ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS PROGRESIONES ARITMÉTICAS EN NOVENO GRADO

LEONARDO TARAZONA SERRANO
EDWIN VEGA MONSALVE

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS PROGRESIONES ARITMÉTICAS EN NOVENO GRADO

LEONARDO TARAZONA SERRANO
EDWIN VEGA MONSALVE

Trabajo de grado para optar al título de Licenciados en Matemáticas

DIRECTOR
Esp. GERMAN ALONSO JAIMES PATIÑO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

A nuestro Señor Jesucristo, mediante cuya luz realizamos este trabajo; a nuestros padres y hermanos, quienes son las personas más importantes e influyentes en nosotros; a los estudiantes de noveno grado del Tecnológico, por su valioso aporte y por su amistad.

AGRADECIMIENTOS

Deseamos agradecer a Maira, Deissy, José, Jerson y a los demás estudiantes de noveno grado por participar de esta investigación. A nuestro tutor, el profesor Fernando Pérez, por su constante apoyo y motivación en el transcurso de la Práctica Docente y la Investigación.

Al Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata de Bucaramanga, por permitirnos ingresar en sus aulas y desarrollar este proyecto.
A nuestro orientador, el profesor Germán Jaimes, por sus valiosos aportes como educador y persona. Al profesor más carismático de nuestra carrera, Juan de Dios Urbina, por su respeto hacia los estudiantes de la licenciatura, por sus enseñanzas y por toda la colaboración brindada en la práctica pedagógica I y II.

A los profesores de la licenciatura por todo el conocimiento compartido a lo largo de estos cinco años que transcurrieron. A los compañeros de la licenciatura por su amistad y por compartir tantos momentos.
Unas gracias especiales a nuestros padres y hermanos por brindarnos su cariño y apoyo desinteresado; gracias a ellos somos Licenciados en Matemáticas y seguiremos forjando nuestro futuro para la mejora de la educación en Colombia.

Y a todas aquellas personas que nos colaboraron de alguna forma en la realización del Servicio Social Educativo y Trabajo de Grado II.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

A MANERA DE INTRODUCCIÓN

"Enseñar exige seguridad, capacidad profesional y generosidad".

Paulo Freire[2]

En nuestro Servicio Social Educativo y Trabajo de Grado I pensamos en realizar una práctica pedagógica diferente, comparada con las clases tradicionales en las cuales nosotros fuimos educados. No es que estemos afirmando que este modelo es malo; simplemente lo que queremos es implementar y tener una nueva experiencia con un método pedagógico donde nuestros estudiantes sean sujetos participativos en el proceso de aprendizaje, para que de esta forma tanto ellos como nosotros nos sintamos a gusto en el camino del conocimiento. Por tanto, debe ser para nosotros como docentes, más que un problema, un reto pedagógico llevar esta ciencia de la mejor manera a nuestros estudiantes, por medio de herramientas eficaces que conlleven a un aprendizaje significativo.

Es por eso que se debe dar inicio a una etapa educativa que permita aplicar todas aquellas teorías que se adquirieron a lo largo de los estudios realizados, tanto de carácter científico como educativo, pero de una forma distinta a la tradicional, es decir, buscando nuevas alternativas que llamen la atención de los estudiantes y los orientan a un mejor aprendizaje.

[2] Paulo Freire (1921-1997), educador brasileño nacido en Recife. Se graduó como abogado, pero pronto se dedicó por completo a la educación, campo en el que desarrolló un sistema de aprendizaje original y controvertido que le dio fama internacional y le supuso dos órdenes de detención en su país. (Enciclopedia Encarta, 2007).

Figura 1. Estudiantes de investigación

Fuente: Autores.

De acuerdo con la experiencia vivida con nuestros estudiantes en el Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata y las indicaciones dadas por nuestro orientador de Práctica, decidimos para nuestro Trabajo de Grado II realizar una investigación de aula en matemáticas de tipo cualitativo, ya que es una alternativa viable en el aula que permite cambiar las concepciones del maestro desde sus prácticas pedagógicas. A su vez busca construir, explicar y resolver un problema educativo. Pretendemos desarrollar la capacidad para realizar generalizaciones y deducciones a partir de las progresiones aritméticas; más claramente, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Es posible desarrollar la capacidad deductiva[3] mediante el aprendizaje de las progresiones aritméticas en los estudiantes de noveno grado del Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata? En torno a este interrogante se realizará nuestro trabajo de investigación, en el cual nos trazamos como objetivo principal **el construir una estrategia metodológica que contribuya a lograr el aprendizaje de las progresiones aritméticas en estudiantes de noveno grado del Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata.**

Una vez definida la pregunta de investigación y su respectivo objetivo empezamos con nuestra tarea, la cual consiste en una investigación de aula de tipo cualitativo.

[3] Según la Real Academia Española (RAE), deducir es sacar consecuencias de un principio, proposición o supuesto.

Este trabajo de investigación lo realizamos en el Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata de Bucaramanga, una institución de carácter público, en un grupo de 20 estudiantes de noveno grado de bachillerato, escogidos al azar de tres grupos de noveno grado de dicha institución. Para la exploración de esta investigación tomamos la información de cuatro estudiantes: Maira Alejandra Quintero Berbesi, Jerson Albey Villamizar Jaimes, José Alonso Caballero Márquez y Deissy Paola Hernández Uscátegui, a quienes nos referiremos brevemente como Maira, Jerson, José y Deissy, respectivamente. Los tres primeros habían participado con nosotros en la práctica docente[4], mientras que Deissy no. De estos estudiantes tomamos los diferentes datos para nuestra investigación, entre los que se encuentran los siguientes: fotografías, diarios de clase, resolución de guías y una entrevista al final de la práctica.

Nuestro trabajo de grado es una pequeña muestra de lo que es una investigación de aula en matemáticas a nivel de pregrado, ya que una investigación formal, en educación o en matemáticas, como la que se desarrolla en países como Portugal y Brasil, se realiza en su mayoría a nivel de maestría. Sin embargo, quisimos hacerlo para empezar a conocer mejor esta estrategia y valorar más este tipo de trabajo, que lamentablemente en otras disciplinas no se toma como un trabajo de grado serio al igual que el de cualquier campo de investigación.

A continuación se realizará una síntesis de la propuesta, donde se explicará el contenido de cada uno de los cinco capítulos que abarcarán nuestra investigación:

El primer capítulo se denomina “Búsqueda del problema”: se conocerán los protagonistas principales de nuestra investigación, a través de una pequeña autobiografía realizada por ellos.

[4] Servicio Social Educativo y Trabajo de Grado I.

El segundo capítulo se denomina “Progresiones aritméticas”; aquí se tocará un poco la parte histórica relacionada con los primeros problemas que trabajaron algunas culturas sobre las progresiones aritméticas. Posteriormente se presentarán las definiciones y teorías necesarias en matemáticas para desarrollar la estrategia metodológica por medio de algunas definiciones y deducciones.

El tercer capítulo se denomina “Investigación en el aula (cualitativa)”; en este se explicará cómo se define la investigación a nivel de educación, sus aportes, sus debilidades, y cómo se refleja su importancia en nuestro medio matemático.

El cuarto capítulo se denomina “Conociendo el problema”; se verá cómo se desarrolla esta investigación en la práctica misma, la metodología y el por qué es necesario realizar este tipo de investigación. Del mismo modo se presentará el desarrollo de las actividades, su planeación e implementación en el aula de clase. Además, se darán a conocer algunas categorías que definimos dentro de nuestra investigación de aula.

En el quinto y último capítulo, “Conclusiones”, se almacenan todas las diversas experiencias que se adquirieron durante el trabajo de investigación, logrando extraer una serie de conclusiones, y además obteniendo aclaraciones, críticas y recomendaciones.

BÚSQUEDA DEL PROBLEMA

"Enseñar exige respeto a la autonomía del ser del educando".

Paulo Freire

Como se había mencionado anteriormente, nuestra pregunta de investigación surgió de la experiencia vivida durante el transcurso del Servicio Social Educativo y Trabajo de Grado I, ya que durante este tiempo se pudo encontrar, que los estudiantes presentaban una serie de inconvenientes para comprender el por qué o de donde surgían las expresiones matemáticas. El problema que surgía en algunos estudiantes era que presentaban cierta dificultad mientras el profesor Fernando Pérez[5] explicaba las deducciones de los diversos temas de matemáticas, puesto que los alumnos mostraban confusión y experimentaban choques, cosa a la que no estaban acostumbrados, pues ellos estaban familiarizados con procesos netamente mecánicos y era más fácil aplicar las fórmulas que deducirlas.

Debido a esto deseamos plantear una estrategia metodológica que permitiera cambiar estas concepciones y ayudar a nuestros estudiantes a desarrollar la capacidad de deducción y de generalización, ya que según el psicólogo Jean

[5] Profesor tutor de nuestra práctica pedagógica.

Piaget[6] en su teoría cognitiva, de los doce años en adelante los jóvenes se encuentran en la etapa de operaciones formales, y es ahí, en esta etapa, donde el adolescente logra la abstracción sobre conocimientos concretos observados que le permiten emplear el razonamiento lógico inductivo y deductivo. Lo que se pretende en este trabajo es probar si esta afirmación que hace Piaget es cierta en nuestro medio educativo, más exactamente en las aulas, para responder a la pregunta de investigación planteada:

¿Es posible desarrollar la capacidad deductiva mediante el aprendizaje de las progresiones aritméticas en los estudiantes del Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata? Relacionando lo aludido anteriormente, se quiere poner en evidencia que en el aprendizaje de todo concepto matemático hay la necesidad de favorecer el desarrollo de la capacidad de pensamiento (estructura cognitiva) de los estudiantes, y que en la práctica pedagógica se deben emplear metodologías que propicien el razonamiento, la comprensión y el análisis, y que en general contribuyan a desarrollar las operaciones mentales y las funciones cognitivas del educando.

[6] Jean Piaget (1896-1980), psicólogo y pedagogo suizo, conocido por sus trabajos pioneros sobre el desarrollo de la inteligencia en los niños. Sus estudios tuvieron un gran impacto en el campo de la psicología infantil y la psicología de la educación. (Enciclopedia Encarta, 2007).

Figura 2. Experiencia Uno.

Fuente: Autores.

En la experiencia como docentes con los estudiantes de noveno grado de bachillerato es importante resaltar (en el aprendizaje de las progresiones aritméticas) la forma en que algunos de ellos desarrollan de manera ingeniosa diversos métodos para calcular el término n-ésimo, la suma de términos y la interpolación de medios, por simple intuición o por la aplicación del razonamiento progresivo, sin que el profesor se lo haya propuesto. Otro aspecto para destacar de la experiencia con estudiantes de esta institución es la dificultad que presentan algunos de ellos para realizar generalizaciones y deducciones en situaciones concretas de las progresiones aritméticas.

Sin embargo, todo esto también nos llevó a concluir que el tipo de conocimiento que se maneja en el área de matemáticas va mucho más allá del simple uso de una notación numérica, ya esta es una forma de conocer nuestro mundo, permitiendo a los estudiantes aprender a comunicarse y además a explorar, interpretar, conjeturar y predecir las diferentes cosas que suceden en nuestro alrededor. En otras palabras, las matemáticas acceden a descubrir objetos acerca de la naturaleza en el que cada uno de nosotros vivimos. Se ajustan en la dirección de los elementos de número, cantidad, forma y lugar, las cuales se basan en el desarrollo de conceptos mucho más complejos, como lo es en nuestro caso el estudio del álgebra.

Algo que se tuvo en cuenta a la hora de desarrollar nuestro proyecto de investigación de aula fue la necesidad de reflexionar acerca de las competencias ciudadanas propias de las matemáticas que propone el ministerio de Educación Nacional, ya que contribuyen a promover habilidades de trabajo en equipo, valoración por el otro, valoración de la diferencia y participación democrática (Chaux, Velásquez & Lleras, 2004, p. 214). Los estándares básicos de calidad de educación en matemáticas[7] proponen que el conocimiento matemático contribuye a que las personas se inserten de manera responsable en la vida nacional, favorece a la formación de ciudadanos responsables y comprometidos, en la medida que los estudiantes se relacionen en su medio estudiantil en una forma positiva y constructiva.

Las competencias ciudadanas en la clase de matemática se pueden desarrollar de las siguientes formas:

- ❖ Uso de técnicas de aprendizaje cooperativo a través de ejercicios de dilemas morales.

- ❖ Diseño de proyectos de aula, como es el caso nuestro, el cual será definido a continuación por Saldarriaga (2004, p. 222):

> *Los proyectos de aula son una estrategia con la cual se puede combinar el uso de las matemáticas con el desarrollo de las competencias ciudadanas. Estos pueden tener diferentes niveles de complejidad dependiendo del grado en el que se realicen. Las prácticas de los proyectos de aula se basan en aspectos de la vida cotidiana de los estudiantes, lo que permite que estos logren realizar un aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos y además puedan desarrollar una sensibilidad ciudadana.*

[7] Los Estándares Básicos de Calidad en Matemáticas se encuentran en la página web www.mineducacion.gov.co.

Habitualmente los docentes pensamos que, por su contenido, la clase de matemáticas no debe salirse del aprendizaje de habilidades y del lenguaje abstracto que ella implica. Sin embargo, las competencias ciudadanas y los estándares básicos que plantea el Ministerio de Educación Nacional muestran que se dan muchas posibilidades para que el trabajo matemático se pueda combinar con las competencias ciudadanas. En parte, nuestro proyecto de investigación se fundamentará en esa premisa, de suerte que sea no solo una estrategia que permita desarrollar competencias cognitivas, sino que permita además que nuestros estudiantes sean personas de bien y contribuyan al mejoramiento del país.

I. LOS ESTUDIANTES

Son aquellos jóvenes de noveno grado que fueron seleccionados para participar en la experiencia de investigación y con los cuales adquirimos cierta empatía debido a la confianza que les brindamos. Se puede decir que hubo una buena relación maestros-alumnos y viceversa, en un sentido menos académico; implicó ponerse "en los zapatos de ellos”[8], en el sentido de entender realmente sus penas, sus temores, o, más positivamente hablando, sus alegrías.

Hay que tener presente además que tres de los cuatro jóvenes trabajaron con nosotros en la primera práctica pedagógica y deseaban participar de este proyecto de investigación. A continuación se presenta una breve autobiografía escrita por cada uno de ellos, donde narran sus experiencias académicas en cuanto a la matemática que han aprendido a lo largo de su vida.

[8] Con esto se quiere hacer referencia a ubicarnos en la situación cotidiana y académica en que vivían nuestros estudiantes de investigación.

Maira Alejandra, más conocida como "la abuelita", tiene 14 años. Demuestra ser una chica muy juiciosa y es muy amigable con sus compañeros y con sus maestros. Participa mucho en clase y le gusta cuestionar mucho lo que realiza el profesor de matemáticas en el tablero; dicho en otras palabras, "no come entero", ya que le gusta comprender las cosas lo mejor posible.

AUTOBIOGRAFÍA

Figura 3. Maira Alejandra

Fuente: Autores.

Maira Alejandra Quintero Berbesi, ese es mi nombre. Nací el 28 de octubre de 1992 en Bucaramanga. En 1997 empecé mis estudios en la institución Centro Educativo Oriente Miraflores y estuve allí desde el año 1997 hasta el 2003. Durante mi primaria siempre tuve unos profesores de matemáticas excelentes y siempre me llamó la atención todo lo que tenía que ver con números y lo relacionado con ellos.

Cuando iba a empezar a estudiar el bachillerato, mi mamá decidió cambiarme de colegio e ingresé al Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata, más conocido como el Tecnológico. En sexto y séptimo tuve el mismo profesor. Él era muy sereno y tenía una forma de explicar súper. En el 2006 nos cambiaron los profesores y quedamos con Fernando Pérez, un profesor muy pilo, ya que sabe mucho, pero el problema es que él recocha con nosotros y forma el desorden, luego se hace el serio y nos va mal. Durante mi bachillerato me ha ido regular, puesto que en octavo no entendí casi nada y en lo poco que llevo en noveno, ni decir…No he entendido nada y las ganas de aprender se me han ido, pero ahí voy y quisiera terminar el bachillerato y escoger una carrera, graduarme y también, ser la mejor y lo voy a lograr. ¡Ah!, otra cosita: mi mamá se llama Sorela Berbesi y mi papá Pedro Quintero.

