

**SUGERENCIAS METODOLÓGICAS PARA APOYAR LA SUPERACIÓN DE
ALGUNAS DIFICULTADES EN LA TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE NATURAL
AL ALGEBRAICO DE SITUACIONES PROBLEMA CON ENUNCIADO LITERAL
EN ECUACIONES DE PRIMER GRADO.**

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
ESPECIALISTA EN EDUCACION MATEMATICA**

**JUAN ALBERTO CAÑAS
NELSON ANTONIO GOMEZ CAMACHO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2010

**SUGERENCIAS METODOLÓGICAS PARA APOYAR LA SUPERACIÓN DE
ALGUNAS DIFICULTADES EN LA TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE NATURAL
AL ALGEBRAICO DE SITUACIONES PROBLEMA CON ENUNCIADO LITERAL
EN ECUACIONES DE PRIMER GRADO.**

**TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
ESPECIALISTA EN EDUCACION MATEMÁTICA**

**JUAN ALBERTO CAÑAS MORALES
NELSON ANTONIO GOMEZ CAMACHO**

**DIRECTORA
Mg. ADRIANA ALEXANDRA ALBARRACÍN MANTILLA
Profesora Escuela de Matemáticas**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2010

DEDICATORIAS

-DE NELSON

A mi esposa Nelsi, mi hijo Diego Andrés y mis padres Jaime y Mercedes.

-DE JUAN ALBERTO

A mi madre que constantemente me acompaña y bendice desde el cielo, a mi maravillosa esposa Gloria Inés y mi precioso hijo que viene en camino.

AGRADECIMIENTOS

A DIOS por todas las oportunidades que nos ha dado para seguir adelante, y por iluminar nuestro camino dándonos sabiduría para saber enfrentar cada prueba que se nos presenta en nuestro diario vivir.

A Adriana Albarracín nuestra directora de tesis por su asesoría y valiosa colaboración.

A la UIS, alma mater que nos formó.

A la Escuela de Matemáticas y sus excelentes profesores, por su gran aporte en nuestra capacitación para ser mejores docentes.

A los directivos del colegio La Salle de Bucaramanga y del colegio Integrado Madre de la Esperanza del municipio Sabana de Torres, quienes nos brindaron su ayuda y colaboración para el buen desarrollo del presente trabajo.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
SUGERENCIAS METODOLÓGICAS PARA APOYAR LA SUPERACIÓN DE ALGUNAS DIFICULTADES EN LA TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE NATURAL AL ALGEBRAICO DE SITUACIONES PROBLEMA CON ENUNCIADO LITERAL EN ECUACIONES DE PRIMER GRADO.	12
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	12
2. JUSTIFICACIÓN	15
3. OBJETIVOS	18
3.1 OBJETIVO GENERAL	18
3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	18
4. MARCO REFERENCIAL	19
4.1 MARCO CONTEXTUAL	19
4.2 MARCO LEGAL	20
4.3 MARCO TEÓRICO	22
4.3.1 Antecedentes	22
4.4 MARCO CONCEPTUAL.	25
4.4.1 Niveles de interpretación de la letra.	25
4.4.2 Usos de la variable.	27
4.4.3 Modelo matemático.	30
4.4.4 Modelación matemática.	31
4.4.5 Modelaje matemático.	33
4.4.6 Ecuaciones de primer grado.	39
4.4.7 Modelamiento matemático en problemas con ecuaciones de primer grado.	42

4.4.8 Fundamentación pedagógica	46
4.4.8.1 Aprendizaje significativo	46
4.4.9 Habilidades de pensamiento	47
4.4.10 Fundamentación didáctica	48
4.4.10.1 Resolución de problemas	48
4.4.11 La enseñanza de la modelación matemática	51
5. METODOLOGÍA	52
5.1 TIPO DE ESTUDIO	52
5.2 DISEÑO METODOLÓGICO.	53
5.3 TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN	56
5.3.1 Taller N. 1	57
5.3.2 Taller N. 2	58
5.3.3 Taller N. 3	59
6. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN.	61
CONCLUSIONES	66
BIBLIOGRAFÍA	69
ANEXOS	71

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representación del proceso de modelaje

35

LISTA DE CUADROS

Cuadro No. 1 sinónimos en el lenguaje natural y su traducción algebraica	43
--	----

LISTA DE ANEXOS

TALLER 1	72
TALLER 2	74
TALLER 3	76

RESUMEN

TITULO: SUGERENCIAS METODOLÓGICAS PARA APOYAR LA SUPERACIÓN DE ALGUNAS DIFICULTADES EN LA TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE NATURAL AL ALGEBRAICO DE SITUACIONES PROBLEMA CON ENUNCIADO LITERAL EN ECUACIONES DE PRIMER GRADO.*

AUTORES: MORALES CAÑAS, Juan Alberto, GOMEZ CAMACHO, Nelson Antonio**

PALABRAS CLAVES: Modelación, enunciado literal y evocador, uso y significado de las variables, álgebra.

DESCRIPCIÓN

Este trabajo tiene como propósito identificar las dificultades de un grupo de estudiantes de octavo grado en cuanto al uso y significado de las variables en situaciones con enunciados literales y evocadores en ecuaciones de primer grado, y a su vez proponer sugerencias metodológicas para superarlas.

Para evidenciar la problemática, se aplican tres talleres de diagnóstico enfocados en la geometría y en la información expresada en lenguaje natural y suministrada por el docente, a ocho estudiantes de octavo grado de los Colegios Madre de la Esperanza de Sabana de Torres y la Salle de Bucaramanga en un tiempo de tres semanas.

Por otra parte las observaciones en cada uno de los talleres demostraron en los educandos la poca terminología o conocimiento que tienen del papel que desempeña la letra como objeto y como incógnita en una situación y a su vez de cómo llevar su representación a la hora de construir un modelo que satisfaga las condiciones del problema. También se pretende que sirva de base para los docentes del grado octavo, ya que al conocer las dificultades de los educandos en la traducción del lenguaje natural al algebraico, puedan determinar los mecanismos o estrategias para subsanar las falencias del sentido de la variable o letra en un enunciado matemático.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director, Mg. Adriana Alexandra Albarracín Mantilla

SUMMARY

TITLE: Methodological suggestions to support the overcoming of some difficulties in the translation of natural language into the algebraic one, the former being related to problem situations with literal statement in equations of first degree

AUTHORS: MORALES CAÑAS, Juan Alberto, GOMEZ CAMACHO, Nelson Antoni**

KEY WORDS: modeling, literal and evocative statement, use and meaning of variables, algebra.

DESCRIPTION:

The purpose of this research is to identify the learning difficulties of students of eight grade related to the use and meaning of variables in equations of first degree with literal and evocative statements, as well as propose methodological suggestions to overcome them.

To provide evidence of this problem, three workshops of diagnosis are administered to eight students of eight grade from Madre de la Esperanza de Sabana de Torres and La Salle de Bucaramanga schools during three weeks. These are focused on geometry and the information expressed in natural language.

The analysis of the observations of each of the three workshops showed that learners do not know the importance of the letter as an object and unknown quantity in a problem situation; it could be observed that students do not know how to represent unknown quantities when building a model to satisfy the conditions of the problem. This research also aims to help math teachers of eight grade since knowing the learners' learning difficulties is a tool to establish strategies to overcome the failings in sense of variables or mathematical statements.

* Work of Degree

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. The director, Mg. Adriana Alexandra Albarracín Mantilla

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS PARA APOYAR LA SUPERACIÓN DE ALGUNAS DIFICULTADES EN LA TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE NATURAL AL ALGEBRAICO DE SITUACIONES PROBLEMA CON ENUNCIADO LITERAL EN ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Con el permanente desarrollo de los conocimientos matemáticos y el uso de las nuevas tecnologías, se produce un consenso general mundial y por supuesto nacional, sobre la importancia de la aplicación de la matemática y la necesidad de su aprendizaje por parte de todos los educandos. Lo anterior, conlleva a las instituciones educativas al reto de motivar y desarrollar una cultura matemática para lo cual han de diseñar experiencias educativas que desarrollen en los estudiantes competencias lógico matemáticas y de razonamiento inferencial e hipotético, que los provea de los elementos para enfrentar situaciones de resolución de problemas y toma de decisiones donde sea necesario el uso de estas habilidades, destrezas y conocimientos, lo que implica ofrecer oportunidades de aprendizaje que favorezcan y potencien el pensamiento lógico matemático. Particularmente y en lo que respecta a la temática de esta monografía, la modelación de situaciones problema por medio de ecuaciones ofrece una oportunidad para apuntarle a este reto, en tanto que estas se presentan como una temática que permite favorecer el desarrollo de funciones cognitivas que facilitan el desarrollo con un cierto nivel de logro de las competencias antes mencionadas.

De otro lado, el estudio de la temática sobre la “Modelación de situaciones problema con ecuaciones de Primer Grado” da la oportunidad para diseñar actividades que permiten a los estudiantes de octavo grado, hacerse agentes activos, conscientes y partícipes en la construcción de los conceptos que les permitan comprender la temática y dar sentido a los procesos de solución. Así

mismo, facilita y potencia la capacidad de reflexión como parte fundamental para realizar procesos de pensamiento matemático en la solución de problemas. Además, la solución de situaciones planteadas por el docente, que reflejen la realidad del estudiante en cuanto a la dificultad de modelar, exigirá una gran disposición y esfuerzo con el compromiso permanente de la comunidad educativa en general.

Sin embargo, se ha observado que particularmente en los estudiantes de octavo grado del Colegio La Salle de la ciudad de Bucaramanga y de octavo grado del Colegio Integrado Madre de la Esperanza de Sabana de Torres, en el desarrollo del proceso de aprendizaje sobre modelación de problemas con ecuaciones de primer grado, varios factores que inciden en los procesos de construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. Entre estos factores se identifican la apatía y el desinterés hacia el estudio de las matemáticas, unido a pobres desempeños de los estudiantes en grados anteriores, en donde éstos no logran un aprendizaje significativo de los conceptos fundamentales que deben asimilar para asumir con éxitos los siguientes cursos. Esta situación tiene varias causas como son: el uso por parte de los profesores de estrategias que favorecen principalmente el aprendizaje memorístico y repetitivo, la poca intensidad horaria de la asignatura de matemática (3 horas por semana) y, por tanto, el desarrollo rápido de los temas motivado por la necesidad de cubrir el plan de estudio, que impide al docente desarrollar convenientemente el proceso de enseñanza con la suficiente claridad y profundidad que la temática requiere. Todas estas situaciones, entre muchos otros elementos, propician en los estudiantes la idea de no importancia de la matemática para la vida práctica, pues en las experiencias educativas casi nunca se relaciona con la diversidad de problemas cotidianos que el alumno podría resolver apoyado en su concepción teórica.

Factores como los anteriormente descritos, traen como consecuencia el bajo nivel en el rendimiento académico de los estudiantes, apatía y desinterés por

desarrollar las labores y compromisos propuestos dentro y fuera del aula, sumado al concepto arraigado de gran dificultad por todo lo que trate con la asignatura en general, esto repetido de grado en grado, concluye con unas deficientes bases que no le permiten comprender los conceptos de los grados superiores de la básica secundaria y de la media.

Lo expuesto hasta ahora es la natural consecuencia de muchos elementos que no tienen únicamente como protagonistas a estudiantes y profesores, sino también situaciones familiares. Por otra parte, es innegable que el modelo educativo recién modificado a partir del 2010, en donde la promoción al siguiente grado era prácticamente obligatoria, generaba en los estudiantes la idea que preocupándose o no ya tenía aprobado el año escolar. En estas circunstancias el docente no es ajeno a esta situación y siente que su labor aunque se haga con total entrega y compromiso, no encuentra en sus discípulos una respuesta positiva, lo que desmotiva, llegando a elegir como modelo de enseñanza el prototipo tradicional, mecánico y repetitivo, lo que genera el desarrollo del curso en forma monótona, donde la constante es la formulación y solución de problemas sin sentido práctico ni real, a tal punto que el mismo docente no sabe cuando un enunciado se puede ordenar y caracterizar para mediante una correcta interpretación proponer una forma de solucionarlo.

