103-110.
- Castaño, M. y Robledo, K. (2008). Identificación de las técnicas e instrumentos educativos que utilizan los docentes de grado tercero de primaria en el aula de clases de la Institución Educativa Kennedy para la detección de niños y niñas con capacidades y talentos excepcionales. [Tesis de Licenciatura]. Universidad Tecnológica de Pereira.
- Congreso de la República de Colombia. (1994). Ley 115 de 1994: Por la cual se expide la Ley General de Educación.
- Congreso de la República de Colombia. (1996). Decreto 2082 por el cual se reglamenta la atención educativa para personas con limitaciones o con capacidades o talentos excepcionales.
- Congreso de la República de Colombia. (1997). Ley 361 de 1997: Por la cual se establecen mecanismos de integración social de las personas con limitación y se dictan otras disposiciones.

Congreso de la República de Colombia. (2015). Decreto 1075: Decreto Único Reglamentario del sector de educación.

Cortés, J., Hitt, F., y Saboya, M. (2014). De la aritmética al álgebra: Números Triangulares, Tecnología y ACODESA. *Journal of Research in Mathematics Education*, 3(3), 220-252.

Delgado, J. (2023). *Diseño Didáctico Sobre Fracciones: Un Acercamiento Desde La Música Como Contexto Para Atender La Diversidad*. [Tesis de Licenciatura]. Universidad Industrial de Santander.

Elia, I., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM*, 41, 605-618.

Escrivá, M.T.; Jaime, A.; Gutiérrez, A.; Beltrán-Meneu, M.J. (2017): Geometría 3D y talento matemático, *UNO*, 77, 7-13.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. L., & Segovia, I. (2016). La invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 14(39), 368–392.

Espinoza, J. (2018). caracterización de estudiantes con talento en matemática mediante tareas de invención de problemas. [Tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Gardner, H. (2001). *La inteligencia reformulada. Las inteligencias múltiples en el siglo XXI*. Editorial Paidós.

- Garrote, P., y del Carmen, M. (2015). La validación por juicio de expertos: dos investigaciones cualitativas en Lingüística aplicada. *Revista Nebrija de lingüística aplicada a la enseñanza de lenguas*, (18), 124-139.
- Gómez, M., y Costa, V. (2011). *Altas capacidades en niños y niñas: detección, identificación e integración en la escuela y en la familia*. (Vol. 188). Narcea Ediciones.
- Guirado, M. (2015). *¿Qué sabemos de las altas capacidades?: Preguntas, respuestas y propuestas para la escuela y la familia*. (Vol. 309). Grao.
- Gutiérrez, Á. (2017). Enseñanza de la geometría a estudiantes con talento matemático: teoría y práctica. *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, 27-39.
- Gutiérrez, Á., Benedicto, C., Jaime, A. & Arbona, E. (2018). The Cognitive Demand of a Gifted Student's Answers to Geometric Pattern Problems Analysis of Key Moments in a Pre-algebra Teaching Sequence. *Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness: Enhancing Creative Capacities in Mathematically Promising Students*, 169-198.
- Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 28(6), 14-17. <http://www.jstor.org/stable/41191796>
- Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En Muñoz, J., Arnal, A., Beltrán, P., Callejo, M. y Carrillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI*. (pp.71-89). Zaragoza: SEIEM.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez, L. Puig

- (Eds.), *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: Universidad de Valencia.
- Johnson, D. (2000). *Teaching mathematics to gifted students in a mixed-ability classroom*. Reston, VA: ERIC Clearinghouse on Disabilities and Gifted Education.
- Jiménez, A., Suárez, N. y Galindo, S. (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, 1(2), 173-202.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problem come from? En A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–148). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kovacs, K., & Pléh, C. (2023). William Stern: The Relevance of His Program of ‘Differential Psychology’ for Contemporary Intelligence Measurement and Research. *Journal of Intelligence*, 11(3), 41.
- Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. *Zdm*, 45, 159-166.
- Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 30(2), 236–262. <https://doi.org/10.4219/jeg-2006-264>
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (MEN). (2001). *Lineamientos generales de política para la atención de personas con talentos y/o capacidades excepcionales*. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (MEN). (2003). Resolución 2565: Por la cual se establecen parámetros y criterios para la prestación del servicio educativo a la población con necesidades educativas.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (MEN). (2006). Estándares Básicos de Competencia. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (MEN). (2009). Decreto 366: Por medio del cual se reglamenta la organización del servicio de apoyo pedagógico para la atención de los estudiantes con discapacidad y con capacidades o con talentos excepcionales en el marco de la educación inclusiva.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (MEN). (2017). Decreto 1421: Por el cual reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad.

