

EFFECTO DE UN CAMPO ELECTROSTÁTICO AXIALMENTE SIMÉTRICO  
SOBRE UN ELECTRÓN EN CONDICIONES DE AUTORESONANCIA  
CICLOTRÓNICA ESPACIAL

HENRY GUTIÉRREZ AMAYA.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
GRUPO DE FÍSICA Y TECNOLOGÍA DEL PLASMA Y CORROSIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA

2010

EFFECTO DE UN CAMPO ELECTROSTÁTICO AXIALMENTE SIMÉTRICO  
SOBRE UN ELECTRÓN EN CONDICIONES DE AUTORESONANCIA  
CICLOTRÓNICA ESPACIAL

HENRY GUTIÉRREZ AMAYA

TÉSIS DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
FÍSICO

Director:

PhD. VALERIY DOUGAR ZHABON.

Codirector:

MSc. EDUARDO A. OROZCO.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
GRUPO DE FÍSICA Y TECNOLOGÍA DEL PLASMA Y CORROSIÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA

2010

## AGRADECIMIENTOS

*El autor expresa sus sinceros agradecimientos:*

*Doy Gracias a Dios.*

*A mis directores PhD. Valeriy Dougar y al MSc. Eduardo Orozco, por su indispensable y oportuna orientación a lo largo del desarrollo de este proyecto.*

*A mis compañeros del grupo FITEK, por su valiosísimo apoyo y colaboración.*

*A todas las personas que contribuyeron en mi formación, profesores y amigas y amigos.*

*A la Universidad Industrial de Santander.*

*A toda mi familia, en especial a mi tía Carmen, por su invaluable apoyo a lo largo de toda mi vida.*

## CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	13
1. MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN CAMPOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS .....	15
1.1 MOVIMIENTO EN CAMPO MAGNÉTICO HOMOGÉNEO .....	16
1.2 MOVIMIENTO EN CAMPO MAGNÉTICO NO HOMOGÉNEO .....	17
1.2.1 Gradiente perpendicular a B .....	18
1.2.2 Gradiente paralelo a B .....	19
2. RESONANCIA CICLOTRÓNICA .....	21
2.1 MECANISMO SARA. ....	22
2.1.1 Campos electromagnéticos .....	24
2.1.1.1 Campo magnético estático .....	24
2.1.1.2 Campo electromagnético de microondas, modo TE <sub>11p</sub> .....	25
2.1.1.3 Campo eléctrico de los electrodos .....	26
3. MODELO NUMÉRICO .....	28
3.1 CAMPO ELECTROSTÁTICO .....	28
3.2 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO .....	30
3.3 INTERPOLACIÓN DE LOS CAMPOS .....	34
4. RESULTADOS .....	36
4.1 CAVIDAD DE 20cm MODO TE <sub>112</sub> .....	39
4.2 CAVIDAD DE 200cm MODO TE <sub>111</sub> .....	55
4.2.1 Campo magnetostático con perfil lineal .....	56
4.2.2 Campo magnetostático con perfil parabólico .....	61
5. CONCLUSIONES .....	65
APÉNDICE .....	66
REFERENCIAS .....	67

## LISTA DE TABLAS

<b>Tabla 1.</b> <i>Variables normalizadas</i> .....	34
<b>Tabla 2.</b> <i>Parámetros de las bobinas para la cavidad de 20cm</i> .....	36
<b>Tabla 3.</b> <i>Parámetros de los electrodos, cavidad de 20cm</i> .....	39
<b>Tabla 4.</b> <i>Efecto para cada caso de energía</i> .....	40
<b>Tabla 5.</b> <i>Parámetros de los electrodos, cavidad 200cm</i> .....	55
<b>Tabla 6.</b> <i>Efecto del campo para cada caso de energía de inyección y los perfiles lineal y parabólico del campo magnetostático</i> .....	55

## LISTA FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Movimiento ciclotrónico de la partícula cargada en un campo magnético. ....	15
<b>Figura 2.</b> <i>Movimiento de giro alrededor de las líneas de campo magnético y proyección de la órbita en un plano perpendicular a .</i> .....	17
<b>Figura 3:</b> <i>forma del campo magnético y proyección de la órbita en un plano perpendicular a <math>\mathbf{B}</math> del movimiento de deriva con giro alrededor de las líneas de campo magnético.</i> .....	19
<b>Figura 4.</b> <i>a) forma del campo magnético b) movimiento de deriva con giro alrededor de las líneas de campo magnético.</i> .....	20
<b>Figura 5:</b> <i>Modelo de sistema físico: 1. Cavity resonante, 2. Bobinas con corriente, 3. Guía de onda de entrada de microondas (una de dos), 4. Perfil del campo eléctrico (caso particular modo TE111), 5. Cañón de electrones, 6. Haz de electrones.</i> .....	23
<b>Figura 6.</b> <i>a) Representación de los campos eléctrico y magnético y la trayectoria de la partícula. b) Proyección de la trayectoria de la partícula sobre un plano transversal.</i> .....	23
<b>Figura 7:</b> <i>Cavity del esquema SARA con los electrodos.</i> .....	26
<b>Figura 8:</b> <i>Esquema de Leapfrog para el cálculo de velocidades y posiciones separados entre sí por medio paso de tiempo.</i> .....	31
<b>Figura 9:</b> <i>vectores para la rotación de la partícula.</i> .....	33
<b>Figura 10.</b> <i>Posición del electrón dentro de una celda de la malla y superficies S referentes a los cuatro nodos para la interpolación según las ecuaciones (3.16).</i> .....	35

## LISTA DE GRÁFICAS

<b>Gráfica 1.</b> <i>Campo magnetostático en el esquema SARA para la cavidad de 20cm.</i> .....	37
<b>Gráfica 2.</b> <i>DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO OFA.</i> .....	41
<b>Gráfica 3.</b> <i>DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO OAF.</i> .....	41
<b>Gráfica 4.</b> <i>DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO FAO.</i> .....	42
<b>Gráfica 5.</b> <i>DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO AFO.</i> .....	42
<b>Gráfica 6.</b> <i>DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO FOA.</i> .....	43
<b>Gráfica 7.</b> <i>DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO AOF.</i> .....	43
<b>Gráfica 8.</b> <i>DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO FAA.</i> .....	44
<b>Gráfica 9.</b> <i>DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO AAF.</i> .....	44
<b>Gráfica 10</b> <i>Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 8keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase <math>\varphi_{EV}</math>. c) Velocidad longitudinal.</i> .....	45
<b>Gráfica 11.</b> <i>Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 10keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase . c) Velocidad longitudinal. .</i> ..	49
<b>Gráfica 12.</b> <i>Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 12keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase . c) Velocidad longitudinal. .</i> ..	52
<b>Gráfica 13.</b> <i>Trayectoria del electrón en el esquema SARA.</i> .....	54
<b>Gráfica 14.</b> <i>Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 10keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase . c) Velocidad longitudinal. .</i> ..	56
<b>Gráfica 15.</b> <i>Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 20keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase . c) Velocidad longitudinal. .</i> ..	57

**Gráfica 16.** *Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 30keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase . c) Velocidad longitudinal ...58*

**Gráfica 17.** *Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 10keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase . c) Velocidad longitudinal. ..61*

**Gráfica 18.** *Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 20keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase . c) Velocidad longitudinal. ..62*

**Gráfica 19.** *Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 30keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase . c) Velocidad longitudinal. ..63*

**Gráfica 20.** *Comparación de las curvas de energía. ....66*

## RESUMEN

**TITULO:** EFECTO DE UN CAMPO ELECTROSTÁTICO AXIALMENTE SIMÉTRICO SOBRE UN ELECTRÓN EN CONDICIONES DE AUTORESONANCIA CICLOTRÓNICA ESPACIAL.\*

**AUTORES:** GUTIÉRREZ AMAYA, Henry.\*\*

**PALABRAS CLAVE:** Resonancia ciclotrónica, campo magnético estacionario y no homogéneo, campo electrostático, fuerza diamagnética, campo axialmente simétrico, método de Boris.

**DESCRIPCIÓN:** Se estudia la dinámica relativista de un electrón, acelerado en condiciones de resonancia ciclotrónica espacial por ondas de tipo transversal eléctrico  $TE_{11p}$  en presencia de campos magnético y eléctrico estáticos, no homogéneos y axialmente simétricos. El campo magnético estático se incrementa en la dirección axial de movimiento del electrón, de tal modo que éste se encuentra en condiciones de autoresonancia ciclotrónica espacial. Se estudia el efecto que diversas configuraciones de campo electrostático tienen sobre el movimiento del electrón, el cual aumenta su energía mediante la interacción resonante, limitada por la acción de la fuerza diamagnética asociada al efecto espejo. Se realiza una simulación a partir de la solución numérica de la ecuación de movimiento de Newton-Lorentz utilizando el esquema de Leap-frog junto con el algoritmo de Boris. Los campos eléctrico y magnético en las posiciones de la partícula se calculan utilizando el método de interpolación bilineal. Se muestra que la interacción resonante entre el electrón y la onda electromagnética estacionaria polarizada circularmente, puede mejorarse con la inclusión del campo eléctrico estático, lo cual conduce a que el electrón alcance una mayor energía. Los experimentos numéricos se realizan con los campos de microondas  $TE_{112}$  y  $TE_{111}$  de  $2.45\text{ GHz}$  y  $0.1\text{ GHz}$  respectivamente, con amplitudes de  $6\text{ kV/cm}$  y  $10\text{ kV/cm}$ .

---

\* Proyecto de grado.

\*\* Facultad de ciencias. Escuela de física. Director: PhD. Valeriy Dougar Zhabon. Codirector: MSc. Eduardo Orozco.

## SUMMARY

**TITLE:** AXISYMETRIC ELECTROSTATIC FIELD EFFECT ON AN ELECTRON UNDER SPATIAL CYCLOTRON AUTORRESONANCE CONDITIONS.\*

**AUTHORS:** GUTIÉRREZ AMAYA, Henry.\*\*

**KEY WORDS:** Cyclotron resonance, stationary and inhomogeneous magnetic field, electrostatic field, diamagnetic force, axis-symmetric field, Boris method.

**DESCRIPTION:** The relativistic dynamics of an electron, accelerated in the cyclotron resonance conditions by transversal electric  $TE_{11p}$  waves in the presence of static, inhomogeneous and axisymmetric electric and magnetic fields is studied. The static magnetic field is increased in the axial direction of the motion of the electron in such a way it remains in the spatial cyclotron autoresonance conditions. The effect that diverse configurations of the electrostatic field have on the electron's motion which increases its energy by the resonant interaction, limited by the action of the diamagnetic force associated with the mirror effect, is studied. A simulation of the system is realized through a numerical solution of the Newton-Lorentz equation of motion using the Leap-frog scheme with the Boris algorithm. The electric and magnetic fields at particle positions are calculated by using the bilinear interpolation method. It is shown that the resonant interaction of the electron with the electromagnetic stationary circularly polarized wave can be improved with the inclusion of the static electric field; as a result, the electron gets a larger energy. The numerical experiments are realized with the  $TE_{112}$  and  $TE_{111}$  microwave fields of 2.45 GHz and 0.1 GHz, respectively, of 6 kV/cm and 10 kV/cm amplitude.

---

\* Grade of Project

\*\* Faculty of Sciences. School of Physics. Directress: PhD. Valeriy Dougar Zhabon.  
Codirectress: MSc. Eduardo Orozco.

## INTRODUCCIÓN

El movimiento de partículas cargadas en un campo magnético en presencia del campo eléctrico de una onda electromagnética polarizada circularmente ha sido estudiado desde los años 60 y se ha encontrado que dicha interacción puede exhibir efectos de resonancia, fenómeno que ha sido denominado Resonancia Ciclotrónica (Ciclotron Resonance, *CR*) [1-3]. Dicha resonancia consiste en la transmisión efectiva de la energía de la onda a las partículas (iones y/o electrones) por lo que se ha sugerido como mecanismo de aceleración de partículas [4-11].

Para que se dé la interacción resonante es necesario que la frecuencia  $\omega$  de la onda y la frecuencia ciclotrónica  $\Omega$  de la partícula satisfagan la relación  $\omega \approx \Omega$ . Esta condición se afecta a medida que la partícula gana energía debido al “aumento de masa”, limitando así la interacción resonante. Los esquemas de aceleración basados en la *CR* implementan variaciones en los campos con el fin de compensar dicho desajuste, prolongando así la interacción resonante para alcanzar mayores energías.

Diferentes esquemas para el mantenimiento de la *CR* han sido estudiados teórica y experimentalmente entre los cuales vale la pena resaltar el mecanismo *GYRAC* [4-5] el cual utiliza un campo magnético homogéneo cuya intensidad aumenta como función del tiempo, denominada resonancia ciclotrónica temporal .

En trabajos llevados a cabo por miembros del Grupo FITEK de la UIS, relacionados con la simulación de plasmas en trampas magnéticas Mínimo-B, 0-B y tipo espejo se ha encontrado que es posible la *CR* en campos magnéticos estáticos e inhomogéneos con un campo de microondas [8]. Con base en este hecho se ha propuesto y sometido a estudios teóricos basados en métodos analíticos y computacionales [9-11] un mecanismo de aceleración de

partículas cargadas denominado Aceleración por Autoresonancia Ciclotronica Espacial *SARA* por sus siglas en inglés (***S*patial *A*uto**R**esonance **A**cceleration**). Dichos estudios del mecanismo *SARA* demuestran que es posible acelerar electrones hasta energías del orden de keV en cavidades resonantes. Sin embargo, la energía alcanzada en el mecanismo *SARA* está limitada por la fuerza diamagnética que surge debido a la inhomogeneidad del campo magnético y que limita la interacción resonante. Con el fin de contrarrestar dicho efecto se ha propuesto superponer un campo electrostático axialmente simétrico al esquema *SARA* que permita prolongar la interacción resonante. En este trabajo se analiza el efecto que tiene dicho campo sobre la dinámica de electrones en condiciones *SARA*, utilizando la aproximación de una sola partícula. Dicha aproximación es válida en haces de baja concentración donde la energía de interacción entre las partículas es mucho menor que la energía cinética de las mismas.

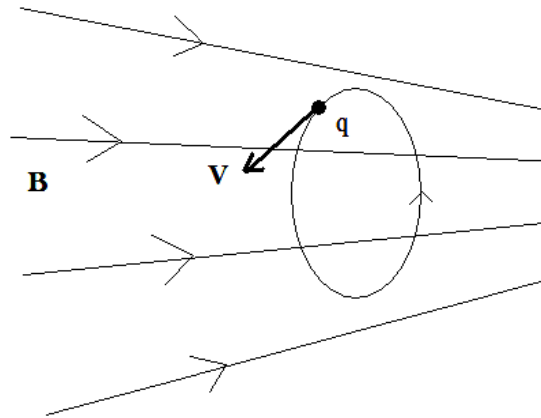
Adicionalmente, se supone que las cavidades resonantes se encuentran sometidas al vacío casi perfecto, de tal manera que la concentración de gas residual permite considerar que la longitud de camino libre medio es prácticamente infinito si se compara con la longitud de las trayectorias de los electrones. Para una presión de  $10^{-6}$  Torios y una concentración de  $10^{10} \text{ cm}^{-3}$  y sección eficaz de  $10^{-16} \text{ cm}^2$  se tiene que la longitud de camino libre es del orden de 10 km, mucho mayor que las longitudes de las trayectorias.

## 1. MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN CAMPOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS

Una partícula con carga eléctrica  $q$  y masa  $m$  con velocidad  $\mathbf{V}$  en una región de vacío donde hay un campo magnético  $\mathbf{B}$ , experimenta la fuerza magnética  $\mathbf{F}_B$  dada por

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (1.1)$$

**Figura 1:** Movimiento ciclotrónico de la partícula cargada en un campo magnético.



Fuente: El autor.

que resulta en un movimiento de giro alrededor de las líneas de campo [12,13]. Si además se encuentra presente un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  la partícula experimentará la fuerza eléctrica

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E} \quad (1.2)$$

y entonces, la fuerza total  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_E$  será la Fuerza de Lorentz dada por

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{p} = m\mathbf{V}$  es el momentum  $m = m_o\gamma$ ,  $\gamma = (1 - (|\mathbf{V}| / c)^2)^{-1/2}$

$c$  = velocidad de la luz y  $m_o$  es la masa en reposo de la partícula.

Ya que se ha tenido en cuenta el efecto relativista sobre la masa de la partícula cargada, la expresión (1.3) es válida al considerar velocidades comparables con la velocidad de la luz. Sin embargo, solucionar esta ecuación de manera analítica en el caso general es bastante complicado.

La variación de la energía cinética  $W$  de la partícula proviene del trabajo realizado por el campo eléctrico:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(m_o c^2 \gamma) = q \mathbf{V} \cdot \mathbf{E} \quad (1.4)$$

El movimiento puede ser caracterizado por la frecuencia ciclotrónica  $\Omega$  y el radio de Larmor  $r_L$  dados por

$$\Omega \equiv -\frac{q\mathbf{B}}{m} \quad (1.5)$$

$$r_L = \frac{|\mathbf{V}_\perp|}{\Omega} \quad (1.6)$$

donde  $\mathbf{V}_\perp$  es la componente de la velocidad perpendicular al campo  $\mathbf{B}$ .