Vivo con mi mamá y un hermano solamente. Soy la única mujer de cinco hermanos, dos mayores y dos menores. Toda mi vida he vivido en Morrorico con mis tíos, ellos me quieren y me apoyan mucho. Mi hermano mayor se llama Esléiber Jaimes Berbesi, tiene 26 años y es profesor. Mi segundo hermano es Jónathan Quintero, tiene 20 años y es bachiller. El tercero es Pedro Quintero y con él vivo, tiene once años y va en sexto; y el último es Miguel, que tiene seis años y vive en Venezuela. Tengo una familia y unos excelentes amigos, y mi mejor amigo se llama Édgar y lo adoro. Sé que ahorita los locos de Leonardo y Edwin me van a ayudar mucho para aprender, y no se les olvide que yo soy la mejor.

Deissy Paola tiene 14 años. Es una joven muy callada en clase y es muy responsable en sus materias.

AUTOBIOGRAFÍA

Figura 4. Deissy Paola

Fuente: Autores

Mi nombre es Deissy Paola Hernández Uscátegui. Nací el 8 de noviembre de 1992 y estudié en el jardín Nueva Granada de Piedecuesta, donde aprendí gran parte de la matemática. La primaria la hice en La Niña María, donde me desempeñé y comprendí los problemas que nos planteaba la profesora de matemáticas, resolviéndolos y cuestionándome cada desarrollo en las diferentes situaciones. Llevo tres años en el Tecnológico, y aunque no soy tan excelente en álgebra, he sabido plantear y resolver cada problema. No soy buena para el álgebra y a veces siento que me desespero, porque no encuentro soluciones o no entiendo las actividades. Considero que las matemáticas las vamos a utilizar para nuestra vida, porque cada trabajo necesita saberse y hacerse cuentas. Si estoy en este proyecto es porque me interesa aprender y quiero progresar en las matemáticas.

Jerson Albey tiene 14 años de edad, es un joven muy responsable en su oficio como estudiante y además demuestra gusto por las matemáticas.

AUTOBIOGRAFÍA

Figura 5. Jerson Albey

Fuente: Autores

Mi nombre es Jerson Albey Villamizar Jaimes. Nací en Bucaramanga el 17 de agosto de 1992, hijo de Fernando Villamizar y Amanda Jaimes. Comencé mis estudios en la guardería de mi barrio y seguí kínder en la escuela La Flora, logrando un buen promedio de estudio. En este momento estudio noveno grado en el Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata, donde he logrado estar entre los mejores. Mis estudios me han permitido lograr mis metas y salir adelante; en especial, las matemáticas me han ayudado a la formación de mi vida hasta ahora y a ser mejor cada día para resolver mis problemas.

José Alonso tiene 13 años de edad. Desde la Práctica Educativa I demostró gran interés en el aprendizaje de los temas de Álgebra y Geometría, y es uno de los mejores estudiantes del grado noveno.

AUTOBIOGRAFÍA

Figura 6. José Alonso

Fuente: Autores

Mi nombre es José Alonso Caballero Márquez. Nací en Bucaramanga el 31 de mayo de 1993, hijo de Olinto Caballero Lizcano y Doris Márquez Quintero. Emprendí mis estudios en la guardería de mi barrio, seguí kínder en el colegio Las Américas. Estudié primaria en la escuela La Niña María, logrando un buen promedio en el estudio. En este instante estudio noveno grado en el Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata, donde he logrado destacarme como uno de los mejores estudiantes del grado noveno. Mi estudio me ha concedido a través de los años alcanzar mis fines, aprendiendo mucho más sobre todo; en especial, las matemáticas han contribuido mucho a mi vida, porque a medida que aprendo más matemática soy capaz de resolver muchos problemas aplicándolos a cosas de las cuales antes no tenía idea.

Para la publicación en este trabajo de fotos, desarrollo de guías de clase, escritos, comentarios de los estudiantes, entre otras, vimos necesario solicitar la autorización a los padres de familia de los estudiantes, a fin de que sus aportes se pudieran usar en nuestra investigación. A continuación aparecen las debidas autorizaciones firmadas tanto por el grupo de investigación como por los padres de familia de los investigados:

Señores: **Fernando Villamizar y Amanda Jaimes**

Padres de familia de: **Jerson Albey Villamizar Jaimes**

Un cordial saludo:

La presente es para informales que en la clase de Álgebra se está desarrollando un proyecto de investigación en educación matemática llamado "Estrategias metodológicas para el aprendizaje de las progresiones aritméticas en noveno grado" desarrollado por estudiantes de último semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

De la manera más formal queremos pedir su autorización para que **Jerson Albey Villamizar Jaimes** haga parte de este proyecto de investigación y a su vez la autorización para presentar la publicación de los resultados y los datos recolectados de la investigación por parte de su hijo(a) las cuales pueden ser en entrevistas, fotos, escritos entre otras.

Muchas gracias por su colaboración.

Edwin Vega Monsalve Estudiante Investigador Esc. de Matemáticas UIS	Leonardo Tarazona Serrano Estudiante Investigador Esc. de Matemáticas UIS
Germán Alonso Jaimes Orientador de la Investigación Docente Esc. de Matemáticas UIS	Fernando Pérez Docente ITSDZ Docente Esc. de Matemáticas UIS

Autorizamos la participación de nuestro(a) hijo(a) **Jerson Albey Villamizar Jaimes** en el proyecto "Estrategias metodológicas para el aprendizaje de las progresiones aritméticas en 9 grado".

Fernando Villamizar — Amanda Jaimes

FIRMA DEL PADRE — FIRMA DE LA MADRE

Bucaramanga, 1 de marzo de 2007

Señores: **Sergio Alexander Hernández y Maria Mercedes Uscategui**

Padres de familia de: **Deissy Paola Hernández Uscategui**

Un cordial saludo:

La presente es para informales que en la clase de Álgebra se está desarrollando un proyecto de investigación en educación matemática llamado "Estrategias metodológicas para el aprendizaje de las progresiones aritméticas en noveno grado" desarrollado por estudiantes de último semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

De la manera más formal queremos pedir su autorización para que **Deissy Paola Hernández Uscategui** haga parte de este proyecto de investigación y a su vez la autorización para presentar la publicación de los resultados y los datos recolectados de la investigación por parte de su hijo(a) las cuales pueden ser en entrevistas, fotos, escritos entre otras.

Muchas gracias por su colaboración.

Edwin Vega Monsalve
Estudiante Investigador
Esc. de Matemáticas UIS

Leonardo Tarazona Serrano
Estudiante Investigador
Esc. de Matemáticas UIS

Germán Alonso Jaimes
Orientador de la Investigación
Docente Esc. de Matemáticas UIS

Fernando Pérez
Docente ITSDZ
Docente Esc. de Matemáticas UIS

Autorizamos la participación de nuestro(a) hijo(a) **Deissy Paola Hernández Uscategui** en el proyecto "Estrategias metodológicas para el aprendizaje de las progresiones aritméticas en 9 grado".

91345524
FIRMA DEL PADRE

C.C. 63485647
FIRMA DE LA MADRE

Señores: **Olinto Caballero Lizcano y Doris Márquez Quintero**

Padres de familia de: **José Alonso Caballero Márquez**

Un cordial saludo:

La presente es para informales que en la clase de Álgebra se está desarrollando un proyecto de investigación en educación matemática llamado "Estrategias metodológicas para el aprendizaje de las progresiones aritméticas en noveno grado" desarrollado por estudiantes de último semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

De la manera más formal queremos pedir su autorización para que **José Alonso Caballero Márquez** haga parte de este proyecto de investigación y a su vez la autorización para presentar la publicación de los resultados y los datos recolectados de la investigación por parte de su hijo(a) las cuales pueden ser en entrevistas, fotos, escritos entre otras.

Muchas gracias por su colaboración.

Edwin Vega Monsalve
Estudiante Investigador
Esc. de Matemáticas UIS

Leonardo Tarazona Serrano
Estudiante Investigador
Esc. de Matemáticas UIS

Germán Alonso Jaimes
Orientador de la Investigación
Docente Esc. de Matemáticas UIS

Fernando Pérez
Docente ITSDZ
Docente Esc. de Matemáticas UIS

Autorizamos la participación de nuestro(a) hijo(a) **José Alonso Caballero Márquez** en el proyecto "Estrategias metodológicas para el aprendizaje de las progresiones aritméticas en 9 grado".

FIRMA DEL PADRE

Doris Márquez Quintero

FIRMA DE LA MADRE

Bucaramanga, 1 de marzo de 2007

Señores: **Pedro Quintero y Sorela Berbesi.**

Padres de familia de: **Maira Alejandra Quintero Berbesi**

Un cordial saludo:

La presente es para informales que en la clase de Álgebra se está desarrollando un proyecto de investigación en educación matemática llamado "Estrategias metodológicas para el aprendizaje de las progresiones aritméticas en noveno grado" desarrollado por estudiantes de último semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

De la manera más formal queremos pedir su autorización para que **Maira Alejandra Quintero Berbesi** haga parte de este proyecto de investigación y a su vez la autorización para presentar la publicación de los resultados y los datos recolectados de la investigación por parte de su hijo(a) las cuales pueden ser en entrevistas, fotos, escritos entre otras.

Muchas gracias por su colaboración.

Edwin Vega Monsalve
Estudiante Investigador
Esc. de Matemáticas UIS

Leonardo Tarazona Serrano
Estudiante Investigador
Esc. de Matemáticas UIS

Germán Alonso Jaimes
Orientador de la Investigación
Docente Esc. de Matemáticas UIS

Fernando Pérez
Docente I.T.S "Dámaso Zapata"
Docente Esc. de Matemáticas UIS

Autorizamos la participación de nuestro(a) hijo(a) **Maira Alejandra Quintero Berbesi** en el proyecto "Estrategias metodológicas para el aprendizaje de las progresiones aritméticas en 9 grado".

FIRMA DEL PADRE

FIRMA DE LA MADRE

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

"Tanto en Babilonia como en Egipto se encuentran los cimientos rudimentarios de la aritmética".

Anónimo

Algo de historia acerca de las progresiones aritméticas

Para tener más claro el problema a tratar es necesario ubicarnos históricamente en el mundo de las matemáticas, especialmente en el tema de las progresiones aritméticas. La historia se inicia miles de años atrás, cuando el hombre ajustaba el concepto de número y lograba representarlo por medio de símbolos, para así lograr ordenarlos en forma creciente y progresiva, lo que contribuyó a la formación de la sucesión natural de los números. Esta surgió de la necesidad del hombre de contar sus animales, sus tierras o el conjunto de sus pertenencias. Una vez creada la sucesión natural de los números, contar consistía en asignarle a cada objeto del grupo dado un término de la sucesión natural, empezando desde uno hasta llegar al último elemento; entonces el número total de objetos equivale al término de la sucesión natural que le correspondió a este último objeto.

El concepto de agrupamiento y de enumeración en un conjunto de objetos llevó a la creación de los sistemas de numeración, y es por eso que cada cultura creó su propio sistema. El hecho de haber desarrollado su propia aritmética dinamizó el proceso de pensamiento matemático en todas las culturas, y es así como aparece poco a poco en el ser humano la inquietud por la formulación y el desarrollo de algoritmos, formas simplificadas para realizar operaciones y la habilidad en la solución de problemas. Los principales antecedentes históricos de las progresiones aritméticas a través del tiempo se dieron en las siguientes culturas:

I. CULTURA MESOPOTÁMICA

En el museo de Louvre se halla una tablilla de arcilla que se cree data del imperio de Nabucodonosor[9], en donde se puede considerar que los antiguos mesopotámicos conocían algunas sucesiones y también series como la suma de los cuadrados y la forma general de la progresión aritmética. Las utilizaban para resolver problemas de construcciones y de perforaciones de tierras.

Collete (1966, p. 28) menciona algunos de los ejemplos que se encuentran en estas tablillas:

$$1+2+2^2+2^3+...+2^9=2^9+2^9-1$$

$$1+2^2+3^2+...+10^2=\left[1\left(\frac{1}{3}\right)+10\left(\frac{2}{3}\right)\right]55=385$$

El siguiente ejemplo que se presenta igualmente aparece sobre las tablillas y es un poco más importante, ya que hace referencia al tema de este trabajo:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,...,\ a+(n-1)\,d.$$

[9] Nabucodonosor (c. -604/ -562) fue el rey más importante de Babilonia y sucesor de Nabopolasar (Collete, 1986, p. 21).

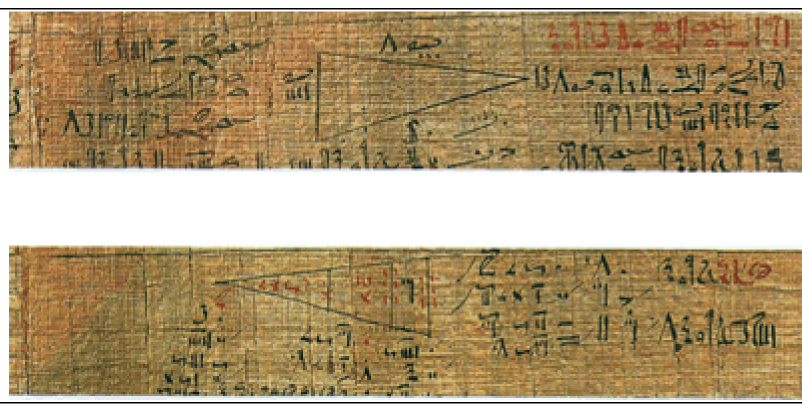
II. CULTURA EGIPCIA

Según Bell (1949, p. 175), los egipcios conocían las progresiones aritméticas y calculaban la suma de sus términos. Por otra parte, se encontraron pruebas de que los egipcios conocían las tablas de multiplicar. Sin embargo, escribían sus resultados en un orden o en una secuencia de números. También descomponían los números como sumas de potencias de dos, y además desarrollaban sucesiones con números racionales o fracciones como la siguiente:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

Otro dato importante sobre los egipcios se refiere al problema de progresiones aritméticas más antiguo. Aunque no es precisamente el popular de la recompensa al inventor del ajedrez, sino otro mucho más primitivo que se denomina “La repartición del pan”, registrado en el célebre papiro egipcio de Rhind[10].

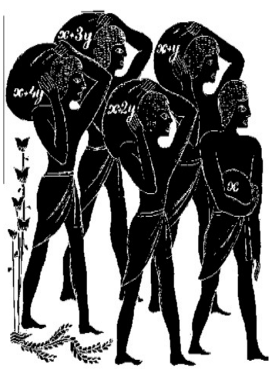
Figura 7. Papiro egipcio de Rhind



Fuente: Collete, 1986. Historia de la Matemática.

[10] El papiro egipcio de Rhind es un antiguo documento egipcio que data cerca del año -1650. Obtenido de las ruinas de Tebas en 1858 por el anticuario escocés Henry Rhind y descifrado en 1866 por el egiptólogo Eisenhol (Collete, 1986, p. 41).

Este papiro, hallado por Rhind a fines del siglo pasado, fue escrito unos 17 siglos antes de nuestra era y constituye una copia de otra obra matemática aún más remota que data posiblemente del tercer milenio antes de nuestra era. El problema es el siguiente:



La progresión más antigua[11]**:** Entre cinco personas se repartieron cien medidas de trigo, de tal suerte que la segunda recibió más que la primera tanto como le correspondió a la tercera más que a la segunda, a la cuarta más que a la tercera y a la quinta más que a la cuarta. Además, las dos primeras obtuvieron siete veces menos que las tres restantes. ¿Cuánto correspondió a cada una?

Solución: Es indudable que las cantidades de trigo distribuidas entre los cinco participantes en el reparto constituyen una progresión aritmética creciente. Ahora supongamos que el primer miembro sea ***x***, y la diferencia ***y***.

