

**EL JUEGO COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA REFORZAR MÉTODOS DE
FACTORIZACIÓN EN EL GRADO OCTAVO**

**DIANA CAROLINA JIMÉNEZ ESTEBAN
YUDY ROSMIRA MÁRQUEZ PORRAS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2009

**EL JUEGO COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA REFORZAR MÉTODOS DE
FACTORIZACIÓN EN EL GRADO OCTAVO**

**DIANA CAROLINA JIMÉNEZ ESTEBAN
YUDY ROSMIRA MÁRQUEZ PORRAS**

Trabajo para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Profesor Director
CARLOS WILSON RODRÍGUEZ
Magíster en Matemáticas

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2009**

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darnos fortaleza y constancia en la realización de este proyecto de grado.

A nuestros familiares de quienes hemos recibido una palabra de aliento en los instantes que lo hemos necesitado y a todos aquellos que de una u otra forma nos ayudaron y motivaron a finalizar esta experiencia.

A nuestros queridos estudiantes de 8-1 de la Institución Educativa las Américas, por su ánimo, participación y desempeño en las actividades propuestas.

Al profesor Carlos Wilson Rodríguez por sus enseñanzas, aportes, confianza, consejos, dedicación y colaboración para el desarrollo de este proyecto.

Al profesor Juan de dios Urbina por su colaboración, su amistad, paciencia, confianza y apoyo incondicional.

A nuestros amigos y compañeros durante la carrera universitaria con quienes hemos compartido agradables momentos de nuestra vida.

A Dios, nuestro padre, quien con su ayuda, orientación y fuerza del espíritu santo me permitió iniciar y culminar este trabajo para gloria de él y gloria nuestra.

A mis padres José Jiménez y Rosalba Esteban que siempre han estado conmigo, guiándome por el camino correcto, brindándome amor, sabiduría y fuerza para seguir alcanzando metas y triunfos.

A mi novio Jhoffer López que siempre confió en mis capacidades, me apoyo y me motivó a iniciar y culminar la primera meta en mi vida profesional.

Diana Carolina Jiménez Esteban

A Dios por brindarme su amor, compañía y sabiduría en los momentos que más lo necesite.

A mis padres Rafael y Rosa y mis hermanos Iván Darío y Lina Andrea, por su amor, confianza, comprensión, paciencia y especialmente por contribuir a la realización de mis metas.

A todos mis amigos por apoyarme y brindarme su compañía y cariño durante mi carrera universitaria.

Yudy Rosmira Márquez Porras

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1	5
MARCO TEÓRICO	5
1.1 DEFINICIÓN DE JUEGO.....	6
1.2 TEORÍAS PSICOLÓGICAS Y PEDAGÓGICAS	8
1.3 JUEGOS Y MATEMÁTICAS: UNA RELACIÓN PERMANENTE.....	11
CAPÍTULO 2	15
EL JUEGO: UNA ESTRATEGIA PARA REFORZAR OPERACIONES MATEMÁTICAS	15
2.1 ITINERARIO DE LA PROPUESTA	17
2.2 MATERIAL DIDÁCTICO: LOS JUEGOS.....	18
2.2.1 Factorizar jugando	19
2.2.2 Parqués.....	21
2.2.3 Dominó algebraico.....	23
2.2.4 Lotería Algebraica.....	26
2.2.5 Rompecabezas y Mensaje oculto	28
2.2.6 Carrera de Observación.....	32
CAPÍTULO 3	39
ANÁLISIS DE LOS JUEGOS	39
3.1 PERTINENCIA.....	39
3.1.1 La prueba diagnóstica.....	40
3.1.2 Aprendiendo factor común a través del parqués.....	41
3.1.3 Juguemos dominó.....	42
3.1.4 Tendremos suerte en la Lotería Algebraica	43
3.1.5 Armando el Rompecabezas y completando el Mensaje oculto.....	44
3.1.6 Superando pruebas en la Carrera de Observación.....	46
3.2 DESARROLLO DEL JUEGO	48
3.2.1 Juguemos y aprendamos factorización.....	48
3.2.2 Aprendamos factor común a través del parqués.....	51

3.2.3 Profundicemos con el Dominó	54
3.2.4 La suerte en la Lotería Algebraica	57
3.2.5 ¿Quién armó el Rompecabezas y el Mensaje oculto?	60
3.2.6 Corramos en la Carrera de Observación	64
3.3 EFECTIVIDAD COMO PROCESO DEL JUEGO.....	70
3.3.1 La importancia de la actividad diagnóstica.....	75
3.3.2 Resultados en el parqueés	78
3.3.3 Explorando con el Dominó.....	82
3.3.4 Eficiencia en la lotería algebraica	84
3.3.5 Construyendo el rompecabezas y el mensaje oculto.....	86
3.3.6 Eficacia de la Carrera de Observación	89
CAPÍTULO 4	92
PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL REFUERZO DE ESPACIO VECTORIAL CON PRODUCTO INTERNO EN EL ÁREA DE ÁLGEBRA LINEAL	92
TRABAJO PRÁCTICO. ESPACIO VECTORIAL CON PRODUCTO INTERNO.....	95
CONCLUSIONES.....	106
RECOMENDACIONES PARA UNOS PRÓXIMOS TRABAJOS	109
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	112

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Aspectos que mejora el juego.....	8
Figura 2. Síntesis del aprendizaje cooperativo	10
Figura 3. Mensaje Oculto.....	31
Figura 4. Pirámide.....	33
Figura 5. Mensaje Oculto1	34
Figura 6. Laberinto matemático	35
Figura 7. Mensaje Oculto.....	36
Figura 8. Dominó	55
Figura 9. Rompecabezas.....	61
Figura 10. Ejercicios de factor común.....	81
Figura 11 Tangram	95
Figura 12 Figuras elaboradas a partir del tangram	96
Figura 13 Trabajo Práctico en R^2	97
Figura 14 Trabajo Práctico en $P_2[x]$	98
Figura 15 Trabajo Práctico en R^3	99
Figura 16. Comentarios de estudiantes	104
Figura 17. Comentarios de estudiantes	105
Figura 18. Comentarios de estudiantes	105

LISTA DE GRÁFICAS

Gráfica 1. Estudiantes por categorías en la prueba diagnóstica.....	77
Gráfica 2. Estudiantes por categorías en el parqués	79
Gráfica 3 Estudiantes por categorías en el mensaje oculto	88

LISTA DE FOTOS

Foto 1. Estudiantes.....	17
Foto 2. Prueba Diagnóstica	19
Foto 3. Parqués	21
Foto 4 Dominó	24
Foto 5 Lotería Algebraica.....	26
Foto 6. Rompecabezas.....	29
Foto 7. Socializando con el parqués.....	52
Foto 8. Estudiantes jugando parqués	52
Foto 9. Estudiantes jugando dominó.....	55
Foto 10. Finalizando el juego dominó	56
Foto 11. Estudiantes completando la lotería.....	58
Foto 12 Estudiantes armando el rompecabezas.....	62
Foto 13. Estudiantes descifrando el mensaje oculto.....	62
Foto 14. Pasando pruebas en la carrera de observación	68
Foto 15. Finalizando la carrera de observación	68
Foto 16. Estudiantes resolviendo el taller de Algebra	102
Foto 17 Estudiantes resolviendo dudas en el taller de Algebra	102
Foto 18. Figura gato.....	103
Foto 19. Figura flecha	103
Foto 20. Primeros estudiantes que resolvieron el taller de Álgebra Lineal II	104

RESUMEN

TITULO*

EL JUEGO COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA REFORZAR METODOS DE FACTORIZACIÓN EN EL GRADO OCTAVO

AUTORAS**

JIMENEZ ESTEBAN, DIANA CAROLINA
MÁRQUEZ PORRAS, YUDY ROSMIRA

PALABRAS CLAVES:

Juego, reforzamiento, factorización, didáctica, interés, motivación, efectividad.

El fundamento de este trabajo surgió de nuestra preocupación por utilizar una metodología diferente que permita a los estudiantes disfrutar de su clase de matemáticas y mejorar su aprendizaje, no solo de los contenidos, sino de competencias donde puedan desarrollar su pensamiento lógico, los hábitos de razonamiento y su pensamiento crítico. Es justamente a partir de esta idea, donde nació el objetivo que nos trazamos en este proyecto; queríamos diseñar, aplicar y evaluar juegos específicos para reforzar algunos métodos de factorización en el grado octavo.

La metodología de investigación que se utilizó para el desarrollo de este trabajo se basó en el diseño y la aplicación de 7 juegos que involucraban solución de problemas matemáticos con los que se buscaba motivar a los estudiantes y lograr un mejor entendimiento de algunos métodos de factorización.

Para el análisis de los juegos se tuvo en cuenta la forma como los estudiantes resolvieron cada uno de los ejercicios que se presentaron en las distintas actividades, las diferentes respuestas que mostraron, los errores que se cometieron y la actitud de cada uno frente a las actividades propuestas.

Además, se presenta una alternativa de solución que contribuya al refuerzo de diferentes temas de matemáticas en cualquier nivel y dejar abierta la posibilidad de seguir desarrollando proyectos de investigación referentes al juego y las matemáticas en la educación superior.

Este trabajo pretende, al final resaltar la importancia que el profesor debe darle al juego como estrategia de refuerzo y aprendizaje. Pero esa importancia debe ir más allá de tomar el juego como una simple recreación; su objetivo fundamental consiste en ayudarlo a desarrollar su mente y potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, físicas, de modo armonioso.

*Trabajo de grado

**Facultad de ciencias. Licenciatura en Matemáticas.

Director: Carlos Wilson Rodríguez. Magíster en Matemáticas

SUMMARY

TITLE*

THE GAME LIKE TEACHING RESOURCE TO REINFORCE FACTORING METHODS IN EIGHTH GRADE

AUTHORS**

JIMÉNEZ ESTEBAN, DIANA CAROLINA
MÁRQUEZ PORRAS, YUDY ROSMIRA

KEYWORDS:

Game, reinforcement, factoring, didactic, interest, motivation, effectiveness.

The basis for this work arose from our concern for using a different methodology that allows students to enjoy their math class and improve their learning, not just the contents, but competences where they can develop their logical thinking, habits of reasoning and critical thinking. It is precisely from this idea, which was the goal we set for ourselves in this project; we design, implement and evaluate specific games to reinforce some methods of factoring in eighth grade.

The research methodology that was used for the development of this work was based on the design and implementation of 7 games that involved solving math problems to those seeking to motivate students and bring some factorization methods towards a better understanding.

For the analysis of the games was taken into account how students solved each of the periods presented in all various activities, the different responses they showed, the mistakes they made and the attitude of each one against the proposals.

Also, one presents an alternative of solution that he contributes to the reinforcement of different topics of mathematics in any level and to make opened the possibility of continuing developing projects of investigation relating to the game and the mathematics in the top education.

This paper attempts at the end to highlight the importance the teacher should give the game as a strategy of reinforcement and learning. But that importance must go beyond making the game as a simple recreation, its primary goal is to help them to develop their mind and the intellectual, sensitive, emotional, and physical potentials in a harmonious form.

*Working level

*Faculty of Science. Degree in Mathematics.

Director: Carlos Wilson Rodriguez. Mgs in Mathematics

INTRODUCCIÓN

A través de los años se ha visto, y así lo demuestran los planes de estudio, que el currículo de matemáticas durante los primeros grados está basado en el estudio de la aritmética, y que tópicos como el álgebra, que podrían ayudar a los estudiantes a desarrollar destrezas de pensamiento como: observar, analizar conjeturar, generalizar, etc., son reservados para ser estudiados en los grados octavo y noveno. Los escolares al comenzar el estudio del álgebra, traen nociones y enfoques de usos del trabajo aritmético, pero no son suficientes para abordar el trabajo algebraico ya que este no es una simple generalización de la aritmética.

A este paso obligado que realiza el estudiante en su aprendizaje de la matemática escolar, usualmente se denomina periodo de transición aritmética álgebra. Este periodo ha sido analizado y estudiado por muchos investigadores cuyos resultados ha determinado algunas causas y posibles soluciones pedagógicas que permitan que el estudiante realice su aprendizaje en esta etapa sin mayores traumatismos y con mejor provecho de su educación, evitando de esta manera la deserción estudiantil y apatía por la matemática.

En este trabajo se pretende, con el uso de un recurso didáctico como el juego, presentar una alternativa de solución que contribuya al refuerzo de la factorización de polinomios, mediante el desarrollo de algunos juegos cotidianos, poniendo en práctica el conocimiento algebraico que poseen y empiecen a sentir el entusiasmo que las matemáticas pueden generar.

Este proyecto trata de solucionar en parte una de las tantas dificultades por la que atraviesan la mayoría de los estudiantes cuando están en el grado octavo, como lo es la factorización de polinomios y las distintas operaciones que conlleva (suma, resta y multiplicación de polinomios, ley de los signos, propiedad distributiva, etc.)

Esta investigación está enfocada en buscar alternativas de solución a algunos de los problemas que presentan los estudiantes de básica secundaria en el área de las matemáticas, específicamente en el álgebra; además, se espera que estas alternativas de solución se conviertan en estrategias metodológicas de los docentes de matemáticas y a la vez sentar las bases para impulsar al estudiante a un buen desempeño en esta área.

Cuando realizamos nuestro Servicio Social Educativo Trabajo de Grado I notamos que los estudiantes muestran cierta insatisfacción y desinterés hacia algunos métodos de factorización, además la metodología que se aplica no brinda la posibilidad al estudiante de asimilarla de una forma más atractiva y agradable. Es precisamente a partir de esta apatía hacia el aprendizaje del álgebra, en particular la factorización de polinomios, donde nacieron los objetivos que nos trazamos en este proyecto; queríamos llevar al estudiante a reforzar algunos métodos de factorización mediante un recurso didáctico adecuado para transmitir en él un profundo interés.

Inicialmente diseñamos una prueba diagnóstica, la cual tenía como propósito observar las falencias y dificultades que presentaban los estudiantes en los distintos casos de factorización y cuáles serían los juegos apropiados que desarrollaríamos en el refuerzo de cada uno de los temas. Se tomó una pequeña muestra piloto constituida por 6 estudiantes escogidos aleatoriamente con los cuales realizamos una socialización por cada una de las actividades y analizamos los resultados obtenidos en cada juego.

Luego, se diseñaron 6 actividades que permitieron a los estudiantes facilitar el refuerzo de los distintos casos de factorización a través del juego, este, debido a su carácter motivador, permitió que el estudiante realizara distintas operaciones entre polinomios de una forma divertida, entretenida y ágil.

Una vez aplicados los juegos, de los resultados obtenidos en cada una de las actividades hicimos un análisis cualitativo estudiando no solo la exactitud de las respuestas sino también los errores y dificultades que se presentaron en cada una de ellas. Para este análisis también se tuvieron en cuenta la motivación y el interés mostrado por los estudiantes en el desarrollo de las actividades así como sus opiniones plasmadas en grabaciones y escritos elaborados por ellos al final de cada actividad.

A continuación se realizará una sinopsis de la propuesta, donde se explicará el contenido de cada uno de los 4 capítulos en los que se divide nuestra investigación:

En el primer capítulo se presentarán las definiciones de juego, la parte histórica donde se relaciona el juego con las matemáticas y posteriormente se presentarán algunas definiciones y la fundamentación teórica necesaria para desarrollar nuestra propuesta.

En el segundo capítulo se presenta el juego como una estrategia para aprender matemáticas. Este capítulo hace referencia al uso del juego como recurso didáctico para reforzar algunos métodos de factorización. La propuesta encierra una prueba diagnóstica y 5 juegos utilizados como métodos de refuerzo. Además este capítulo contiene el itinerario de la propuesta, diseño y aplicación de una prueba diagnóstica, estudio y selección de los juegos, diseño y aplicación de los 5 juegos (*Parqués, Dominó, Lotería Algebraica, Rompecabezas, Mensaje Oculto y Carrera de Observación*), organización del material obtenido y elaboración de un pequeño análisis de la experiencia.

En el tercer capítulo se hace el análisis de los juegos, de esta manera, se deja ver el proceso matemático que los niños experimentaron y cómo los juegos favorecieron, de una u otra forma, el refuerzo de algunos casos de factorización y

el pensamiento matemático. Al mismo tiempo en este capítulo se analizan tres categorías importantes: la pertinencia de cada uno de los juegos, en la cual se relacionan los objetivos de desarrollo del proyecto, las condiciones, posibilidades y riesgos existentes a la hora de aplicar las actividades diseñadas. El desarrollo del juego el cual recoge, de las actividades, todos los elementos que están relacionados con el proceso de aproximación que hicieron los estudiantes hacia los casos de factorización, actitudes, falencias y dificultades en el desarrollo de las actividades y la efectividad como proceso del juego donde vamos analizar si los juegos que se aplicaron en los respectivos temas fueron eficientes y que dificultades se presentaron en el desarrollo de cada uno de ellos.

En el cuarto capítulo se hace una propuesta didáctica con el propósito de mirar si a partir de un juego específico se puede reforzar algún contenido matemático ya sea en educación secundaria o superior. En esta propuesta se plantea trabajar algunos contenidos de Álgebra Lineal (Espacio vectorial con producto interno) utilizando el juego rompecabezas.

Finalmente, se presentan conclusiones donde se recopilan todas las experiencias adquiridas durante el desarrollo del proyecto.

CAPÍTULO 1

Marco Teórico

La palabra álgebra se ha reducido equivocadamente a la manipulación de letras, números, exponentes y radicales que se aprenden como un requisito incomprensible durante los grados octavo y noveno. Cuando realizamos nuestro Servicio Social en la Institución Educativa las Américas en el grado 8-1, logramos percibir ciertas falencias que se presentan en los estudiantes, las cuales generan ciertos obstáculos en el manejo de algunos conceptos, operaciones y símbolos que deben ser comprendidos satisfactoriamente. Algunas de estas dificultades son: Manejo inadecuado de las cuatro operaciones fundamentales y leyes de los signos, dificultad para entender lo que es una variable y una constante, fallas en la utilización de signos de agrupación (paréntesis, llaves, corchetes) y conflicto con los términos procedentes del vocabulario común, puesto que algunas palabras tienen en castellano un significado muy diferente a como se utilizan en matemáticas, como por ejemplo: raíz, solución, producto, etc.

Los problemas anteriormente mencionados generan numerosas propuestas didácticas que plantean el uso de juegos con los cuales se pretende mejorar la comprensión de conceptos y la adquisición de métodos de resolución de problemas teniendo como finalidad mejorar el rendimiento académico del estudiante. En este proyecto nos interesan juegos que creen ambientes favorables que estimulen a los estudiantes a pensar matemáticamente a través de situaciones problemáticas, que inciten a utilizar estrategias que generen refuerzo de un determinado tema.

Para hablar del concepto de juego es importante hacer una revisión histórica, con el propósito de describir el desarrollo de las ideas relacionadas con este concepto y así tener una visión de la evolución del mismo a lo largo de la historia.

1.1 Definición de Juego

Etimológicamente el término juego procede del latín “iocum” (broma diversion), y “ludus”, lúdica (o lúdrica) que es el acto de jugar. Petrovski (citado por Elkonin [13]) encuentra algunas diferencias del concepto del juego entre los diferentes pueblos. Así, para los griegos antiguos la locución “juego” significa la acciones propias de los niños y expresaba principalmente lo que nosotros denominamos “hacer travesuras”; entre los hebreos la palabra “juego” correspondía al concepto de broma y risa. Entre los romanos, “ludo” significaba alegría, jolgorio. Posteriormente, la palabra juego empezó a significar en todas estas lenguas un grupo numeroso de acciones humanas que no requieren un trabajo arduo y proporciona alegría y satisfacción.

Veamos ahora las definiciones de los autores más significativos:

“El juego es una actividad generadora de placer que no se realiza con una finalidad exterior a ella sino por sí misma” (Tomado de Gutiérrez, M.[20])

“El juego en su aspecto formal, es una acción libre ejecutada y sentida como situada fuera de la vida corriente, pero que a pesar de todo, puede absorber por completo al jugador, sin que haya en ella ningún interés material ni se obtenga en ella provecho alguno, se ejecuta dentro de un determinado tiempo y un determinado espacio, se desarrolla en un orden sometido a reglas y da origen a asociaciones que tienden a rodearse de misterio o a disfrazarse para destacarse del mundo real”. (Ver Huizinga, J. (1972) [21])

“El juego es una actividad dotada de placer funcional, mantenida por él o en aras de él independientemente de lo que haga y de la relación de finalidad que tenga”. (Ver Buhler, K. [2])

“Es la actividad propia del niño, donde construye su personalidad, mezcla aspectos fundamentales para su desarrollo, pues no solo le permite satisfacer sus necesidades vitales de acción y expresión, sino puede percibir sutilmente los rasgos de su entorno social. Los juegos adquieren un valor formativo, mediante ellos se aprovecha el gran deseo de aprender de los niños y se transmiten nuevos conocimientos, actitudes y habilidades o se desarrollan los ya existentes”. (Ver Ortega, R. [29])

“Es una actividad libre; se juega porque se encuentra gusto en ello, se puede abandonar en cualquier momento, es una actividad superflua que produce placer, no es una tarea, no es necesidad física ni deber moral. El juego nos hace escapar de la vida corriente, oscila entre “en broma” y “en serio”, se cambia en cosa seria y lo serio en juego, tiene sus propias reglas, establecidas por los participantes”. (Tomado de Gutiérrez, M.[20])

Después de indagar en las diferentes definiciones, nos damos cuenta que “el juego” es una actividad natural, agradable, que proporciona placer, felicidad en un momento y sitio determinado, que permite al individuo mostrarse tal como es, reafirmando su personalidad, autoestima y de acuerdo al propósito con que se utiliza, se logra progresar en diferentes campos como lo psicológico, afectivo, social y educativo.

Es importante señalar que el juego nunca afecta a un solo aspecto de la personalidad humana, por tal motivo en la siguiente figura se muestran los diversos aspectos que mejora el juego tanto en el desarrollo psicomotor, intelectual, social así como el emocional.



Figura 1. Aspectos que mejora el juego

El interés de este trabajo es el uso educativo del juego como estrategia de refuerzo, razón por la cual se abordan las teorías que desde lo psicológico y pedagógico sustentan su uso como estrategia didáctica.

1.2 Teorías Psicológicas y pedagógicas

Para este proyecto de investigación dentro de los antecedentes revisados se va hacer referencia a algunos autores que han trabajado en torno a la actividad lúdica o juego, constructivismo y el aprendizaje cooperativo.