Ante la situación descrita es importante plantear experiencias educativas que permitan asegurar aprendizajes realmente significativos en relación con la modelación de situaciones problema con ecuaciones de primer grado, por ello es importante realizar un trabajo que permita responder a la pregunta **¿qué sugerencias metodológicas se pueden implementar para superar algunas dificultades y concepciones que tienen los estudiantes de 8 grado en la traducción del lenguaje natural al algebraico con enunciados literales con la letra como objeto y como incógnita en ecuaciones de primer grado?**

2. JUSTIFICACIÓN

La matemática es una ciencia con miles de años de historia. A lo largo de los siglos ha sido empleada con objetivos profundamente diversos. Fue en tiempos pasados un instrumento para la elaboración de vaticinios entre los sacerdotes de los pueblos de Mesopotamia y fue considerada por los pitagóricos como un sendero de conducción a la divinidad. También se ha constituido en la mejor e imprescindible herramienta para el avance de la humanidad en su exploración del universo. También se constituye en gran pilar y orientación del pensamiento filosófico. De igual forma se ha aprovechado como gran instrumento de creación de belleza artística, un campo de ejercicio lúdico, entre los grandes matemáticos de todos los tiempos.

Por otra parte en los últimos años el escenario que se vive en el campo de las matemáticas no es tan desolador, esto debido a los cambios que se han suscitado a través de los esfuerzos y trabajo de investigadores en el aprendizaje y enseñanza de la matemática como ciencia dinámica y cambiante, esto ha conducido a que efectivamente, la actividad matemática no puede ser una realidad de abordaje sencillo.

Sin embargo cuando se hable del planteamiento y la modelación de una situación problema resulta algo difícil, por la complejidad que tiene para los estudiantes el estructurar, generalizar y relacionar una serie de variables que lo induzcan a llevar el enunciado a una representación matemática, donde los símbolos y a veces la falta de conocimiento de notaciones hacen que su vocabulario sea pobre e inusual a la hora de abordar dichas situaciones. Por ende el estudiante debe adquirir unas habilidades y destrezas en la traducción matemática de una situación problema,

ya que dicha apropiación genera en él, un pensamiento crítico, creativo, que lo lleva a transformar su realidad con el conocimiento adquirido.

El presente trabajo se desarrolla en el Colegio la Salle de Bucaramanga, y el Colegio Integrado Madre de la Esperanza ubicado en el municipio de Sabana de Torres, (Santander). El estudio se presenta a través de unos talleres diagnósticos que permiten determinar la forma como los estudiantes llevan un proceso o pasos para el planteamiento y la modelación de la situación problema. Esta situación se aborda por el bajo nivel que presentan los estudiantes de octavo grado, el cual se ve reflejado en los resultados de las pruebas ICFES, Saber y otras que se llevan en el área de matemáticas.

Por otra parte los estudiantes de los dos colegios presentan de manera similar dificultad en resolver problemas rutinarios, que pueden estar contextualizados en más de una componente, en los que toda la información necesaria para resolverlos es explícita en el enunciado, pero que no insinúan un camino o estrategia para su solución, por tanto el estudiante no es capaz de organizar la información, en este nivel se ubican nuestros estudiantes, aunque ellos ya deberían utilizar el lenguaje natural, gráfico y/o simbólico para modelar situaciones, poder describir propiedades y relaciones, justificar estrategias y procedimientos usando ejemplos a partir de situaciones o textos para posteriormente mediante el uso de la modelación como estrategia poder solucionar un problema.

Por lo general los alumnos cometen errores al plantear una ecuación. El problema se da en gran medida por que se involucran dos procesos: comprensión y traducción. Polya (2002) señala que plantear una ecuación “*es expresar por medio de símbolos matemáticos una condición formulada en palabras*”. Para Polya plantear es traducir “*el lenguaje llano a fórmulas matemáticas*” y en toda

traducción nos concentramos más en el sentido general del enunciado que en las palabras mismas.

Con el presente proyecto de grado también se busca potenciar el desarrollo matemático en cuanto al pensamiento variacional y numérico mostrando de esta forma la matemática como una herramienta útil en el proceso del pensamiento crítico y constructivo del sujeto, llegando así a que el trabajo aporte a las instituciones en la mejora de los resultados de las diferentes pruebas matemáticas, como las pruebas saber, ICFES y demás competencias; donde se quiera de alguna forma medir el desempeño de los estudiantes en el proceso de aprendizaje.

Por otra parte, pretende ser el punto de partida de futuros estudios sobre las concepciones y dificultades relativas a la traducción del lenguaje natural al algebraico en situaciones problema que conlleven a ecuaciones de primer grado.

3. OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

Establecer unas sugerencias metodológicas para apoyar la superación de algunas de las dificultades presentes en la mayoría de los estudiantes de octavo grado en la traducción del lenguaje natural al algebraico en situaciones problema con enunciados literales en ecuaciones de primer grado.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Diseñar talleres que permitan visualizar el conocimiento del estudiante a la hora de plantear y traducir enunciados literales y evocadores con ecuaciones de primer grado.
- Reconocer las concepciones y dificultades que tienen los estudiantes de octavo grado en la traducción del lenguaje natural al algebraico a través de una prueba diagnóstica.
- Realizar talleres enfocados hacia la aplicación de la geometría en la traducción de enunciados literales con ecuaciones de primer grado, con estudiantes de octavo grado.

4. MARCO REFERENCIAL

4.1 MARCO CONTEXTUAL

Ubicación geográfica. El trabajo se realizó en dos instituciones, teniendo como característica principal, el pertenecer una de ellas al sector oficial y la otra al sector privado.

El Colegio Integrado Madre de la Esperanza está ubicado en el municipio de Sabana de Torres, en el Magdalena Medio del Departamento de Santander; es una Institución de Educación oficial con básica secundaria y media vocacional de modalidad técnico comercial. Su misión y visión se encuentran a continuación:

Visión. El colegio fija sus metas en formar estudiantes con espíritu crítico fundamentado en el respeto, la paz, la convivencia, los valores humanos, hombres y mujeres capaces de responder a las necesidades y exigencias del mundo actual; aptos para manejar proyectos microempresariales en beneficio de la comunidad; colaboradores en la construcción de un mundo más justo, pacífico y fraterno dentro del respeto por la naturaleza y el pluralismo cultural.

Misión. El Colegio Integrado Madre de la Esperanza, centra su misión, en contribuir con todas las acciones al desarrollo social, económico, cultural y al mejoramiento de la calidad de vida de la comunidad; a través de un proceso educativo continuo donde los alumnos tengan la posibilidad de cursar los niveles de preescolar, básica y media incluyendo la orientación vocacional que los prepare para el mercado laboral y/o el acceso a la educación superior.

El trabajo de igual forma se desarrolló en el Colegio la Salle de Bucaramanga, ubicado en la calle 67 N° 24-24 del barrio la Victoria. La correspondiente misión y visión se presentan a continuación:

Visión. En el año 2015 la Congregación de los Hermanos de las Escuelas Cristianas del Distrito La Sallista de Bogotá, continuará siendo una comunidad líder en la prestación del servicio educativo, que fomenta y vivencia la cultura de la calidad, a través de una formación integral y en concordancia con las exigencias de la normatividad vigente.

Misión. La Congregación de los Hermanos de las Escuelas Cristianas del Distrito lasallista de Bogotá y sus colaboradores, orientados por la iglesia Católica y los principios de su santo fundador Juan Bautista de la Salle, son una comunidad cuyo carisma se centra en procurar a la niñez y la juventud una educación humana, cristiana y académica de calidad, con especial atención a los pobres, promoviendo su desarrollo integral.

4.2 MARCO LEGAL

El Ministerio de Educación Nacional, por medio del documento “lineamientos curriculares”², organiza el currículo de matemáticas teniendo en cuenta para ello tres aspectos:

- Procesos generales
- Conocimientos básicos
- El contexto

² Lineamientos curriculares, http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles_8...

En los procesos generales, que tienen que ver con el proceso de aprendizaje, se hace referencia a la modelación y se plantea que a través de este proceso se logra relacionar las matemáticas con el mundo real.

Para la construcción de modelos se presenta el esquema planteado por Hans Freudenthal, el cual contiene los elementos básicos que permiten alcanzar este objetivo, enfatizando que su punto de partida siempre es una situación problemática real.

Referente a las diversas actividades que ayudan a matematizar una situación, se basan en las expuestas por Treffers y Goffree, teniendo en cuenta las siguientes:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general;
- Esquematizar;
- Formular y visualizar un problema en diferentes formas;
- Descubrir relaciones;
- Descubrir regularidades;
- Reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas;
- Transferir un problema de la vida real a un problema matemático;
- Transferir un problema del entorno real a un modelo matemático conocido;
- Representar una relación con una fórmula;
- Probar o demostrar regularidades;
- Refinar y ajustar modelos;
- Utilizar diferentes modelos;
- Combinar e integrar modelos;
- Formular un concepto matemático nuevo;
- Generalizar, es decir alcanzar un mayor nivel en la modelación;

Por otra parte, en el aspecto referente a los conocimientos básicos, el desarrollo del pensamiento variacional requiere necesariamente de la modelación.

4.3 MARCO TEÓRICO

4.3.1 Antecedentes

En los últimas tres décadas se han realizado numerosas investigaciones sobre los procesos implicados en el aprendizaje del álgebra; muchos trabajos tratan temas relativos a la detección y a la clasificación de errores y, en general, a las dificultades y obstáculos que encuentran los alumnos que comienzan a estudiar el álgebra así como al proceso de interpretar enunciados que representan situaciones problema.

En 1980, Kucheman D.³ realizó un estudio a un gran número de alumnos, con edades entre trece y quince años con el fin de esclarecer la manera en que los alumnos interpretan los símbolos literales usados para representar las variables en un contexto algebraico. Una vez aplicados los cuestionarios, analizó las respuestas dadas por los alumnos, las cuales las clasificó en seis formas de interpretar los símbolos literales a saber:

- Letra evaluada
- Letra no usada
- Letra como objeto
- Letra como incógnita
- Letra como número generalizado
- Letra como variable.

Lo anterior es relevante para el proyecto, ya que se tomó de base la letra como objeto y como incógnita en los enunciados literales y evocadores.

³ URSINI S (1994) .la transición de la aritmética-álgebra. Grupo Pretexto. (1997)

Kieran y Filloy(1989) y Malisani (1993) presentan un resumen bastante completo sobre las principales investigaciones relativas, a los errores que efectúan los alumnos cuando tratan de plantear , resolver ecuaciones y problemas algebraicos y a los cambios conceptuales necesarios en la fase de transición entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la duda o del azar, como suponían las teorías conductistas del aprendizaje, sino que es la consecuencia de un conocimiento anterior que se manifiesta falso o no apropiado a una nueva situación.

En este sentido la noción de error está relacionada con la noción de obstáculo. Según Brousseau (1986), la noción de obstáculo está relacionada con la idea de aprendizaje por adaptación. Ciertos conocimientos del alumno están ligados a otros conocimientos anteriores que a menudo son provisorios, imprecisos y poco correctos.

Como se mencionó anteriormente, las diferentes investigaciones realizadas a partir de los años ochenta, dan cuenta de los múltiples obstáculos que enfrentan los estudiantes al traducir del lenguaje verbal y natural al matemático: entre ellas se menciona las maneras en que el arraigo al pensamiento numérico y a los significados coloquiales de las palabras influye en la interpretación y el uso de las letras y de las expresiones algebraicas en el aprendizaje del álgebra. Tal es el caso de investigaciones como la de Carolyn Kieran, sobre la interpretación del signo igual (Kieran 1980), los estudios de Leslie Booth (1984), y de Marilyn Matz (1982), sobre los errores frecuentes en el álgebra, análisis comparativo de la lengua materna con el lenguaje del álgebra por Hans Freudenthal (1983) y el estudio sobre operación de la incógnita de Filloy y Rojano (1989) entre otros.

En un estudio denominado “la lecto-escritura algebraica” se realizó con estudiantes de secundaria, quienes ya tenían conocimiento del planteamiento y solución de ecuaciones de primer grado o ecuaciones lineales. Se pudo observar

que una buena parte, es decir la mayoría de los estudiantes, presentaban una gran dificultad en la lectura y en la escritura de las expresiones algebraicas, donde se manifestaba una confusión al intentar utilizar los signos de la aritmética, y del lenguaje natural, así como la necesidad de darle un significado a las oraciones y los signos algebraicos (Filloy y Rojano, 1991).

