



**ANÁLISIS TEÓRICO – EXPERIMENTAL DE UN SISTEMA DE FRANJAS RADIALES:
APLICACIONES EN POSICIONAMIENTO GLOBAL DE UN OBJETO**

NIDIA ESTHER REINA GONZÁLEZ

**Universidad Industrial De Santander
Facultad De Ciencias
Escuela De Física
Bucaramanga**

2010

**ANÁLISIS TEÓRICO – EXPERIMENTAL DE UN SISTEMA DE FRANJAS RADIALES:
APLICACIONES EN POSICIONAMIENTO GLOBAL DE UN OBJETO.**

NIDIA ESTHER REINA GONZÁLEZ

**Proyecto de Grado presentado como requisito para
Optar al título de FÍSICA**

**Director:
Doctor Jaime Enrique Meneses Fonseca**

**Universidad Industrial De Santander
Facultad De Ciencias
Escuela De Física
Bucaramanga**

2010

A Miguel (In Memoriam) a quien amo con todo mi corazón, gracias por tu amor, 20 años de ausencia no han pasado en vano, porque nunca te olvidaré papito.

A Mary, por tu amor y apoyo incondicional, te quiero mamá.

A Cristina, quien ha sido mi apoyo en todo momento, por su paciencia y entrega, te amo hermanita.

... A Nubia, Luis, Oliva (in memoriam), José Luis, Anita: este logro es alcanzado gracias a sus respectivos conocimientos adquiridos en medicina, son personas que me tendieron una mano en momentos de enfermedad, fueron casi 18 años en que los malestares, dolores y demás molestias me abordaron, gracias,..., porque estoy curada,..., porque soy un testimonio de vida,..., los quiero mucho.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa su agradecimiento a:

- Doctor Jaime Enrique Meneses Fonseca, por su acompañamiento, devoción, paciencia, confianza, entrega en todo este tiempo de trabajo, unos renglones dedicados en este escrito no describen el conocimiento aportado por este gran profesional y director, gracias por el apoyo de hoy, y gracias por el apoyo en planes futuros.
- Doctor Jorge Humberto Martínez Téllez, por su paciencia, ayuda y apoyo incondicional en momentos difíciles.
- Mi gran amiga Nelcy Marín Correa, por su apoyo en mis momentos de enfermedad y recuperación, a quien le debo la vida, quien en esos momentos de oscuridad fue mi luz y esperanza; cuando sentí flaquear, fue esa mano amiga que me ayudó a levantarme para seguir adelante, gracias amiga,..., gracias hermana.
- Mi gran amigo Javier Prieto Mejía, a quien le debo el amor por la ciencia, quien durante todos estos años me ha enseñado que con paciencia y perseverancia se pueden alcanzar las metas y se cumplen sueños; es ese amigo que alimenta el alma con sus consejos,..., es de esos regalos que hay que mantener conservados para siempre.
- Mis compañeras del Laboratorio de Óptica y Tratamiento de Señales: Martha Isabel Jerez, Luz Dary Morantes, Laura Lara, quienes durante el pregrado me prestaron apoyo incondicional como personas, compañeras, colegas, gracias.
- Mis compañeros de entrada a la carrera, a los que lo lograron: Norma Guerrero, Zulma Valderrama, María del Rosario Pérez, Carlos Teófilo Corredor, Javier Mejía, Gerson Reina, Álvaro Instan, Jimmy Mantilla, de quienes tengo muy buenos recuerdos. Excelentes personas que sobresalieron

por su esfuerzo y dedicación, porque para cada uno de ellos en su momento este logro significó algo importante en sus vidas así como lo es para mí ahora.

- Mi prima Martha Liliana González y su esposo Jesús Pareja, de quienes recibí apoyo económico, moral, filosófico, religioso; de los que nunca tuve un no como respuesta en cuanto a suplir necesidades se trataba, gracias.
- Mis padrinos Alejandro Luna y Aura María Sandoval, quienes han sido mis padres, no hay palabras, los amo.
- Mis abuelos: Alejandro y Esther, Carlos Eduardo y Efigenia, por ser el mejor ejemplo de personas honestas y trabajadoras.
- Mi prima Lida Rocío González Villamizar, por todos estos años de trabajo y apoyo, gracias...
- Carlos Cabello, quien ocupa un lugar muy especial en mi corazón, gracias por todo el apoyo incondicional...
- Mi prima Elga Marlene Quiroga, por su tesón y apoyo, es esa mano amiga que se extiende cuando más se necesita.
- Mis hermanos, a quienes adoro con todo mi corazón: Miguel, Carlos, Álvaro, Cristina, Fabio (in memoriam), Edilia (in memoriam).
- Mis sobrinitos Aldair, Miguel, Paola, Silvia, Slendy, Alejandro, Juan Manuel, Andrea, Laurita, Thalía, Camila, Dieguito, quienes son el motor de mi familia, los amo.
- Mis cuñados Víctor Hugo, Elizabeth y Martha, por sus consejos prácticos.
- Todas las persona que de alguna manera, con sus oraciones y buenos deseos contribuyeron a este logro.

CONTENIDO

	PÁG
INTRODUCCIÓN.....	17
1. ANÁLISIS TEÓRICO DE UN SISTEMA DE FRANJAS EN COORDENADAS RECTANGULARES.....	20
1.1. SISTEMA DE FRANJAS SENOSIDALES EN COORDENADAS RECTANGULARES.....	21
1.2. OBTENCIÓN DE LA FASE DE UN SISTEMA DE FRANJAS.....	26
1.3. MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.....	26
1.4. FASE DISCONTINUA.....	29
1.4.1. Algoritmo de unwrapping ó corrección de fase.....	30
2. ANÁLISIS TEÓRICO DE UN SISTEMA DE FRANJAS RADIALES....	34
2.1. SISTEMA DE FRANJAS RADIALES.....	34
2.1.1. Definición matemática.....	34
2.1.2. Fase del sistema de franjas radiales.....	35
2.2. ANÁLISIS TEÓRICO DE LA FASE DE UN SISTEMA DE FRANJAS RADIALES.....	35
2.2.1. Conversión del sistema coordenado rectangular – polar.....	35
2.3. ALGORITMO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.....	38
2.4. CONVERSIÓN DEL SISTEMA COORDENADO POLAR – RECTANGULAR.....	42
3. ANALISIS EXPERIMENTAL.....	45
3.1 MONTAJE EXPERIMENTAL.....	45
3.1.1. Sistema de observación.....	47
3.1.2. Sistema de control, adquisición y procesamiento de imágenes.....	48

3.1.3. Calibración del sistema de adquisición.....	49
3.2. COMPROBACIÓN DEL ALGORITMO POR MEDIO DE UNA IMAGEN EXPERIMENTAL.....	49
3.3. DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	51
3.4. CÁLCULO DEL CENTRO DEL SISTEMA RADIAL DE FRANJAS.....	52
3.4.1. Definición del centro de un objeto.....	53
3.4.2. Componentes de clasificación de frecuencias.....	54
3.4.3. Cálculo de la orientación de la fase del plano.....	55
3.5. ALGORITMO.....	57
3.5.1. Primera etapa: algoritmo de inicialización.....	57
3.5.2. Etapas subsiguientes.....	58
4. ANÁLISIS DE ROTACIONES Y POSICIONES: APLICACIÓN INICIAL DE CÁLCULO DE ROTACIONES.....	60
4.1. REJILLAS RADIALES EXPERIMENTALES PARA DESPLAZAMIENTOS Y VARIACIONES ANGULARES.....	60
4.2. ANÁLISIS DE ROTACIONES Y POSICIONES.....	61
4.2.1. Cálculo del centro de la rejilla radial.....	62
4.2.2. Cálculo de la fase discontinua.....	63
4.2.3. Cálculo de la máscara.....	65
4.2.4. Definición de líneas centrales de franjas NEGRAS.....	67
4.3. DATOS EXPERIMENTALES.....	68
4.3.1. Calibración del sistema de adquisición: centros, pendientes e interceptos.....	68
4.3.2. Datos de traslaciones.....	69
4.3.2.1. Rejilla radial de paso angular $\pi/33$	69
4.3.2.2. Rejilla radial de paso angular $\pi/10$	71
4.3.3. DATOS DE ROTACIONES.....	74
4.3.3.1. Rejilla radial de paso angular $\pi/33$	74
4.3.3.2. Rejilla radial de paso angular $\pi/10$	77
4.4. ANÁLISIS DE DATOS.....	80

4.4.1. Traslaciones: rejilla radial de paso angular $\pi/33$	81
4.4.2. Rejilla radial de paso angular $\pi/10$	81
4.4.3. Rotaciones: rejilla radial de paso angular $\pi/33$	82
4.4.4. Rejilla radial de paso angular $\pi/10$	83
4.5. DISCUSIÓN DE RESULTADOS.....	84
CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	85
BIBLIOGRAFÍA	86

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Sistema coordinado para un sistema de proyección de franjas	22
Figura 2. (a) Franjas senosoidales, (b) Perfil de intensidad representativo, (c) Distribución de fase	23
Figura 3. (a) Sistema de franjas distorsionado por la forma de un objeto, (b) Fase del perfil mostrado en 3(a).	24
Figura 4. Pasos para la obtención de un plano.	28
Figura 5. Fase discontinua.	30
Figura 6. (a) Corte horizontal de la fase discontinua, (b) Fase continua, (c) Fase continua, (d) Valores enteros adicionados a la fase continua	31
Figura 7. (a) y (b) Transformación de coordenadas rectangular – polar (c) Distorsión que se introduce si el centro no es calculado correctamente	37
Figura 8. (a) Rejilla radial en coordenadas (x, y), (b) Transformación de coordenadas (r, θ), (c) Elección del filtro, (d) Filtro usado, (e) Transformada de Fourier inversa, (f) Fase continua de la rejilla rectangular.	38
Figura 9. Transformación de la fase de una rejilla rectangular a una radial	43
Figura 10. Resultado de transformación de coordenadas y las respectivas fases para rejilla rectangular y rejilla radial.	44

Figura 11.	(a) Montaje experimental, (b) Detalles de platinas de rotación y traslación, (c) Detalle de la cámara USB.	46
Figura 12.	(a) Medida en el eje x, (b) Medida en el eje y.	49
Figura 13.	Imagen experimental de la rejilla radial completa.	50
Figura 14.	Cálculo de la fase de una rejilla radial.	51
Figura 15.	Cálculo del centro de una imagen experimental de la rejilla radial.	59
Figura 16.	Rejillas radiales de diferente paso angular: (a) Paso de $\pi/33$, (b) Paso angular de $\pi/10$.	61
Figura 17.	(a) Sistema de franjas rectangulares en coordenadas polares. (b) Fase discontinua de 17a. (c) Localización de elementos no nulos para el sistema de franjas. (d) Proceso de corrección de fase. (e) Fase continua obtenida.	64
Figura 18.	Posición inicial de la rejilla radial de paso angular $\pi/33$.	70
Figura 19.	Posición inicial de la rejilla radial de paso angular $\pi/10$.	72
Figura 20.	Posición inicial de la rejilla radial de paso angular $\pi/33$.	75
Figura 21.	Posición inicial de la rejilla radial de paso angular $\pi/10$.	78

LISTA DE TABLAS

	Pág.
TABLA 1. Datos generales de la cámara utilizada.....	48
TABLA 2. Datos de la posición de referencia de la rejilla radial de paso angular $\pi/33$	69
TABLA 3. Datos obtenidos en laboratorio de traslaciones de la rejilla radial de paso angular $\pi/33$	71
TABLA 4. Datos de la posición de referencia de la rejilla radial de paso angular $\pi/10$	72
TABLA 5. Datos obtenidos en laboratorio de traslaciones de la rejilla radial de paso angular $\pi/10$	74
TABLA 6. Datos de posiciones de referencia de la rejilla radial de paso angular $\pi/33$	75
TABLA 7. Datos obtenidos en laboratorio de traslaciones de la rejilla radial de paso angular $\pi/10$	77
TABLA 8. Datos de posiciones de referencia de la rejilla radial de paso angular $\pi/10$	77
TABLA 9. Datos obtenidos en laboratorio de traslaciones de la rejilla radial de paso angular $\pi/10$	79
TABLA 10. Datos teóricos y experimentales de desplazamientos con su respectivo porcentaje de error para la rejilla radial de paso angular $\pi/33$	81
TABLA 11. Datos teóricos y experimentales de desplazamientos con su	

respectivo porcentaje de error para la rejilla radial de paso angular $\pi/10$ 82

TABLA 12. Datos teóricos y experimentales de rotaciones con su respectivo porcentaje de error para la rejilla radial de paso angular $\pi/33$.
..... 83

TABLA 13. Datos teóricos y experimentales de rotaciones con su respectivo porcentaje de error para la rejilla radial de paso angular $\pi/10$.
..... 83

**TÍTULO: ANALISIS TEÓRICO – EXPERIMENTAL DE UN SISTEMA DE FRANJAS RADIALES:
APLICACIONES EN POSICIONAMIENTO GLOBAL DE UN OBJETO***

AUTOR: NIDIA ESTHER REINA GONZALEZ**

PALABRAS CLAVES: Posicionamiento Global, R3D, Metrología Óptica

Existen aplicaciones útiles en ingeniería y medicina donde determinar con precisión la posición espacial y angular de un objeto en el espacio es de vital importancia. Tradicionalmente se adhieren al objeto marcadores espaciales, como esferas reflectoras o fuentes luminosas puntuales, que son visualizadas por una combinación estéreo de cámaras digitales para determinar la posición 3D del objeto, en un sistema coordenado fijo. En otras estrategias se emplean señales infrarrojas o ultrasónicas que son reflejadas por la superficie del objeto, y recibidas por múltiples captore, ubicados estratégicamente en un volumen de trabajo, con el fin de realizar procedimientos clásicos de triangulación para calcular las coordenadas espaciales. Algunas técnicas comerciales imponen ciertas condiciones que no son aplicables en algunos ambientes industriales o médicos. En situaciones específicas es importante determinar las coordenadas espaciales y angulares de un cuerpo con precisión subpixel. En este trabajo se propone explorar de manera teórica y verificar en condiciones de laboratorio, el uso de la información de fase codificada en una mira radial de franjas, para determinar los desplazamientos y variaciones angulares que ha sufrido un cuerpo. Específicamente se propone determinar la distribución de fase existente en una mira radial de franjas y determinar con precisión subpixel la posición del centro y algunas direcciones radiales de la mira. La anterior información es comparada secuencialmente para determinar los desplazamientos y variaciones angulares que ha sufrido el objeto al ser desplazado.

*Trabajo de Grado

**Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Dr. Jaime Enrique Meneses Fonseca.

**TITLE: ANALYSIS THEORETICAL - EXPERIMENTAL RADIO SYSTEM STRIPS:
APPLICATIONS IN THE GLOBAL POSITIONING AN OBJECT ***

AUTHOR: NIDIA ESTHER REINA GONZALEZ**

KEYWORDS: Global position, R3D, Optical Metrology

There are useful applications in engineering and medicine which accurately determine the spatial and angular position of an object in space is of vital importance. Traditionally, markers are attached to the object space as reflective spheres or point light sources, which are displayed by a combination stereo cameras to determine the 3D position of the object in a fixed coordinate system. In other strategies used infrared or ultrasonic signals are reflected by the object's surface and received by multiple sensors, strategically located in a workload to perform standard procedures of triangulation to calculate the spatial coordinates. Some marketing techniques impose certain conditions which are not applicable in some industrial or medical environments. In specific situations it is important to determine the spatial and angular coordinates of a body with subpixel accuracy. This paper aims to explore theoretically and verified in laboratory conditions, using the phase information encoded in a radial slot looks to determine the displacement and angular variations has been a body. Specifically aims to identify the existing phase distribution in a radial slot look and accurately determine the position of the center subpixel and some radial directions of the sight. The above information is compared sequentially to determine the displacement and angular variations has been the object to be moved.

*Graduation project

**Faculty of Sciences. School of Physics. Director: Dr. Jaime Enrique Meneses Fonseca.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el término posicionamiento global se ha convertido en algo cotidiano y no es desconocido, ya que hasta en las cosas más simples de uso personal como el teléfono móvil, posee dicho contenido. Pero no solo en las cosas pequeñas de uso doméstico se tiene esta tecnología, si se va más allá, el término posicionamiento global también es usado en áreas como la medicina, cosmetología, ingeniería, aviación, entre otras, donde sus novedosas aplicaciones y dispositivos permiten manipular marcapasos del corazón a largas distancias, tomar ecografías, electrocardiogramas, y hasta salvan vidas. Cada dispositivo es limitado en su uso, además de la utilidad, estabilidad, precisión en la medida angular y tecnología que posea definen su precio: brazos articulados de alta precisión, sistemas adicionales de rotación, sistemas de observación adicionales ubicados estratégicamente, etc.

Con este fin, el Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales (GOTS) de la Universidad Industrial de Santander, en la línea de metrología ha realizado investigaciones conjuntas con el grupo de Óptica de L'Institute FEMTO – ST de Besançon - Francia con el fin de determinar un sistema de posicionamiento global que permita generar un dispositivo de Reconstrucción Tridimensional (R3D). Los resultados obtenidos muestran que una mira o rejilla en franjas paralelas en coordenadas cartesianas permite obtener la posición de un cuerpo en el espacio, a precisión subpixel. De esta manera, surge el presente trabajo de grado: Estudiar la posibilidad de utilizar una mira en coordenadas polares para la medida de posiciones angulares. Por lo tanto se requiere de un análisis preliminar matemático de una mira con franjas radiales.

El objetivo principal de este trabajo fue desarrollar un algoritmo matemático para el análisis de una rejilla radial. En el GOTS existen antecedentes de aplicación estratégica de posicionamiento global con una rejilla rectangular que generó

excelentes resultados a partir de la información en fase de un patrón 2D, para la determinación de la trayectoria de un cuerpo en el espacio. Básicamente se emplea un sistema de franjas cruzado, adherido a la superficie del cuerpo; empleando un sistema de visión estéreo es posible calcular las coordenadas 3D del cuerpo. El sistema ha sido evaluado experimentalmente y se ha podido determinar la posición de un cuerpo ubicado a 1.8 m de distancia con una precisión espacial de 38 micras. Es por esto que a partir de la información de sistemas de franjas sinusoidales en coordenadas rectangulares, en el capítulo 1 se pueden encontrar aplicaciones que permiten alterarle el contraste y el paso a un sistema de franjas permitiendo extraer parámetros matemáticos que den información de la fase del sistema.

En el segundo capítulo, a partir del análisis matemático de un sistema de franjas rectangulares, se define la estructura matemática de conversión que transforma el sistema de franjas radiales a uno de franjas rectangulares. Se mostrará que realizando la conversión, la fase de un sistema de franjas radiales en coordenadas polares es equivalente a la fase de un sistema de franjas rectangulares en coordenadas cartesianas. Realizada la conversión de sistemas coordenados se empleará el algoritmo de transformada de Fourier para extraer la fase de un sistema de franjas rectangulares y realizar el proceso de conversión inversa, obteniéndose la distribución de fase para el sistema de franjas radiales iniciales.

Como el sistema de franjas es simulado, las coordenadas del centro son conocidas, situación que no es válida en condiciones experimentales. Por esto en el capítulo 3 se procederá a evaluar el procedimiento propuesto pero en condiciones experimentales. Se implementará una técnica de detección del centro de una rejilla radial en un punto arbitrario del espacio.

En el capítulo 4 se procederá a evaluar el algoritmo en situaciones de rotación y traslación de la rejilla radial, mostrando con resultados experimentales la confiabilidad del mismo.

Finalmente se presentarán conclusiones y perspectivas del trabajo de grado realizado y presentado en este manuscrito.

1. ANÁLISIS TEÓRICO DE UN SISTEMA DE FRANJAS RECTANGULARES

Tradicionalmente un sistema de franjas en coordenadas rectangulares es usado como soporte experimental para la codificación de información en metrología óptica. Por ejemplo en un interferómetro de Michelson, un sistema de franjas en coordenadas rectangulares obtenidas en iluminación paralela e inclinando lentamente un espejo, puede ser utilizado para medir variables físicas que alteren el camino óptico de los rayos que interfieren. Más en particular un sistema de franjas en coordenadas rectangulares proyectado sobre la superficie de un objeto permite recuperar información topográfica del objeto en un dispositivo de Reconstrucción Tridimensional (R3D) por proyección de franjas, como se indica en la figura 1. Básicamente dentro del montaje se dispone de un sistema de proyección de franjas y un sistema de observación, donde PR es el plano de referencia y corresponde generalmente al plano objeto del sistema de observación. (X_P, Y_P, Z_P) es el sistema coordinado sobre el plano objeto del sistema de proyección. El plano de referencia es definido por $(X_0, Y_0, 0)$ y el plano imagen es definido por (X_c, Y_c) . El sistema de proyección, proyecta un patrón de franjas sobre la superficie de un objeto y el sistema de observación observa el patrón de franjas proyectado sobre el plano de referencia sea antes o después de colocar un objeto. Clásicamente se utiliza como un sistema de proyección un video proyector y como sistema de observación una cámara CCD.