Se reconoce a Piaget (citado por Gómez, P. [18]) como la figura más importante del constructivismo psicológico. Su foco pedagógico está orientado hacia tareas y actividades que pongan en juego el conocimiento existente y produzcan cambios. Acorde con esta idea el constructivismo es el proceso para la construcción del conocimiento por lo tanto se busca que las actividades en el aula sean un reto para los estudiantes.

Igualmente la contribución de Vigotsky ha significado que ya el aprendizaje no se considere como una actividad individual, sino más bien social. El estudiante en algunas oportunidades aprende más eficazmente cuando lo hace con sus compañeros de clase. Cabe aclarar que aunque la enseñanza debe individualizarse en el sentido de permitir a cada alumno trabajar con independencia y a su propio ritmo, es necesario impulsar el trabajo grupal, ya que se establecen mejores relaciones con los demás, aprenden más, se sienten motivados, aumenta su autoestima y aprenden habilidades sociales efectivas.

Bruner (ver [23]) quien fue el impulsor de la teoría cognitiva hace alusión a la idea de que el juego es un formato de actividad comunicativa entre iguales que les permite reestructurar continua y espontáneamente sus puntos de vista y sus conocimientos, mientras se divierten y gozan de la experiencia de estar juntos, e ir labrando el territorio para que nazcan y crezcan amistades interesantes. Esto ratifica la idea de Vigotsky quien recalca la actividad entre compañeros, el énfasis que se le debe dar a los grupos de trabajo para obtener un óptimo aprendizaje.

A continuación se mencionaran dos tipos de aprendizajes que se emplearan en el presente trabajo para fundamentar las diferentes situaciones vividas por los estudiantes durante la investigación.

El constructivismo expone que el ambiente de aprendizaje óptimo es aquel donde existe una interacción entre los profesores, alumnos y las actividades que proveen

oportunidades para que los alumnos creen su propio conocimiento, gracias a la interacción con los otros. El constructivismo tiene como fin que el alumno construya su propio aprendizaje, por lo tanto, el profesor es considerado como un mediador entre el conocimiento y el aprendizaje de los alumnos, es promotor de los aprendizajes significativos, que tengan sentido y sean realmente útiles.

Por otro lado, el aprendizaje cooperativo se basa en la interacción entre los alumnos. Para lograr este aprendizaje es necesaria la presencia del profesor, quien dirige este proceso y lo supervisa. Este es un método colaborador, el cual pretende desarrollar el trabajo en equipo, la solidaridad entre compañeros y que los alumnos intervengan en su proceso de aprendizaje. Para trabajar en grupo, es necesario desarrollar una serie de habilidades que lo hagan posible. Deben desarrollarse habilidades tales como el saber escuchar, respetar el turno, entender y aceptar opiniones de los otros, saber preguntar, saber discrepar.

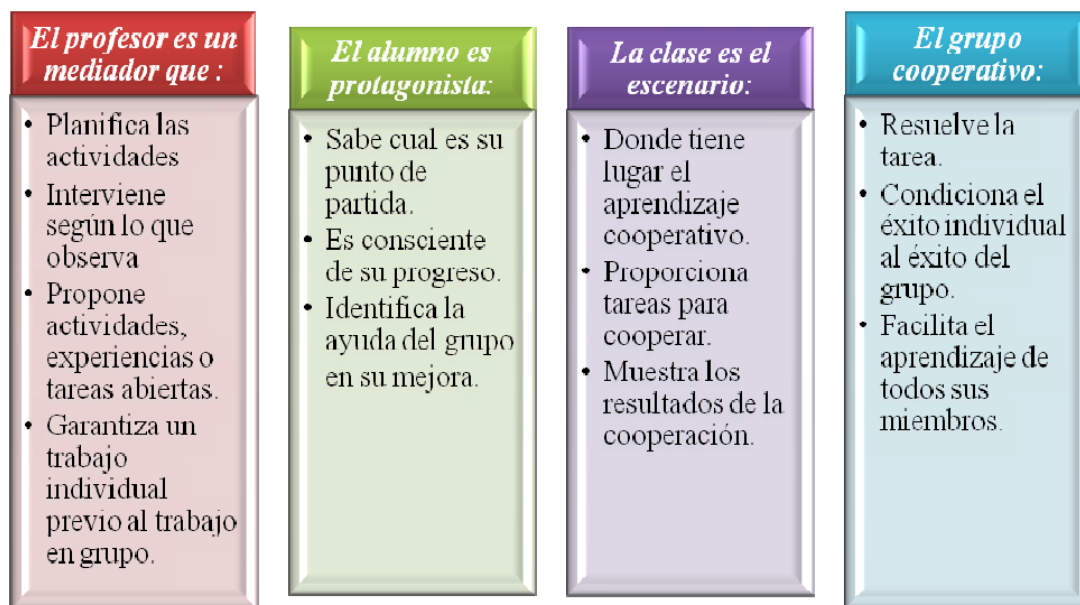


Figura 2. Síntesis del aprendizaje cooperativo

1.3 Juegos y matemáticas: una relación permanente

“Nunca son los hombres mas ingeniosos que en la invención de los juegos... Seria deseable que se hiciese un curso entero de juegos tratados matemáticamente”.

Este párrafo extraído de una carta escrita en 1715 por LEIBNIZ (1646-1716), es una buena muestra del interés que siempre han demostrado los matemáticos por los juegos. Podemos decir que hay una estrecha relación entre el juego y las matemáticas. Winter y Ziegler (1983) en [31] han establecido la correspondencia que hay entre los juegos de reglas y el pensamiento matemático:

JUEGOS	PENSAMIENTO MATEMATICO
Reglas del juego	Reglas de construcciones, reglas lógicas, instrucciones, operaciones.
Situaciones iniciales	Axiomas, definiciones, lo "dado".
Jugadas	Construcciones, deducciones.
Figuras del juego	Medios, expresiones, términos.
Situaciones resultantes	Nuevos teoremas, nuevos conocimientos.

Muchos juegos, utilizan las matemáticas en su desarrollo, ya sea por sus relaciones numéricas (por ejemplo, el dominó o muchos juegos de cartas), por sus relaciones geométricas (en juegos donde las fichas se colocan y se mueven sobre un tablero) pero, sobre todo, por las características de muchos juegos y por el tipo de estrategias que hay que desarrollar cuando intentamos ganar una partida. Estas estrategias, que son muy variadas y que dependen de las características de cada juego, tienen una gran similitud con algunas de las más importantes estrategias utilizadas en la resolución de problemas de matemáticas. El hecho de que las matemáticas sean importantes y a menudo difíciles no nos debe llevar a

creer que las matemáticas son pesadas o aburridas. Es cierto que determinadas prácticas escolares pueden hacernos pensar que esto es así, pero cualquier persona que haya logrado entrar en el mundo de las matemáticas sabe que su práctica puede convertirse en algo altamente lúdico y estimulante.

En la introducción al capítulo dedicado a los juegos matemáticos del libro *Números, cultura y juegos*, ver [6], al referirse a la relación entre los juegos y las matemáticas, cita a varios grandes pensadores y matemáticos de diversas épocas, para los cuales esta relación es algo más que una simple curiosidad. Así, el gran filósofo Platón (siglo IV a.C.) dijo: *“la vida merece ser vivida para jugar a los más bellos juegos (...), y ganar en ellos”*; y el matemático francés del siglo XX, Dieudonné afirmó que *“las nueve décimas partes de las matemáticas, aparte de las que tienen su origen en las necesidades de orden práctico, consisten en la resolución de adivinanzas”*, es decir, de juegos y recreaciones. También el matemático español, Miguel de Guzmán, es explícito cuando dice que *“la matemática es, en gran parte, un juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumentos matemáticos”*.

Por otra parte, la propia historia de las matemáticas nos proporciona ejemplos de esta relación. Es bien conocido que el origen de la probabilidad se encuentra en una carta que De Mére envió a Pascal, hacia 1650, en la cual le proponía varios problemas relacionados con los juegos de azar que se practicaban en aquella época. En la posterior correspondencia entre Pascal y Fermat sobre estos problemas, se encuentran las bases de la probabilidad, también el origen de la topología, o más concretamente de la teoría de grafos, está relacionado con un juego propuesto por Euler (1707-1783) sobre la posibilidad de recorrer los siete puentes de la ciudad de Königsberg, sin pasar dos veces por un mismo puente.

Una vez vista la estrecha relación entre las matemáticas y los juegos. Podemos decir que recurrir a un recurso didáctico como el juego para reforzar algunos

temas de matemáticas es una buena estrategia pedagógica pero haciendo la salvedad que si el juego perdura, el alumno va a querer seguir jugando y con esto se pierde el objetivo que se quería lograr con la actividad. A pesar de esto parece conveniente ver las formas de introducir juegos en la enseñanza de las matemáticas. Creemos que es conveniente hacer algunas consideraciones generales sobre cómo hacerlo.

Se pueden utilizar juegos en cualquier edad, sólo hay que variar los juegos a utilizar o la metodología que se vaya a implementar, esta debe estar acorde con el nivel en el que se va a implementar. La utilización de los juegos hay que hacerla de la manera más planificada posible, como otro recurso didáctico y con una programación previa siguiendo los temas que se vayan viendo.

Una vez hechas las reflexiones anteriores, podemos decir que los juegos se pueden clasificar de muchas maneras, según el aspecto que consideremos.

- Según el material que se utiliza: barajas de cartas, dominós, tableros
- Según su utilidad: aritméticos, geométricos, probabilísticos
- Según la edad a que van dirigidos
- Según el tipo de actividad: de posición, de carrera, de guerra
- Según el número de participantes: solitarios, para dos jugadores

Así mismo, Gairín en [17], hace una clasificación de los juegos de la siguiente manera:

Hay juegos cuya práctica exige a los jugadores que utilicen conceptos o algoritmos incluidos en los programas de matemáticas. Estos juegos son llamados juegos de conocimiento. Se distinguen tres categorías:

- PRE-INSTRUCCIONAL. A través de estos juegos el alumno puede llegar a descubrir un concepto o a establecer la justificación de un algoritmo.
- CO-INSTRUCCIONAL. El juego puede ser una más de las diferentes actividades que el profesor utiliza para la enseñanza de un bloque temático.
- POST-INSTRUCCIONAL. Los alumnos ya han recibido enseñanza sobre un tema, y mediante el juego se hacen actividades para reforzar lo que han aprendido.

Finalmente, si el juego y la matemática tienen tantos rasgos comunes, y teniendo en cuenta que tienen las mismas características en lo que respecta a su práctica, es interesante hacernos la pregunta de por qué este no es utilizado en el aula para transmitir a nuestros alumnos el interés y el entusiasmo que las matemáticas pueden generar y proporcionar una primera familiarización con los procesos usuales de la actividad matemática.

CAPÍTULO 2

El juego: una estrategia para reforzar operaciones matemáticas

Este capítulo hace referencia al uso del juego como recurso didáctico para reforzar algunos métodos de factorización. La propuesta encierra una prueba diagnóstica y 6 juegos utilizados como métodos de refuerzo. Haremos un análisis de esta experiencia con la intención de hacer un seguimiento real de sus bondades, observando y describiendo su contribución al desarrollo mostrado por los estudiantes.

Cuando realizamos nuestro Servicio Social Educativo Trabajo de Grado I en la Institución Educativa las Américas, notamos en cada clase, por parte de los estudiantes, el tedio, el aburrimiento, la pereza, la desmotivación, la falta de interés y de atención en lo que respecta a las matemáticas, lo cual conlleva a un bajo rendimiento académico, ocasionando, en la mayoría de los casos, que no se apropien de los conceptos, que no los apliquen y que no puedan resolver las situaciones que los rodean.

Los propósitos que pretendíamos con esta experiencia eran:

- Utilizar el juego como recurso didáctico en el proceso de reforzamiento de algunos métodos de factorización.
- Motivar a los estudiantes a través del juego y llevar algunos métodos de factorización hacia un mejor entendimiento.
- Despertar el interés y la atención de los alumnos en el estudio de algunos métodos de factorización.

- Crear en los estudiantes una visión diferente de las matemáticas, donde se produzca un mayor entusiasmo formando un ambiente más agradable para su aprendizaje.
- Evaluar la efectividad del juego como mecanismo adecuado que brinde mejores resultados en el proceso de aprendizaje.
- Obtener conjeturas a partir de las actividades aplicadas acerca de la enseñanza aprendizaje de algunos métodos de factorización.

De otra parte, los protagonistas de esta experiencia son 6 estudiantes de la Institución Educativa Las Américas del grado 8-1, sus edades oscilan entre 13 y 16 años. El grupo de estudiantes participantes de la experiencia, están dentro de los casos típicos de un salón normal de clase, algunos son interesados en aprender, en presentar trabajos y tareas, participan en clase, otros son inquietos, distraídos, dispersos, incumplen con las tareas, muestran desinterés en las clases y como consecuencia su rendimiento académico es regular.



Foto 1. (Izq. – Der.) John Breyman Cárdenas Díaz, Edward Alveiro Parada Jaimes, Karen Jazveydy Calderón Moreno, Diego Mauricio Espinel, Karen Vanesa Hernández Herrera y Mary Luz Sarmiento Plata Ortiz.

2.1 Itinerario de la propuesta

Para llevar a cabo nuestro trabajo, seguimos una serie de actividades que tenían como objetivo utilizar el juego como recurso didáctico en el proceso de reforzamiento de algunos métodos de factorización con estudiantes del grado 8°. Las actividades fueron las siguientes:

- Diseño y aplicación de una prueba diagnóstica con la temática de factorización de polinomios mediante algunos métodos de factorización (factor común, trinomio cuadrado perfecto, trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, diferencias de cuadrados y suma o diferencia de cubos).
- Estudio y selección de los juegos

- Diseño y aplicación de los 6 juegos escogidos (Parqués, Dominó, Lotería Algebraica, Rompecabezas, Mensaje Oculto y Carrera de Observación) para desarrollar el refuerzo de los distintos métodos de factorización mencionados anteriormente.
- Organización del material obtenido y elaboración de un análisis de la experiencia

2.2 Material didáctico: Los juegos

El material didáctico de este proyecto está estructurado por juegos que se diseñaron –o se adaptaron- con el propósito de que sirvieran como mediadores y facilitadores del refuerzo de los métodos de factorización mencionados anteriormente. Además, al momento de su elección y diseño, se usaron materiales asequibles garantizando con ello su aplicabilidad en otros contextos educativos.

Así, planteamos seis juegos donde el fin principal es comprender y practicar los distintos métodos de factorización. De esta manera los estudiantes podrán enfrentarse a la resolución de situaciones problemáticas usando las operaciones como estrategia de solución.

De otra parte, en cada uno de los juegos tuvimos en cuenta ciertos propósitos que apuntaban a desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes y también a mejorar su actitud frente a la matemática; estos son:

- Reforzar en los estudiantes, mediante el uso de una estrategia no convencional, la factorización de polinomios.
- Crear en los estudiantes una visión diferente de las matemáticas presentándolas de una forma agradable y divertida para despertar actitudes como la motivación, el interés, la comprensión, la atención, entre otras.

2.2.1 Factorizar jugando

La prueba diagnóstica se realizó para identificar el nivel de desarrollo en los estudiantes de estos métodos de factorización; queríamos observar si los estudiantes tenían claro como factorizar polinomios. Además, se pretendía que los estudiantes nos mostraran mediante el desarrollo de los ejercicios sus concepciones y el manejo de las distintas operaciones y propiedades, la operatividad, solución de situaciones y cuánto han desarrollado su pensamiento variacional.

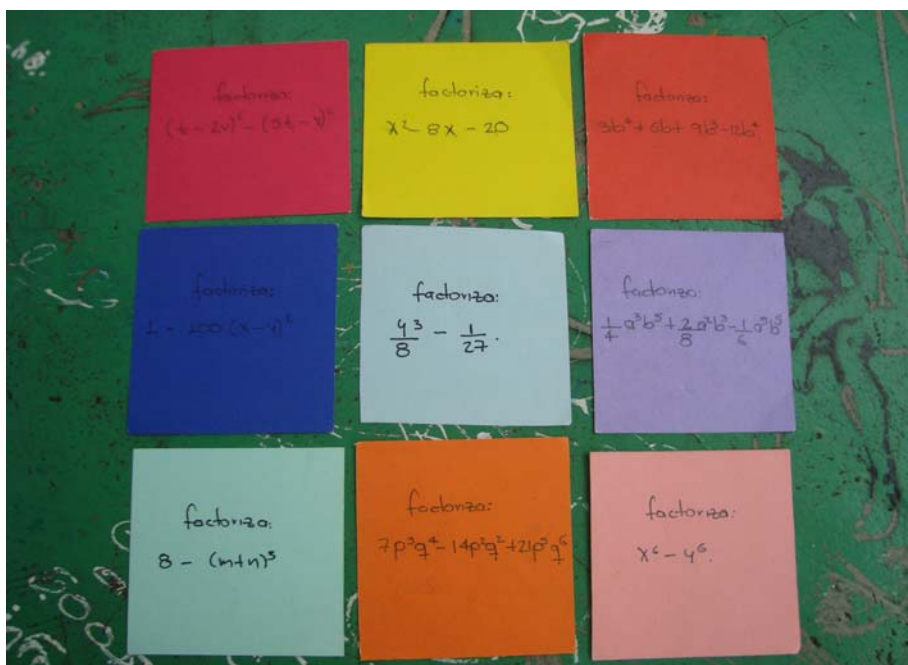


Foto 2. Prueba Diagnóstica

Objetivo

- ❖ Observar los conocimientos previos de los estudiantes acerca de los siguientes temas: factor común, trinomio cuadrado perfecto, trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, diferencias de cuadrados y suma o diferencia de cubos.

- ❖ Alcanzar nuevos métodos didácticos de aprendizaje, para que el estudiante muestre interés en las matemáticas.

Diseño

Para la prueba se diseñaron 60 tarjetas. Cada tarjeta trae un ejercicio referente a los temas mencionados. Cada estudiante escoge una tarjeta y deben resolver el ejercicio planteado en ella. Quien haya terminado el ejercicio se lo mostrará a las profesoras y si está bien tendrá derecho a lanzar el balón de basquetbol para tratar de encestar. Tendrá tres oportunidades. Si encesta recibirá un premio sorpresa que será entregado por su profesora y podrá seguir escogiendo tarjetas y continuar con el juego. Si el ejercicio no está bien resuelto el estudiante deberá volver a su puesto y corregirlo. Solo hasta que el ejercicio esté bien resuelto el estudiante tendrá derecho a hacer el lanzamiento. Si el estudiante no encesta no recibirá premio y deberá escoger otra tarjeta. Los alumnos que hayan resuelto bien la mayoría de ejercicios en las tarjetas tendrán puntos adicionales para el área de matemáticas.

Reglas del Juego

- 1) El juego es individual.
- 2) Los alumnos no pueden utilizar los apuntes.
- 3) El estudiante que esté mirando al otro y no esté trabajando en orden tendrá una penitencia y después volverá a su puesto para hacer el ejercicio.
- 4) Quien no desee jugar irá con el profesor y él les hará una evaluación del tema.
- 5) No se podrá hacer preguntas durante el juego, estas las podrá hacer antes de iniciar.
- 6) Los premios son sorpresas por lo tanto los alumnos no podrán exigir que se los muestre.

2.2.2 Parqués

El parqués es un juego tradicional con el cual niños y adultos se divierten. Las reglas de juego son conocidas por los estudiantes, además sus llamativos colores y su dinámica hace que los estudiantes estén motivados. El parqués es un juego que se puede adaptar a cualquier contexto, no solo al álgebra, en este caso factorización, sino a diferentes campos educativos. En este caso quisimos reforzar factor común mediante este recurso didáctico, de esta forma podemos conocer las habilidades y falencias que presentan los estudiantes con respecto a este tema.

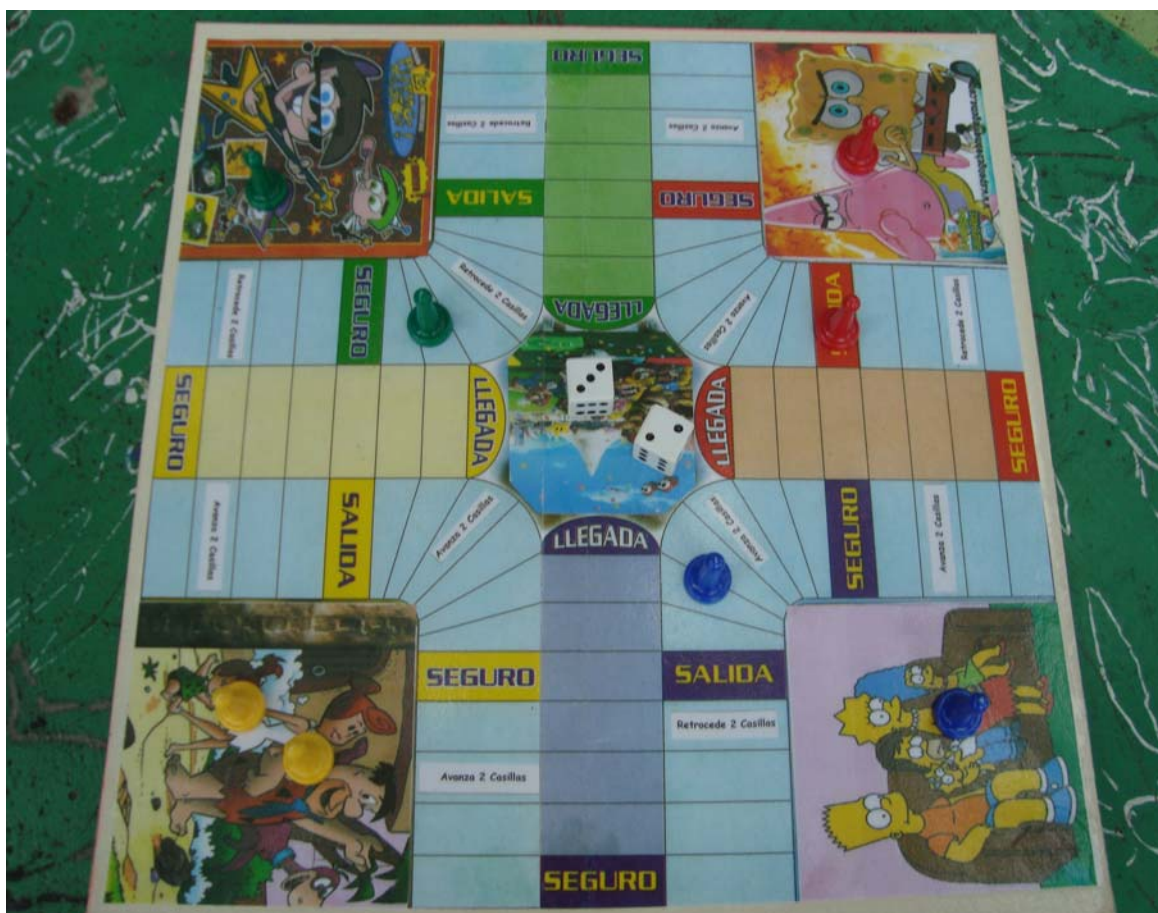


Foto 3. Parqués

Objetivo

- ❖ Utilizar el juego como recurso didáctico en el proceso de refuerzo del tema factor común, buscando despertar el interés y la atención de los alumnos en él.
- ❖ Alcanzar nuevos métodos didácticos de aprendizaje, para que el estudiante muestre interés en las matemáticas.