En la investigación, anteriormente citada también se abordó los procesos de traducción del álgebra al lenguaje natural y viceversa, aquí se les solicitó a los estudiantes el uso de los símbolos algebraicos para expresar frases o expresiones como “b aumentado en 5”, “el doble de m aumentado en 3”, entre otros, y aquí la mayoría de los estudiantes hizo uso del lenguaje coloquial para responder, por tanto al predominar en estas edades esto definitivamente influye en el proceso, afectando la traducción al sistema algebraico, es decir usando letras, números, variables operaciones para darle sentido concreto y preciso a frases y expresiones las que debe representarse, para su posterior solución.

Por otra parte Pinzón y Gallardo (2000) señalan de acuerdo a sus investigaciones, las siguientes dificultades al comprender y traducir del lenguaje natural al algebraico.

Concatenación de términos algebraicos. La concatenación en aritmética denota adición, por ejemplo 45 significa $40 + 5$; mientras en álgebra cuando se habla de la multiplicación, por ejemplo $5b$ es $5 \bullet b$, es esta la expresión que los alumnos no identifican.

Conjunción de términos no semejantes. En álgebra los términos difieren por lo que deben tratarse distintos y es común que el estudiante ignore las diferencias por ejemplo: $3 + 5x = 8x$.

Inversión incorrecta de operaciones. Los alumnos desconocen el uso de las propiedades para realizar operaciones con igualdades llamadas transposición de términos en una ecuación, aparte de que muchas veces la realizan incorrectamente.

Diferenciación de la incógnita respecto a su coeficiente. Decodifican a “x” como 1x, ante la expresión $x + x =$, los estudiantes suelen cometer el error de escribir $x + x = x^2$.

4.4 MARCO CONCEPTUAL.

4.4.1 Niveles de interpretación de la letra.

Con relación al uso de los símbolos matemáticos, en investigaciones realizadas, se ha logrado determinar que los estudiantes progresan en la comprensión del uso de las letras y el dominio de las variables, según ciertos niveles o categorías. KÜCHEMANN D. 1980⁴, con el fin de determinar la forma en que los estudiantes interpretan los símbolos literales utilizados para representar las variables en un contexto algebraico, realizó un estudio con 3000 estudiantes con edades que oscilaban entre los 13 y 15 años y para el logro del objetivo aplicó un cuestionario, en donde las actividades conducían a observar la interpretación, manipulación y solución de expresiones algebraicas representados por símbolos literales. Después de analizar las respuestas dadas por los estudiantes. Küchemann pudo identificar seis estadios o formas de interpretar los símbolos literales así:

- **Letra evaluada.** A la letra se le da un valor numérico desde el principio, en lugar de tratarlo como valor desconocido, por ejemplo: al preguntar si $e+f=8$,

⁴ GODINO, Juan D. Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-maestros. 2003 pp.48-50

entonces ¿cuál es el valor de $e+f+g$? El estudiante responde 12, porque considera que las letras tienen el mismo valor numérico, en lugar de $8+g$.

- **Letra no usada.** Aquí el estudiante ignora la presencia de la letra o no le da ningún significado, por ejemplo al indicarle la suma de “2 y $3n$ ” el estudiante escribe 5 o $5n$, en lugar de $3n + 2$.
- **Letra como objeto.** La letra es percibida como un objeto concreto, por ejemplo, ante expresiones como “ $2n + 3n$ ”, se piensa en “2 naranjas y 3 naranjas” o simplemente como “2 enes y 3 enes, lo cual significa en total 5 enes”. Para resolver algunos ejercicios esta forma de operar en determinados casos puede resultar útil, como al sumar términos semejantes, pero se debe tener en cuenta que al abordar otro tipo de casos seguramente se prestará para confusión en los estudiantes.
- **Letra como incógnita.** La letra se considera como un número en particular pero se desconoce, y el estudiante opera con la letra percibida de esta forma, esto a pesar de la falta de concretar el resultado como en las respuestas antes mencionadas $8 + g$ y $3n + 2$.
- **Letra como número generalizado.** Aquí la letra se ve como representante de varios valores diferentes, más que como un valor específico como en la pregunta ¿qué puede decir de A si $A + B = 10$ y A es menor que B ?
- **Letra como variable.** La letra representa un rango de valores, y el estudiante puede describir el grado con el cual los cambios en un conjunto se determinan por los cambios en otro (lo que significa que puede establecer al menos una relación de segundo orden). Así por ejemplo si tenemos que $c = a + 3$, entonces “¿qué le sucede a c si a es incrementado en 2?”. Esto debe llevar al

estudiante a que encuentre una relación de donde pueda concluir e interpretar que “c es siempre 3 mas a”.

Los anteriores hechos, muestran claramente que los estudiantes tienen diversas y variadas formas de interpretar las letras usadas para representar las variables, y de igual manera dicha interpretación no siempre es la correcta y por tanto, esta es una causa de respuestas erróneas e imprecisas.

Küchemann considera, teniendo en cuenta la perspectiva de Piaget, que las tres primeras categorías indican un bajo nivel de respuesta, y en su argumentación establece que para que un alumno tenga una comprensión de los inicios del álgebra, se necesita que pueda trabajar, al menos con situaciones problema simples que necesiten el uso de la letra como incógnita, de igual forma plantea que un estudiante habrá comprendido en un alto nivel el uso de los símbolos literales en álgebra, cuando este pueda trabajar con el último estadio o categoría es decir, cuando pueda reconocer a la letra como variable.

4.4.2 Usos de la variable.

Muchas y diversas investigaciones desarrolladas en el campo de la educación matemática, dan cuenta de la dificultad que manifiestan los estudiantes para la comprensión de la noción esencial del concepto de variable, y por supuesto para su aplicación y uso en los distintos niveles de abstracción.

Una distinción más explícita de los diversos significados asociados a la variable, ayudarían a los estudiantes a poder encontrar e interpretar, dando sentido a los símbolos, al momento de enfrentar la correcta escritura, interpretación y solución de situaciones y problemas.

Usiskin (1998) ⁵ aconseja que un examen de las aplicaciones de la variable es más significativo cuando se conduce dentro del contexto de conceptos particulares del álgebra. El presenta cuatro categorías del uso de la variable, que relaciona los conceptos del álgebra así:

- Álgebra como aritmética generalizada.
- Álgebra como estudio de estructuras.
- Álgebra como el estudio de los procedimientos para solucionar ciertas clases de problemas.
- Álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades.

Dentro del estudio realizado señala que los estudiantes piensan y creen generalmente que las letras son números, pero no es así, ya que las letras pueden representar perfectamente también números, proposiciones, variables y también funciones.

De igual manera, la variable no siempre se representa con letras y en este contexto las letras no siempre representan variables.

En un importante artículo publicado en 1983 en la revista *Mathematics Teacher*, escrito por Wagner, S. se estudia las dificultades que los estudiantes enfrentan para poder comprender el significado de los símbolos que representan las variables, haciendo una comparación entre las definiciones matemáticas que tienen que ver con el concepto de variable, y los obstáculos que deben sortear dichos estudiantes al tratar de comprender el significado cuando aborden el aprendizaje del álgebra. Al respecto se menciona que los símbolos literales son fáciles de utilizar, pero presentan dificultad el entenderlos, porque los símbolos

⁵ Referencia tomada de los artículos, los niños y las variables de Ursini S (1994) y la Transición de la Aritmética-álgebra del Grupo Pretexto (1997) PP. 26-30.

literales presentan características parecidas a los numerales y a las palabras, entonces los estudiantes pueden verlos erróneamente y pensar que se trata de una nueva forma de notación.

Ursini S. (1994) señala que en matemáticas se usan generalmente los símbolos literales para representar las variables y para señalar diferentes caracterizaciones de la variable, los diferentes símbolos se usan para representar la misma caracterización de la variable. El variado uso de los símbolos literales puede contribuir a oscurecer las diferencias entre las diversas caracterizaciones de la variable.

Este argumento ha producido en distintas ocasiones el considerar, que los símbolos que comúnmente se usan para representar la variable no son los más adecuados y que, por tanto contribuyen a crear cierta confusión en los estudiantes que inician el estudio del álgebra, pero además puede deberse a la falta de experiencia previa en tratar numéricamente problemas matemáticos de una distinta naturaleza, que los llevan hacia la necesidad y aceptación de ideas algebraicas. Enfatiza que para lograr un manejo adecuado del álgebra es necesario que los alumnos, por un lado, desarrollen una capacidad para percibir la simbología y las operaciones aritméticas de manera distinta y por el otro construyan nociones completamente nuevas propias del álgebra.

Considerar que para los alumnos es más fácil trabajar con la interpretación del símbolo literal que con otra implica que es más fácil trabajar con una caracterización de la variable que con otra, sin embargo, hay que considerar que cada uno de los distintos usos de la variable puede ser enseñado a diferentes niveles de complejidad.

Ursini⁶ por medio de la investigación estudió la factibilidad de llevar a los alumnos a trabajar con ideas algebraicas antes del estudio formal del álgebra. En particular, se quería propiciar en los alumnos un primer acercamiento a distintos usos de la variable, a saber:

- Como número general: La variable representa un número indeterminado involucrado en un método o regla general.
- En relación funcional: Las variables representan números cuyos valores se mueven dentro de ciertos rangos de manera inter-relacionada;
- Como incógnita específica: La variable representa un valor desconocido, pero específico, que puede determinarse con precisión tomando en cuenta las restricciones del problema.

4.4.3 Modelo matemático.

El educando se encuentra inmerso en un mundo donde constantemente, se presentan diversas situaciones y problemas que requieren ser resueltas. De acuerdo al grado de complejidad, una situación es analizada y debe determinarse si la posible solución es simple o por el contrario requiere de una mayor capacidad de análisis, lo que conlleva a plantear una formulación matemática ordenada y detallada para su solución.

En procura de dar respuesta a una determinada situación, se requiere del uso de símbolos y diversas relaciones matemáticas, que representen de alguna forma una situación real, a través de ciertos modelos matemáticos.

⁶ Referencia tomada de los artículos, los niños y las variables de Ursini S (1994) y la Transición de la Aritmética-álgebra del Grupo Pretexto (1997) PP. 26-30.

Biembengut y Nelson Hein, concluyen que al conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen de alguna manera, un fenómeno en cuestión o una situación problema real, constituye un Modelo Matemático. De igual forma un modelo puede formularse por medio de expresiones numéricas o fórmulas, diagramas, gráficos, representaciones geométricas, tablas, programas computacionales, etc.

4.4.4 Modelación matemática.

El centro del proceso educativo es el estudiante, y en torno a él debe girar todo el esfuerzo de la comunidad educativa, con miras a obtener unos resultados que obedezcan al gran deseo por construir seres capaces e idóneos dentro de una sociedad cada vez más exigente. Si el estudiante está motivado, su respuesta al proceso de enseñanza y de aprendizaje desemboca en unos resultados satisfactorios, pues se contará con la participación activa de este, ingrediente fundamental para el buen desempeño de toda actividad humana.

Biembengut y Nelson Hein, aseguran, que el trabajo con modelación en situaciones cotidianas y reales, propicia en docentes y en estudiantes, la construcción de las bases necesarias y sólidas para cambiar el viejo estilo tradicional de nuestra enseñanza, la que arraigada en nuestra escuela no ha permitido un avance, que corresponda con los retos que impone un sistema globalizado en donde se requiere de un nuevo prototipo de educando.

Carlos Vasco, refiriéndose a la modelación, se expresa al respecto emitiendo su concepto en los siguientes términos *“la modelación es, pues, el arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad. Resalto que es un arte, no una ciencia”*⁷.

⁷ VASCO URIBE, Carlos E. Didáctica de las matemáticas, artículos selectos. Universidad Pedagógica Nacional (2006) Santa Fé de Bogotá p142.

De acuerdo al anterior comentario, la modelación solo se aprende a través de la fundamentación de procesos matemáticos que conlleven a la representación o traducción de situaciones cotidianas y que a su vez sirvan de aplicación en diferentes problemas y casos reales.