Según las aplicaciones mencionadas anteriormente, a un sistema de franjas se le puede alterar el contraste, la separación y orientación local de las franjas. Esto asume que las anteriores características espaciales de la distribución de intensidad deben poseer funciones matemáticas bien definidas, situación que se revisará en las secciones siguientes.

1.1. SISTEMA DE FRANJAS SINUSOIDALES EN COORDENADAS RECTANGULARES

Un sistema de franjas sinusoidales en metrología óptica corresponde a la distribución de la intensidad luminosa I definida por:

$$I = I_0 + A \cos(\Phi), \quad (1)$$

donde I_0 es llamado el fondo continuo, A el contraste y Φ la fase geométrica del sistema de franjas. Estas 3 variables son funciones matemáticas evaluadas en cada punto del sistema de franjas.

El sistema coordenado que se utilice para describir las 3 funciones anteriores depende de la forma espacial de las franjas. Así, si en el plano objeto del sistema de proyección se ubica una función de Transmitancia dada por:

$$T(x_p, y_p) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left[\frac{2\pi x_p}{P} \right] \right], \quad (2)$$

sobre el plano imagen del sistema de observación se obtendrá un sistema de franjas de la forma:

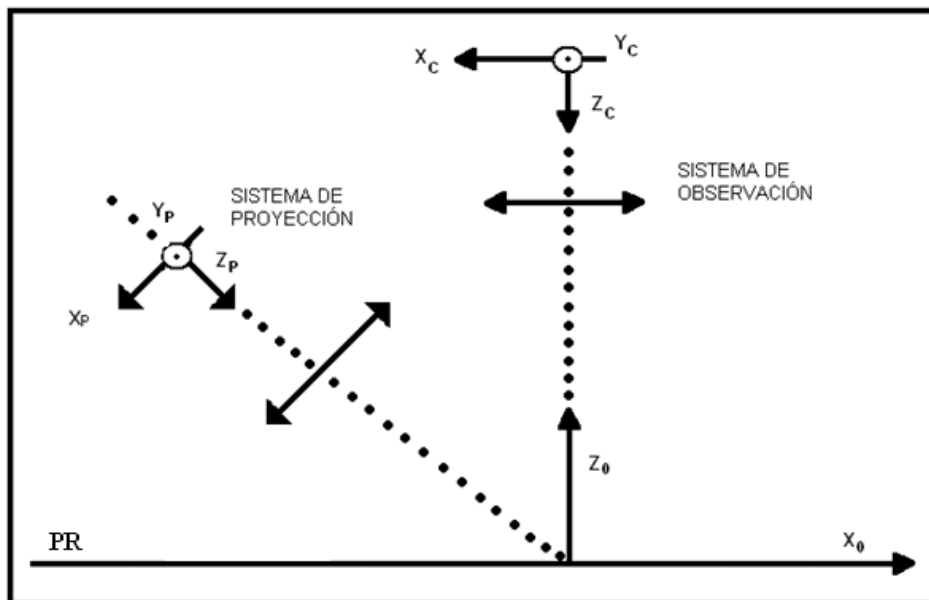
$$I(x_c, y_c) = I_0(x_c, y_c) + A(x_c, y_c) \cos \left(\frac{2\pi}{P_c} x_c \right), \quad (3)$$

asumiendo iluminación homogénea, proyectada sobre el plano de referencia PR y el sistema libre de aberraciones geométricas. En esta situación, como se observa en la figura 2a y 2b, I_0 y A son constantes y $\Phi = \frac{2\pi}{P_c} x_c$, siendo P_c la separación entre franjas consecutivas o paso de franjas. De esta manera, un sistema coordenado rectangular es apropiado para expresar el sistema de franjas de la figura 2a. Observando la figura 2a se concluye que un sistema de franjas equidistantes y paralelos posee una función fase Φ lineal donde la pendiente será $\frac{2\pi}{P_c}$, como lo muestra la línea continua de la figura 2c. De igual forma observando la

figura 2, el centro de una franja negra corresponde a valores de fase $M\pi$, siendo M impar.

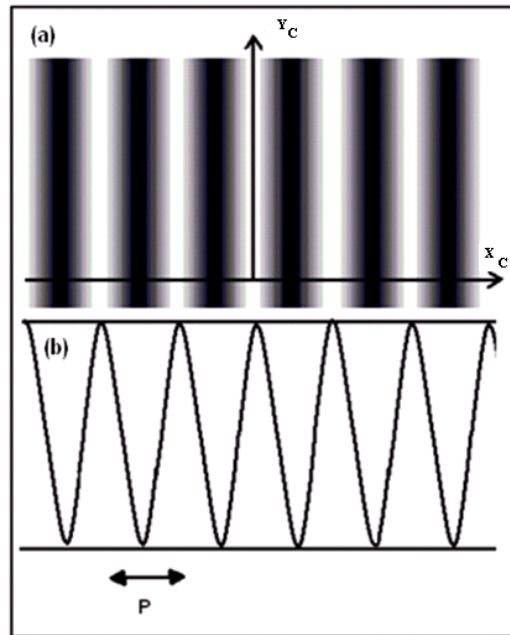
De igual forma siendo la función coseno periódica a intervalos $2\pi N$ (N enteros), se obtendría la misma distribución espacial de franjas. Es decir, desplazamientos verticales de la función fase a valores $2\pi N$ (líneas a trazos figura 2c), se obtiene la misma distribución espacial de franjas.

FIGURA 1. Sistema coordenado para un sistema de proyección de franjas



FUENTE: Autor

FIGURA 2. (a) Franjas sinusoidales, (b) Perfil de Intensidad representativo, (c) Su distribución de Fase



FUENTE: Autor

De igual forma y usando el sistema de proyección de franjas de la figura 1, la reflectividad del cuerpo y su topografía generan un sistema de franjas rectangulares en el plano imagen del sistema de observación dado por:

$$I(x, y) = I_0(x, y) + A(x, y)\cos\phi(x, y), \quad (4)$$

donde la función Fase $\phi(x, y)$ deja de ser lineal y se altera en función de la topografía del cuerpo. Así la alteración que introduce el cuerpo se codifica en la función fase $\phi(x, y)$ de la ecuación (4).

FIGURA 3a. Sistema de franjas distorsionado por la forma de un objeto

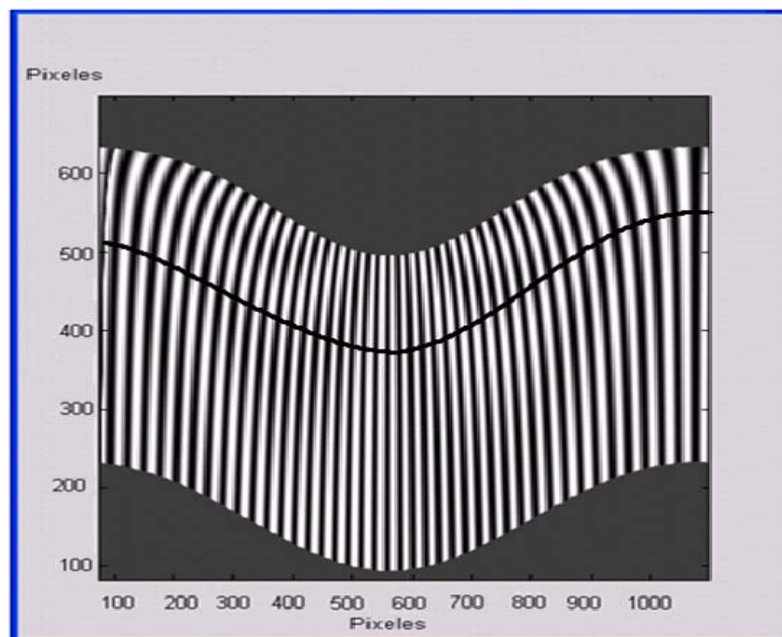
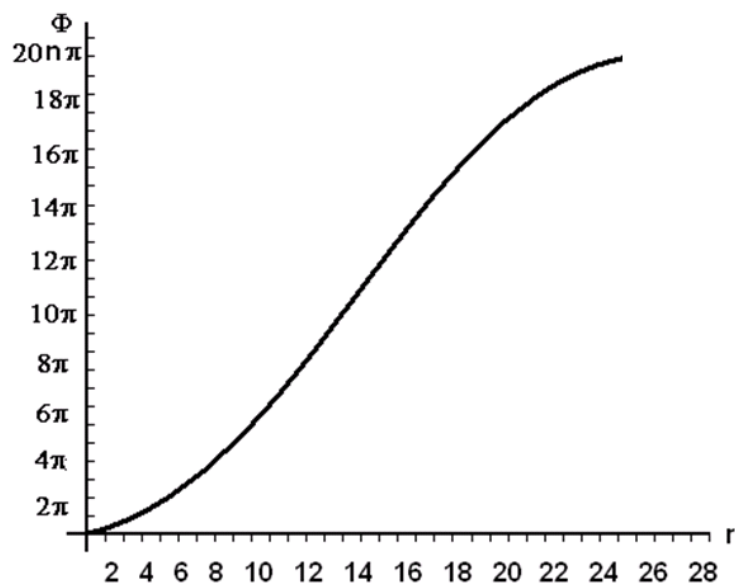


FIGURA 3b. Fase del perfil mostrado en 3a



La figura 3a muestra un sistema de franjas deformado. Se observa que hay una variación en la orientación y separación local de las franjas. Extrayendo el perfil en intensidad de la línea continua de la figura 3a se observa que la fase debe ser una función con variación local en la pendiente, para tener en cuenta las variaciones en el paso. Así pasos grandes implican pendientes pequeñas, se deben obtener pendientes bajas en los extremos de Φ , según el perfil extraído. De igual forma en el centro del perfil la pendiente debe ser grande, como se observa en la figura 3b.

1.2. OBTENCIÓN DE LA FASE DE UN SISTEMA DE FRANJAS

Sabiendo que la fase codifica, en la mayoría de las aplicaciones, la información deseada es importante extraerla de un sistema de franjas. Existen varios métodos: corrimiento de fase, Transformación de Fourier, Regresión no lineal, Transformación de Wavelet, etc.

1.3. MÉTODO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Consiste en extraer la función $\phi(x, y)$ de la ecuación (4). Utilizando un sistema de franjas como el indicado en la figura 3a se observa que el sistema de franjas posee una separación de franjas promedio, comúnmente llamado sistema de franjas con portadora y matemáticamente se escribe como:

$$I(x, y) = I_0(x, y) + A(x, y)\cos(2\pi f_0 x + \phi(x, y)), \quad (5)$$

donde $f_0 = \frac{1}{p_c}$ es la frecuencia espacial de franjas o frecuencia portadora. La figura 4 indica detalladamente todo el proceso para extraer la fase por medio de la técnica de transformada de Fourier. La anterior distribución en intensidad puede escribirse como:

$$I(x, y) = I_0(x, y) + C(x, y)e^{(2\pi f_0 x)} + C^* e^{-(2\pi f_0 x)}, \quad (6)$$

donde:

$$C(x, y) = \frac{A}{2} e^{i\phi_c(x, y)}. \quad (7)$$

El asterisco define complejo conjugado. Teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Fourier, la ecuación 6 toma la forma:

$$I(\mathbf{f}, \mathbf{y}) = \bar{I}_0(\mathbf{f}, \mathbf{y}) + \bar{C}(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0, \mathbf{y}) + \bar{C}^*(\mathbf{f} + \mathbf{f}_0, \mathbf{y}) \quad (8)$$

Asumiendo que las variaciones en el dominio de las frecuencias de I_0 y A son pequeñas comparadas con \mathbf{f}_0 , $I(\mathbf{f}, \mathbf{y})$ posee 3 lóbulos separados (figura 4b). El lóbulo central corresponde a $\bar{I}_0(\mathbf{f}, \mathbf{y})$ y los lóbulos laterales corresponden a $\bar{C}(\mathbf{f}, \mathbf{y})$ centrados en $\pm \mathbf{f}_0$. Para obtener $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es necesario calcular $C(\mathbf{f}, \mathbf{y})$ y la transformada de Fourier inversa. Aislado el lóbulo lateral (figura 4d) y calculando la transformada de Fourier inversa (figura 4e) se obtiene:

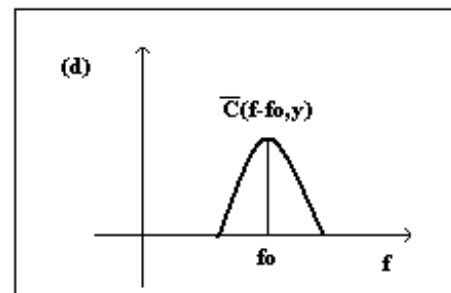
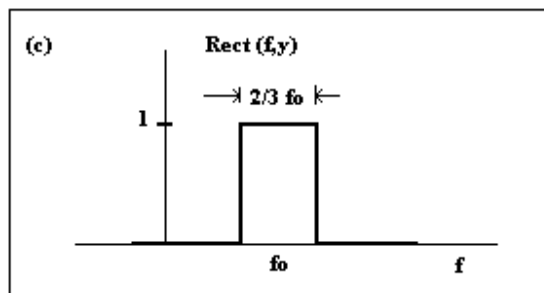
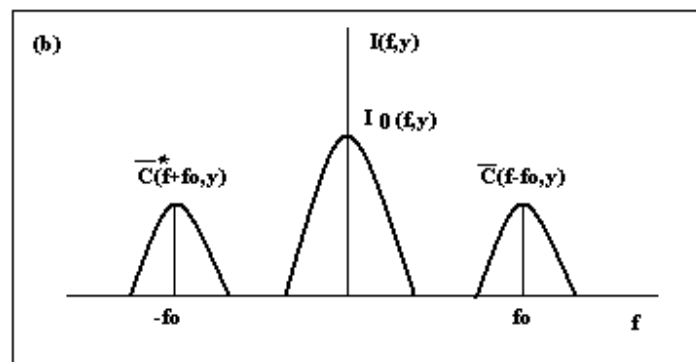
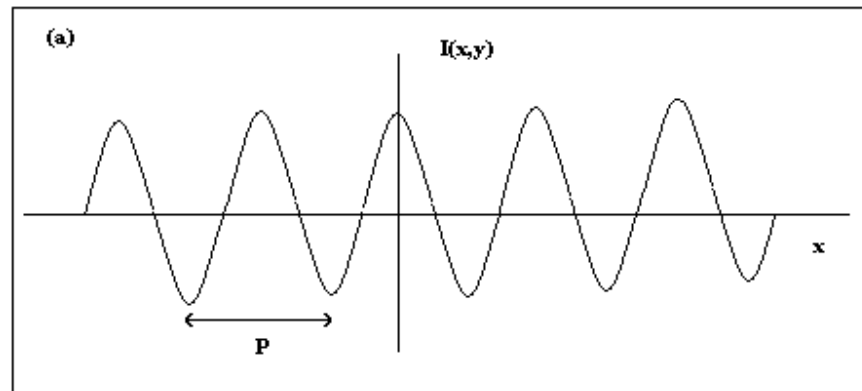
$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y})e^{(2\pi f_0 x)} = \frac{A}{2} e^{(i\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 2\pi f_0 x)} = R[C(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + iI[C(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \quad (9)$$

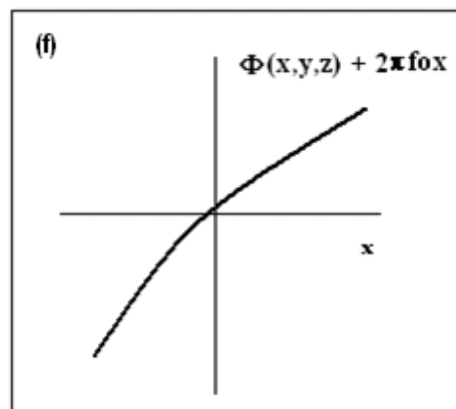
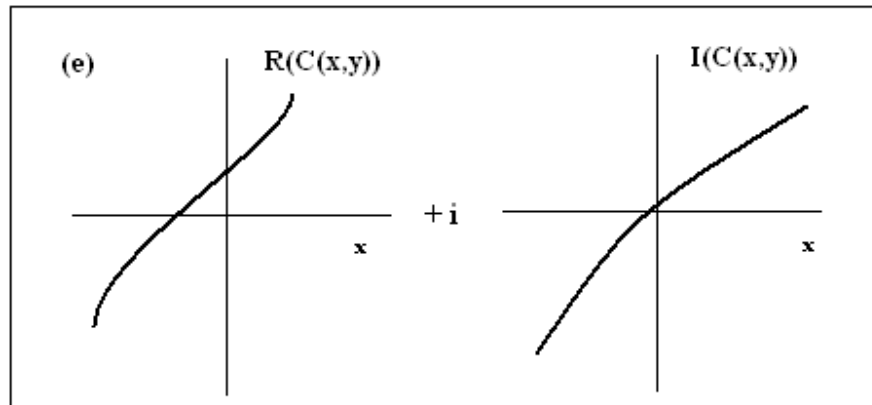
La fase de la función compleja obtenida corresponde a:

$$\phi_c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 2\pi f_0 x \quad (10)$$

Es decir, la fase de la función compleja obtenida de la transformada de Fourier inversa, se obtiene la fase del sistema de franjas definida en la ecuación 10. Esta función corresponde a la fase portadora (componente lineal) y las alteraciones del paso de franjas definidas por $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

FIGURA 4. Pasos para la obtención de la fase de un plano





1.4. FASE DISCONTINUA

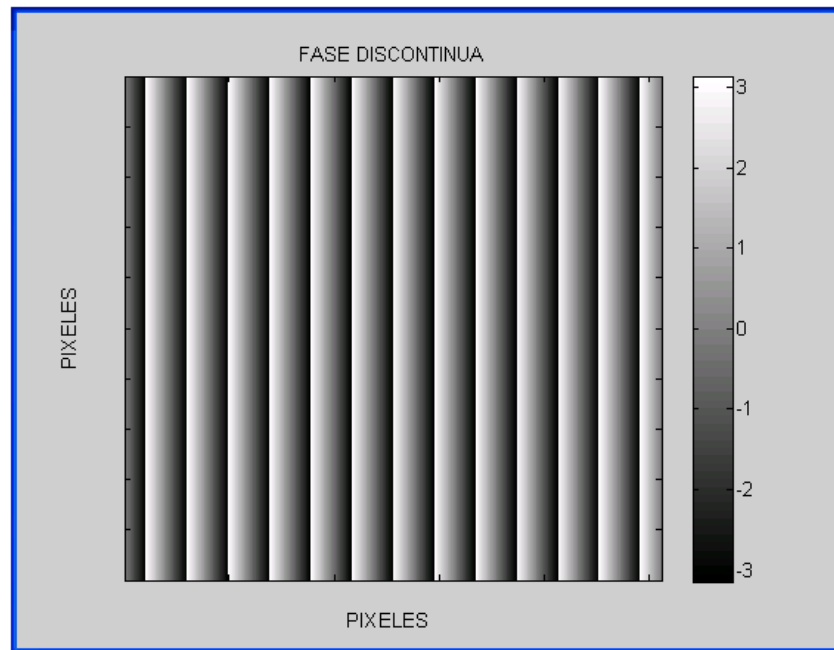
Según lo anterior la fase de la ecuación 10 se obtiene calculando la fase de la función compleja definida por la ecuación 9, según:

$$\phi_d(x, y) = \text{arctg} \frac{I[C(x,y)]}{R[C(x,y)]} \quad (11)$$

ϕ_d es llamada la fase discontinua, la cual es limitada en el rango de $-\pi$ a π . Los puntos de discontinuidad o puntos donde ocurre la transición $\pm\pi$ corresponden a las líneas centrales de las franjas negras. Esto lleva a la necesidad de realizar un procedimiento que elimine los puntos de discontinuidad introducidos por la función arco tangente, con el fin de obtener la fase $\phi_c(x, y)$ continua. La figura 5 muestra

una fase discontinua obtenida usando la ecuación 11 para un sistema de paso constante.

FIGURA 5. Fase discontinua



Como la fase depende solamente de la función arco tangente y sin presencia de fuerte ruido, las discontinuidades tienen un valor de $\pm 2\pi$. Con el fin de corregir estos saltos de $\pm 2\pi$ se debe recurrir a un método de conversión de fase continua comúnmente llamado **“UNWRAPPING”**.