Diseño

Para este juego se utilizó el diseño de un parque tradicional conformado por: 1 tablero, 2 fichas azules, 2 fichas rojas, 2 fichas verdes, 2 fichas amarillas, una hoja con 70 ejercicios, una bolsa con papelitos enumerados del 1 al 70.

Cada estudiante tendrá dos fichas de un mismo color. Comienza a jugar el estudiante que al lanzar el dado saque el puntaje más alto. Para poder participar del juego, el estudiante deberá resolver un ejercicio de factor común, para esto él deberá extraer de la bolsa un papelito con un número correspondiente a alguno de los 70 ejercicios enunciados. Si el estudiante resuelve bien el ejercicio lanzará el dado para tratar de obtener un doble y poder iniciar, tiene tres oportunidades. Si por el contrario, no resuelve bien el ejercicio, este cede el turno a su siguiente compañero. Hasta que el estudiante resuelva bien el ejercicio podrá hacer los lanzamientos. El estudiante que resuelva bien el ejercicio pero no saque doble en las tres oportunidades pierde su turno, pero sigue jugando cuando le corresponda el turno nuevamente. Cuando una de las fichas cae en **seguro** o **salida**, el estudiante deberá extraer de la bolsa un papelito donde se le mostrará que ejercicio de los 70 enunciados deberá resolver. La solución de este ejercicio será revisada por sus compañeros, si está bien resuelto, el estudiante continuará con el juego,

en caso contrario el estudiante retrocede al lugar donde se encontraba anteriormente.

Cuando las fichas lleguen a la meta, este deberá resolver bien un ejercicio como requisito para poder graduar o sacar la ficha. Gana el estudiante que primero haya graduado o sacado las 2 fichas.

Reglas del Juego

1. Cada grupo debe estar compuesto por 4 estudiantes.
2. Los alumnos no pueden utilizar los apuntes.
3. Cuando uno de los compañeros este resolviendo un ejercicio las demás deberán esperar que termine para revisarlo y continuar con el juego.
4. El estudiante debe respetar el turno de los otros.
5. Si un estudiante tiene la oportunidad de encarcelar una ficha y no lo hace, y uno de sus compañeros se da cuenta, este tiene derecho de encarcelar la ficha del estudiante que omitió la regla.
6. No se podrá hacer preguntas durante el juego, estas las podrá hacer antes de iniciar.

2.2.3 Dominó algebraico

El dominó es un juego de mesa tradicional ampliamente conocido por los estudiantes; nos pareció una excelente alternativa, ya que permite asociar polinomios con su respectiva factorización. A través de este juego queríamos saber si los estudiantes saben factorizar trinomios cuadrados perfectos y cuáles son sus dificultades.

El primer jugador pone una ficha boca arriba sobre la mesa. El siguiente jugador debe poner a continuación una ficha cuyos términos en cualquiera de las dos partes sea equivalente a los términos que figuran en los extremos de la primera ficha. De la misma forma procede el siguiente con respecto a las fichas que están sobre la mesa. Las fichas dobles, es decir, las que tienen el mismo término en los dos extremos, se ponen al través en la hilera de fichas. El jugador que no puede poner ficha en ninguno de los dos extremos pierde su turno. El juego continúa hasta que uno de los jugadores consigue poner todas sus fichas o hasta que todos deban perder su turno. En este último caso gana el jugador que quede con menos fichas.

Reglas del juego

1. Cada grupo debe estar compuesto por 4 estudiantes.
2. Los alumnos no pueden utilizar los apuntes.
3. Antes de comenzar la partida se ponen las 28 fichas boca abajo. Cada jugador toma una ficha. El jugador que saca una ficha doble, es decir, la que tiene el mismo término en los dos extremos comienza la partida.
4. Cada dominó es de un color diferente (naranja, rojo, verde y amarillo). Cada grupo deberá jugar en tres ocasiones con un dominó de diferente color.
5. El juego continúa hasta que uno de los jugadores consigue poner todas sus fichas o hasta que ninguno de los jugadores pueda continuar. En este último caso gana el jugador al que le queden menos fichas.
6. No se podrá hacer preguntas durante el juego, estas las podrá hacer antes de iniciar.

2.2.4 Lotería Algebraica

La lotería es un juego tradicional que permite la asociación de diversos objetos. La dinámica del juego es conocida por los estudiantes, lo cual hace que su realización sea fácil de desarrollar en el aula de clase. En este caso se hicieron pequeñas modificaciones con el fin de reforzar el tema diferencia de cuadrados; se pretendía que los estudiantes mostraran mediante el desarrollo de distintos ejercicios las habilidades y dificultades con respecto el tema anteriormente mencionado.

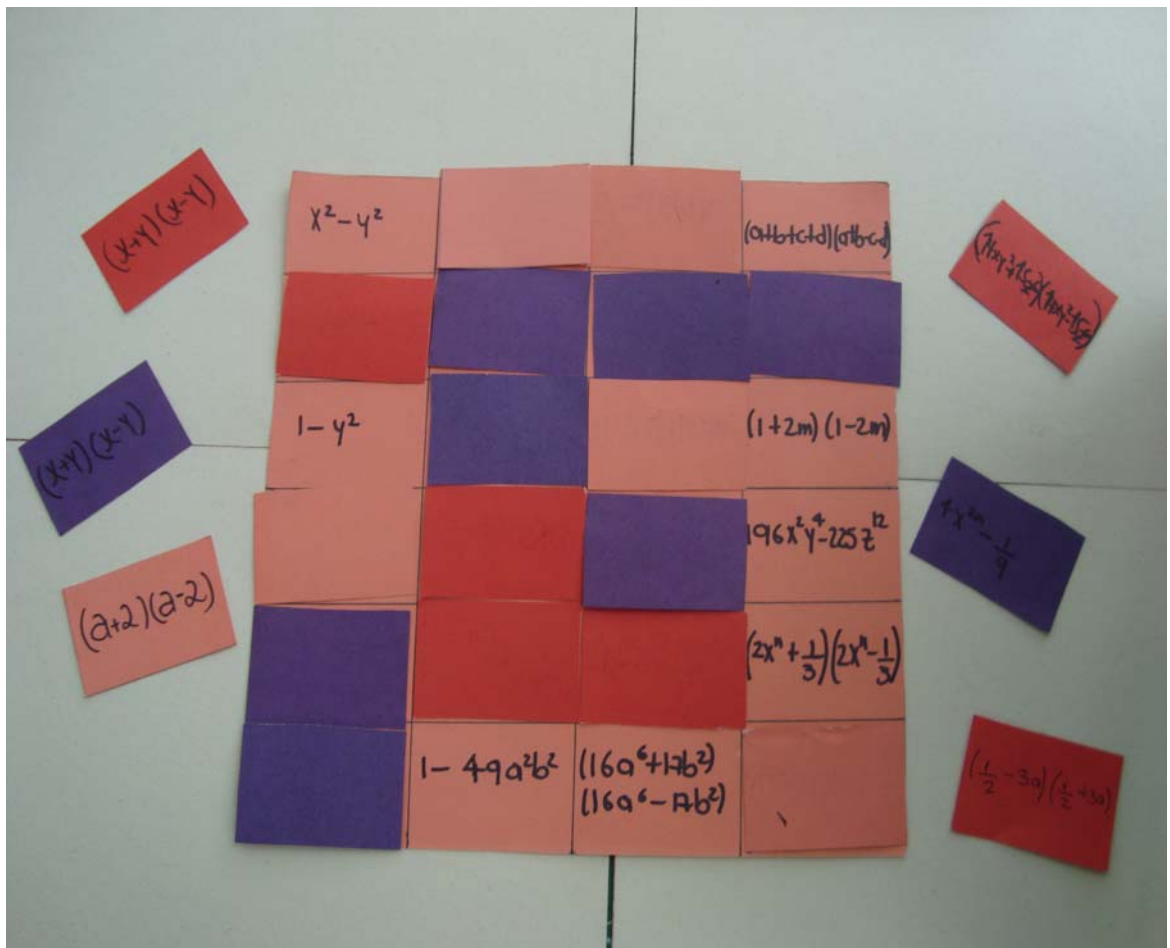


Foto 5 Lotería Algebraica

Objetivo

- ❖ Utilizar el juego como estrategia didáctica en el proceso de reforzamiento en la factorización de diferencia de cuadrados.
- ❖ Despertar el interés en los alumnos y el desarrollo de habilidades en este tema en un ambiente de confianza, libertad y cooperación.

Diseño

El juego esta conformado por:

- 7 Cartas grandes con 24 divisiones que contienen expresiones algebraicas
- 168 Cartas pequeñas también con expresiones algebraicas
- 5 Cartas pequeñas con penitencias
- 3 Cartas pequeñas con “Pierde el turno”
- 3 Cartas pequeñas con “Vuelve y juega”
- 2 Jokers

Reglas del Juego

1. Se juega en equipos de 6 estudiantes.
2. Cada equipo tiene una carta grande de juego. En la carta de juego identifican la diferencia de cuadrados ó la expresión del producto de la suma por la diferencia.
3. Se ponen las 181 tarjetas volteadas hacia abajo para que la elección sea al azar.
4. De cada grupo un jugador tomará al azar una tarjeta, factoriza su polinomio y busca los factores en la carta grande. Si acierta, pone la tarjeta sobre la división que contiene la factorización. Si no acierta, devuelve la tarjeta a su lugar.

5. El juego termina cuando se haya tapado toda la carta grande.
6. Al final del juego, cada equipo escribe los pares formados en una hoja.
7. Los jokers podrán sustituir cualquier otra tarjeta.
8. El equipo que saque la tarjeta “penitencia” deberá realizar una penitencia impuesta por todo el salón de clase.

2.2.5 Rompecabezas y Mensaje oculto

Rompecabezas

Los rompecabezas son juegos que permiten la asociación y la interacción de las personas que están jugando. Con esta actividad se pretende motivar a los estudiantes presentándoles una estrategia didáctica en la cual pueden hacer uso de su astucia y habilidad a la hora de factorizar la suma o diferencia de cubos.

Objetivo

- ❖ Desarrollar habilidades en la factorización de la suma y diferencia de cubos a través de una actividad lúdica realizada en el aula en un ambiente de confianza, libertad y cooperación.

Reglas del Juego

1. Cada grupo debe estar compuesto por 4 estudiantes
2. Los estudiantes no pueden usar sus apuntes.
3. Una vez armado el rompecabezas, el grupo cambiará de rompecabezas con otro grupo.
4. Cada grupo deberá armar mínimo tres rompecabezas diferentes.
5. Una vez terminados los tres rompecabezas, el grupo cambiará de juego para ahora descubrir el mensaje Oculto.
6. La solución del mensaje oculto es en forma individual.
7. El primer grupo en el cual todos sus integrantes descubran el mensaje oculto correspondiente será el ganador.

Mensaje oculto

El mensaje oculto es una actividad llena de misterio e intriga que pretende despertar el interés y motivar a los estudiantes en el estudio de la factorización de la suma o diferencia de cubos.

Objetivo

- ❖ Desarrollar habilidades en la factorización de la suma y diferencia de cubos a través de una actividad lúdica realizada en el aula en un ambiente de confianza, libertad y cooperación.

Mensaje Oculto

Descifra este mensaje: Cada una de las expresiones que aparece debajo de las líneas, corresponde a una expresión faltante de los cuadros de abajo. Escribe la expresión faltante y pon encima de las líneas la letra correspondiente a la expresión.

$4-2y+y^2$ $2a+3$ $y+5$ P^2-2p+4 $4-2y+y^2$ $16+12z+9z^2$ a^2-a+1 $5-3y$ P^2-2p+4 $4-2y+y^2$

 $2a+3$ a^2-a+1 $36a^2-24a+16$ $2a+1$ $4p^2-10p+25$ $2a+1$ a^2-a+1 $36a^2-24a+16$

 $4a+1$ $4-2y+y^2$ x^3+y^3 $2a+3$ $4p^2-10p+25$ $64t^2-72ty+81y^2$ x^3+y^3 $2a+1$

 $4-2y+y^2$ $36a^2-24a+16$ t^2-ty+y^2 a^2-a+1 $2a+1$ $49t^2-21ty+9y^2$ x^3+y^3 $2a+1$ $4-2y+y^2$ x^3+y^3

 $x+a$ $4-2y+y^2$ $2a+1$ $49t^2-21ty+9y^2$ $4-2y+y^2$ $4-2y+y^2$ $36a^2-24a+16$ P^2-2p+4 $2a+1$ x^3+y^3

 $25+5m+m^2$ P^2-2p+4 $4-2y+y^2$ $2a+1$ $49t^2-21ty+9y^2$ $4-2y+y^2$ a^3-b^3 $4-2y+y^2$

 x^3+y^3 t^2-ty+y^2 $4a+1$ $4-2y+y^2$ $2a+1$ a^3-b^3 $4p^2-10p+25$ $64t^2-72ty+81y^2$ x^3+y^3 $y+5$ $4-2y+y^2$

 $2a+1$ x^3+y^3 $49t^2-21ty+9y^2$ P^2-2p+4 $4a+1$ x^3+y^3 $2a+3$



A	$(x + y)(x^2 - xy + y^2) =$	E	$(2 + y)(\quad) = 8 + y^3$
B	$(x - y)(x^2 + xy + y^2) =$	F	$(5 - m)(\quad) = 125 - m^3$
C	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$	G	$(4 - 3z)(\quad) = 64 - 27z^3$
D	$(a - b)(a^2 + ab + b^2) =$	H	$(2a + 4b)(\quad) = 8a^3 + 64b^3$

I	$(2p + 5)(\quad) = 8p^3 + 125$	N	$(\quad)(4a^2 - 2a + 1) = 8a^3 + 1$
J	$(\quad)(y^2 - 5y + 25) = y^3 + 125$	O	$(a + 1)(\quad) = a^3 + 1$
L	$(\quad)(4a^2 - 6a + 9) = 8a^3 + 27$	P	$(t + y)(\quad) = t^3 + y^3$
M	$(\quad)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3$	Q	$(\quad)(25 + 15y + 9y^2) = 125 - 27y^3$

R	$(\quad)(16a^2 - 4a + 1) = 64a^3 + 1$	V	$(5 - m)(\quad) = 125 - m^3$
S	$(6a + 4)(\quad) = 216a^3 + 64$	X	$(\quad)(4a^2 + 6a + 9) = 8a^3 - 27$
T	$(7t + 3y)(\quad) = 343t^3 + 27y^3$	Y	$(\quad)(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3$
U	$(p + 2)(\quad) = p^3 + 8$	Z	$(8t + 9y)(\quad) = 512t^3 + 729y^3$

NOMBRE: _____

Figura 3. Mensaje Oculto

Diseño

El Mensaje Oculto es otro juego donde cada alumno deberá hacer la factorización de cada trinomio cuadrado perfecto en cada una de las expresiones de la tabla. En la parte inferior aparecen cada uno de esos factores bajo la línea. Sobre las líneas se escribe la letra correspondiente a cada expresión.

Reglas del Juego

1. Cada grupo debe estar compuesto por 4 estudiantes
2. Los estudiantes no pueden usar sus apuntes.
3. Una vez armado el rompecabezas, el grupo cambiará de rompecabezas con otro grupo.
4. Cada grupo deberá armar mínimo tres rompecabezas diferentes.
5. Una vez terminados los tres rompecabezas, el grupo cambiará de juego para ahora descubrir el mensaje oculto.
6. El primer grupo en el cual todos sus integrantes descubran el mensaje oculto correspondiente será el ganador.

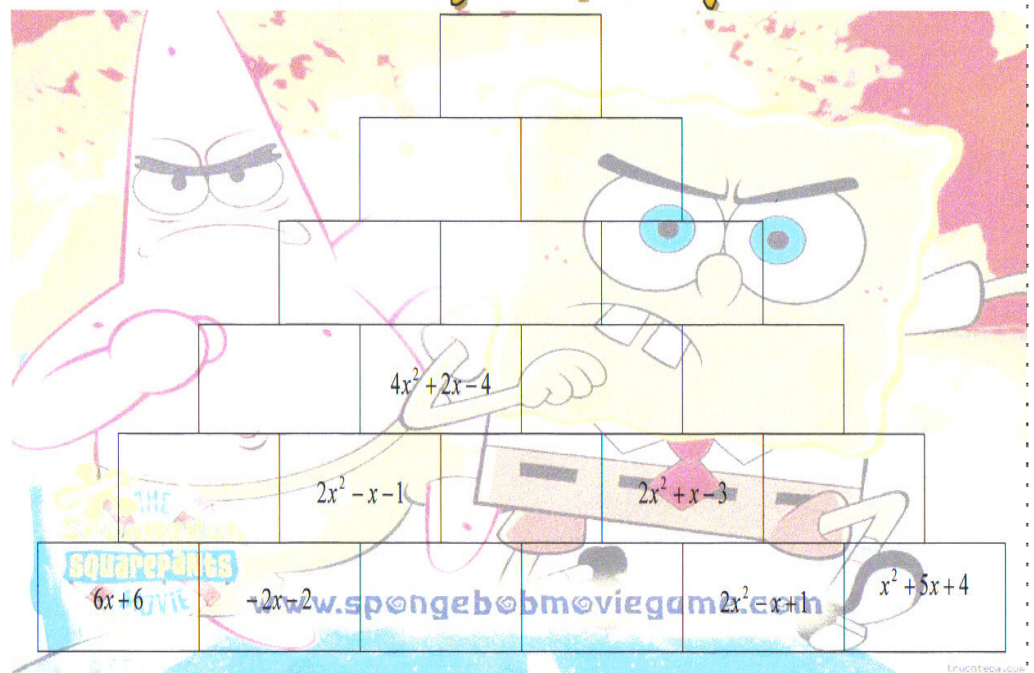
2.2.6 Carrera de Observación

La carrera de observación reúne 4 pruebas distintas con las cuales se pretende impregnarle un poco de emoción y suspenso al juego. Con esta actividad se quiere hacer un refuerzo de algunos temas vistos anteriormente pero centrando nuestra actividad en la factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$. Se quiere conocer mediante el desarrollo de los ejercicios el manejo de las distintas operaciones y propiedades, habilidades y falencias al momento de hacer la factorización.

Objetivo

- ❖ Reforzar la suma, resta y multiplicación de polinomios además de factor común.
- ❖ Despertar el interés y la atención de los estudiantes en el refuerzo del tema trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

Pirámide



En la pirámide, la expresión de cada ladrillo es la suma de las expresiones de los ladrillos sobre los que se apoya:

Complétala y encontraras el siguiente lugar a donde te dirigirás.

- ❖ $32x^2 - 27x - 25 \rightarrow$ Sala de Profesores
- ❖ $13x^2 + 24x + 25 \rightarrow$ Cafetería
- ❖ $31x^2 + 23x - 25 \rightarrow$ Enfermería
- ❖ $31x^2 + 26x - 25 \rightarrow$ Portería
- ❖ $13x^2 + 14x + 11 \rightarrow$ Cancha
- ❖ $30x^2 + 25x - 25 \rightarrow$ Coordinación



Figura 4. Pirámide

Mensaje Oculto

Encuentra el factor común en cada una de las expresiones de la tabla. En la parte inferior aparecen cada uno de esos factores. Sobre las líneas escribe la letra correspondiente a cada expresión.