### 1.1 MOVIMIENTO EN CAMPO MAGNÉTICO HOMOGÉNEO

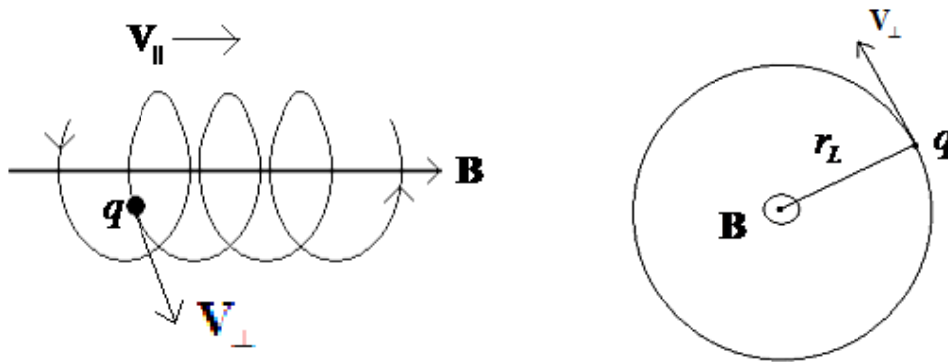
Desarrollamos  $\mathbf{V}$  en componentes paralela y perpendicular a  $\mathbf{B}$ :  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\parallel + \mathbf{V}_\perp$ . Entonces de la ecuación (1.3) con  $\mathbf{E} = 0$  obtenemos una relación para cada componente:

$$\frac{d(m_o \gamma \mathbf{V}_\parallel)}{dt} = m_o \gamma \frac{d\mathbf{V}_\parallel}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{V}_\parallel = cte,$$

$$\frac{d(m_o \gamma \mathbf{V}_\perp)}{dt} = q \mathbf{V}_\perp \times \mathbf{B} \Rightarrow \frac{d\mathbf{V}_\perp}{dt} = \frac{q}{\gamma m_o} \mathbf{V}_\perp \times \mathbf{B} = \Omega \times \mathbf{V}_\perp,$$

puesto que  $\gamma$  es constante, ya que el campo magnético no realiza trabajo sobre la partícula y por lo tanto la magnitud de la velocidad no varía. Esto significa que la partícula tiene un movimiento helicoidal: gira alrededor de las líneas de  $\mathbf{B}$  con la frecuencia angular  $\Omega$  y su centro de giro se desplaza a lo largo de dichas líneas con velocidad constante  $V_{\parallel}$  (Figura. 2).

**Figura 2.** Movimiento de giro alrededor de las líneas de campo magnético y proyección de la órbita en un plano perpendicular a  $\mathbf{B}$ .



Fuente: El autor.

## 1.2 MOVIMIENTO EN CAMPO MAGNÉTICO NO HOMOGÉNEO

Cuando  $\mathbf{B}$  no es homogéneo, el cambio de intensidad del campo (que se corresponde a la variación de la separación de las líneas de  $\mathbf{B}$ ) tiene como efecto que el radio y la frecuencia ciclotrónica de la partícula pueden variar en cada zona del campo según lo indican las expresiones (1.5) y (1.6). Se presenta entonces una deriva  $\mathbf{u}_{\nabla B}$  que en este caso está dada por

$$\mathbf{u}_{\nabla B} = -\frac{1}{q} \frac{\mu \nabla B \times \mathbf{B}}{B^2} \quad \text{donde}$$

$$\mu \sim \frac{V_{\perp}^2}{B} \quad (1.7)$$

Es el momento magnético de la partícula y la fuerza

$$\mathbf{F}_{\nabla B} = -\mu \nabla B \quad (1.8)$$

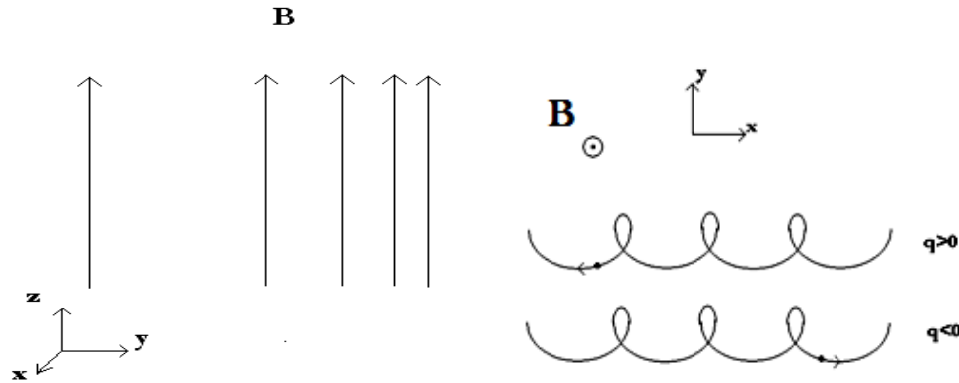
Tiene en cuenta la inhomogeneidad presente. Esta fuerza está dirigida en dirección opuesta al gradiente de intensidad del campo  $\mathbf{B}$  y es proporcional al momento magnético de la partícula, por lo que es repelida al adentrarse en regiones de campo magnético más intenso razón por la cual se le denomina fuerza diamagnética. En campos magnéticos adiabáticos  $\mu$  es constante, entonces un aumento en la intensidad del campo magnético implica un aumento en la velocidad transversal.

Se describen brevemente dos casos de inhomogeneidad:  $\nabla B \perp \mathbf{B}$  y  $\nabla B \parallel \mathbf{B}$ .

**1.2.1 Gradiente perpendicular a  $\mathbf{B}$  :  $\nabla B \perp \mathbf{B}$ .** En este tipo de campo las líneas son rectas paralelas pero su separación varía en dirección perpendicular (Figura 3). Supóngase un campo de la forma  $\mathbf{B} = B(y)\hat{\mathbf{z}}$  como se muestra en la figura, dirigido en  $\hat{\mathbf{z}}$  y cuya intensidad aumenta en la dirección  $\hat{\mathbf{y}}$ .

Cuando la partícula se adentra en la zona de campo más intenso su radio de giro disminuye y al entrar de vuelta en la zona de  $\mathbf{B}$  menos intenso el radio vuelve a crecer. Esto resulta en que el centro de giro de la partícula se desplaza en la dirección perpendicular tanto a  $\mathbf{B}$  como a  $\nabla B$ . Esta velocidad, depende de la carga.

**Figura 3:** forma del campo magnético  $\nabla B \perp \mathbf{B}$  y proyección de la órbita en un plano perpendicular a  $\mathbf{B}$  del movimiento de deriva con giro alrededor de las líneas de campo magnético.



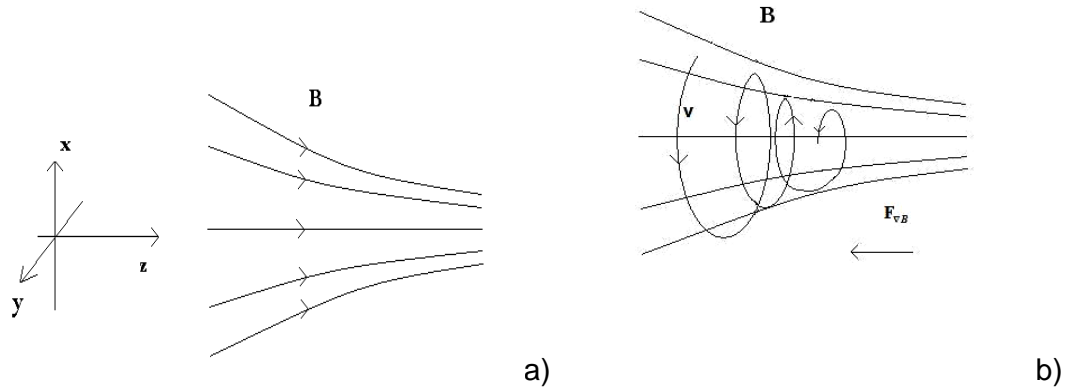
Fuente: El autor.

**1.2.2 Gradiente paralelo a B:**  $\nabla B \parallel \mathbf{B}$ . En este caso las líneas del campo apuntan y convergen en la misma dirección (Figura 4a). En coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , con  $z$  como eje de simetría, las condiciones de simetría axial y la aproximación de baja inhomogeneidad transversal son:  $B_\theta = 0$ ,  $\partial B_z / \partial r \approx 0$ ,  $\nabla B \approx \hat{\mathbf{z}} \partial B / \partial z$ .

Las componentes  $B_r$  y  $B_z$  no son independientes sino que están relacionadas mediante la ecuación  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , obteniéndose de esta que el campo total es

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{2} r^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{\mathbf{r}} + B_z \hat{\mathbf{z}}.$$

**Figura 4.** a) forma del campo magnético  $\nabla B \parallel \mathbf{B}$ . b) movimiento de deriva con giro alrededor de las líneas de campo magnético.



Fuente: El autor.

A medida que la partícula ingresa a la región de campo magnético más intenso, su radio de Larmor disminuye hasta que debido a la acción de la fuerza diamagnética su movimiento longitudinal se detiene y se invierte moviéndose de regreso hacia la zona de  $\mathbf{B}$  más débil (Figura 4b).

## 2. RESONANCIA CICLOTRÓNICA

Un caso de especial interés se presenta cuando la partícula cargada interactúa en su giro con frecuencia ciclotrónica  $\Omega$  en el campo magnético, con una onda electromagnética con frecuencia  $\omega$  polarizada circularmente, de tal manera que el campo eléctrico de la onda aumente la energía de la partícula con cada giro. Este fenómeno se denomina Resonancia Ciclotrónica (RC) [1-3]. Dicho fenómeno ha sido objeto de varios estudios teóricos y experimentales con ondas electromagnéticas viajeras y estacionarias, considerando diversas configuraciones del campo magnético y se ha sugerido como mecanismo de aceleración de partículas cargadas [4-10]. Básicamente la condición para la RC es que estas dos frecuencias sean iguales o aproximadamente iguales.

En la configuración más simple, se considera que la partícula cargada se mueve en un campo magnético constante (llamado campo guía) a lo largo del cual se propaga una onda electromagnética polarizada circularmente. De esta forma, la rotación del campo eléctrico de la onda puede tener sobre la partícula el efecto de aceleración y por lo tanto de aumento de energía de ésta en su giro ciclotrónico. Sin embargo, a medida que la partícula se acelera, toma importancia el efecto relativista de “aumento de masa” y esto introduce un desajuste en la frecuencia ciclotrónica haciendo que la igualdad con la frecuencia de la onda deje de cumplirse y el aumento de energía de la partícula esté limitado. Con el fin de contrarrestar este efecto para que se cumplan las condiciones de resonancia durante el movimiento se han utilizado diversos mecanismos [4-7] entre los cuales podemos resaltar los que introducen variaciones ya sea de dependencia temporal o espacial en los campos: magnético guía y de la onda.

Trabajos llevados a cabo por miembros del Grupo FITEK de la UIS, relacionados con la simulación de plasmas en trampas magnéticas Mínimo-B, 0-B y tipo espejo [8] muestran que es posible la CR en campos magnéticos estáticos e inhomogéneos con un campo de microondas. Con base en este

hecho se ha diseñado y sometido a estudios teóricos computacionales [9-11] un mecanismo de aceleración de partículas cargadas denominado Aceleración por Autoresonancia Ciclotrónica Espacial SARA.

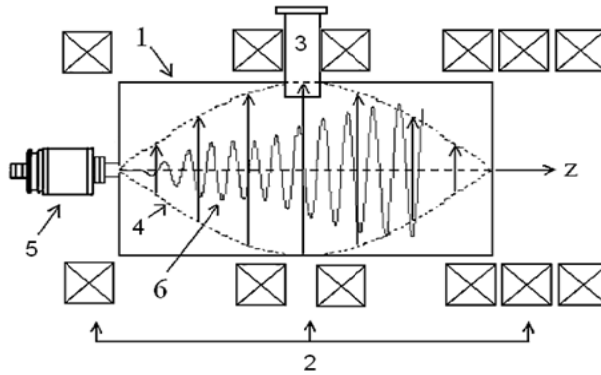
## 2.1 MECANISMO SARA.

En el esquema SARA, una onda electromagnética estacionaria polarizada circularmente en el modo  $TE_{11p}$  acelera un haz de electrones que se mueven en presencia de un campo magnetostático  $B(r, z)$  el cual es inhomogeneo y axialmente simétrico y cuya variación longitudinal es de tal forma que la condición  $\omega \approx \Omega$  se cumple compensando el desajuste introducido por el aumento del factor  $\gamma(v)$  durante el movimiento, es decir

$$\Omega = \frac{qB(r, z)}{m_o \gamma(v)} \approx \omega \quad (2.1)$$

La realización de este mecanismo puede llevarse a cabo utilizando el modelo de sistema físico mostrado en la figura 5. Tal sistema está constituido por una cavidad resonante cilíndrica de longitud  $d$  y radio  $a$ , en la cual se excita una onda electromagnética estacionaria  $TE_{11p}$  ( $p=1,2,\dots$ ). Los electrones son inyectados por un extremo de la cavidad con energía cinética longitudinal dirigida a lo largo del eje de la cavidad. Dicho eje coincide con el eje de simetría del campo magnetostático creado por un sistema de bobinas.

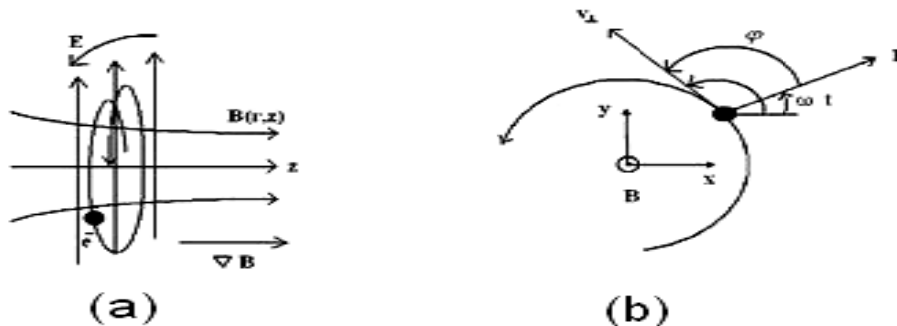
**Figura 5: Modelo de sistema físico:** 1. Cavity resonante, 2. Bobinas con corriente, 3. Guía de onda de entrada de microondas (una de dos), 4. Perfil del campo eléctrico (caso particular modo TE<sub>111</sub>), 5. Cañón de electrones, 6. Haz de electrones.



Fuente: [11].

Para que se dé la transferencia de energía del campo eléctrico  $Eh_f$  de la onda al electrón de manera que éste aumente su energía, la diferencia de fase  $\varphi_{EV}$  entre dicho campo y la velocidad transversal del electrón (Figura 6) debe encontrarse en el rango  $\pi/2 < \varphi_{EV} < 3\pi/2$ , ya que de otra forma la fuerza ejercida desacelera el giro ciclotrónico del electrón.

**Figura 6.** a) Representación de los campos eléctrico y magnético y la trayectoria de la partícula. b) Proyección de la trayectoria de la partícula sobre un plano transversal.



Fuente: [11].

El campo magnético transversal  $B_{hf}$  de la onda está desfasado  $\pi$  respecto al campo  $E_{hf}$ . La fuerza que éste ejerce en dirección longitudinal tiene un efecto de aceleración en dirección  $z$  positiva si  $\pi < \varphi_{EV} < 2\pi$ . Por lo tanto la banda de aceleración por ambos campos es  $\pi < \varphi_{EV} < 3\pi/2$ . La acción de aceleración del campo magnético consiste, no en variar la magnitud de la velocidad del electrón, sino en el cambio de dirección de ésta lo cual altera la fase influyendo así indirectamente en el comportamiento de la energía.

**2.1.1 Campos electromagnéticos.** Los campos a considerar en este trabajo son: el campo magnetostático, los campos de microondas  $E_{hf}$  y  $B_{hf}$  y el campo electrostático. A pesar de que el electrón está acelerado, las pérdidas por radiación sincrotrónica no son tenidas en cuenta puesto que las energías alcanzadas por el electrón son del orden de los keV, por lo que dichas pérdidas son aún muy pequeñas.