En ese caso tendremos:

Tabla 1. Tabla del problema “La repartición del pan”

PRIMERA	**X**
SEGUNDA	**X+Y**
TERCERA	**X+2Y**
CUARTA	**X+3Y**
QUINTA	**X+4Y**

[11] Tomado el 1 de mayo de 2007 de http://www.geocities.com/algebrarecreativa/cap08.html

Siguiendo la tabla anterior podemos establecer dos ecuaciones:

$$x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100;$$

$$7[x+(x+y)]=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y).$$

Al sumar las expresiones semejantes de la primera ecuación y simplificar obtenemos

$$x+2y=20.$$

Por otra parte, la segunda ecuación se reduce a

$$11x=2y.$$

Así, resulta un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas. Al resolverlo su resultado es el siguiente.

$$x=1\frac{2}{3},$$

$$y=9\frac{1}{6}.$$

Por consiguiente, el trigo debe ser repartido en las siguientes proporciones:

$$1\frac{2}{3},\quad 10\frac{5}{6},\quad 20,\quad 29\frac{1}{6},\quad 38\frac{1}{3}.$$

Posteriormente, luego de los apreciables aportes que hicieron tanto los mesopotámicos como los egipcios, fueron los griegos quienes formalizaron la aritmética e inventaron una notación para representar las generalizaciones. Más exactamente fue Pitágoras[12] con sus discípulos quienes se encargaron de organizar los conceptos de sucesiones y series de los mesopotámicos y de los egipcios. Algunos de sus aportes a la aritmética fueron las definiciones de los números pares e impares por medio de una sucesión para cada una de ellas, y también la clasificación de los números en triangulares, cuadrados, pentagonales, etc., formando sucesiones y series aritméticas.

Definiciones formales de progresiones

I. Definición de sucesión

Como se sabe, una sucesión en un conjunto S de objetos cualesquiera es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales N y cuyas imágenes son elementos de S (de esta forma, el recorrido de la sucesión es un subconjunto de S).

En nuestro caso, el conjunto S será por lo general el conjunto $\Re$ de los reales.

II. Definición de sucesión finita

Por sucesión **finita** de n términos entendemos una función F cuyo dominio es el conjunto de números $\{1, 2, ..., n\}$. El recorrido de F es el conjunto $\{F(1), \; F(2), \; ..., \; F(n)\}$, ordinariamente designado por $\{F_1, \; F_2, \; ..., \; F_n\}$. Los elementos del recorrido se llaman términos de la sucesión.

---

[12] Pitágoras (c. -580/ -500), filósofo y matemático griego, cuyas doctrinas influyeron mucho en Platón. Nacido en la isla de Samos, Pitágoras fue instruido en las enseñanzas de los primeros filósofos jonios Tales de Mileto, Anaximandro y Anaxímenes (Enciclopedia Encarta, 2007).

III. Definición de sucesión infinita

Por sucesión **infinita** entendemos una función F cuyo dominio es el conjunto de todos los enteros positivos $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. El recorrido de F, esto es, el conjunto $\{F(1), F(2), F(3), \ldots\}$, se designa también por $\{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$, y el valor de $F(n)$ se llama el término enésimo de la sucesión. Las sucesiones infinitas por lo general se abrevian como $\{F_n\}, \{S_n\}, \{X_n\}$, etc.

De aquí en adelante trabajaremos solamente con sucesiones en $\Re$, de suerte que podemos hacer las siguientes definiciones:

IV. Definición de sucesión creciente

Llamaremos sucesión creciente a la sucesión $\{S_n\}$ tal que $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \ldots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \ldots$ Así pues,

$$\{S_n\} \text{ es creciente } \Leftrightarrow S_n \leq S_{n+1} \quad para\ todo\ n.$$

V. Definición de sucesión decreciente

A la sucesión $\{S_n\}$ tal que $S_1 \geq S_2 \geq S_3 \geq \ldots \geq S_n \geq S_{n+1} \geq \ldots$ la llamaremos decreciente:

$$\{S_n\} \text{ es decreciente } \Leftrightarrow S_n \geq S_{n+1} \quad para\ todo\ n.$$

VI. Definición de progresión aritmética

Una sucesión es una **progresión** si la diferencia entre cualquier término y el anterior es la misma a lo largo de toda la sucesión. La diferencia algebraica entre cada término y el anterior se llama **razón** y se denota por r.

Sea $\{a_n\}$una sucesión tal que $a_n - a_{n-1} = r$, con $n = 2, 3, 4, \ldots$; $\{a_n\}$ se puede representar a partir del primer término y su razón, así:

$$\{a_n\} = \{a_1,\ a_1 + r,\ a_1 + 2r,\ a_1 + 3r,\ \ldots,\ a_1 + (n-1)r, \ldots\}.$$

El término general de la progresión aritmética es $a_1 + (n-1)r$.

VII. Lema

En toda progresión aritmética finita la suma de dos términos equidistantes de los extremos es igual a la suma de los extremos.

Demostración: Sea la progresión $a, \ldots, m, \ldots, p, \ldots, u$ cuya razón es r. Supongamos que tanto entre $a\ y\ m$ como entre $p\ y\ u$ hay n términos, es decir, que $m\,y\ p$ son términos equidistantes de los extremos.

Vamos a demostrar que

$$m + p = a + u\ .$$

En efecto, habiendo n términos entre $a\ y\ m$, al término m le preceden $n+1$ términos; luego, podemos escribir que:

$$m = a + (n+1)r. \tag{1}$$

Del mismo modo, habiendo n términos entre p y u, tendremos

$$u = p + (n+1)r. \qquad (2)$$

Restando (2) de (1) tenemos

$$\begin{array}{rcl} m & = & a + (n+1)r \\ -u & = & -p - (n+1)r \\ \hline m - u & = & a - p. \end{array}$$

y pasando p al primer miembro de esta igualdad y m al segundo, queda

$$m + p = a + u, \qquad Q.E.D.$$

VIII. Suma de términos de una progresión aritmética

La suma de n términos de una progresión aritmética con primer elemento a y razón común r está dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demostración: La progresión aritmética escrita en términos del primer elemento y la razón está dada por

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r, \ldots,\ a+(n-1)r,$$

y la suma de los n primeros términos está representada por:

$$S = a + (a + r) + (a + 2r) + (a + 3r) + ... + (a + (n - 1)r),$$

o lo que es lo mismo,

$$S = (a + (n - 1)r) + (a + (n - 2)r) + ... + (a + 3r) + (a + 2r) + (a + r) + a.$$

Sumando estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$2S = (2a + (n - 1)r)n.$$

Dividiendo por 2, resulta lo siguiente:

$$S = \frac{(2a + (n - 1)r)n}{2},$$

$$S = \frac{(a + a + (n - 1)r)n}{2},$$

y finalmente,

$$S_n = \frac{(a + a_n)n}{2}, \qquad Q.E.D$$

IX. Interpolación de términos

Interpolar n términos diferenciales entre dos números dados a y b es intercalar n números entre a y b de modo que todos formen una progresión aritmética, de esta manera:
$a,\ p_1,\ p_2,...,p_{n-1},p_n,b,$ (Una sucesión que tiene $n+2$ términos) con $p_1-a=p_{k+1}-p_k=b-p_n\equiv r,$ para todo $k=1,\ 2,\ ...,\ n-1.$

En consecuencia, y de acuerdo en lo ya visto,

$$b=a+(n+1)r,$$

y por consiguiente

$$r=\frac{b-a}{n+1}.$$

INVESTIGACIÓN EN EL AULA (CUALITATIVA)

"Investigar es ver lo que todo el mundo ha visto pensando lo que nadie más ha pensado".

Albert Szent-Györgi

La investigación de aula cualitativa presenta diversos modos de comprender e interpretar la realidad social que en nuestro caso es el aula de clase. Las modalidades de investigación cualitativa se conciben como formas de investigar en las que se consolida de manera estructurada una opción epistemológica, un objetivo, una ruta metodológica y una serie de instrumentos. Entre las características que consolidan la investigación cualitativa se encuentran las siguientes modalidades: historia de vida, investigación etnográfica, investigación participativa, método biográfico y sistematización de experiencia (Galeano, 2004, p. 30)

A continuación explicaremos las modalidades que se encuentran en nuestro trabajo de investigación, para que el lector se encuentre mejor ubicado en nuestro tema.

Las fuentes

Las fuentes son verificaciones a través de los cuales se constatan los signos, las señales y se obtiene información. Pueden ser primarias o secundarias; orales y escritas. La principal fuente (en los estudios de corte etnográfico, historias de vida, grupos de discusión, entre otros) la constituyen las personas participantes en el estudio, ya que aportan su mirada al problema que se trata de comprender. Las fuentes orales o directas son complementarias y medios de triangulación o confrontación.

Plan de recolección y generación de información

El plan de recolección de información señala cuales son las estrategias de recolección de datos más adecuadas de acuerdo a las personas interpeladas, el grado de familiaridad con la realidad analizada, la disponibilidad de tiempo del investigador, el nivel de madurez del proceso investigativo y las condiciones del contexto que se analiza.

Como características del plan de recolección de información se anotan:

- Es referencial, no prescriptivo: Es una guía que permite la ubicación de las diferentes situaciones de la realidad explorada.
- Es flexible: Se va ajustando de acuerdo a los hallazgos de la investigación.
- Es emergente-cambiante, de acuerdo a los hallazgos de la investigación.

- Frecuente estructuración: No homogenización, no preelaboración antes del contacto con las personas y escenarios fuente de los datos.

Categorización y análisis

La investigación cualitativa estructura su trabajo analítico en torno a categorías, sin preocupación expresa por la medida, es decir, privilegia las categorías analíticas o nominales. Las categorías se entienden como ordenadores epistemológicos, campos de agrupación temática, supuestos implícitos en el problema y recursos analíticos. Como unidades significativas dan sentido a los datos y permiten reducirlos, compararlos y relacionarlos. “Dar sentidos a los datos” implica estructurar, exponer, extraer y confirmar conclusiones compresivas, argumentadas y sustentables en la información recolectada y generada.

“Dar sentido” a los datos cualitativos significa reducir las notas de campo o lo que conocemos como diarios de clase, grabaciones, filmaciones, trascripciones de entrevistas, etc., hasta llegar a una cantidad manejable de unidades significativas. Supone también estructurar y exponer esas unidades de significado y construir y confirmar conclusiones comprensivas, argumentadas y sustentables en la información recolectada. De esta forma, las categorías pueden entenderse como códigos conceptuales que muestran la relación entre los datos y la teoría que se construye o valida a partir de ellos. En otras palabras, categorizar es clasificar, conceptualizar o codificar con un término o expresión corta dotada de sentido, clara e inequívoca, el contenido de cada unidad temática (párrafo, página, escrito que se refiera a un tema especifico).

De acuerdo a los distintos momentos de teorización, entendidos como cíclicos, no lineales, se pueden diferenciar las siguientes categorías:

- **Descriptivas:** Pretenden identificar las características de los segmentos de los datos. Emergen del primer contacto con los datos recolectados. Atribuyen un contenido a un segmento del texto. Pueden ser “en vivo” o literales: Son términos usados por los participantes en la investigación, y se emplean como categorías expresiones textuales de los actores o sustantivas.

- **Explicativas:** Apuntan a temas que el investigador descubre como recurrentes o que aparecen con un mismo significado. Este tipo de categorías pueden ilustrar una teoría que emerja de los resultados del análisis.

- **Interpretativas:** Suponen la postura del investigador o de su equipo frente a temas particulares. Son construcciones teóricas, conceptualizaciones para organizar los datos, para vincular dos o más categorías.

Credibilidad de la investigación social cualitativa: criterios de validez y confiabilidad

Desde la perspectiva metodológica, la legitimación del conocimiento construido mediante enfoques cualitativos de investigación social se realiza a través de consensos fundamentados en el dialogo y la intersubjetividad. Estrategias como la triangulación y confrontación (de fuentes, métodos, escenarios, investigadores, teorías) parten del reconocimiento de que la realidad humana es heterogénea, diversa, y que los actores sociales son portadores de lógicas diversas que es necesario estudiar para comprender la complejidad social. La validez hace referencia al grado de coherencia lógica interna de los resultados y a la ausencia de contradicciones con resultados de otras investigaciones o estudios bien establecidos.

La validez está, por tanto, asociada con el modo de recoger los datos, de captar cada evento, escenario o situación desde sus diferentes puntos de vista, de vivir, interpretar y analizar la realidad a partir de su propia dinámica, de la relación de compromiso y apertura que se establezca entre el investigador y los actores sociales, que en nuestro caso son estudiantes de noveno grado; a la vez, el criterio de confiabilidad implica que un estudio se pueda repetir con el mismo método sin alterar los resultados, es decir, es una medida de replicabilidad de los resultados.

Registro y sistematización de información cualitativa

El registro y la sistematización de información cualitativa son procesos mediadores entre la recolección y generación de información y el análisis de la misma. El registro sistemático y riguroso de la información permite poner en orden el cúmulo de información recopilado o generado en el proceso investigativo, de tal manera que su recuperación sea ágil y eficiente. Para nuestro caso es de principal importancia el diario de clase o de campo, ya que es un registro acumulativo de todo lo que acontece durante el desarrollo de la investigación. Su carácter continuo permite al investigador reconstruir los procesos metodológicos, confrontar sus propias visiones con las de los actores de la investigación, llevar un registro de las limitaciones y dificultades en el desarrollo de la misma, captar la cotidianeidad de escenarios y participantes, y es un instrumento que permite al investigador plasmar sus vivencias, inquietudes, temores, alegrías y desesperanzas. Según Porlán (1996, p. 65), el diario de clase es un instrumento que nos permite interrogar y desentrañar el sentido de la realidad, constituyéndose en el testigo biográfico fundamental de nuestra experiencia. Se debe iniciar reflejando acontecimientos, situaciones, frases y comentarios de la vida del aula con el objetivo de ir construyendo una visión más objetiva y compleja de nuestra realidad. En la primera etapa, las anotaciones deben recoger lo que resulte más significativo, como la diversidad de situaciones personales y grupales. Y todo ello prestando atención no solo a lo académico, sino también a lo que no siempre es tan evidente. Seguidamente es conveniente hacer un esfuerzo por separar la descripción de la valoración, procurando que las interpretaciones que hacemos de los hechos no sustituyan al hecho mismo. Puede ayudar la fórmula de describir con el máximo detalle, en una parte del soporte que se utiliza como registro, los acontecimientos (las personas, lo que hicieron o dijeron literalmente, el contexto, las reacciones, etc.), y en otra, separando con una barra, utilizando otro color, etc, anotar nuestras propias valoraciones. En la fase de aplicación de lo programado, el diario deja de ser exclusivamente “un diario”. Es importante decidir previamente el tipo de información que deseamos recoger y los instrumentos que se van a utilizar (entrevistas, cuestionarios, etc.). El diario debe ser el cuaderno de trabajo que nos permite hacer un seguimiento global, estructurado y sistemático de la nueva intervención.

A partir de todo lo anterior, podemos afirmar que la metodología de la investigación cualitativa prevalece en la enseñanza tradicional, ya que no es estática debido a que el estudiante realiza el papel de investigador en forma análoga al investigador. A veces se especula que una investigación se debe realizar con contenidos extremadamente complicados, cuando esto es falso. Se puede iniciar una investigación con un simple problema o ejercicio, en la dificultad que tenga un estudiante con un tema, en cosas que realmente interesen y sean aplicables a la vida escolar.

En conclusión, podemos afirmar que las investigaciones de tipo cualitativo, en especial en matemáticas, fomentan la interacción entre los jóvenes, la capacidad, la comunicación, la creatividad; estas interacciones acceden a ver cómo los estudiantes, a través de ellas, se asisten mutuamente para alcanzar la apropiación y cimentación de conceptos. Las investigaciones de aula admiten establecer conexiones entre varias ideas matemáticas con cosas apartes de ella, y pueden constituir puntos de referencia para otros temas de investigación.

CONOCIENDO EL PROBLEMA

"Es necesario desarrollar una pedagogía de la pregunta. Siempre estamos escuchando una pedagogía de la respuesta. Los profesores contestan a preguntas que los alumnos no han hecho".

Paulo Freire

El Servicio Social Educativo y Trabajo de Grado I fue realizado en el segundo periodo académico del 2006 en el Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata de Bucaramanga, y fue allí en sus aulas, junto con los jóvenes de octavo grado de bachillerato, donde adquirimos nuestra primera experiencia pedagógica como docentes en el área de matemáticas. Durante el tiempo que compartimos con los estudiantes nuestro orientador de práctica fue el profesor Germán Jaimes, y nuestro tutor en la institución fue el profesor Fernando Pérez.