Ejercicio	Clave
$93a^3x^2y - 62a^2x^3y^2 - 124a^2x$	S
$9a^2 - 12ab + 15a^3b^2 - 24ab^3$	A
$34ax^2 + 51a^2y - 68ay^2$	L
$a(x+1) - b(x+1)$	P
$-m - n + x(m+n)$	R
$4x^2 - 12y^2 + 6$	C
$12x^3 + 3x^2y - 21xyz^2$	U
$18a^5 - 6a^4 + 9a^3b^2$	O
$14a^4b + 12a^3b^2 + 8a^2b^4$	E
$a^2bc - ab^2c + abc^2$	N
$12a^3y^2 + 45ab^2y$	F
$x^2(x+1) + (x+1)$	M
$(c-d)m - 2n(c-d)$	H
$24a^2xy^2 - 36x^2y^4$	B
$55m^2n^3x + 110m^2n^3x^2 - 220m^2y^3$	G
$96 - 48mn^2 + 144n^3$	J
$14x^2y^2 - 28x^3 + 56x^4$	K
$16x^3y^2 - 8x^2y - 24x^4y^2 - 40x^2y^3$	Ñ
$10ab - 8bc$	Q
$4x^2y^2 + 6x^3y^3 + 20x^4y^4$	T
$\frac{-3}{4}z^3y^2 + \frac{5}{4}z^2y^3 + \frac{1}{4}zy^4$	V
$8a^x + 18a^{x+1} - 20a^{x+2}$	W
$16abc + 48ab - 96bc + 64b$	X
$\pi^2 + 2\pi x + 4\pi$	Y
$18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2$	Z
$\frac{24}{25}a^2xy^2 - \frac{36}{10}x^2y^4$	I
$\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{2}{21}$	D

$\frac{2}{3}a \frac{2}{3}3a \quad 3ay(m+n)(x-1) \quad 3a \frac{2}{3}3a \quad 31a^2x \quad 3a^3 \quad 31a^2x \quad 3x(x+1)(a+b) \quad 3a^3 \quad abc \quad 2a^2b$
 $\frac{3x}{3}abc \quad \frac{2}{3}3a(x+1)(a+b) \quad \frac{12}{5}xy^2 \quad 2x^2y^2 \quad 3x \quad 17a \quad 3a^3 \quad x+1 \quad 3a \quad 31a^2x \quad 2a^2b \quad abc$
 $\frac{17a}{17}3a \quad c-d \quad \frac{12}{5}xy^2 \quad 31a^2x \quad 2x^2y^2 \quad 3a^3 \quad (m+n)(x-1) \quad \frac{12}{5}xy^2 \quad 3a \quad \frac{2}{3} \quad 2a^2b$
 $\frac{abc}{17a} \quad 3x \quad 2a^2b \quad 31a^2x \quad 2x^2y^2 \quad (m+n)(x-1) \quad 3a \quad \frac{1}{4}zy^2 \quad \frac{12}{5}xy^2 \quad \frac{2}{3} \quad 3a \quad \pi \quad \frac{3x}{3}abc \quad 3a$
 $\frac{17a}{17} \quad 2a^2b \quad \frac{2}{2} \quad \frac{12}{5}xy^2 \quad 3a^3 \quad abc \quad 2b \quad 3x \quad 2a^2b \quad abc \quad 3a^3 \quad 31a^2x \quad 3a \quad \pi \quad 3x \quad \frac{2}{3} \quad 3a \quad 3a$
 $\frac{2}{2} \quad (m+n)(x-1) \quad 2a^2b \quad \frac{2}{2} \quad 2a^2b \quad (m+n)(x-1)$

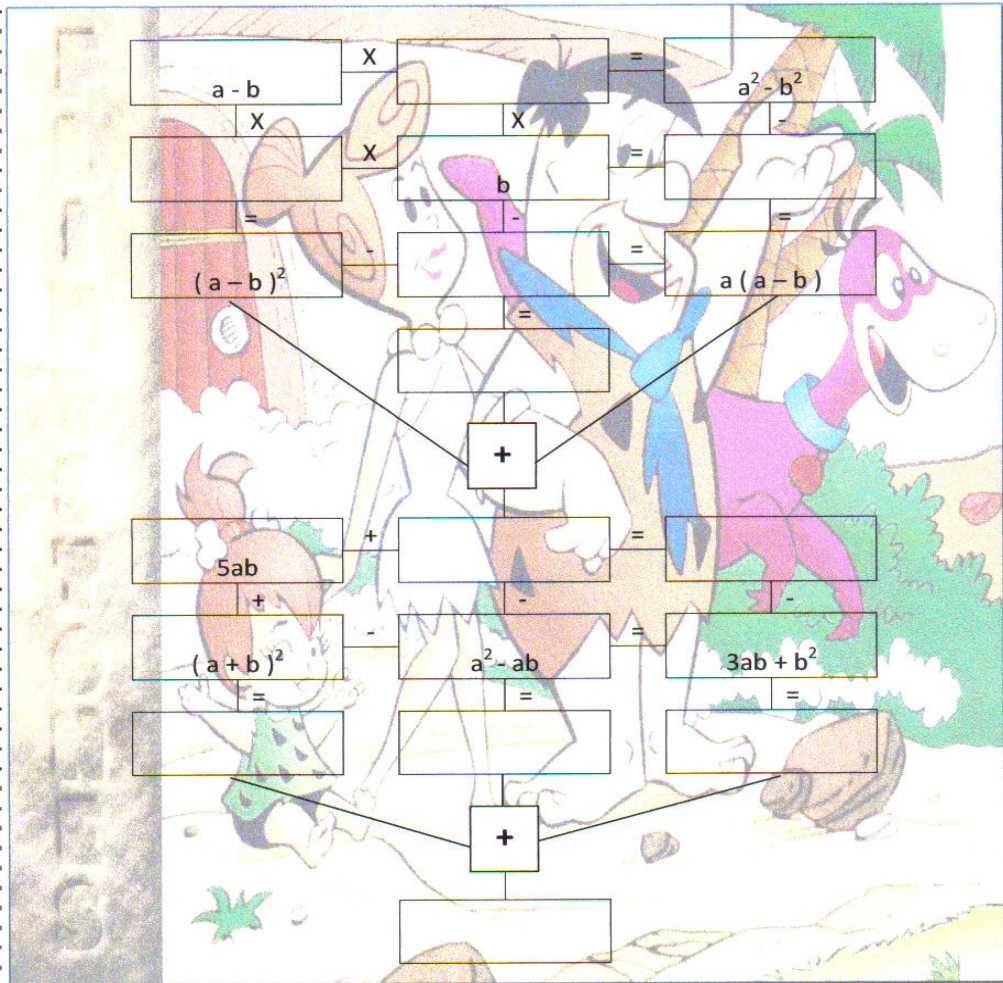
Ahora utiliza este código para descifrar el lugar a donde debes ir. Cuenta las letras..

(7, 21, 1, 2, 36, 2, 80, 7, 3)

Figura 5. Mensaje Oculto1

Laberinto Matemático

Escribe las expresiones que completan el esquema



Observa el resultado y encontrarás el sitio a donde te dirigirás

- ♣ $2a^2 - 6ab + b^2 \longrightarrow$ Coordinación
- ♣ $4a^2 + 6ab + b^2 \longrightarrow$ Cancha
- ♣ $4a^2 + 8ab + 2b^2 \longrightarrow$ Sala de Profesores
- ♣ $3a^2 + 5b + b^2 \longrightarrow$ cafetería
- ♣ $3a^2 + 8ab + 2b^2 \longrightarrow$ Portería
- ♣ $2a^2 - 8ab + 2b^2 \longrightarrow$ Enfermería



Figura 6. Laberinto matemático

Mensaje Oculto

Descifra el mensaje: Cada una de las expresiones que aparece debajo de las líneas, corresponde a una expresión faltante de los cuadros de abajo. Escribe la expresión faltante y pon encima de las líneas la letra correspondiente a la expresión.

Ejercicio	Clave
$2X^2+3X-2 = (2X-1)(\quad)$	A
$3X^2-5X-2 = (\quad)(X-2)$	B
$= (2X+1)(3X+2)$	C
$5X^2+13X-6 = (5X-2)(\quad)$	D
$6X^2-5X-6 = (\quad)(2X-3)$	E
$= (3X+2)(4X-3)$	F
$4a^2+15a+9 = (4a+3)(\quad)$	G
$12m^2-13-35 = (\quad)(4m+5)$	H
$= (4y+1)(5y-1)$	I
$8a^2-14a-15=(2a-5)(\quad)$	J
$7x^2-44x-35=(\quad)(x-7)$	K
$= (3m+5)(5m-3)$	L
$2a^2+5a+2(2a+1)(\quad)$	M
$12x^2-7x-12=(\quad)(4x+3)$	N
$= (a+1)(9a+1)$	Ñ
$20n^2-9n-20=(4n-5)(\quad)$	O
$21x^2+11x-2=(\quad)(3x+2)$	P
$= (5m-3)(3m+2)$	Q
$15a^2-8a-12=(3a+2)(\quad)$	R
$9x^2+37x+4=(\quad)(x+4)$	S
$= (10n-3)(2n+5)$	T
$14m^2-31m-10=(7m+2)(\quad)$	U
$2x^2+29x+90=(\quad)(2x+9)$	V
$= (4a+5)(5a-8)$	W
$4n^2+n-33=(4n-11)(\quad)$	X
$30x^2+13x-10=(\quad)(5x-2)$	Y
$= (x-3)(3x-1)$	Z

$$\overline{(6x^2+7x+2)(2m-5)(x+2)(3x-4)(x+3)(5n+4)} \quad \overline{(3x+2)(9x+1)(44n+20n^2-15)(5n+4)(6x+5)}$$

$$\overline{(3x+2)(3x-4)(44n+20n^2-15)(5a-6)(3x+2)} \quad \overline{(16m+15m^2-15)(5n+4)(6x^2+7x+2)(5n+4)(9x+1),}$$

$$\overline{(a+2)(3x+2)(3m-7)(x+2)(a+3)(5n+4)(3x+2)(16m+15m^2-15)(16m+15m^2-15)(5n+4)(6x^2+7x+2)(5n+4).$$

DIÓGENESI

Ahora utiliza este código para descifrar el lugar a donde debes ir. Cuenta las letras:

(13, 31, 29, 25,8)

Figura 7. Mensaje Oculto

Diseño:

Se diseñaron varios tipos de pruebas que los estudiantes debieron resolver en grupo. Las pruebas son las siguientes: Pirámide, Mensaje Oculto 1, Laberinto Matemático y Mensaje Oculto 2. Cada equipo deberá estar integrado por 8 estudiantes. Se escogen los equipos participantes; cada equipo recibe un color que los identifica. Todos los grupos parten del mismo lugar (SALIDA).

La primera prueba es la Pirámide, esta prueba esta conformada por una serie de ladrillos sobrepuestos unos encima de otros formando así una pirámide. En esta, la expresión de cada ladrillo es la suma de las expresiones de los ladrillos sobre los que se apoya, los estudiantes deben completarla y así encontrarán el siguiente lugar a donde se dirigirán. La siguiente prueba es el mensaje oculto, el cual consiste en encontrar el factor común de cada una de las expresiones que aparecen en la tabla, cada factor tiene asignada una letra del alfabeto. En la parte inferior aparecen cada uno de los factores de las expresiones anteriormente dadas. Sobre las líneas escriben la letra correspondiente a cada expresión, de esta manera descubrirán el siguiente lugar a donde deben dirigirse. En la siguiente estación encontraran un laberinto matemático, este consiste en escribir expresiones algebraicas de tal forma que se pueda completar el esquema. Aquí se ven algunas operaciones estudiadas anteriormente como lo son la suma, resta y multiplicación de polinomios. Al completar el esquema encontrarán el siguiente lugar a donde se tienen que dirigir. La última estación es nuevamente un mensaje oculto. Los estudiantes deben factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, donde cada factor tiene asignada una letra del alfabeto. La dinámica es exactamente igual al anterior mensaje oculto.

Una vez resueltas todas las pruebas respectivas, todos los integrantes del equipo deben dirigirse a la META. Ganará aquel equipo que haya superado todas las pruebas y llegue en primer lugar.

Reglas del Juego

1. Los integrantes de cada equipo deberán llevar los cordones de los zapatos amarrados entre sí, de lo contrario se anulará una prueba.
2. Cada integrante del grupo debe participar en la solución de las distintas pruebas.
3. Para ser el ganador de la carrera de observación, se debe mantener el orden y la disciplina durante el recorrido y desarrollo del juego.

CAPÍTULO 3

Análisis de los juegos

El aprendizaje de la matemática debe ser una experiencia agradable a través de la cual los niños participantes del proceso de enseñanza-aprendizaje sean sujetos y no objetos del mismo. Así, el juego se presenta como un escenario atractivo desde el cual el profesor tiene la opción de posibilitar un aprendizaje –e incluso una enseñanza– feliz y agradable realizando, de esta manera, su ejercicio pedagógico de manera reflexiva tanto a nivel educativo como matemático ya que él es quien debe delimitar el juego hasta cierto punto para que este se convierta en matemática seria.

De esta manera, en este punto del informe de la investigación realizada, pretendemos dejar ver el proceso matemático que los niños vivenciaron y cómo los juegos favorecieron, de una u otra forma, el refuerzo de algunos casos de factorización y el pensamiento matemático.

3.1 Pertinencia

Esta categoría de análisis recoge, de las actividades, todos los elementos que están relacionados con el proceso de factorización de polinomios donde se relaciona los objetivos de desarrollo de proyecto, las condiciones, posibilidades y riesgos existentes a la hora de aplicar las actividades diseñadas.

3.1.1 La Prueba Diagnóstica

Para cumplir con los objetivos propuestos en la prueba diagnóstica se planteó un juego llamado “factorizar jugando” el cual tuvo desarrollo en la cancha de baloncesto. En esta actividad intervinieron diversos factores como: disposición de los estudiantes frente al juego, motivación, conocimiento del tema a trabajar, ejercitación del cuerpo, diversión, movilidad, etc.

Por las características que reunía el juego (baloncesto) se pudo observar la motivación de la mayoría de los estudiantes, ya que la actividad se realizaría en un lugar distinto al salón de clase. Situados en la cancha del colegio se leyeron las reglas de juego, esto con el fin de no propiciar desorden o algún acto de indisciplina que fuera a interferir en el desarrollo de la actividad y de paso con los objetivos propuestos.

Fue un juego novedoso y divertido para ellos, pues nunca antes la clase de matemáticas la habían realizado en un contexto distinto al salón de clase. Además se cumplía con tres objetivos propuestos: repasar factorización, mirar en que estaban fallando los estudiantes y al mismo tiempo motivarlos un poco a través del juego.

De acuerdo con los resultados, era necesario reforzar en los estudiantes el seguir instrucciones, leer y comprender lo escrito. Además es importante que el juego a desarrollarse sea motivador y de total agrado para todos los estudiantes y que ellos entiendan las reglas por sí mismos y no necesiten que el docente las diga.

3.1.2 Aprendiendo factor común a través del parqués

La idea de utilizar el diseño de un parqués tradicional para esta actividad surgió de la popularidad entre los alumnos de la metodología de este juego, así el desarrollo de la actividad sería más asequible a ellos. El juego se llevó a cabo en el laboratorio de matemáticas debido a la adecuación del salón y a la conformación de los grupos de estudiantes.

Los estudiantes estaban motivados por la clase de actividad que se implementaría en esta ocasión. Debido a que se hicieron algunas modificaciones en las reglas de juego hubo el temor de que algunos estudiantes no cumplieran a cabalidad con ellas y desarrollaran el juego en forma tradicional por tal motivo fue necesario dejar en claro que quienes no cumplieran con las reglas no podrían participar en la actividad, además nosotras estábamos pendientes de que el juego se desarrollara correctamente.

El parqués permitió a los estudiantes poner a prueba el conocimiento acerca de factor común e implementar distintas estrategias las cuales podían llegar a ser herramientas apropiadas para ganar. Pero como en todo juego existen tácticas que los estudiantes ponen en práctica para ganar el juego y una de ellas es mover muy bien las fichas de tal forma que se evite resolver ejercicios. Hay que admirar la capacidad que tienen los estudiantes de pensar y razonar sabiamente para alcanzar buenos resultados sin tener que resolver ejercicios.

Durante el desarrollo del juego se observaron 3 tipos de conducta:

1. El estudiante audaz que realizaba estrategias para evitar resolver ejercicios.
2. Aquel estudiante que se preocupaba por tener la totalidad de las fichas en juego aun así tuviera que resolver ejercicios.
3. Y por último, el estudiante centrado en su propio juego.

Debido a la familiaridad que existía entre los estudiantes y el juego no se presentaron problemas en cuanto a la metodología. Este es un juego tradicional practicado por ellos ya sea con sus familias o amigos, de esta forma siempre lo habían visto como un medio de diversión más no como un instrumento para el aprendizaje. También se presentó un poco de creatividad y astucia ya que algunos estudiantes crearon ciertas estrategias para lograr que el juego se desarrollara de una forma más rápida y sencilla. Esto muestra que el juego estimula en el desarrollo cognitivo algunos aspectos como: la memoria, la imaginación, la creatividad y el pensamiento científico y matemático (ver Cap. 1, pág. 8).

3.1.3 Juguemos dominó

Para reforzar el tema trinomio cuadrado perfecto utilizamos un dominó; debido a que las reglas de juego eran conocidas por los alumnos. Fue desarrollado en el salón de matemáticas debido a la comodidad que proporciona este salón para la conformación de los grupos que intervendrían en la actividad.

Los estudiantes por medio del dominó observaron que existen distintos métodos de aprendizaje que no necesariamente se presenta en el aula de clase. Muchos de ellos estaban sorprendidos de cómo un juego tradicional como este puede ser adaptado a una clase de matemáticas y sobre todo que este no pierde su sentido divertido.

Utilizar un dominó para esta actividad les proporcionó agilidad mental ya que tenían que realizar las operaciones mentalmente y rápidamente, esto con el fin de seguir el ritmo del juego. Fue un juego novedoso, divertido y con dos elementos adicionales: las respuestas tenían que ser exactas para el correcto desarrollo del juego y no generaba algún intento de copia entre los estudiantes.

3.1.4 Tendremos suerte en la Lotería Algebraica

Para la cuarta sesión diseñamos una “lotería algebraica” donde la intención del juego era reforzar la diferencia de cuadrados, buscando despertar el interés y la atención de los alumnos en un ambiente de confianza, libertad y cooperación. El juego inició como los anteriores, se leyeron las reglas y la metodología que se implementaría. Esta actividad se basó en el conocido pasatiempo de “lotería”. En nuestra adaptación proponemos que los alumnos trabajen la factorización de polinomios donde las palabras se sustituyen por polinomios y las imágenes por factores.

Las características del juego originaron tres aspectos importantes:

- Un poco de desmotivación de los estudiantes debido a que el juego se desarrollaría en el salón de clases.
- Los estudiantes no recordaban como se debía factorizar la diferencia de cuadrados, por lo cual se efectuaron algunos ejemplos en el tablero con el fin de aclarar dudas.
- La metodología era un poco confusa y los estudiantes no entendían muy bien como se desarrollaría el juego.

El juego fue planteado como trabajo en equipo pero durante la actividad se observó que no todos los integrantes de los grupos eran partícipes de la actividad pues estos a su vez se dividían las tareas de la siguiente manera: uno recogía la tarjeta, otros miraban si el ejercicio encajaba en el tablero o no, otro devolvía la tarjeta y otros simplemente no participaban, esto originó desorganización en los grupos, alboroto, bullicio, y un poco de inconformidad entre los estudiantes que si querían participar en la actividad.

También se observó que algunos grupos tomaban la tarjeta comparaban el ejercicio y aún teniendo la factorización correcta, no la reconocían, esto evidenció

que no sabían factorizar o no ponían atención a los resultados. Caso contrario sucedió con 2 grupos que mostraban trabajo en equipo, organización, estrategia, propiedad en el desarrollo de las operaciones y en la búsqueda de la solución de los polinomios. Era interesante observar cómo los estudiantes con más conocimiento se atrevían a corregir y a juzgar a sus compañeros algunos inclusive no aceptaban las correcciones. Lo anterior nos ratifica lo dicho por Bruner (ver Cap.1, pág. 9) cuando dice que el juego es un formato de actividad comunicativa entre iguales que les permite reestructurar continua y espontáneamente sus puntos de vista y sus conocimientos, mientras se divierten y gozan de la experiencia de estar juntos.

Analizando los ejercicios propuestos notamos que como el juego requería respuestas exactas, esto contribuyó a que el grupo que sabía factorizar tuviera un poco de ventaja, claro, esto acompañado de un poco de azar.

3.1.5 Armando el Rompecabezas y completando el Mensaje oculto

Rompecabezas

Esta actividad se realizó con base en el conocido pasatiempo de “rompecabezas”, un juego clásico que puede readaptarse y ser utilizado en las clases de matemáticas. Este es un juego de mesa cuyo objetivo es formar una figura combinando correctamente las partes de ésta, que se encuentran en distintos pedazos o piezas en forma de hexágonos.

El rompecabezas fue un juego diseñado para desarrollar habilidades en la factorización de la suma y diferencia de cubos. Esta sesión se desarrolló en el laboratorio de matemáticas.

Se entregó el material correspondiente a cada grupo, se explicaron las reglas de juego y la metodología a seguir. Vale la pena recalcar la motivación de los estudiantes en el desarrollo del juego, pues este es novedoso y aunque en un principio no entendieron cómo desarrollarlo, después de una breve explicación en el tablero recordaron y procedieron a jugar.

Durante la actividad se presentaron algunos factores importantes como:

- El tamaño de los grupos de trabajo, es decir, solo estaban conformados por 4 estudiantes, esto facilitó el desarrollo del juego.
- Otro factor importante es que los estudiantes no conocían de antemano la figura que estaban armando, implícitamente se requería que factorizaran correctamente pues si no lo hacían, algunas piezas del rompecabezas quedarían sueltas.
- Debido a que todos los juegos eran distintos entre sí, esto no permitía que se presentara algún intento de copia entre los grupos.
- Este juego evidenció la cooperación, trabajo en equipo, entusiasmo, alegría, frustración y muchas otras emociones que se pueden observar en una lúdica.

Los estudiantes manifestaron que el juego fue muy interesante debido a que este requería destreza y agilidad mental a la hora de factorizar los polinomios pero que también presentaba cierto grado de dificultad en el cual muchos de ellos se dieron cuenta que presentaban falencias en este tema.

Mensaje oculto

Una vez situados en el laboratorio de matemáticas y retomando los grupos con los cuales se trabajó el rompecabezas se planteó el juego llamado “Mensaje Oculto”. Como en las sesiones anteriores se leyeron las reglas del juego con el fin de no propiciar indisciplina que interfiriera con la actividad.

Una vez entregado el material a los alumnos se evidenciaron diferentes elementos como: motivación, disposición frente al juego, curiosidad, etc. Por las características que reunía el juego se pudo observar un poco de incertidumbre y ansiedad debido a que cada uno de ellos quería ser el primero en descubrir el mensaje.

Los estudiantes abordaron la actividad de buena manera, cada uno trataba de resolver los ejercicios, realizaban las operaciones requeridas. Para esta situación se necesitaba agilidad mental, astucia, observación, estrategia y habilidades en la factorización que poco a poco iban adquiriendo en el transcurso del juego.

Fue un juego lleno de escepticismo debido a que no conocían el resultado final y además requería que la factorización fuera correcta para así poner la letra correspondiente y de esta forma completar el mensaje. Se podía presentar el caso de que no se resolviera la totalidad del ejercicio y con un poco de astucia se completa el mensaje.

Debido a que era una actividad individual se presentó absoluto orden y concentración. Una de las cosas que más nos llamó la atención fue observar cómo todos los estudiantes trabajaron en su hoja y se dedicaron a encontrar la solución al ejercicio.

3.1.6 Superando pruebas en la Carrera de Observación

En la última sesión queríamos realizar un juego de campo que reuniera diferentes pruebas que permitiera reforzar los temas vistos en las sesiones anteriores y el tema faltante que era trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$. Para cumplir con los propósitos anteriormente planteados diseñamos una carrera de observación la

cual se desarrolló en los alrededores de la cancha de baloncesto. Esta actividad estaba compuesta por algunos factores como: trabajo en equipo, ejercitación del cuerpo, entusiasmo, esparcimiento, entretenimiento, alegría, regocijo, motivación, etc. (ver Cap.1, pág. 8).