Biembengut y Hein, sostienen que la modelación matemática es un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático, dado que éste en un determinado problema, constituye un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representan de alguna manera el fenómeno referido o en cuestión.

La modelación como proceso, en opinión de los investigadores anteriormente citados representa grandes ventajas, al respecto sostienen *“el alumno tiene una mejor comprensión de los contenidos desarrollados y mejora el grado de interés de este por las matemáticas, debido a la aproximación con el área afín y su aplicación”*⁸.

Podemos concluir totalmente y con absoluta seguridad, que el avance de la ciencia, está basada en un gran porcentaje en procesos que necesariamente tienen que ver con la matemática, y dichos procesos tienen su pilar fundamental en modelos matemáticos.

Nuestro sistema educativo, en procura de estar a la altura de los nuevos retos que se imponen, en algunos documentos abordan el tema de la modelación como un proceso de gran relevancia, el cual debe ser abordado desde nuestras instituciones para el logro de unos objetivos claramente definidos.

⁸ BIEMBENGUT, María S, HEIN Nelson. Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática, educación matemática. Vol. 16 .2004, p. 107. Santillana México.

El Ministerio de Educación Nacional en sus lineamientos establece “*la modelación es un proceso, muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa*”.⁹

4.4.5 Modelaje matemático.

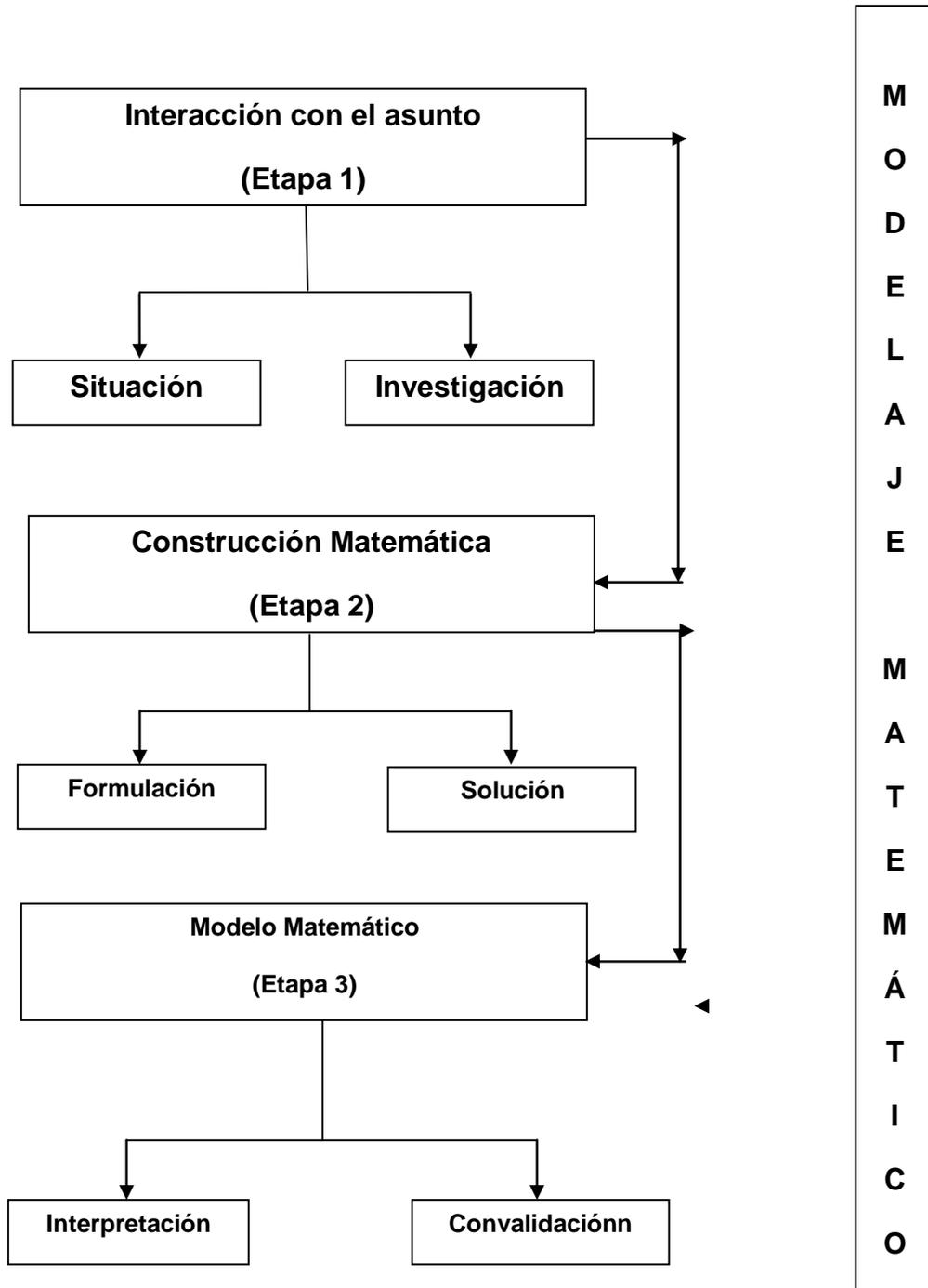
Durante muchos años la estructura en el proceso de la enseñanza de las matemáticas por parte de los docentes ha sido cerrada, monótona y poco realista. Por tanto una gran consecuencia de esto, es la falta de interés por parte de los estudiantes en el estudio del área, ya que los contenidos y las situaciones que se plantean en el aula, poco tiene que ver con la realidad o vida cotidiana, lo que propicia una solución mecánica de las diversas situaciones problema, a los que nuestros estudiantes enfrentan en nuestras instituciones. La tendencia actual, propia de las necesidades de un entorno cada vez más cambiante y dinámico, merecen una estrategia nueva, que se encuentre al nivel de los retos y recursos disponibles actuales. Es por esto que se hace necesaria la implementación de procesos que permitan la construcción de un modelo.

Biembengut y Nelson Hein, al proceso involucrado en la obtención de un modelo, lo denominan modelaje matemático, en donde el modelador debe tener ciertas características entre las cuales están el conocimiento matemático, la intuición, creatividad y sentido lúdico, para jugar con las variables involucradas. Estos investigadores aseguran que el modelador debe ser un artista al momento de formular, resolver y elaborar expresiones que sirvan no sólo para una solución, sino para su aplicación en otras situaciones y teorías.

⁹ MEN. Lineamientos curriculares, Santa Fe de Bogotá, 1998 p. 79

En la representación real con modelo matemático, se requiere de unos pasos, en donde el modelaje como proceso, se encuentra identificada y categorizada en tres etapas, las cuales se encuentran subdivididas a su vez en otras sub-etapas, que lo complementan, estas son cinco definidas así.(véase fig. 1)

Figura 1: Representación del proceso de modelaje¹⁰



¹⁰ BIEMBENGUT, María Salett, HEIN Nelson. Modelo, modelación y modelaje, métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. Épsilon No. 38,1997.

De acuerdo al modelo que representa el proceso de modelaje, los investigadores determinan que en la primera etapa (interacción con el asunto), una vez seleccionada la situación que se va a estudiar, se debe realizar una investigación sobre el tema, esto utilizando medios como: revistas, libros o directamente con datos experimentales, obtenidos con especialistas del área.

Las dos sub-etapas indican, que el conocer la situación problema, se esclarece, con la ayuda del conocimiento de los datos.

En la segunda etapa (construcción matemática). En esta fase del proceso, aparece la intuición y creatividad del modelador, ya que aquí se da la traducción de la situación problema al lenguaje matemático, por tanto es la etapa más compleja.

En la formulación del problema se hace indispensable los siguientes pasos:

- Clasificar las informaciones (datos importantes y los poco relevantes).
- Plantear hipótesis, priorizando formas para lograr obtener el objetivo.
- Determinar las variables relevantes.
- Seleccionar los símbolos apropiados a dichas variables.
- Establecer en términos matemáticos las relaciones que se establezcan.

Al finalizar esta sub-etapa se tendrá un conjunto de expresiones aritméticas, gráfico, fórmulas, o ecuaciones algebraicas etc., que conduce a una solución o a la deducción de una representación matemática de la situación problema.

En la tercera etapa (modelo matemático) es necesario efectuar una comprobación del modelo realizado, con respecto al nivel de aproximación de la situación

problema traducida y a partir de ahí utilizarlo. Si el modelo no corresponde con las necesidades que lo generó, entonces se da la posibilidad de replantearlo.

Desde hace algunos años se vienen presentando cambios, en las estructuras de los currículum, y por consiguiente en los métodos de enseñanza de las matemáticas, es entonces que se tiene como fin último, la implementación de esta en la aplicación de situaciones de la vida diaria. Dada la importancia que representa “trabajar” sobre la realidad y cotidianidad, Bassanezi señala que la enseñanza debe centrarse en los intereses y necesidades prácticas de la comunidad, al respecto opina, “*aunque su interés no se agote allí, no es intención hacer una apología de para qué sirve*”.¹¹

Por otra parte, la matemática aborda diversos procesos, que permite no solamente, la práctica del ejercicio intelectual, sino que se constituye en el lenguaje de la ciencia. En destacar la gran jerarquía de la disciplina, investigadores como Adler propone lo siguiente “*debemos buscar maneras de desarrollar precozmente, en los alumnos, la capacidad para leer e interpretar el campo de la matemática*”.¹²

Por el extenso trabajo realizado en el campo de la investigación, de diversos autores, y su opinión, es posible identificar claramente que el modelaje en el proceso de enseñanza y de aprendizaje debe ser tomado muy en cuenta. Y es en la escuela en donde por su carácter, se constituye en el campo ideal para la construcción y recreación de modelos.

En comentarios anteriores destacamos, como el estudiante, como centro del proceso educativo, con las herramientas disponibles que el medio hoy provee,

¹¹ BIEMBENGUT, María Salett, HEIN Nelson. Modelo, modelación y modelaje, métodos de enseñanza-aprendizaje de matemáticas. Épsilon No. 38,1997.

¹² -----Modelo, modelación y modelaje, métodos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Épsilon No 38, 1997.

tendrá la oportunidad de ver con sentido crítico y por supuesto con gran interés, el abordaje de las diversas situaciones problema, las que “instaladas” en un contexto real de su vida cotidiana, provean de elementos motivadores, e innovadores que inspiren en nuestros estudiantes, su “curiosidad científica”, que se traduzca en el aumento y progreso de sus facultades en donde la capacidad y su espíritu investigativo, se constituya en lo básico y primordial como ejes fundamentales de su desarrollo.

Burghes y Huntley, afirman que el modelaje permite mejorar la habilidad para aplicar la matemática en situaciones prácticas.

Bassanezi, argumenta que en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, la importancia del trabajo con modelaje trae consigo grandes beneficios para los estudiantes cuando afirma *“el modelaje consiste esencialmente en el arte de transformar situaciones de la vida real y cotidiana en problemas matemáticos, que deben ser interpretados con lenguaje usual. Este método tiene la intención de estimular en estudiantes y profesores, sus propias habilidades como modeladores.”*¹³

En el proceso para la enseñanza del modelaje matemático; Hein Nelson y Biembengut, consideran ciertas condiciones entre ellas, es indispensable el tiempo con que cuentan los participantes para la realización de la actividad, no sólo dentro, sino fuera de clase, y otro aspecto a tener en cuenta, es el conocimiento matemático que posean dichos participantes. Una vez dadas las anteriores condiciones se tendrá definidas dos etapas a saber:

¹³ BASSANEZI R. Carlos, Encino-aprendizagem com modelagem matemática. Editora Contexto(2002).Sao Paulo p.24

A. Presentación de modelos matemáticos: Estos deben ser presentados en forma minuciosa, resaltando los pasos necesarios para poder obtener resultados, justificando o incluso recordando los conceptos matemáticos ya vistos, para facilitar la correcta interpretación y comprensión de los pasos que conforman el modelaje.

B. Proceso de modelaje: Se inicia sugiriendo la conformación de grupos donde se escoja por cada uno un tema, y opinen con criterios propios, posteriormente sobre dicho tema escogido indagar para obtener datos e información que posteriormente se clasificará, esto facilitará el total conocimiento de este.