**2.1.1.1 Campo magnético estático.** Como se mencionó, el campo magnético guía del esquema SARA es axialmente simétrico e inhomogéneo. Este campo tiene la forma  $\mathbf{B}(r, z) = B_r(r, z)\hat{\mathbf{r}} + B_z(r, z)\hat{\mathbf{z}}$  y puede ser definido analíticamente en aproximación de baja inhomogeneidad transversal ( $\partial B_z / \partial r \approx 0$ ) mediante una función  $b(z)$  creciente de la coordenada  $z$  y cumple además que  $b(0) = 0$ . Así la componente longitudinal  $B_z$  está dada por

$$B_z(z) = B_o [\gamma_o + b(z)] \quad (2.2)$$

Donde  $B_o = m_o \omega / e$  y  $\gamma_o = \left[ 1 - (v_{zo}/c)^2 \right]^{-1/2}$  son la magnitud del campo magnético de resonancia clásica y el factor relativista inicial. La componente radial  $B_r$  no es independiente de  $B_z$  y se puede obtener en la misma aproximación a partir de la ecuación:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\ \Rightarrow B_r &= -\int r \frac{dB_z}{dz} dr = -\frac{1}{2} r^2 \frac{dB_z}{dz} \\ &= -\frac{1}{2} r^2 B_o \frac{db_z}{dz}.\end{aligned}$$

Entonces el campo magnetostático total tiene la forma

$$\mathbf{B}(r, z) = -\frac{1}{2} r^2 \frac{dB_z(z)}{dz} \hat{\mathbf{r}} + B_z(z) \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.3)$$

Utilizando esta aproximación del campo magnético, en el mecanismo SARA, la fuerza diamagnética o de gradiente de campo magnético está dada por:

$$\mathbf{F}_D = \left\{ -\frac{m_o V_{\perp}^2}{2B_o [\omega_c(z)/\omega]} \right\} \frac{\partial B}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (2.4)$$

Donde  $\omega_c(z) = \frac{V_{\perp}(z)}{r(z)}$  [11], la cual desacelera la partícula en dirección

contraria al gradiente del campo magnético afectando la eficiencia de este esquema de aceleración.

**2.1.1.2 Campo electromagnético de microondas, modo TE<sub>11p</sub>.** El modo transversal eléctrico cilíndrico excitado en la cavidad está dado de manera exacta mediante funciones de Bessel. Para el campo eléctrico con polarización circular se tiene

$$\left. \begin{aligned} E_{hfr} &= -2E_{hfo} (1/k_{\perp} r) J_1(k_{\perp} r) \sin(k_{\parallel} z) \cos(\theta - \omega t) \\ E_{hf\theta} &= 2E_{hfo} J_1'(k_{\perp} r) \sin(k_{\parallel} z) \sin(\theta - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Aquí  $E_{hfo}$  es la amplitud,  $k_{\perp} = h = S_{11}/a$ ,  $S_{11} = 1.841$ ,  $k_{\parallel} = p\pi/d$ .

Para el campo magnético se tiene

$$\left. \begin{aligned} B_{hf_r} &= 2E_{hfo} \left( k_{\parallel} / \omega \right) J_1'(k_{\perp} r) \cos(k_{\parallel} z) \cos(\theta - \omega t) \\ B_{hf_{\theta}} &= -2E_{hfo} \left( k_{\parallel} / \omega \right) \frac{J_1(k_{\perp} r)}{k_{\perp} r} \cos(k_{\parallel} z) \sin(\theta - \omega t) \\ B_{hf_z} &= 2E_{hfo} \left( k_{\perp} / \omega \right) J_1(k_{\perp} r) \sin(k_{\parallel} z) \cos(\theta - \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

**2.1.1.3 Campo eléctrico de los electrodos** El campo electrostático propuesto presenta simetría axial, por lo tanto es más conveniente el uso de coordenadas cilíndricas  $(r, \varphi, z)$  y ya que no dependerá del ángulo  $\varphi$ , es suficiente calcular inicialmente en un solo plano  $(r, z)$  es decir para un valor fijo de  $\varphi$  ( $\varphi = 0$ ).

$$\text{Entonces } \mathbf{E} = \mathbf{E}(r, \varphi, z) = \mathbf{E}(r, z) = E_r(r, z)\hat{\mathbf{r}} + E_z(r, z)\hat{\mathbf{z}}$$

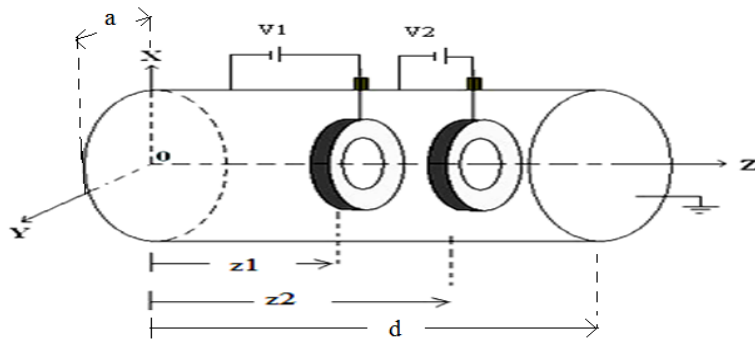
el cual se puede expresar en términos del potencial eléctrico como

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\left( \frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \right) \quad (2.7)$$

donde el potencial  $\Phi$  es de la forma  $\Phi = \Phi(r, z)$ .

Este campo físicamente se puede obtener mediante un par de electrodos coaxiales con forma de anillo, sometidos a cierta diferencia de potencial (Figura 7)

**Figura 7:** Cavity del esquema SARA con los electrodos.



Fuente: El autor.

En el análisis que se lleva a cabo en este trabajo, los electrodos tienen un grosor máximo de 2mm de manera que no se distorsione el campo de microondas. En un posible montaje físico, se podría utilizar un material como el grafito, el cual es transparente a esta radiación.

### 3. MODELO NUMÉRICO

Las ecuaciones diferenciales que expresan el campo electrostático y el movimiento del electrón se discretizan usando un método de diferencias finitas en el cual dichas ecuaciones se convierten en ecuaciones algebraicas con variables discretas:  $f(x) \rightarrow f(x_n)$ ,  $\frac{df(x)}{dx} \rightarrow \frac{\Delta f(x_n)}{\Delta x}$ ,  $n = \text{índice entero}$ . Suele denotarse  $f(x_n) = f(n)$  o usando índices:  $f_n$  ó  $f^n$ .

#### 3.1 CAMPO ELECTROSTÁTICO

Las coordenadas del plano  $(r, z)$  se discretizan obteniéndose una malla de nodos:  $(r, z) \rightarrow (r_i, z_j) \rightarrow (i, j)$ . El potencial  $\Phi$  satisface la ecuación de Laplace bidimensional

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

Esta ecuación se puede expresar en forma de diferencias finitas en términos de los índices  $(i, j)$  de los nodos de la malla y junto con las condiciones de frontera dadas, es decir, los valores de  $\Phi$  en los bordes de la cavidad y en los electrodos, emplear el método de sobre-relajaciones sucesivas SOR [16] para hallar los valores  $\Phi(i, j)$  en los demás nodos del interior de la cavidad.

La ecuación (3.1) presenta una singularidad en  $r=0$ . Dada la simetría axial

del campo electrostático, se tiene que  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$  y usando la regla de

L'Hopital se tiene que  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}$ . Entonces la ecuación (3.1) para

$(r=0, z)$  queda como

$$2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.2)$$

En el esquema de diferencias finitas centradas la ecuación (3.1) tiene la forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{(\Delta r)^2} + \\ & + \frac{1}{i\Delta r} \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i-1, j)}{2\Delta r} + \\ & + \frac{\Phi(i, j+1) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-1)}{(\Delta z)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

para  $i \neq 0$  y para la ecuación (3.2),  $i = 0$ ,

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\Phi(1, j) - 2\Phi(0, j) + \Phi(-1, j)}{(\Delta r)^2} + \\ & + \frac{\Phi(0, j+1) - 2\Phi(0, j) + \Phi(0, j-1)}{(\Delta z)^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

teniendo en cuenta que el potencial es axialmente simétrico:

$$\Phi(r, z) = \Phi(-r, z).$$

De (3.3) se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi(i, j) = & \frac{1/2}{\left(1 + (\Delta z/\Delta r)^2\right)} \left\{ (\Delta z/\Delta r)^2 \left[ \frac{2i+1}{2i} \Phi(i+1, j) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2i-1}{2i} \Phi(i-1, j) \right] + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1) \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

para  $i \neq 0$  y de (3.4) para  $i = 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi(0, j) = & \frac{1/2}{\left(1 + 2(\Delta z/\Delta r)^2\right)} \left\{ \Phi(0, j+1) \right. \\ & \left. + \Phi(0, j-1) + 4(\Delta z/\Delta r)^2 \Phi(1, j) \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Estas expresiones se usan en el método SOR y se implementa en un algoritmo computacional para obtener los valores  $\Phi(i, j)$ .

Utilizando la ecuación

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) = E_r(r, z)\hat{\mathbf{r}} + E_z(r, z)\hat{\mathbf{z}}$$

y expresando estas derivadas como diferencias centradas se tiene que las componentes son

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \rightarrow E_r(i, j) = -\frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i-1, j)}{2\Delta r} \\ E_z &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \rightarrow E_z(i, j) = -\frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j-1)}{2\Delta z} \end{aligned} \right\} \quad (3.7).$$

Sin embargo, éstas no pueden ser usadas en puntos frontera donde no se define, ya sea el caso, el valor siguiente o el anterior  $\Phi(i \pm 1, j \pm 1)$ . En este caso se usan acordemente expresiones de diferencias finitas adelantadas

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \rightarrow E_r(i, j) = -\frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i, j)}{\Delta r} \\ E_z &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \rightarrow E_z(i, j) = -\frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j)}{\Delta z} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

o atrasadas

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \rightarrow E_r(i, j) = -\frac{\Phi(i, j) - \Phi(i-1, j)}{\Delta r} \\ E_z &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \rightarrow E_z(i, j) = -\frac{\Phi(i, j) - \Phi(i, j-1)}{\Delta z} \end{aligned} \right\} \quad (3.9).$$

### 3.2 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Para analizar la dinámica de la partícula en condiciones tipo SARA, es necesario resolver la ecuación relativista de movimiento de Newton-Lorentz

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (3.10)$$

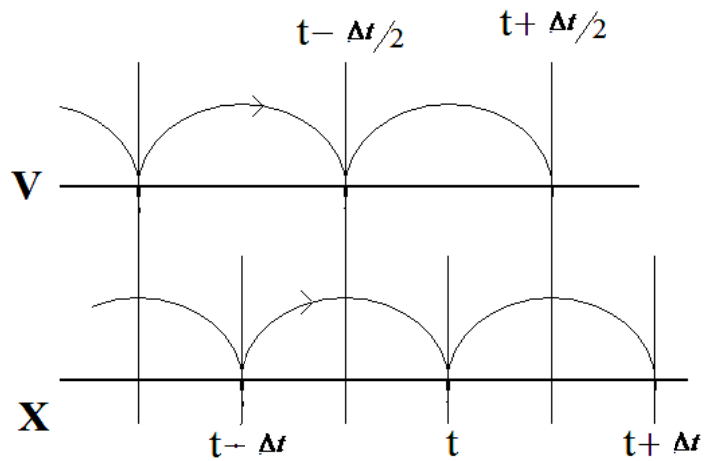
Donde ( $q = -e$ ,  $e \approx 1.602 \cdot 10^{-19} C$ ,  $m_o = m_e \approx 9.10938215 \cdot 10^{-31} kg \approx 0.511 MeV$ )

y  $\mathbf{p} = \gamma m_o \mathbf{V}$ .

En el esquema de Leap-frog [14-15] con paso de tiempo  $\Delta t$  tal que  $t_n = t_o + n\Delta t$ , las velocidades  $\mathbf{V}$  y las posiciones  $\mathbf{X}$  están desfasadas entre sí por medio paso de tiempo (figura 8):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{V}_{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{V}_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \frac{1}{m_o \gamma_n} \mathbf{F}_n \\ \frac{\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}}{\Delta t} &= \mathbf{V}_{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

**Figura 8:** Esquema de Leapfrog para el cálculo de velocidades y posiciones separados entre sí por medio paso de tiempo.



Fuente: El autor.

Por otra parte, al formular expresiones matemáticas para algoritmos computacionales, es conveniente adimensionar las variables con algún parámetro adecuado. En la tabla 1 se listan las variables adimensionales (respecto al sistema SI).

Con tales variables la ecuación de Newton-Lorentz adimensional puede escribirse como:

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = \mathbf{g} + \frac{1}{\gamma} \mathbf{U} \times \mathbf{b}, \quad (3.12)$$

la cual en forma discretizada queda como

$$\frac{\mathbf{U}(\tau_n + \frac{1}{2}\Delta\tau) - \mathbf{U}(\tau_n - \frac{1}{2}\Delta\tau)}{\Delta\tau} = \mathbf{g}(\tau_n) + \frac{1}{\gamma(\tau_n)} \frac{\mathbf{U}(\tau_n + \frac{1}{2}\Delta\tau) + \mathbf{U}(\tau_n - \frac{1}{2}\Delta\tau)}{2} \times \mathbf{b}(\tau_n),$$

que se denota con superíndices para el n-ésimo paso de tiempo

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1/2} - \mathbf{U}^{n-1/2}}{\Delta\tau} = \mathbf{g}^n + \frac{1}{\gamma^n} \frac{\mathbf{U}^{n+1/2} + \mathbf{U}^{n-1/2}}{2} \times \mathbf{b}^n,$$

mientras que para la posición se tiene

$$\frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{\Delta\tau} = \frac{\mathbf{U}^{n+1/2}}{\gamma^{n+1/2}}.$$

Entonces, la evolución de la velocidad y la posición se obtienen a partir de las siguientes expresiones:

$$\mathbf{U}^{n+1/2} = \mathbf{U}^{n-1/2} + \left( \mathbf{g}^n + \frac{1}{\gamma^n} \frac{\mathbf{U}^{n+1/2} + \mathbf{U}^{n-1/2}}{2} \times \mathbf{b}^n \right) \Delta\tau \quad (3.13)$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \frac{\mathbf{U}^{n+1/2}}{\gamma^{n+1/2}} \Delta\tau \quad (3.14)$$

y la energía cinética del electrón está dada por:

$$W^{n+1/2} = \left( \gamma^{n+1/2} - 1 \right) m_o c^2 \quad (3.15)$$

donde:

$$\gamma^{n+1/2} = \left( 1 + \left| \mathbf{U}^{n+1/2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

La ecuación (3.13) se expresa en el algoritmo de Boris [14-15], en el cual se separan los efectos de campo magnético de los de campo eléctrico.

Para esto se definen los vectores  $\mathbf{u}^+$  y  $\mathbf{u}^-$  mediante

$$\mathbf{u}^{n-1/2} = \mathbf{u}^- - \mathbf{g}^n \Delta\tau / 2,$$

$$\mathbf{u}^{n+1/2} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{g}^n \Delta\tau / 2$$

y cumplen que

$$\frac{\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-}{\Delta\tau} = \frac{\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-}{2\gamma^n} \times \mathbf{b}^n$$

lo cual se corresponde con una rotación de  $\mathbf{U}$  con un ángulo de rotación (Figura 9)

$$\theta = 2a \tan^{-1} \left( |\mathbf{b}^n| \Delta\tau / 2\gamma^n \right).$$

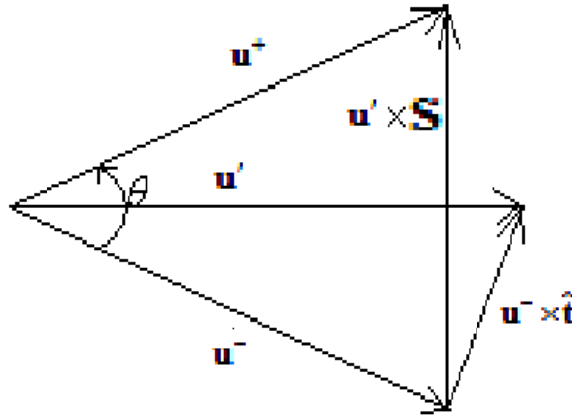
Para implementar esta rotación en el algoritmo, se definen los vectores

$$\hat{\mathbf{t}} = -\hat{\mathbf{b}} \tan \theta / 2 = -\hat{\mathbf{b}} |\mathbf{b}^n| \Delta\tau / 2\gamma^n = \mathbf{b}^n \Delta\tau / 2\gamma^n$$

$$\mathbf{S} = 2\hat{\mathbf{t}} / (1 + t^2)$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}^- + \mathbf{u}^- \times \hat{\mathbf{t}}.$$

**Figura 9:** vectores para la rotación de la partícula.



Fuente: el autor.

**Tabla 1. Variables normalizadas.**

Momentum	$\mathbf{U} = \mathbf{p} / m_o c$
Velocidad	$\mathbf{v} = \mathbf{V} / c = \frac{1}{\gamma} \mathbf{U}$
Posición	$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{X}}{R} \quad R = c / \Omega$
Campo eléctrico	$\mathbf{g} = \mathbf{E} / (-B_o c)$ $B_o =  m_o \omega / (-e) $ =Campo magnético de resonancia clásica.
Campo magnético	$\mathbf{b} = \mathbf{B} / (-B_o)$
Tiempo	$\tau = \Omega t$ $\Omega = \omega = \text{frecuencia de la onda TE}_{11p}$ . (resonancia exacta)

Fuente: el autor.