Para el desarrollo de la actividad se les pidió a los estudiantes que conformaran grupos de 6 personas y que se amarraran los cordones de los zapatos. Esto generó un poco de risas y expectativas entre los alumnos debido a que esto dificultaba la movilidad del grupo. Una vez conformados los equipos se les entregó el material de trabajo y se explicaron las reglas del juego las cuales debían ser completamente comprendidas con el fin de no propiciar desorden e indisciplina.

La actividad estuvo compuesta por 4 bases o estaciones en las cuales encontrarían diferentes pruebas que desarrolladas correctamente los conduciría a la meta.

Durante la carrera, en cada una de las estaciones, se observaron distintas conductas como:

- El trabajo en equipo y la disciplina de los grupos que querían desarrollar rápidamente las pruebas para llegar a la meta y ser los ganadores.
- La segunda y cuarta prueba fueron de fácil desarrollo debido a que los estudiantes conocían la metodología del juego y los temas a trabajar eran más asequibles.
- Se presentó un poco de desorden en dos de los cinco grupos conformados para la actividad, donde solo unos cuantos desarrollaban las pruebas mientras sus compañeros se dedicaban a fomentar el desorden haciendo burlas de sus compañeros.

- Algunos grupos requirieron más la presencia de una de las profesoras ya que presentaban muchos errores a la hora de resolver los ejercicios propuestos.

A pesar de las dificultades que se presentaron, este fue un juego novedoso y divertido para los alumnos pues ellos nunca habían participado en una situación donde el trabajo en equipo fuera la única manera de lograr un objetivo propuesto. La contribución de Vigotsky ha significado que ya el aprendizaje no se considere como una actividad individual, sino más bien social. Se ha comprobado que el estudiante aprende más eficazmente cuando lo hace en forma cooperativa (ver Cap. 1, pág. 9).

3.2 Desarrollo del juego

El trabajo con los estudiantes se estableció a partir de actividades, de forma individual y grupal, que posibilitaron la comunicación y favorecieron algunos procesos, como el aprendizaje cooperativo y la motivación. A continuación presentamos cada una de las actividades y hacemos una breve descripción de las mismas en el orden en que se fueron proponiendo a los estudiantes. Esta categoría de análisis recoge, todos los elementos que están relacionados con la aplicación de cada una de las actividades, actitudes, falencias y dificultades en el desarrollo de estas.

3.2.1 *Juguemos y aprendamos factorización*

Todos los estudiantes se presentaron en el sitio y hora indicada, con la expectativa de saber qué era lo que iban a hacer. Llegaron con la idea de asistir a una clase formal, enfrentarse a pruebas escritas tradicionales. Este fue uno de los primeros aciertos, se relajaron un poco al saber que la experiencia iba a realizarse en un

sitio diferente al aula y que prácticamente lo que iban a hacer todo el tiempo era jugar (palabras que no comprendieron en el momento, mostrando incredulidad). Esto concuerda con el comentario hecho por Ortega donde afirma que los juegos adquieren un valor formativo, mediante ellos se aprovecha el gran deseo de aprender de los niños y se transmiten nuevos conocimientos, actitudes y habilidades o se desarrollan los ya existentes (ver Cap. 1, pág. 7). Además se les hizo un breve recuento de los horarios, fechas y generalidades de las sesiones (un juego por cada encuentro).

Se inició con el primer juego, denominado “Factorizar... Jugando”, se dieron a conocer las reglas del juego, la metodología, el tiempo, y se explicó el uso del material. Vale la pena recalcar que este juego se aplicó a todo el grupo de octavo grado pero cada uno de los ejercicios era resuelto por los estudiantes en forma individual, esto con el fin de detectar las dificultades que presenta cada uno de los estudiantes en la factorización de polinomios.

Este juego es una combinación de ejercicios, diversión y reglas ya que se presenta la oportunidad de que el estudiante actúe libremente en el momento de resolver casos de factorización, además a los jóvenes se les dio tiempo para reflexionar acerca de las ideas que se les ocurrían a la hora de aplicar distintos métodos en la factorización de polinomios.

El juego consiste en resolver ciertas operaciones escritas en tarjetas de colores. Cada tarjeta trae un ejercicio referente a los temas vistos anteriormente en el aula de clase, el cual deberá ser resuelto por el estudiante.

Se pudo observar que la mayoría de los estudiantes participó activamente, algunos motivados por encestar y otros por ganar premios. Durante el transcurso del juego se presentaron distintas situaciones: algunas estudiantes, en su mayoría niñas, no quisieron hacer parte del juego ya sea por falta de conocimiento o por

falta de interés del mismo. Cinco estudiantes realizaron correctamente la actividad, es decir, no tuvieron ningún error al factorizar los polinomios, por este motivo estos estudiantes obtuvieron más oportunidades de encestar y de esta forma obtuvieron más premios. De la misma manera, algunos de ellos aprovecharon la actividad para hacer trampa copiando los resultados a sus compañeros y otros tomaron la actividad como una oportunidad para trabajar en otras cosas que no era necesariamente de matemáticas esto originó que sus compañeros se incomodaran y aburrieran un poco con la actividad que se estaba desarrollando.

Terminada la actividad, por ser la primera y la encargada de diagnosticar el nivel de los estudiantes en estos temas, se hizo una retroalimentación de todo el proceso, ya que muchos de ellos contestaron de forma incorrecta, dándole a cada uno la oportunidad de corregir los errores. Para la mayoría de los estudiantes fue útil la retroalimentación, porque reconocieron los errores cometidos e hicieron las correcciones pertinentes, algunos por su escasa capacidad cognitiva, no hicieron el ejercicio ni comprendieron lo que tenían que hacer. Para Piaget, el aprendizaje es el proceso para la construcción del significado por lo que se busca que las actividades de aula sean un reto para los estudiantes y generen conflicto cognitivo. La actividad del estudiante es la construcción de su conocimiento y el profesor busca favorecer un modelo del estudiante que fundamente sus decisiones (ver Cap.1, Pág. 9).

Vale la pena resaltar que esta primera actividad elevó el nivel de motivación y autoestima en los estudiantes que obtuvieron mayor puntaje en el juego y en todos despertó la curiosidad e interés para las próximas sesiones, haciendo preguntas como “¿mañana a qué horas, profe?”. Al final de la actividad se les entregó una hoja en blanco para que manifestaran todos los aspectos del juego percibidos por ellos. Algunos de los aspectos manifestados fueron: “fue muy interesante porque recordé cosas que ya había olvidado”, “la lúdica que hicimos me ayudó a mejorar mi aprendizaje”, “la forma como nos explicaron fue muy chévere, incluso fue al aire

libre”, “la forma de jugar es superchévere, es algo diferente”, “competimos unos con otros, pero a la vez aprendimos a factorizar”, “aprendimos más que en el salón”.

Durante el desarrollo de la actividad cada uno de ellos mostró sus rasgos de personalidad y su capacidad cognitiva y cómo abordar el siguiente juego. Para la teoría social del aprendizaje a través de la participación se establecen relaciones con otras personas, se define la manera de formar parte de comunidades en las que se sumen compromisos y se desarrolla la propia identidad.

3.2.2 Aprendamos factor común a través del parqués

Esta fue la segunda sesión, nuevamente es importante mencionar la motivación y la disposición de cada uno de los estudiantes, esto muestra el compromiso y el deseo de participar en el juego propuesto.

Para este juego se utilizó un parqués tradicional basándonos en que la metodología del juego era conocida por todos los estudiantes. Con este juego se pretendía utilizar el parqués como recurso didáctico en el proceso de refuerzo acerca del tema factor común, buscando despertar el interés y la atención de los alumnos en el estudio de este tema y alcanzar nuevos métodos didácticos de aprendizaje, para que el estudiante muestre interés en las matemáticas.

Se inició con la explicación minuciosa de las reglas del juego ya que era necesario comprenderlas para el buen desarrollo de este, además se notó en el transcurso de la explicación que muchos de ellos ya iban armando su estrategia de juego. Se ordenó lanzar un solo dado y quien obtuviera el mayor número iniciaba el juego, de ahí en adelante se continuaba por la derecha.

Al inicio, hubo la necesidad de recordarles cada vez que hacían un lanzamiento, cuáles eran las reglas del juego con respecto a los ejercicios y al mismo tiempo cómo debían realizar los desplazamientos dependiendo del resultado en los dados.

A pesar de que el juego era individual fue bastante enriquecedor para ellos, ya que al avanzar, retroceder ó al resolver un ejercicio en forma incorrecta, inmediatamente los otros jugadores le hacían caer en cuenta del error obligándolo a rectificar la factorización o el desplazamiento.



Foto 7. Socializando con el parqués



Foto 8. Estudiantes jugando parqués

Fue una actividad dinámica, divertida, interesante. Se dio un aprendizaje cooperativo (ver Cap.1, pág.10) puesto que cuando cada estudiante debía resolver

un ejercicio de factor común, este debía ser revisado por sus compañeros quienes darían su aprobación en caso de estar bien factorizado. En caso contrario, el estudiante debería resolver nuevamente el ejercicio hasta llegar a la solución correcta. La disposición de los estudiantes fue la mejor.

A medida que se avanza en la experiencia vamos observando ciertas falencias y problemas que difícilmente se pueden observar en una clase, dada la cantidad de estudiantes, por ejemplo, hay un estudiante que desde la anterior sesión presenta problemas graves con sus pre saberes y además no tiene en cuenta los símbolos de las operaciones y el orden en los términos de las operaciones.

Casi todos los jugadores, hacían las operaciones para agilizar el juego, no quedarse de sus compañeros y demostrar que ya sabían factorizar, sin embargo después de terminado el juego y al hacer la revisión de los ejercicios desarrollados, se pudo observar que muchos de estos no estaban bien resueltos, cabe resaltar que si bien no hicieron bien la factorización, sí siguieron muy bien las instrucciones (lanzar – avanzar – retroceder) y lograron tener avance en el juego sin importarles la burla de sus compañeros. Debido a que muchos de los ejercicios desarrollados por los estudiantes estaban mal factorizados, decidimos en la siguiente clase hacer una retroalimentación donde se discutieron cuáles fueron los errores cometidos y se les dio la oportunidad de corregir los ejercicios desarrollados en el transcurso de la actividad. De acuerdo con el constructivismo el profesor en su rol de mediador debe animar a los alumnos a tomar conciencia de sus propios procesos y estrategias mentales para poder modificarlos y mejorar el rendimiento y la eficacia en el aprendizaje (ver Cap.1, pág.10).

Con respecto a las factorizaciones realizadas en el juego y la sesión anterior, los estudiantes han mostrado un progreso y esto se ve reflejado en el desarrollo de las distintas operaciones efectuadas durante la actividad, aplicando en su mayoría los conocimientos adquiridos en el salón de clases. Nos sorprendió mucho el

hecho que los alumnos que ganaron el juego no fueron necesariamente los que solucionaron más ejercicios.

3.2.3 Profundicemos con el Dominó

En la siguiente sesión se utilizó un dominó teniendo en cuenta de nuevo que la metodología era conocida por los estudiantes y que este permite que desarrollen su pensamiento variacional de una forma ágil y divertida.

En este juego se formaron aleatoriamente los grupos, esto con el fin de que pudieran intercambiar conocimientos, corregirse y explicarse entre ellos. El aprendizaje cooperativo es una estrategia que promueve la participación colaborativa entre los estudiantes. El propósito de esta estrategia es conseguir que los estudiantes se ayuden mutuamente para alcanzar sus objetivos (ver Cap.1, pág.10). La intención de este juego era utilizar el dominó como recurso didáctico en el proceso de refuerzo de la factorización de trinomios cuadrados perfectos.

El juego inicia como los anteriores, haciendo una breve explicación de las reglas y dando la opción de escoger el equipo de trabajo. Debido a que se diseñaron 5 dominós distintos, cada grupo debería jugar mínimo una vez con cada uno.

En el momento de iniciar el juego, se realizó un ejemplo en el tablero, de esta forma recordaron cómo debían factorizar y a su vez comprendieron a cabalidad la dinámica de la actividad.

$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	x^2+2x+1	$(x+1)^2$	$(3x+5)^2$
$(a+b)^2$				

Figura 8. Dominó

En el transcurso de la sesión fue sorprendente observar que todos los alumnos estaban concentrados en su propio juego pues cada uno de ellos sabía que si ponía una ficha incorrecta en algún momento no podría continuar su juego. También se pudo percibir que en algunos casos alguno de los estudiantes no estaba seguro de la respuesta entonces pedía el favor a un compañero para confirmarla, de esta forma se notó la cooperación entre ellos.



Foto 9. Estudiantes jugando dominó



Foto 10. Finalizando el juego dominó

Esta actividad se realizó con el fin de mostrar a los estudiantes diferentes formas en las que se pueden ver las matemáticas, no solo con papel y lápiz, sino también comprendiéndola y reforzándola por medio de un juego de mesa.

El dominó fue un juego que tuvo un desarrollo ágil, pues 10 minutos después de iniciada la sesión había grupos que ya tenían un ganador y estaban esperando turno para cambiar a otro. A medida que el estudiante se enfrentaba con más ejercicios iba adquiriendo más agilidad a la hora de resolverlos y de esta manera el juego se iba tornando más dinámico.

Este juego fue especial porque los estudiantes en todos los momentos debían ejercitar su propia capacidad de conocimiento y no poseía distintas estrategias para jugar, solo había una y era su comprensión acerca del tema, lo cual generó una concentración en el momento de jugar y de esta forma poner la ficha apropiada. Para Piaget es útil estructurar entornos de aprendizaje que permitan el desarrollo de ciertas estructuras conceptuales a través de la participación en tareas que promuevan la actuación de los alumnos; se preocupa por el conocimiento individual como proceso de adaptación a la experiencia (ver Cap.1, pág. 9). También era muy difícil que los estudiantes hicieran trampa ya que para el

correcto funcionamiento del juego las respuestas debían ser exactas. Así, cada vez que se lanzaba una ficha del dominó el estudiante tenía que aplicar trinomio cuadrado perfecto respectivamente.

Terminada la actividad se entregó a los estudiantes una hoja en blanco en la cual escribieron algunos aspectos de la actividad; entre ellos podemos destacar algunos como: “fue un juego muy fácil y muy original”, “estimulé mucho la mente”, “en este juego pude recordar y entender más el tema, ya que no lo entendía muy bien”.

3.2.4 La suerte en la Lotería Algebraica

Esta vez la sesión se desarrolló en el aula de clase (cosa que no les agradó mucho a los estudiantes); trabajaron en equipos conformados por 6 o 7 integrantes. En esta ocasión diseñamos un juego al que denominamos “Lotería Algebraica” y la intención de este juego era reforzar la diferencia de cuadrados y despertar el interés en los alumnos y el desarrollo de habilidades en este tema.

En este juego hay una mezcla de azar, conocimiento, reglas, penitencias, emoción, distracción, competencia, alegría, etc., son algunos de los aspectos que mejora el juego en el desarrollo social y que hacen que el juego como tal se convierta en una herramienta útil, que capte por completo la atención de los estudiantes y facilite cumplir el objetivo propuesto. El juego se inicia como los anteriores haciendo una breve explicación de las reglas de juego, incluso se hizo un ejemplo en el tablero para recordar cómo se debía factorizar y de paso dejar en claro la metodología del juego.

En el transcurso del juego se vivió un ambiente agradable donde algunos estudiantes estuvieron concentrados buscando e imaginando mejores estrategias

para ganar y generando en otros preocupación, angustia, emoción y alegría. Observamos que las penitencias a lo largo del juego impregnaron algo de “picardía”, las cuales fueron disfrutadas al máximo por los estudiantes.

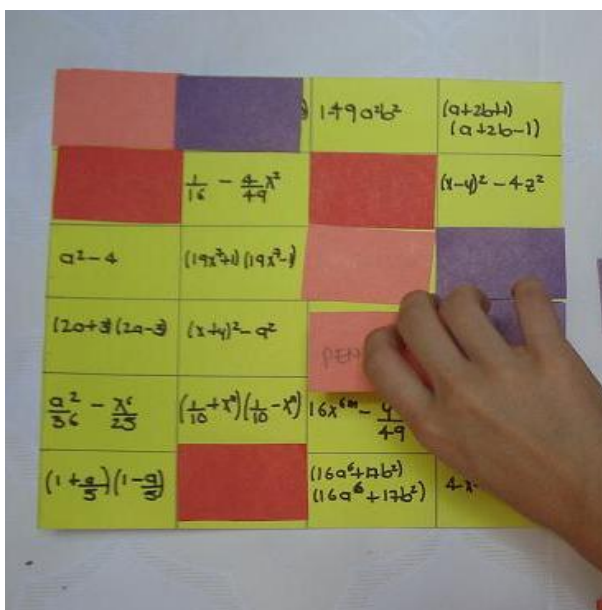


Foto 11. Estudiantes completando la lotería

El juego estuvo un poco demorado debido a que cada tablero contenía 24 divisiones con expresiones algebraicas, esto generó que no se pudiera culminar el juego; por este motivo se tomó nota de cuántas casillas le faltaba por completar con la respuesta a cada equipo, de esta forma conocer cuál fue el grupo con mejor desempeño.

Aquí el grupo que más claro tenía la factorización de diferencias de cuadrados era el que más posibilidades tenía de ganar, el azar utilizado era sólo para elegir la carta correcta. Era indispensable tener clara la factorización para ubicar correctamente las tarjetas sobre el tablero, de tal forma que se corriera el menor riesgo posible de equivocarse. Los grupos ganadores jugaron animadamente,

mientras los perdedores en ocasiones se aburrían, por las falencias que aún presentaban.

Los aspectos positivos destacados por los estudiantes fueron los siguientes: “se necesitaba mucha agilidad mental”, “las actividades matemáticas son más chéveres así”, “el movimiento, la recocha, el juego”, “las penitencias fueron muy chéveres”. Entre los aspectos negativos se destacan algunos como: “No todos estuvieron pendientes de su turno y se demoraron”, “hubo mucho desorden e indisciplina” “falta de interés de muchos compañeros de clase”. La actividad les gustó ya que les pareció muy interesante, se rieron bastante, se divertieron, aprendieron mucho y reforzaron algunas operaciones que ya tenían olvidadas.

El grado de dificultad era alto, sin embargo, aunque hubo errores los estudiantes se enfrentaron y se defendieron en el planteamiento de ejercicios, algunos de ellos realizaban las operaciones en forma independiente para luego mirar la respuesta y observar si coincidía con la inscrita en la tarjeta. A los estudiantes les gustó interactuar con sus compañeros, ser jueces, competir entre ellos, trabajar en grupo y la mecánica del juego. Esto muestra según Vigotsky que la interacción social y el papel de los pares son centrales en el aprendizaje, dando lugar a la noción de zona de desarrollo próximo. Dada la importancia que tienen los demás en el aprendizaje de cada participante, las actividades en el aula se basan en el trabajo colaborativo apoyado por herramientas y pares para lo que el profesor debe comunicar normas, valores y prácticas discursivas (ver Cap.1, pág. 9).

En el desarrollo de los juegos, los jóvenes poco a poco se van desarrollando y muestran los verdaderos rasgos de su personalidad o hacen notorias las características de sus compañeros. El profesor cumple un papel importante en la realización del juego, ya que es el encargado de animar, impulsar, retroalimentar y mediar todas las situaciones presentadas, para llevar a los participantes a

conseguir el objetivo propuesto, además se convierte en parte de la actividad y la disfruta tanto como los jugadores.

3.2.5 ¿Quién armó el Rompecabezas y el Mensaje oculto?

Para esta sesión a diferencia de las anteriores diseñamos dos juegos “Rompecabezas” y “Mensaje Oculto”, debido a que la solución de cada una de ellas requería poco tiempo y queríamos aprovechar el entusiasmo y la motivación de los alumnos para desarrollar actividades distintas a las que veníamos realizando.

El objetivo de las dos actividades era desarrollar habilidades en la factorización de la suma o diferencia de cubos perfectos a través de una actividad lúdica realizada en el aula en un ambiente de confianza, libertad y cooperación. Al momento de dar a conocer el tema que se iba a trabajar en esta sesión, los estudiantes mostraron un poco de nerviosismo e inseguridad debido a que no recordaban muy bien como debían factorizar, por esta razón fue necesaria una breve explicación en el tablero donde se usaron algunos ejemplos como: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ y $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Se armaron 11 grupos, cada uno conformado por 4 estudiantes; se les dio a conocer las actividades a realizar, se leyeron las reglas de juego y se explicó como se debía jugar y cual era el objetivo de esta actividad.

Comenzamos con el rompecabezas, en un principio los estudiantes no entendían muy bien que era lo que queríamos con la actividad, ellos sabían que si el juego era un rompecabezas entonces debían armar una figura, pero no sabían qué figura era la que tenían que armar. Nuevamente hicimos uso del tablero para

explicar cómo se podían ir uniendo las fichas que en esta ocasión eran hexágonos y de esta manera poco a poco iba dando forma a una figura.

El juego estaba compuesto por 12 fichas en forma de hexágono y en cada ángulo del hexágono estaba escrito uno de los factores o la suma o diferencia de cubos. Los estudiantes debían acomodar las fichas de tal forma que la unión de cada ángulo del hexágono formara una factorización de una suma o una diferencia de cubos perfectos.

Ejemplo:

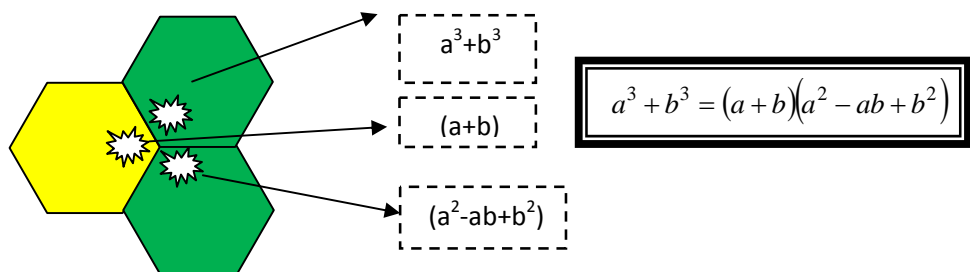


Figura 9. Rompecabezas

Una vez hecha la explicación en el tablero, se entregó el material a cada uno de los grupos y estos comenzaron a jugar. Cabe aclarar que se diseñaron 11 rompecabezas distintos entre sí, de esta forma cuando terminaran de armar un rompecabezas, el grupo debía intercambiar el juego, esto con el fin de adquirir agilidad mental y desarrollar una cantidad considerable de ejercicios.