1.4.1. Algoritmo de Unwrapping ó corrección de fase

Este algoritmo consiste en adicionar o restar valores enteros apropiados de 2π necesarios para corregir la fase. En la figura 6a se muestra un corte horizontal de la fase discontinua mostrada en la figura 5, su respectiva fase continua (6b) y el número de N veces 2π necesarios que fueron sumados para obtenerla, figura (6c). Para el proceso de corrección de fase es necesaria la comparación de vecinos para obtener la fase continua. En situaciones experimentales, la influencia del

ruido, bajo contraste y la presencia de discontinuidades en el objeto pueden generar alteraciones en la fase continua que afectarán la reconstrucción tridimensional. En la literatura especializada se pueden encontrar algoritmos de corrección de fase robustos al ruido, que permiten calcular la fase continua en un sistema de franjas complicado. El algoritmo usado en el desarrollo del presente trabajo corresponde al método presentado anteriormente puesto que, como se verá en los capítulos siguientes, las imágenes de franjas no tenían mucha influencia del ruido y no estaban deformadas.

FIGURA 6a. Corte horizontal de la fase discontinua

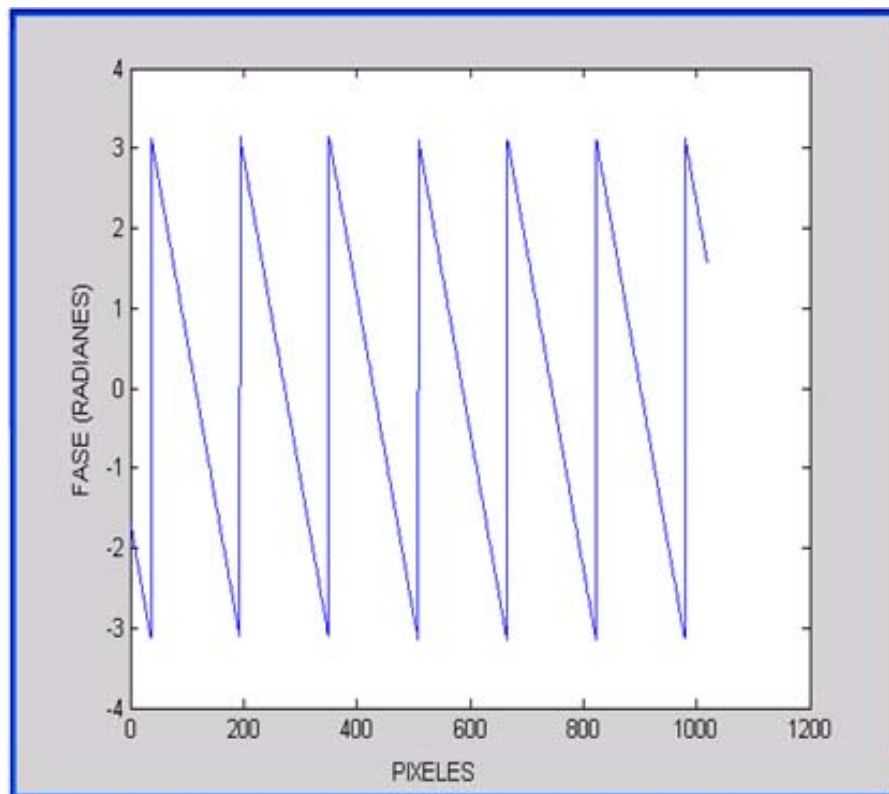


FIGURA 6b. Fase continua

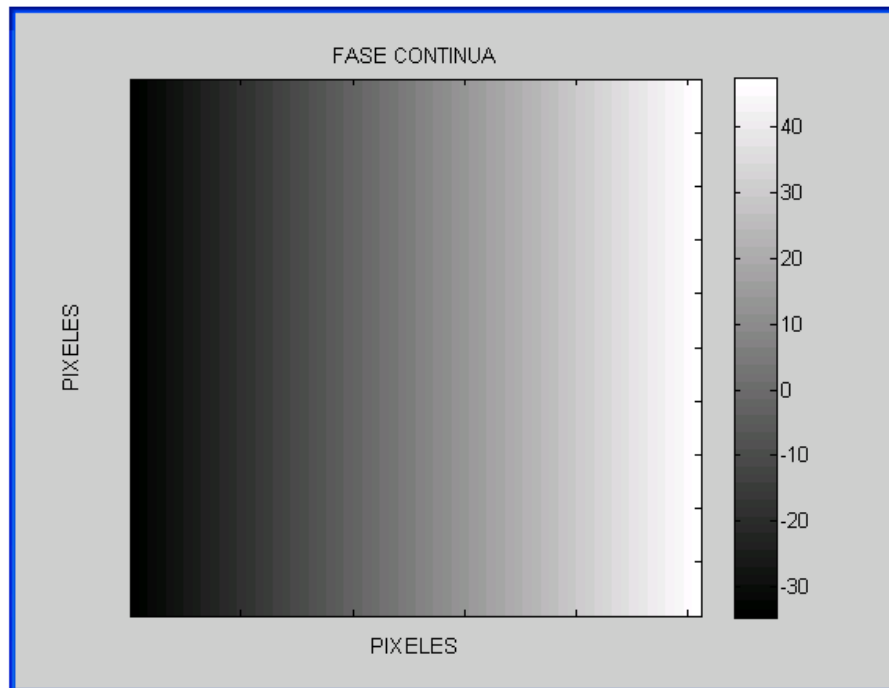


FIGURA 6c. Fase continua

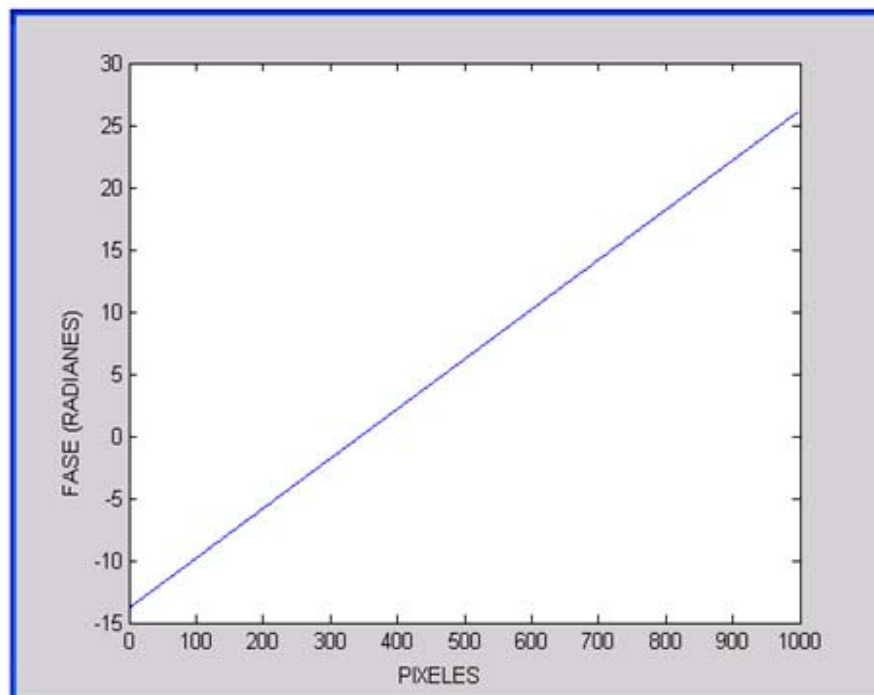
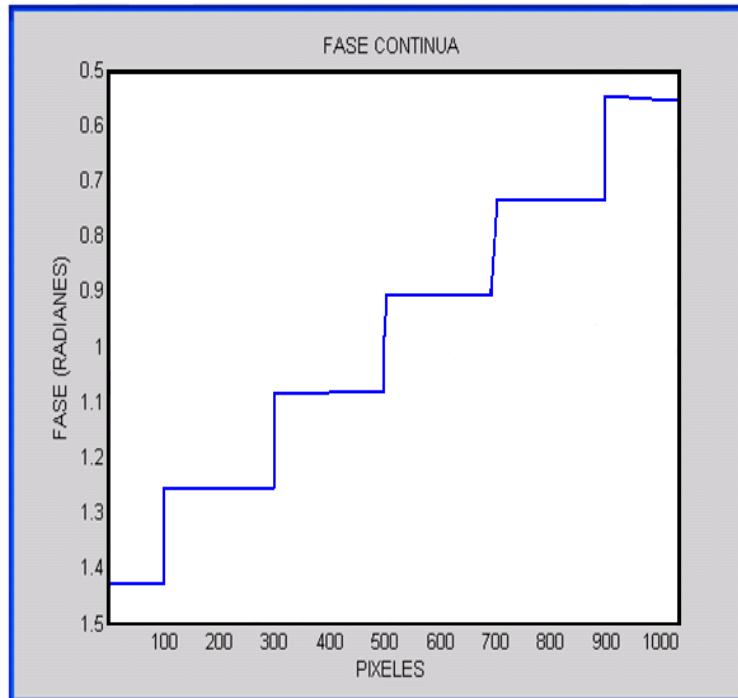


FIGURA 6d. Valores enteros adicionados para hallar la fase continua



Según lo anterior, el método de la Transformada de Fourier permite determinar la fase de un sistema de franjas con portadora, función matemática que puede ser utilizada para codificar información útil en metrología óptica. La distribución espacial de las franjas dispuestas de manera rectangular enfoca un campo de aplicación donde la mejor configuración espacial define su utilización. Por ejemplo, usando un sistema de franjas en coordenadas rectangulares se pueden medir con alta precisión desplazamientos en el espacio 3D [1]. De igual forma usando una configuración de franjas de manera radial se podría pensar en utilizarla para medir rotaciones con alta precisión. De esta forma se induce el capítulo siguiente en el cual se analiza matemáticamente un sistema de franjas radiales.

2. ANÁLISIS TEÓRICO DE UN SISTEMA DE FRANJAS RADIALES

El análisis y posteriores aplicaciones de un sistema de franjas radiales, es un tema poco abordado en procesos de investigación. El caso más cercano que ha dado buenos resultados es el uso de franjas radiales en la Técnica de Moiré. El procedimiento toma primero un modelo de simulación y después un montaje experimental de imágenes de un sistema de franjas radiales y circulares, una deformada y otra sin deformar, que son capturadas por una cámara CCD para hacerles un posterior análisis. El centro del sistema de franjas radiales y circulares es seleccionado como el origen del sistema polar coordenado. La superposición de los dos sistemas de franjas genera un patrón de franjas Moiré, en el cual las franjas poseen información de las deformaciones radial y tangencial que ha sufrido el sistema de franjas deformado. El análisis se hace geoméricamente. En este capítulo se realizará un análisis teórico de un sistema de franjas radiales con el fin de extraer la función fase geométrica. Se evaluará el procedimiento de análisis usando un sistema de franjas radiales simulado.

2.1. SISTEMA DE FRANJAS RADIALES

Un sistema de franjas radiales corresponde a una distribución en la que los puntos de igual intensidad generan un patrón de líneas rectas radiales que provienen de un centro común (Figura 7a). De esta manera al extraer valores de intensidad de puntos ubicados a igual distancia del centro, se obtiene un perfil periódico.

2.1.1. Definición matemática

Según lo anterior, matemáticamente un sistema de franjas radiales corresponde a una distribución en intensidad que expresada en sistema polar coordenado (r, θ) está dada por:

$$I(r, \theta) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{P_\theta} \theta\right) \quad (12)$$

Donde: P_θ = Paso angular, a_0 , a_1 = pueden ser constantes o variables espacialmente. De esta manera, según la disposición de las líneas, se define un paso P_θ medido en grados.

2.1.2. Fase del sistema de franjas radiales

Según la ecuación (12) en coordenadas polares la fase del sistema de franjas radiales tiene un comportamiento lineal en dirección al incremento de la variable θ . En dirección del incremento de la variable r la fase es constante. Es decir la fase de un sistema de franjas radiales en coordenadas polares tiene la misma distribución espacial que un sistema de franjas rectangulares en coordenadas cartesianas. Esta característica define un procedimiento matemático para la extracción de la fase de un sistema de franjas radial.

2.2. ANÁLISIS TEÓRICO DE LA FASE DE UN SISTEMA DE FRANJAS RADIALES

En el capítulo anterior se mostró un procedimiento para la extracción de la fase empleando la Transformada de Fourier de un sistema de franjas donde los puntos de igual intensidad definen líneas rectas en un sistema coordenado cartesiano.

2.2.1. Conversión del sistema coordenado rectangular - polar

La primera aproximación hacia la extracción de la fase de un sistema de franjas radial podría ser la utilización de la Transformada de Fourier pero es necesario hacer la conversión de la forma espacial de las franjas.

El método a seguir en la transformación de un sistema de franjas radial en rectangular es transformar las coordenadas de un punto (x, y) en el sistema de coordenadas cartesianas al sistema polar de coordenadas (r, θ) según:

$$R = \sqrt{(x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2} \quad (13)$$

$$\theta = \text{arc tg} \left(\frac{y - Y_0}{x - X_0} \right),$$

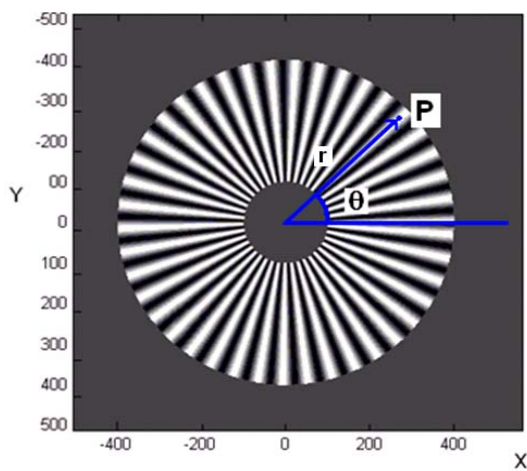
donde (X_0 , Y_0) es el centro de la rejilla radial elegido para formar el origen del sistema coordenado polar. La figura 7a muestra el sistema coordenado utilizado.

El método de transformación coordenado es el que se muestra esquemáticamente en la figura 7. El punto P de coordenadas (x, y) tiene coordenadas polares (r, θ) calculadas según la ecuación 13, como se muestra en la figura 7a. En la figura 7b horizontalmente cambian los radios y verticalmente los valores de θ , como se indica. El proceso de transformación consiste en asignarle la intensidad del punto P de la figura 7a a la posición (r, θ) correspondiente en la figura 7b, calculados según la ecuación 13. El proceso asume varias condiciones:

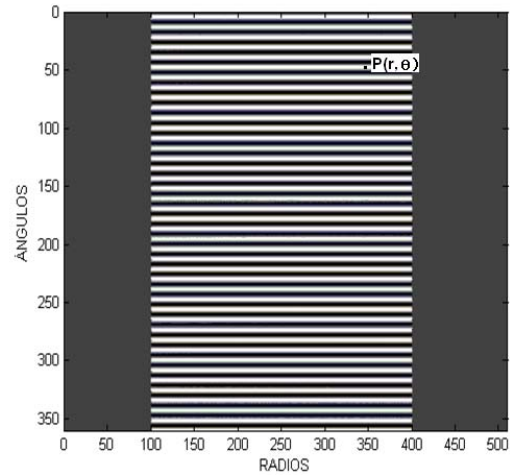
1. Se conoce con precisión (X_0 , Y_0).
2. La conversión emplea variables de posición continua.

Experimentalmente el centro no es conocido y al utilizar imágenes digitales se debe realizar una interpolación por mínimos cuadrados, situación que afectará el error que introduce el proceso de conversión en el cálculo de la fase. La figura 7c muestra la distorsión que se introduce si el centro no es calculado correctamente.

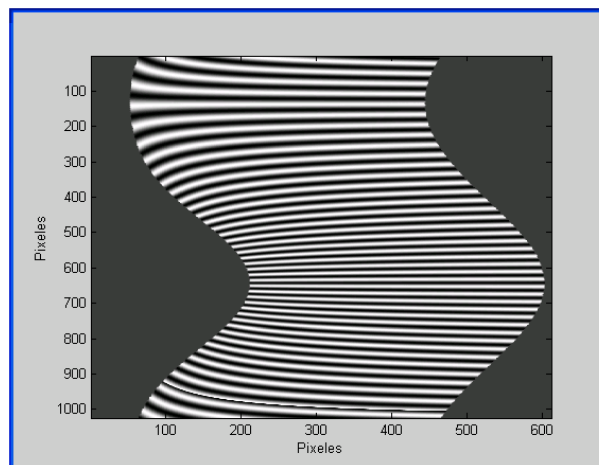
FIGURA 7. (a) y (b) Transformación de coordenadas rectangular – polar. (c) Distorsión que se introduce si el centro no es calculado correctamente



(a)



(b)



(c)

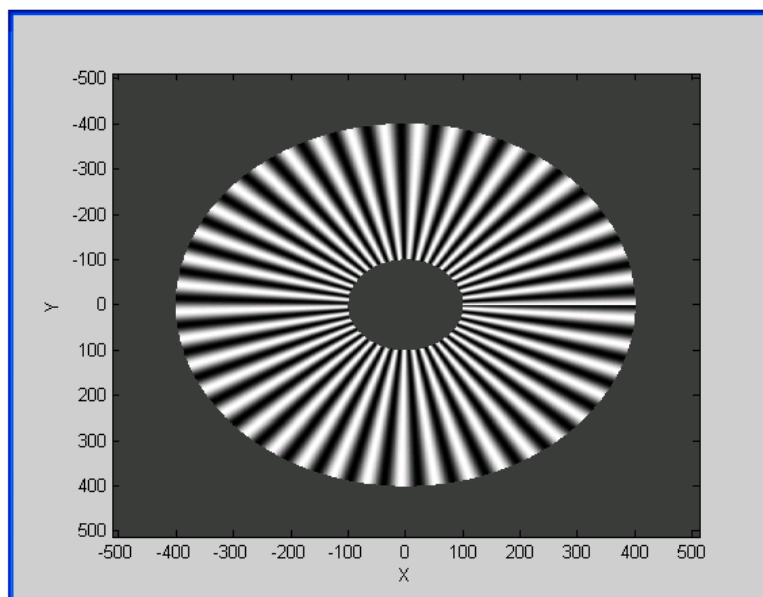
Al realizar la transformación, el sistema de franjas radiales puede ser analizado por el algoritmo de la Transformada de Fourier. Al final la distribución de fase puede ser transformada inversamente, y dicha distribución corresponde al patrón original de franjas radiales.

2.3. ALGORITMO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

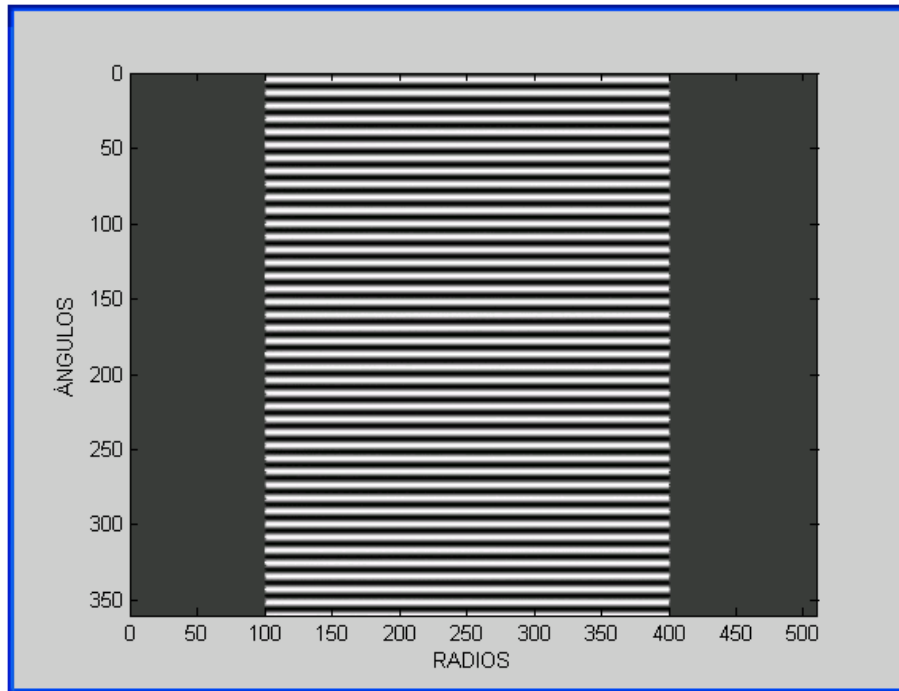
Obtenido el sistema de franjas rectangulares de la transformación de coordenada rectangular – polar, se procede a aplicar el algoritmo de la Transformada de Fourier (figuras 8a y 8b). Aunque se analizó gráficamente el proceso de extracción de fase usando la Transformada de Fourier de manera unidimensional, se puede realizar el proceso bidimensional usando el algoritmo de Transformada de Fourier 2D, de manera similar.