Moreno, L. y Waldegg, G. (2002). *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas*. México: Seminario Nacional de Formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de Matemáticas, pp. 40-66.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Pastor, C. (2019). Diseño Universal para el Aprendizaje: un modelo teórico-práctico para una educación inclusiva de calidad. *Participación Educativa*.

Pineda, S. (2018). *Formación inicial de profesores de matemáticas alrededor de la atención a la diversidad*. [Tesis de maestría]. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

- Piñeiro, J., Ramírez, R., y Segovia, I. (2017). Detección del talento matemático en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación matemática en la infancia*, 6(2), 56-71.
- Renzulli, J. (2005). The three-ring definition of giftedness: A developmental model for promoting creative productivity. En Sternberg, R. y Davidson, J. (Eds.). *Conceptions of Giftedness*. (Vol. 2, pp. 246-280). Cambridge University Press
- Sheffield, L. J. (1999). *Developing Mathematically Promising Students*. Reston.
- Sheffield, L. J. (1994). *The Development of Gifted and Talented Mathematics Students and the National Council of Teachers of Mathematics Standards* (1st ed.). The National Research Center on the Gifted and Talented.
- Singer, F., Sheffield, L., Freiman, V., & Brandl, M. (2016). *Research on and activities for mathematically gifted students*. Springer Nature.
- Sriraman, B. (2003). Mathematical Giftedness, Problem Solving, and the Ability to Formulate Generalizations: The Problem-Solving Experiences of Four Gifted Students. *Journal of Secondary Gifted Education*, 14(3), 151-165.
- Stern, W. (1914). *The psychological methods of testing intelligence* (No. 13). Warwick & York.
- Unesco. (1994). *Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad*. Ministerio de Educación y Ciencia y Unesco, Salamanca, España.
- Unesco. (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. Santiago de Chile: Oficina Regional de Educación de la Unesco para América Latina y el Caribe.

- Valbuena, S., Rivera, A. y Padilla, I. (2022). Desarrollo del álgebra temprana en estudiantes con capacidades excepcionales de Educación Básica Primaria. *Libro de Actas del 2º Congreso Caribeño de Investigación Educativa: Nuevos paradigmas y experiencias emergentes* (pp. 499-504).
- Vale, I., & Pimentel, T. (2011). Mathematical challenging tasks in elementary grades. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda, *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1154-1164).
- Vale, I., Pimentel, T., Cabrita, I., Barbosa, A., & Fonseca, L. (2012). Pattern problem solving tasks as a mean to foster creativity in mathematics. In *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, No. 1, pp. 171-178).
- Velasco, A. (2022). *Profesores de matemáticas en ejercicio que reflexionan sobre la atención a la diversidad en clase de matemáticas*. [Tesis de maestría]. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.
- Vergel, R. (2010). La perspectiva de cambio curricular Early-Algebra como posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de educación primaria: Una mirada al proceso matemático de generalización. *Memoria 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*.
- Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). [Tesis doctoral]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- Voica, C., & Singer, F. M. (2013). Problem modification as a tool for detecting cognitive flexibility in school children. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 45(2), 267–279. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0492-8>
- Zapatera, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 21(1), 87-114.

Apéndices

Apéndice A. Rúbrica general para valorar diseños didácticos del proyecto 70783

PROYECTO MINISTERIO
"Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores"

VALORACIÓN DISEÑOS DIDÁCTICO XXXX

1. Valoración de las tablas con propósitos y desempeños

II. Coherencia horizontal (Por diseño)

Según los propósitos (pensamientos)

¿Cómo se han resuelto problemas en la Historia usando razones y proporciones? <i>Pensamiento numérico y variacional</i>	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
Los propósitos están ajustados al nivel de conceptualización, según cada nivel de profundidad.						
Los propósitos están vinculados estrechamente con la pregunta problematizadora y con el contexto.						
El propósito se relaciona con estándares específicos para el grupo de grados.						
El propósito, en cada nivel, comprende el mismo objeto matemático.						