4.4.6 Ecuaciones de primer grado.

Siempre se ha enseñado, al estudiante cuando aborda el estudio del álgebra, que esta es equivalente a estudiar los números en general y su representación por medio de letras, a diferencia de la aritmética que sólo utiliza cifras. De esta forma el álgebra se constituye en una generalización de la aritmética, que apoyándose en esta, se desarrolla por métodos, deduciendo expresiones que al final se constituyen en fórmulas, es decir un grupo de símbolos que encierra las operaciones a realizar para la solución de uno o diversos problemas con ciertas características llegando a mecanizarse el razonamiento aritmético.

Al respecto se puede decir “el álgebra nació con el uso de jeroglíficos e ideogramas más o menos relacionados con la representación simbólica de nociones y operaciones matemáticas”¹⁴. Evidencia de esto lo señala el documento del año 2000 al 1800 a. de C. llamado papiro de Rhind.

Uno de los mejores registros hasta ahora descubiertos, lo constituye el documento citado, ya que en él, se registran una serie de problemas, cuyo planteamiento y

¹⁴ VERA Francisco. Breve historia de la matemática. Segunda edición. Editorial Losada S.A. p.p. 53-54 Buenos Aires (1961).

solución en algunos se puede realizar a través de la utilización de ecuaciones de primer grado.

Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma:

$$x + ax = b$$

$$x + ax = 0$$

Donde a, b y c eran números conocidos y “x” la incógnita que ellos denominaban “aha o montón”.

En el papiro se encuentran algunos enunciados como el siguiente:¹⁵

“un montón más $\frac{1}{7}$ de él son diecinueve”, con la notación $\frac{1}{7}$ se referían a $\frac{1}{7}$, de acuerdo a esto, el problema en lenguaje actual se puede traducir por medio de la siguiente ecuación:

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

En otro de los problemas expuestos se puede extraer el siguiente enunciado:

Una cantidad más $\frac{1}{4}$ de ella son 15, aquí se presenta un método para la solución de dicho problema así:

Se cambia “x” por el número 4 así: $4 + 4 \cdot \frac{1}{4} = 5$, de acuerdo a esto como 5 tiene que ser multiplicado por 3 para conseguir 15, entonces 4 tiene que ser multiplicado por 3 para llegar a la solución, así: $4 \cdot 3 = 12$, y se puede comprobar que 12 más un cuarto suyo, es decir 3 da 15.

¹⁵ SUAREZ. A .Carlos .Tesis doctoral “Aceptación en España de los criterios rigurosos del análisis matemático en siglos XIX y XX”. Universidad de las Palmas de gran Canaria (2007).

Generalmente, el cálculo de la solución correcta no era tan fácil como en este caso e implicaba numerosas operaciones con fracciones unitarias (fracciones con numerador la unidad), cuyo uso dominaban los egipcios. En cuanto al simbolismo, solamente en algunas ocasiones utilizaban el dibujo de un par de piernas andando en dirección de la escritura o invertidas, para representar la suma y resta, respectivamente.

En lenguaje actual se puede traducir el problema o enunciado anterior por medio de la siguiente ecuación:

$$x + \frac{1}{4}x = 15$$

Si bien los egipcios no daban ningún tipo de justificación, ni de formulación general de procedimiento, pues se limitaban a resolver casos concretos, se destaca la forma de solucionar el anterior problema, y de otros más en donde se ha denominado método de “Regula Falsi Simple”, el cual consistía en tomar un valor concreto para la incógnita, probaban con él y si se verificaba la igualdad ya tenían la solución, si no, mediante cálculos obtenían la solución exacta. De esto hoy se puede concluir que el sistema utilizado está basado en conceptos de proporcionalidad directa.

En otros problemas del mismo documento, se puede observar expresiones que indican una aproximación a la reducción de términos semejantes.

A pesar de las evidencias egipcias se puede establecer que el concepto de número necesario para la creación del álgebra, tiene su origen con Diofanto de Alejandría en Grecia. En su obra refiere en gran parte a números abstractos, donde los analiza, dándole un tratamiento rigurosamente científico. Con Diofanto el número adquiere una dimensión, que lo proyecta en su uso al razonamiento algebraico, cuya influencia abarca hasta el siglo XVII con Fermat y Descartes,

estos a su vez logran grandes avances en la ciencia, no sin antes cimentar sus logros en Diofanto. El álgebra se concibe como una gran herramienta que relaciona el lenguaje ordinario con algunos símbolos y abreviaturas, para simplificar el razonamiento, sustituyendo el número desconocido por un símbolo único, además de correlacionarlo con las operaciones, es decir con la adición, sustracción, e igualdad, y resolviendo problemas de forma exacta, con algunos de ellos indeterminados, es decir de los que dependen de un sistema de más ecuaciones que incógnitas.

4.4.7 Modelamiento matemático en problemas con ecuaciones de primer grado.

Patricia Camarena (2.004), a través de sus investigaciones, llama la atención sobre la gran dificultad que representa para los estudiantes acceder al modelo matemático de un problema, sea la situación particular que se desea abordar. Lograr la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico es uno de los mayores obstáculos para llegar a dicho modelo matemático que correctamente represente el problema.

Parte de la solución de un problema, consiste en el correcto abordaje de este, es decir intentar su traducción. Al respecto Camarena afirma “*en los problemas matemáticos se debe llevar a cabo la traducción del lenguaje común al lenguaje matemático, entendiéndose por traducción, al proceso psicológico que involucra ir de un modo de representación a otro*”.¹⁶

La investigadora, refiriéndose a las diversas situaciones problema, establece una jerarquía. Los problemas en su concepto son clasificados de acuerdo al grado de complejidad o dificultad, características específicas, y elementos comunes entre ellos, para tal fin toma tres categorías, analizando especialmente aquellos

¹⁶ Cuarto congreso nacional y tercero internacional “Retos y expectativas de la universidad”. Instituto Politécnico Nacional IPN. Febrero 25 – 28 de 2004.

que involucran una variable, en los que el llevarlos del lenguaje común o verbal al lenguaje matemático algebraico, significaba por sus enunciados un nivel de comprensión cada vez mayor para poder obtener el modelo matemático, que permitiera la solución a dichas situaciones problema.

Cada una de las categorías es abordada, enunciando sus particularidades de tal manera que se pueden identificar de la siguiente forma:

- **Problemas con enunciado literal.** En esta categoría, se ubican el tipo de problemas, en los que se puede hacer una traducción literal de los significados al lenguaje algebraico del lenguaje común.

Son ejemplos de esto, expresiones como: “el doble de”, “la tercera parte de”, “un cuarto de” etc.

Además se presentan expresiones en el lenguaje natural, cuya representación en el algebraico es equivalente o la misma, se trata de sinónimos, que en algunos casos, para los estudiantes es causa de confusión. Ver cuadro 1.

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
Se aumenta	+
Se añade	+
Se hace mayor por	+
El triple producto	$()^3$
El cubo de	$()^3$
La tercera potencia	$()^3$
El doble de	$2()$
Dos veces	$2()$

Cuadro No. 1 sinónimos en el lenguaje natural y su traducción algebraica¹⁷

¹⁷Olazabal Carpio Ana María, Camarena Gallardo Patricia Cuarto congreso nacional y tercero internacional “Retos y expectativas de la universidad”. Instituto Politécnico Nacional IPN. Febrero 25 – 28 de 2004.

Camarena establece que las definiciones de este tipo de problemas con enunciado literal, presenta excepciones, porque existen ciertas palabras que aunque tengan un único y literal significado en matemáticas, en otras disciplinas o campos de la ciencia, al momento de traducirlas al lenguaje algebraico su expresión es distinta.

- **Problemas con enunciado evocador.** En esta categoría de problemas, la traducción de los significados no es literal, sino por la evocación, o pre saberes de unos conceptos matemáticos, con las relaciones algebraicas que puede establecer.

En esta clasificación, se presenta un grado mayor de dificultad que en la anterior, ya que para poder constituir el modelo matemático, los datos hallados en la situación problema no son suficientes inicialmente para resolverlo, pero sí permite al estudiante recordar algunos conceptos para establecer enlaces entre los posibles significados del texto o enunciado, y relacionarlos de tal manera, que le facilite el llegar a plantear un posible modelo del problema.

Los problemas con enunciado evocador presentan las siguientes ventajas para los estudiantes:

- ✓ Permiten fortalecer conceptualmente la comprensión.
- ✓ Motiva y propicia la evocación de preconceptos, que le conduzcan al planteamiento de una posible solución a través de la creación de modelos matemáticos, además de la necesidad de disponer de ciertas habilidades verbales y por supuesto de razonamiento lógico matemático.
- ✓ Adquisición de habilidad para saber aprovechar la información relevante del problema, traduciéndola al lenguaje matemático, de tal forma que aunque esta no sea suficiente para llegar al modelo, si le motive a buscar la necesaria para inquirir la posible solución.

- **Problemas con enunciado complejo.** Esta categoría agrupa el tipo de situaciones problema, en los que se puede utilizar una traducción literal, y preconceptos o evocación de acuerdo al enunciado, pero esto no es suficiente para acceder al modelo matemático que represente el problema, por ser situaciones con un grado alto de dificultad, es necesario disponer ineludiblemente de las capacidades cognitivas del estudiante. Algunas características de los problemas de esta categoría son:

- ✓ Para su solución, requieren de una mayor capacidad de análisis para determinar el posible modelo matemático que los represente.

- ✓ El estudiante debe tener unos conceptos bien definidos y claros inclusive de otras áreas, para obtener una mayor eficacia en la traducción de la situación problema.

- ✓ Requiere pleno conocimiento de la teoría o teorías para modelar la situación, ya que el enunciado es insuficiente para una total comprensión de lo que se debe aplicar. Si el estudiante no dispone de bases sólidas del conocimiento de conceptos, relaciones, y de otros elementos matemáticos, sería muy difícil acercarse a la solución del problema.

El solucionar un problema, requiere de habilidades y destrezas, además de unos conocimientos bien fundados sobre el tema, con estos elementos la tarea se facilita, caso contrario dificulta el trabajo de traducción del problema, al respecto el investigador Polya expresa *“sabemos claro está, que es difícil tener una buena idea si nuestros conocimientos son pobres en la materia, y totalmente imposible si la desconocemos por completo”*.¹⁸

¹⁸ Olazabal Carpio Ana María, Camarena Gallardo Patricia Cuarto congreso nacional y tercero internacional “Retos y expectativas de la universidad”. Instituto Politécnico Nacional IPN. Febrero 25 – 28 de 2004.

4.4.8 fundamentación pedagógica

4.4.8.1 Aprendizaje significativo: El psicólogo D. Ausubel (1968) desarrolló una teoría llamada aprendizaje significativo, el cual se define como aquel aprendizaje que tiene lugar cuando el individuo relaciona la información nueva con la propia, o la que ya posee, revalidando y reconstruyendo ambas en este proceso, es decir la estructura de los conocimientos previos condiciona las nuevas experiencias y conocimientos, y estos a su vez transforman y reestructuran aquellos. Por tanto aprendizaje significativo es totalmente opuesto al aprendizaje memorístico y mecanicista ya que una de sus grandes características es que lo aprendido se integra a la estructura cognitiva del estudiante, para aplicarse en diversos contextos y situaciones de la vida cotidiana, lo cual permite que el conocimiento sea evocado con facilidad pues es un aprendizaje con sentido.

Ausubel concibe al alumno como un procesador activo de la información, y afirma que el aprendizaje es sistemático y organizado, pues es un fenómeno complejo que no se reduce a simples asociaciones memorísticas. Aunque esta concepción señala la importancia que tiene el aprendizaje por descubrimiento (dado que el alumno reiteradamente descubre nuevos hechos, forma conceptos, infiere relaciones, genera productos originales, etcétera), considera que no es factible que todo el aprendizaje significativo que ocurre en el aula deba ser por descubrimiento. Antes bien, este autor propugna por el aprendizaje verbal significativo, que permite el dominio de los contenidos curriculares que se imparten en las escuelas, principalmente a nivel medio y superior.