Al principio no lograban acoplarse para el desarrollo de juego, todos tomaban la misma ficha y buscaban factores que les sirviera pero no obtenían ningún resultado, poco a poco fueron mejorando la forma de trabajo debido a que se repartían las operaciones o tomaban como base del rompecabezas la ficha que mas expresiones tenía (no todas las fichas tenían la misma cantidad de expresiones), en sí esta era la mejor estrategia para el correcto desarrollo de la actividad.



Foto 12 *Estudiantes armando el rompecabezas*

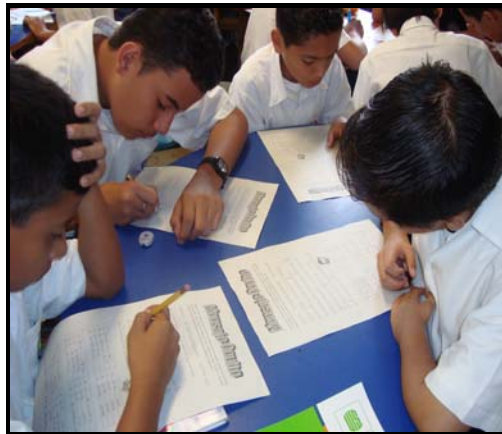


Foto 13. *Estudiantes descifrando el mensaje oculto*

Con el paso de la actividad todos los grupos adquirieron agilidad y destreza en la solución de las operaciones además fue sorprendente ver como cada uno de ellos estaba muy concentrado en el juego; estaban motivados, hubo risas, emoción, entusiasmo, ansiedad, etc., incluso haciendo competencias entre ellos para ver quienes eran los más ágiles a la hora de armar el rompecabezas. Esto concuerda con lo dicho por Bruner “el juego es un formato de actividad comunicativa entre iguales que les permite reestructurar continua y espontáneamente sus puntos de vista y sus conocimientos, mientras se divierten y gozan de la experiencia de estar juntos, e ir labrando el territorio para que nazcan y crezcan amistades interesantes” (Ver Cap.1, pág.9).

Una vez terminada la actividad pasamos a realizar el segundo juego “Mensaje Oculto”. En esta actividad los estudiantes debían factorizar las expresiones dadas. Cada resultado estaba relacionado con un grupo de letras, debían hallarlo y así descubrirían una frase, escribiendo el grupo de letras claves sobre el término que era el factor que completaba cada expresión.

Aprovechamos la organización de los grupos para el desarrollo de esta actividad, solo que en esta ocasión el trabajo era de forma individual, es decir, cada uno de los integrantes debía encontrar un mensaje pero para que hubiese un ganador el grupo completo debía tener desarrollados los cuatro mensajes ocultos.

Hubo un poco de ansiedad, angustia e incertidumbre, pues todos querían ganar y como siempre el factor curiosidad es un punto importante en el desarrollo del juego. Además otro punto importante era que como ya habían trabajado el tema en el juego anterior, presentaron más destreza en la factorización.

En el transcurso de la actividad se pudo observar a los estudiantes que aun presentan falencias y dificultades en la factorización de suma o diferencia de cubos perfectos, pues para poder encontrar los factores algunos trataban de copiar resultados a sus compañeros, pedían ayuda a las profesoras o sencillamente no resolvían el ejercicio ya que el juego daba la opción de no tener que resolver la totalidad de las expresiones, pues con un poco de astucia e ingenio podían poner algunas letras en el lugar adecuado y así completar el mensaje. Este juego posibilitaba a los jugadores rectificar las operaciones, pues si el resultado era incorrecto, este se asociaba a otra letra y posiblemente la palabra a formar carecería de sentido.

Este juego fue desarrollado rápidamente por los estudiantes, cada uno de ellos encontró el mensaje y entre risas y pesares; risas por los que ganaron y pesares por quienes no alcanzaron a completar el mensaje.

3.2.6 Corramos en la Carrera de Observación

Esta fue la última prueba que se les hizo a los estudiantes y se realizó con el fin de indagar qué tanto avanzaron en su proceso de reforzamiento de algunos casos de factorización, después de enfrentarse a una serie de juegos donde se les permitió actuar con libertad, estar en constante movimiento y acción, y lo más importante con una actitud muy diferente a la de las clases normales, pero aprendiendo y enfrentándose a situaciones diarias.

En esta ocasión se realizó una carrera de observación la cual contenía 4 pruebas (Pirámide, Mensaje Oculto 1, Laberinto Matemático y Mensaje Oculto 2) y con las cuales se quería reforzar la suma, resta, multiplicación de polinomios, factor común y despertar el interés y la atención de los estudiantes en el refuerzo del tema trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

Base No. 1

Todos los jugadores partieron del salón de clase donde se les hizo entrega de la primera prueba, "Pirámide". En muchas revistas de pasatiempos aparecen estos acertijos. Se trata de pirámides que se rellenan teniendo en cuenta que el polinomio de cada casilla, es la suma de los dos polinomios que tienen debajo. Pero la que trabajamos en esta ocasión necesita para resolverse recursos del álgebra como la suma, resta y multiplicación de polinomios.

Esta prueba consiste en resolver una serie de ejercicios donde su correcta solución los llevará al siguiente lugar a donde deben desplazarse. Se pudo observar que algunos estudiantes no entendieron de qué se trataba la actividad y se sentían perdidos sin saber que hacer, además no usaron el material correctamente, pues este les daba las instrucciones y los iba guiando paso a paso para desarrollar el juego; muchos de estos problemas se presentaron por falta de

atención a la hora de explicar la metodología, características e instrucciones del juego.

En esta primera parte del juego se pudo observar que aún se presentan dificultades al utilizar apropiadamente la ley de los signos y se presentan falencias en el desarrollo de operaciones como suma y resta de polinomios. En el momento de la planeación de la actividad pensamos que esta prueba se desarrollaría de una forma sencilla y sin mucha dificultad pero a la hora de ejecutar el juego y observar los resultados, se presentó un poco de preocupación por nuestra parte ya que los estudiantes presentaron muchas dificultades en aspectos fundamentales para factorizar un polinomio.

Los grupos que resolvieron correctamente los ejercicios y siguieron las reglas de juego avanzaron a la siguiente base sin dificultades; sin embargo, dos grupos por no comprender las instrucciones y no utilizar el material facilitado se estancaron obligando a las docentes a retroalimentar el proceso. Los demás cometieron errores graves en la suma de polinomios y percibimos que carecen de atención, concentración y presentan dificultades en seguir instrucciones.

Base No. 2

Continuamos con la segunda base donde está la segunda prueba, “mensaje Oculto 1”. A esta base llegaron rápidamente los estudiantes que manipularon el material y contestaron correctamente las operaciones de la prueba anterior.

Aquí se pretende que los estudiantes descifren el mensaje encontrando el factor común en cada una de las expresiones de la tabla. En la parte inferior aparecen cada uno de esos factores. Sobre las líneas debían escribir la letra correspondiente a cada expresión, para después utilizar un código y descifrar el lugar a donde debía ir contando las letras según el número indicado.

En esta segunda base los estudiantes tenían más clara la metodología del juego lo que generó que cada grupo estuviera concentrado en resolver los ejercicios para dirigirse a un nuevo lugar y de esta manera ser los primeros en llegar a la meta.

Como esta prueba era ya conocida por los estudiantes no tuvieron muchas dificultades; los alumnos respondieron bien los ejercicios debido a que factor común es un tema que casi el 90% de los estudiantes lo entiende muy bien. Esta prueba fue la de más rápido desarrollo.

Se observaron algunas conductas entre ellos como: estrés, preocupación, emoción, nerviosismo, etc. Además en toda actividad cuando se conforman grupos numerosos nunca falta el estudiante que no quiere trabajar y solo pretende formar desorden saliéndose del tema, tratando de incomodar aquellos estudiantes que si quieren aportar para el desarrollo del juego.

Base No. 3

La siguiente prueba era un “Laberinto Matemático”; en el cual se presentaban distintos ejercicios donde se les pedía que realizaran distintas operaciones con polinomios y que aplicaran algunos casos de factorización conocidos por ellos. La prueba comprendía diversos temas como: suma y resta de polinomios, factor común, diferencia de cuadrados y trinomio cuadrado perfecto.

Durante el transcurso de esta actividad observamos un poco de desorden y discusiones entre integrantes del grupo debido a que no sabían cómo desarrollar algunos ejercicios propuestos o no recordaban los casos de factorización estudiados anteriormente. Además no tenían muy claro cómo debían llenar el cuadro, es decir, solo se limitaron a mirar el ejercicio y a preguntar a las docentes qué debían hacer sin leer las instrucciones y sin mirar que el mismo diagrama los iba guiando paso a paso.

Esta parte de la actividad fue la que llevo más tiempo en resolverse además los estudiantes requirieron la presencia de las profesoras constantemente ya fuera para despejar dudas o para recordar cómo debían factorizar un polinomio, cuál era su desarrollo, etc. Esto se pudo presentar debido a que los ejercicios no estaban clasificados según un caso específico de factorización como factor común, diferencia de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, etc., además intervienen otros factores como que la actividad se estaba realizando en campo abierto, había mucho ruido, la conformación de los grupos en cuanto a cantidad de estudiantes era numerosa, el estrés y la preocupación por ser los primeros en llegar a la meta, emoción, alegría, etc.

Base No. 4

Esta era la última base, aquí los estudiantes tenían que descifrar un mensaje citado por algún gran matemático de la historia. Como en el mensaje Oculto anterior cada una de las expresiones que aparecía debajo de las líneas correspondía a una expresión faltante de los cuadros. Los estudiantes debían escribir la expresión faltante y poner encima de las líneas la letra correspondiente a la expresión.

En esta actividad por ser la última los estudiantes se encontraban un poco ansiosos porque ya que el juego se estaba acabando, trabajaban lo más rápido posible para ser los ganadores. Esta ansiedad y motivación hizo que algunos grupos cometieran errores en el momento de factorizar los polinomios debido a que no tuvieron en cuenta algunos signos, no multiplicaron bien, no hicieron las sumas correctas y en algunos casos quisieron completar el mensaje sin resolver los ejercicios, es decir, ellos con un poco de sagacidad y queriendo pasarse de listos ponían letras al azar para tratar de darle sentido al mensaje y de esta forma ganar el juego.



Foto 14. Pasando pruebas en la carrera de observación



Foto 15. Finalizando la carrera de observación

El grupo al cual se le asignó el color amarillo fue el primero en llegar a la meta final que estaba situada en el salón de clases; ellos recibieron premios.

La actividad por ser la última y la encargada de reforzar algunos casos de factorización estudiados anteriormente evidenció que aún se presentan falencias y dificultades en algunos estudiantes, cabe aclarar que en algunos casos se presentan más dificultades que en otros. De acuerdo con los resultados, es necesario reforzar a los estudiantes en seguir instrucciones, leer y comprender lo escrito. Además, es importante que el material entregado a los estudiantes sea

utilizado, manipulado con suficiente tiempo y que los estudiantes entiendan las reglas por sí mismos y no necesiten que el docente las diga.

Algunos de los comentarios de los estudiantes fueron los siguientes: “fue muy interesante porque era un juego de pensar, de agilidad, destreza y trabajo en grupo”, “divertido y muy interesante”, “fue un juego diferente a los demás”. También hubo opiniones negativas, algunos comentaron: “fue difícil”, “se presentó un poco de desorden”, “algunos equipos no siguieron las reglas de juego” y un niño en especial dijo “algunos de mis compañeros se entendieron poco conmigo en el juego”.

Con relación a las pistas notamos que los estudiantes, no leen y además les falta ingenio, malicia y atención; sin embargo, trataron de hacer su mejor esfuerzo. Los estudiantes abordaron cada una de las pruebas de buena manera, cada uno trataba por momentos de manipular el material, realizaban las operaciones requeridas y se ayudaban entre todos. En ciertos equipos sólo algunos estudiantes manipulaban el material, sin embargo, sus compañeros aportaban haciéndolos caer en cuenta de los errores cometidos, incluso se presentaron pequeñas confrontaciones.

Al final todos los equipos lograron el objetivo, llegar a la meta. Este juego fue muy emocionante, los jugadores corrieron, se preocuparon por encontrar las pistas y en algunos casos llegaron a exasperarse por no encontrar la solución, pero al final todos llegaron al salón de clase.

Es importante resaltar que en el transcurso de estas actividades se pudo ver además de la motivación de los estudiantes, el interés por asistir a las clases, esto se evidenció al momento de tomar lista. Además se presentaron oportunidades en las cuales los estudiantes prefirieron quedarse desarrollando los juegos

planteados en lugar de realizar algunas actividades deportivas como jugar fútbol o baloncesto.

3.3 Efectividad como proceso del juego

Después de que los estudiantes desarrollaron los distintos juegos propuestos se hicieron socializaciones con los 6 estudiantes escogidos para hacer el análisis de cada una de las actividades y conocer si se habían alcanzado los objetivos propuestos los cuales consistían en evaluar la efectividad del juego en el proceso de reforzamiento y crear en los estudiantes una visión diferente de las matemáticas produciendo mayor motivación y formando un ambiente más agradable para su aprendizaje.

Las preguntas que se realizaron en las socializaciones son de tipo abierto, ya que se intentaba que los estudiantes de una forma verbal lograran expresar detalles más claros acerca del desarrollo de cada uno de los juegos, como se sintieron, cual fue el alcance que lograron desarrollar a partir de sus presaberes por medio de esta investigación.

Las opiniones que expresaron los estudiantes acerca de la pregunta **¿Qué opina de las actividades propuestas para reforzar algunos métodos de factorización?** fueron las siguientes:

❖ **Karen Jazveydy Calderón Moreno**

A mi me gustan las matemáticas y si es con juegos mucho más. A mi me parece chévere que hagan juegos para recordé temas vistos porque eso ayuda a muchos compañeros que las ha ido mal en matemáticas.

❖ **John Breyman Cárdenas Díaz**

Las actividades son chéveres porque me ayudan a recordar temas que ya habíamos visto y yo quiero aprender factorización porque se que estas cosas más adelante me van a servir. Además me parece que la didáctica que están utilizando es buena por que no usan solamente el tablero.

❖ **Diego Mauricio Espinel Ortiz**

Me han parecido chéveres las actividades y me gustaría que se hicieran más actividades en otras áreas. Este método de enseñar me parece muy chévere. Por ejemplo yo quise participar porque me interesa saber más de factorización y de esta forma es mas interesante aprender.

❖ **Karen Vanesa Hernández Herrera**

Las actividades me han gustado porque recordé la factorización. Yo nunca estudie esos temas pero para los juegos si estudie para poder ganar. Para mi las matemáticas son muy aburridas pero las matemáticas con juegos son muy chéveres.

❖ **Mary Luz Sarmiento Plata**

Las actividades me parecen chéveres porque yo quiero aprender más. A mi me gustan mucho los juegos y aunque no me gustan las matemáticas, si es con juegos si es chévere aprender.

❖ **Edward Alveiro Parada Jaimes**

Las actividades me han parecido buenas pues yo quiero aprender cosas nuevas y tener bien clara la factorización. Aunque casi no se la factorización a través de los juegos voy aprendiendo.

Los argumentos anteriores nos permiten deducir que este trabajo contribuyó a fomentar el interés en las matemáticas pues los estudiantes reflejan el agrado que

sintieron durante el desarrollo de las actividades, además se puede ver que este proceso también ayudó a que reforzaran y en algunos casos a recordar la factorización de polinomios, proporcionándoles una mayor claridad en los algoritmos que se deben efectuar para una correcta factorización.

Ahora queríamos saber cual era el juego que más les había llamado la atención a los estudiantes por tal motivo se les pidió hacer un breve comentario de cada uno de los juegos. Los resultados fueron los siguientes:

❖ **Karen Jazveydy Calderón Moreno**

Basquetbol: me pareció muy divertido pero se hizo mucho desorden, me gusto porque recordamos y nos divertimos. Parques: fue algo muy divertido pero falto explicar más el juego y poner más ejercicios al salir de la cárcel.

Domino: me gusto pero deberían haber más ganadores. Lotería: casi no me gusto porque debió ser más ordenado en un lugar amplio, fue divertido porque recordamos y molestamos. Rompecabezas: fue algo como raro porque los colores eran iguales es decir “verde y amarillo” y deberían explicar mas, dar a entender porque mucha gente no entendió, igual en el mensaje.

❖ **John Breyman Cárdenas Díaz**

Basquetbol: estuvo muy desordenado, pero me sirvió para poner a prueba mis conocimientos respecto a los temas. Parques: fue una actividad agradable y divertida, y nos dio la oportunidad de crear estrategias para no solucionar ejercicios. Domino: este juego fue el que mas me gusto porque para seguir jugando debíamos ir desarrollando los trinomios correspondientes. Lotería: fue la actividad que menos me gusto, se formo desorden y bullicio que entorpecieron el desarrollo del juego. Rompecabezas: fue un juego muy original aunque al principio me encontraba confundido después, me agrado continuar con la actividad.

❖ **Diego Mauricio Espinel Ortiz**

Basquetbol: lo que me gusto de esta actividad fue que me ayudo a reforzar lo que no sabia de este tema y también los premios. Parques: lo interesante de este juego fue que no se sabía quien va ganar. Domino: pues este juego me pareció muy chévere porque los premios estaban muy interesantes. Lotería: en este juego hubo mucho desorden y no hubo premios pero de todas formas estuvo chévere

❖ **Karen Vanesa Hernández Herrera**

Basquetbol: me pareció muy simple no aprendí nada porque no nos hicieron esforzarnos y también el ambiente al aire libre permitió mucha trampa y pues a mi me gusta mas inclinarme a los juegos de mesa. Parques: me hicieron recordar temas que yo no había entendido muy bien, además me ayudo a que me esforzara en el área de matemáticas donde sinceramente no estaba muy animada. Domino: fue el juego que mas me gusto porque además que el tema era muy fácil es un juego muy original donde estimula y desarrolla mucho la mente. Rompecabezas y el mensaje: estuvo muy original y armándolos con mis compañeros me sentí bien porque había despejado dudas que tenia sobre este tema. Lotería: estuvo muy bueno aunque se fomente discordia y trampa. No aprendí profundamente como en el parques.

❖ **Mary Luz Sarmiento Plata**

Basquetbol: Fue un juego donde pusimos a prueba nuestros conocimientos y donde nos pudimos divertir también. Parqués: En este juego nos divertimos mucho, trabajamos en equipo ayudándonos unos a otros. Dominó: En este juego pude recordar y entender más el tema ya que no lo entendía muy bien. Lotería: En este juego pude recordar el tema y aclarar dudas que tenia. Rompecabezas: este fue un juego corto pero muy

chévere, en este juego pudimos aclarar mejor el tema. Mensaje: este juego nos dio la oportunidad de trabajar en equipo ya que nos pudimos ayudar unos con otros.

❖ **Edward Alveiro Parada Jaimes**

Basquetbol: este juego no me gusto porque cada quien trabajaba en lo que quería, además yo soy malo para encestar y casi no gane premios. Parques: fue una actividad muy bonita, lo que quisiera que se volviera a realizar actividades así como estas. Domino: este juego me fascino, ver que un juego que es muy conocido se puede utilizar para reforzar trinomio cuadrado perfecto. Lotería: a pesar que estas actividades son muy buenas para reforzar, en este caso seria bueno que cambiaran un poco la metodología del juego para que así los estudiantes se motiven. Rompecabezas y mensaje oculto: las actividades o los juegos fueron precisas para reforzar este tema.

Los argumentos anteriores nos permiten deducir que estos seis estudiantes les agrado mas el juego del dominó, a pesar que no se podía crear estrategias para su desarrollo.

Otra forma de evidenciar que el trabajo de investigación alcanzó el logro trazado se observa en el análisis del desarrollo del juego, de los resultados obtenidos en cada una de las actividades, en las dificultades que se presentaron y en la emotividad de cada uno de los participantes.

En este apartado vamos analizar si los juegos que se aplicaron en los respectivos temas fueron eficientes y qué dificultades se presentaron en el desarrollo de cada uno de ellos. También si el juego fue efectivo como proceso de reforzamiento, y por último si alcanzamos los objetivos planteados en los juegos.

Para el análisis de los juegos se tendrá en cuenta la forma como los estudiantes resolvieron cada uno de los ejercicios que se presentaron en las distintas actividades, las diferentes respuestas que se presentaron, los errores que se cometieron y la actitud de cada uno frente a las actividades propuestas. Cabe resaltar que no buscamos respuestas correctas, todo lo contrario, es muy importante analizar la forma en que los estudiantes abordan los ejercicios y les dan solución.

Hay que aclarar que durante el desarrollo de las actividades, algunos de los estudiantes participantes mostraron mejor desempeño que otros, por tal motivo analizaremos las respuestas de cada uno de los 6 estudiantes, queriendo con esto no solo mostrar las cosas que se pueden lograr con la metodología que se está aplicando si no también los errores en los cuales se puede caer en la factorización de los polinomios.

3.3.1 La importancia de la actividad diagnóstica

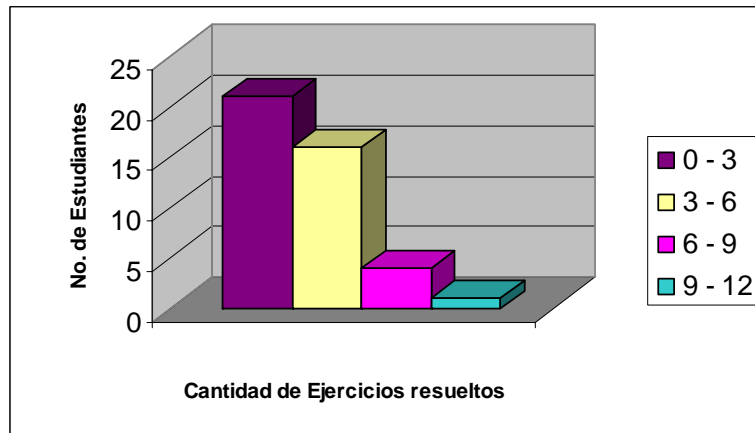
Para demostrar que la prueba diagnóstica alcanzó el logro trazado nos podemos remitir a los objetivos propuestos para esta actividad los cuales se basaban en observar los conocimientos previos de los estudiantes respecto a los temas que íbamos a trabajar y despertar el interés por las matemáticas con la ayuda de juegos.