Como se describió con detalle en el capítulo anterior, debido a la frecuencia espacial portadora del sistema de franjas, la distribución en intensidad puede escribirse como en la ecuación 5. Teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Fourier, la ecuación de intensidad toma la forma de la ecuación 6. Tomando un filtro de Gauss (figura 8d) y calculando la transformada de Fourier inversa se obtiene la figura 8e, la figura 8f corresponde a la fase continua de una rejilla rectangular usando la máscara mostrada en 8g. La figura 8d muestra el filtro usado.

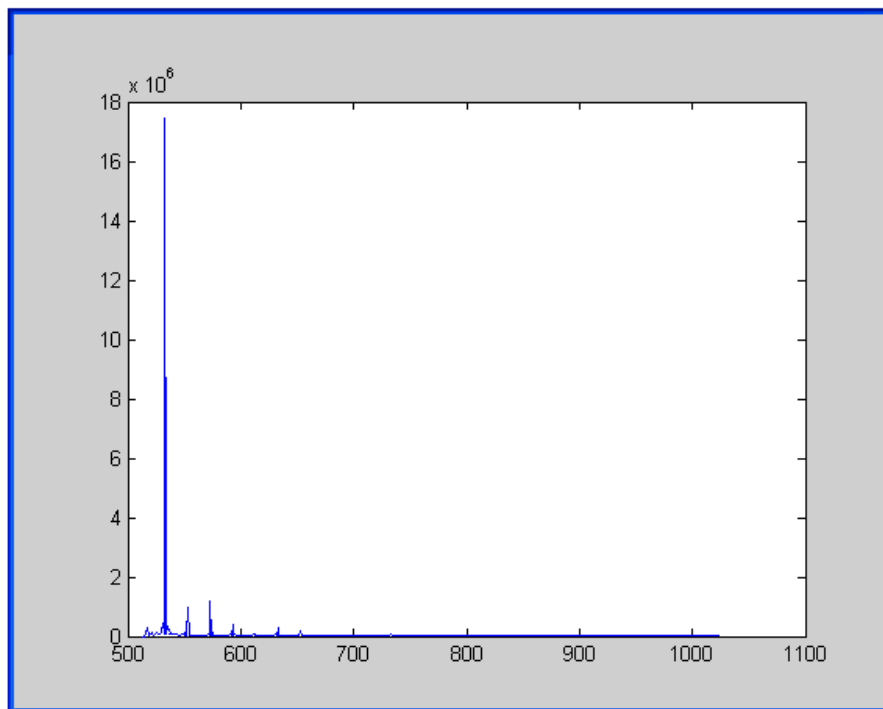
FIGURA 8a. Rejilla radial en coordenadas (x, y)



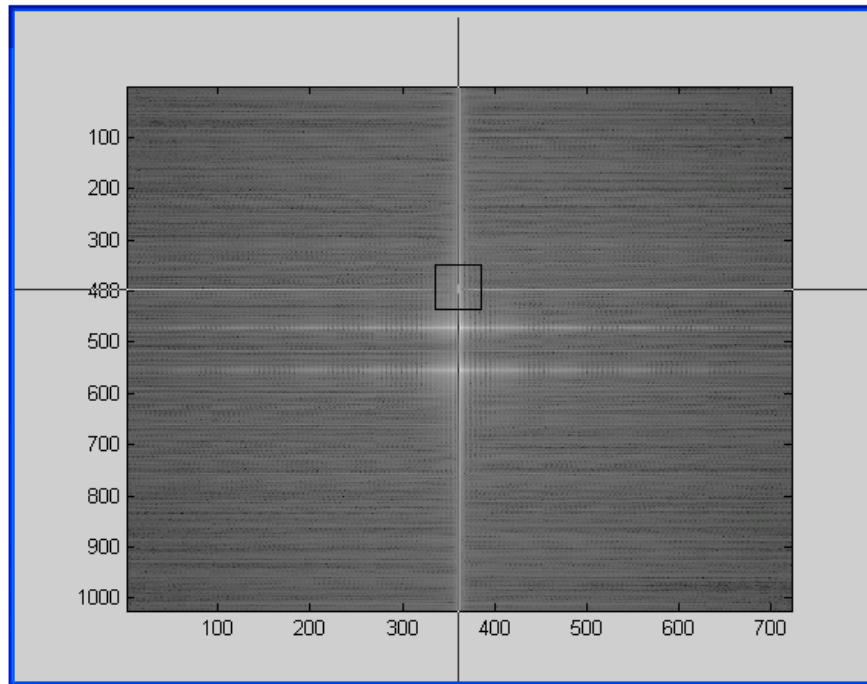
8 b. Transformación de coordenadas (r, θ)



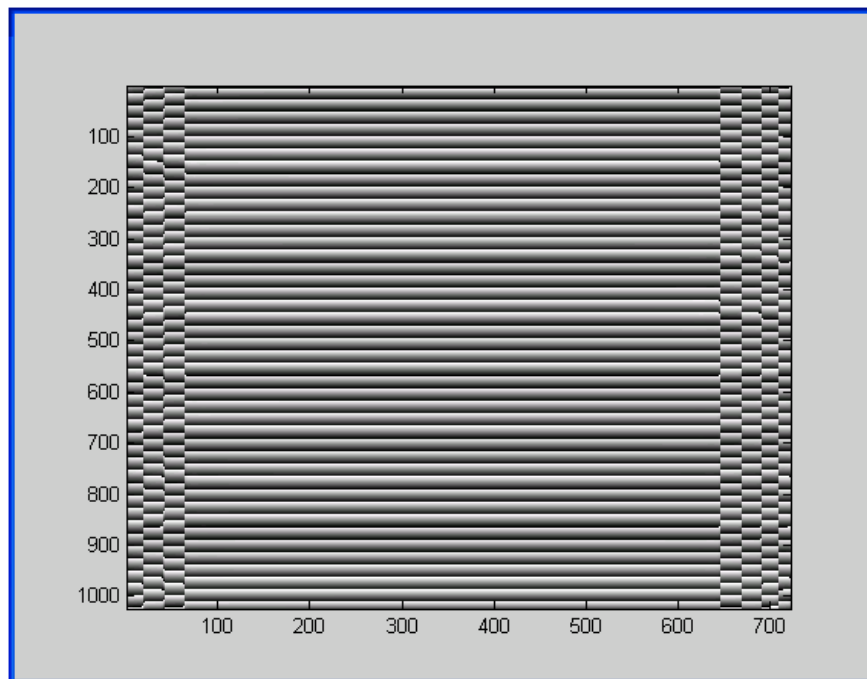
8c. Transformada de Fourier del sistema de franjas



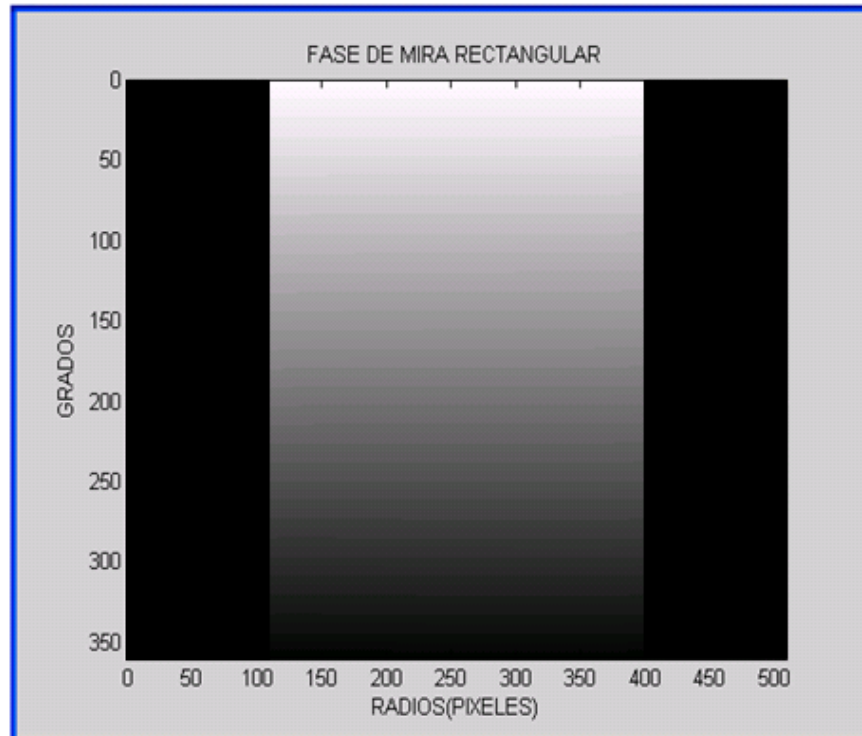
8d. Filtro usado



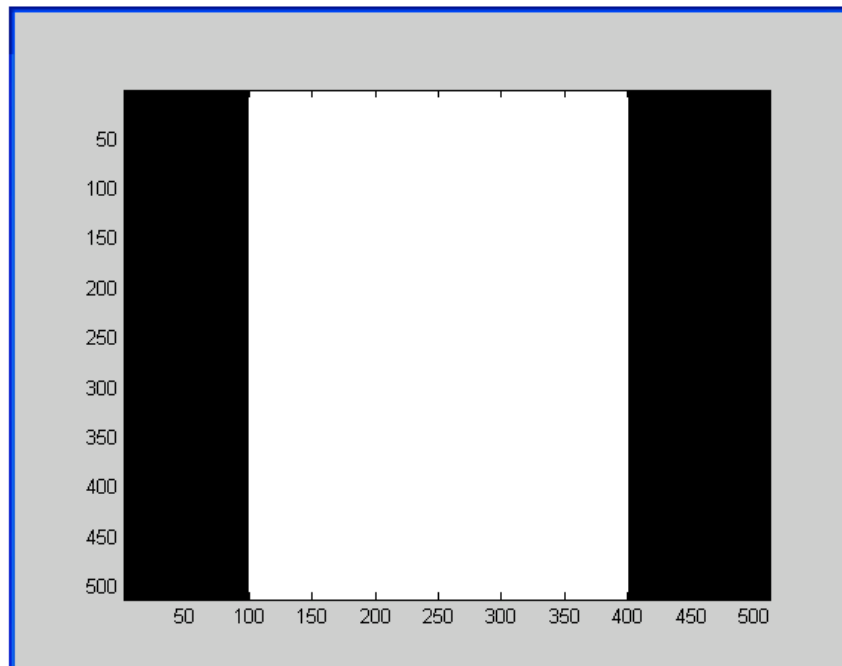
8e. Transformada de Fourier Inversa



8f. Fase Continua de la rejilla rectangular



8g. Filtro ventana rectangular



El anterior procedimiento de extracción de fase introduce varias inquietudes:

1. ¿Qué forma y tamaño de filtro se debe escoger?
2. ¿Qué influencia tiene la región donde no hay franjas?
3. ¿Qué error se comete en el cálculo de la fase al usar la Transformada de Fourier?

La solución a las anteriores preguntas ha sido ampliamente estudiada por diversos investigadores a nivel internacional. Básicamente el procedimiento desarrollado para obtener la figura 8f se centra en:

1. Usar un filtro Gaussiano. Como las franjas son rectas sin alteraciones en el paso y orientación se deben obtener tres distribuciones de Dirac ensanchados por las discontinuidades en los bordes de las franjas. Luego el ancho del filtro no es de vital importancia.
2. Según la figura 7a hay un radio mínimo y un radio máximo donde existe información. Si se define una máscara de validación (figura 8g, 1 región útil y 0 región no útil) es posible usar el proceso de corrección de fase en la región útil y descartar la región no útil, para obtener la fase continua sin influencia de la fase de regiones no útiles.
3. Las discontinuidades de las franjas en la imagen afectan los lóbulos de Fourier. Se utilizó una ventana de Hamming para reducir esta influencia [1, 6, 7].

2.4. CONVERSIÓN DEL SISTEMA COORDENADO POLAR – RECTANGULAR

Con la fase continua del sistema de franjas rectangulares mostrada en la figura 8f, sigue la conversión de coordenadas inversas teniendo en cuenta las siguientes expresiones matemáticas:

$$\begin{aligned}
 x &= X_0 + r \cos \theta, \\
 y &= Y_0 + r \sin \theta,
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

El método de transformación coordenado es el que se muestra esquemáticamente en la figura 9. Un punto con valor de fase en las coordenadas (r, θ) , figura 9a le corresponde en coordenadas (x, y) calculados según la ecuación 14. De esta manera se obtiene la figura 9b.

FIGURA 9. Transformación de la fase de una rejilla rectangular a radial

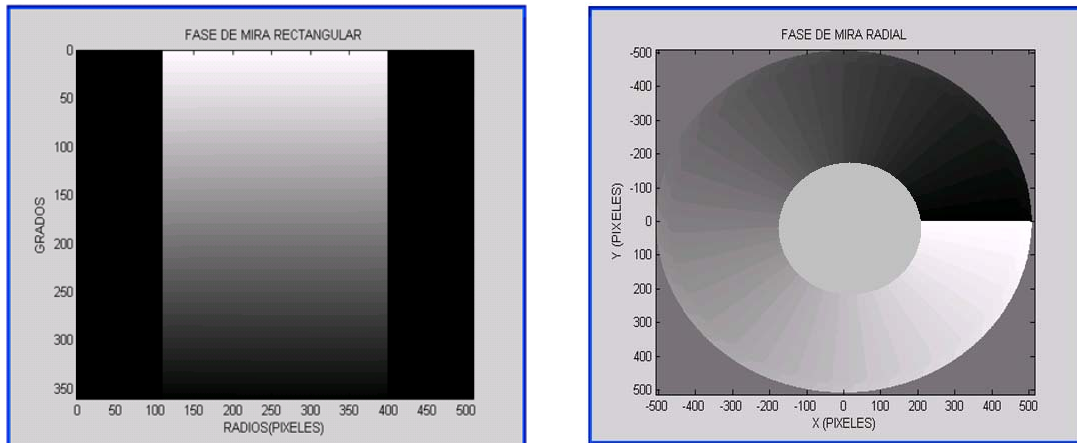
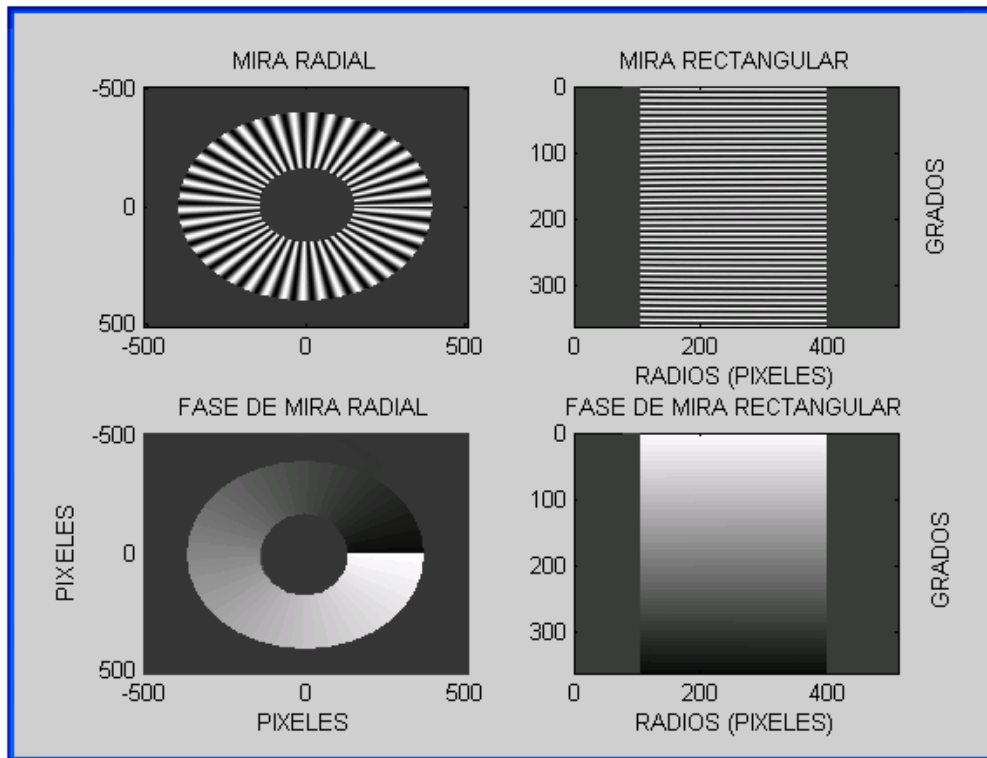


FIGURA 10. Resultado de transformación de coordenadas y las respectivas fases para rejilla rectangular y rejilla radial



Con la ayuda de la transformación de coordenadas la fase de la rejilla rectangular de líneas horizontales es convertida a la fase de una rejilla de líneas radiales, proceso que se muestra en la figura 10.

3. ANÁLISIS EXPERIMENTAL

La primera etapa del trabajo tuvo como objetivo consultar referencias que se adecuaran al proceso de Sistema de Franjas Sinusoidales en Coordenadas Rectangulares para llegar al concepto de Sistema de Franjas Radiales. Posteriormente se realizó un software de simulación tanto de la rejilla radial, como de la demodulación de la misma. A partir del análisis matemático de un sistema de franjas rectangulares, se definió la estructura matemática de conversión que transformó el sistema de franjas radiales a uno de franjas rectangulares. Se mostró que realizando la conversión, la fase de un sistema de franjas radiales en coordenadas polares es equivalente a la fase de un sistema de franjas rectangulares en coordenadas cartesianas. De esta manera una vez realizada la conversión de sistemas coordenados se empleó el algoritmo de transformación de Fourier para extraer la fase y realizar el proceso de conversión inversa, obteniéndose la distribución de fase para el sistema de franjas radiales iniciales. Indudablemente como el sistema de franjas es simulado, las coordenadas del centro son conocidas, situación que no es válida en condiciones experimentales.

En este capítulo se procederá a evaluar el procedimiento propuesto pero en condiciones experimentales. Se implementará una técnica de detección del centro de una rejilla radial en un punto arbitrario del espacio.

3.1. MONTAJE EXPERIMENTAL

Con el fin de evaluar experimentalmente el procedimiento de demodulación de un sistema de franjas radiales se realizó el montaje indicado en las figuras 11a, 11b y 11c. La mira o rejilla radial se ubicó en un sistema de traslación manual de 10 micras de precisión y sistema de rotación manual de 2' de precisión. Se tomaron varios registros introduciendo desplazamientos y rotaciones conocidos.

El montaje experimental completo se muestra en la figura 11a. Consta de un sistema de proyección: 2 lámparas de luz blanca; un sistema de observación: cámara USB; un sistema de adquisición y almacenamiento de datos: computador; y el objeto a evaluar: mira ó rejilla radial. El montaje contiene un sistema de rotación y traslación sobre los cuales se acopla la rejilla radial para tomar registros de desplazamientos angulares y espaciales. Estos datos son necesarios para demostrar que la técnica de detección del centro de la rejilla radial en el espacio funciona. Las figuras 11b y 11c muestran en detalle las platinas de rotación y traslación y la cámara USB usada.

FIGURA 11a. Montaje experimental.

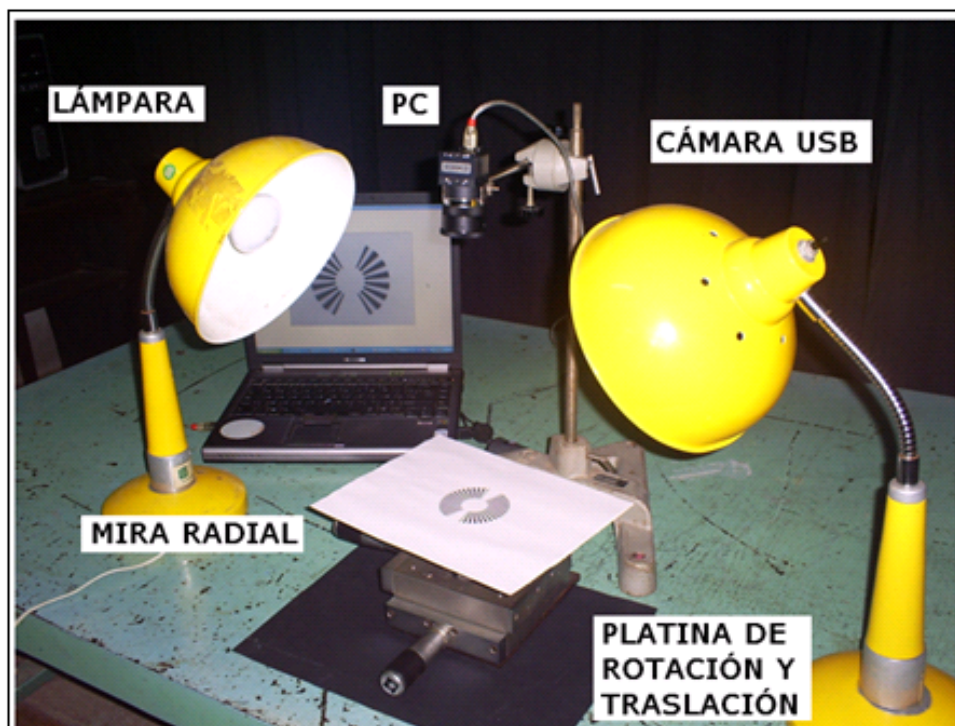


FIGURA 11b. Detalle de las platinas de rotación y traslación.