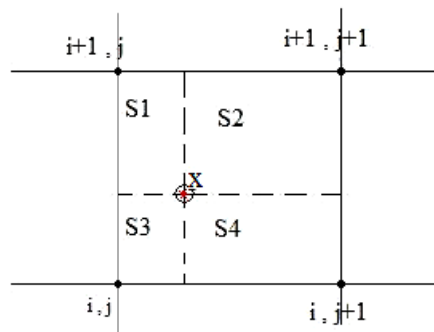
### 3.3 INTERPOLACIÓN DE LOS CAMPOS

Considerando que, en general, la posición del electrón no coincide con los puntos de la malla, es necesario interpolar los valores calculados de  $\mathbf{E}(i, j)$  y  $\mathbf{B}(i, j)$  en la posición  $\mathbf{x}^n$  del electrón (Figura 10). Para esto se emplea el método de interpolación bilineal con las siguientes expresiones

$$\left. \begin{aligned} E_r(\mathbf{x}^n) &= E_r(i,j) \cdot S_2 + E_r(i+1,j) \cdot S_4 + E_r(i,j+1) \cdot S_1 + E_r(i+1,j+1) \cdot S_3 \\ E_z(\mathbf{x}^n) &= E_z(i,j) \cdot S_2 + E_z(i+1,j) \cdot S_4 + E_z(i,j+1) \cdot S_1 + E_z(i+1,j+1) \cdot S_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

y similares para  $B_r(\mathbf{x}^n)$  y  $B_z(\mathbf{x}^n)$ .

**Figura 10.** Posición del electrón dentro de una celda de la malla y superficies  $S$  referentes a los cuatro nodos para la interpolación según las ecuaciones (3.16).



Fuente: El autor.

Mediante la formulación de las expresiones en diferencias finitas junto con las respectivas condiciones de frontera y/o iniciales se obtendrá la resolución numérica de las ecuaciones para calcular tanto los valores del campo electrostático como del movimiento de la partícula.

#### 4. RESULTADOS

Se realizaron los experimentos numéricos del esquema *SARA* considerando dos cavidades:

La cavidad 1 con una longitud  $d = 20\text{cm}$  y radio  $a = 4.5\text{ cm}$  en la cual se excita el modo TE<sub>112</sub> con frecuencia de 2,45 GHz y amplitud  $E_{hfo} = 6\text{ kV/cm}$ .

La cavidad 2 con longitud  $d = 200\text{ cm}$  y radio  $a = 133\text{ cm}$  en la que se excita el modo TE<sub>111</sub> con frecuencia de 0,1 GHz y amplitudes de  $E_{hfo} = 6\text{ kV/cm}$  y  $E_{hfo} = 10\text{ kV/cm}$  para los perfiles lineal y parabólico del campo magnetostático respectivamente.

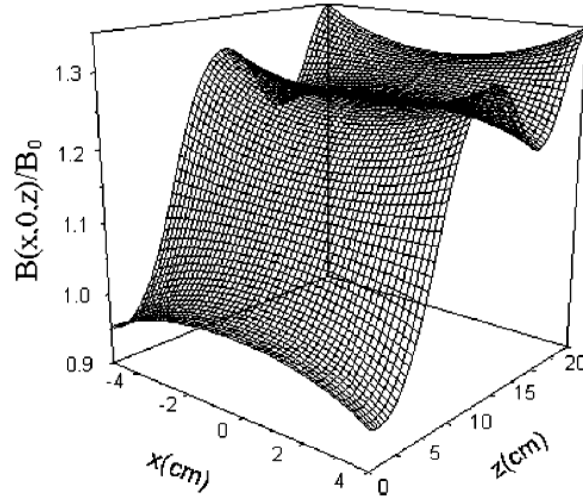
Para la primera cavidad, el perfil del campo magnético fue obtenido previamente en el grupo FITEK, mediante solución numérica de la ecuación de Biot-Savart, utilizando los parámetros que se indican en la tabla 2. ( $R_i$ =radio interno,  $R_e$ =radio externo,  $L_b$ =ancho,  $J$ =densidad de corriente,  $Z$ =posición en el eje). Dicho campo se ilustra en la gráfica 1.

**Tabla 2. Parámetros de las bobinas para la cavidad de 20cm.**

<b>Bobina</b>	<b><math>R_i(\text{cm})</math></b>	<b><math>R_e(\text{cm})</math></b>	<b><math>L_b(\text{cm})</math></b>	<b><math>J(\text{A/mm}^2)</math></b>	<b><math>Z(\text{cm})</math></b>
<b>1</b>	6.0	20.0	6.0	1.48	-5.75
<b>2</b>	6.0	20.0	7.5	1.23	9.25
<b>3</b>	6.0	20.0	10.0	1.29	22.75

Fuente: [10]

**Gráfica 1.** Campo magnetostático en el esquema SARA para la cavidad de 20cm.



Fuente: [10]

Para la segunda cavidad los valores del campo magnetostático se obtuvieron con las expresiones analíticas (2.2) y (2.3) en la aproximación de baja inhomogeneidad transversal para los perfiles lineal y parabólico. Para el perfil lineal se empleó una función  $b(z) = \alpha z$  donde  $\alpha = \gamma_o (R_m - 1) / d$  y  $R_m = 1.3$  es la razón de espejo. En el perfil parabólico las respectivas

expresiones son:  $b(z) = \alpha z^2$ ,  $\alpha = \gamma_o (R_m - 1) / d^2$  y  $R_m = 1.2$ .

Por otra parte, en las tablas 3 y 5 se describen los campos electrostáticos empleados en los experimentos numéricos. Se denominan tres regiones dentro de la cavidad: La primera de ellas está comprendida desde el punto de inyección del electron hasta el primer electrodo; la segunda, entre los dos electrodos y la tercera entre el segundo electrodo y la pared de la cavidad, es decir: Región 1:  $0 < Z < Z_1$ , Región 2:  $Z_1 < Z < Z_2$ , Región 3:  $Z_2 < Z < d$ .

Dependiendo de los potenciales de los electrodos, cada zona ejercerá un efecto diferente sobre los electrones; las cuales son denotadas por las letras F, A y O. La F significa que el campo tiende a frenar al electrón en determinada

zona, la A significa que lo acelera y la O que el campo en esa zona es relativamente débil. Por otra parte,  $V_i$ ,  $R_i$  y  $Z_i$  ( $i=1,2$ ) , representan el Voltaje, el radio y la posición axial de cada electrodo respectivamente. En las gráficas 2 a 10 se muestran algunas configuraciones de los potenciales electrostáticos en el plano X-Z calculados para la cavidad de 20cm.

Para la primera cavidad se emplearon energías de inyección de los electrones de 8, 10 y 12 keV, mientras que para la segunda fueron de 10, 20 y 30 keV.

En las tablas 4 y 6 se clasifican los efectos de los campos electrostáticos, según las energías de inyección. En comparación con el esquema SARA sin electrodos, MAS significa que en algún punto se obtuvo más energía, MEJOR es el mejor resultado en cuanto a ganancia de energía, MENOS significa que se obtuvo menos energía e IGUAL significa que el resultado no difiere mucho del caso sin electrodos.

Luego se muestran las gráficas de energía cinética, diferencia de fase  $\varphi_{EV}$  y velocidad longitudinal (normalizada respecto a la velocidad de la luz en el vacío) obtenidas para el electrón en los casos estudiados.

#### 4.1 CAVIDAD DE 20cm MODO TE112

Tabla 3. *Parámetros de los electrodos, cavidad de 20cm*

CONFIG	TIPO	V1 (kV)	V2(kV)	R1(cm)	R2(cm)	Z1(cm)	Z2(cm)
1	OFA	0	-1	3	2	5	15
2	OFA	0	-5	3	2	5	15
3	OFA	0	-10	3	2	5	15
4	OAF	0	10	3	2	5	15
5	FAO	-5	0	2	3	3	15
6	FAO	-10	0	2	3	3	15
7	AFO	10	0	2	3	3	15
8	FOA	-5	-5	2	2	3	6
9	AOF	5	5	2	2	3	6
10	FAA	-5	-1	2	2	3	6
11	FAA	-5	-1	2	2	6	9
12	FAA	-10	-1	2	2	3	6
13	FAA	-10	-5	2	2	3	6
14	AAF	1	5	2	2	6	9
15	AAF	1	10	2	2	6	12
16	AAF	5	10	2	2	6	9

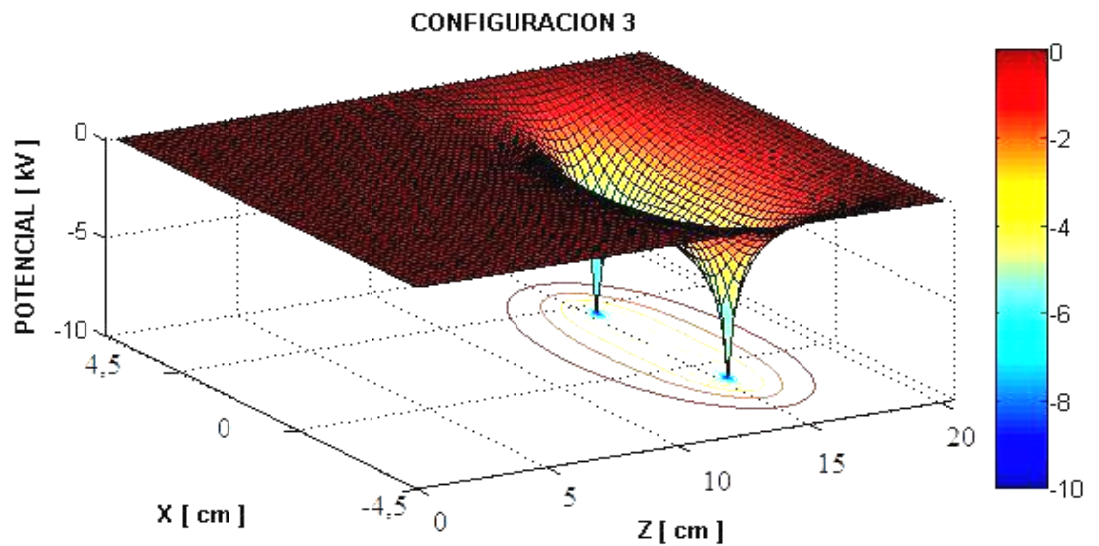
Fuente: El autor.

**Tabla 4.** Efecto para cada caso de energía.

CONFIG	TIPO	8 keV	10 keV	12 keV
1	OFA	IGUAL	IGUAL	IGUAL
2	OFA	IGUAL	MENOS	MÁS
3	OFA	IGUAL	MENOS	MEJOR
4	OAF	IGUAL	MÁS	MENOS
5	FAO	MÁS	MENOS	MÁS
6	FAO	MÁS	MENOS	MÁS
7	AFO	MÁS	IGUAL	MENOS
8	FOA	MÁS	MENOS	MÁS
9	AOF	MENOS	IGUAL	MENOS
10	FAA	MÁS	MENOS	MÁS
11	FAA	MÁS	MENOS	IGUAL
12	FAA	MÁS	MENOS	MÁS
13	FAA	MEJOR	MENOS	MÁS
14	AAF	MENOS	MÁS	MÁS
15	AAF	MÁS	MEJOR	MÁS
16	AAF	MÁS	MÁS	MÁS

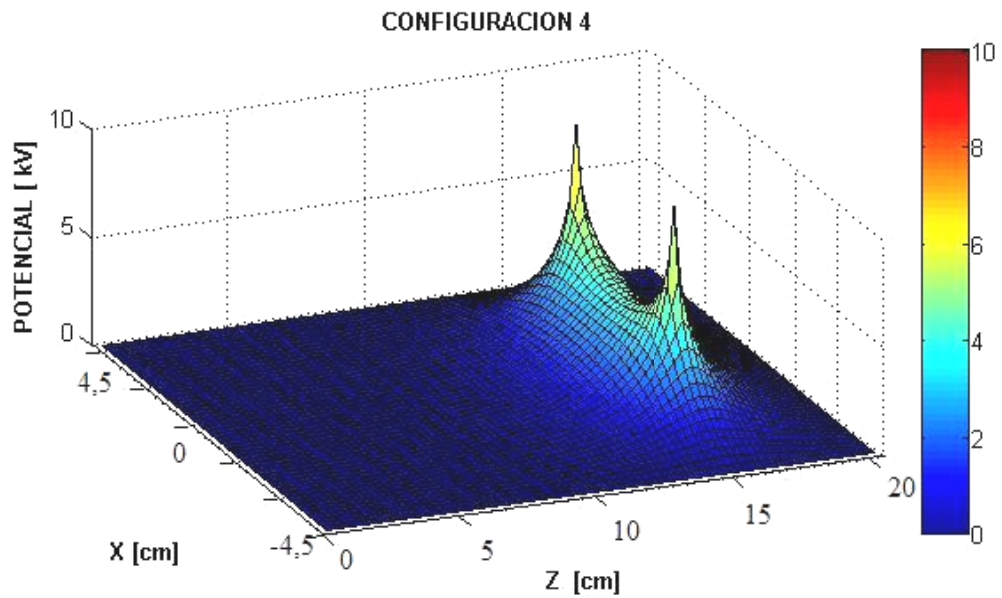
Fuente: El autor.

**Gráfica 2.** DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO OFA.



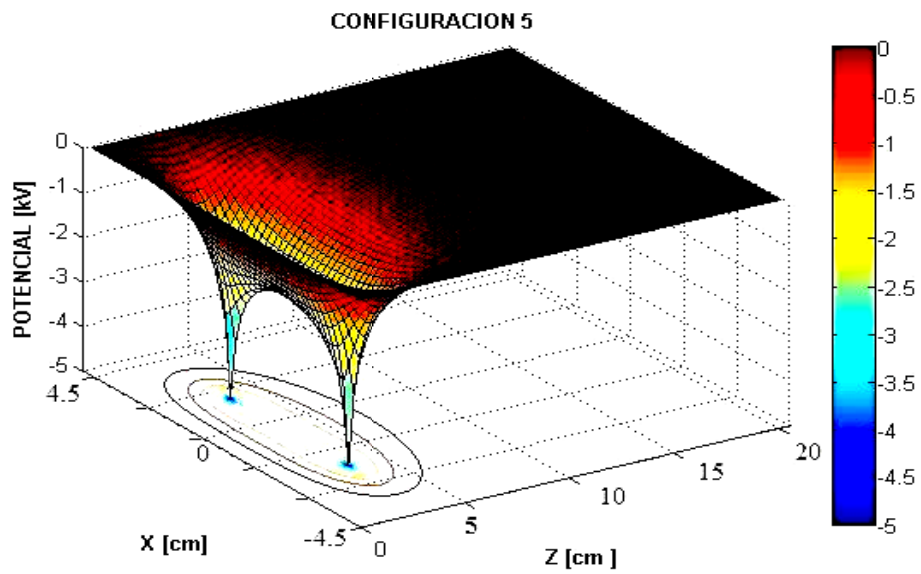
Fuente: El autor.

**Gráfica 3.** DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO OAF.



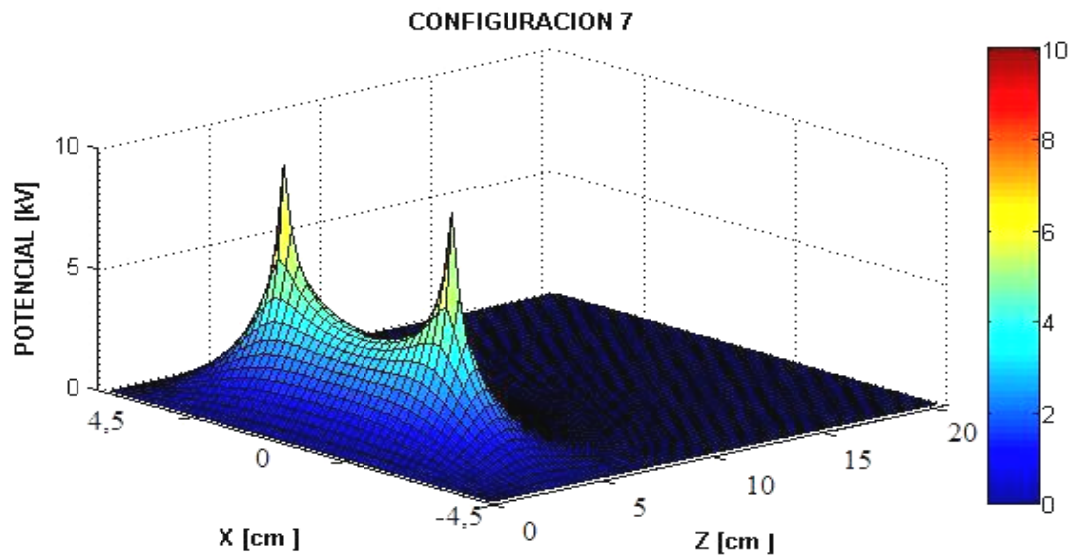
Fuente: El autor.