En dicha práctica se trabajaron temas de álgebra que, según afirman los estudiantes, son algo complicados; por esta razón vimos la necesidad de hacer una pequeña reflexión centrando a nuestros estudiantes en el mundo real, dando a entender que cuando vamos a un concierto de música nos gusta escucharla porque sentimos un placer auditivo en ella, sin andar en más averiguaciones de tipo técnico. Quizá no pensamos que detrás de las obras que se interpretan en conciertos hay unas partituras llenas de símbolos que representan el lenguaje escrito de la música, lenguaje que de otra parte es necesario para que se pueda interpretar la música con perfecta armonía. El estudio del álgebra, al igual que el de la música, necesita una serie de símbolos, letras, números y signos que conforman el lenguaje algebraico y sin el cual no sería posible su existencia.

Figura 8. Clase de observación

Fuente: Autores

Aunque para muchos de los compañeros de la carrera es tiempo perdido la parte de observación y quisieran iniciar de lleno dictando clase, nosotros reflexionamos, y comprendemos lo fundamental que es el periodo de observación, ya que durante este corto tiempo se pudieron aclarar las ideas que se traían o se tenían de los estudiantes, conociéndolos como personas, observando su ambiente de desarrollo intelectual y físico; y además, tener el placer de interactuar con ellos, para que no sólo nos vieran como otros docentes más que han pasado por su vida escolar, sino como amigos en los cuales se puede depositar confianza, siempre y cuando haya respeto y tolerancia para con nosotros, así como para con sus compañeros.

Es aconsejable como docentes conocer a nuestros estudiantes, ya que así se pueden realizar actividades donde ellos se sientan a gusto, no manejen el estrés y vean el aula de clase como un lugar agradable; donde cada estudiante no solo comprenda las matemáticas, sino que llegue a considerarlas como una asignatura fácil y especialmente interesante para ellos. Es aquí donde nuestra práctica pedagógica nos abre caminos de interacción con los jóvenes y nos invita a realizar diferentes estrategias, esencialmente didácticas, con un lenguaje claro, cercano y preciso, con el fin de transmitir y construir una serie de conocimientos a mentes inquietas.

Figura 9. Juego de división

Fuente: Autores

Este fue el método que aplicamos en la realización de nuestras actividades en este plantel educativo. Fue importante saber que después de realizar un juego en el tema División de Expresiones Algebraicas, la reacción de los estudiantes fue notable; concluimos que por medio del juego los muchachos se relacionan más con el conocimiento, ya que de una u otra manera aprenden sin darse cuenta. El docente de hoy debe motivar, recrear y convertirse en una persona alerta, que proponga situaciones para que los estudiantes analicen y experimenten. Sin embargo, no hay que utilizar demasiado esta estrategia, porque pierde su efecto y el trabajo del aula se convierte en una actividad netamente lúdica que no genera conocimiento matemático, ya que actualmente se presentan casos en que los docentes se convierten simplemente en recreacionistas para sus estudiantes. La lúdica es solo un medio para lograr los objetivos del aprendizaje.

Figura 10. Estudiantes de noveno

Fuente: Autores

Una de las alternativas viables en que se pensó para que los alumnos no vieran el salón de clases y las matemáticas como algo extremadamente aburridor, fue hacer uso de la tecnología en la clase de matemáticas. Motivar a los estudiantes a utilizar herramientas como el computador en el aprendizaje de conceptos matemáticos es algo llamativo, ya que así ellos centran una mayor atención y pueden manipular elementos de la matemática, cosa que no siempre se puede realizar en un tablero. En geometría plana, especialmente en el tema de semejanza de polígonos, por medio de la herramienta interactiva Cabri Géomètre, se vio la necesidad de realizar una clase diferente a la convencional, y por primera vez los alumnos vieron que las matemáticas se pueden aprender no sólo a través de frías fórmulas, sino de manera virtual por medio de *software* educativo que recrea en forma dinámica el estudio de la geometría euclidiana. Todo ayuda a ver con más claridad las cosas que son difíciles de observar y de hacer en un tablero; la experimentación e interacción directa con la tecnología hace que los estudiantes presenten cambios actitudinales y conceptuales, y además agiliza y ahorra tiempo en diversas operaciones; las imágenes nos sirven para acercar a los alumnos a lo que hasta ahora se había considerado una árida materia: las matemáticas.

Después de haber realizado diversas actividades de trabajo con los estudiantes de octavo grado y de haber adquirido nuestra experiencia como futuros docentes en el área de matemáticas, fue claro para nosotros que enfrentarse a un ambiente de clase no es nada fácil, pues allí se deben alcanzar diversas metas y entre ellas esta manejar a ciertos chiquillos que de una u otra manera poseen grandes capacidades, capacidades que sin dudarlo hay que explorar y hacer con ellas un excelente trabajo. Por esta razón, se puede afirmar que ser docente no es una tarea fácil y que la realidad del mundo educativo es otra comparada con aquella que se percibe o se imagina estando en las aulas de una universidad.

Nuestra práctica pedagógica nos llevó a pensar un poco en cómo es que los jóvenes hoy en día se apropian de los conceptos matemáticos. Era una gran inquietud que nos hacía cierto cosquilleo en las neuronas, y la mejor manera de saberlo era mediante una estrategia metodológica donde se ponga en práctica la investigación de aula en el aprendizaje de las matemáticas. Fue así que, respaldados por nuestro orientador y tutor, nos vimos en la tarea de enfrentar este nuevo reto y observar los resultados bajo nuestra pregunta de investigación: **¿Es posible desarrollar la capacidad deductiva mediante el aprendizaje de las progresiones aritméticas en los estudiantes de noveno grado del Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata?** Pregunta alrededor de la cual gira nuestro trabajo de investigación bajo el siguiente objetivo: **Construir una estrategia metodológica que contribuya a lograr el aprendizaje de las progresiones aritméticas en estudiantes de noveno grado del Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata.**

Una vez definida nuestra pregunta de investigación y su respectivo objetivo, hay que tener claro que en el aprendizaje de cualquier concepto matemático es de valiosa importancia procurar el desarrollo de la capacidad de pensamiento, o en otras palabras, contribuir al desarrollo de la estructura cognitiva de los estudiantes. En nuestro caso, con los estudiantes de noveno grado pretendemos lograr el aprendizaje de las progresiones aritméticas, específicamente, hacer la deducción de fórmulas que permitan calcular el término general y obtener la suma de un cierto número de términos, ya sea por la explicación del profesor o por intuición del estudiante, sin dejar a un lado el aspecto acerca del desarrollo de la capacidad de pensamiento de cada individuo, pues hay que tener en cuenta la dificultad que presentan los estudiantes en este grado para realizar generalizaciones y deducciones.

Con las estrategias metodológicas pretendemos, además de lograr el aprendizaje de los temas, mejorar la capacidad para realizar generalizaciones y deducciones mediante la implementación de una secuencia de guías o talleres que simultáneamente van desarrollando el aprendizaje de las progresiones aritméticas y van afinando la capacidad para realizar deducciones y generalizaciones. La clave está en seleccionar una secuencia de situaciones apropiadas, que paso a paso van logrando paralelamente el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento, induciendo procesos algorítmicos y heurísticos que permitan mejorar la capacidad de pensamiento de los estudiantes, y que a la vez serán implementados en el aula de clase con los estudiantes, al enseñar el tema de progresiones por medio de algoritmos y procedimientos heurísticos de forma que se los fuerce de alguna manera a descubrir, detectar, encontrar y construir.

Este método pedagógico[13] es muy útil y lo quisimos implementar en la forma en que se elaboraron las guías de trabajo, aunque es también el que más tiempo consume. Además, al enseñar por medio de algoritmos y procedimientos heurísticos es de suma importancia dar un enfoque individual. Por ejemplo, determinados alumnos pueden ser capaces de enfrentarse mejor con unos algoritmos y procedimientos heurísticos, y pueden incluso hacerlo de diferente manera que los demás. Hay también estudiantes que no necesitan aprender algoritmos especiales, ya que pueden aprender adecuadamente los algoritmos necesarios con base en ejemplos y modelos.

[13] Para una mayor ampliación sobre el método pedagógico véase *Seminario: Teorías del Aprendizaje y Teorías de la Enseñanza*, de Yolima Beltrán (2005).

Figura 11. Estudiantes de Noveno

Fuente: Autores

De acuerdo con lo anterior, realizamos cinco guías de trabajo[14], las cuales tenían como objetivo primordial desarrollar el proceso de generalización y deducción de fórmulas matemáticas por parte de los estudiantes, en nuestro caso a través de las progresiones aritméticas. Estas guías de trabajo fueron resueltas por nuestros estudiantes de investigación y reflejan las ideas y el esfuerzo hecho por ellos para resolverlas. Con nuestra primera guía de trabajo se dio inicio al proceso de investigación de aula que se llevaría a cabo con los jóvenes de noveno grado en la clase de álgebra; el objetivo primordial de esta guía era diagnosticar la capacidad que tienen los estudiantes para generalizar, lo cual se realizó por medio de una figura geométrica de tipo fractal conocida como "La Curva de Koch"[15], donde los primeros tres pasos mostraban el número de segmentos de la figura que se iban obteniendo.

El trabajo de los estudiantes era realizar los tres pasos siguientes para obtener el número de segmentos de la nueva figura, pero notaron que esto era algo muy tedioso, complicado y gastaba mucho tiempo para un número mayor de pasos. Entonces se vieron en la obligación de indagar acerca del problema; en vez de dibujar y dibujar lo cual se hace un poco aburridor, llegaron a preguntarse si existiría otro camino diferente que los llevara a la solución. Después de haber

[14] Ver al final en anexos.

[15] La curva de Koch es un fractal que resulta del paso al límite de la sucesión de curvas P_n cuando n tiende a infinito (Sabogal & Isaacs, 1991, p. 54).

especulado un poco respecto a la solución, concluyeron que la mejor manera sin duda era crear una fórmula matemática donde solo al introducir el número de pasos, dicha expresión arrojara el número de segmentos y de esta forma era mucho más fácil resolver el problema. En cuanto a las siguientes guías de trabajo el objetivo era generalizar un poco más e introducir a los jóvenes en el mundo de las progresiones aritméticas sin que ellos lo notaran; así que diseñamos situaciones problema alusivos al entorno social en el que viven nuestros estudiantes, para que se relacionaran más con el tema de estudio y además exploraran y construyeran por sí mismos las expresiones generales de las progresiones aritméticas.

Una vez realizado el trabajo a la propuesta de investigación y almacenada la información, gracias a haber visto todo el proceso que llevaron los estudiantes para desarrollar su capacidad deductiva mediante el aprendizaje de las progresiones aritméticas, la pregunta era: ¿Qué hacer con toda esa información? Debido a que nuestra investigación de aula es de tipo cualitativo, decidimos establecer tres categorías y hacer el respectivo análisis a dicha información, para dar así respuesta a la pregunta. Fue así que establecimos las siguientes categorías:

I. *Explorando los presaberes sobre las progresiones aritméticas*. En esta categoría se manifiesta cómo los estudiantes crean una relación entre los conocimientos que tenían de álgebra y los que adquieren a través de las progresiones aritméticas durante el inicio de la investigación.

II. *Los aportes de nuestros estudiantes de investigación.* En esta categoría se almacenan todos aquellos aportes e ideas que lograron los jóvenes a medida que realizaban las guías de trabajo referentes a la propuesta de investigación.

III. *El logro adquirido por los estudiantes… ¿Qué tan lejos llegaron?* Esta categoría da muestra de lo aprendido por parte de los estudiantes de investigación a través de una serie de comentarios expresados mediante una entrevista.

I. EXPLORANDO LOS PRESABERES SOBRE LAS PROGRESIONES ARITMÉTICAS

"Lo que sabemos es una gota de agua; lo que ignoramos es el océano".
Isaac Newton

Determinar los presaberes de los estudiantes en un tema específico es de gran ayuda e importancia, ya que así se puede saber qué fundamentos poseen los jóvenes, o si hay que reforzar un poco más en la comprensión del tema, para llevarlos a construir conocimiento. Por otra parte es de vital importancia, ya que el Plan Nacional Decenal[16] afirma que en su nueva estructura educacional encaminada hacia el año 2015 tiene en cuenta los presaberes de los estudiantes colombianos, para ofrecerles una formación, tanto a los niños, jóvenes y adultos, para que sean capaces de relacionar e integrar experiencias cotidianas y sus presaberes con las nuevas tecnologías, para así formar seres humanos que respondan a las necesidades que tiene el país, capaces de criticar y apropiarse de su realidad y confrontarla con el mundo, de modo que se evolucione en aspectos como la economía, la cultura y la sociedad, y a su vez se construya el conocimiento. Por estas razones, los presaberes de los estudiantes son tan significativos, teniéndose en cuenta a la hora de definir un cambio en la educación que se les imparte o a la hora de desarrollar una investigación y definir sus

[16] Tomado de http://participacion.plandecenal.edu.co/debate/consolidado.php?id_mesa=1870

respectivas categorías que nos permitirán analizar la información obtenida durante todo el proceso de investigación.

Figura 12. Aportes

Fuente: Autores

En esta categoría se observa cómo los estudiantes de nuestra investigación empezaron a crear una relación entre todas aquellas cosas que habían aprendido el año anterior en su asignatura de álgebra y lo que aprendían y construían en base a las progresiones aritméticas, mediante la cual pudieron darse cuenta de que todas las diversas expresiones en matemáticas no son simples o frías fórmulas, y que detrás de ellas hay ciertos procesos de investigación y deducción que nos sintetizan y facilitan un trabajo. Esta categoría la llamamos así porque fue nuestro primer paso en el desarrollo a la propuesta de investigación, y, además, porque se quería saber con qué conocimientos matemáticos contaban nuestros estudiantes, para tener una mayor claridad acerca del nivel en que se encontraban y lograr que ellos fácilmente pudieran construir una relación entre lo que sabían e iban a aprender. Para iniciar nuestro proceso de investigación por medio de estas categorías, se creó una guía de trabajo[17], con la cual se pretendía explorar los presaberes de los estudiantes y llevarlos a la tarea de investigar, deducir y pasar de un caso particular a una situación concreta y abstracta encaminada a la generalización. Nuestra idea, como se mencionó en un párrafo anterior, fue presentar gráficamente a los estudiantes los primeros tres pasos de una figura tipo

[17] Ver Anexo 1.

fractal conocida como la Curva de Koch, donde se exponía el número de segmentos de la figura que se iba obteniendo, a medida que esta sufría una transformación.

A continuación se presentará el trabajo realizado por parte de los estudiantes de investigación acerca de los pasos siguientes para obtener el número de segmentos de la nueva figura. José Alonso, al igual que Maira Alejandra, realizó en su guía de trabajo los pasos cuatro y cinco de la curva de Koch. Se puede observar que trabajaron muy bien con la figura y lograron entender el procedimiento de cada una de sus transformaciones. Sin embargo, no continuaron realizando los pasos siguientes, ya que notaron que al seguir haciendo las respectivas transformaciones, resultaba un dibujo muy complicado, motivo por el cual se vieron en la necesidad de construir una fórmula matemática que facilitara el trabajo y que permitiera encontrar el número de segmentos en cualquier transformación.