Por otra parte señala que el aprendizaje en el individuo depende de los conocimientos previos que posee, los conceptos y proposiciones que maneja y de cómo las relaciona con la nueva información que adquiere, ya que toda experiencia o conocimiento de la persona puede ser aprovechada para su beneficio, hablando del aprendizaje.

El aprendizaje significativo, en su esencia tiene su base en que ideas expresadas simbólicamente, son relacionadas de forma coherente y no al azar o arbitraria con lo que el estudiante ya conoce o sabe. El aprendizaje significativo en concepto de Ausubel, presupone que el estudiante manifieste una actitud de aprendizaje significativo, es decir una buena disposición para relacionar de forma sustancial y no arbitraria el nuevo material con su estructura cognoscitiva, como que el material que aprende es potencialmente significativo para él.

Podemos ver claramente, que en el proceso de aprendizaje, interviene de forma imprescindible por una parte la actitud del estudiante, ya que si el material o conceptos puestos a su disposición inmediatamente son memorizados, el resultado será, el que comúnmente observamos en nuestras aulas, es decir desinterés en el estudio, bajo rendimiento académico y niños y jóvenes mecánicos, y repetitivos.

Otro aspecto importante que influye en el buen aprendizaje, lo constituye la manera como se lleva al estudiante aquello que se desea “enseñar”, esto quiere decir que puede existir una buena actitud por parte del estudiante, pero en algunas situaciones los docentes no presentan de forma clara, útil e “interesante” su propuesta, de tal manera que se cae en el desánimo y apatía del joven, no relacionando los conceptos con su estructura cognoscitiva. Esto genera el aprendizaje por repetición, dejando de lado la utilización de sus capacidades para aprender significativamente, de tal manera que no se tenga otro camino que la memorización.

4.4.9 Habilidades de pensamiento

Según lo señala Camarena en su documento “la modelación matemática en el ambiente de aprendizaje una innovación”, sostiene que para lograr una modelación de una situación es necesario desarrollar habilidades de pensamiento

como: habilidad para escribir el lenguaje natural al algebraico y viceversa, además de identificación de regularidades, saber manejar las diferentes representaciones de un objeto matemático, como la aritmética, gráficas, analítica y algebraica.

Todos los anteriores elementos son esenciales, para que el estudiante, al momento de enfrentar una situación problema, disponga de las herramientas necesarias para lograr con éxito dicho objetivo. Muchas de las dificultades en el proceso de encontrar posibles modelos para solucionar un problema, tienen su origen en las pocas habilidades de pensamiento en nuestros estudiantes, esto es palpable en el aula de clase.

4.4.10 Fundamentación didáctica

4.4.10.1 Resolución de problemas: Establecer el significado de dichas palabras, en conclusión de investigadores como Webster (1979), puede resumirse fundamentalmente en dos aspectos, el primero de ellos refiere que cuando se hable de solucionar un problema equivale a cualquier actividad que requiera ser hecha en matemáticas. En segundo lugar es equivalente a plantearse e intentar resolver una cuestión difícil o sorprendente.

Para otros investigadores como Polya, centró gran parte de su interés en el proceso del descubrimiento, aquel que explora cómo se derivan los resultados matemáticos. Advirtió que para entender una teoría se debe conocer cómo fue descubierta, por ello, su enseñanza hacía énfasis en el proceso de descubrimiento aun más que en el desarrollo de los ejercicios apropiados. Para involucrar a sus estudiantes en la solución de problemas generaliza su método en los siguientes pasos: entender o interpretar el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás.

José Joaquín García en su libro “*didáctica de las ciencia*”, describe en una de sus teorías, la importancia del trabajar con resolución de problemas, destacando que se establece una conexión entre el problema a solucionar, con la estructura conceptual y los esquemas de pensamiento (lógicos o no) que ya existen en la mente del individuo, para luego interpretar y estructurar la nueva situación de acuerdo con el esquema particular que se haya seleccionado, así, la resolución de problemas es concebido como un proceso de reestructuración, en donde el sujeto será capaz de dar significados a través de la relación entre las nuevas informaciones, con las que se enfrenta.

El trabajar teniendo un gran interés en la solución de problemas, debe promoverse constantemente en el aula, ya que el individuo desde sus primeros años de escolaridad, debe ser orientado en su aprendizaje a través, por ejemplo de la manipulación de elementos, es decir, interactuar con el medio, lo cual propicia y potencia su razonamiento, que le facilite el solucionar más efectivamente las situaciones cotidianas propias de su vida y entorno real.

La resolución de problemas, “no de ejercicios”, le da las herramientas necesarias al estudiante para enfrentar situaciones, que requieran, no de un proceso memorístico infundido en la escuela, sino de una facultad, en donde el desarrollo de destrezas y habilidades, le señalen el camino a seguir en la búsqueda de la solución a determinada situación. Esto es posible si generamos en los estudiantes, modelos de aula que los invite a descubrir, analizar, predecir, comparar, manipular en fin generar curiosidad, e interés, elementos básicos en el proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Además de los aspectos señalados anteriormente, uno de los factores más importantes que intervienen en el momento de abordar e interpretar una situación problema, lo constituye sin duda, la forma clara, ordenada y precisa como se presenta la información, ya sea en forma verbal o escrita.

Grandes dificultades se presentan en los estudiantes al intentar solucionar una situación problema, en donde su origen puede radicar al realizar el primer paso, como es simplemente leer y escribir con sentido claro, acorde con la situación requerida, ya que una mala interpretación fomentará errores que impedirá el correcto proceso que le facilite hallar la estrategia apropiada, para abordar y solucionar dicho problema. Al respecto Corredor Martha afirma “ *pese a que estamos rodeados de información escrita y leyendo desde muy temprana edad, es evidente que leer y escribir son actividades que plantean grandes dificultades, debido a que la comprensión y producción de textos son procesos que involucren la cognición, la capacidad lingüística y las variables socioculturales y didácticas*”¹⁹

El comentario anterior es muy pertinente, pues es visible y constante esta situación en los estudiantes, y una causa del bajo desempeño cuando se trata de interpretar y solucionar un problema.

En el propósito de obtener un aprendizaje con sentido, la comprensión de textos, juega un papel de gran importancia, porque permite enlazar ideas propias del lector, junto a las del texto incrementando la capacidad de análisis, creatividad y crítica. Al desarrollar la comprensión de texto, se pone en funcionamiento además de capacidades, ciertas aptitudes en donde junto con el proceso evocador o memoria, facilitará el aprendizaje, ya que esto implica interpretación y razonamiento por parte del lector, evitando la simple repetición literal de lo leído, de tal forma que para enfrentar un problema e intentar hallar la solución, se dispondrá de un proceso certero para alcanzar dicho objetivo.

¹⁹ Corredor Montagut, Martha; Pérez Angulo, Martha; López Ruby. Estrategias de Enseñanza y Aprendizaje 2009. 112 p.

Por otra parte la resolución de problemas, permite como estrategia favorecer el desarrollo de diversas capacidades, tanto cognitivas como mentales en los estudiantes, lo que ayuda y propicia en ellos un buen desempeño de los procesos mentales; sin embargo para que esto se logre, debe tener el concurso de algunos aspectos, al respecto Corredor M. opina “ *para que la estrategia de resolución de problemas contribuya al logro de aprendizajes significativos, es fundamental que cada situación problemática involucre la construcción de mínimo un concepto y que cada concepto se trabaje en más de una situación. La inclusión de conceptos ya trabajados, permitirá una consolidación de la estructura conceptual que ya tiene el estudiante*”.²⁰

Es muy claro el gran beneficio que ofrece para los estudiantes, plantearles diversas situaciones problema, que bien construidas y con objetivos claros, dejará de ser para ellos un “dolor de cabeza” , constituyéndose en elementos necesarios e imprescindibles en su quehacer cotidiano, con esto el trabajo del docente va mucho más allá de simple orientador.

4.4.11 La enseñanza de la modelación matemática

Biembengut, establece que la modelación matemática como método de enseñanza de la misma permite al alumno, no sólo aprenderlas sino a ver la aplicación a otras áreas del conocimiento, y de cierta manera contribuye a mejorar la capacidad para leer, interpretar y solucionar situaciones problema.

Es muy claro, que una de las dificultades que con mayor frecuencia se presenta en las aulas de clase, es la poca o errada interpretación que de las situaciones problema el estudiante realiza, por tanto es de gran importancia, lograr encaminar las actividades sin importar el área o materia, a procurar la implementación de procesos que faciliten la implementación y creación de estrategias, conducentes a la utilidad de modelos, que sin duda facilitará el proceso de enseñanza, y por ende el mejoramiento académico de nuestros estudiantes.

²⁰----- Estrategias de Enseñanza y Aprendizaje 2009. 131 p.

5. METODOLOGÍA

5.1 TIPO DE ESTUDIO

Este estudio tiene una fundamentación matemática, pedagógica y didáctica, es de tipo descriptivo y pretende a través de tres talleres diagnóstico identificar las dificultades que presentan los estudiantes de octavo grado, en el proceso de traducción del lenguaje natural al algebraico, de situaciones problema con enunciado literal y evocador con la letra como objeto y como incógnita en ecuaciones de primer grado, y por otra parte plantear sugerencias metodológicas que apoyen la superación de algunas de las dificultades encontradas en el proceso de modelación de dichas situaciones.

Por las características de la investigación, se abordará el método de estudio de casos, ya que dicho procedimiento realizado en un pequeño número de estudiantes, permitirá observar las particularidades de una situación concreta, la cual enfrentan en un contexto real.

Para muchos investigadores, el estudio de casos al facilitar la descripción de cualquier fase o proceso de la vida de una unidad, en sus interrelaciones dentro de un escenario determinado, es considerado como una de las mejores metodologías para realizar una investigación, ya que se tiene la existencia de un vínculo directo con la realidad, pues relaciona la teoría con la práctica.

De igual manera siendo un grupo pequeño el objeto de investigación, se facilita su estudio en detalle, lo cual garantiza la validez y confiabilidad en los resultados obtenidos.

5.2 DISEÑO METODOLÓGICO.

Objetivos Específicos	Métodos	Actividades	Técnicas de recolección y análisis de información	Recursos
<p>Diseñar talleres que permitan visualizar el conocimiento del estudiante a la hora de plantear y traducir enunciados literales y evocadores con ecuaciones de primer grado.</p>	<p>síntesis</p>	<p>Elaboración de propósitos generales del taller</p> <p>Diseñar instrumentos y acciones para el trabajo en el aula.</p> <p>Diseño de las secciones del taller para su aplicación en el aula.</p> <p>Definición de estrategia para la evaluación de resultados.</p>	<p>Análisis de experiencias anteriores sobre la aplicación de la modelación en situaciones problema.</p> <p>Taller o prueba diagnóstico(a)</p> <p>Diario de campo.</p>	<p>Bibliografía.</p> <p>Fotocopias.</p> <p>Computador.</p>

		Descripción de los papeles de los profesores y estudiantes en las actividades.		
Reconocer las concepciones y dificultades que tienen los estudiantes de octavo grado en la traducción del lenguaje natural al algebraico a través de una prueba diagnóstica.	Síntesis	<p>Construcción de la fundamentación matemática, pedagógica y didáctica del trabajo.</p> <p>Recopilación y síntesis de suposiciones teóricas para el desarrollo del trabajo.</p> <p>Identificación de categorías e indicadores para el análisis del trabajo de los estudiantes</p>	<p>Revisión de fuentes.</p> <p>Elaboración de referencias</p> <p>Elaboración de resúmenes con extracción de ideas principales.</p>	<p>Libros</p> <p>Monografías</p> <p>Páginas de Internet</p> <p>Fotocopias</p> <p>Computador.</p> <p>Estudiantes.</p>

		<p>Elaboración y aplicación de prueba diagnóstica para reconocer las concepciones y dificultades de los estudiantes.</p> <p>Análisis de las concepciones de los estudiantes</p>	<p>Prueba diagnóstica.</p> <p>Diario de campo.</p>	
<p>Aplicar talleres enfocados hacia la aplicación de la geometría en la traducción de enunciados literales con ecuaciones de primer grado, con estudiantes de octavo grado.</p>	<p>Observación</p> <p>Análisis</p> <p>Síntesis</p>	<p>Aplicación de talleres a estudiantes.</p> <p>Observación y descripción de la experiencia realizada</p> <p>Recopilación de la información sobre el trabajo de los estudiantes</p>	<p>Observación participante</p> <p>Diario de campo</p> <p>Prueba diagnóstica final.</p>	<p>Fotocopias</p> <p>Estudiantes</p> <p>Computador</p>

		<p>Análisis de resultados de acuerdo con las categorías e indicadores definidos</p> <p>Elaboración de conclusiones y del informe final</p>		
--	--	--	--	--

5.3 TÉCNICAS DE RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

Elaboración de los talleres de diagnóstico.