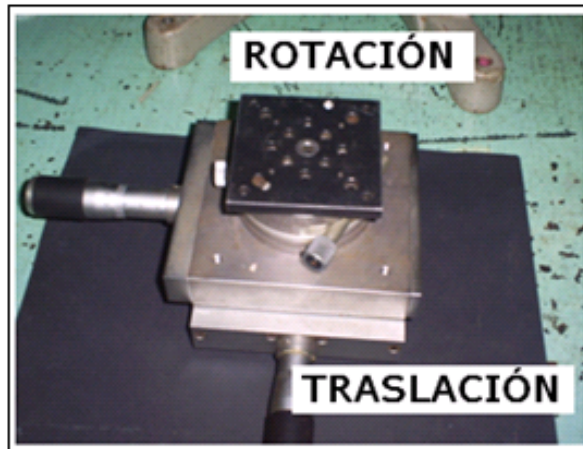


FIGURA 11c. Detalle de la cámara USB.



3.1.1. Sistema de observación

El sistema de observación es un aspecto importante en esta etapa, puesto que la resolución de la imagen de la mira radial tomada por la cámara usb marca una pauta en su posterior tratamiento con el software. En este caso se usó una cámara usb uEye UI 1410c con un sensor de $\frac{1}{3}$ '' CMOS. Se utilizó un soporte para adaptarlo a la cámara (figura 11a), a una distancia de 30 cm de la superficie de la platina de rotación, la tabla 1 muestra las características generales de la cámara. La figura 13 muestra la imagen obtenida de una lente de focal 12 mm.

TABLA 1. Datos generales de la cámara utilizada.

CÁMARA USB uEYE UI - 1410 - C	
Interfaz	USB 2.0
Tecnología del sensor	CMOS
Resolución (h x v)	640 x 480
Medida del sensor	1/3"
Paso del pixel en μm	7.5

FUENTE: www.uEye.com

3.1.2. Sistema de control, adquisición y procesamiento de imágenes

Se utilizó el software de la cámara uEye que además del control de la cámara, las imágenes se pueden grabar en formato BMP. Es compatible con Microsoft Visual C/C++ V6.0, C/C++ V7.1, C/C++ V8.0. Para que el programa pueda iniciar, los siguientes archivos DLLs tienen que estar en el directorio del programa:

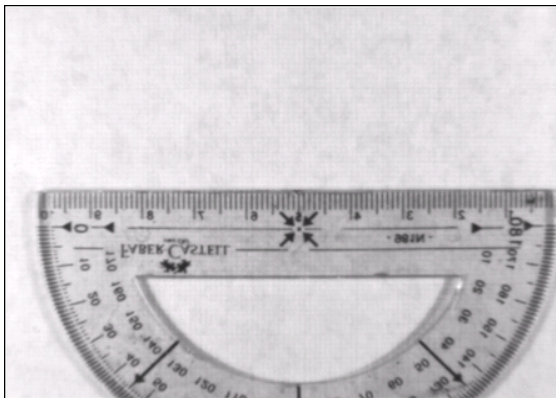
- uEye_api.dll
- Correspondientes archivos DLL en tiempo de ejecución de compilador de usuario.

Cada imagen digitalizada tiene una resolución de 640 x 480 píxeles en formato RGB, que es posteriormente convertida a niveles de gris. El software de adquisición de la cámara se encarga de inicializarla y dejarla en adquisición continua. Cuando se deseaba grabar una imagen, se utilizan las opciones del menú de la interfase: detener la adquisición y grabar la imagen en disco.

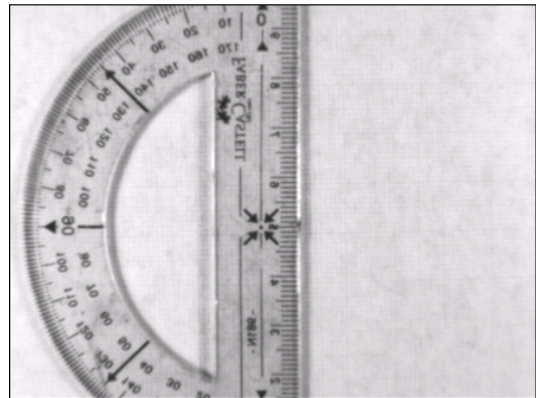
3.1.3. Calibración del sistema de adquisición

En el tratamiento digital de las imágenes adquiridas experimentalmente es necesario realizar un proceso de conversión de píxeles a unidades métricas. La figura 12 muestra el factor de conversión sobre el eje (x, y). Tomando la relación entre el papel con escala métrica y la regla de conversión para cada caso, se tiene que este factor es de $1/6$ mm/píxel. La conversión lineal anterior es posible debido a que el objeto es plano y ubicado perpendicular al eje óptico y el objetivo de la cámara presentaba aberraciones geométricas inferiores a 1 píxel en los extremos.

FIGURA 12. (a) Medida en eje x

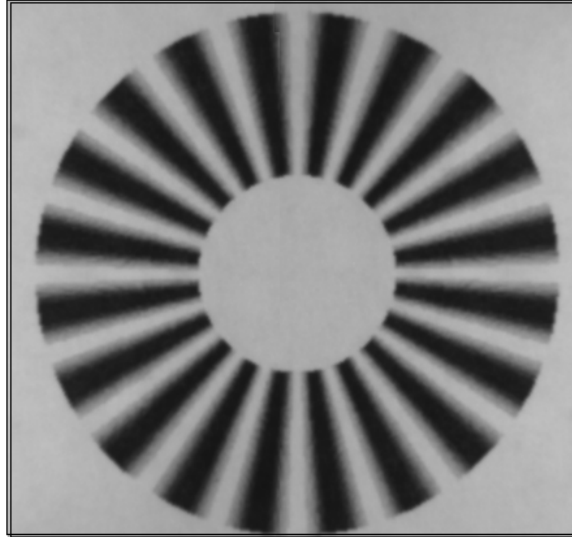


(b) Medida en eje y



3.2. COMPROBACIÓN DEL ALGORITMO POR MEDIO DE UNA IMAGEN EXPERIMENTAL

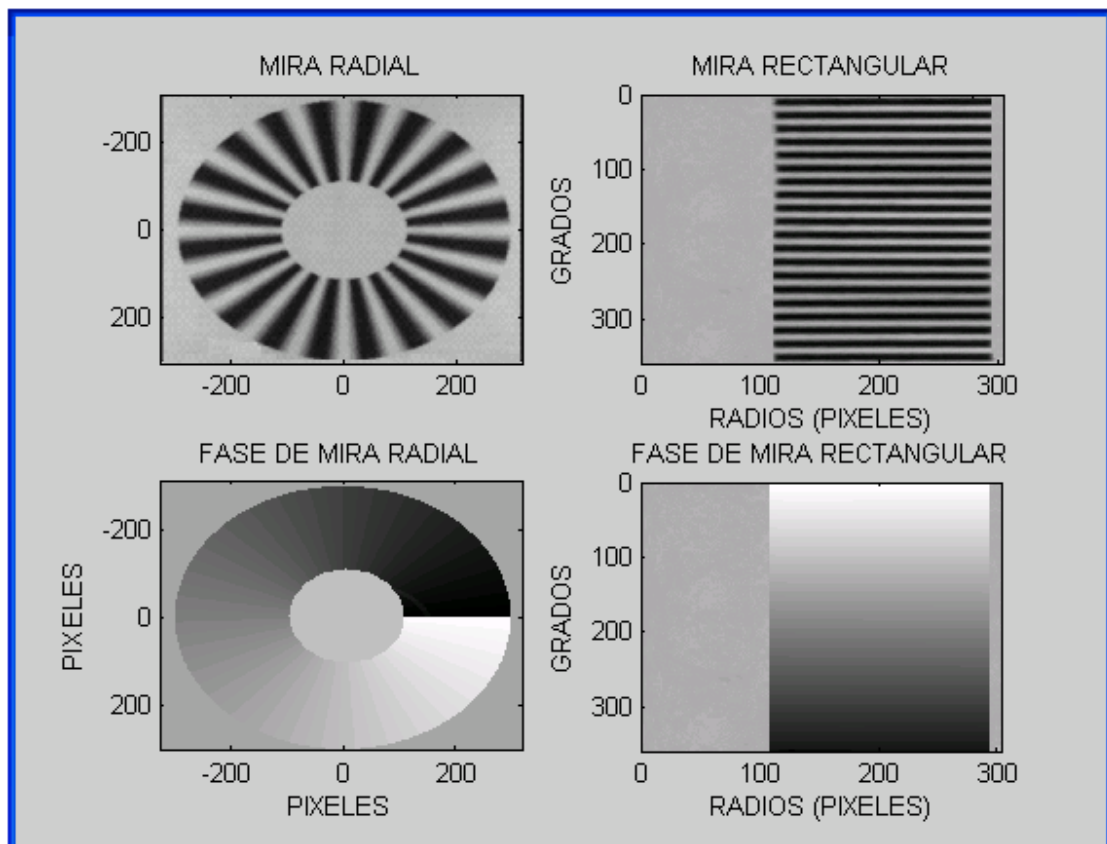
FIGURA 13. Imagen experimental de la rejilla radial completa



En el capítulo anterior se propuso un algoritmo teórico para el cálculo de la fase de una rejilla radial que consiste en el método de transformación de coordenadas. Esto se logró debido a que el centro del sistema de franjas radiales es conocido ya que la imagen es simulada. Es de recordar que el algoritmo desarrollado necesita conocer la posición de dicho centro para su correcta implementación. Pero surge la inquietud: ¿qué sucede cuando el centro del sistema de franjas radial no es conocido? El algoritmo también muestra los resultados de un mal cálculo de la fase cuando el centro no es conocido: La figura 7b muestra la distorsión del sistema de franjas transformado cuando hay un error en el cálculo del centro. La figura 13 muestra una imagen experimental de la rejilla radial completa; ésta se obtuvo mediante simulación en Matlab a un paso angular de $2\pi/20$, exportando la figura en formato BMP, para ser insertada en Word y posteriormente ser impresa en hoja de papel. La figura 14 muestra el procesamiento de la imagen experimental usando el algoritmo propuesto en el capítulo anterior, pero

calculando el centro a partir de un algoritmo que emplea las propiedades de la transformada de Fourier para figuras simétricas. Este algoritmo se presentará en la sección siguiente en detalle.

FIGURA 14. Cálculo de la fase de una rejilla radial



3.3. DISCUSION DE RESULTADOS

El algoritmo que calcula el centro del sistema de franjas radiales tiene precisión subpíxel. Esto implica que para no perder la precisión obtenida, se debe realizar una interpolación de la intensidad a valores no enteros de posiciones. Aunque Matlab tiene las funciones de interpolación implementadas adecuadamente, el

resultado de la interpolación y del error en el cálculo del centro se obtiene al analizar en detalle la distribución de fase obtenida al final de la conversión. Si hay un error en el cálculo del centro o se introduce en la interpolación un error en la periodicidad de intensidad, la distribución de fase no sería un plano inclinado. El plano inclinado mostrado en la figura 14, después de realizar el proceso de conversión de franjas radiales a rectangulares, tiene un ajuste lineal de por mínimos cuadrados dado por la ecuación:

$$\phi = 20,003\theta + 0,000003r - 62,832 \quad (15)$$

El error promedio obtenido fue de 0.0003 radianes que corresponde a la desviación estándar entre el valor experimental y el valor teórico. El error promedio del orden de 10^{-4} radianes y una pendiente de $3 \cdot 10^{-6}$ con r , indica que las franjas son paralelas al eje theta y poseen un comportamiento lineal.

Por otro lado el procedimiento de extracción de fase usando el algoritmo de la transformada de Fourier no genera inconvenientes debido a que el sistema de franjas se ajusta al caso ideal de procesamiento: Franjas paralelas sin distorsiones, máximo contraste de franjas y relación señal a ruido máxima debido a que se buscan las mejores condiciones experimentales para obtener una buena calidad en la imagen. Estas condiciones aunque son las más apropiadas para el tratamiento matemático, en especial el procedimiento de corrección de fase, son las que se obtienen en las condiciones experimentales que se fijan para la aplicación inicial que se desea darle al sistema de franjas radiales: Medida de rotaciones y traslaciones de objetos con alta precisión. El análisis preliminar experimental de esta aplicación se mostrará en el capítulo siguiente.

3.4. CÁLCULO DEL CENTRO DEL SISTEMA RADIAL DE FRANJAS

Esta propuesta de cálculo está orientada a la detección del centro de una rejilla radial en cualquier punto del espacio en una imagen simétrica con ruido, partiendo del concepto que una imagen se puede dividir en una parte simétrica y en otra antisimétrica, cuyas Transformadas de Fourier son puramente real y puramente imaginaria. Con el concepto básico del centro de un objeto simétrico, se pueden calcular puntos imagen los cuales minimicen la energía de la parte antisimétrica. Ya que el objeto es perfectamente simétrico, la energía residual después de que se ha centrado en la imagen, de acuerdo con los cambios ordenador, sólo será debido al ruido de imagen.

El algoritmo aplica ponderaciones del módulo para determinar la pendiente y la orientación de este plano de fase en el espectro de la imagen, un cálculo del centro de la rejilla radial será mostrado al final con su respectivo centro.

3.4.1. Definición del centro de un objeto

Sea $f(x,y)$ una imagen de un objeto casi simétrico centrado en un punto de coordenadas (x_0, y_0) . Se tienen $M \times N$ muestras $f(i, j)$, $i = 0, \dots, M-1$ y $j = 0, \dots, N-1$, de una imagen digital. El cambio espacial del objeto respecto al centro de la imagen se escribe como se muestra a continuación por los ejes X y Y, tomando la unidad como el paso simple de muestra:

$$\delta_X = \frac{M-1}{2} - x_0 \quad (16)$$

$$\delta_Y = \frac{N-1}{2} - y_0$$

Como x_0, y_0 , son valores reales, se puede señalar que δ_X y δ_Y , no son integrales múltiples del paso muestreado.

Para el caso unidimensional, la función real pura $f(x, y)$, puede ser escrita como la suma de una función simétrica y una función antisimétrica:

$$\begin{aligned} f_{simétrica}(x_o + x, y_o + y) &= f_{simétrica}(x_o - x, y_o - y) \\ f_{antisimétrica}(x_o + x, y_o + y) &= -f_{simétrica}(x_o - x, y_o - y) \end{aligned} \quad (17)$$

Computar los cambios en δ_x y δ_y consiste en encontrar el punto (x_o, y_o) el cual minimiza la energía de la parte antisimétrica de la imagen.

$$E_{antisimétrica} = \iint_{-\infty}^{\infty} [f_{antisimétrica}(x, y)]^2 dx dy \quad (18)$$

Si se llama $F(u, v)$ la transformada de Fourier de $f(x, y)$ y $imag[F(u, v)]$ su parte imaginaria, se puede deducir del Teorema de Parseval:

$$E_{antisimétrica} = \iint_{-\infty}^{\infty} [imag[F(u, v)]]^2 du dv \quad (19)$$

La condición de un valor mínimo para la $E_{antisimétrica}$ es la definición básica del centro de un objeto usado en el presente algoritmo para sumas de cambios espaciales δ_x y δ_y solo se debe al ruido de la imagen.

3.4.2. Componentes de clasificación de frecuencias

Sea F la Transformada de Fourier Discreta 2D de la matriz. F es una matriz de $M \times N$ con componentes $F(k, l)$, con $-\frac{M}{2} \leq k \leq \frac{M}{2}$ y $-\frac{N}{2} \leq l \leq \frac{N}{2}$. Ahora se definirá un nuevo orden específico para esta matriz de componentes espectrales. La lista de estos elementos están ordenados en un vector, a partir de la frecuencia nula y avanzando hacia las frecuencias mas altas. Cada componente llamada $F(p)$, es

clasificada de acuerdo a su distancia respecto a la frecuencia nula (0, 0), de la matriz F:

$$[F(\mathbf{0}), F(\mathbf{1}), F(\mathbf{2}), \dots, F(\mathbf{P}-2), F(\mathbf{P}-1), F(\mathbf{P})] \equiv$$

$$\left[F(\mathbf{0}, \mathbf{0}), F(\mathbf{1}, \mathbf{0}), F(\mathbf{0}, \mathbf{1}), \dots, F\left(\frac{M}{2}-1, -\frac{N}{2}+\right), F\left(\frac{M}{2}-1, \frac{N}{2}-\right), F\left(-\frac{M}{2}+, \frac{N}{2}-1\right) \right] \quad (20)$$

En el sistema de coordenadas centrado sobre la frecuencia nula (0, 0), los puntos F(p), con coordenadas (k_p, l_p) están organizados en el orden de la desigualdad:

$$\sqrt{k_p^2 + l_p^2} \leq \sqrt{k_{p+1}^2 + l_{p+1}^2} \quad (21)$$

Además, considerando las propiedades de simetría del espectro de una imagen real, se pueden conservar solamente P elementos para los cálculos. La energía $E_{antisimétrica}$ necesaria para reducir al mínimo se convierte en $S_{antisimétrica}$ en el caso discreto.

$$S_{antisimétrica} = \sum_{p=0}^P (\text{imag}[F(p)])^2 \quad (22)$$

De esta manera aunque la imagen es bidimensional, la exploración se realiza unidimensional.

3.4.3. Cálculo de la orientación de la fase del plano

El espectro de la imagen antes de centrar F (u, v), se puede escribir como una función del espectro de la imagen después de centrado $F_{x_0, y_0}(u, v)$

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = e^{2\pi i(u\delta_x + v\delta_y)} F_{x_0, y_0}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad , \quad (23)$$

o en la forma discreta:

$$F(\mathbf{k}_p, \mathbf{l}_p) = e^{i(k_p\phi_x + l_p\phi_y)} F_{x_0, y_0}(\mathbf{k}_p, \mathbf{l}_p) \quad , \quad (24)$$

con:

$$\phi_x = \frac{2\pi}{M} \delta_x, \quad \phi_y = \frac{2\pi}{N} \delta_y, \quad (25)$$

Los valores ρ_p y φ_p son el módulo y la fase del p-ésimo elemento espectral en F, en el orden indicado anteriormente. Este último ofrece:

$$F_{x_0, y_0}(\mathbf{p}) = \rho_p e^{i(\varphi_p - k_p\phi_x - l_p\phi_y)} \quad (26)$$

El espectro del objeto centrado F_{x_0, y_0} cumple la condición $S_{antisimétrica}$ mínima. Por lo tanto la ecuación (22) se convierte en:

$$S_{antisimétrica} = \sum_{p=0}^p \rho_p^2 [\text{sen}(\varphi_p - k_p\phi_x - l_p\phi_y)]^2 \quad (27)$$

Ya que el espectro F_{x_0, y_0} es casi real, cada función seno de esta suma es muy pequeña comparada con 1, y puede ser simplificada en el primer orden por su argumento. Esta aproximación no es válida para aquellos puntos del espectro el cual tiene una parte real pequeña pero estos puntos entonces tienen un módulo pequeño. Gracias a la ponderación de los módulos al cuadrado en la ecuación 26, el error resultante de estos componentes sigue siendo insignificante. Por lo tanto, se puede introducir la siguiente aproximación sobre cada función seno de la sumatoria:

$$S_{antisimétrica} = \sum_{p=0}^p \rho_p^2 [\varphi_p - n_p \pi - k_p\phi_x - l_p\phi_y]^2, \quad (28)$$

donde n_p es un entero.