Figura 13. Guía de trabajo No 1 de José Alonso

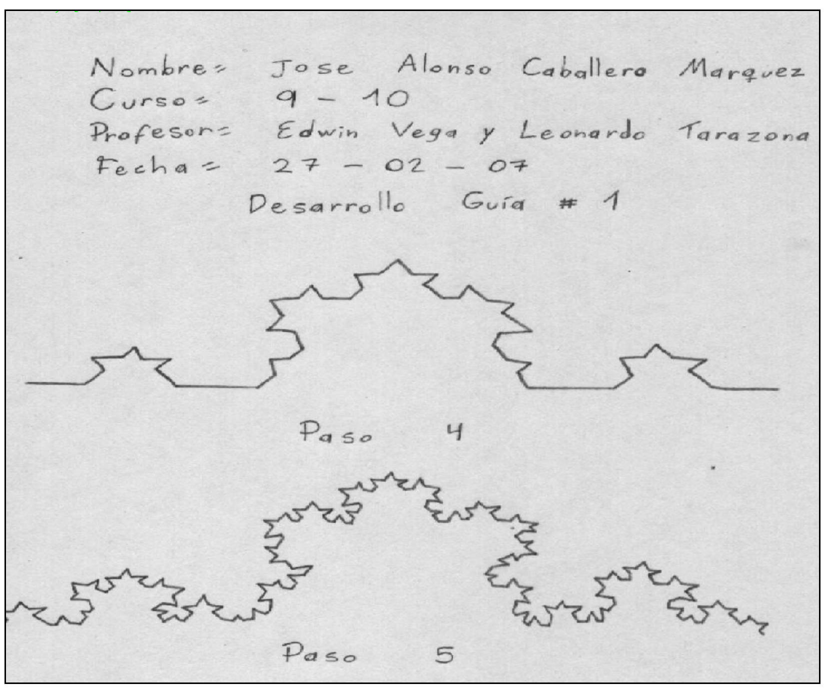
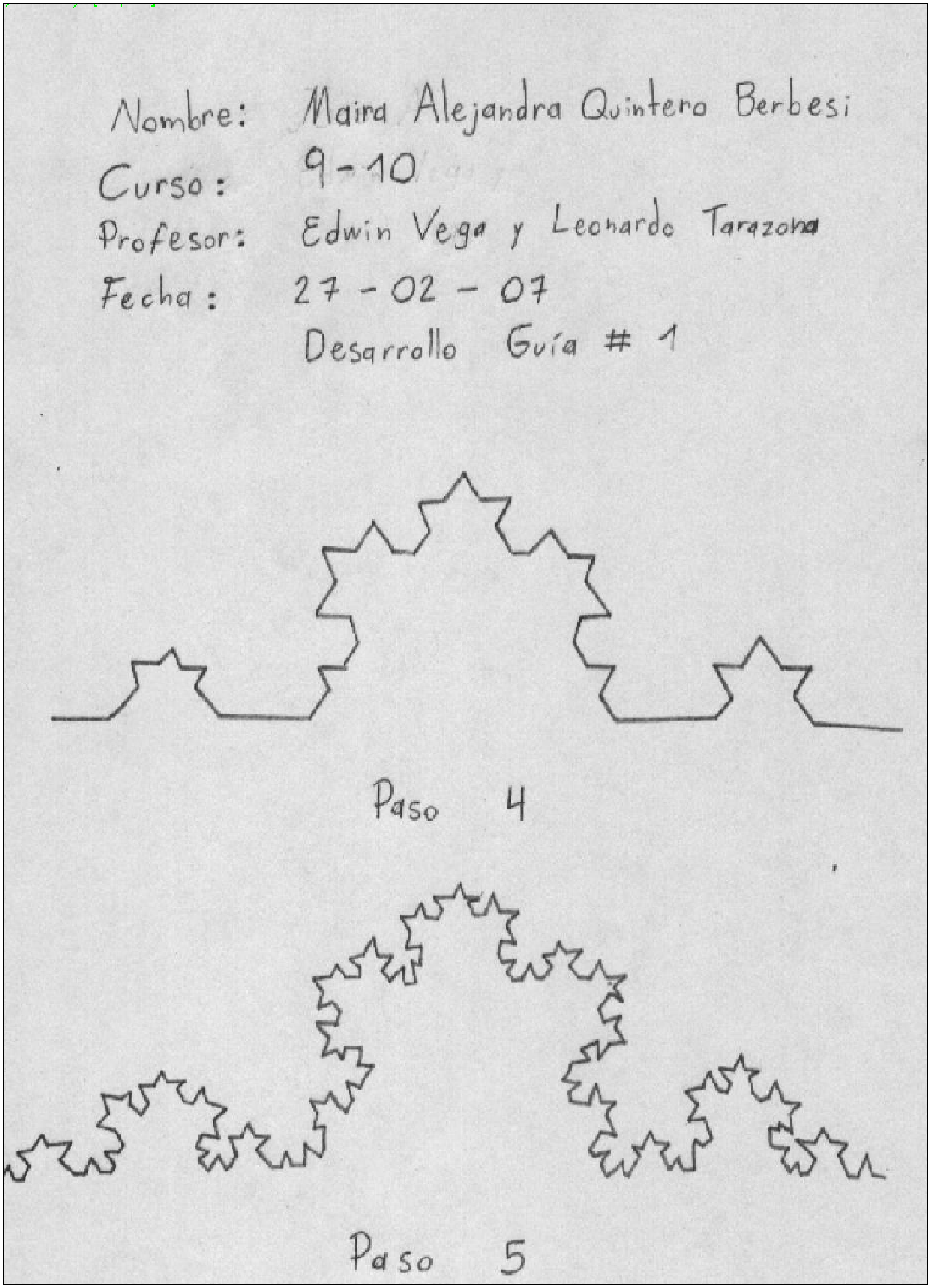


Figura 14. Guía de trabajo No 1 de Maira Alejandra


Nombre: Maira Alejandra Quintero Berbesi
Curso: 9-10
Profesor: Edwin Vega y Leonardo Tarazona
Fecha: 27 - 02 - 07
Desarrollo Guía # 1

Paso 4

Paso 5

Al percibir los alumnos que dibujar los siguientes pasos de la figura era un poco complicado y que deberían gastar más tiempo para un número mayor de pasos, decidieron buscar la mejor forma de dar solución al problema pensando en otra vía semejante, pero que fuera efectiva y veloz. Después de haber estudiado un poco la solución, José Alonso, uno de los estudiantes, afirmó que el mejor camino sin duda era establecer una fórmula matemática, donde al introducir el número de pasos de la figura, la expresión diera como resultado el número de segmentos, y de esta forma sería más fácil remediar la situación. Los estudiantes observaron que una fórmula matemática agilizaba todo el proceso, así que hubo un gran interés y motivación y el desarrollo de la guía fue muy agradable, ya que iban y venían un sinnúmero de ideas por parte de los jóvenes, intentando crear su propia deducción de acuerdo con la situación propuesta.

Como se manifestó anteriormente, una secuencia gráfica es una situación ideal para los jóvenes, ya que así ellos pueden manipular y observar todo lo que sucede a medida que se presentan los cambios; esto lleva a la reflexión y a que los alumnos busquen un patrón que se ajuste a la situación. Fue así como los estudiantes notaron que las expresiones gráficas se pueden convertir en expresiones matemáticas, y dieron inicio a una relación entre lo que se veía, se sabía y se estaba aprendiendo para construir conocimientos matemáticos.

Como se puede observar en las figuras 15 y 16, los estudiantes, motivados por sus ideas, relacionaron el número de pasos de la figura con el respectivo número de segmentos de la misma, y empezaron a crear sus propias fórmulas matemáticas.

Figura 15. Guía de trabajo No 1 de Deissy Paola

N° Pasos	N° Segmentos
1	1
2	4
3	16
4	64
5	256
6	1024
7	4096
8	16.384

Respuesta: Al realizar cada uno de los pasos se obtienen cuatro veces más de segmentos que el anterior, y por lo tanto la ecuación seria $(n \times 4)$ siendo n el número de segmentos del paso anterior.

Figura 16. Guía de trabajo No 1 de Jerson Albey

N° Pasos	N° Segmentos
1	1
2	4
3	16
4	64
5	256
6	1024
7	4096
8	16.384

Respuesta: Al aumentar el número de pasos, es decir del 1 al 2 solo debemos multiplicar por 4 el número de segmentos del paso anterior

$$1 \times 4,\ 4 \times 4,\ 16 \times 4 \ldots\ n \times 4$$

$n =$ N° segmentos del paso anterior

Conclusión: Al aumentar los pasos solo debemos multiplicar por 4 del paso anterior, ya que gráficamente es difícil llegar al paso 8.

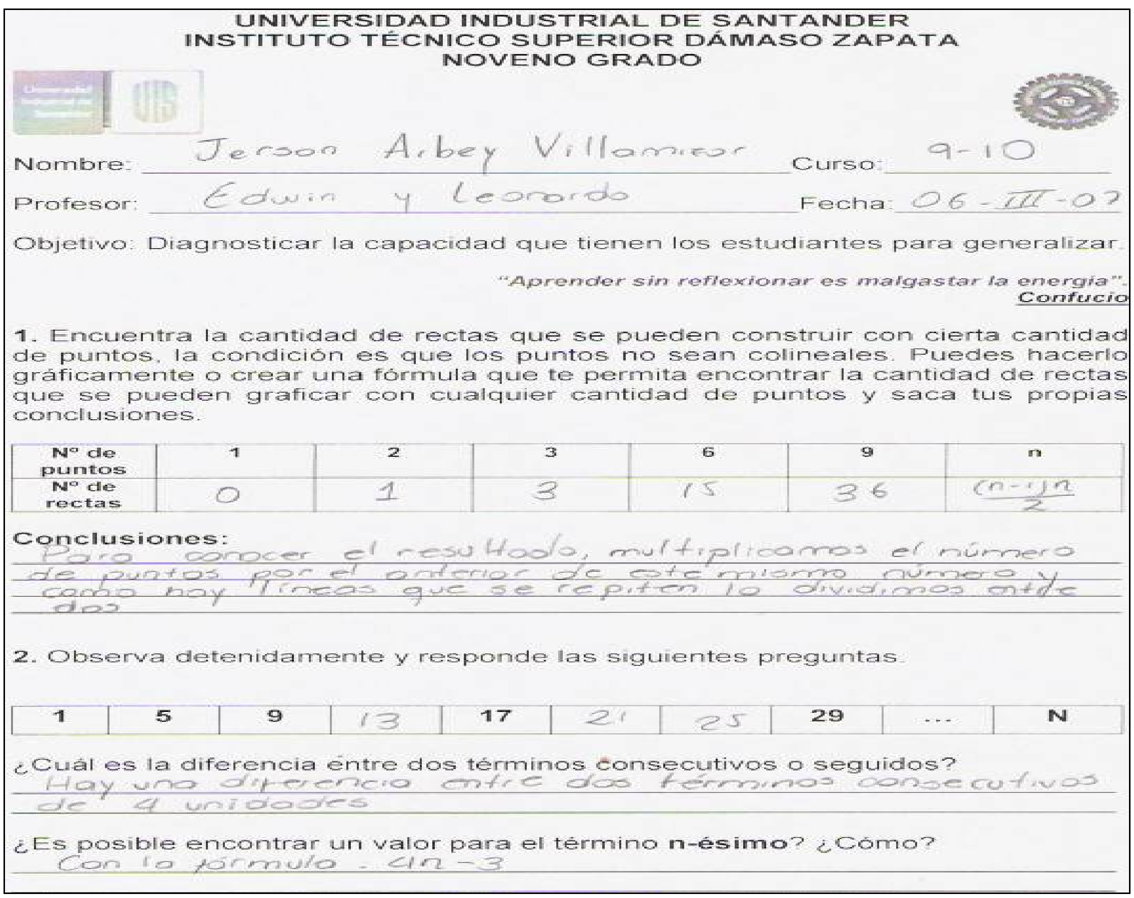
Teniendo en cuenta que el objetivo de la guía de trabajo era observar la capacidad que tienen los estudiantes para generalizar, incluimos en la guía un caso que no es precisamente una progresión aritmética, y se logró concluir que nuestros estudiantes presentaron dificultad a la hora de generalizar, pues fue la primera vez que intentaron realizar algo de este tamaño; la fórmula que dedujeron para calcular el número de segmentos en un cierto número de pasos fue $n \times 4$, siendo n el número de segmentos del paso anterior, la cual fue incorrecta, pues no tuvieron en cuenta el paso inicial. Sin embargo, no hay que desmeritar el trabajo hecho por los estudiantes, y sí vale la pena resaltar el esfuerzo que hicieron para calcular una fórmula matemática que les permitiera obtener la solución. Aunque el objetivo, como ya se había mencionado, consistía en diagnosticar los presaberes de los estudiantes y que los muchachos crearan esa conexión entre lo que sabían y observaban, se pudo resaltar que los jóvenes, aunque no lograron deducir la fórmula 4^{n-1}, para obtener el número de segmentos de la figura en cualquier paso, siendo n el número de pasos, sí lograron a través de sus ideas y cuestionamientos crear sus propias conjeturas y hacer algo aproximado a lo que se quería llegar. No cabe duda de que después de haber observado el trabajo realizado y la iniciativa por parte de los estudiantes, se podía afirmar que se tenían las bases necesarias y había un buen indicio para continuar con el tema de las progresiones aritméticas, cuya finalidad era despertar la capacidad deductiva de los jóvenes a través de un proceso de investigación en el aula.

Siguiendo con nuestro proceso de observar los presaberes, continuamos el trabajo con los estudiantes presentándoles una nueva guía de trabajo (Guía No 2)[18], que tenía por objetivo diagnosticar nuevamente los procesos de generalización de los estudiantes, pero esta vez con cierto avance, ya que la guía anterior tenía el mismo objetivo. Lo que queríamos verificar era que nuestros estudiantes ya no cometieran los errores hechos anteriormente, y que analizaran con mayor profundidad el material de trabajo y no lo tomaran como un simple cuestionario

[18] Ver Anexo 2.

que se responde sin reflexionar y analizar. La guía de trabajo está conformada por dos puntos, y el primero de ellos hacía alusión a encontrar la cantidad de rectas que se pueden trazar con cierta cantidad de puntos, en este caso, con los números naturales, iniciando en uno y con la condición de que los puntos no estuvieran en línea recta, o, como se dice en Geometría Euclidiana, que no sean colineales. Por medio de una tabla los jóvenes tenían que relacionar el número de puntos con el respectivo número de rectas que se obtenían con esa cantidad de puntos. Se observa en las figuras 17 y 18 cómo los estudiantes plasmaron sus ideas relacionando el número de puntos con la cantidad de rectas que se pueden trazar por ellos, y cómo empezaron a deducir nuevamente sus propias fórmulas matemáticas con la idea de generalizar y resolver rápidamente el problema.

Figura 17. Guía de trabajo No 2 de Jerson Albey



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
INSTITUTO TÉCNICO SUPERIOR DÁMASO ZAPATA
NOVENO GRADO

Nombre: Jerson Aibey Villamizar Curso: 9-10

Profesor: Edwin y Leonardo Fecha: 06-III-07

Objetivo: Diagnosticar la capacidad que tienen los estudiantes para generalizar.

"Aprender sin reflexionar es malgastar la energía".
Confucio

1. Encuentra la cantidad de rectas que se pueden construir con cierta cantidad de puntos, la condición es que los puntos no sean colineales. Puedes hacerlo gráficamente o crear una fórmula que te permita encontrar la cantidad de rectas que se pueden graficar con cualquier cantidad de puntos y saca tus propias conclusiones.

Nº de puntos	1	2	3	6	9	n
Nº de rectas	0	1	3	15	36	$\frac{(n-1)n}{2}$

Conclusiones:
Para conocer el resultado, multiplicamos el número de puntos por el anterior de este mismo número y como hay líneas que se repiten lo dividimos entre dos

2. Observa detenidamente y responde las siguientes preguntas.

1	5	9	13	17	21	25	29	...	N

¿Cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos o seguidos?
Hay una diferencia entre dos términos consecutivos de 4 unidades

¿Es posible encontrar un valor para el término **n-ésimo**? ¿Cómo?
Con la fórmula . $4n-3$

Figura 18. Guía de trabajo No 2 de Maira Alejandra

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
INSTITUTO TÉCNICO SUPERIOR DÁMASO ZAPATA
NOVENO GRADO

Nombre: Maira Alejandra Quintero Curso: 9-10

Profesor: Leonardo y Edwin Fecha: 06-03-07

Objetivo: Diagnosticar la capacidad que tienen los estudiantes para generalizar.

"Aprender sin reflexionar es malgastar la energía".
Confucio

1. Encuentra la cantidad de rectas que se pueden construir con cierta cantidad de puntos, la condición es que los puntos no sean colineales. Puedes hacerlo gráficamente o crear una fórmula que te permita encontrar la cantidad de rectas que se pueden graficar con cualquier cantidad de puntos y saca tus propias conclusiones.

Nº de puntos	1	2	3	6	9	n
Nº de rectas	0	1	3	15	36	$(n-1)\frac{n}{2}$

Conclusiones:
Una conclusion es que para saber el resultado, multiplicamos el número de puntos por el anterior de este número, y como hay líneas que se repiten al contarlas, dividimos en dos

2. Observa detenidamente y responde las siguientes preguntas.

1	**5**	**9**	13	**17**	21	25	**29**	...	**N**

¿Cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos o seguidos?
Los números van aumentando en 4, luego su diferencia es 4.