Se diseñan tres talleres que permiten observar las concepciones y dificultades de los estudiantes, en cada proceso.

Cada una de estos talleres contiene un objetivo o propósito y plantea sus características en cuanto al enunciado, literal o evocador, y al significado que se le da a la letra o variable en el contexto, los cuales servirán de referencia y soporte para obtener las conclusiones finales.

Después de la prueba se dialogó con los estudiantes a cerca de la interpretación y construcción del modelo matemático, de acuerdo a la situación planteada.

Todo lo anterior se recopiló por medio de entrevista, en donde se consignó los comentarios de los estudiantes, en diario de campo y grabaciones entre otros.

5.3.1 Taller N. 1

Propósito: Determinar las concepciones de los estudiantes en la traducción del lenguaje natural al algebraico, de proposiciones verbales.

Características del diseño.

Prueba escrita que consta de:

- Un punto en donde se formalicen las palabras a símbolos, el cual consta de ocho proposiciones verbales.
- Un punto donde se relacione el enunciado con la expresión matemática el cual consta de diez proposiciones verbales con su respectiva expresión matemática.
- Un punto donde se plantee una expresión algebraica que represente el enunciado literal.

Contenido matemático

- Expresiones algebraicas
- Concepto de variable
- Valor numérico de una expresión algebraica

Dificultades encontradas

1. Los estudiantes que conciben el incremento de un número como potencia
2. Estudiantes que relacionan el producto como adición
3. Estudiantes que conciben como única incógnita la “x”
4. Estudiantes que no logran identificar el numerador y denominador
5. Estudiante realizan la traducción sin tener en cuenta el orden y el sentido del enunciado
6. Estudiantes que requieren escribir una cantidad numérica para comprender el enunciado literal

7. Estudiantes que no logran escribir la ecuación por falta de símbolos y terminología
8. Estudiantes que no logran diferenciar la operación de un número, con el doble de una operación.
9. Estudiantes que relacionan los elementos que intervienen, sin tener en cuenta la presencia de la incógnita.

5.3.2 Taller N. 2

Propósito: Determinar las concepciones de los estudiantes en la traducción del lenguaje natural al algebraico en problemas y situaciones que lleve a la formulación de una ecuación que lo modele.

Contenido matemático

- Perímetro de triángulo y rectángulo
- Áreas del triángulo rectángulo`
- Razones y proposiciones
- Volumen de sólido (caja)
- Algoritmo de la división
- Ángulos suplementarios
- Ecuación
- Operaciones con reales
- Valor numérico de una expresión algebraica

Características del diseño.

Prueba escrita que consta de dos partes.

- Una primera parte en donde se plantean cuatro situaciones por medio de figuras geométricas, que deben ser modeladas en lenguaje algebraico a través de una ecuación.

- Una segunda parte compuesta por seis situaciones problema, que conlleva enunciado evocador las cuales deben ser modeladas y representadas como una ecuación.

Dificultades encontradas

1. Estudiantes con dificultad en el concepto de ecuación.
2. Estudiantes con dificultad al momento de relacionar el concepto de perímetro y área, con la figura geométrica.
3. Estudiantes con dificultad en construcción de modelo matemático, como consecuencia de la errónea evocación de la forma para determinar y calcular el área de la figura.
4. Estudiantes que relacionan los elementos que intervienen, sin tener en cuenta la presencia de la incógnita.
5. Estudiantes que operan los elementos de la ecuación por separado y no como una equivalencia.
6. Estudiantes que no logran llegar a una ecuación modelando la situación, aunque por cálculos logren obtener el resultado correcto.

5.3.3 Taller N. 3

Propósito: Comprobar la habilidad para estructurar modelos de solución a situaciones problema de la matemática.

Contenido matemático:

Números racionales

Perímetro

Ecuaciones y proporciones

Características del diseño.

Prueba escrita que consta de dos partes.

- Una primera parte en la que el estudiante debe construir, una situación problema a partir de la información dada.
- En la segunda parte el estudiante debe construir el modelo matemático que responda a la situación problema.

Dificultades encontradas:

1. Omisión de información relevante (datos conocidos y desconocido) y explícita en la situación problema.
2. El estudiante usa fácilmente símbolos literales para representar a las variables, desconociendo el papel que juegan dentro del contexto, y conciben erróneamente símbolos literales para denotar la situación.
3. Desconocimiento de la función de la variable en la información suministrada.
4. Expresiones en el lenguaje natural, que el estudiante confunde e interpreta como sinónimos, lo que conduce a traducción algebraica errónea.

5. Omisión de información relevante (datos conocidos y desconocido) y explícita en la situación problema.
6. El estudiante usa fácilmente símbolos literales para representar a las variables, desconociendo el papel que juegan dentro del contexto, y conciben erróneamente símbolos literales para denotar la situación.
7. Desconocimiento de la función de la variable en la información suministrada.
8. Expresiones en el lenguaje natural, que el estudiante confunde e interpreta como sinónimos, lo que conduce a traducción algebraica errónea.

6. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN.

A continuación se presenta el resultado de cada uno de las pruebas realizadas y los resultados obtenidos en cada uno de los niveles.

TALLER UNO.

Esta primera prueba permite visualizar las dificultades en la traducción del enunciado a una expresión matemática.

Primer nivel.

En este primer nivel se ubica un total de cuatro estudiantes (dos de La Salle y dos del Integrado Madre de la Esperanza), que logran diferenciar la terminología o símbolos literales en la traducción de enunciados.

Los demás estudiantes que presentaron dificultad, entre otras causas se pueden mencionar aspectos como concebir el incremento de un número como potencia, además algunos de ellos relacionan el producto como adición. Otro error visualizado lo constituye el relacionar los elementos que intervienen, sin tener en cuenta la presencia de la incógnita

Segundo nivel

Aquí se ubica un total de cuatro estudiantes (dos de La Salle y dos del Integrado Madre de la Esperanza), que además de diferenciar la terminología en los enunciados logran conceptualizar y representar la incógnita en una situación dada.

Entre las dificultades presentes en los estudiantes que no alcanzaron este desempeño se destaca el hecho que ellos, requieren escribir una cantidad

numérica para comprender el enunciado literal, lo que no les permite con claridad representar la incógnita.

Tercer nivel.

Aquí se ubica sólo dos de los ocho estudiantes (uno de La Salle y uno del Integrado Madre de la Esperanza), formularon o estructuraron una expresión matemática de la situación a través de la relación entre las variables involucradas.

Es de anotar que los demás estudiantes, no alcanzaron buen desempeño en este nivel, ya que entre algunas dificultades se encuentra el de relacionar los elementos que intervienen, sin tener en cuenta la presencia de la incógnita.

Cuarto nivel

Aquí se ubica sólo dos estudiantes (uno de La Salle y uno del Integrado Madre de la Esperanza), que logran proponer formas de expresar o modelar correctamente una situación.

Los demás estudiantes no logran expresar matemáticamente una situación, teniendo como una causa principal, el no poder encontrar relación clara entre las variables.

TALLER DOS

Esta prueba permite determinar las dificultades de los estudiantes al formular una ecuación que represente la información dada.

Primer nivel

En este nivel se ubican un total de cinco estudiantes (tres de La Salle y dos del Integrado Madre de la Esperanza), que para la traducción de los enunciados planteados, lograron diferenciar los símbolos literales y la terminología.

Entre las dificultades que presentaron los restantes estudiantes, podemos citar, aspectos como la poca claridad en el concepto de ecuación, además de estudiantes que relacionan los elementos que intervienen, sin tener en cuenta la presencia de la incógnita, entre otras causas.

Segundo nivel.

Aquí se registran tres estudiantes (dos de La Salle y uno del Integrado Madre de la Esperanza), que lograron conceptualizar y representar la incógnita en una situación dada, además de diferenciar la terminología en los enunciados planteados.

Entre las dificultades presentadas por los demás estudiantes, podemos mencionar la poca claridad al momento de la construcción de modelo matemático, como consecuencia de la errónea evocación de la forma para determinar y calcular el área de la figura, por otra parte, dichos estudiantes mantienen el equivocado procedimiento de relacionar los elementos que intervienen, sin tener en cuenta la presencia de la incógnita.

Tercer nivel.

En este nivel se presentan dos estudiantes (uno por cada institución) que lograron formular, o estructurar mediante modelos las situaciones dadas, a través de la relación de las variables involucradas.

Varias son las causas por las cuales el número de estudiantes que no logra alcanzar el nivel es alto, entre estas tenemos, que ellos operan los elementos de la ecuación por separado y no como una equivalencia, siendo la principal causa de esto, la dificultad al relacionar las variables con la información dada.

Cuarto nivel.

En este nivel ningún estudiante logra proponer varias formas de expresar matemáticamente o modelar las situaciones propuestas.

TALLER TRES

Esta prueba permite determinar las dificultades que tienen los estudiantes al crear y modelar una situación problema, tomando como referencia fragmentos de esta.

Primer nivel.

En este nivel se ubican un total de cinco estudiantes (tres de La Salle y dos del Integrado Madre de la Esperanza), que lograron diferenciar la terminología o símbolos literales en la traducción de los enunciados.

Son varias las dificultades de los demás estudiantes, que no les permite realizar un uso correcto de los símbolos literales, entre ellos está, el que son usados para representar a las variables, desconociendo el papel que juegan dentro del contexto, y conciben erróneamente símbolos literales para denotar la situación.

Segundo nivel.

En este nivel se ubican un total de cinco estudiantes (tres de La Salle y dos del Integrado Madre de la Esperanza), que además de diferenciar la terminología en los enunciados, lograron conceptualizar y representar la incógnita en una situación dada.

Los demás estudiantes que no lograron un mejor desempeño en este nivel, presentan dificultades tales como la omisión de información relevante suministrada, podemos citar datos conocidos y desconocido además de explícitos en la situación problema. Otra situación que se presentó, lo constituye el desconocimiento de la función de la variable en la información suministrada.

Tercer nivel.

En este nivel se registran tres estudiantes (dos de La Salle y uno del Integrado Madre de la Esperanza), que lograron formular o estructurar las expresiones, hallando su modelo, a través de la relación entre las variables involucradas.

Los demás estudiantes tuvieron dificultad al intentar modelar las situaciones propuestas por ellos mismos debido entre otras causas, a que se recurre fácilmente a los símbolos literales para representar a las variables, desconociendo el papel que juegan dentro del contexto, y conciben erróneamente símbolos literales para denotar la situación.

Cuarto nivel.

En este nivel se registran dos estudiantes (uno de La Salle y uno del Integrado Madre de la Esperanza), que lograron modelar y expresar matemáticamente las situaciones propuestas, además de plantear nuevas situaciones problema.

Entre las causas que no permitió el buen desempeño de gran número de estudiantes en este nivel podemos mencionar las siguientes, el estudiante usa fácilmente símbolos literales para representar a las variables, desconociendo el papel que juegan dentro del contexto, y conciben erróneamente símbolos literales para denotar la situación, otra causa es el desconocimiento de la función de la variable en la información suministrada y también podemos mencionar el tomar expresiones en el lenguaje natural, que el estudiante confunde e interpreta como sinónimos, lo que conduce a traducción algebraica errónea.

CONCLUSIONES

En la aplicación de cada uno de los talleres, se identifica el nivel de desarrollo o desempeño del estudiante, en cuanto a la traducción del lenguaje natural al algebraico, en enunciados literales y evocadores.