$S_{antisimétrica}$ es mínima si las dos derivadas parciales versus ϕ_X, ϕ_Y son nulas:

$$\begin{cases} \frac{\partial S_{antisimétrica}}{\partial \phi_X} = 0 = -2 \sum_{p=0}^p k_p \rho_p^2 (\varphi_p - n_p \pi - k_p \phi_X - l_p \phi_Y) \\ \frac{\partial S_{antisimétrica}}{\partial \phi_Y} = 0 = -2 \sum_{p=0}^p l_p \rho_p^2 (\varphi_p - n_p \pi - k_p \phi_X - l_p \phi_Y) \end{cases} \quad (29)$$

Esto da 2 sistemas de ecuaciones para ϕ_X y ϕ_Y :

$$\begin{cases} \phi_X = \frac{\sum_{p=0}^p k_p \varphi_p \rho_p^2 - \sum_{p=0}^p k_p \pi n_p \rho_p^2 - \sum_{p=0}^p k_p \phi_Y l_p \rho_p^2}{\sum_{p=0}^p k_p^2 \rho_p^2} \\ \phi_Y = \frac{\sum_{p=0}^p l_p \varphi_p \rho_p^2 - \sum_{p=0}^p l_p \pi n_p \rho_p^2 - \sum_{p=0}^p k_p \phi_X l_p \rho_p^2}{\sum_{p=0}^p l_p^2 \rho_p^2} \end{cases} \quad (30)$$

El sistema se puede resolver fácilmente tan pronto como todos los números enteros n_p se conozcan. Sin embargo, el único valor de la p -ésima parte de la fase no es suficiente para determinar n_p si la imagen es ruidosa, en particular para los elementos a los cuales les corresponden módulos bajos. Por lo tanto, las fases ϕ_X, ϕ_Y se calculan mediante un algoritmo que analiza los puntos de fase en el orden creciente de frecuencias. A cada iteración p , el algoritmo calcula el valor del siguiente punto de fase, se deriva el n_p entero correspondiente y corrige su estimación del valor ponderado de φ_p .

3.5. ALGORITMO

3.5.1. Primera etapa: algoritmo de inicialización

Para una primera aproximación de ϕ_X, ϕ_Y , son usadas las primeras 3 componentes espectrales ($p=0, 1, 2$). Es de notarse que φ_0 es nula, porque la imagen $f(i, j)$ es real y positiva pura. Las primeras estimaciones de acuerdo a X ($p=1$, es decir, $k=1$, $l=0$) y Y ($p=2$, es decir, $K=0$ y $l=1$), están escritas de la siguiente manera:

$$\phi_X^1 = \varphi_1 - n_1\pi \quad (31)$$

$$\phi_Y^2 = \varphi_2 - n_2\pi$$

Todos los valores de φ_p se incluyen entre $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$, n_1 y n_2 son nulos si ϕ_X, ϕ_Y son también incluidos entre $\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$, los cuales implican que el pre- centro del objeto es tal que:

$$-\frac{M}{4} < \delta_X < \frac{M}{4} \quad (32)$$

$$-\frac{N}{4} < \delta_Y < \frac{N}{4}$$

Por lo tanto, estas tres componentes espectrales permiten obtener una primera aproximación de la orientación del plano de fase caracterizando el espectro de un objeto simétrico.

3.5.2. Etapas sub – siguientes

A cada repetición de p , el sistema de ecuaciones 29 se está resolviendo mediante la actualización de cada suma con el nuevo término espectral $F(p)$ que es tenido en cuenta. Al realizar esta actualización, es necesario conocer el entero n_p asociado con el elemento de fase φ_p . Este entero es elegido para minimizar el término p en la suma del sistema de ecuaciones 28:

$$n_p \cong \frac{(\varphi_p - k_p\phi_X - l_p\phi_Y)}{\pi} \quad (33)$$

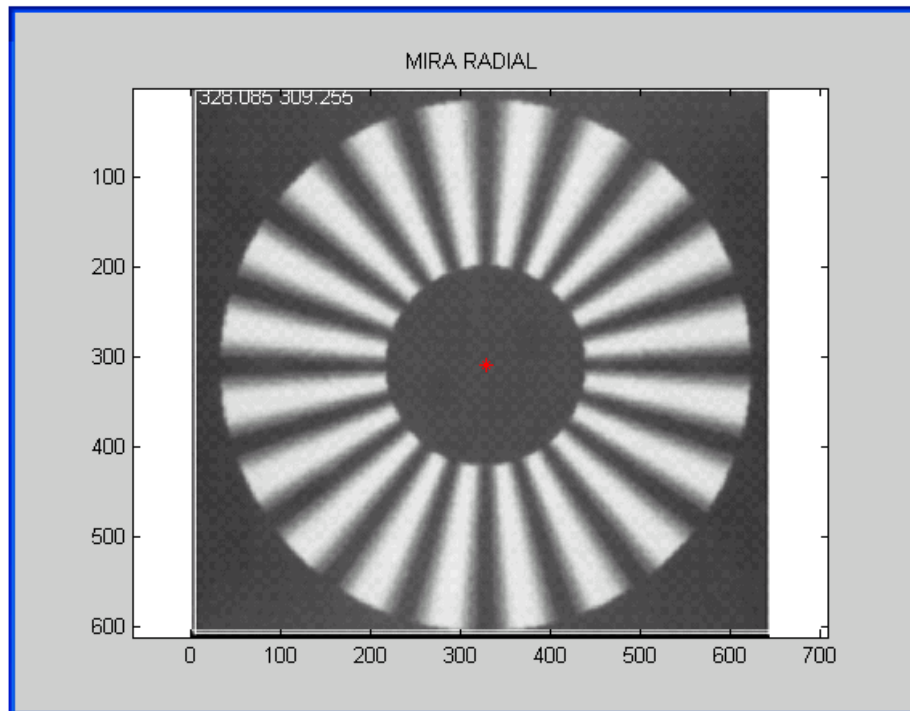
Las estimaciones ϕ_X^{p-1} y ϕ_Y^{p-1} sumadas a las repeticiones anteriores $p-1$ son usadas por ϕ_X, ϕ_Y y n_p es elegido como el entero para el cual se obtiene una mejor aproximación a la ecuación 32:

$$n_p \cong \frac{(\varphi_p - k_p \varphi_x^{p-1} - l_p \varphi_y^{p-1})}{\pi} \quad (34)$$

El entero n_p es determinado, φ_x^p y φ_y^p son sumados usando el sistema de ecuaciones 29 los cuales involucran ponderaciones basadas en módulos.

Esta etapa se repite hasta la última. Este algoritmo se ha aplicado a la imagen experimental de la rejilla radial de la figura 13, y se muestra en la figura 15.

FIGURA 15. Cálculo del centro de una imagen experimental de la rejilla radial



Haciendo énfasis en el cálculo del centro de la rejilla radial, al final se logra mostrar que la figura simétrica con ruido permite detectar su centro minimizando la parte antisimétrica. El algoritmo determina el mejor plano entre los valores espectrales de la fase envueltos. Para tener en cuenta la veracidad de los datos, estos valores son ponderados por su correspondiente módulo.

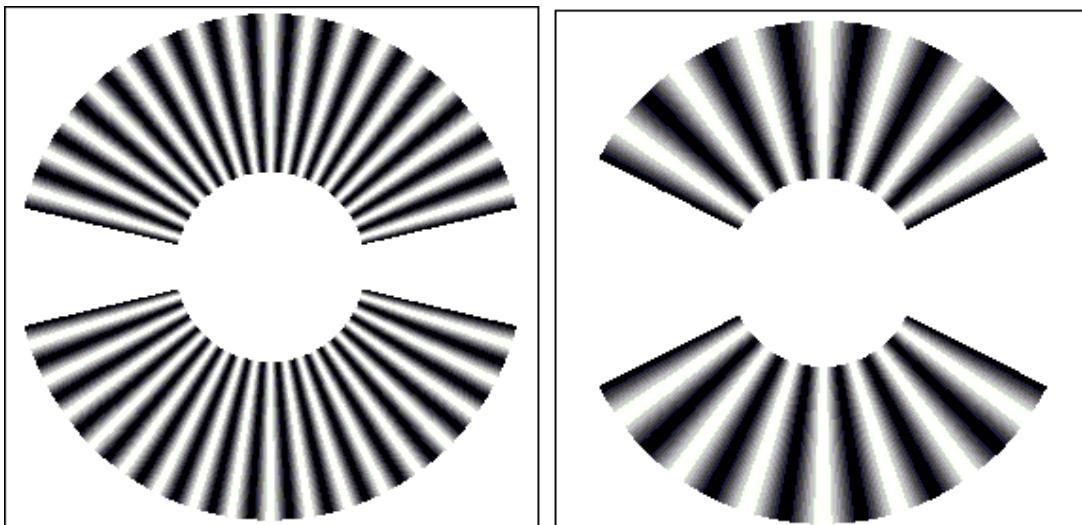
4. ANÁLISIS DE ROTACIONES Y POSICIONES: APLICACIÓN INICIAL DEL POSICIONAMIENTO GLOBAL EN EL ESPACIO 2D

Una aplicación con una imagen experimental en el capítulo anterior, demostró que con el algoritmo propuesto se puede recuperar completamente la fase de una rejilla radial. También se comprobó que otras condiciones aplicadas al algoritmo permiten calcular el centro de la rejilla radial a precisión subpíxel, tomando la hipótesis de que la Transformada de Fourier de una función par es real, debido a la simetría de la rejilla radial. La posición 2D del centro minimiza el contenido imaginario de la Transformada de Fourier; la fase de Transformada de Fourier de una imagen par no centrada es un plano inclinado donde se tienen valores de pendientes en X y Y. Si se determinan las pendientes de la fase de la Transformada de Fourier de la imagen de la mira radial se determinan x_0 y y_0 que corresponden a las coordenadas del centro de la mira. Un procedimiento de optimización para el ajuste del mejor plano inclinado en términos de mínimos cuadrados es realizado para minimizar la influencia del ruido. En este capítulo se realizarán los ajustes necesarios para emplear el anterior tratamiento matemático con el fin de calcular alteraciones en la posición angular y espacial de un cuerpo en el plano 2D. A partir de un montaje similar al usado en el capítulo anterior, se generarán desplazamientos angulares y espaciales a la rejilla radial conocidos. Desde el procesamiento digital de imágenes se calcularán estas alteraciones. El cálculo de error determinará la efectividad y precisión del procedimiento de medida.

4.1 REJILLAS RADIALES EXPERIMENTALES PARA DESPLAZAMIENTOS Y VARIACIONES ANGULARES

Se usaron dos rejillas radiales de diferente paso como las mostradas en la figura 16. Para cada una corresponde un paso angular de (a) $\pi/33$, (b) $\pi/10$. Como se mostrará en la sección siguiente, fue necesario introducir discontinuidades o sectores angulares sin franjas. Los sectores fueron ubicados simétricamente con el fin de conservar la simetría para el cálculo de las coordenadas del centro. De igual forma las posiciones angulares de los sectores angulares sin franjas permite hacer un seguimiento a la fase cuando la rejilla cambia de posición en el espacio. De esta forma se puede asignar una fase absoluta y medir alteraciones angulares y espaciales de la rejilla.

FIGURA 16. Rejillas radiales de diferente paso angular: (a) Paso de $\pi/33$, (b) Paso de $\pi/10$



4.2 ANÁLISIS DE ROTACIONES Y POSICIONES

En esta etapa del trabajo, se tomaron 2 series de imágenes experimentales para las rejillas mostradas en la figura 16 en rotación y traslación: Para la rejilla radial de paso angular $\pi/33$ se tomaron 6 imágenes en traslación y 5 imágenes en rotación; para la rejilla radial de paso $\pi/10$ se tomaron 6 imágenes en traslación y 3 en rotación. Para evaluar experimentalmente el procedimiento de demodulación de un sistema de franjas radiales se realizó el montaje indicado en las figuras 11a, 11b y 11c. La mira o rejilla radial se ubicó en un sistema de traslación manual de 10 micras de precisión y sistema de rotación manual de $2'$ de precisión. Se tomaron varios registros introduciendo desplazamientos y rotaciones conocidos. El montaje experimental completo se muestra en la figura 11a. Consta de un sistema de proyección: 2 lámparas de luz blanca; un sistema de observación: cámara USB; un sistema de adquisición y almacenamiento de datos: computador; y el objeto a evaluar: mira ó rejilla radial. Las figuras 11b y 11c muestran en detalle las platinas de rotación y traslación y la cámara USB usada.

El tratamiento dado a las imágenes hasta ahora es el cálculo del centro, transformación de coordenadas y recuperación de la fase. Sin embargo, con el fin de realizar medidas de posición en 2D (ángulo y posición) usando la rejilla radial fue necesario adicionar varias etapas al algoritmo de procesamiento. A continuación se muestra en detalle las etapas más importantes utilizadas en el algoritmo:

4.2.1. Cálculo del centro de la rejilla radial: El cálculo del centro de la rejilla radial, es un variable importante, para determinar su posición en el espacio en casos donde exista rotación ó desplazamientos, a precisión subpixel. El algoritmo emplea la hipótesis: “La Transformada de Fourier (TF) de un función par es real”. La simetría de la imagen se conserva en todo momento, luego la posición 2D del centro debe minimizar el contenido imaginario de la Transformada de Fourier. De igual forma:

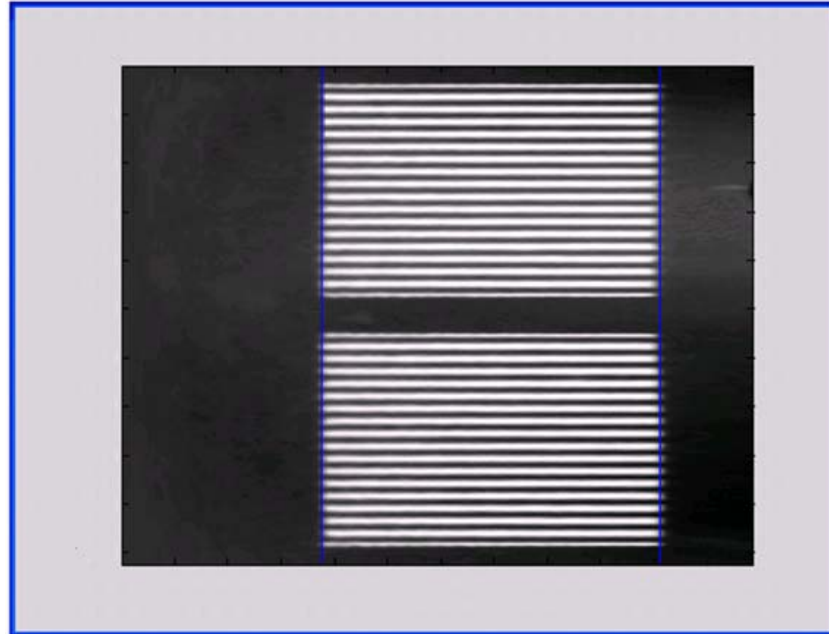
$$TF\{f(x - x_0, y - y_0)\} = TF\{f(x, y)\}e^{-i2\pi(ux_0 + vy_0)} \quad (34)$$

La fase de la Transformada de Fourier de una imagen par no centrada es un plano inclinado donde las pendientes en X y Y están dadas por: $2\pi x_0$, $2\pi y_0$. Determinando las pendientes de la fase de la Transformada de Fourier de la imagen de la mira radial se determinan x_0 y y_0 que corresponden a las coordenadas del centro de la mira. Un procedimiento de optimización para el ajuste del mejor plano inclinado en términos de mínimos cuadrados es realizado para minimizar la influencia del ruido.

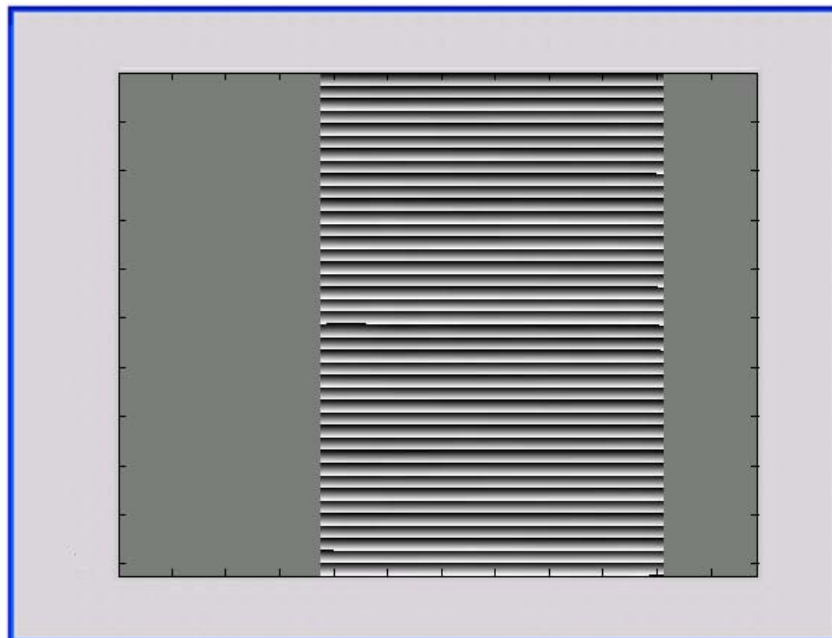
4.2.2. Cálculo de la fase discontinua

Con el centro (x_0, y_0) se realiza la transformación de las franjas de la rejilla de forma radial a rectangular en coordenadas polares, usando la ecuación 13. La figura 17a muestra la imagen típica obtenida al realizar la transformación sobre una imagen de la rejilla como la mostrada en la figura 16a. Empleando el algoritmo de la Transformada de Fourier se obtiene la fase discontinua, ver figura 17b.

FIGURA 17a. Sistema de franjas rectangulares en coordenadas polares



17b. Fase discontinua de 17a



4.2.3 Cálculo de la máscara

La figura 17a muestra 2 sectores con información discontinua de fase. Es necesario definir una máscara para realizar la corrección de la fase recordando que las columnas corresponden a radios y las filas a ángulos, deben existir 2 valores de radios entre los cuales hay valores de fase correctos y 4 posiciones angulares que delimitan los sectores angulares sin franjas. Según la ecuación 6 la fase de la función $C(x, y)$ corresponde a la fase del sistema de franjas y la amplitud determina la función $\frac{A(x,y)}{2}$, que corresponde al contraste de las franjas. La figura 17c muestra el valor de la función contraste $A(x, y)$. Valores altos corresponden a regiones donde hay franjas. Se identifican visualmente las regiones de franjas. La máscara debe obtenerse al binarizar la función contraste. La ventaja de introducir sectores donde existen las franjas es que permite fijar el número de discontinuidades $\pm\pi$ o número de franjas negras. Así cada región tiene 17 franjas negras para la figura 17a luego deben haber 17 discontinuidades $\pm\pi$. El umbral de binarización se escoge de tal manera que en cada región hallan 17 discontinuidades de $\pm\pi$ (o 7 discontinuidades para la figura 16b). La figura 17d muestra la máscara obtenida. Al interior de cada región útil se realiza el proceso de corrección de fase, descrito en el capítulo primero. La figura 17e muestra la fase continua obtenida.

FIGURA 17c. Localización de elementos no nulos, para el sistema de franjas.