¿Es posible encontrar un valor para el término **n-ésimo**? ¿Cómo?
Por supuesto, con la formula $[4n-4]+1$ que es lo mismo que $4n-3$

Como se pudo apreciar anteriormente, los estudiantes lograron esta vez con mayor precisión encontrar una expresión que relacionara el número de puntos con el número de rectas para un caso n-ésimo. Por ejemplo, el estudiante Jerson Albey afirmó: “Para conocer el resultado, multiplicamos el número de puntos por el anterior de este mismo número, y como hay líneas que se repiten lo dividimos entre dos”. Por otra parte, Maira Alejandra afirmó: “Para saber el resultado, multiplicamos el número de puntos por el anterior de este número, y como hay líneas que se repiten al contarlas, dividimos por dos”. Nuevamente los estudiantes estaban demostrando sus capacidades, y era de apreciar que realizaron una mejor comprensión del problema y pudieron atreverse a formalizar sus ideas por medio de una expresión matemática.

En el segundo punto de la guía de trabajo los jóvenes tenían que observar una secuencia de números que se encontraban en una tabla y prestar atención a la diferencia que había entre dos términos consecutivos o seguidos y, a la vez, encontrar una expresión que permitiera calcular el término n-ésimo. Para ello se plantearon las siguientes preguntas, las cuales permitían un mayor entendimiento en el desarrollo del trabajo. La primera pregunta era: ¿Cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos o seguidos? El estudiante Jerson Albey afirmó: “Hay una diferencia entre dos términos consecutivos de cuatro unidades”, mientras que Deissy afirmó: “Los números van aumentando de cuatro en cuatro, luego su diferencia es cuatro”. Podemos observar que las respuestas en cierto modo son distintas, ya que Jerson Albey menciona la palabra diferencia haciendo alusión a la resta de dos términos, mientras que Deissy menciona un valor que se le suma al término anterior para obtener el siguiente, lo cual es muy valioso, ya que en el momento en que ellos deduzcan las respectivas fórmulas estén más familiarizados a usar esta terminología. La segunda pregunta hacía referencia a poder encontrar un valor para un término n-ésimo, a lo que ellos respondieron que efectivamente, y que según lo que habían realizado y analizado, la mejor forma era a través de la fórmula $4n-3$.

Aunque a los jóvenes se les dificulta un poco expresar tanto en forma verbal como escrita sus nuevos conceptos, puesto que en cierta forma es por falta de práctica en otras materias y mucho más si es en matemáticas, esta vez lo hicieron de una mejor manera, porque analizaron y describieron muy bien la situación y, además, lograron encontrar una expresión que les permitiera calcular el n-ésimo término. Esto nos lleva a concluir que una vez más los estudiantes lograron mejorar su capacidad para generalizar, ya que la guía fue elaborada precisamente para orientar en la construcción de nuevos conceptos.

II. LOS APORTES DE NUESTROS ESTUDIANTES DE INVESTIGACIÓN

"Todos nosotros sabemos algo. Todos nosotros ignoramos algo. Por eso, aprendemos siempre".

Paulo Freire

En esta categoría se almacenan todos aquellos comentarios orales o por escrito, hechos por parte de los estudiantes a medida que resolvían las guías de trabajo, donde se evidencian la forma en que fueron construyendo sus conceptos y la deducción de las respectivas fórmulas que se trabajan en este tema. Estas serán narradas en formas de diarios de clase, que son escritos que se realizan para cada sesión en el que se describen las actividades de la clase, las emociones que les produce, las reflexiones que de ello resultan y las observaciones al profesor y al trabajo de los compañeros. Como instrumento de trabajo, accede al investigador en la reconstrucción de lo ocurrido en la clase, reflexionar sobre lo vivido, plantear problemas, elaborar y debatir las ideas como una forma de complementar lo

formulado en clase. A partir de su reflexión y reconstrucción elabora conceptos y concepciones alternas a los conceptos y argumentos expuestos.
Por esta razón, elaboramos la categoría de esta forma, donde también aparecerán en forma implícita entrevistas con nuestros estudiantes de investigación. La guía de trabajo número tres (ver Anexo 3), entra ya en el tema de las progresiones aritméticas como tal, sin llamarlas así, simplemente proponiendo unas situaciones problemas que conduzcan al aprendizaje del tema, para después sí darle el nombre matemático, que en este caso es Progresión Aritmética.

A continuación se presentaran una serie de diarios de clase, que hacen parte de la recolección de datos y que narran las experiencias vividas en el transcurso de la investigación de aula, y además ayudan a ubicarnos en la verdadera realidad que se vive en el interior de un salón de clases al momento de realizar una investigación matemática de aula.

OBSERVACIÓN No 1.

FECHA: 27 de marzo de 2007
INSTITUCIÓN: Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata
LUGAR: Aula de clase
HORA: 5:45 p. m. - 6:45 p. m.
POBLACIÓN: 21 jóvenes (17 mujeres y 4 hombres)
TEMA: Progresiones aritméticas
OBJETIVO: Explorar los presaberes de las progresiones aritméticas y el cálculo del término general.

DECRIPCIÓN DEL ESCENARIO

La forma en que nosotros como investigadores percibimos lo que ocurre en clase y el desarrollo de la misma es de una u otra manera subjetiva, y puede que no siempre sea lo estrictamente ocurrido en el aula, ya que se presentan varios agentes que intervienen y que permiten que se nos escapen de esta observación; por lo cual se tiene una percepción desfigurada en cierto modo de lo que realmente es la clase de matemáticas y lo que acontece en el aula. De acuerdo con lo anterior, narraremos lo ocurrido durante el trabajo con nuestros estudiantes de investigación, contando las diferentes tareas de enseñanza y los momentos de aprendizaje de los estudiantes entre otras cosas.

El día 27 de marzo nos reunimos con los estudiantes que participan de esta investigación para realizar una reflexión acerca de lo visto en la guía de trabajo, llevando a cabo una especie de debate entre los muchachos de 9-9 y 9-10, ubicándolos en dos grupos separados dentro del salón de clase. Los muchachos mostraron mucho entusiasmo a la hora de organizarse en grupos de trabajo, más aún teniendo en cuenta que se organizaban por curso respectivamente. El debate consistía en que cada uno de ellos debían explicar con sus palabras lo que habían logrado comprender a través del taller número tres, donde se plantean unas situaciones problemas que conducen al estudiante a razonar, analizar y deducir su pensamiento abstracto a través de las progresiones aritméticas. Sin embargo, al planificar esta actividad pensábamos que era un poco difícil dirigir estos debates, porque a veces los estudiantes se pierden y no saben qué están respondiendo o a qué postura están atacando o preservando; por otra parte, casi siempre participan de la plenaria los mismos estudiantes, mientras que hay estudiantes a quienes ni siquiera se les conoce el tono de voz. No obstante, implementamos el debate en el salón de clase para saber qué ocurriría, suponiendo que participaría la gran mayoría, para así tratar de romper con este paradigma de que siempre participan los mismos.

Si bien esto evidentemente es normal en un debate común y corriente, donde hay cierta cantidad de personas y puede que sucediera en el salón de clase, sin embargo se quiso hacerlo en el aula para realizar la clase de un modo distinto al convencional, donde solamente el docente se limita a presentar los conceptos, fórmulas y posteriormente evaluar. Lo que buscábamos con el debate es que entre todo el grupo se construyeran las respectivas definiciones y deducciones de las fórmulas del tema Progresiones Aritméticas.

El debate se inició a partir de una situación problema ubicada en el contexto del diario escolar de los muchachos, para que así presentara interés por parte de ellos y se trabajara de la mejor manera el desarrollo de la guía de trabajo. El primer problema con el que se inició el debate fue el siguiente: *Un estudiante de noveno grado quiere ahorrar para ir a una excursión organizada por el Tecnológico para el día 5 de noviembre. El costo de la excursión es de $150.000. Si el estudiante desde el primer día de marzo del mismo año comienza con $500 y al siguiente día aumenta su ahorro en $700 más con respecto al día anterior. ¿Será que el estudiante puede ir?*

Inicialmente, los estudiantes se organizaron por grupos de trabajo y comenzaron a analizar la situación problema, para así participar del mismo. Deissy fue la primera que decidió participar del debate y comentó lo siguiente: “Al analizar el problema puedo ver que la mejor forma de comprenderlo para después solucionarlo, es representándolo por medio de una expresión matemática. En este caso, el primer día lo puedo llamar $D_1 = 500$, y el siguiente día lo puedo denominar $D_2 = 500 + 700$, teniendo en cuenta los $500 del día anterior y los $700 del nuevo día. El día tercero puedo expresarlo con la ecuación $D_3 = 500 + 700 + 700$, que equivale a dos veces $700, es decir, $D_3 = 500 + 2(700)$ y así sucesivamente para un día n-ésimo”.

El comentario de Deissy fue muy valioso para la clase, ya que ella logró en cierta forma modelar la situación por medio de ecuaciones, pero no logró hacer un análisis más profundo que involucraba la generalización, mientras que José intervino en el debate y se percató de un detalle acerca de lo que había realizado Deissy y lo expresó de la siguiente manera: “Las expresiones que dedujo Deissy son correctas, pero hay un patrón que podemos analizar y es el siguiente: El valor de $500 es un valor fijo que se mantiene en todas las expresiones y a su vez el valor de $700 empieza a permanecer constante, pero a partir del tercer día empieza a duplicarse, en el cuarto día se triplica y así con respecto a los demás días”. Lo expresado por los dos estudiantes llevó al grupo entero a reflexionar sobre lo que ellos habían comentado, a generar otras afirmaciones y aclaraciones por parte de los demás estudiantes. En ese preciso momento es cuando los estudiantes están atentos al tema y demuestran interés en él, y es cuando también debe entrar el docente como mediador para guiar a los estudiantes y para aclarar todos aquellos comentarios que los jóvenes realizan en clase. El debate nos llevó a encontrar una expresión que generalizaba el valor en dinero que representaba cada día, sin tener presente la cantidad ahorrada por el estudiante de noveno grado que quería ir a la excursión. Los estudiantes llegaron a deducir la siguiente fórmula, a partir de lo hablado en el debate:

$$D_n = 500 + (D-1)d \,,$$

donde 500 es el primer término de la sucesión que empieza a formar el estudiante y permanece constante y además significa en el problema los $500 de ahorro inicial; D significa el número de días que el estudiante se toma para ahorrar; d es la diferencia entre dos días consecutivos, que en el problema correspondían a los $700.

Si nos detenemos a analizar la expresión que lograron los estudiantes, se podría decir que es una excelente aproximación con respecto a la expresión general de una progresión aritmética, ya que fueron capaces de deducir por sus propios medios y a partir de una situación problema, una fórmula con los elementos necesarios para calcular el n–ésimo término. Después de haber encontrado la fórmula del término general, se preocuparon por saber cuánto dinero debía ahorrar cada día, pues les quedó muy fácil saberlo contando en el calendario el número de días y así iban agregando términos a la progresión. Finalmente se dieron cuenta que para el 5 de noviembre el valor de n es de 250, por lo tanto dedujeron que el término 250 se obtenía de: $500+(250-1)\times 700$ y concluyeron que ese valor equivale a todo el dinero ahorrado, afirmando que el estudiante sí alcanzaba a reunir el dinero para ir a la excursión.

Al finalizar aclaramos, que en realidad lo que ellos calcularon fue el valor en dinero que debía ahorrar en el día 250 (noviembre 5) y para resolver el problema faltaba calcular el valor ahorrado en cada día y hacer la suma de los 250 términos. Después de un breve silencio, intervino Jerson, preguntando "¿Cómo vamos a hacer para calcular la suma de todos los términos?; ¡profesores, debe existir una forma rápida de calcular esa suma; imposible que nos toque ponernos a sumar día a día!" Seguidamente, intervino Maira, diciendo: "¡Profesores, ese estudiante ahorró millones, con la plata que ahorró nos podría invitar a todo el grupo, es mucha plata, son millones!" Intervenimos afirmando que el dinero recogido era una gran cantidad, y que después buscaríamos la manera de estimar exactamente cuánto dinero ahorró el estudiante del problema.

Fue satisfactorio que los estudiantes se dieran cuenta de la magnitud del problema, y tras sus comentarios la mejor forma de dar respuesta a sus interrogantes fue manifestarles que en la siguiente guía de trabajo el objetivo sería obtener una nueva herramienta que permitiera calcular esta suma.

OBSERVACIÓN No 2.

FECHA: 10 de abril de 2007

INSTITUCIÓN: Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata

LUGAR: Aula de clase

HORA: 5:45 PM - 6:45 PM

POBLACIÓN: 21 jóvenes (17 mujeres y 4 hombres)

TEMA: Progresiones aritméticas

OBJETIVO:

- Calcular la suma de los n términos de una PA recurriendo a un método propio.
- Deducir una fórmula para calcular la suma de términos de una PA.

Continuando con la narración de las actividades de clase, queremos comentar que los estudiantes iniciaron con gran expectativa por saber la forma en que iban a calcular la suma de los términos, para darle respuesta al problema anterior y haciendo énfasis en la experiencia vivida y el trabajo desempeñado por nuestros estudiantes en la guía de trabajo numero cuatro, donde esta vez lo que se pretendía era que los estudiantes empezaran a mejorar su capacidad de pensamiento pasando por dos procesos. El primero de ellos consistía en una serie de ejercicios donde debían calcular la suma de cierta cantidad de números de una forma recursiva, o lo que se conoce como ensayo y error. El segundo proceso consistía en buscar que los jóvenes se encaminaran más de cerca al proceso de deducción, mediante ejercicios que permitían entender la forma en que se puede llegar a deducir y generalizar una expresión matemática.

Las siguientes figuras hacen alusión al trabajo realizado por los estudiantes José, Deissy y Maira, donde se les pide calcular la suma de los 100 primeros números pares y la suma de los 100 primeros números naturales. Es de notar en estos estudiantes la manera en que realizan la suma sin utilizar ninguna expresión; por el contrario, agrupan los números en filas y en columnas (como un especie de matriz) para no realizar la suma de los números de la forma convencional y a su vez para que sea menos tediosa (ver figuras N° 19, 20, 21).

Figura 19. Guía de trabajo No 4 de José Alonso

1. Busca la manera más práctica para calcular la suma de:

✓ Los primeros 100 números pares.

2	22	42	62	82	102	122	142	162	182
4	24	44	64	84	104	124	144	164	184
6	26	46	66	86	106	126	146	166	186
8	28	48	68	88	108	128	148	168	188
10	30	50	70	90	110	130	150	170	190
12	32	52	72	92	112	132	152	172	192
14	34	54	74	94	114	134	154	174	194
16	36	56	76	96	116	136	156	176	196
18	38	58	78	98	118	138	158	178	198
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200

100 + 310 + 510 + 710 + 910 + 1110 + 1310 + 1510 + 1710 + 1910 = 10.100

Figura 20. Guía de trabajo No 4 de Deissy

Los primeros 100 números naturales.

1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

55 + 155 + 255 + 355 + 455 + 555 + 655 + 755 + 855 + 955 = 5.050

Figura 21. Guía de trabajo No 4 de Maira

Los primeros 50 múltiplos de 8.