Según los descriptores (procesos)

¿Los descriptores están *ajustados* a las habilidades de proceso, en cada nivel de profundidad?

P1. ¿Qué matemáticas aparecen en la planeación de un viaje? <i>Pensamiento numérico</i>	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
¿Los descriptores están <i>ajustados</i> a las habilidades de proceso, en cada nivel de profundidad?	Comunicación					
	Modelación					
	Razonamiento					
	Elaboración, comparación y ejecución de procedimientos					
Es progresiva la evolución del descriptor, en todos los niveles, según las habilidades						

P2. ¿Cómo construir un mosaico partido en figuras? <i>Pensamiento geométrico</i>	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
¿Los descriptores están <i>ajustados</i> a las habilidades de proceso, en cada nivel de profundidad?	Comunicación					
	Modelación					
	Razonamiento					
	Elaboración, comparación y ejecución de procedimientos					
Es progresiva la evolución del descriptor, en todos los niveles, según las habilidades						

P3. ¿Qué información es útil para la interpretación de datos recolectados en un torneo escolar de Tangram? <i>Pensamiento métrico</i>	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
¿Los descriptores están <i>ajustados</i> a las habilidades de proceso, en cada nivel de profundidad?	Comunicación					
	Modelación					
	Razonamiento					
	Elaboración, comparación y ejecución de procedimientos					
Es progresiva la evolución del descriptor, en todos los niveles, según las habilidades						

P4.	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
¿Los descriptores están <i>ajustados</i> a las habilidades de proceso, en cada nivel de profundidad?	Comunicación					
	Modelación					
	Razonamiento					
	Elaboración, comparación y ejecución de procedimientos					
Es progresiva la evolución del descriptor, en todos los niveles, según las habilidades						

P5.		Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
¿Los descriptores están ajustados a las habilidades de proceso, en cada nivel de profundidad?	Comunicación						
	Modelación						
	Razonamiento						
	Elaboración, comparación y ejecución de procedimientos						
Es progresiva la evolución del descriptor, en todos los niveles, según las habilidades							

Comentario general

Los procesos de comunicación y modelación no son suficientemente promovidos en los cinco primeros diseños propuestos y revisados.

II. Coherencia vertical

A nivel de cada pregunta

Los descriptores, para cada proceso se ajustan o articulan verticalmente	P1					P2					P3					P4					P5				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Comunicación																									
Razonamiento																									
Elaboración, comparación y ejecución de procedimientos																									
Modelación																									

A nivel global

¿Se observa progreso en los objetos matemáticos de estudio a medida que se avanza en cada pregunta problematizadora?

Indicadores	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
Conexión entre las preguntas problematizadoras ajustadas al desarrollo de los pensamientos						
Se abordan todos los pensamientos con los contextos seleccionados						

Se cubre un 70% de los estándares del grupo de grados						

2. Valoración diseño con orientaciones al profesor

Indicadores	P1					P2					P3					P4					P5				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Se explicitan los planteamientos epistemológicos o históricos y didácticos																									
Se indica los procesos que se están trabajando en las diferentes actividades																									
Se fundamentan las actividades con lo propuesto en los documentos de referencia del MEN																									

3. Valoración de la hoja de trabajo del estudiante

III1. Coherencia horizontal (Por diseño)

¿Se observa un desarrollo progresivo en las actividades de cada momento, de cada nivel de profundidad?

Indicador	P1					P2					P3					P4					P5				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Se ajusta cada actividad a los momentos de cada diseño, según el nivel de profundidad.																									

III2.Coherencia vertical

¿Se observa conexión en el desarrollo de los procesos en cada diseño, en cada tarea, según los descriptores propuestos?

Indicador	P1					P2					P3					P4					P5				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Conexión entre los descriptores ajustados al desarrollo de los procesos en cada diseño, en cada tarea.																									