**Gráfica 4.** DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO FAO.



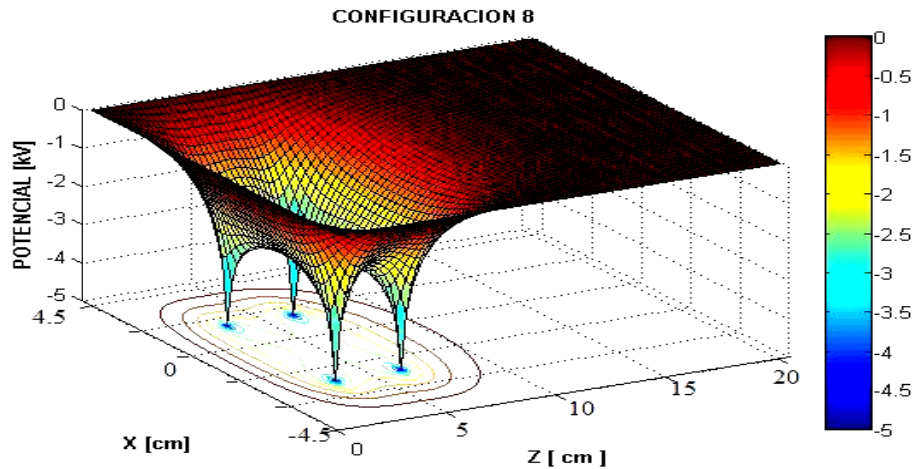
Fuente: El autor.

**Gráfica 5.** DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO AFO.



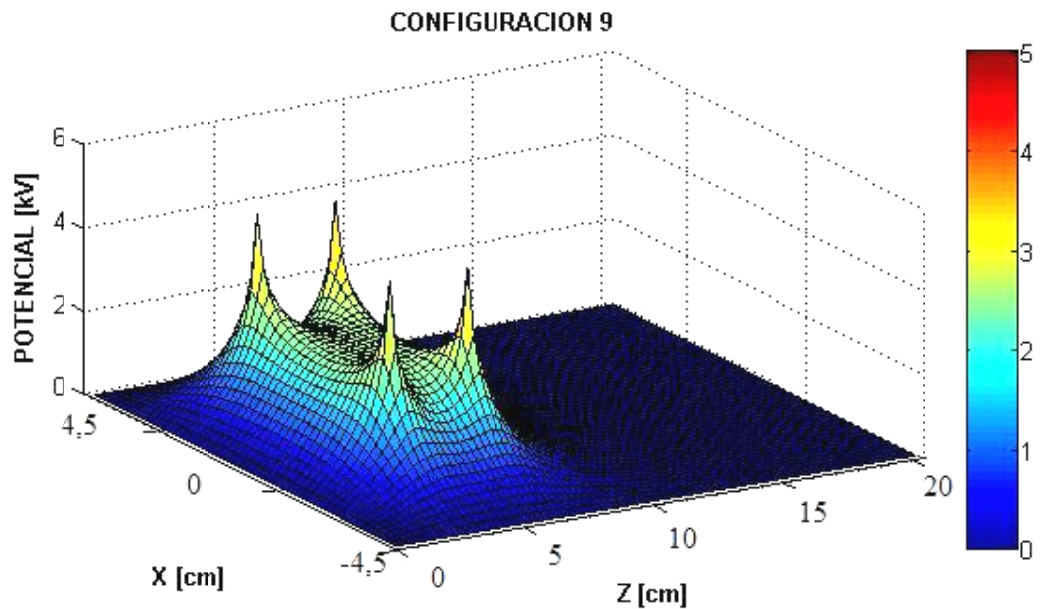
Fuente: El autor.

**Gráfica 6.** DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO FOA.



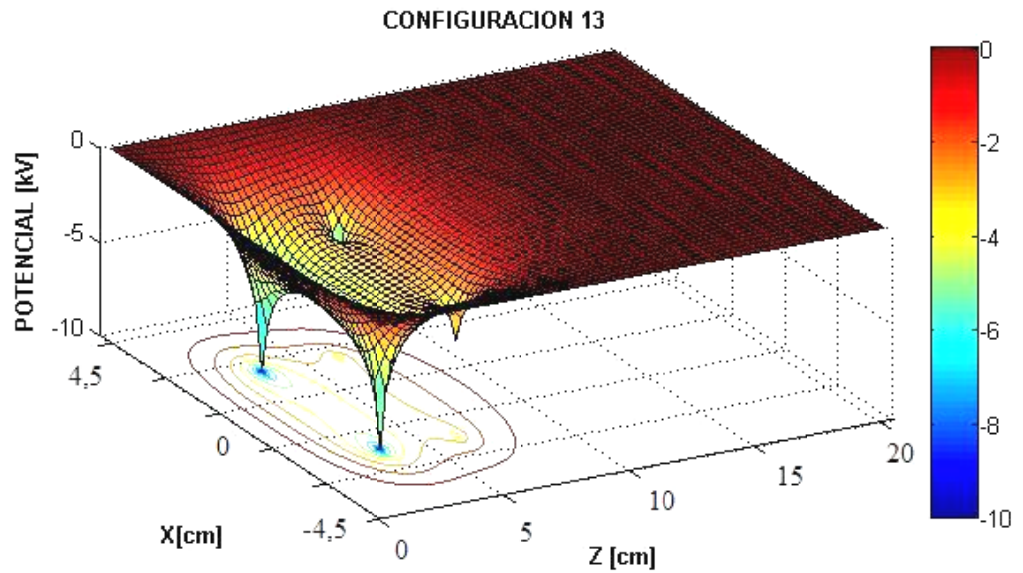
Fuente: El autor.

**Gráfica 7.** DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO AOF.



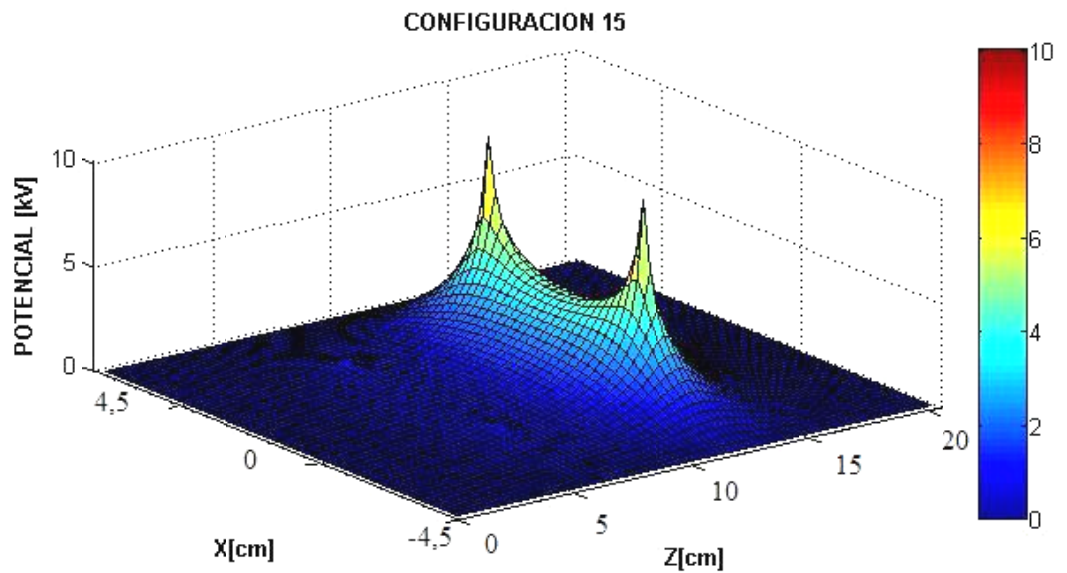
Fuente: El autor.

**Gráfica 8.** DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO FAA.



Fuente: El autor.

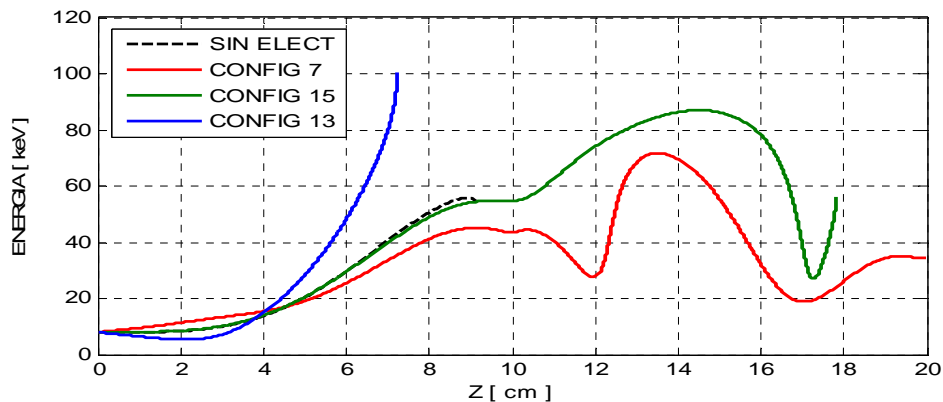
**Gráfica 9.** DISTRIBUCIÓN DE POTENCIAL EN EL PLANO X-Z CONFIGURACIÓN TIPO AAF.



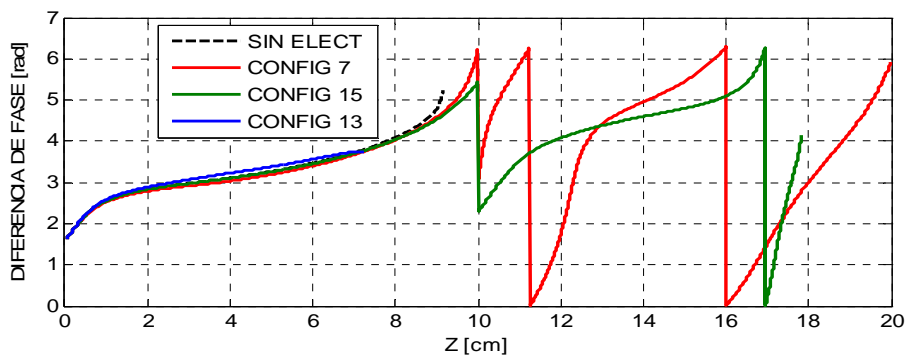
Fuente: El autor.

ENERGÍA DE INYECCIÓN 8 KEV.

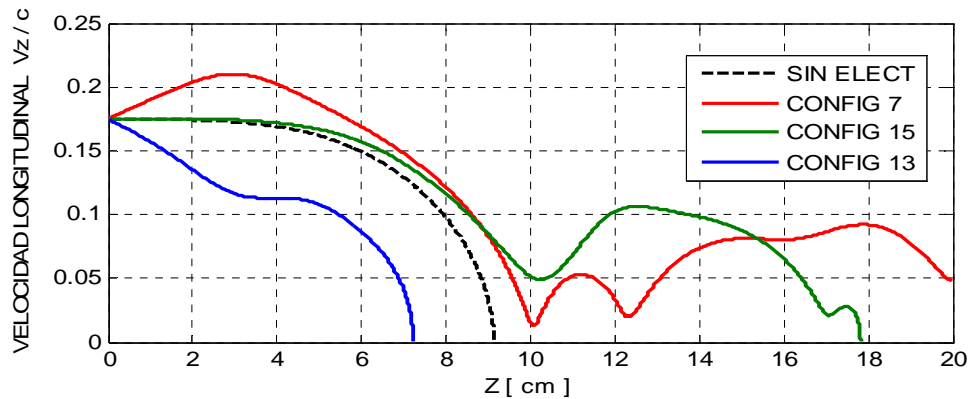
**Gráfica 10.** Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 8keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase  $\phi_{EV}$ . c) Velocidad longitudinal.



a)



b)



c)

Fuente: El autor.

Las gráficas 10 a), b) y c), muestran la evolución espacial de la energía cinética del electrón, la diferencia de fase  $\varphi_{EV}$  entre el campo eléctrico y la velocidad transversal del electrón; y la velocidad longitudinal, respectivamente. En ausencia de electrodos, se observa que la energía del electrón presenta un comportamiento creciente desde el comienzo, asociado al hecho de que la fase se encuentra en la banda de aceleración, mientras que la velocidad longitudinal es siempre decreciente. El electrón se detiene en  $z=9\text{cm}$ , debido a la acción de la fuerza diamagnética.

El salto de fase en  $z=10\text{cm}$  se debe a la presencia del nodo del campo TE<sub>112</sub>. Para la configuración 7 vemos que entre  $z=0$  y  $z=9\text{cm}$  la energía de la partícula es creciente, especialmente luego de  $z=4\text{cm}$ . Esto se debe a que la fase se encuentra en la banda de aceleración y cerca de  $z=4\text{cm}$  se encuentra cerca de la resonancia exacta. La velocidad longitudinal aumenta hasta  $z=3\text{cm}$  y desde ahí comienza a decaer hasta  $z=10\text{cm}$  debido a que los electrodos ubicados en  $z=3\text{cm}$  y  $z=15\text{cm}$  están sometidos a una diferencia de potencial tal que aceleran hasta el primer electrodo y frenan después de éste.

En  $z=10\text{cm}$  se encuentra el nodo del campo E<sub>hf</sub> y su amplitud es relativamente baja cerca de ese punto. Un poco antes la fase se sale de la banda de aceleración y comienza a manifestarse un ligero descenso en la energía hasta  $z=12\text{cm}$  mientras que la velocidad longitudinal presenta un incremento debido a que luego de  $z=10\text{cm}$  y hasta  $z=15\text{cm}$  la acción de la fuerza diamagnética favorece el avance longitudinal del electrón. Desde  $z=12\text{cm}$  hasta  $z=13\text{cm}$  la fase vuelve a entrar en la banda de aceleración lo cual corresponde a un aumento en la curva de energía entre esos puntos y luego desde  $z=13\text{cm}$  hasta  $z=16\text{cm}$  la fase se sale de la banda de aceleración (con el campo E<sub>hf</sub>) pero se mantiene en la de aceleración longitudinal con el campo B<sub>hf</sub> por lo que se observa un comportamiento creciente en la curva de velocidad longitudinal y una disminución en la energía.

Entre  $z=17\text{cm}$  y  $z=20\text{cm}$  el electrón presenta un ligero aumento tanto en su energía como en la velocidad longitudinal gracias a que la fase se encuentra en

la banda de aceleración de los campos  $E_{hf}$  y  $B_{hf}$ . Finalmente luego de  $z=18\text{cm}$  la velocidad longitudinal disminuye debido a la acción de la fuerza diamagnética hasta impactar con la cavidad.

Para la configuración 15 vemos que el comportamiento de la energía y de la fase es similar al caso sin electrodos hasta  $z=8\text{cm}$  mientras que la velocidad longitudinal es ligeramente mayor debido a que la configuración de electrodos ubicados en  $z=6$  y  $z=12\text{cm}$  es tal que el campo electrostático acelera antes de los  $12\text{cm}$  y luego frena. Esto le permite contrarrestar la fuerza diamagnética de frenado en las primeras etapas del movimiento. La fase se sale de la banda de aceleración del campo  $E_{hf}$  en  $z=9\text{cm}$  y alrededor de  $z=10\text{cm}$  la energía tiene el punto de inflexión debido a la presencia del nodo de este campo.

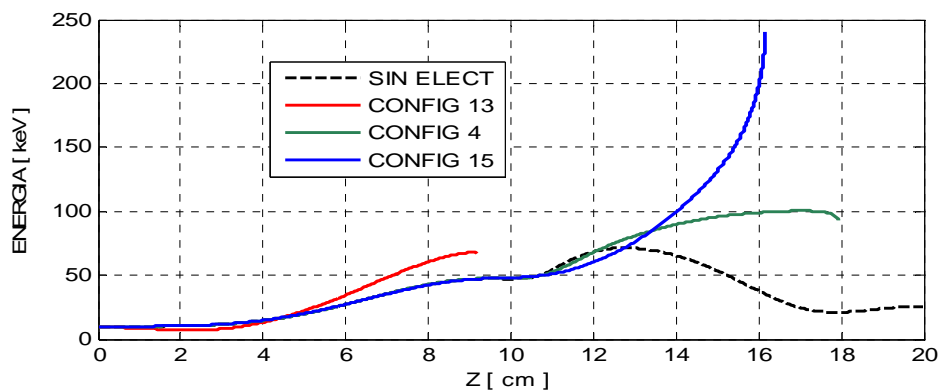
Luego de  $z=11\text{cm}$  hasta  $z=12\text{cm}$  tanto la energía como la velocidad longitudinal crecen gracias a que la fase se encuentra en las bandas de aceleración tanto del campo  $E_{hf}$  como del campo  $B_{hf}$ . La velocidad longitudinal disminuye debido a que el campo electrostático es de frenado luego de  $z=12\text{cm}$ . Después de  $z=15\text{cm}$  la fase se sale de la banda de aceleración del campo  $E_{hf}$  lo que corresponde con la descenso en la curva de energía.

Para la configuración 13 vemos que el campo frena el avance longitudinal del electrón en las primeras etapas de movimiento. La energía comienza decreciendo desde  $z=0$  hasta  $z=2.5\text{cm}$  donde luego la energía comienza a aumentar gracias al aumento de magnitud del campo  $E_{hf}$ . La fase se encuentra en la banda de aceleración del campo  $E_{hf}$  durante todo el movimiento, especialmente alrededor de  $z=4\text{cm}$  donde se halla casi en resonancia exacta; mientras que la curva de velocidad longitudinal presenta un comportamiento decreciente desde el punto de inyección hasta  $z=3\text{cm}$ , esto debido al frenado por parte del campo de los electrodos; de esta forma el electrón prolonga la interacción autoresonante. A partir de  $z=3\text{cm}$  y hasta el fin de su movimiento en  $z=7\text{cm}$  prevalece el efecto de la fuerza diamagnética debido al aumento significativo de la energía de rotación.