8	88	168	248	328
16	96	176	256	336
24	104	184	264	344
32	112	192	272	352
40	120	200	280	360
48	128	208	288	368
56	136	216	296	376
64	144	224	304	384
72	152	232	312	392
80	160	240	320	400

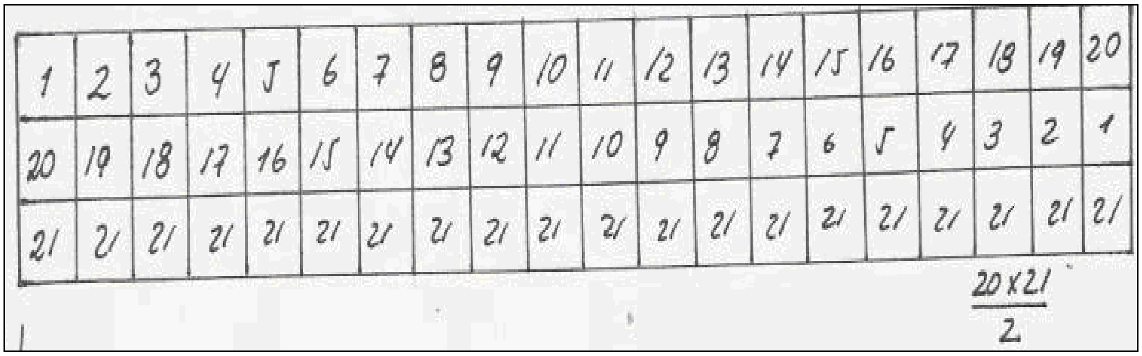
440 + 1240 + 2040 + 2840 + 3640 = 10.200

Notamos cómo los estudiantes realizaron el trabajo de una forma creativa y empezaron a ver que, si utilizaban su pensamiento para resolver ejercicios matemáticos, las cosas se reducían y eran más fáciles de entender. Es así como ellos concluyen que la mejor manera de acatar un problema de matemáticas consiste en hacer un análisis previo de la situación y tener presente a dónde se quiere llegar, para después pasar a resolverlo.

Además, en el segundo punto de la guía de trabajo se llevó a realizar la deducción de la fórmula que permite calcular la suma total de una progresión aritmética. Principalmente, se quiso calcular la suma de los primeros 20 naturales indicándoles unos ciertos pasos a los estudiantes; el primero de ellos consistía en ubicar los veinte números cada uno en una respectiva cuadricula, y debajo de ella ubicarlos pero cambiando el orden. Realizado esto, después se debían poner los resultados de las sumas verticales y responder que era lo que observaban.

La estudiante Maira Alejandra nos cuenta cómo fue el proceso que llevó a cabo para realizar el trabajo de clase: “Para realizar este ejercicio tomé como base la sugerencia que nos dieron Edwin y Leonardo; luego, para saber el resultado, multipliqué el resultado de todas las sumas con el último término y lo dividí por la mitad, o sea, por dos y esa fue la respuesta que me salió”. Por otra parte, Jerson Albey afirmó: “Cuando trabajé este ejercicio, tomé como base la sugerencia que me habían dado y ordené los primeros veinte naturales en forma ascendente. Luego debajo de ellos los ubiqué en forma descendente para posteriormente sumarlos y noté que todas las sumas eran iguales y ese resultado lo multipliqué por el número de veces y dividí por dos para así llegar a la respuesta”. Podemos apreciar cómo los estudiantes realizaron en forma correcta lo que se quería, para que así lograran deducir y entender la fórmula que permite calcular la suma de una progresión aritmética (ver Figura 22).

Figura 22. Guía de trabajo No 4 de Jerson



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21

$$\frac{20 \times 21}{2}$$

La actividad permitió que los estudiantes pudieran deducir la siguiente fórmula $S = \dfrac{20 \times 21}{2}$, donde 20 era el número de veces que se repetía la suma y 21 se obtenía de sumar los dos números en forma vertical, como en la figura, y la operación de dividir por dos era debido a que se estaban sumando los términos dos veces. Gracias a este análisis realizado por los jóvenes se pudo lograr que ellos entendieran el origen de la expresión y nuevamente se vieran envueltos en el proceso de deducir expresiones matemáticas. Para afianzar un poco más la investigación que realizaron los estudiantes, establecimos la fórmula haciendo referencia a una progresión aritmética en general, con el fin de explicar el por qué de los pasos lógicos que se siguen para deducir la expresión que nos permite calcular la suma de los términos de una progresión,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \quad \text{con} \quad a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Después de nuestra explicación varios de los estudiantes notaron que sumar cualquier par de términos en sentido vertical, como en la figura anterior, equivale a sumar el primero y el último término. De esta manera comprendieron la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética. Fue entonces cuando José afirmo: “¡Profes, esta fórmula nunca se nos va a olvidar!” (todos se rieron). A continuación Deissy dijo: “¡Profesores, ahora sí calculemos cuánto dinero ahorró el estudiante para ir a la excursión!” Nos parece muy bien, empecemos a identificar los datos. Jerson dijo: “Iniciemos sumando el primer y el último término, es decir, 500+174800, y multipliquémoslo por 250, que fueron los días durante los cuales se hizo el ahorro y el resultado lo dividimos por dos”. Todos se colocaron en la tarea de hacer los cálculos y finalmente Maira contestó: “Profesores, ¿sí vieron que sí eran millones?” En efecto, fueron 21.912.500. José mencionó: “A partir de mañana voy a ahorrar para tener dos millones como el estudiante de la excursión”. Entonces le preguntamos durante cuánto tiempo iba a ahorrar, para que así pudiera calcular con cuánto empezaba a ahorrar y cuánto era el aumento diario, teniendo presente que no puede dejar de ahorrar ni un día y que cuanto mayor sea el aumento diario, menor va a hacer el tiempo en que se demore en reunir el dinero. “¿Puedes hacer tú mismo las cuentas?”, le preguntamos. “¡Claro que sí!”, contestó.

III. El logro adquirido por los estudiantes… ¿Qué tan lejos llegaron?

“La investigación realizada por docentes es una alternativa viable en el aula, que puede trasformar la mentalidad y la metodología del educador”.

Gloria Arias Mendoza

En esta categoría se hablará acerca del alcance obtenido por parte de los estudiantes de noveno grado para deducir y generalizar fórmulas matemáticas a través de las progresiones aritméticas una vez realizadas todas las guías de trabajo. Después de que los jóvenes trabajaron las diferentes propuestas hechas en las guías de trabajo, se hizo una pequeña reflexión en forma de entrevista acerca de las mismas, para saber qué tan lejos habían llegado los estudiantes y si habían adquirido un nuevo aprendizaje, y además si se logró el objetivo propuesto, el cual consistía en desarrollar la capacidad deductiva mediante el aprendizaje de las progresiones aritméticas.

Las preguntas que se realizaron en la entrevista son de tipo abierto, ya que se pretendía que de una forma verbal los estudiantes lograran expresar descripciones más claras acerca del proceso de investigación, cómo se sintieron y cuál fue el alcance que lograron desarrollar a partir de sus presaberes por medio de esta investigación de aula. Además, buscar la forma de almacenar la mayor cantidad de información de una manera informal, teniendo presente todo lo que expresan los estudiantes desde su perspectiva, sus experiencias y su relación con los demás compañeros y con el contexto en el cual desarrollaron su proceso de investigación, para así proporcionar una mayor claridad al resultado que se obtuvo a través de nuestra pregunta de investigación y, a partir de las voces de los estudiantes, mostrar que las investigaciones de aula cumplen funciones específicas dentro del proceso de creación de conocimiento.
Las preguntas de dicha entrevista y lo que expresaron los estudiantes en el transcurso de la investigación fue lo siguiente:

Leonardo y Edwin: Si los profesores de matemáticas del colegio te preguntaran qué es lo que has aprendido durante este tiempo con los practicantes de la UIS, ¿qué dirías?

José Alonso: Diría que las matemáticas están muy ligadas a nuestra vida diaria en todo momento, ya sea de forma directa o indirecta, y siempre están actuando. Este tema de progresiones aritméticas está muy presente en nosotros, siempre estamos ordenando las cosas de forma lógica, teniendo en cuenta un patrón que las diferencia y es así que hay mayor sentido y todo es más fácil de entender. Sería capaz de decirles a mis profesores de matemáticas que una progresión aritmética es una sucesión de términos con una razón establecida, la cual nos ayuda a agilizar procesos aritméticos. También les contaría que aprendí por mis propios medios a partir de una situación problema a deducir expresiones matemáticas que facilitan la solución de un problema, y además que logré calcular la suma de los n términos de una progresión aritmética. Entonces, he aprendido todo esto sobre progresiones aritméticas, porque profundizamos un poco más e íbamos descubriendo cosas nuevas, y espero continuar aprendiendo mucho más.

Maira Alejandra: Expresaría que he aprendido a crear fórmulas matemáticas que me hacen más sencillos los problemas, y que el tema de progresiones aritméticas, aunque es algo nuevo en mi vida escolar, en nuestra vida diaria no lo es, pues diariamente nos vemos enfrentados a situaciones donde debemos hacer uso de este tema, dando una razón lógica a nuestros actos. Una progresión aritmética es una sucesión de términos, en la cual cada término, excepto el inicial, se obtiene de sumar al término anterior una cantidad constante llamada razón.

Jerson Albey: Afirmaría que al ir realizando las diferentes situaciones problema, propuestas en las guías de trabajo, se conocía o descubría una serie de conceptos que nos llevarían a entender mejor el tema a estudiar. Que reflexionando y pensando un poco se lograba una mayor comprensión al momento de deducir fórmulas matemáticas, y que las progresiones aritméticas son sucesiones de términos que poseen un primer término, una razón que es constante, un último término y un número de términos. Además, podría decir que para calcular una suma que esté en progresión aritmética es muy fácil, ya que con los datos que me presenten puedo deducir mi propia expresión matemática que me facilite el desarrollo.

Deissy Paola: Durante el tiempo que estuve con los practicantes de la UIS, aseguraría que he aprendido que una progresión aritmética es una sucesión en la que cada término, excepto el primero, se obtiene de sumar al término anterior una cantidad constante llamada razón o diferencia, y que además desarrollamos guías con grandes problemas y con cierta dificultad, que nos llevaban a mejorar nuestra habilidad de pensamiento y a familiarizarnos con la deducción de expresiones matemáticas, las cuales dan una solución más rápida a los problemas. También deducimos fórmulas para calcular la suma de cierto número de términos; diría que aprendí mucho en poco tiempo y eso fue muy agradable; quisiera seguir teniendo la oportunidad de aprender más y practicar para así mejorar.

A partir de las respuestas dadas por los alumnos se podría afirmar que la investigación obtuvo buenos resultados, pues los estudiantes se atrevieron a dar su propia definición, como lo hizo en este caso Deissy afirmando que una progresión aritmética “es una sucesión en la que cada término, excepto el primero, se obtiene al sumar al término anterior una cantidad constante llamada razón”, sin miedo a cometer errores, para aprender de ellos, y sin limitarse a contestar lo que el profesor tradicionalista quiere oír. Además de dar una definición, como se puede apreciar en el resto de su comentario, tiene gran valor cuando afirma que estaba logrando mejorar su habilidad de pensamiento, ya que es aquí donde se centra la hipótesis de investigación, y que los estudiantes sin darse cuenta mejoren su capacidad de pensamiento y den muestras de ello, como se reflejó en el desarrollo de las actividades propuestas en cada una de las guías de trabajo, puesto que por medio de este proceso lograron deducir las respectivas fórmulas, que según afirman ellos facilitan y agilizan el desarrollo de un problema.

Otra parte de la entrevista en donde los jóvenes reflejan el agrado que sintieron durante la investigación matemática en el aula de clases se ve en las opiniones dadas a las siguientes dos preguntas, las cuales hacen referencia al papel del maestro y forman parte de los elementos que permiten saber lo aprendido por parte de los estudiantes en su experiencia como investigadores.

Leonardo y Edwin: ¿Qué te parecieron el tema y el trabajo de clase?

José Alonso: El tema es muy agradable, ya que nos ayuda a agilizar procesos matemáticos; con respecto al trabajo de clase, creo que fue buena la metodología puesto que debíamos ser muy creativos.

Maira Alejandra: Es un tema sencillo, el cual nos brinda las herramientas para que los problemas sean más sencillos. Las clases fueron geniales. A partir de una situación teníamos que crear nuestra propia solución.

Jerson Albey: Las progresiones aritméticas son un tema que nos ayuda a simplificar la solución de los problemas. El trabajo de clase me gustó porque indagamos bastante y debíamos desarrollar nuestra habilidad de pensamiento.

Deissy Paola: Las guías de clase eran de pensar y no era nada fácil, pues teníamos que profundizar y crear nuestro propio conocimiento. Además, me gustó que pudiéramos opinar libremente y dar nuestras ideas, y no como en otras clases donde los profesores quieren que uno diga lo que ellos dicen.

Cuando José comenta que el tema le ayuda a agilizar procesos matemáticos, al igual que Jerson cuando dice que indagaron bastante y debían desarrollar su habilidad de pensamiento, es de valorar todos estos comentarios que logran expresar los estudiantes, puesto que aparte de estar comprendiendo el tema, los comentarios dan muestra de que los jóvenes están construyendo su capacidad deductiva, ya que a partir de esto están demostrando la habilidad para relacionar información y buscar analogías entre temas de la misma materia pero de diferente naturaleza. Para comprender mejor el proceso de indagar, incluimos el comentario siguiente:

> *Indagar, aunque implica responder interrogantes y resolver problemas, no es lo mismo que investigar; de hecho, la investigación es sólo una forma de indagación. El concepto de indagación propuesto es considerado como una forma de investigación. Siguiendo el criterio adoptado por Bogdan y Biklen (1992) la indagación se distingue de la investigación por su finalidad (práctica) y por sus promotores (los educadores).*
>
> *La investigación es un estado de ánimo, una perspectiva que adopta la gente sobre los objetos y las actividades. Los académicos e investigadores profesionales indagan en los asuntos que les interesan y enuncian el propósito de su estudio bajo la forma de hipótesis o preguntas. No sólo se espera de ellos que emprendan una investigación, sino que lo hagan ateniéndose estrechamente a*

las tradiciones establecidas, se trate de una investigación cuantitativa o cualitativa. La polémica entre colegas implica que todos coinciden en lo que significa hacer una investigación. También es posible investigar fuera del ámbito académico; en ese caso, quienes lo hacen son personas del "mundo real", y la investigación que llevan a cabo tiene entonces un carácter netamente práctico, se dirige a su propios intereses y puede ser, si así lo desean, una herramienta par el cambio social".

Leonardo y Edwin: ¿Si tuvieras que explicarles a otros compañeros el tema, serías capaz de hacerlo?

José Alonso: ¡Claro, profesores, que lo haría! Porque creo que el tema es fácil y yo mismo construí mis propios conocimientos a partir de mi trabajo.

Deissy Paola: ¡Pues no sé! Pero lo intentaría para saber qué tan fuertes son mis conocimientos, y además para darme cuenta de todo lo que aprendí.

Jerson Albey: Sí lo haría, pues me gusta enseñarles cosas a las demás personas y brindarles mi apoyo. Además, recuerdo lo aprendido gracias al trabajo que realicé en clase.

Luego de escuchar unos breves comentarios por parte de los jóvenes de investigación, nuestra idea era seguir indagando a los estudiantes para tener la mayor cantidad de argumentos que dieran la validez al trabajo realizado y sustentaran la pregunta que nos llevó a esta instancia. Para ello, planteamos las siguientes dos preguntas con el fin de perfeccionar las ideas y sacar nuestras conclusiones finales.

Leonardo y Edwin: Todo el desarrollo que se llevó a cabo durante el proceso de investigación, ¿sirvió para que ustedes afianzaran sus conocimientos y aprendieran un poco más de matemáticas?

José Alonso: Sí, pues a medida que desarrollábamos las guías de trabajo íbamos profundizando en el tema y nuestras ideas se aclaraban cada vez más.

Deissy Paola: Aprendimos un poco más. Es de resaltar que en nuestro caso nosotros fuimos los investigadores y constructores del conocimiento. Así las matemáticas son más fáciles de aprender, ya que estamos dejando de un lado la tiza y el tablero, cosa que se vuelve en momentos aburridora.

En las respuestas de los jóvenes a esta pregunta se observa la importancia que le atribuyen al hecho de haber sido investigadores y constructores de conocimiento, porque gracias a ello se logra un mayor aprendizaje, ya que se estaban haciendo las cosas de una forma fácil y agradable, donde los estudiantes lograban la abstracción sobre conocimientos concretos observados que les permitían emplear el razonamiento lógico inductivo y deductivo, y además desarrollar su habilidad de pensamiento de acuerdo con la edad en la cual se encontraban.

Finalmente, la última pregunta hecha estaba encaminada a saber qué relación encontraron los estudiantes entre el tema y las habilidades cognitivas durante todo el proceso que llevaron a cabo en el transcurso de la investigación matemática de aula, a lo cual ellos contestaron lo siguiente:

Leonardo y Edwin: Además de aprender el tema de progresiones, ¿qué otras capacidades o habilidades has logrado desarrollar a través de esta experiencia?