En general

Indicador	P1					P2					P3					P4					P4				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Las actividades propuestas responden a lo indicado en la tabla de propósitos y descriptores																									
Se observa el desarrollo del objeto matemático desde lo didáctico*																									
Las instrucciones, dentro del diseño, están acordes con el nivel de																									

[illegible]

*Por ejemplo:

- Es visible alguna intención didáctica en las diferentes actividades formuladas
- A medida que aumenta el nivel hay diferentes representaciones y articulación entre ellas
- La conceptualización del objeto matemático se relaciona con el nivel de profundidad y se hace visible

****Por ejemplo:**

- ¿las preguntas e instrucciones son formuladas según el grupo de grados?
- Se dan instrucciones cortas o precisas según el nivel de profundidad

4. Valoración del DUA

Principio I: Proporcionar múltiples formas de *representación*

Indicador	P1					P2					P3					P4				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona diferentes opciones para percepción.																				
Pauta 2. Proporciona múltiples opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y simbólicas																				
Pauta 3. Proporciona opciones para la comprensión																				

Práctica II. Proporcionar múltiples formas de expresión

Indicador	P1					P2					P3					P4				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para la interacción física.																				
Pauta 2. Proporciona opciones para la expresión y la comunicación.																				
Pauta 3. Proporciona opciones para las funciones ejecutivas.																				

Principio III. Proporcionar múltiples formas de implicación

Indicador	P1					P2					P3					P4				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para captar el interés																				
Pauta 2. Proporciona opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia																				
Pauta 3. Proporciona opciones para la autorregulación																				

Apéndice B. Diseño ajustado

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

DISEÑO NIVEL 4

MATERIAL EN CONSTRUCCIÓN UIS

**PRIMER
MOMENTO**

¿Cómo encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?



NATACIÓN SINCRONIZADA

En el nado sincronizado se combina la danza, la gimnasia y la natación. Los nadadores realizan movimientos elaborados dentro del agua al ritmo de la música con trajes muy llamativos y maquillaje.

Observe el siguiente video:

<https://olympics.com/es/video/elequipo-rusa-se-lleva-el-oro-en-nado-sincronizado>

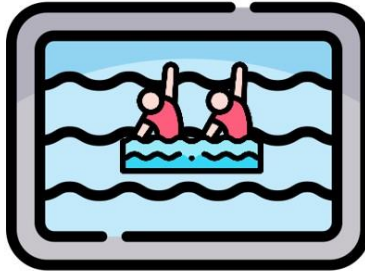
Colombia decidió participar en el torneo de natación sincronizada en los Juegos Olímpicos de Tokio 2020, para ello fue necesario convocar a los nadadores profesionales y conformar los equipos que se presentarían en cada competencia. Margarita, la presidenta de la organización del comité de los juegos olímpicos 2020, quiso organizar los equipos para las competencias del primer día de nado sincronizado en los cuales solo podían participar parejas.

Ella logró organizar los grupos de algunas competencias formando una figura específica

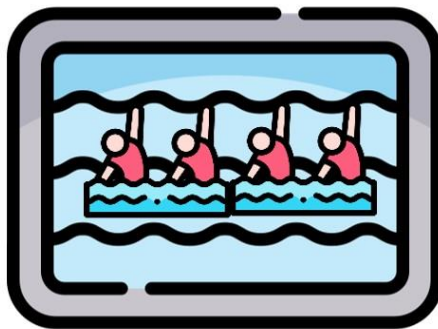
1. Pegue stickers en las piscinas para representar la figura que forman los nadadores en la competencia 5, 6, 7, 8 y 9.