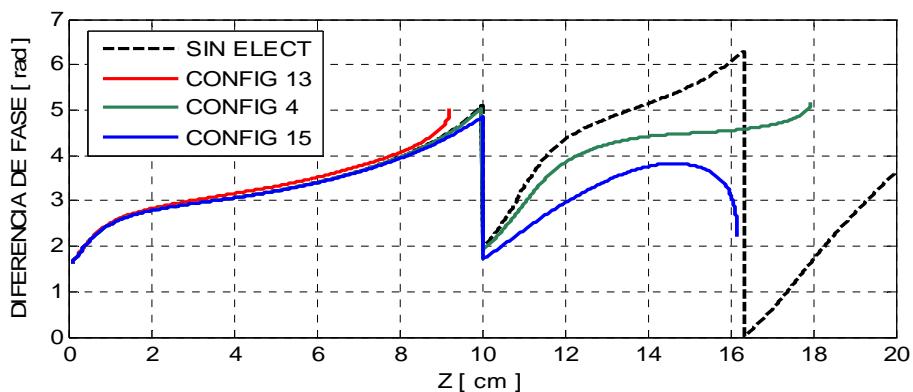
El electrón, aunque llega hasta los 100keV, se detiene incluso antes que en el caso sin electrodos. De esta forma, el frenado inicial del campo electrostático permite prolongar la interacción resonante donde el campo TE<sub>112</sub> tiene amplitud máxima.

## ENERGÍA DE INYECCIÓN 10 KEV.

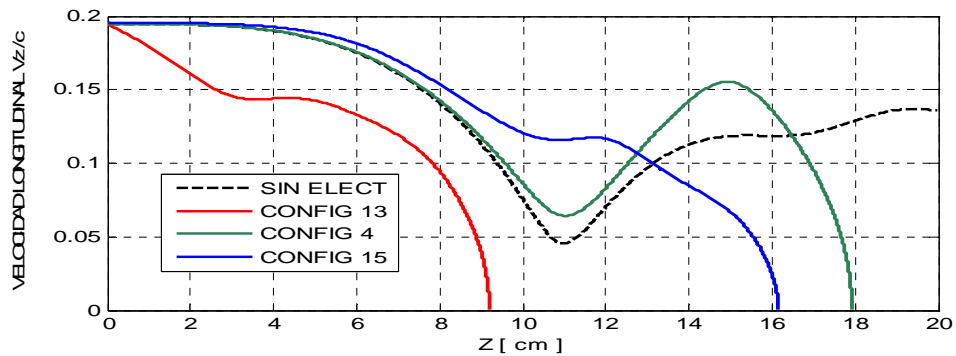
**Gráfica 11.** Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 10keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase  $\phi_{EV}$ . c) Velocidad longitudinal.



a)



b)



c)

Fuente: El autor.

Como se aprecia en las gráficas 11 a), b) y c), para esta energía de inyección en ausencia de electrodos, el electrón se encuentra en la banda de aceleración y tiene un comportamiento creciente en su energía cinética especialmente alrededor de  $z=6\text{cm}$  donde se encuentra casi en resonancia exacta. Debido al nodo del campo TE<sub>112</sub> en  $z=10\text{cm}$  el aumento de energía se da a una menor tasa cerca de ese punto. Posteriormente la amplitud del campo  $E_{hf}$  vuelve a aumentar y se observa el respectivo aumento en la energía cinética. Sin embargo, en  $z=12\text{cm}$  la energía comienza a disminuir ya que la fase se sale por encima de la banda de aceleración con el campo  $E_{hf}$  aunque se encuentra en la banda de aceleración longitudinal por el campo  $B_{hf}$  por lo que su velocidad en dirección  $z$  se incrementa. Entre  $z=11\text{cm}$  y  $z=15\text{cm}$  el aumento de velocidad en  $z$  se da a una tasa mayor porque en esa región la fuerza diamagnética favorece el avance del electrón en dirección  $z$ . Después de  $z=15\text{cm}$  se da con menor aceleración longitudinal ya que la fuerza diamagnética vuelve a ser de frenado con mayor intensidad debido al mayor gradiente del campo magnético en esa región.

Para la configuración 13 se nota que el comportamiento hasta  $z=9\text{cm}$  es similar al caso anterior aunque el frenado inicial es mayor debido al mayor voltaje aplicado a los electrodos, ubicados en  $z=3$  y  $z=6$ , que luego aceleran al electrón en esa región pero no lo suficiente ya que finalmente se detiene en  $z=9\text{cm}$  por acción de la fuerza diamagnética. La curva de energía llega a ser más alta ya que el mayor frenado longitudinal inicial le permite aprovechar mejor la interacción resonante en el inicio del movimiento y termina declinando ya que la fase se sale por encima de la banda de aceleración.

Para la configuración 4 se tiene que el comportamiento de la energía es muy similar al caso sin electrodos hasta  $z=12\text{cm}$ . Los electrodos ubicados en  $z=5$  y  $z=15$  aceleran al electrón antes de  $z=15\text{cm}$  compensando la acción de la fuerza diamagnética antes de  $z=10\text{cm}$  y reforzándola luego hasta  $z=15\text{cm}$ . Después de  $z=15\text{cm}$  el campo de los electrodos y la fuerza diamagnética son ambas de frenado lo que se refleja en la disminución de la velocidad longitudinal y

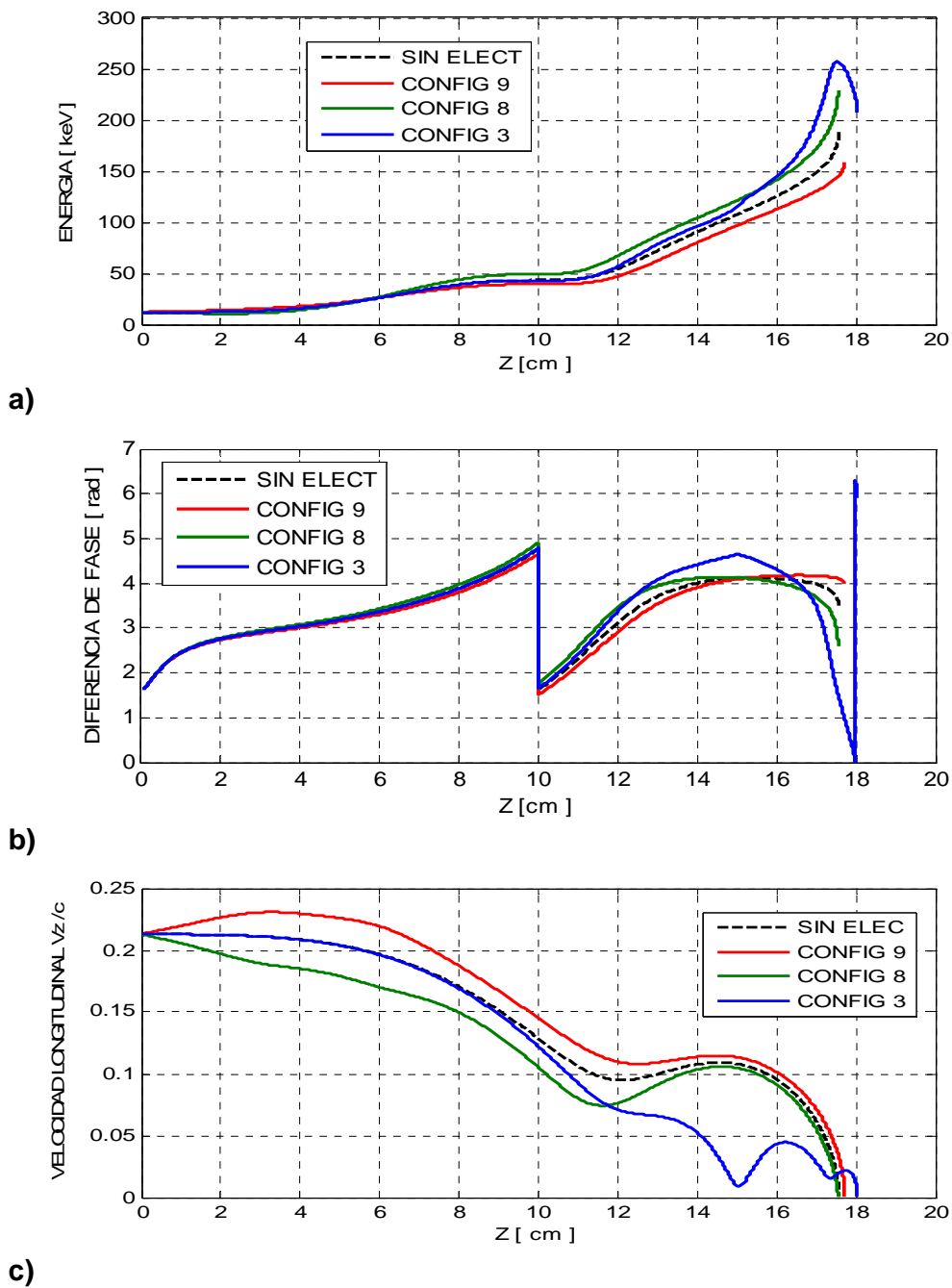
deteniéndose en  $z=18\text{cm}$ . La curva de energía alcanza mayor nivel gracias a que la fase se encuentra, especialmente luego de  $z=12\text{cm}$ , en la banda de aceleración tanto del campo  $E_{hf}$  como del campo  $B_{hf}$  saliéndose por encima en  $z=17\text{cm}$ .

En cuanto a la configuración 15 se encuentra que los electrodos ubicados en  $z=6$  y  $z=12$  cm, los cuales están sometidos a una diferencia de potencial tal que aceleran al electrón hasta  $z=12\text{cm}$ , permiten contrarrestar el efecto de frenado de la fuerza diamagnética, aun así la velocidad longitudinal es decreciente. Después de  $z=12\text{cm}$  el campo electrostático es de frenado y esto sumado al hecho de que la fase se encuentra en la banda de aceleración le permite al electrón prolongar el aprovechamiento de las condiciones de autorresonancia. Además el aumento considerable de la energía luego de  $z=13\text{cm}$  se corresponde con la amplitud creciente del campo  $E_{hf}$ . El electrón finalmente se detiene en  $z=16\text{cm}$  debido al frenado del campo de los electrodos y a la acción de la fuerza diamagnética. De esta forma el campo electrostático presenta una configuración conveniente para el aprovechamiento de las condiciones de resonancia, acelerando longitudinalmente al electrón al comienzo permitiéndole superar la fuerza diamagnética de frenado, y luego frenándolo contrarrestando el empuje del campo  $B_{hf}$  y de la fuerza diamagnética para prolongar la interacción resonante con el campo creciente de microondas y mayor intensidad del campo magnetostático.

Entonces para los campos del esquema SARA en la cavidad de 20 cm, excitada con el modo TE<sub>112</sub>, en la cual son inyectados los electrones con la energía de 10keV, la configuración de electrodos favorable para aprovechamiento de las condiciones de resonancia es tal que el campo electrostático acelere en las primeras etapas del movimiento y luego frene. Así la aceleración inicial permite al electrón adentrarse en la región de campo magnetostático más intenso y campo de microondas creciente y una vez allí el frenado permite prolongar la interacción resonante.

## ENERGÍA DE INYECCIÓN 12 KEV.

**Gráfica 12.** Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 12keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase  $\phi_{EV}$ . c) Velocidad longitudinal.



Fuente: El autor.

En las gráficas 12 a), b), c) se observa que en el caso sin electrodos, esta energía de inyección es suficiente para que el electrón logre superar la fuerza diamagnética de frenado en las primeras etapas del movimiento y pase del punto del nodo en  $z=10\text{cm}$  a la región de aumento de intensidad de campo de microondas y de campo magnetostático más intenso.

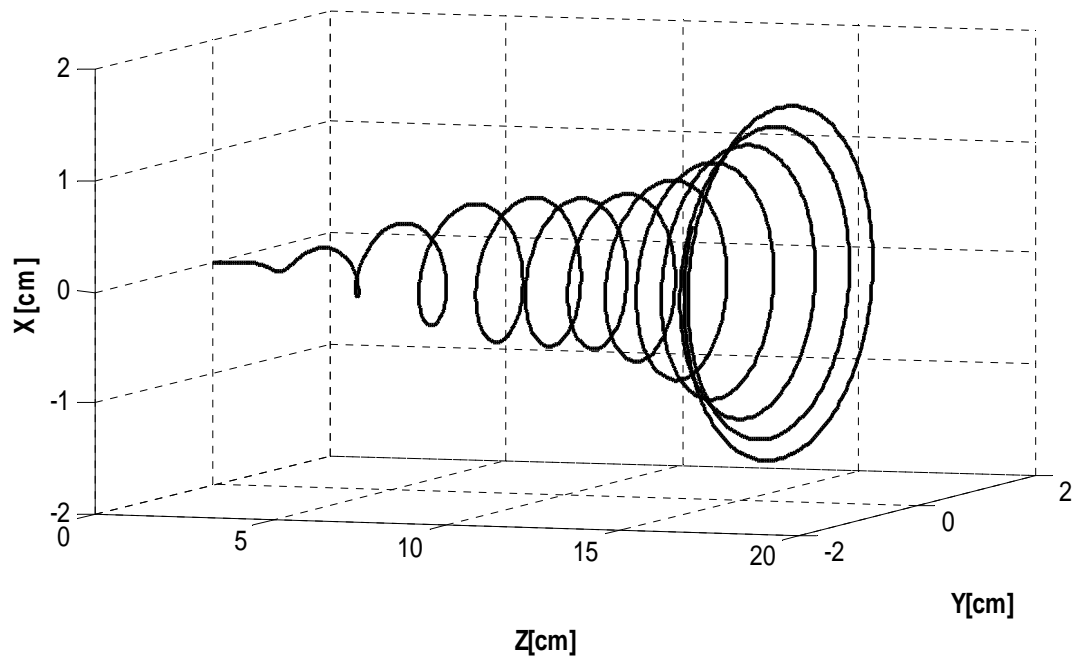
Como se muestra en las figuras en general el comportamiento de las curvas de energía y de fase es similar presentándose esencialmente diferencias al inicio entre  $z=0$  y  $z=5\text{cm}$  causadas por la influencia del campo electrostático. Luego las curvas de energía son crecientes y presentan una inflexión alrededor de  $z=10\text{cm}$ . En todos los casos se presenta un aumento en la tasa de crecimiento de la energía un poco antes de  $z=12\text{cm}$ .

En la configuración 9 el campo acelera primero y luego frena al electrón. Se observa que aunque la energía es creciente se alcanza menos que sin los electrodos. Para las configuraciones 8 y 3 los campos son tal que el electrón es frenado al comienzo y acelerado después, lo que se muestra más favorable para la ganancia de energía alcanzándose hasta  $250\text{keV}$ .

De esta forma, ya que la energía de inyección es suficiente para superar la fuerza diamagnética inicial, se frena un poco para que se prolongue la interacción resonante al comienzo del movimiento y luego se acelera para contrarrestar la fuerza diamagnética de frenado. Como se observa en las graficas de fase, el electrón se encuentra en la banda de aceleración. Comparando las curvas de energía y velocidad longitudinal se concluye que la energía es predominantemente debida al movimiento transversal de giro del electrón lo cual implica que la fuerza diamagnética también se incrementa hasta tal punto que finalmente logra detener el avance longitudinal del electrón cerca de  $z=17.5\text{cm}$ .

Se encuentra una similitud entre las curvas del caso de 12keV sin electrodos y la de 10keV con la configuración 15. Esto se debe a que el campo electrostático correspondiente a dicha configuración impulsa longitudinalmente al electrón de tal manera que logra alcanzar la zona de mayor intensidad de campos  $E_{hf}$  y magnetostático y una vez allí el frenado permite prolongar el aprovechamiento de la interacción resonante en mejores condiciones; mientras que la energía de inyección de 12keV es suficiente para conseguir ese efecto sin necesidad de un impulso inicial. En ambos casos, la fuerza de frenado se incrementa por el aumento de energía rotacional del electrón el cual termina por detenerse. En la gráfica 13 se muestra como ejemplo la trayectoria del caso de 10keV con la configuración 15.

**Gráfica 13.** *Trayectoria del electrón en el esquema SARA.*



Fuente: el autor.

#### 4.2 CAVIDAD DE 200cm MODO TE111

**Tabla 5. Parámetros de los electrodos, cavidad 200cm.**

CONFIG	TIPO	V1(kV)	V2(kV)	R1(cm)	R2(cm)	Z1(cm)	Z2(cm)
1	AFO	20	0	20	100	10	100
2	FAO	-20	0	20	100	10	100
3	AOF	20	20	20	20	10	20
4	FOA	-20	-20	20	20	10	20
5	AAF	10	20	20	20	10	20
6	AAF	20	50	20	20	10	20
7	FAA	-20	-10	20	20	10	20
8	FAA	-50	-20	20	20	10	20

Fuente: el autor.