Como es evidente, en cualquier actividad que sea desarrollada fuera del salón de clase no dejan de presentarse ciertas dificultades; esta actividad no fue la excepción, aquí nombraremos algunos factores que obstaculizaron un poco la actividad en cuanto a la disciplina y a la motivación de los estudiantes. Estos factores fueron los siguientes:

- Tiempo de la prueba. El tiempo para realizar esta prueba fue de 1 hora y 45 minutos, pero este no fue suficiente debido a que nos veíamos cortas de tiempo a la hora de revisar los ejercicios a cada estudiante. Hubo algunos momentos en que a los estudiantes les toco hacer fila para que les revisaran los problemas, esto ocasionó la deserción de algunos de ellos en cuanto a la resolución de los problemas propuestos.
- El nivel de las preguntas. Aunque esta prueba fue creada con base en el conocimiento académico de los estudiantes es indiscutible que al no tener claro los casos de factorización, los resultados no serian los mejores.
- Indisciplina. Algunos de los estudiantes aprovecharon la actividad para realizar trabajos de otras áreas o para realizar tareas que no eran necesariamente relacionadas con el juego que se estaba desarrollando.

Ahora vamos analizar los resultados obtenidos en la solución de cada uno de los ejercicios desarrollados por los estudiantes. Para el análisis cuantitativo de esta actividad creamos cuatro categorías: En la primera categoría (morado) estarán los estudiantes que resolvieron entre 1 y 3 ejercicios, en la segunda categoría (amarillo) los que estén en el intervalo de 3 a 6, en la tercera categoría (fucsia) los de 6 a 9 ejercicios y en la cuarta categoría (azul) los de 9 a 12 ejercicios.

En la siguiente gráfica podemos observar la cantidad de estudiantes en las distintas categorías.



Gráfica 1. Estudiantes por categorías en la prueba diagnóstica

Observando la gráfica, en la categoría cuatro (azul) hay solamente un estudiante que desarrolló entre 9 y 12 ejercicios mientras que la mayoría de los estudiantes resolvieron alrededor de 3 ejercicios. Los anteriores resultados se pudieron presentar por los factores anteriormente mencionados como la falta de tiempo y el nivel de las preguntas pero también pudo influir la motivación de los estudiantes por la actividad que se estaba realizando, pues en la siguiente sesión pudimos constatar que a muchos de los niños no les gusta el baloncesto, a otros les daba pena hacer el ejercicio y que los corrigieran, otros no tenían noción de cómo resolver algunos ejercicios entonces tomaban la decisión de no participar, etc.

Finalmente, de acuerdo con lo evaluado en el desarrollo del juego, tanto la actitud y motivación así como un estudio cuidadoso de los resultados de los ejercicios desarrollados por cada uno de los estudiantes y teniendo en cuenta los factores anteriormente mencionados podemos concluir que a pesar de las dificultades, se pudo observar a través de la prueba diagnóstica en qué estaban fallando cada uno de los estudiantes, cuáles eran los casos de factorización en los cuales presentaban más dificultades y cuáles eran más asequibles para ellos. También logramos ver cómo trabajaba cada estudiante, qué algoritmos usaba, como desarrollaba cada uno de los ejercicios y cómo se relacionaba con sus

compañeros, ya que este juego permitía ver la interacción social de los estudiantes y el entorno en el que se desenvuelve.

Observación: Una de las recomendaciones que podíamos tener en cuenta para que no se genere un poco de indisciplina es que el juego sea conocido con anterioridad por los estudiantes, describiendo el diseño, la metodología y las reglas para que los estudiantes tengan claro cómo se va a desarrollar la actividad y despejen las dudas que tengan respecto de este. También se debe tener cuidado con la metodología que se va aplicar y tener en cuenta los diversos factores que se pueden presentar en una actividad de campo.

3.3.2 Resultados en el parqués

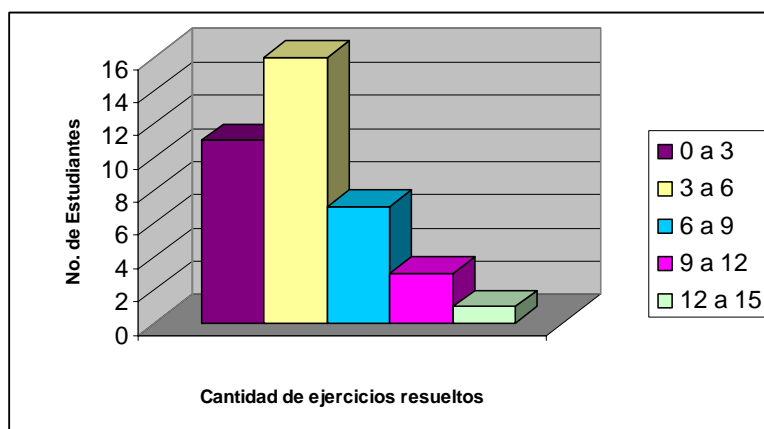
Para justificar que el parqués alcanzó uno de los objetivos propuestos para esta actividad nos basamos en la motivación, interés y atención que mostraron los estudiantes en el transcurso de la actividad. Esta fue divertida e interesante debido en parte al juego que se utilizó para esta sesión, un parqués tradicional. Este fue uno de los juegos que más les gusto a los alumnos debido al diseño del parqués, a la metodología, reglas y claro los premios. Cabe mencionar otro aspecto importante y es la experiencia que vivieron, pues esta es diferente a la que tradicionalmente se ve en el aula de clase, es decir, tratar de ver las matemáticas de una forma más dinámica y entretenida, dejando a un lado el tablero y centrándonos en un juego que nos ayude a obtener en los estudiantes un aprendizaje eficaz.

Mirando el proceso de refuerzo que se dio durante el desarrollo del juego podemos citar algunos factores que nos dejan ver que la actividad no fue totalmente efectiva. Esos factores fueron: En primer lugar, los estudiantes podían ingeniar y crear estrategias para evitar resolver ejercicios, ya que estos se

presentaban únicamente en las casillas “SALIDA” y “SEGURO”. Estas estrategias podían ser avanzar y retroceder las fichas para no caer en las casillas anteriormente mencionadas. En segundo lugar, algunos de los ejercicios solucionados por los estudiantes estaban mal factorizados y sin embargo los pasaron por alto o simplemente no se dieron cuenta del error que estaban cometiendo y continuaron el juego. En tercer lugar, no obtuvimos una cantidad considerable de ejercicios resueltos, debido a que los estudiantes trataban de quedar en las casillas donde no tenían que resolver ejercicios.

Ahora vamos a analizar los resultados obtenidos en la solución de cada uno de los ejercicios desarrollados por los estudiantes. Para el análisis cuantitativo de esta actividad creamos cinco categorías: En la primera categoría (morado) estarán los estudiantes que resolvieron entre 1 y 3 ejercicios, en la segunda categoría (amarillo) los que estén en el intervalo de 3 a 6 ejercicios, en la tercera categoría (azul) de 6 a 9 ejercicios, en la cuarta categoría (fucsia) los de 9 a 12 ejercicios y en la quinta categoría (verde) los de 12 a 15 ejercicios.

En la siguiente gráfica podemos observar la cantidad de estudiantes en las distintas categorías.



Gráfica 2. Estudiantes por categorías en el parque

Observando la gráfica, podemos ver que solo hubo un estudiante que realizó catorce ejercicios referentes a factor común y lo más importante es que la solución de ellos fue correcta pero a pesar de esto, esta persona no logró ganar el juego. Caso contrario ocurrió con otro estudiante que resolvió solo tres ejercicios de los cuales solo uno le quedó bien resuelto y este sí ganó el juego.

Otro aspecto que podemos ver es que la mayoría de los estudiantes resolvieron entre 3 y 6 ejercicios, estos son una cantidad insignificante, además si contamos con que todos los ejercicios no estaban factorizados correctamente. Cabe aclarar que además de motivar a los estudiantes con el parque también se quería que ellos resolvieran el mayor número posible de ejercicios y así reforzar este caso de factorización. Los anteriores resultados se obtuvieron debido a las tácticas que utilizaron los estudiantes para no resolver ejercicios; moviendo muy bien las fichas y así avanzar y terminar el juego rápidamente, además al analizar los resultados en general, fue preocupante para nosotras ver las fallas que aun estaban cometiendo.

Algunos de las dificultades fueron:

- Máximo común divisor de números naturales, decimales y racionales
- Propiedades de la potenciación
- Operaciones entre números fraccionarios
- Operaciones entre números enteros y números fraccionarios

En la siguiente figura se presentan los 70 ejercicios de factor común

FACTOR COMÚN 8-7

esto

① $x^2 + 4x$	②⑤ $+xy^2 - 9x^2y$	④⑧ $\frac{18}{4}x^2y - \frac{9}{16}xy^2$
② $36x^2z^4 + 60x^3y^2z$	⑥ $8b^3m^2 + 32bm + 6bm^2$	⑨ $30m^2 - 100m^6 - 80x$
③ $5a - a^2 + a^3$	⑦ $-3x^2y + 12x^2y$	⑩ $3b^4 + 6b + 9b^3 - 12b^4$
④ $3a^2b + 2a^2b$	⑪ $3x^3y^2 + 9x^2y^2 - 18xy^2$	⑫ $5x^2y^4 - 25x^2y^2$
⑤ $7xy^2 - 2xy^2 + xy^2$	⑬ $5abc^2 - 10ab^2c - 25a^2b$	⑭ $2x^2 - 6x^2 + 4x^3$
⑥ $4x^2y + 2xy$	⑮ $16m^2np + 4mnp - 8m$	⑯ $18a - 24b + 9c$
⑦ $6x - 18y - 9$	⑰ $18x^2y - 9x^2y + 27x^2y$	⑲ $12a^4b^2 + 6a^2b^4$
⑧ $4x^2 - 2xy$	⑳ $26a^4 - 39a^3x + 13a^2$	㉑ $12x^3 + 26x^2$
⑨ $4x^2y^3 + 8x^2y^2 - 16x^2y$	㉒ $5x^2y^4 - 34xy^4 - 17x$	㉓ $81a^4b^6 - 36a^6b^2$
⑩ $3x^2y - 2xy + 5x^2y^4$	㉔ $max + mby + mbx$	㉕ $25x^2 + 30x^2 - 40x^4$
⑪ $ax + by - bx^2$	㉖ $16x^2y^2 - 8xy$	㉗ $4a^3b^3 - 16a^3b^7$
⑫ $5a - 3ab$	㉘ $7m^2n^2 - 14mn^2 + 5m^2n^2$	㉙ $2ac - 12ad + 24ac$
⑬ $2a + 2b$	㉚ $64a^4b^5 - 16a^3b^4 + 32a^2b^3$	㉛ $21mn^3 + 27m^3n^2$
⑭ $4x^2y + 8x^2z^2$	㉜ $25m^2n^2 - 50mn + 75m^2n$	㉝ $0,8a^3b^2 + 0,6a^2b^5$
⑮ $r^5 + 4st$	㉞ $24x^2 - 36x^2 + 144xy$	㉟ $2,2p^2q^2 + 3,3p^3q^2$
⑯ $4u^2 - 2uv$	㊱ $33a^2b^3 - 22ab + 12a^4b^3m$	㊲ $15xy^4 + 30x^2y^3$
⑰ $3a^2b^2 - 6a^2b$	㊳ $5x^2m + 10x - 25x^3$	㊴ $100p^2q^5 + 14p^2q^4 - 18p^2q^3$
⑱ $10xy + 15xy^2$	㊵ $42mn + 49m^2 + 9n^2$	㊶ $7p^3q^4 - 14p^2q^4 + 12p^2q^3$
⑲ $30x^2y^2 - 15xy^2$	㊷ $18a^2b + 6abc$	㊸ $21a^4b^3 - 15a^3b^4 + 9a^2b^5$
⑳ $-8a^2bc - 4abc$	㊹ $\frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{2}{8}a^2b^3 - \frac{1}{50}a^2b^5$	
㉑ $8t^2 - 64$	㊺ $\frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{2}{8}a^2b^3 - \frac{1}{50}a^2b^5$	
㉒ $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$	㊻ $\frac{1}{2}ab + \frac{2}{8}b^2 - \frac{1}{8}ab^2$	
㉓ $xy + 3xy^2$	㊼ $25r^3s^2 + 5r$	
㉔ $100^2c - 2c$	㊽ $15a - 25b$	㊾ $x^2 + xy + xy^2$

Figura 10. Ejercicios de factor común

En el desarrollo del juego vimos el interés que mostraron cada uno de los estudiantes mientras jugaban parqués, ya que olvidaban que estaban en el aula de clase reforzando los conocimientos previos que se tenían acerca de factor común y se entretenían jugando unos con otros, explotando su capacidad de pensamiento y razonamiento.

En conclusión, de acuerdo con lo valorado en el desarrollo del juego, tanto la disposición como la motivación así como un análisis cuidadoso de los resultados

desarrollados por cada uno de los estudiantes y teniendo en cuenta los factores anteriormente mencionados podemos concluir que se cumplió solamente con un objetivo el cual era alcanzar nuevos métodos didácticos de aprendizaje para que el estudiante muestre interés en las matemáticas, pero no se logró utilizar este juego como recurso didáctico para reforzar factor común debido a las dificultades mencionadas anteriormente.

Observación: Si deseamos en otro momento utilizar este juego como método de reforzamiento se podrían hacer algunos cambios en la metodología para que los estudiantes no utilicen estrategias que eviten la solución de ejercicios.

3.3.3 Explorando con el Dominó

El Dominó fue uno de los juegos más completos en cuanto a la metodología, temática, reglas, procedimientos, resultados, etc. La afirmación anterior se basa en los conocimientos que debían ejercitar los estudiantes durante el desarrollo de la actividad ya que la solución correcta de los ejercicios era necesaria para el adecuado funcionamiento del juego. Además, con este juego se logró la motivación, el interés, la atención, satisfacción y alegría por parte de los alumnos.

Cuando les presentamos el juego que desarrollaríamos en esta sesión, los estudiantes se mostraron sorprendidos, pues no comprendían como un juego tan coloquial como el dominó podría ser utilizado en una clase de matemáticas. La incertidumbre y la expectativa generada en los estudiantes fue uno de los puntos a favor pues cuando les entregamos el juego, empezaron a observarlo y a mirar las características de este.

El juego hay que practicarlo relativamente próximo al momento en que se introduce el tema, ya que se espera que los estudiantes presenten un nivel

relativamente alto de conocimientos previos, para que no se generen algunas dificultades como las siguientes:

Es más difícil para el estudiante pasar del desarrollo del trinomio cuadrado perfecto a la factorización. Ejemplo: $a^2 + 2ab + b^2 \xrightarrow{\text{pasar } a} (a + b)^2$

Confusión de signos. El estudiante olvida que en el desarrollo del T.C.P se tiene en cuenta el signo que aparece en el binomio. Ejemplo: $(a - b)^2 \xrightarrow{\text{error}} a^2 + 2ab + b^2$

Los estudiantes presentan dificultad cuando se les presenta la factorización del trinomio cuadrado perfecto de la siguiente manera $(5 - 2x)^2$. En este momento presentan dudas y en algunas ocasiones no lograron hacer correctamente el desarrollo.

Los estudiantes se mostraron satisfechos y alegres debido a que durante la clase de matemáticas se divirtieron, además recordaron algunas propiedades que ya tenían olvidadas. Los niños que en un principio se les dificultó el juego se mostraron contentos debido a que pudieron desarrollar los ejercicios de manera eficaz e incluso algunos de ellos ganaron algunas partidas del juego.

Consideramos que en esta actividad no se presentaron inconvenientes, aunque para aplicarla nuevamente se debe tener cuidado con la duración de la actividad, ya que este juego se desarrolla rápidamente.

En definitiva, de acuerdo con lo visto en el desarrollo del juego, tanto el interés como la motivación así como los resultados desarrollados por cada uno de los estudiantes podemos concluir que se cumplió a cabalidad con el objetivo propuesto que era reforzar la factorización de trinomios cuadrados perfectos

inclusive también se logró estimular la curiosidad, el esparcimiento, la diversión y afinidad hacia las matemáticas.

3.3.4 Eficiencia en la lotería algebraica

La lotería algebraica fue un juego que no cumplió con nuestras expectativas debido a las dificultades que se presentaron en cuanto al diseño, metodología, temática, reglas, procedimientos, resultados, motivación, interés, etc.

Durante la realización de la actividad se presentaron algunos factores que dificultaron el desarrollo de esta y por ende su finalidad. Algunos de estos factores fueron:

- Los presaberes de los estudiantes eran inconsistentes para el desarrollo del juego, lo que ocasionó los siguientes resultados.
- Cuando a los estudiantes se les presenta una diferencia de cuadrados que incluye números fraccionarios dudan mucho de la respuesta y en algunos casos no logran obtener el resultado correcto.
- El estudiante tiene dificultad cuando la factorización presenta más de dos términos en cada factor. Ejemplo: $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$
- Cuando los coeficientes son números grandes, los estudiantes se atemorizan y no hacen las operaciones para hallar la raíz. Ejemplo: $196x^2y^2 - 225z^{12}$

Además de las dificultades que se reflejaron a la hora de factorizar también se presentaron problemas en la organización de la actividad.

Cada grupo estaba conformado por 6 estudiantes lo que dificultó la organización del juego pues esto generó un poco de desorden, indisciplina y baja concentración.

Como el juego tenía una secuencia donde cada grupo debía esperar el turno asignado, esto generó que los estudiantes realizaran otras actividades distintas a las que se estaba desarrollando.

El juego fue un poco extenso y esto produjo un poco de tedio y aburrimiento entre los estudiantes. No logramos explorar la imaginación, la creatividad, el pensamiento matemático y desde luego, captar el interés y la motivación de los estudiantes debido a la indisciplina, desorden y bullicio que se presentó en el desarrollo de la actividad.

La lotería algebraica era un juego en el cual la solución de los ejercicios hacia parte del juego, es decir, para poder ganar el juego, el estudiante debía reconocer ya fuera la factorización o el desarrollo de esta en las tarjeas que sacaba aleatoriamente, de esta manera podría llenar el cartón que tenía cada grupo y así ganar el juego.

Es importante resaltar que a pesar de los inconvenientes que surgieron durante la actividad, las penitencias que estaban incluidas en algunas tarjetas del juego ayudaron a que el grupo se divirtiera un poco y se afianzaran algunos lazos de compañerismos existentes en el aula de clase.

Observación: La persona interesada en aplicar este juego como proceso de refuerzo debe dedicarle un tiempo favorable para el diseño, los materiales, las reglas y la metodología. Además, debe tener en cuenta el número de los estudiantes para asignar los grupos que no sean tan numerosos.

Especulamos en la asignación del tamaño de los grupos y en la metodología a implementar; pensamos que si para cada grupo se hubiera diseñado una lotería algebraica con sus respectivas piezas, tal vez el juego hubiera cumplido con los objetivos propuestos.

3.3.5 Construyendo el rompecabezas y el mensaje oculto

Rompecabezas

En esta actividad los estudiantes desarrollaron habilidades en la factorización debido a que la solución de los ejercicios hacía parte del desarrollo del juego, además, se resalta el trabajo cooperativo, la concentración, la motivación, la disposición, la comprensión, la atención y el interés de cada grupo mientras transcurría la actividad.

En este juego no podemos hacer un estudio cuantitativo debido a que la solución de los ejercicios era parte del desarrollo del juego, pero si vamos hacer algunas observaciones con base en la solución de los ejercicios y a las actitudes mostradas por los estudiantes en el transcurso del juego.

Las dificultades en este juego se presentaron debido a los siguientes factores:

Cuando los coeficientes de la diferencia de cubos eran números muy grandes los estudiantes sabían que en el primer factor van las raíces cúbicas del binomio pero al momento de escribir el segundo factor olvidaban que en el primer término se escribe la raíz al cuadrado, luego el producto de las raíces y después el cuadrado de la segunda raíz: $729x^3 - 343y^3 = (9x - 7y)((9x)^2 + (9x)(7y) + (7y)^2)$

Al comienzo de la actividad fue un poco difícil armar el rompecabezas porque no reconocían muy bien los factores de la suma o diferencia de cubos, pero poco a poco y durante el transcurso del juego fueron adquiriendo agilidad y destreza en el momento de factorizar.

En el transcurso de la actividad se pudo observar el trabajo cooperativo entre cada uno de los estudiantes, pues todos los integrantes del grupo eran parte activa del juego y si uno de ellos presentaba alguna duda, sus compañeros le colaboraban para que se unieran las fichas correctas. Además es importante resaltar la concentración y el interés de los grupos de trabajo en el desarrollo de la actividad. Es importante tener en cuenta que el desarrollo de este fue rápido, ágil, divertido y cada vez que un grupo armaba una figura se podía ver el entusiasmo y la alegría que esto generaba.

En este juego se pudo ver la motivación, concentración, disposición, comprensión, atención y alegría en cada uno de los grupos. Para nosotras fue motivante ver como los grupos terminaban rápido de armar un rompecabezas y ya querían que otro grupo les pasara un juego y así armar una nueva figura. Esto mostró nuevamente que los estudiantes desarrollaron un número significativo de ejercicios y prácticamente sin notarlo.

Mensaje oculto

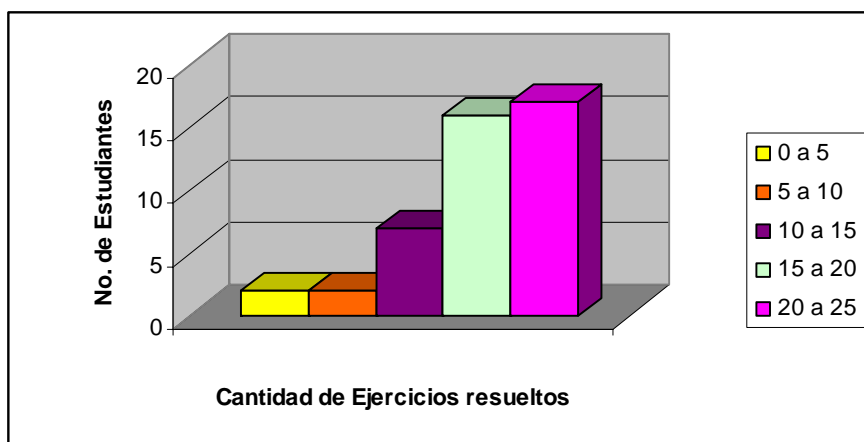
El mensaje oculto fue un juego que surgió en primera medida como una actividad para reforzar el rompecabezas, por tal motivo decidimos diseñar un juego que reforzara el mismo tema pero que tuviera una metodología diferente.

El juego fue atractivo, incitando el interés y la curiosidad por descifrar el mensaje.