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

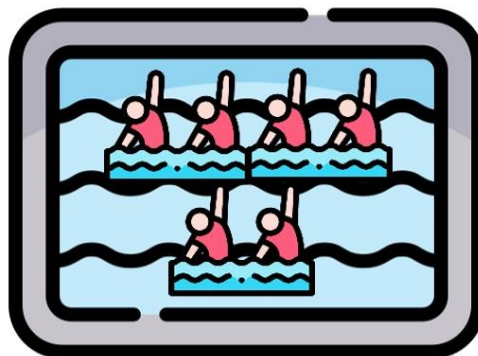
COMPETENCIA 1



COMPETENCIA 2

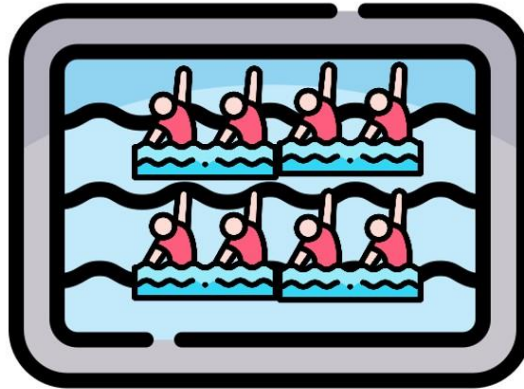


COMPETENCIA 3

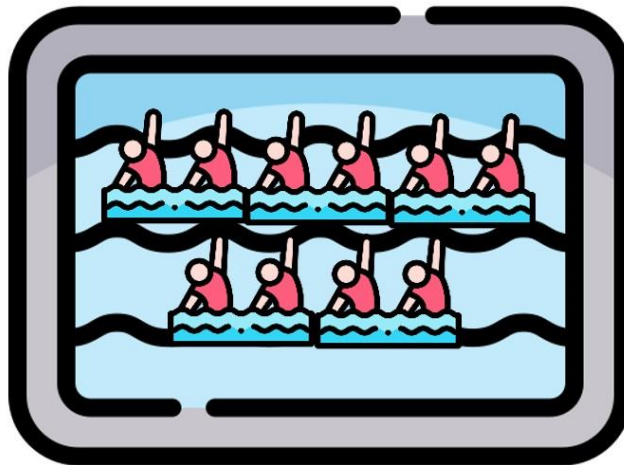


¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

COMPETENCIA 4

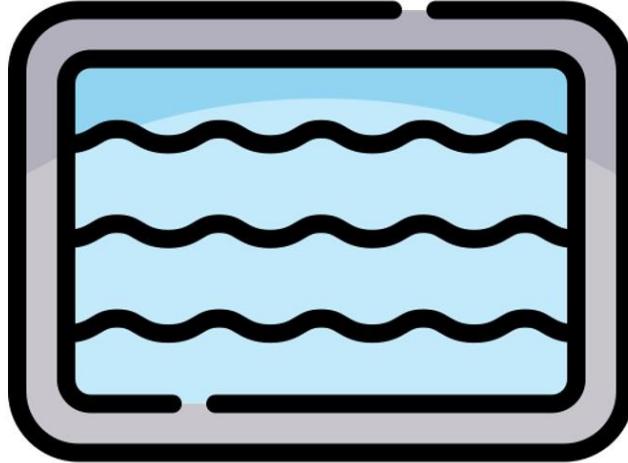


COMPETENCIA 5

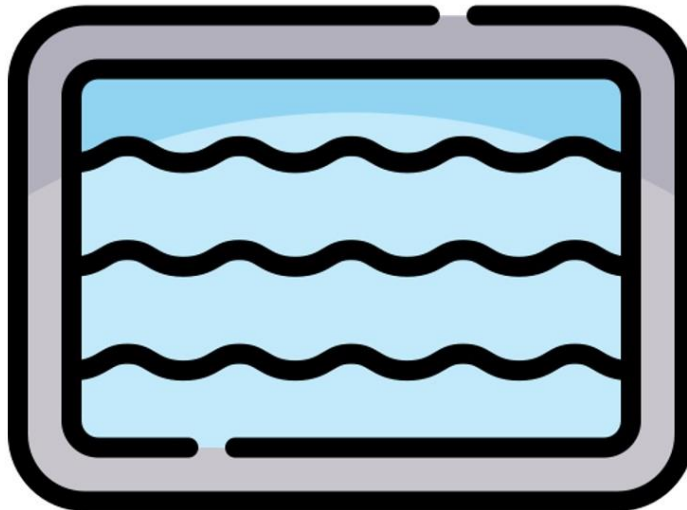


¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

COMPETENCIA 6

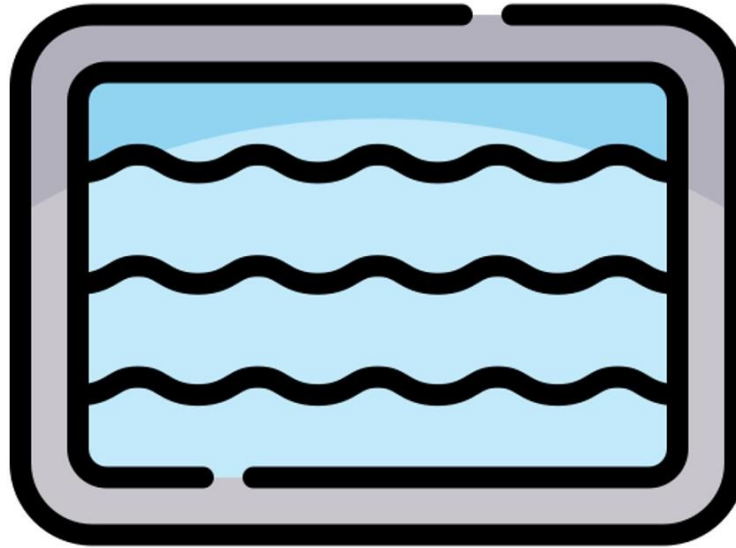


COMPETENCIA 7

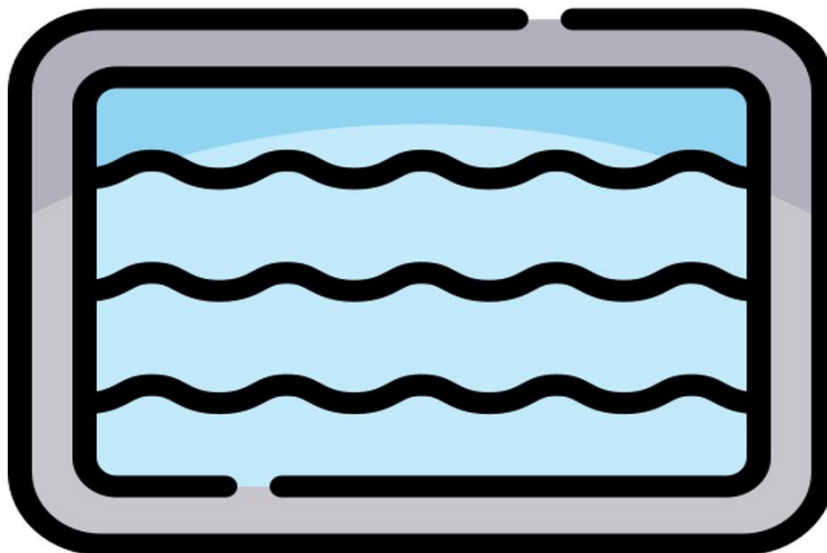


¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

COMPETENCIA 8



COMPETENCIA 9



¡Discuta los resultados con sus compañeros!

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

2. Complete la información teniendo en cuenta lo encontrado el punto anterior.

Número de COMPETENCIA	TOTAL NADADORES
1	2
2	4
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
15	
23	
31	

3. ¿Cómo encontró la cantidad de nadadores que participaron en la competencia 7, 8 y 9?
Explique su respuesta.

4. ¿Cómo encontró la cantidad de nadadores que participaron en la competencia 15, 23 y 31?
Explique su respuesta.

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

5. ¿Qué debemos hacerle a la figura formada en la competencia 5 para obtener la figura formada en la competencia 6? **Explique su respuesta.**

6. ¿Qué debemos hacerle a la figura formada en la competencia 9 para obtener la figura formada en la competencia 15? **Explique su respuesta.**

¡Discuta los resultados con sus compañeros!

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

**SEGUNDO
MOMENTO**



En mi trabajo inicial logré conformar las primeras 9 competencias en la modalidad de parejas y la competencia 15, 23 y 31. Sin embargo, la organización de los Juegos Olímpicos me solicitó conformar cualquier competencia en dicha modalidad ¡Podrías ayudarme!

7. Si conozco únicamente el número de la competencia ¿Cómo puedo encontrar el total de nadadores que participa? **Explique su respuesta.**

8. ¿Cuál cree que es la última competencia? ¿Por qué? Discuta los resultados con sus compañeros.

9. ¿Cómo podemos encontrar la cantidad total de nadadores que participan en la competencia n ? ¿Por qué?