En la primera prueba, algunos estudiantes interpretaron los símbolos y terminología, que encierran una situación específica. Sin embargo otros educandos presentaron ciertas dificultades en concebir el incremento de un número como una potencia de dicho número, relacionan el producto como una adición, estudiantes que conciben como única incógnita la “x”, y estudiantes que realizan la traducción sin tener en cuenta el orden y el sentido del enunciado

En la segunda parte el trabajo se torna algo complejo, debido a que aparece la ecuación y los enunciados evocadores, que hacen que el educando requiera de los presaberes ya constituidos y los emplee en la traducción y construcción del modelo matemático de dicha situación. En esta prueba se observó que algunos estudiantes presentaron dificultad en el concepto de ecuación, dificultad al momento de relacionar el concepto de perímetro y área, con la figura geométrica, estudiantes que no logran llegar a una ecuación modelando la situación, aunque por cálculos logren obtener el resultado correcto, dificultad en construcción de modelo matemático, como consecuencia de la errónea evocación de la forma para determinar y calcular el área de la figura.

En esta prueba se observó que algunos estudiantes presentaron dificultad en el concepto de ecuación, dificultad al momento de relacionar el concepto de perímetro y área, con la figura geométrica, estudiantes que no logran llegar a una ecuación modelando la situación, aunque por cálculos logren obtener el resultado

correcto, dificultad en construcción de modelo matemático, como consecuencia de la errónea evocación de la forma para determinar y calcular el área de la figura.

Para la última prueba se les solicitó que construyeran un modelo matemático que representara la situación; de los estudiantes de los dos colegios, el 50% de cada uno de ellos, es decir dos del colegio La Salle y dos del colegio Integrado Madre de la Esperanza, hicieron la traducción del lenguaje natural al algebraico.

Sugerencias metodológicas a desarrollar en el aula

- Trabajar con los estudiantes frecuentemente la traducción de situaciones al lenguaje matemático (modelo), y viceversa. Llevar un control del proceso teniendo en cuenta niveles de desempeño para reforzar y crear en el estudiante el hábito de construir o idear formas y expresiones de representar matemáticamente las situaciones.

De antemano es bueno y recomendable lograr gradualmente en el educando la habilidad en el proceso de modelación, pero es conveniente estructurar la forma de pensar, el cómo abordar una situación problema y por ende el papel que desempeña en el contexto la variable o incógnita; es decir con los datos o información suministrada. Pero cabe anotar que dicho proceso de aprendizaje debe estar reflejado no solo en grado séptimo, octavo, noveno, décimo y undécimo, sino en los grados de primaria, donde se comienza a construir y a explorar contextos o ambientes.

- Aplicar talleres de comprensión de lectura, en los cuales el estudiante aprenda a leer y a entender lo que lee, y obviamente a expresar y representar matemáticamente una situación.

- Propiciar en el educando una estructura de pensamiento que lo induzca a seguir un orden o secuencia en el planteamiento de una situación específica, y más aun cuando las matemáticas se correlaciona con otras ciencias del saber.

- Crear situaciones cotidianas de interés que orienten e involucren al estudiante en la búsqueda de un modelo matemático. Para lograr este objetivo es necesario que el estudiante posea los fundamentos apropiados sobre los pasos que debe tener en cuenta para llegar a la expresión matemática.

- En cuanto al diseño de los talleres es conveniente que se orienten más hacia la aplicación de la geometría, ya que a los educandos se le facilita la representación matemática de la situación problema a través del uso de las gráficas.

- A partir de cierta información expresada en lenguaje natural y suministrada por el docente, el estudiante crea una situación problema que responda a una o varias preguntas según su criterio y además intente expresarla en lenguaje matemático.

BIBLIOGRAFÍA

- BASSANEZI R. Carlos, Encino-aprendizagem com modelagem matemática. Editora Contexto (2002).Sao Paulo p.24
- BIEMBENGUT, María Salett, HEIN, Nelson. Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza-aprendizaje. 38 ed. Blumenau: Épsilon, 1997. pp. 1-8.
- CAMARENA, Patricia. OLAZABAL, Ana María. Categorías en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico. UAEM, 2004, pp. 3-4. IV congreso nacional y tercero internacional. Retos y expectativas de la universidad (Febrero 25-28; 2004).
- CORREDOR Montagut, Martha;PÉREZ Angulo, Martha; LÓPEZ Ruby. Estrategias de Enseñanza y Aprendizaje 2009. 112 p.
- EDUCACIÓN MATEMÁTICA: Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. María Salett Biembengut, Nelson Hein. Santillana vol. 16, núm. 2, agosto 2004, pp. 105-25.
- EL MÉTODO DE ESTUDIO DE CASO. Estrategia metodológica de la investigación científica. Martínez C. Piedad Cristina. Pensamiento y gestión No 20
- ESTRATEGIAS DOCENTES PARA UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO: Constructivismo y aprendizaje Significativo: Díaz, F. y Barriga, A. 2002, México, Mc Graw Hill. pp. 24-62.

- GARCIA, José Joaquín. Didáctica de las ciencias: Utilización didáctica de las situaciones problémicas. Sección 11. pp. 73-120 año 2003.
- GODINO, Juan D. Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat-maestros. 2003 pp. 48-50
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos curriculares. Santa fe de Bogotá, 1998.
- OLAZABAL Carpio Ana María, CAMARENA Gallardo Patricia Cuarto congreso nacional y tercero internacional “Retos y expectativas de la universidad”. Instituto Politécnico Nacional IPN. Febrero 25 – 28 de 2004.
- SUAREZ. A .Carlos .Tesis doctoral “Aceptación en España de los criterios rigurosos del análisis matemático en siglos XIX y XX”. Universidad de las Palmas de gran Canaria (2007).
- VERA Francisco. Breve historia de la matemática. Segunda edición. Editorial Losada S.A. pp. 53-54 Buenos Aires (1961).

ANEXOS

**COLEGIO LA SALLE DE BUCARAMANGA
COLEGIO INTEGRADO MADRE DE LA ESPERANZA CIME.
SABANA DE TORRES
TALLER 1**

NOMBRE: _____.

GRADO: _____.

OBJETIVO: Determinar las dificultades de los estudiantes en la traducción del lenguaje natural al algebraico en enunciados y expresiones.

A. FORMALIZACIÓN DE LAS PALABRAS A LOS SÍMBOLOS.

De acuerdo al enunciado escribir la expresión matemática correspondiente.

1) Un número incrementado en 3:

_____.

2) Siete más que otro número:

_____.

3) Un número disminuido en 12:

_____.

4) El producto de tres y un número:

_____.

5) Cinco veces un número:

_____.

7) El cociente de un número y nueve:

_____.

8) La cuarta parte de un número:

_____.

B. RELACIONES DE ENUNCIADOS CON EXPRESIONES MATEMÁTICAS

A continuación relacionar cada enunciado de la izquierda con la expresión matemática correspondiente de la derecha, a través de una flecha.

a) La diferencia entre dos veces un número y dos	$10(x-4)$
b) el doble de la suma de tres y un número	$6(x-8)$
c) el doble de un número aumentado en tres	$6x - 8$
d) diez veces la diferencia de un número y cuatro	$2(3+x)$
e) dos incrementado en cinco veces un número	$10(4-x)$
f) el doble de un número aumentado en cinco	$3x+1$
g) uno más que tres veces un número	$2+5x$
h) el triple de un número aumentado en uno	$2x-2$
i) seis veces la diferencia entre uno y ocho	$2x+3$
j) seis veces un número disminuido en ocho	$2(x+5)$

C. DE LA TRADUCCIÓN A LA ECUACIÓN

Plantee los siguientes enunciados utilizando lenguaje matemático, donde se relacionen los datos conocidos con los no conocidos, de tal forma que obtenga una expresión que represente dicho enunciado.

1) el producto de 45 y un número k es 90:

2) la diferencia entre un número p y 12 es 15:

3) un número t incrementado en 5 es 70:

4) cuatro menos que el triple de un número es 11:

5) siete veces h es el doble de la suma de h 9 y:

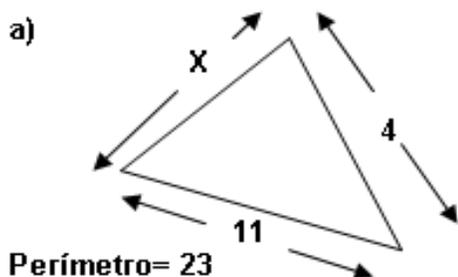
COLEGIO LA SALLE DE BUCARAMANGA
COLEGIO INTEGRADO MADRE DE LA ESPERANZA CIME.
SABANA DE TORRES
TALLER 2

NOMBRE: _____.

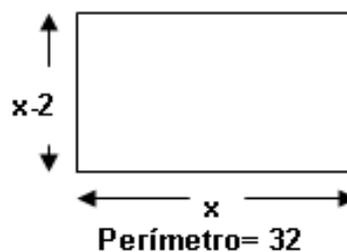
GRADO: _____.

OBJETIVO: Determinar las dificultades de los estudiantes en la traducción del lenguaje natural al algebraico en problemas y situaciones con enunciado evocador que lleve a la formulación de una ecuación que lo modele.

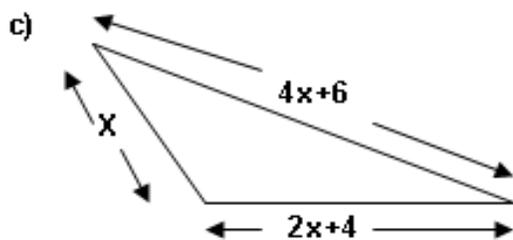
A. DE ACUERDO A LA FIGURA Y A LA INFORMACIÓN CONSTRUYA UNA ECUACIÓN QUE INVOLUCRE LA "X".



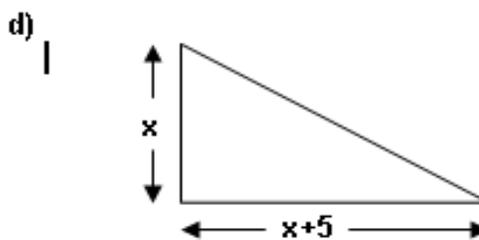
Ecuación: _____



Ecuación: _____



Ecuación: _____



Ecuación: _____

B. DEL PROBLEMA A LA ECUACIÓN

De acuerdo a la situación planteada, formular una ecuación que represente la información dada.(Escribir el proceso o método de análisis que va a emplear para hallar la ecuación).

1. Las edades de un padre y su hijo suman 83 años. La edad del padre excede en tres años al triple de la edad del hijo. Hallar ambas edades.
2. Los alumnos del grado octavo, están visitando el Museo del Oro En una sala del museo el grupo observó ocho vitrinas con distintas piezas en oro de la cultura Quimbaya, y 17 piezas colgadas en las paredes. Cada vitrina tiene el mismo número de piezas y el total de piezas que hay en la sala es 129. ¿Cuántas piezas hay en cada vitrina?.
3. En un colegio en el nivel de octavo hay 120 estudiantes. La razón entre el número de niños y niñas es de 5:7, ¿Cuál es la diferencia entre el número de niños y el número de niñas en el nivel octavo?.
4. Las dimensiones de una caja rectangular son: 6, 8 y 12 cm respectivamente. Si cada una de estas dimensiones se disminuye en la misma cantidad, el volumen disminuye en 441 cm. Calcular esta cantidad.
5. La suma de dos números es 59 y si el mayor se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo es 5. Hallar los números.
6. Se necesita hallar la medida de dos ángulos suplementarios cuyos valores están en la razón 4:5.

COLEGIO LA SALLE DE BUCARAMANGA
COLEGIO INTEGRADO MADRE DE LA ESPERANZA CIME.
SABANA DE TORRES
TALLER 3

NOMBRE: _____.

GRADO: _____.

OBJETIVO: Determinar las dificultades de los estudiantes en la traducción del lenguaje natural al algebraico en problemas y situaciones que lleve a la formulación de una ecuación que lo modele.

A. En cada recuadro aparece una información, utilizando dichos datos, crear una situación problema, que responda a una o varias preguntas según su criterio.

1. Andrés tiene un cuarto de la edad de David.

2. El perímetro de un triángulo es de 42 metros. Uno de los lados mide 2 metros más que el segundo.

3. El grado octavo tiene 14 más chicas que chicos y en total hay 430 estudiantes.

B. Construya la ecuación que responda a la pregunta o preguntas enunciadas en las situaciones problema, que en el punto anterior usted formuló.