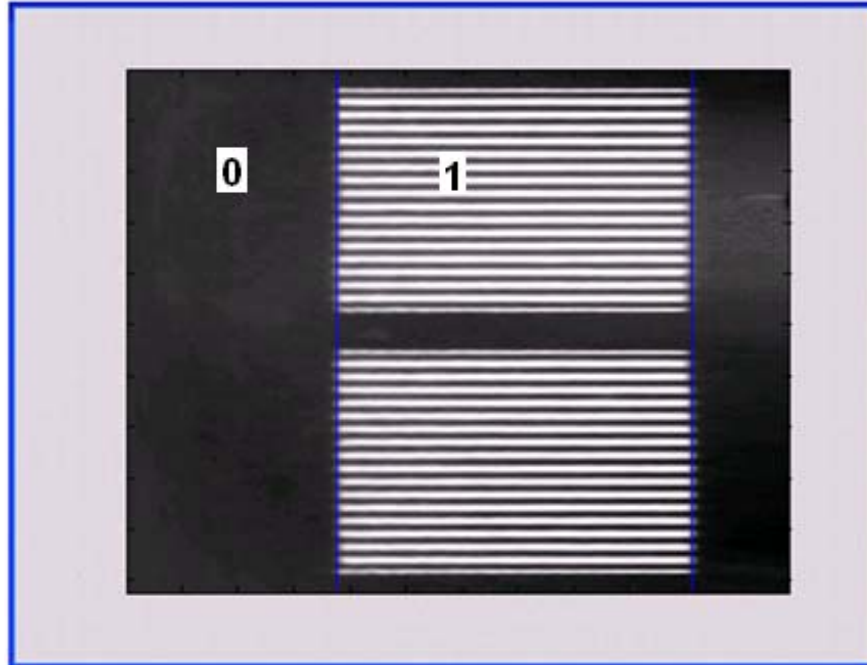


Figura 17d. Proceso de corrección de fase

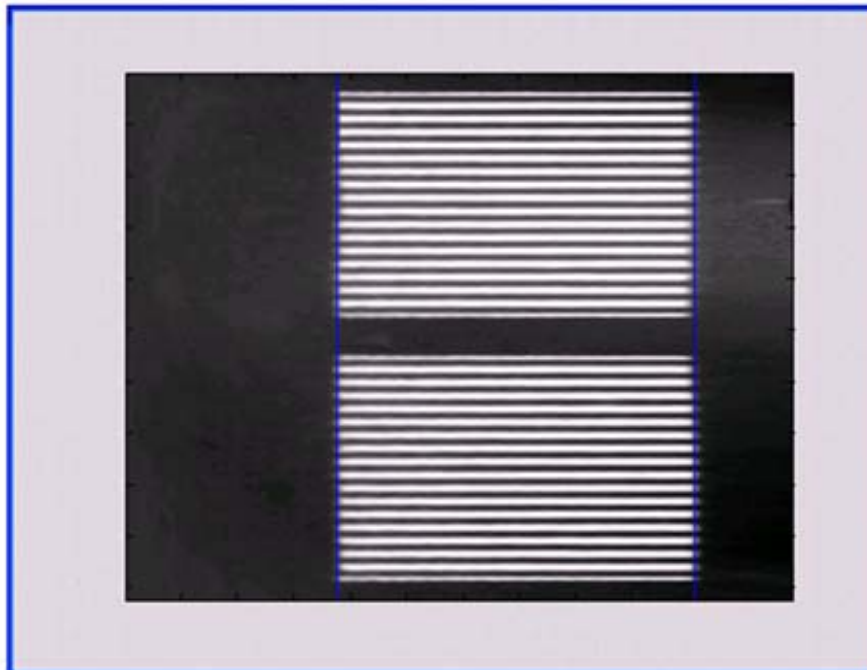
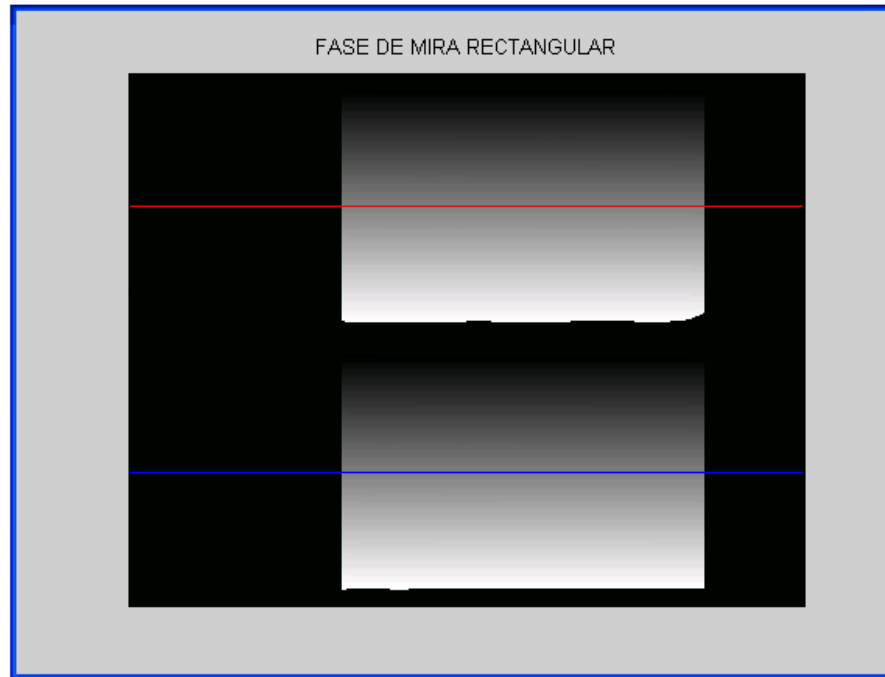


Figura 17e. Fase continua obtenida



4.2.4 DETERMINACIÓN DE LÍNEAS CENTRALES DE FRANJAS NEGRAS

Las fases obtenidas en las 2 secciones angulares anteriores son las fases relativas puesto que dependen del procedimiento de corrección de fase. Sabiendo que la máscara define 4 posiciones angulares donde hay franjas y entre 2 consecutivas debe contener 17 discontinuidades (o 7 para la otra rejilla), es posible adicionar $\pm N\pi$ para ajustar que la novena franja tenga un valor de 0 radianes y corresponde a la línea central de cada sector donde hay franjas. Debido a la discretización de la rejilla el valor de 0 radianes en cada sector debe ser interpolado, que en la figura 17e debe corresponder a 2 líneas rectas. Realizando un ajuste lineal se obtiene para la figura 17e las ecuaciones:

$$\theta = 3.144e^{-5}r + 89.88, \quad \theta = 7.87e^{-4}r + 269.98, \quad (35)$$

Los valores de θ están en grados y r en pixeles. Se observa que la pendiente m es del orden de 10^{-5} lo cual implica un comportamiento horizontal de la línea. Esto se debe a que el cálculo del centro de la rejilla radial fue calculado correctamente, para obtener una fase lineal. El intercepto C define el valor angular donde se ubica la línea central sobre la rejilla radial. Este valor es obtenido a precisión subpixel debido a la interpolación realizada. Nótese que al rotar la rejilla las posiciones angulares de las líneas centrales cambian pero a partir del borde de discontinuidad de cada sector angular donde hay franjas se conoce el número de la franja negra para llegar hasta el centro del sector. La figura 17e muestra las 2 líneas centrales interpoladas.

4.3. DATOS EXPERIMENTALES

4.3.1 Calibración del sistema de adquisición: centros, pendientes e interceptos.

En la sección anterior se mostró el sistema de calibración para el caso del centro de la rejilla radial que está dado en pixeles y que su factor de conversión de $1/6$ mm/píxel, con este factor se convierte pixeles a mm. El valor de las pendientes e interceptos están dados en radianes/pixeles y su respectivo factor de conversión es $(6 * 180/\pi)$ grados/mm.

En las siguientes tablas se mostrarán los datos adquiridos en laboratorio, sus respectivas imágenes y el tratamiento dado en el software.

4.3.2 DATOS DE TRASLACIONES:

4.3.2.1 Rejilla radial de paso angular de $\pi/33$

Las direcciones de las platinas definen los ejes (x, y) de traslación. La tabla 2 muestra los datos obtenidos para la rejilla en la posición inicial de referencia para medir traslaciones. (x_0, y_0) corresponde a la posición del centro obtenido del algoritmo y convertido a mm. La pendiente m y el intercepto corresponden a los valores del ajuste cuadrático de las líneas centrales de los sectores angulares donde hay franjas. La figura 18 muestra las imágenes intermedias obtenidas del procesamiento. La tabla 3 muestra los desplazamientos realizados en (x, y) y los principales datos obtenidos para las imágenes adquiridas.

TABLA 2. Datos de la posición de referencia de la rejilla radial de paso angular $\pi/33$

TRASLACIÓN (mm)		
x	0	
y	0	
X ₀	53,088949	
Y ₀	40,9516887	
m	3,144E-05	7,87E-04
c	89,8854087	269,988541
ARCHIVO	Radial0_0	

FUENTE: Autor

FIGURA 18. Posición inicial de la rejilla radial de paso angular $\pi/33$

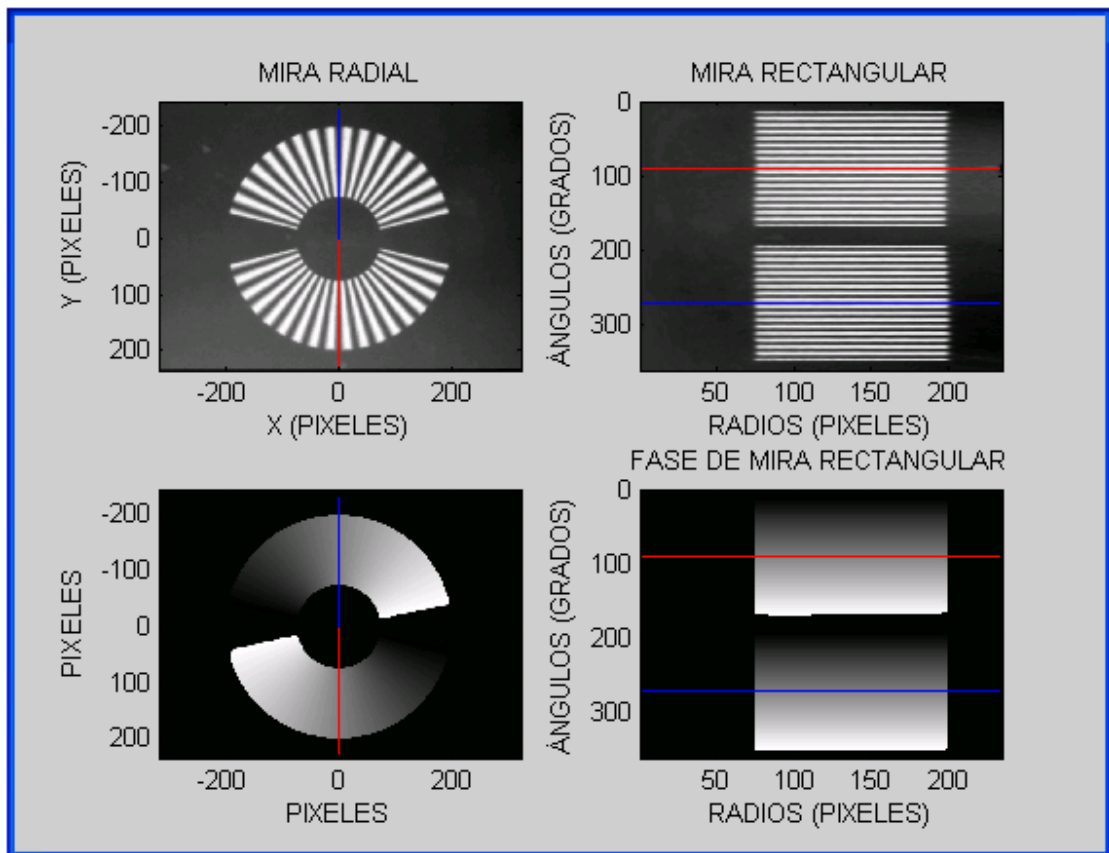
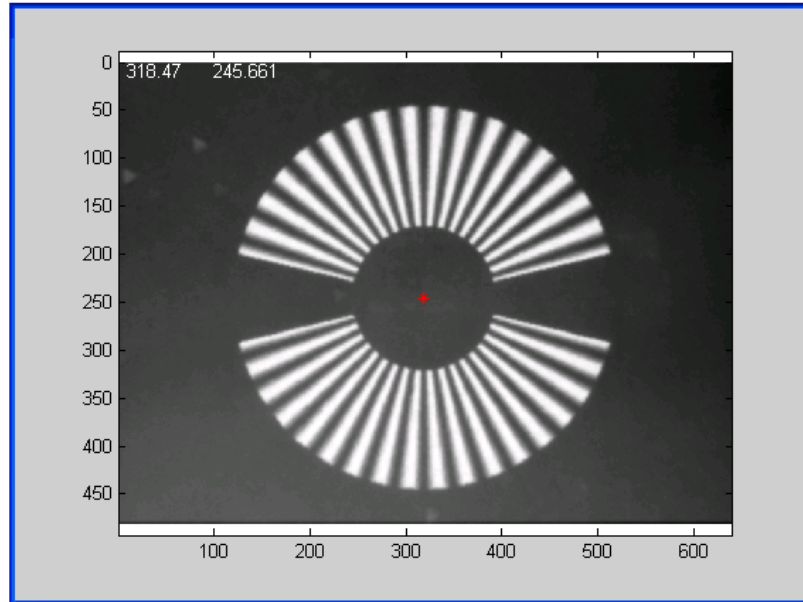


TABLA 3. Datos obtenidos en el laboratorio rejilla radial de paso angular $\pi/33$

FUENTE: Autor

ARCHIVO	DESPLAZAMIENTO (mm)	(X ₀ , Y ₀) (mm)	LÍNEA ROJA $\theta=mr+c$	LÍNEA AZUL $\theta=mr+c$
RADIAL0_0	(0,0)	(53.078, 40.943)	0,0031r+89.88	0.00078r+269.98
RADIAL0_1	(0,-1)	(53.077, 41.946)	0,0030r+89.89	0.00061r+269.99
RADIAL0_2	(0,-2)	(53.074, 40.974)	0,0031r+89.89	0.00068r+269.99
RADIAL0_3	(-1,0)	(52.087, 40.944)	-0,00045r+89.97	-0.00034r+270.01
RADIAL0_4	(-2,0)	(51.099, 40.933)	-0,00155r+90.01	-0.00081r+269.96
RADIAL0_5	(-2,-2)	(51.093, 42.931)	0,00120r+89.96	0.00289r+269.92

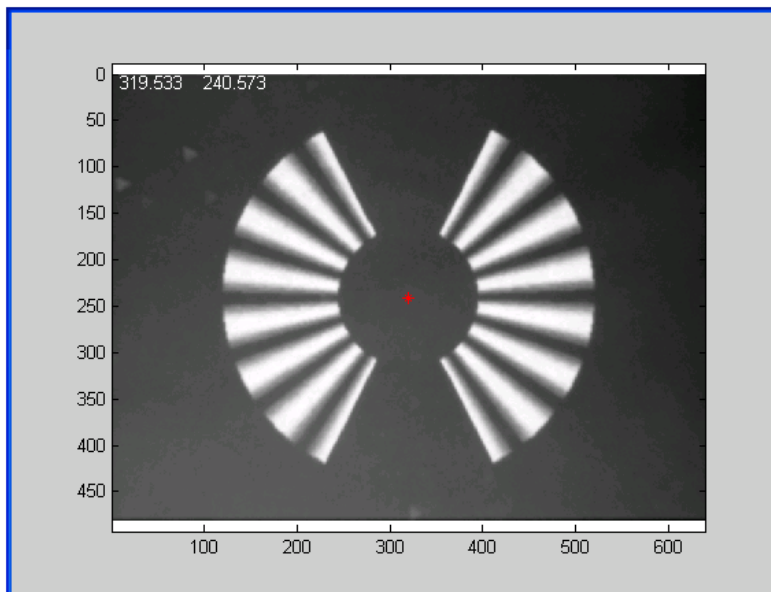
FUENTE: Autor

4.3.2.2. Rejilla de paso angular de $\pi/10$: La figura 19 y las tablas 4 y 5 muestran los datos obtenidos para el caso de la rejilla radial de paso angular $\pi/10$.

TABLA 4. Datos de la posición de referencia de la rejilla radial de paso angular $\pi/10$

TRASLACIÓN (mm)		
x	0	
y	0	
X ₀	53,2661511	
Y ₀	40,1035191	
m	5,08E-05	-8,14E-05
c	270,240642	90,5213904
ARCHIVO	Radial1_0	

FIGURA 19. Posición inicial de la rejilla radial de paso angular $\pi/10$



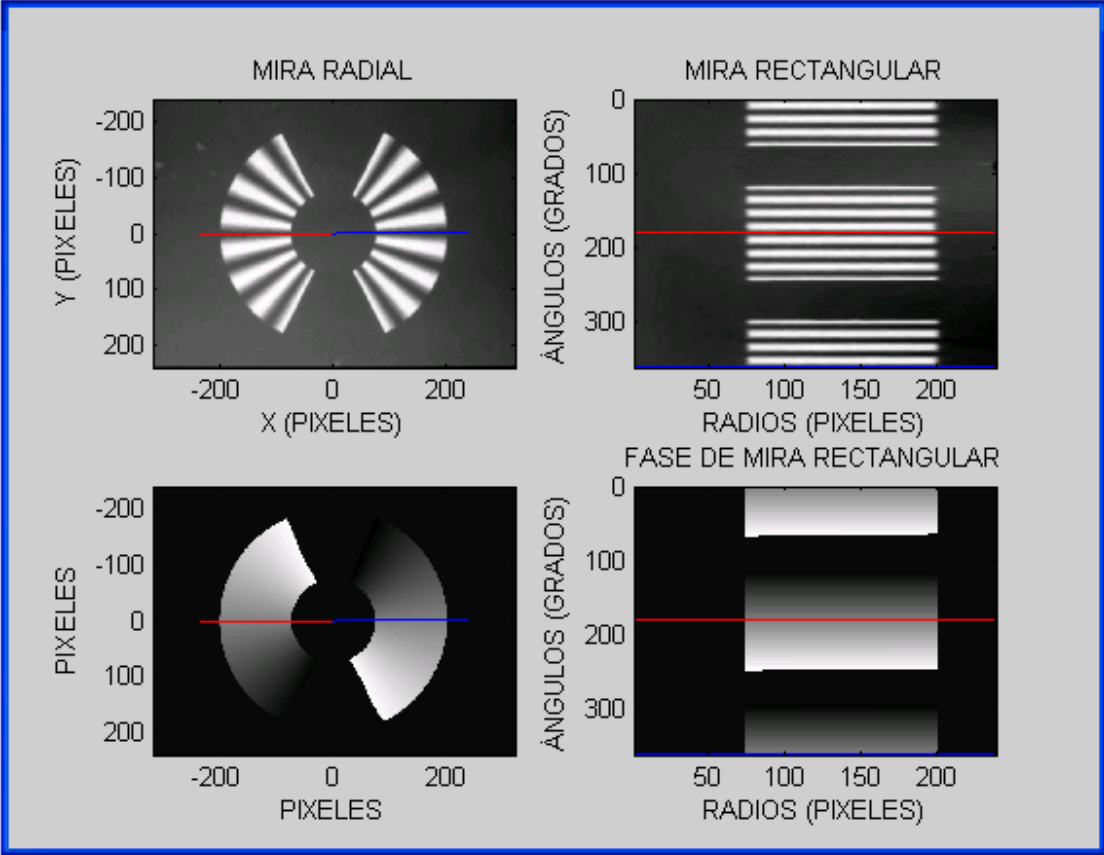


TABLA 5. Datos obtenidos en laboratorio de traslaciones rejilla radial de paso angular $\pi/10$

ARCHIVO	DESPLAZAMIENTO (mm)	(X ₀ , Y ₀) (mm)	LÍNEA ROJA y=mx+b	LÍNEA AZUL y=mx+b
RADIAL1_0	(0,0)	(53.266, 40.103)	-0,0029x+90.52	0.0018x+270.24
RADIAL1_1	(0,-1)	(53.264, 41.091)	0,0142x+90.08	0.0151x+269.95
RADIAL1_2	(0,-2)	(53.262, 42.086)	0,0151x+90.04	0.0137x+270
RADIAL1_3	(-1,0)	(52.264, 40.082)	0,0143x+90.08	0.016x+269.94
RADIAL1_4	(-2,0)	(51.270, 40.095)	-0,0031x+90.538	0.0018x+270.22
RADIAL1_5	(-2,-2)	(51.268, 42.074)	0,00036x+90.40	-0.00157x+270.34

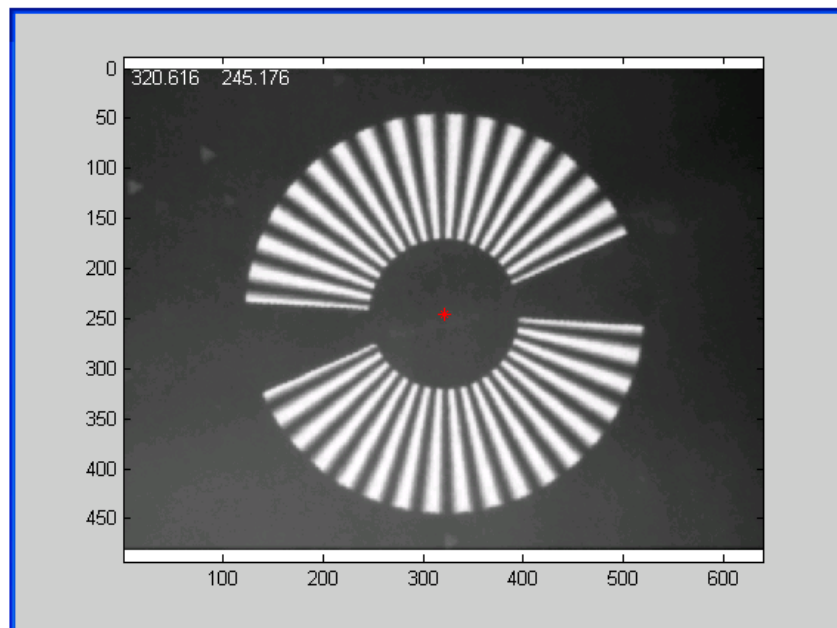
4.3.3. DATOS DE ROTACIONES

4.3.3.1. Rejilla de paso angular $\pi/33$: De igual forma, se tomó una imagen de referencia para el cálculo de variaciones angulares. La tabla 6 muestra los resultados obtenidos del procesamiento realizado a la imagen. La figura 20 muestra las imágenes intermedias del procesamiento. La tabla 7 muestra las variaciones angulares introducidas a la rejilla usando la platina de rotación y los datos calculados usando el algoritmo propuesto.