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

10. Al iniciar el torneo de parejas, llegaron grupos distintos de nadadores. Complete la información indicando si pueden presentarse en dicha modalidad y escribiendo el número de la competencia en la que deben presentarse.

¿Pueden participar en la modalidad parejas?	Número de COMPETENCIA	TOTAL NADADORES
		74
		90
		101
		138
		165

11. En la tabla anterior ¿hubo grupos que no pudieron presentarse en la modalidad de parejas? ¿cuáles grupos? ¿Por qué?

12. En la tabla anterior ¿hubo grupos que pudieron presentarse en la modalidad de parejas? ¿cuáles grupos? ¿Por qué?

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

13. En la tabla anterior ¿cómo encontró la competencia en la que debieron presentarse los grupos que participaron en la modalidad de parejas? **Explique su respuesta.**

14. Explíquelo a Margarita la manera de encontrar la figura que forman los nadadores conociendo el total de nadadores únicamente.

¡Discuta los resultados con sus compañeros!

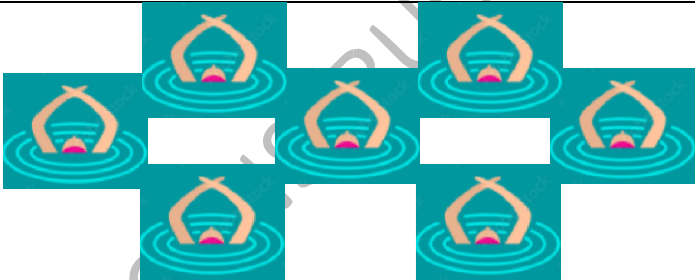
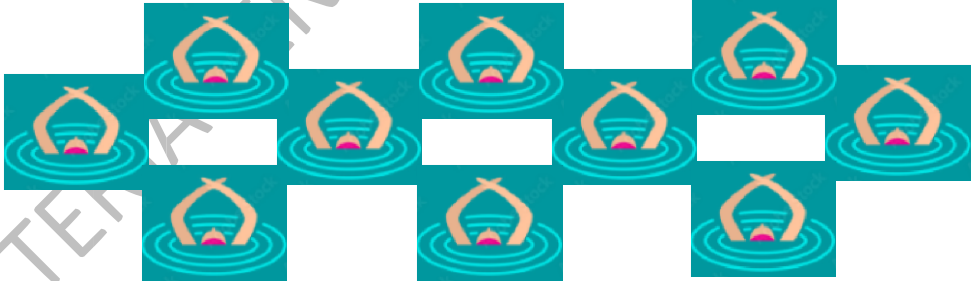
15. Abra el siguiente applet de Geogebra: <https://www.geogebra.org/classroom/bnmsy6t8>

Allí, se presenta la organización por grupos de algunas competencias formando una figura específica. Para cada competencia, aparece el número de nadadores específico. Cree un problema con alta dificultad con el que rete a un amigo y en el que utilice la situación presentada en el applet. Puede darle algún nombre a la modalidad de nadado, y hacer tantas preguntas como quiera.

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

TERCER
MOMENTO

16. Se incluye una modalidad de nado sincronizado llamada MIXTA los grupos deben estar conformadas por un cuarteto y algunos tríos. Ayúdele a Margarita a completar las figuras que forman los nadadores en cada competencia dibujando los nadadores y escribiendo el número total de nadadores que participan en cada competencia.

Competencia	Forma	Total nadadores
1		
2		
3		
4		

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

5		
6		
7		

17. ¿Cuántos nadadores participaron en la competencia número 8, 9, 10, 25, 56, 115? **Explique detalladamente su respuesta.**

18. ¿Puede encontrar la cantidad total de nadadores que participan en una competencia conociendo el total de nadadores que participan en la competencia anterior? ¿Qué procedimiento debe seguir para encontrar la cantidad total de nadadores? **Explique su respuesta.**

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

19. ¿Puede encontrar la cantidad total de nadadores que participan en una competencia conociendo únicamente el número de la competencia? ¿Qué procedimiento debe seguir para encontrar la cantidad total de nadadores? **Explique su respuesta.**

20. ¿Es posible que un equipo de 99 nadadores haya participado en una competencia en la modalidad MIXTA? ¿Por qué? Explique su respuesta y compare los resultados con sus compañeros.