**Tabla 6. Efecto del campo para cada caso de energía de inyección y los perfiles lineal y parabólico del campo magnetostático.**

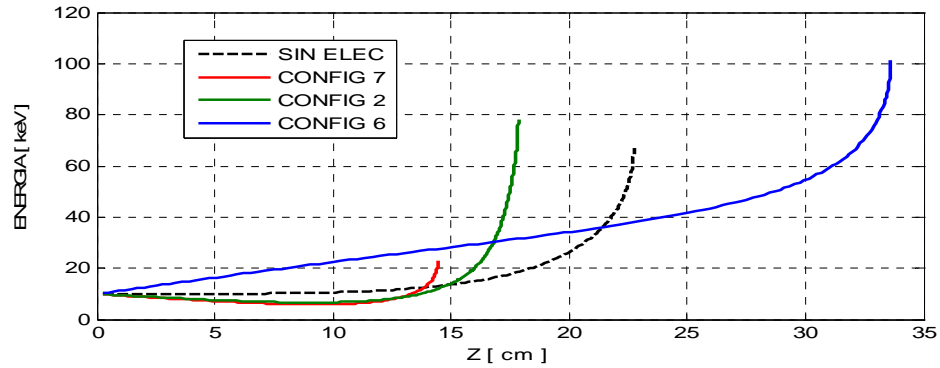
CONFIG	TIPO	10 keV	20 keV	30 keV	10 keV	20 keV	30 keV
		LINEAL	LINEAL	LINEAL	PARAB	PARAB	PARAB
1	AFO	MAS	MAS	MAS	MAS	MAS	MAS
2	FAO	MAS	MENOS	MENOS	MENOS	MENOS	MENOS
3	AOF	MAS	MAS	MAS	MAS	MAS	MAS
4	FOA	MENOS	MAS	MENOS	MENOS	MENOS	MENOS
5	AAF	MAS	MAS	MAS	MAS	MAS	MAS
6	AAF	MAS	MAS	MAS	MAS	MAS	MAS
7	FAA	MENOS	MENOS	MENOS	MENOS	MENOS	MENOS
8	FAA	MENOS	MAS	MENOS	MENOS	MENOS	MENOS

Fuente: el autor.

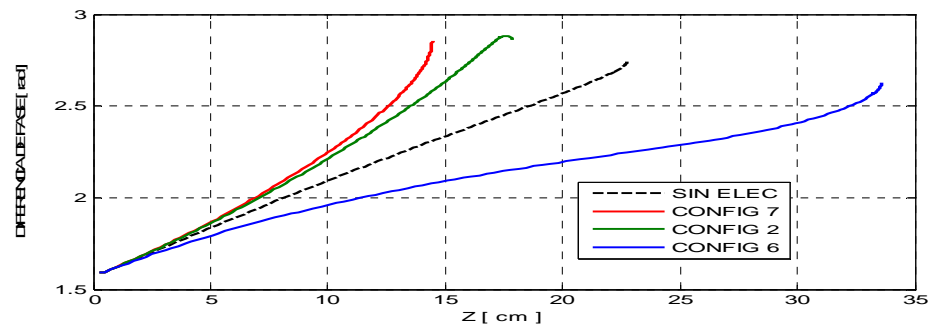
#### 4.2.1 Campo magnetostático con perfil lineal

ENERGÍA DE INYECCIÓN 10 KEV.

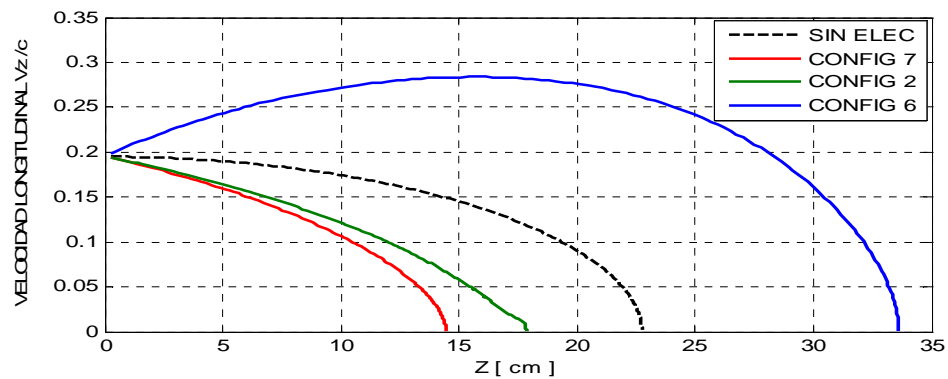
**Gráfica 14.** Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 10keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase  $\phi_{EV}$ . c) Velocidad longitudinal.



a)



b)

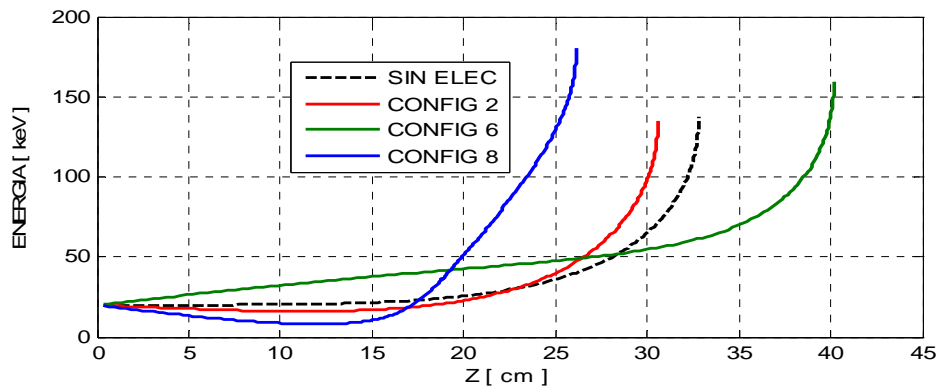


c)

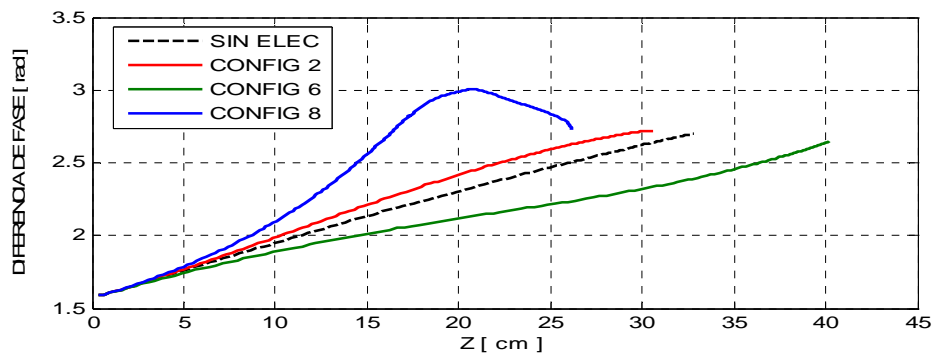
Fuente:

## ENERGÍA DE INYECCIÓN 20 KEV.

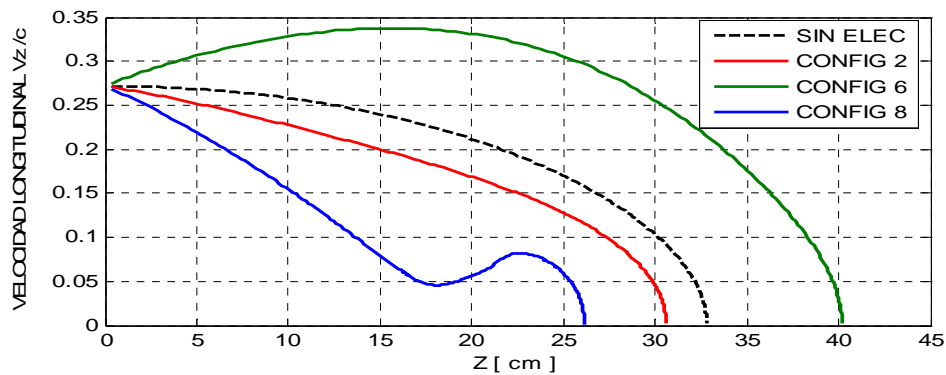
**Gráfica 15.** Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 20keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase  $\phi_{EV}$ . c) Velocidad longitudinal.



a)



b)

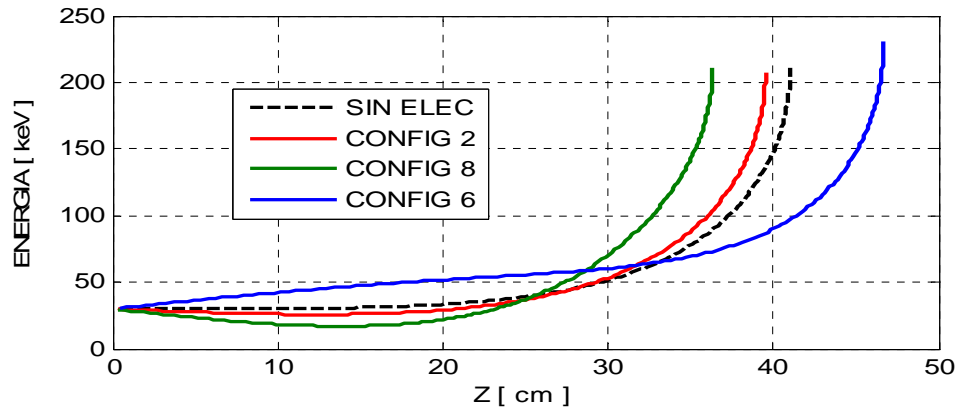


c)

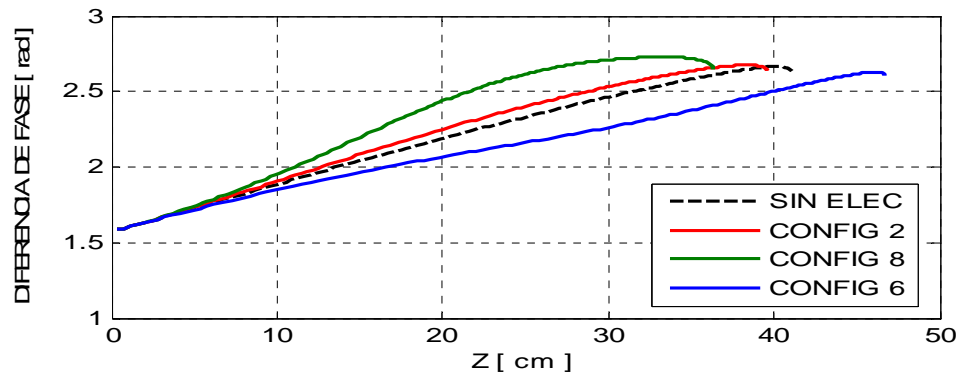
Fuente: El autor.

## ENERGÍA DE INYECCIÓN 30 KEV.

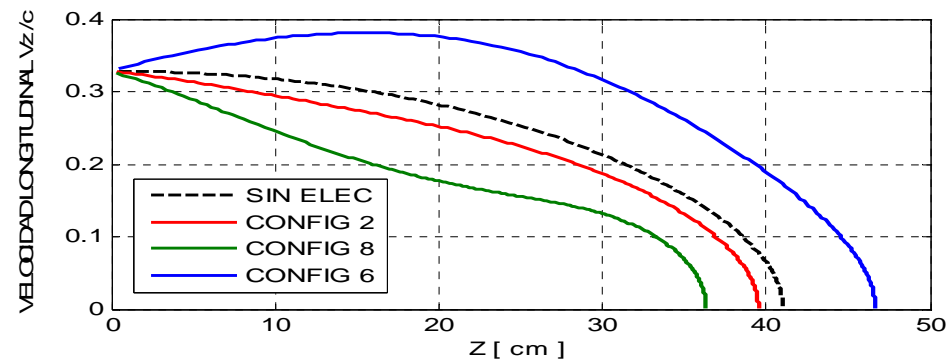
**Gráfica 16.** Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 30keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase  $\phi_{EV}$ . c) Velocidad longitudinal.



a)



b)



c)

Fuente: El autor.

En las gráficas 14, 15 y 16 se observa que las curvas de energía, diferencia de fase y velocidad presentan un comportamiento similar respectivamente y en ningún caso se logra alcanzar el extremo de la cavidad.

Para el caso sin electrodos se observa que la energía se mantiene constante para las tres energías de inyección hasta aproximadamente  $z=15\text{cm}$ . Mientras tanto las graficas de velocidad longitudinal muestran un comportamiento decreciente. Esto significa que la energía longitudinal de inyección está siendo convertida en energía de rotación por la acción de los campos magnéticos.

De otra parte, la diferencia de fase crece desde un comienzo a partir del valor  $\pi/2 \approx 1.57$  hasta alcanzar aproximadamente 2.7 rads por lo que la acción del campo  $E_{hf}$  se va haciendo más efectiva. Entonces la energía de rotación va creciendo a medida que la diferencia de fase se va acercando al valor de resonancia exacta de  $\pi \approx 3.14$ . Sin embargo este rango de la fase está en la banda de frenado longitudinal por parte del campo  $B_{hf}$ , lo cual explica por qué la energía aumenta mientras que la velocidad longitudinal disminuye.

Luego de  $z=15\text{cm}$  se presenta un punto de inflexión donde se nota un incremento en la tasa de aumento de energía hasta el final del movimiento, mientras que la velocidad longitudinal disminuye a una tasa mayor, por lo tanto la energía es debida casi totalmente a la rotación ciclotrónica, lo que implica también que la fuerza diamagnética es también mayor y termina frenado el avance del electrón.

Para los casos en que se aplicaron los campos de electrodos, al comienzo la energía no se mantiene constante aunque sí lo es su variación, es decir, dependiendo de la configuración de los electrodos la energía crece o disminuye de manera monótona hasta cierto punto en que la curva presenta una inflexión y se nota un incremento significativo en la tasa de aumento de energía.

Las graficas de fase tienen un comportamiento similar al caso en ausencia de electrodos: crecen a partir de 1.57 rads manteniéndose por debajo del valor de resonancia exacta de 3.14 rads.

La configuración 2 frena hasta  $z=10\text{cm}$  y luego de ese punto acelera. Como se observa en las gráficas, esta tuvo un efecto poco significativo si se compara con el caso sin electrodos, ya que la energía alcanzada no difiere mucho respecto a este caso y su influencia más notoria es el hecho de que se produce antes el frenado longitudinal.

La configuración 6 acelera desde  $z=0$  hasta  $z=20\text{cm}$  y frena después de ese punto. En las curvas de velocidad longitudinal correspondientes a esta configuración se aprecia que esta velocidad es creciente hasta cerca de  $z=20\text{cm}$  y luego comienza a decrecer. De esta forma se logra contrarrestar el frenado causado por los campos magnéticos permitiendo prolongar la interacción resonante y un mayor alcance longitudinal. Esta configuración se mostró favorable para todos los casos considerados permitiendo alcanzar energías de hasta  $230\text{keV}$ .

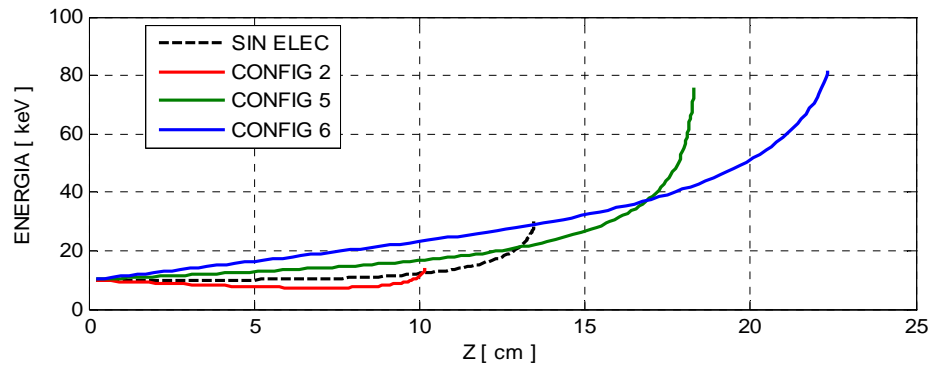
La configuración 8 aunque también frena hasta  $z=10\text{cm}$  luego acelera con menor intensidad que la configuración anterior. Esto representó una mejora notoria respecto al caso sin electrodos para la energía de inyección de  $20\text{keV}$  que se relaciona con el hecho de que la diferencia de fase se acerca más rápido al valor de resonancia exacta llegando hasta  $3\text{ rads}$  en  $z=20\text{cm}$  donde se encuentra el segundo electrodo que logra acelerar ligeramente en dirección longitudinal al electrón como se ve en la curva respectiva de la gráfica 15 c). La energía sigue creciendo ya que la fase se encuentra en la banda de aceleración y finalmente la fuerza diamagnética prevalece deteniendo al electrón.

En general, el efecto de los electrodos parece limitarse a anticipar o posponer, respecto al caso en ausencia de electrodos, el punto de inflexión de la curva a partir del cual se incrementa la tasa de crecimiento de energía.