TABLA 6. Datos de posición de referencia

ROTACIÓN (GRADOS)		
	x=0	y=0
θ	10	
X_0	53,4466872	
Y_0	40,8708392	
m	7,46E-05	3,02E-05
c	79,8701299	259,950344
ARCHIVO	Radial0_6	

FIGURA 20. Posición inicial de la rejilla radial de paso angular $\pi/33$



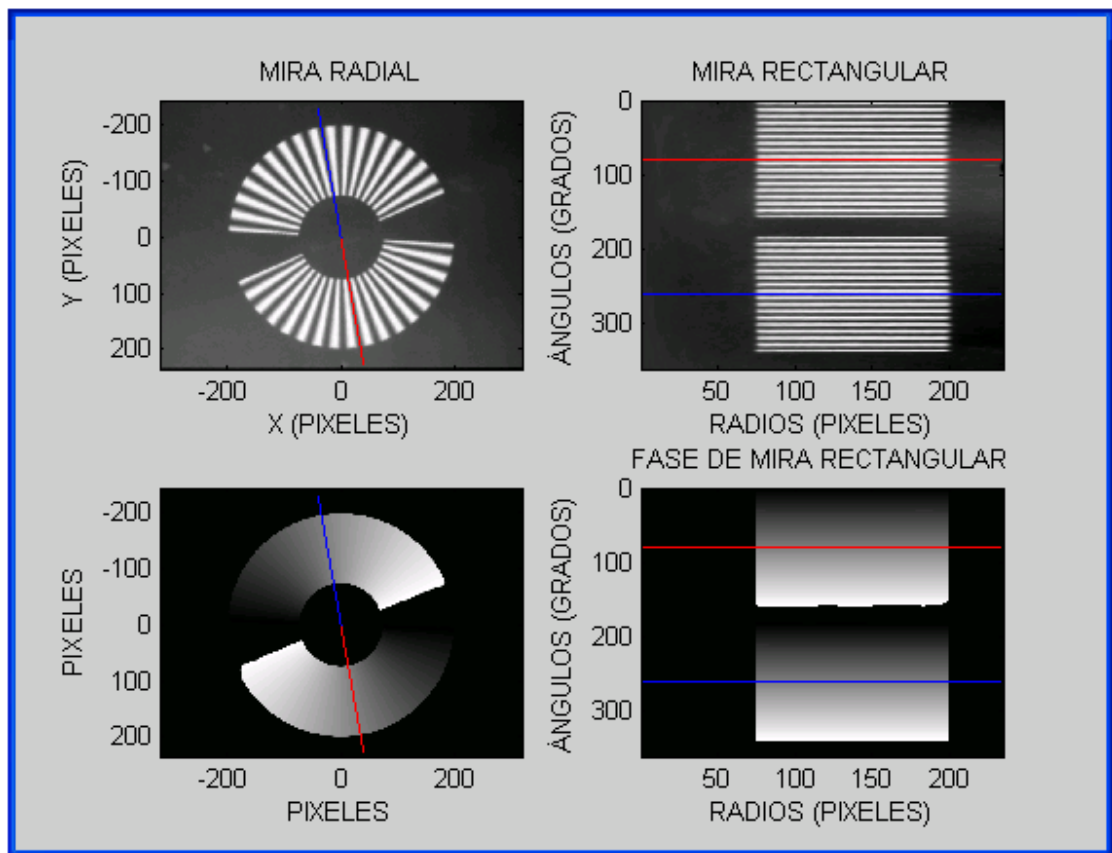


TABLA 7. Datos adquiridos en laboratorio de la rejilla radial de paso angular $\pi/33$

ARCHIVO	VARIACIÓN ANGULAR (GRADOS)	(X ₀ , Y ₀) (mm)	LÍNEA AZUL y=mx+b	LÍNEA ROJA y=mx+b
RADIAL0_6	-10	(53.436, 40.862)	0,0026x+78.87	0.0011x+259.95
RADIAL0_7	-10	(53.757, 40.704)	0,00016x+69.91	0.00099x+249.82
RADIAL0_8	20	(54.305 ,40.252)	0,00041x+49.81	-0.00031x+229.72
RADIAL0_9	40	(54.783, 38.944)	-0,00051x+9.759	-0.00029x+189.74
RADIAL0_1 0	20	(54.752, 38,563)	0.0047x+179.661	-0,001x+359.90
RADIAL0_1 1	-40	(54.035, 37.363)	-0.00254x+139.76	-0,0035x+319.96

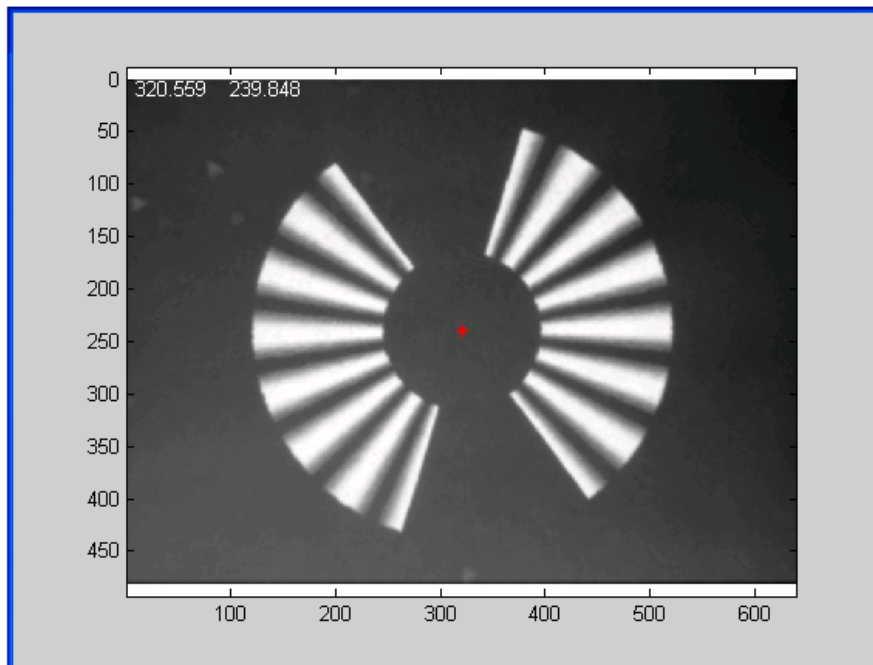
4.3.3.2. Rejilla de paso angular $\pi/10$:

De igual manera se procede con la rejilla de paso angular $\pi/10$.

TABLA 8. Datos de posición de referencia de la rejilla radial de paso angular $\pi/10$

ROTACIÓN (GRADOS)		
	x=0	y=0
θ	-10	
X_0	53,437	
Y_0	39,982	
m	0,00145	0,00152
c	279,740	99,854851
ARCHIVO	Radial1_6	

FIGURA 21. Posición inicial de la rejilla radial de paso angular $\pi/10$



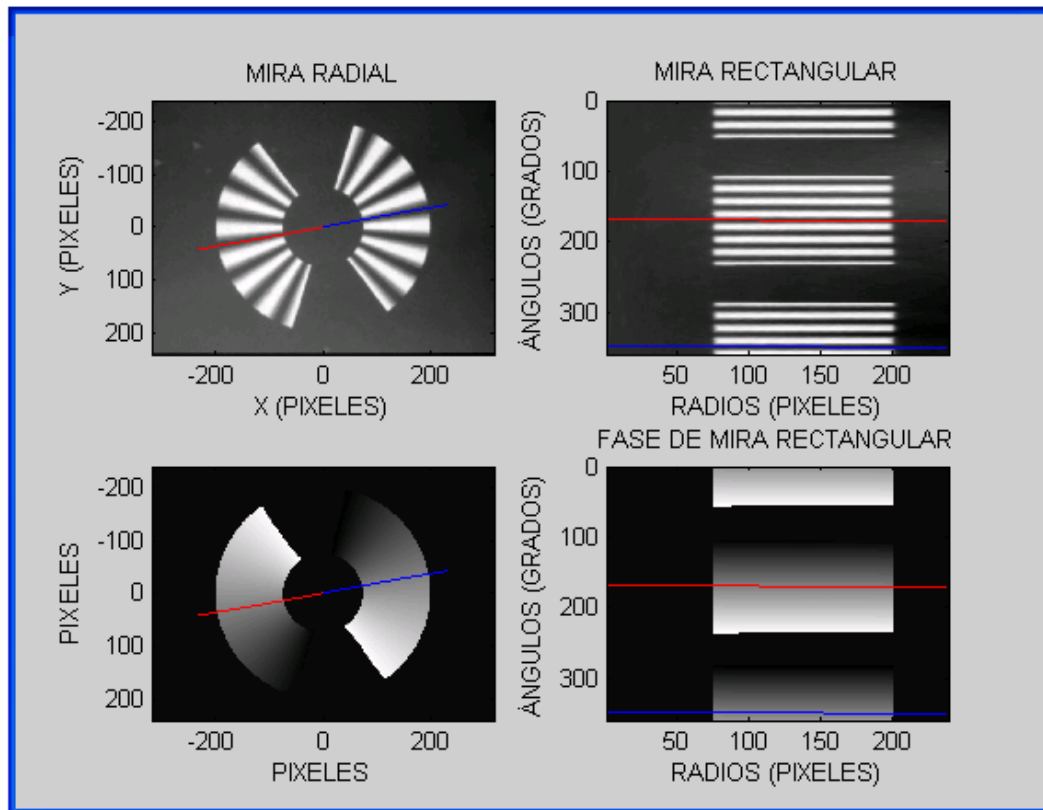


TABLA 9. Datos adquiridos en laboratorio de la rejilla radial de paso angular $\pi/10$

ARCHIVO	VARIACIÓN ANGULAR (GRADOS)	(X_0, Y_0) (mm)	LÍNEA AZUL $y=mx+b$	LÍNEA ROJA $y=mx+b$
RADIAL1_6	-10	(53.437, 39.982)	0,015x+99.85	0.0145x+279.74
RADIAL1_7	-20	(53.598, 39,859)	0,00086x+110.35	-0.0014x+290.15
RADIAL1_8	-60	(53.849, 39.486)	0,0021x+49.81	0.0017x+229.72

4.4. ANÁLISIS DE DATOS

Las tablas 10 y 11 muestran el análisis de los datos obtenidos. El error en el cálculo de la posición del centro de la rejilla, calculado del algoritmo. En las tablas $\Delta X_{0\ exp}$ corresponde a la diferencia entre las coordenadas X del centro de la rejilla de referencia (tabla 2) y rejilla desplazada. $\Delta Y_{0\ exp}$ corresponde a la diferencia de desplazamientos en la coordenada Y. $\Delta X_{0\ teo}$, $\Delta Y_{0\ teo}$ corresponde a los desplazamientos introducidos en los ejes X y Y. El porcentaje de error (% Error) en la tabla corresponde a:

$$\% \text{ Error} = \left| \frac{\text{Distancia teórica} - \text{Distancia experimental}}{\text{Distancia teórica}} \right| * 100\% , \quad (36)$$

las distancias teórica y experimental se calculan como:

$$\begin{aligned} \text{Dist}_{teórica} &= \sqrt{\Delta X_{0\ teo}^2 + \Delta Y_{0\ teo}^2} \\ \text{Dist}_{exp} &= \sqrt{\Delta X_{0\ exp}^2 + \Delta Y_{0\ exp}^2} \end{aligned} \quad (37)$$

4.4.1. Traslaciones: rejilla radial de paso angular $\pi/33$

TABLA 10. Datos teóricos y experimentales de desplazamiento con su respectivo porcentaje de error rejilla de paso angular $\pi/33$

ARCHIVO	Radial0_1	Radial0_2	Radial0_3	Radial0_4	Radial0_5
ΔX_{0exp}	0,001	0,003	0,987	1,988	1,994
ΔY_{0exp}	1,003	2,001	0,003	1,0041	1,987
$\Delta X_{0teórico}$	0	0	1	2	2
$\Delta Y_{0teórico}$	1	2	0	1	2
$ \Delta X_{0teórico} - \Delta X_{0exp} $	0,001	0,003	0,013	0,012	0,006
$ \Delta Y_{0teórico} - \Delta Y_{0exp} $	0,003	0,001	0,003	0,0041	0,013
% X_0	0,3	0,3	0,13	0,6	0,6
% Y_0	0,1	0,05	0,3	0,41	0,65

4.4.2. REJILLA RADIAL DE PASO ANGULAR $\pi/10$

TABLA 11. Datos teóricos y experimentales de desplazamiento con su respectivo porcentaje de error rejilla de paso angular $\pi/10$

ARCHIVO	Radial1_1	Radial1_2	Radial1_3	Radial1_4	Radial1_5
ΔX_{0exp}	0,002	0,0002	1,0015	1,988	1,997
ΔY_{0exp}	0,997	1,998	-0,0213	-0,0085	1,991
$\Delta X_{0teórico}$	0	0	1	2	2
$\Delta Y_{0teórico}$	1	2	0	0	2
$ \Delta X_{0teórico} - \Delta X_{0exp} $	0,002	0,0002	0,0015	0,012	0,003
$ \Delta Y_{0teórico} - \Delta Y_{0exp} $	0,003	0,002	0,0213	0,0085	0,009
% X_0	0,2	0,02	0,15	0,6	0,6
% Y_0	0,3	0,2	0	0,85	0,45

4.4.3. ROTACIONES: REJILLA RADIAL DE PASO ANGULAR $\pi/33$

Para las rotaciones, el error porcentual se debe calcular con los valores de los interceptos que son los que indican el valor angular de la rejilla, y de igual forma que el anterior numeral el valor teórico es el adquirido en el algoritmo cuando se ha tratado la imagen y el valor experimental es el registrado en la platina de rotación.

TABLA 12. Datos teóricos y experimentales de rotación con su respectivo porcentaje de error rejilla de paso angular $\pi/33$

ARCHIVO	Radial0_6	Radial0_7	Radial0_8	Radial0_9	Radial0_10	Radial0_11
$\theta_{exp\ sup}$	10,03	10,096	20,1	40,05	20,084	39,94
$\theta_{exp\ inf}$	10,009	10,03	20,1	39,98	20,01	39,99
$\theta_{teórico}$	10	10	20	40	20	40
$\Delta\theta$	0,03	0,03	0,1	0,05	0,01	0,06
% θ	0,3	0,3	0,49	0,125	0,05	0,025

4.4.4. Rejilla de paso angular $\pi/10$

TABLA 13. Datos teóricos y experimentales de rotación con su respectivo porcentaje de error rejilla de paso angular $\pi/10$

ARCHIVO	Radial1_6	Radial1_7	Radial1_8
$\theta_{exp\ sup}$	9.95	20.05	60.054
$\theta_{exp\ inf}$	9.98	20.041	60.03
$\theta_{teórico}$	10	20	60
$\Delta\theta$	0,05	0,05	0,054
% θ	0,2	0,21	0,05

En este análisis de datos, se puede concluir que se puede confiar en el algoritmo de cálculo de posiciones angulares y espaciales del software, ya que esta

herramienta ha demostrado con datos experimentales que puede usarse para dicho objetivo, puesto que los porcentajes de error no superan el 1% del rendimiento del software. De manera más específica una distancia teórica introducida de 2 mm en X y 2 mm en Y que corresponde a 2.28 mm de distancia se encuentra un error del orden de 10^{-3} , 1 micra. Es decir, se mide una traslación a 20 cm de distancia en un rango de 2.28 mm con un error de 10^{-3} mm. Habría que centrarse principalmente en el cálculo de los centros de la rejilla radial cuando se está desplazando, los porcentajes de error no superan el 1% del rendimiento, este es un resultado muy confiable para dicha aplicación lo que demuestra un funcionamiento óptimo del algoritmo en cuanto a porcentajes de error se refiere.

4.5 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Como se demostró en el numeral anterior, los porcentajes de error de desplazamientos y rotaciones son confiables en cuanto a posicionamiento 2D de una rejilla radial se refiere. Es de aclarar que este algoritmo es limitado en cuanto al desplazamiento: no puede salirse del campo de observación de la cámara. En esta situación la búsqueda de máscaras radiales generarían un error porque no encontraría todos los elementos no nulos del sistema de franjas, impidiendo que no se pueda recuperar la fase continua del sistema de franjas. De igual forma, las rotaciones están limitadas a variaciones angulares inferiores a 2π , debido a la simetría de la rejilla utilizada. Es importante destacar que los resultados obtenidos corresponden a las primeras evaluaciones realizadas utilizando una rejilla radial para el posicionamiento en el espacio 2D. Se deben hacer pruebas más contundentes para evaluar los errores introducidos en el cálculo, que tenga en cuenta la influencia de: tamaño de la rejilla, número de franjas en cada sector, tamaño angular de la región con franjas, principalmente.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

De este escrito se concluye que es posible desarrollar un algoritmo matemático para la extracción de la fase de una rejilla radial, partiendo de parámetros conocidos como es el cálculo de la fase de un rejilla rectangular. Se comprobó a lo largo de este escrito que el procedimiento matemático de transformación de coordenadas de una rejilla radial a una rectangular y su cálculo de fase, permiten calcular la fase de una rejilla radial, transformando de manera inversa el sistema coordenado. Este procedimiento de transformación de coordenadas ya fue aplicado de manera industrial con resultados óptimos.

Se comprobó de manera teórica y experimental que el algoritmo para el cálculo del centro de una rejilla radial es posible, al igual que cuando se encuentra en rotación; el rango de porcentajes de error es muy bajo en cuanto al tratamiento posterior dado a las imágenes tomadas en el laboratorio, lo cual hace confiable su uso. Los resultados preliminares indican que el centro de la mira puede ser utilizado para medir variaciones en la posición espacial y el centro de la región de franjas sirve para medir variaciones angulares.

BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Arias, Nestor; Meneses, Jaime; Suárez, Miguel; Medida de la Orientación, Posición y Desplazamiento en el Plano de un Objeto por Codificación de Fase. Bistua: Revista de la Facultad de Ciencias Básicas, Vol. 7, Núm. 2, julio – diciembre, 2009, pp. 1- 8, Universidad de Pamplona, Colombia.
- [2]. Baddour Natalia, Operational and Convolution properties of two-dimensional Fourier transforms in polar coordinates. Vol. 26, No 8/ August 2009/ J. Opt. Soc. Am. A.
- [3]. Xiao, Y. Kang, Z. Hou, W. Qiu, X. Li, Displacement and Strain Measurement by Circular and Radial Gratings Moiré Method. Society for Experimental Mechanics 2009. DOI 10.1007/s11340-009-9248-3.
- [4]. Amidror Isaac, The Fourier Spectrum of circular sine and cosine gratings with arbitrary radial phases. Optics Communications 149 (1998) 127-134, Laboratoire de Systèmes Périphériques (LSP), Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), 1015 Lausanne, Switzerland, accepted 17 November 1997.
- [5]. X.L. Li, Y.L. Kang, W. Qiu, Q.H. Qin, X. Xiao, A study on the digital Moiré technique with circular and radial gratings, ScienceDirect, Optics and Lasers Engineering 45 (2007) 783-788; Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 30072, China; Department of engineering, Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia.
- [6]. Pérez Zayra, Romero Lenny, Sistema Óptico de Reconstrucción Tridimensional para la detección de Ampollas en Recubrimientos, Trabajo de Pregrado en Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, 2004.
- [7]. Gómez Tejada, Daniel Alexis; Meneses F, Jaime E; Dispositivo Óptico para la reconstrucción tridimensional de la piel humana por el método de proyección de franjas; Trabajo de Pregrado en Ingeniería Física; Universidad del Cauca; 2009.

[8]. Oriat, Luc; Lantz, Eric; Subpixel detection of the center of an object using a spectral phase algorithm on the image; Université de Franche- Comté; Besançon.