21. ¿Cómo deben estar conformados los equipos que pueden participar en una competencia de MIXTA? Plantee una conjetura y explíquela detalladamente.

22. Describa que debe tener en cuenta Margarita para saber la figura que forma un grupo que participa en cualquier competencia en la modalidad MIXTA.

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

23. ¿Es posible que un mismo equipo participe en una competencia en la modalidad PAREJAS y modalidad MIXTA sin que sobre algún nadador? Explique su respuesta y compare los resultados con sus compañeros.

¡Discuta los resultados con sus compañeros!

MATERIAL EN CONSTRUCCIÓN UIS

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

CUARTO MOMENTO

Iniciaron los juegos olímpicos y cada país quiere participar en los diferentes torneos de natación sincronizada. Se muestran a continuación los países participantes y la cantidad de nadadores que competirán.

PAIS	CANTIDAD TOTAL DE NADADORES
 Rusia	15
 Estados Unidos	18
 Canadá	12
 Francia	8
 Japón	21
 China	16
 España	28
 Colombia	24
 Ucrania	14

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

La organización de los Juegos Olímpicos anuncia lo siguiente:



24. Encierre con color rojo los países que pueden participar en las competencias de **Parejas**, con color verde en la de **Tríos**, con color azul en la de **Cuartetos** y con color naranja en la de **Mixta**, sin que ningún nadador quede por fuera.

 **Rusia**
15 participantes

 **Estados Unidos**
18 participantes

 **Canadá**
12 participantes

 **Francia**
8 participantes

 **Japón**
21 participantes

 **China**
16 participantes

 **España**
33 participantes

 **Colombia**
29 participantes

 **Ucrania**
14 participantes

25. ¿Cuáles países participaron en la modalidad **Parejas** y cuáles no? ¿Por qué? Discuta con sus compañeros

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

26. ¿Cuáles países participaron en la modalidad **Tríos** y cuáles no? ¿Por qué?
Discuta con sus compañeros

27. ¿Cuáles países participaron en la modalidad **Cuartetos** y cuáles no? ¿Por qué? Discuta con sus compañeros

28. ¿Cuáles países participaron en la modalidad **Mixta** y cuáles no? ¿Por qué?
Discuta con sus compañeros

29. ¿Hubo países que participaron en la modalidad de **Parejas** y también en la modalidad de **Tríos** sin que ningún nadador quedara por fuera? En caso afirmativo, ¿Cuáles fueron esos países? ¿Por qué? Discuta con sus compañeros

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

30. ¿Hubo países que participaron en la modalidad de **Tríos** y también en la modalidad de **Cuartetos** sin que ningún nadador quedara por fuera? En caso afirmativo, ¿Cuáles fueron esos países? ¿Por qué? Discuta con sus compañeros
31. ¿Hubo países que participaron en la modalidad de **Mixta** y también en la modalidad de **Cuartetos** sin que ningún nadador quedara por fuera? En caso afirmativo, ¿Cuáles fueron esos países? ¿Por qué? Discuta con sus compañeros
32. ¿Hubo países que participaron en la modalidad de **Parejas, Tríos** y también en la modalidad de **Cuartetos** sin que ningún nadador quedara por fuera? En caso afirmativo, ¿Cuáles fueron esos países? ¿Por qué? Discuta con sus compañeros.
33. ¿Cómo debió ser la cantidad total de participantes que representó a un País que participó en las tres modalidades? Plantee una conjetura y explique su respuesta.

¿Qué patrones encontramos en la organización de las competencias de natación sincronizada?

34. México también participó en las competencias de nado sincronizado, sin embargo, por error de digitación no fue puesto en la tabla. Si sabemos que la cantidad total de nadadores mexicanos participó en todas las modalidades sin que ningún nadador quedara por fuera, ¿Qué características tuvo la cantidad total de nadadores que compitieron? **Explique su respuesta.**

35. ¿Podemos saber cuál fue la cantidad exacta de nadadores mexicanos que compitieron? ¿Por qué?

¡Discuta los resultados con sus compañeros!