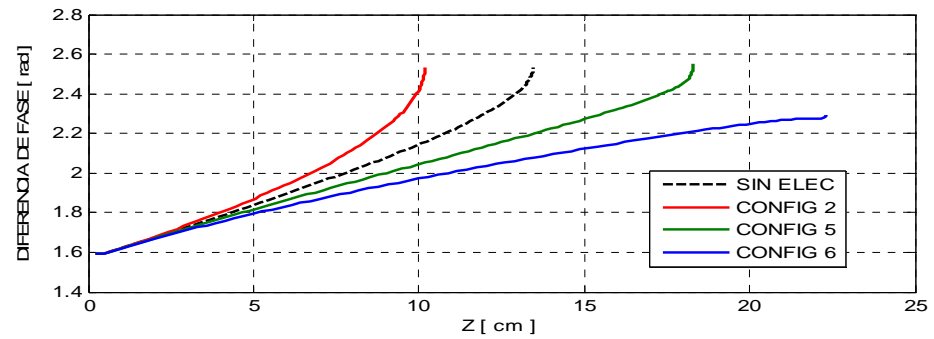
#### 4.2.2 Campo magnetostático con perfil parabólico

ENERGÍA DE INYECCIÓN 10 KEV.

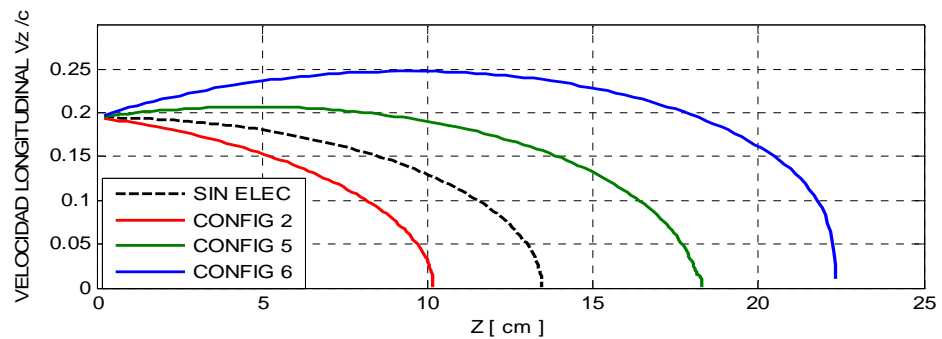
**Gráfica 17.** Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 10keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase  $\phi_{EV}$ . c) Velocidad longitudinal.



a)



b)

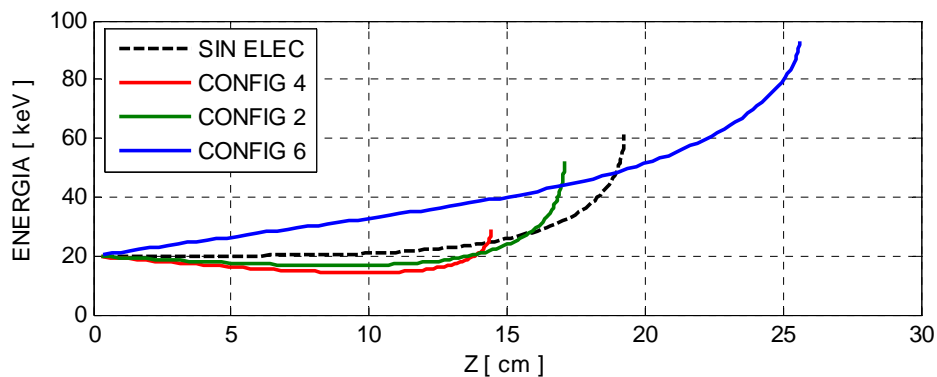


c)

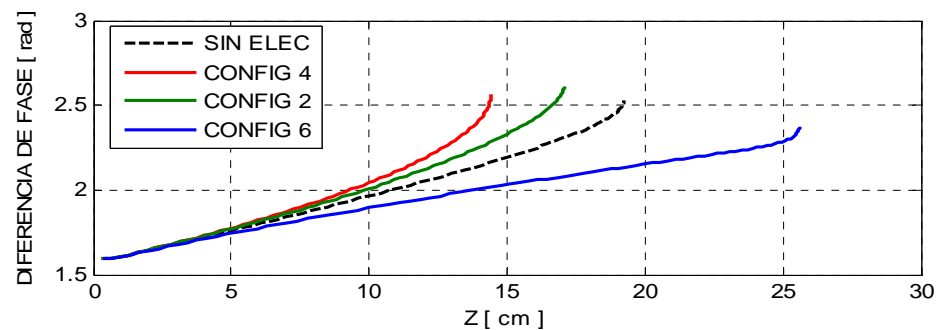
Fuente: El autor.

ENERGÍA DE INYECCIÓN 20 KEV.

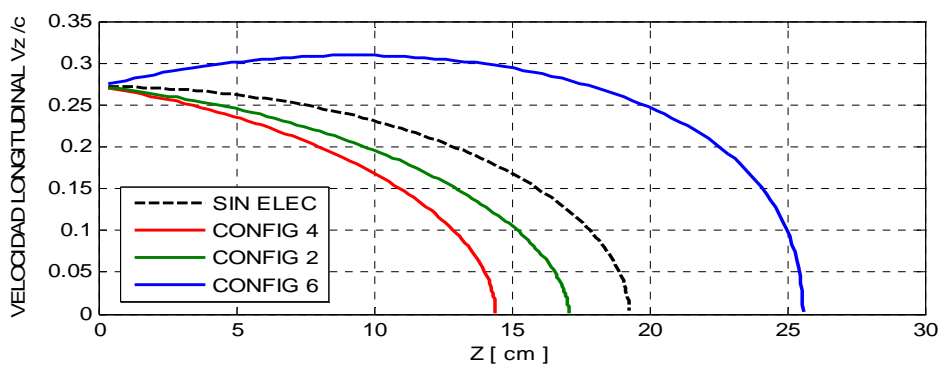
**Gráfica 18.** Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 20keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase  $\phi_{EV}$ . c) Velocidad longitudinal.



a)



b)

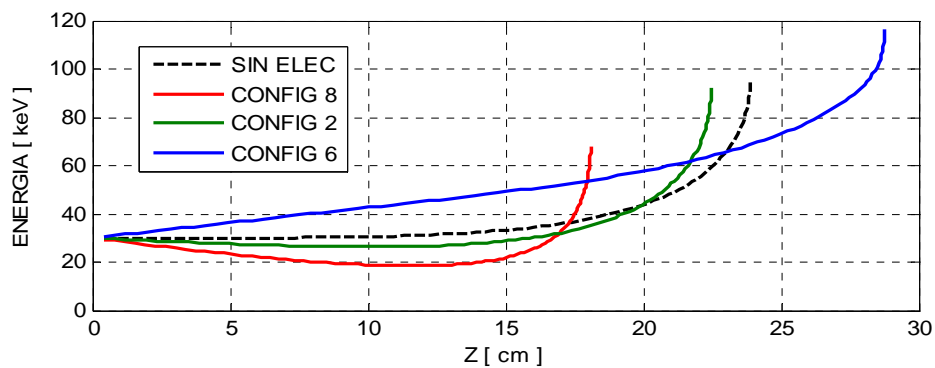


c)

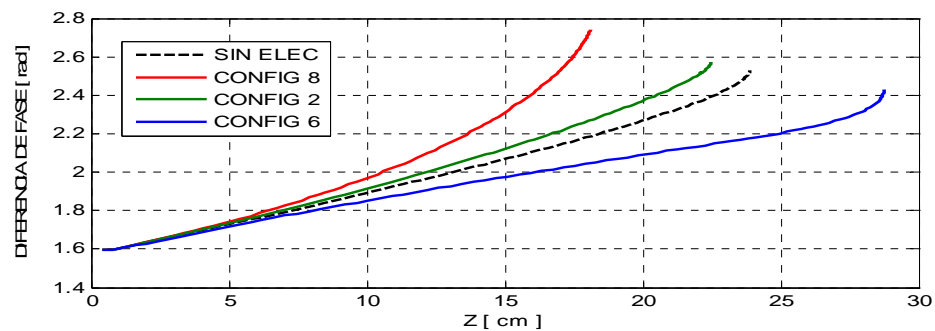
Fuente: El autor.

## ENERGÍA DE INYECCIÓN 30 KEV.

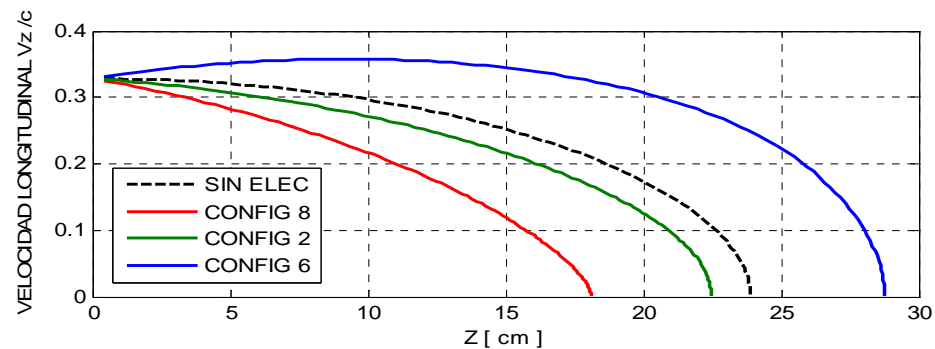
**Gráfica 19.** Gráficas para el caso de electrón con energía de inyección de 30keV: a) Energía cinética. b) Diferencia de fase  $\phi_{EV}$ . c) Velocidad longitudinal.



a)



b)



c)

Fuente: El autor.

De las gráficas 17, 18 y 19 se observa que el comportamiento de las curvas es similar al caso anterior. Sin embargo, el perfil parabólico del campo magnetostático implica una mayor inhomogeneidad por lo que la fuerza diamagnética es mayor y el electrón se detiene antes en comparación con el caso de perfil lineal. A pesar de que la amplitud del campo  $E_{hf}$  es mayor en este caso, eso implica que el campo  $B_{hf}$  también lo es y su efecto de frenado es también mayor.

## 5. CONCLUSIONES

\*En ausencia de electrodos la energía del electrón en las primeras etapas del movimiento, es debida mayormente a su movimiento longitudinal y por lo tanto la fuerza diamagnética de frenado no tiene un efecto significativo para energías de inyección suficientemente altas.

\*Se comprobó mediante experimentos numéricos que el funcionamiento del esquema SARA para acelerar partículas cargadas puede ser mejorado con la inclusión de un campo electrostático.

\*A pesar de que el campo magnético  $B_{hf}$  no realiza trabajo sobre la partícula, se presenta una influencia indirecta sobre la energía de la misma. Tal influencia se debe a la afectación de la fase como consecuencia de la variación que causa el campo  $B_{hf}$  en la dirección de la velocidad.

\*Cuando es favorable, el efecto de frenado en la primera zona permite mejorar la interacción autoresonante del electrón en las primeras etapas del movimiento, pero el consecuente aumento de energía cinética transversal implica que la fuerza diamagnética de frenado también se incrementa en esa zona, por lo cual el avance longitudinal del electrón se desacelera y se detiene tempranamente.

\*Cuando es favorable, el efecto de acelerar al electrón en la primera zona, le permite llegar a la región de mayor intensidad de campo magnetostático y de aumento de amplitud del campo  $E_{hf}$  y así aprovechar en mejores condiciones la interacción resonante con dicho campo. De igual forma el subsecuente aumento de la energía de rotación implica que la fuerza diamagnética se incrementa hasta frenar al electrón.

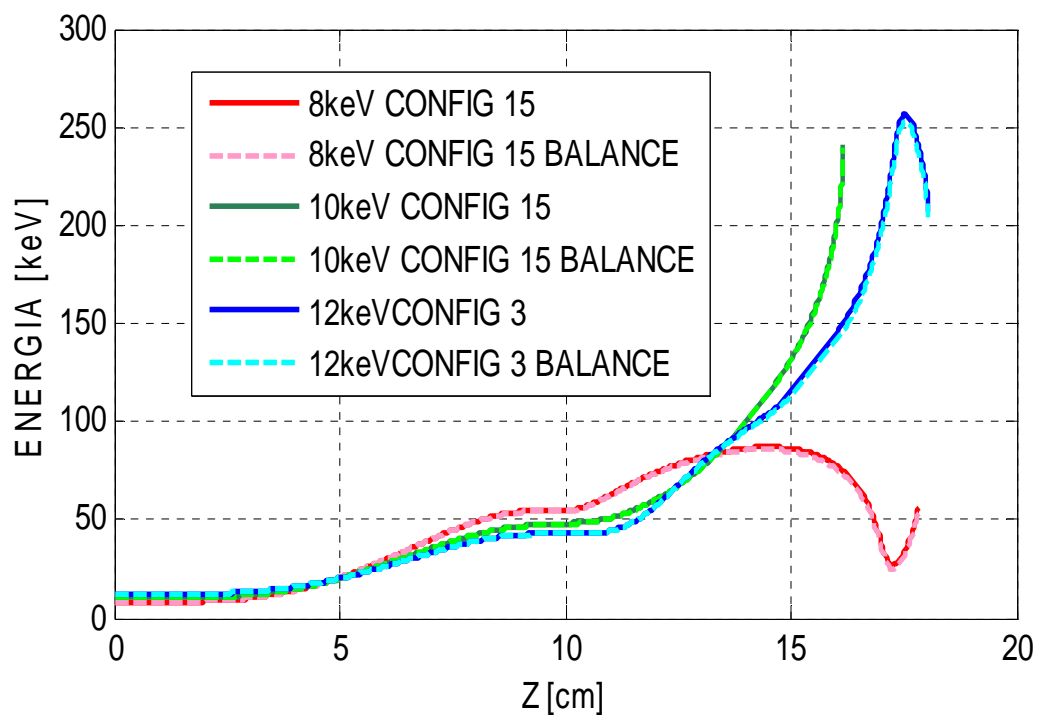
\*Debido a la no linealidad y el acoplamiento de las ecuaciones diferenciales que describen el esquema SARA [11], es complicado establecer una configuración de parámetros del sistema (cavidad, energía de inyección y campos) que sea favorable en general para la aceleración del electrón. Por esta razón, un campo electrostático puede ser favorable en la aceleración de los electrones para cierta configuración del mecanismo SARA, pero no serlo para otra.

## APÉNDICE

### VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS.

Con el fin de verificar que los resultados obtenidos mediante la resolución numérica de la ecuación de movimiento tengan sentido físico, las curvas de energía obtenidas mediante el esquema de Leap-frog se comparan con las obtenidas mediante integración de la ecuación (1.4) de balance de energía. En la gráfica 20 se muestra la comparación para 3 casos; en trazo continuo las obtenidas mediante el esquema y en trazo punteado las obtenidas con la ecuación (1.4). Se observa que las curvas coinciden por lo que se concluye que los resultados son consistentes con la ley de conservación de energía.

**Gráfica 20.** Comparación de las curvas de energía.



Fuente: El autor.

## REFERENCIAS

- [1] V. Ya. Davydovskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz., 43, 886 (1962) [Sov Phys. JETP, 16, 629 (1963)].
- [2] H. R. Jory and A. W. Trivelpiece, J. Appl. Phys., 39, 3053 (1968).
- [3] C. Roberts and S. Buchsbaum, Phys. Rev., 155A, 381 (1964).
- [4] K.S. Golovanivsky, IEEE. Trans. Plasma Sci., PS-11, 28, 1983.
- [5] O. Gal, IEEE Trans. Plasma Science, PS-17, 622 (1989).
- [6] R. Shpitalnik, C. Cohen, F. Dothan and L. Friendland, J. Appl. Phys., 70 (3), 1101(1991).
- [7] L. Friendland, Phys. Plasmas, 1 (2), 421, (1994).
- [8] V. D. Dougar-Jabon, A. M. Umnov and D. Suescun Díaz, Rev. Sci. Instrum. 73, 629 (2002).
- [9] Alejandro Martínez, Anatoly M. Umnov and Valeri D. Dougar-Jabon, REVISTA COLOMBIANA DE FÍSICA, VOL. 38, No. 2. 2006.
- [10] V.D. Dougar-Jabon, E.A. Orozco, and A.M. Umnov, Phys. Rev. ST Accel. Beams, 11, 04130-2 (2008).
- [11] V.D. Dougar-Jabon and E.A. Orozco, Phys. Rev. ST Accel. Beams, 12, 04130-1 (2009).
- [12] P.C Clemmow and J.P. Dougherty, Electrodynamics of Particles and Plasmas,
- [13] Francis F. Chen, Introduction to Plasma Physics, Plenum Press New York, (1975)
- [14] R W Hockney and J W Eastwood, Computer Simulation Using Particles, IOP Publishing Ltd, 1988
- [15] C K Birdsall, A B Langdon, Plasma Physics via Computer Simulation IOP Publishing Ltd, 1991
- [16] Sadiku, Matthew N. O., Numerical Techniques in Electromagnetics. Second Edition, CRC Press LLC, 2000.