José Alonso: Creo que he logrado despertar un poco más mi pensamiento, pues a través del tema he querido buscar rápidamente una solución a los problemas que se me presentan.

Deissy Paola: Me he dado cuenta de que en todo problema las cosas están presentes, y la tarea de nosotros es descubrirlas de la manera más práctica para simplificar soluciones.

Jerson Albey: Pienso que he aprendido a agilizar mi mente, ya que ahora solo quiero encontrar las soluciones a los problemas que se me presentan de la forma más sencilla, más rápida y fácil que yo pueda, siempre y cuando sea la correcta.

Una vez dadas las respuestas a las preguntas de la entrevista y de haber escuchado los comentarios por parte de los estudiantes y, además de haber visto todo el trabajo realizado por ellos en el transcurso de la investigación, se puede observar que a través de estos relatos los estudiantes reflejan un poco su proceso de investigación y dan muestra de sus resultados durante el trabajo realizado, expresando sus propias ideas y conclusiones. Podríamos darnos respuesta a la pregunta con la cual se da inicio a esta categoría: ¿Qué tan lejos llegaron?, y de antemano utilizar estos argumentos para responder nuestra pregunta de investigación. Es notable observar cómo los estudiantes, desde su papel como investigadores, desarrollan un interés por comprender las cosas desde su perspectiva, partiendo de sus observaciones y comportamientos frente al conocimiento cuando se ven enfrentados a diversas situaciones, teniendo presente que su papel no solo se limita a sistematizar, sino que va más allá, a una reflexión crítica y analítica que busca la interpretación lógica que organice las ideas.

Los argumentos anteriores nos permiten deducir que, por medio de estas entrevistas y del trabajo en general, el proceso de investigación contribuyó a crear en los estudiantes la capacidad deductiva mediante el aprendizaje de las progresiones aritméticas, y a su vez favoreció en el mejoramiento del aprendizaje matemático.

Otra forma de evidenciar que el trabajo de investigación alcanzó el logro trazado se observa en una evaluación final[19] que se hizo para clausurar la investigación. Fue una evaluación en forma de test de selección múltiple, donde se evaluaba la capacidad de deducir, generalizar y de aplicar las fórmulas en forma correcta. Esta evaluación se puede encontrar al final en los anexos. A continuación daremos a conocer los resultados dados por los estudiantes de investigación.

Figura 23. Resultados de la evaluación final

ESTUDIANTE	GRADO	RESULTADO
Maira Alejandra	9-10	7 de 10
Deissy Paola	9-9	8 de 10
José Alonso	9-10	9 de 10
Jerson Albey	9-10	7 de 10

[19] Ver Anexo No 5, el cual fue tomado el 7 de mayo de 2007 de http://www.rinconmatematico.com/tests/miscelanea/progresionesaritmeticas/quiz/72_progresion_aritmetica.htm.

Digamos finalmente que la investigación matemática en el aula debe darse desde el colegio y a temprana edad, para que los jóvenes se involucren en los conocimientos matemáticos a través de la investigación, ya que es un proceso que va encaminado a la construcción y al aprendizaje del conocimiento.

Para cerrar esta categoría y finalizar el trabajo nos gustaría transcribir tres orientaciones generales dadas por Bogdan y Biklen que deben ponerse en práctica a la hora de realizar el análisis de datos, una vez que se haya hecho toda la recolección de la información acerca de los mismos.

> *"El primer punto… No se asuste por especular… No sugerimos que los hechos y los detalles no sean importantes, ya que las ideas deben estar apoyadas en los datos, pero esto son sólo medios para pensar con claridad y generar ideas, pero no son fines…*
> *Barney Glaser, una figura central en el desarrollo del análisis cualitativo, nos dice que las buenas ideas son las que más contribuyen a la ciencia de la conducta humana. Los hechos se olvidan pronto, pero no las ideas (Glaser, 1978, p. 8). La segunda sugerencia se refiere a "desahogarse". Las ideas y la comprensión llegarán a usted de manera regular a medida que la investigación avanza… Hay dos maneras de lograr esto: conversando sobre las ideas con amigos, colegas o escribiendo memos, comentarios y luego un texto corto… Le advertimos, sin embargo, que conversar sobre su análisis puede reducir el esfuerzo que necesita para hacer el trabajo realmente duro de poner las ideas en un papel…*
> *Finalmente, sugerimos que, mientras revisa sus datos durante la recolección de los mismos, los marque, haga comentarios a los registros o informaciones que haya tomado… Subraye lo que le parezca particularmente importante…" (Bogdan & Biklen, 2002, p. 154-155).*

CONCLUSIONES

Esta experiencia vivida con los estudiantes de noveno grado en el área de matemáticas fue muy agradable y satisfactoria, pues siempre se mantuvo el orden, interés y entusiasmo por parte de los jóvenes para adquirir y aprender nuevos conocimientos, conocimientos que de una u otra manera ellos iban construyendo, gracias a la voluntad de trabajo que se observó a lo largo de este proceso de investigación en el aula de matemáticas.

- Podemos afirmar que se logró obtener una respuesta positiva a la pregunta de investigación, la cual consistía en desarrollar la capacidad deductiva mediante el aprendizaje de las progresiones aritméticas en los estudiantes de noveno grado del Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata.

- La práctica como docentes e investigadores fue muy enriquecedora, ya que se logró observar la gran capacidad y creatividad que poseen los estudiantes de noveno grado, pues a partir de sus conocimientos, ideas y hallazgos empiezan a construir sus propios conceptos y forman su aprendizaje.

- La metodología empleada para resolver la pregunta de investigación fue la adecuada, ya que se puede evidenciar que por medio de entrevistas, diarios de clase y guías de trabajo, los estudiantes lograron familiarizarse con los procesos de deducción y dieron muestras reales de que pueden dar una mayor claridad a la respuesta de la pregunta de investigación.

- El tipo de investigación seleccionada, en nuestro caso cualitativa, favoreció al desarrollo de la hipótesis planteada en la pregunta de investigación, ya que por medio de categorías emergentes demostramos que se puede realizar un trabajo verdaderamente valioso con estudiantes de cualquier grado y edad.

- A través de las situaciones problema presentadas en las diferentes guías de trabajo se lleva a los estudiantes a reflexionar, pensar y ver las cosas desde otro punto de vista. Es decir, a tomar otra actitud con relación a la enseñanza tradicional y a desarrollar su propia capacidad de formación.

- Durante la investigación en el Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata los jóvenes mostraron gran interés por apropiarse y aplicar los conceptos matemáticos, ya que fueron sujetos activos y no pasivos en el desarrollo de las actividades, siendo directamente los protagonistas en el proceso de aprendizaje.

- Como docentes podemos afirmar que el orientar y el ser guías de estudiantes en un proceso de investigación matemática en el aula debe ser una tarea continua que permita reflexionar en nuestro de campo de acción y ver las grandes capacidades que poseen los estudiantes, capacidades que no se hacen notar en las clases tradicionales.

- Aunque fue un poco difícil escribir y desarrollar este trabajo, se logró que los jóvenes crearan una relación entre todo aquel conocimiento que tenían con el que adquirieron, y además fueron capaces de indagar, deducir y generalizar fórmulas matemáticas a partir de situaciones problema planteadas por medio de progresiones aritméticas.

ANEXOS

ANEXO Nº 1

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
INSTITUTO TÉCNICO SUPERIOR DÁMASO ZAPATA
NOVENO GRADO

Nombre: ________________________________ Curso: ______________

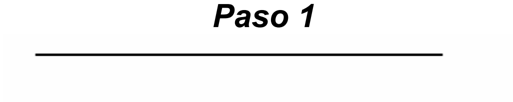
Profesor: ________________________________ Fecha: ______________

Objetivo: Diagnosticar la capacidad que tienen los estudiantes para generalizar.

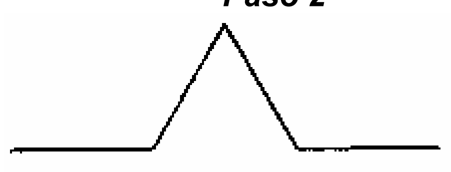
"La juventud quiere más ser estimulada que instruida".
Johann W. Goethe

1. Observa detenidamente cada una de las figuras dadas. Continúa su transformación hasta el paso 6 y explica con tus palabras el proceso que aplicas para obtener las siguientes figuras.

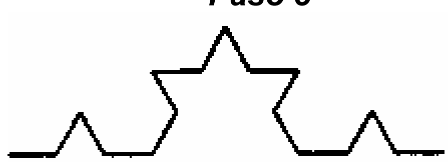
Paso 1



Paso 2



Paso 3



2. Completa la siguiente tabla, donde se compara el número de pasos con el número de segmentos obtenidos en cada figura.

Nº Pasos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Nº Segmentos								

ANEXO Nº 2

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
INSTITUTO TÉCNICO SUPERIOR DÁMASO ZAPATA
NOVENO GRADO

Nombre: ______________________________________Curso:_____________

Profesor: _____________________________________Fecha:_____________

Objetivo: Diagnosticar la capacidad que tienen los estudiantes para generalizar.

"Aprender sin reflexionar es malgastar la energía".
Confucio

1. Encuentra la cantidad de rectas que se pueden construir con cierta cantidad de puntos; la condición es que los puntos no sean colineales. Puedes hacerlo gráficamente, o crear una fórmula que te permita encontrar la cantidad de rectas que se pueden graficar con cualquier cantidad de puntos; saca tus propias conclusiones.

Nº de puntos	**1**	**2**	**3**	**6**	**9**	**N**
Nº de rectas						

Conclusiones:

____
____
____
____

2. Observa detenidamente y responde las siguientes preguntas.

1	**5**	**9**		**17**			**29**	**…**	**N**

¿Cuál es la diferencia entre dos términos consecutivos o seguidos?

____
____

¿Es posible encontrar un valor para el término **n-ésimo**? ¿Cómo?

____
____

ANEXO Nº 3

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
INSTITUTO TÉCNICO SUPERIOR DÁMASO ZAPATA
NOVENO GRADO

Nombre: ____Curso:_______________

Profesor: _______________________________________Fecha:______________

Objetivo: Explorar los presaberes de las progresiones aritméticas y el cálculo del término general.

"El principal objeto de la educación no es el de enseñarnos a ganar el pan, sino en capacitarnos para hacer agradable cada bocado".
Anónimo

1. Un estudiante de noveno grado quiere ahorrar para ir a una excursión organizada por el Tecnológico para el día 5 de noviembre. El costo de la excursión es de $150.000. Si el estudiante desde el primer día de marzo del mismo año comienza con $500 y al siguiente día aumenta su ahorro en $700 más con respecto al día anterior,

- ¿Qué valor en dinero representa el día 15 de julio?
- ¿Será que para el 5 de noviembre el estudiante tendrá ahorrado el dinero de la excusión, o cuánto tendrá?
- Si el estudiante decidiera a última hora no ir a la excursión y seguir ahorrando, ¿cuánto dinero tendría el 31 de diciembre?

2. Se tiene un tablero de 9x8 y hay un número **real** en cada casilla, de modo que:

- los números en cada fila y en cada columna están en progresión aritmética.
- la suma de los 4 números de las esquinas es 2000.

Hallar la suma de todos los números del tablero.

ANEXO Nº 4

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
INSTITUTO TÉCNICO SUPERIOR DÁMASO ZAPATA
NOVENO GRADO

Nombre: ____________________________________Curso:____________

Profesor: ___________________________________Fecha:___________

Objetivo:

❖ Calcular la suma de los n términos de una PA recurriendo a un método propio.
❖ Deducir una fórmula para calcular la suma de términos de una PA.

"Por la ignorancia se desciende a la servidumbre, por la educación se asciende a la libertad".

Diego Luís Córdoba

1). Busca la manera más práctica para calcular la suma de:

- ✓ Los primeros 100 números pares.
- ✓ Los primeros 100 números naturales.
- ✓ Los primeros 50 múltiplos de 8.

2). Ahora, encuentra una forma más recursiva para calcular la suma de las siguientes progresiones:

- ✓ Los primeros veinte números naturales
- ✓ Los primeros quince números impares
- ✓ Los primeros ocho términos de la progresión aritmética si $a_1 = 2$ y $r = \frac{1}{2}$

SUGERENCIA: *Escribe en una tabla horizontal, los términos de la PA en forma ascendente (cada término en una cuadricula), en la siguiente fila de cuadrículas escribe los términos de la misma PA en forma descendente, para que así quede el último termino debajo del primero, y así con los demás hasta que el primer término quede debajo del último. Después suma en forma vertical las parejas y halla la suma de todos los términos.*

PREGUNTAS: ¿Qué observas en las sumas verticales de los dos términos en cada una de las PA? ¿Puedes deducir una formula a partir de lo anterior que te permita calcular la suma de los términos indicados en cada una de las tres PA?

ANEXO Nº 5

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
INSTITUTO TÉCNICO SUPERIOR DÁMASO ZAPATA
NOVENO GRADO

Nombre: ______________________________________Curso:____________

Profesor: ______________________________________Fecha:___________

EVALUACIÓN

1) Tres números están en progresión aritmética. Si la suma de los tres es 24, ¿cuál es el término central?

A. 4
B. 8
C. 6
D. 12

2) El milésimo impar positivo es:

A. 1999
B. 2001
C. 999
D. 1001

3) En una progresión aritmética de primer término 2 y razón 3, el término trigésimo primero es:

A. 65
B. 63
C. 98
D. 92

4) Una progresión aritmética de 9 términos tiene razón 2 y la suma de sus términos es 0. El sexto término es:

A. 2
B. 6
C. 0
D. 7

5) El término 19 de la progresión aritmética (3, 9, 15,…) es:

A. 111
B. 91
C. 103
D. 100

6) ¿Cuál es el número de términos de la progresión aritmética (100, 98, 96,….22)?

A. 11
B. 38
C. 22
D. 40

7) La suma de los primeros 40 números enteros **no negativos** es:

A. 780
B. 580
C. 820
D. 800

8) En una progresión aritmética donde el primer término es 23 y la razón es -6, la posición ocupada por el elemento -13 es:

A. 4
B. 6
C. 7
D. 8

9) Calcule a de modo que $(3a,\ 6a+3,\ 15a+21)$ sea una progresión aritmética:

A. $\frac{7}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

C. $-\frac{7}{2}$

D. $-\frac{5}{2}$

10) ¿Cuántos impares de dos cifras son mayores o iguales que 10?

A. 45
B. 35
C. 55
D. 60

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Apostol T. (1977). *Análisis Matemático,* 2ª ed., p. 45. España: Editorial Reverté, S.A.
- Bell E. T. (1949*). Historia de la Matemática.* México: Fondo de Cultura Económica.
- Beltrán Y. (2005). *Seminario: Teorías del Aprendizaje y Teorías de la Enseñanza*, p. 404-405. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.
- Chaux E., Velásquez M. & Lleras J. (2004). *Competencias Ciudadanas: De los estándares al aula. Una propuesta de integración a las áreas académicas,* p. 214-215. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Collete J. P. (1986). *Historia de la matemática,* p.28, 41. México: Siglo XXI Editores, S.A.
- "Estándares básicos de calidad en matemáticas". www.mineducacion.gov.co
- Galeano M. E. (2004). *Diseño de proyectos en la investigación cualitativa.* Medellín: Universidad EAFIT.
- Porlán R. & Martín J. *El diario del profesor. Un recurso para la investigación en el aula.* Sevilla: Díada Editorial S. L.
- Sabogal S. & Isaacs R. (1991). *Taller de fractales*. Grupo de Fractales. Bucaramanga: UIS.
- Recuperado el 7 de mayo de 2007 de http://www.rinconmatematico.com/tests/miscelanea/progresionesaritmeticas/quiz/72_progresion_aritmetica.htm

- Recuperado el 2 de mayo de 2007 de http://participacion.plandecenal.edu.co/debate/consolidado.php?id_mesa=1870

- Recuperado el 2 de febrero de 2007 de http://www.pedagogica.edu.co/index.php?inf=2289&=

- Recuperado el 2 de febrero de 2007 de http://menweb.mineducacion.gov.co/lineamientos/matematicas/matematicas.pdf .

- Recuperado el 2 de febrero de 2007 de http://www.geocities.com/algebrarecreativa/cap08.htmlhttp://www1.unne.edu.ar/cyt/2002/09-Educacion/D-024.pdf