En este juego el estudiante podía rectificar las operaciones, pues si el resultado era erróneo este asociaba el resultado a otra letra y la palabra a formar carecía de sentido. Para descifrar el mensaje, el estudiante tenía que resolver una cantidad considerable de ejercicios.

Ahora vamos analizar los resultados obtenidos en la solución de cada uno de los ejercicios desarrollados por los estudiantes. Para el análisis cuantitativo de esta actividad creamos cinco categorías: En la primera categoría (amarillo) estarán los estudiantes que resolvieron entre 1 y 5 ejercicios, en la segunda categoría (naranja) los que estén en el intervalo de 5 a 10 ejercicios, en la tercera categoría (morado) de 10 a 15 ejercicios, en la cuarta categoría (verde) los de 15 a 20 ejercicios y en la quinta categoría (fucsia) los de 20 a 25 ejercicios.

En la siguiente gráfica podemos observar la cantidad de estudiantes en las distintas categorías.



Gráfica 3 Estudiantes por categorías en el mensaje oculto

Observando la gráfica, podemos ver que la mayoría de los estudiantes resolvió entre 15 y 25 ejercicios, esto muestra que este fue un juego en el que además de descubrir el mensaje, también se logró masificar el desarrollo de una cantidad significativa de polinomios. Estos resultados se pudieron generar debido a que en la actividad anterior se había reforzado el mismo tema solo que con una actividad diferente.

En este juego se necesitaba agilidad mental, astucia, observación, estrategia, memoria, y otras habilidades que los estudiantes iban adquiriendo durante el

desarrollo del juego. Fue un juego rápido, ágil, entretenido, lleno de emoción, divertido y alegre.

Como podemos ver, en las dos actividades se presentaron muy pocas dificultades, esto pudo ser debido a que los estudiantes estaban trabajando en grupo y si alguno de ellos tenía una duda o presentaba una dificultad, estaba su compañero para ayudarlo y aclarar cualquier problema que se presentara con la factorización de la diferencia de cubos. Por las anteriores razones podemos asegurar que estos juegos cumplieron con el objetivo propuesto el cual consistía en desarrollar habilidades en la factorización de la suma y diferencia de cubos.

Observación: Algunas recomendaciones que sugerimos para un próximo desarrollo de este juego es que el mensaje a descubrir no sea fácil de descifrar, ya que esto puede generar que los estudiantes no desarrollen una cantidad considerable de ejercicios. Así mismo sería bueno añadir una regla en la que se exponga que además de completar el mensaje, se desarrollen la totalidad de ejercicios propuestos.

3.3.6 Eficacia de la Carrera de Observación

Esta actividad por ser la última que realizaríamos fue la actividad más extensa donde queríamos evaluar algunos temas reforzados anteriormente y reforzar el tema que nos faltaba.

Como se mencionó anteriormente, la carrera de observación estaba compuesta por cuatro bases o pruebas. En cada una de ellas se presentaban distintas situaciones donde solucionados correctamente este los iba guiando en sus desplazamientos y llegarían a la meta.

A continuación mencionaremos algunos aspectos que se presentaron en el desarrollo de cada prueba:

- Algunos estudiantes en la prueba de la pirámide presentaron dificultades en la suma, resta y multiplicación de polinomios. Además presentan problemas con la ley de los signos y los signos de agrupación.
- En el mensaje oculto 1 los estudiantes no presentaron ninguna dificultad en la solución de los ejercicios ya que en primer lugar el tema a trabajar era factor común y en segundo lugar ellos ya conocían la metodología del juego.
- En la prueba del laberinto matemático se presentaron dificultades debido al diseño de la prueba, es decir, los estudiantes no tenían claro cómo debían llenar el diagrama y esto dificultó la solución del juego y por ende el desarrollo de los temas propuestos en este (trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, suma y resta de polinomios). En esta base los estudiantes necesitaron apoyo de las profesoras debido a que algunos de ellos presentaban dudas inclusive discutían con sus compañeros acerca de los posibles resultados que podían obtener.
- En la última prueba (mensaje oculto 2) se quería reforzar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$. En la solución de esta prueba se pudo notar que a los estudiantes se les facilita más partir de los dos factores y llegar al trinomio. Ejemplo: $(10n - 3)(2n + 5) \rightarrow 20n^2 + 44n - 15$. Pero en general no se presentaron problemas significativos, los estudiantes factorizaron correctamente los polinomios y encontraron la meta.

Con este juego se pudo observar que algunos estudiantes presentan dificultades en las cuatro operaciones fundamentales con los polinomios y en la ley de los signos. También se pudo ver que aún se presentan falencias y dudas en algunos casos de factorización, pero es importante aclarar que a través de cada una de las

pruebas los estudiantes lograron reforzar los presaberes que habían adquirido en el aula de clase, ya que estos eran necesarios para la continuación del juego.

Con esta actividad se pudo fomentar el interés y el entusiasmo de los estudiantes debido a que ellos nunca habían participado en una carrera de observación donde el trabajo en equipo fuera parte indispensable de este, pero si evaluamos el refuerzo que se pretendía realizar podemos concluir que logramos este objetivo solo en algunas bases como pirámide, mensaje oculto 1 y mensaje oculto 2. En la base de Laberinto matemático debido a las dificultades que se presentaron no podemos constatar que se cumpliera satisfactoriamente con el objetivo propuesto.

Observación: El juego debe ser aplicado en el lugar y hora oportuna, para que no se presenten distractores en su desarrollo. Este juego debe ser anunciado con anterioridad a los estudiantes para que conozcan el diseño, las reglas y la metodología. Tener en cuenta el tiempo que se va asignar a la actividad.

CAPÍTULO 4

Propuesta didáctica para el refuerzo de espacio vectorial con producto interno en el área de álgebra lineal

La dificultad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación superior ha sido el centro de muchas investigaciones en nuestro país, en diferentes medios de comunicación como: la televisión, la radio, y el periódico.

Los estudiantes con bajo rendimiento escolar en las carreras de pregrado se quejan porque algunos maestros no buscan nuevas estrategias que puedan generar en ellos un aprendizaje significativo, este se conforma con dar su clase de matemáticas y los estudiantes con recibir la información. Los estudiantes no aprenden matemática; aprenden algoritmos, fórmulas y algunas reglas sin sentido que con mucha facilidad olvidan. Los alumnos universitarios tienen grandes carencias no solo en la cantidad, calidad y eficacia de conocimientos, sino aun más importante, en la capacidad de interpretación de esos conocimientos.

El aprendizaje del álgebra lineal por su carácter abstracto y formal, resulta difícil para una parte de los estudiantes, además por todos es conocido que el álgebra es una de las áreas que más incide en el fracaso de la vida universitaria.

Los docentes necesitan transformarse para que sus educandos también lo hagan; esto se logra desde el interior del aula de clase; a partir de la motivación del maestro por generar el cambio y de la invención continua de estrategias metodológicas que ayuden a cumplir con las metas actuales de la educación.

Por muchas de las razones mencionadas anteriormente, nos preguntamos si estos juegos se podían aplicar para estudios superiores. A raíz de esta pregunta fue que surgió la idea de realizar uno de los juegos que ya se habían aplicado para

reforzar los casos de factorización. Pensamos en el tangram que es un rompecabezas con el cual se puede armar distintas figuras, pero implementando una metodología acorde al nivel en el cual se iba a desarrollar (reglas, diseño y tipos de materiales).

En este capítulo se pretende, presentar una solución que contribuya al refuerzo de diferentes temas de matemáticas y dejar abierta la posibilidad de seguir desarrollando proyectos de investigación referentes al juego y las matemáticas en la educación superior.

A continuación van a encontrar el rompecabezas aplicado para el refuerzo del tema espacio vectorial con producto interno que se dicta en el curso de algebra lineal en la UIS sede Socorro.

OBJETIVOS

Mostrar que se puede implementar juegos como el rompecabezas para reforzar temas referentes a las matemáticas en estudios superiores.

Mostrar que las matemáticas en la universidad se pueden ver también de una forma didáctica, participativa y divertida.

Dejar abierta la posibilidad de seguir desarrollando proyectos de investigación relacionados con el juego y las matemáticas a cualquier nivel.

En la siguiente definición se supone que el producto interno es un número real.

DEFINICION Espacio con producto interno

Un producto interno definido sobre un espacio vectorial $(V, R, +, \cdot)$ es una función definida sobre el producto cartesiano $V \times V$ en R ,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow R \\ (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

Que cumpla con las siguientes condiciones:

$$\langle v, v \rangle \geq 0$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \text{ si y solo si } v = 0$$

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

TRABAJO PRÁCTICO. ESPACIO VECTORIAL CON PRODUCTO INTERNO

La siguiente actividad se desarrolló en la Universidad Industrial de Santander, Sede Socorro para estudiantes de pregrado en la asignatura Álgebra Lineal II.

Tuvimos en cuenta para el desarrollo de esta actividad el Tangram que es un juego chino muy antiguo, consistente en formar siluetas de figuras con las siete piezas dadas sin solaparlas. Las 7 piezas, son las siguientes:

5 triángulos de diferentes tamaños

1 cuadrado

1 paralelogramo

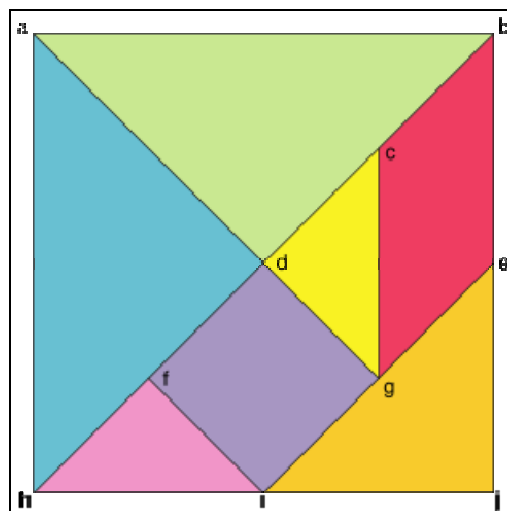


Figura 11 Tangram

Diseño

Para la elaboración del Tangram se tomaron como base 3 espacios vectoriales: R^2 , R^3 y $P_2[x]$. A cada espacio vectorial se le hizo corresponder una figura distinta con las fichas del Tangram: a R^2 figura del gato, a R^3 la letra E y a $P_2[x]$ una flecha.



Figura 12 Figuras elaboradas a partir del tangram

Cabe aclarar que para cada espacio vectorial se diseñó una guía que contenía seis enunciados problemas, donde la solución de cada uno de ellos nos llevaba a armar el rompecabezas:

Trabajo Práctico. Espacios con Producto Interno

Sean $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ Vectores en \mathbb{R}^2 . Determinar cual de las siguientes funciones es producto interno en \mathbb{R}^2 .

- $\langle x, y \rangle = x_1|y_1| + x_2|y_2|$
- $\langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2$
- $\langle x, y \rangle = |x_1y_1| + |x_2y_2|$

A PARTIR DE ESTE PRODUCTO INTERNO resuelva los siguientes enunciados.

- Dos de los siguientes vectores son unitarios

$$x = (2, 1) \quad y = \left(\frac{0}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad z = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{0}{\sqrt{5}} \right) \quad w = (1, 0)$$

- La norma de uno de los siguientes vectores es igual a $\sqrt{\frac{1}{3}}$

$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{0}{\sqrt{5}} \right) \quad y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3} \right) \quad z = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

- Dos de los siguientes vectores son ortogonales

$$x = (0, 1) \quad y = (1, -1) \quad z = (1, 0) \quad w = (1, 1)$$

- Determine el par de vectores que forman una base ortonormal

$$x = (1, 0) \quad y = (1, 1) \quad z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad w = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

- La proyección de uno de los siguientes vectores sobre el vector $v = (1, -3)$ es $\left(\frac{10}{34}, \frac{-30}{34} \right)$

¿cual es el vector?

$$x = (5, 0) \quad y = (5, 1) \quad z = (2, 0)$$

Con base en los ejercicios anteriores podrás armar una de estas figuras. Arma la figura correcta siguiendo las instrucciones. Ejemplo:

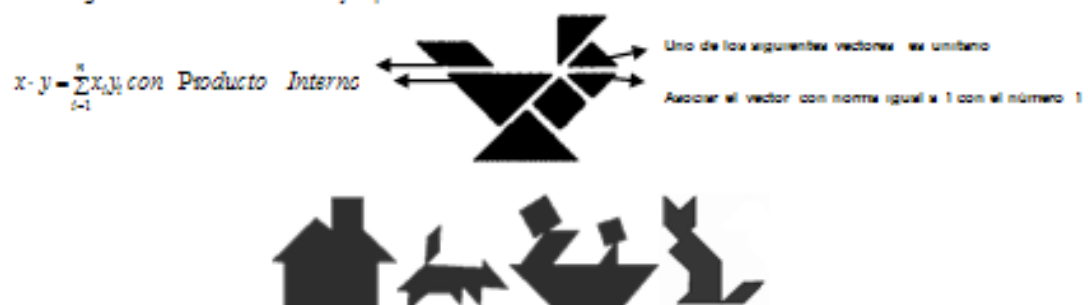


Figura 13 Trabajo Práctico en \mathbb{R}^2

**Trabajo Práctico. Espacios con Producto Interno**

Sea el espacio de polinomios $P_2[x]$. Determinar cual de las siguientes funciones es producto interno en $P_2[x]$.

$$a) \langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 \frac{p(x)}{q(x)} dx$$

$$c) \langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$$

$$b) \langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 (p(x) - q(x)) dx$$

A PARTIR DE ESTE PRODUCTO INTERNO resuelva los siguientes enunciados.

1. Uno de los siguientes vectores es unitario

$$p(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$$

$$q(x) = x^2$$

$$r(x) = 6x^2 - 6x + 1$$

2. Dos de los siguientes vectores son ortonormales.

$$p(x) = 2x - 1 \quad q(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$$

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x$$

$$s(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$$

3. La norma de uno de los siguientes vectores es igual a $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

$$p(x) = 2x - 1$$

$$q(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}$$

$$r(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$s(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$$

4. Dos de los siguientes vectores son ortogonales

$$p(x) = \sqrt{3}(x + 2)$$

$$q(x) = 1$$

$$r(x) = x$$

$$s(x) = \sqrt{3}(6x^2 - 6x + 1)$$

5. La norma de uno de los siguientes vectores es igual a $\frac{1}{\sqrt{150}}$

$$p(x) = x^2 + x$$


$$q(x) = 2x^2 - 1$$

$$r(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$s(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

Con base en los ejercicios anteriores podrás armar una de estas figuras. Arma la figura correcta siguiendo las instrucciones. Ejemplo:

$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ con Producto Interno



Uno de los siguientes vectores es unitario

Asociar el vector con norma igual a 1 con el número 1




Figura 14 Trabajo Práctico en $P_2[x]$

Trabajo Práctico. Espacios con Producto Interno

Sean $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$ Vectores en \mathbb{R}^3 . Determinar cual de las siguientes funciones es producto interno en \mathbb{R}^3 .

- a) $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - 5x_2 y_2 + \frac{1}{2}x_3 y_3$
 b) $\langle x, y \rangle = x_2 y_1 + 3x_2 y_2 + 2x_2 y_3$
 c) $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 5x_2 y_2 + 2x_2 y_3$

A PARTIR DE ESTE PRODUCTO INTERNO resuelva los siguientes enunciados.

- Dos de los siguientes vectores son ortonormales.

$$z = \left(0, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \quad y = \left(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \quad z = \left(\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{299}}, \frac{-4\sqrt{169}}{13\sqrt{299}}, \frac{5\sqrt{169}}{13\sqrt{299}}\right) \quad w = \left(\frac{\sqrt{299}}{169}, \frac{4\sqrt{69}}{13\sqrt{299}}, \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{299}}\right)$$
- La norma de uno de los siguientes vectores es igual a $\sqrt{\frac{21}{13}}$

$$x = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, 13, 0\right) \quad y = \left(\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}, 1\right) \quad z = \left(\frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}, 0\right)$$
- La proyección de uno de uno de los siguientes vectores sobre el vector $v = (2, -1, 2)$ es $\left(\frac{28}{17}, \frac{-14}{17}, \frac{28}{17}\right)$. ¿cual es el vector?
 $x = (3, 0, 1) \quad x = (3, 1, 2) \quad x = (3, 0, 2)$
- Dos de los siguientes vectores son unitarios

$$x = \left(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \quad y = \left(0, \frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right) \quad z = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad w = (0, 3, \sqrt{13})$$
- Dos de los siguientes vectores son ortogonales

$$x = \left(1, 0, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) \quad y = \left(1, \frac{-4}{13}, 0\right) \quad z = \left(1, \frac{-4}{13}, \frac{5}{13}\right) \quad w = \left(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

Con base en los ejercicios anteriores podrás armar una de estas figuras. Arma la figura correcta siguiendo las instrucciones. Ejemplo:

$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ con Producto Interno
 
 Uno de los siguientes vectores es unitario
 Asociar el vector con norma igual a 1 con el número 1



Figura 15 Trabajo Práctico en \mathbb{R}^3

Cómo funciona el juego

En cada una de las guías se presenta un espacio vectorial $(R^2, R^3 \text{ y } P_2[x])$. Los estudiantes deben verificar cuales de las funciones dadas son un producto interno, y con base en este resolver los cinco enunciados problema.

Una vez encontrada la función que es el producto interno para el espacio vectorial dado se aparejan las piezas del rompecabezas de tal forma que la frase “*Producto Interno*” y la función queden juntas. Luego se deben aparejar cada enunciado problema con la respuesta respectiva.

Enunciado problema	Como asociar las respuesta
Dos de los siguientes vectores son unitarios	Asociar los dos vectores que son unitarios
Uno de los siguientes vectores es unitario	Juntar el vector con su norma que en este caso es igual a 1
La norma de uno de los siguientes vectores es igual a $\frac{x}{y}$	Agrupar el vector con la norma que es igual a $\frac{x}{y}$
Dos de los siguientes vectores son ortogonales	Aparejar los dos vectores que son ortogonales
Determine el par de vectores que forman una base ortonormal para R^2	Asociar el par de vectores que forman una base ortonormal para R^2
La proyección de uno de los siguientes vectores sobre el vector $v = (x, y)$ es $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$ ¿cual es el vector?	Agrupar el vector dado con el vector que hay que hallar
Dos de los siguientes vectores son ortonormales	Aparejar los vectores que son ortonormales

Al finalizar la guía y asociar correctamente las fichas, armarán una de las figuras establecidas.

Reglas del juego

1. Grupos de a 2 estudiantes.
2. Los alumnos pueden utilizar apuntes.
3. Se pueden realizar preguntas durante el juego.
4. Los estudiantes participantes tendrán un premio por su participación.
5. El grupo que haya finalizado, entrega su trabajo y los comentarios acerca de la actividad.

Desarrollo del juego

La actividad se desarrolló en la Sede Socorro de la Universidad Industrial de Santander el día sábado 19 de abril. Comenzamos organizando grupos de 2 estudiantes, en total se conformaron 12 grupos.

Se les entregó la guía a cada grupo con su respectivo rompecabezas. Después les dimos las debidas instrucciones del juego.

Al principio los grupos tenían muchas dudas fundamentalmente porque no tenían claro cómo probar las propiedades para ser producto interno, esto originó que se hiciera un breve resumen en el tablero de las propiedades de los Espacios vectoriales con Producto interno. Algunos de los estudiantes no resolvían el primer punto y pasaron a desarrollar los enunciados problema aplicando la definición de producto punto en R^n [1], esta dificultad dio lugar a realizar un breve “paréntesis” en la actividad y recordarles nuevamente que para iniciar el desarrollo de los ejercicios propuestos, debían probar antes cuál de las funciones era un producto interno y con base en este resolverlos.

[1] El producto escalar $x \cdot y$ de dos vectores $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ de V_n se define por $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$



Foto 16. Estudiantes resolviendo el taller de Algebra



Foto 17 Estudiantes resolviendo dudas en el taller de Algebra

Una vez resuelto el primer punto, observamos en cada uno de los grupos que habían tomado el producto interno correcto además de haber demostrado que cumplía con todas las propiedades. También dijeron por qué las otras funciones no eran productos internos, mostrando la propiedad que fallaba o presentando un contraejemplo.

Hay que resaltar que si alguno de los ejercicios quedaba mal resuelto, no iba a resultar ninguna de las figuras que se encontraban al finalizar la guía, entonces tenían que devolverse a revisar y a mirar qué errores habían cometido.

Algunos grupos finalizaron rápidamente y otros se demoraron un poco más, pero aún así todos los grupos terminaron la actividad formando la figura que esperábamos, lo cual indicaba que el taller estaba resuelto acertadamente.



Foto 18. Figura gato



Foto 19. Figura flecha



Foto 20. Primeros estudiantes que resolvieron el taller de Álgebra Lineal II

Cada grupo nos entregó la solución del taller, acompañado con los comentarios, dándonos las gracias por la presencia de nosotras en la universidad para el desarrollo de actividades como estas que enriquecen el conocimiento, y esperando que volvamos nuevamente.

A continuación presentamos algunos comentarios hechos por los estudiantes:

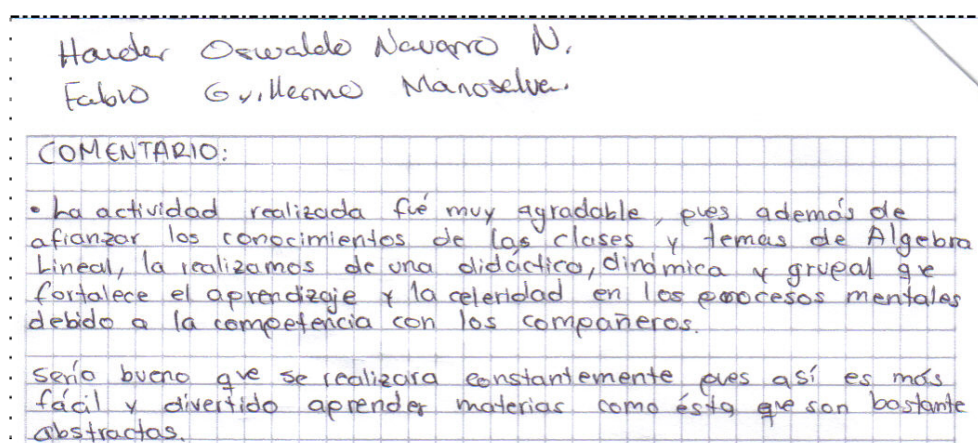


Figura 16. Comentarios de estudiantes

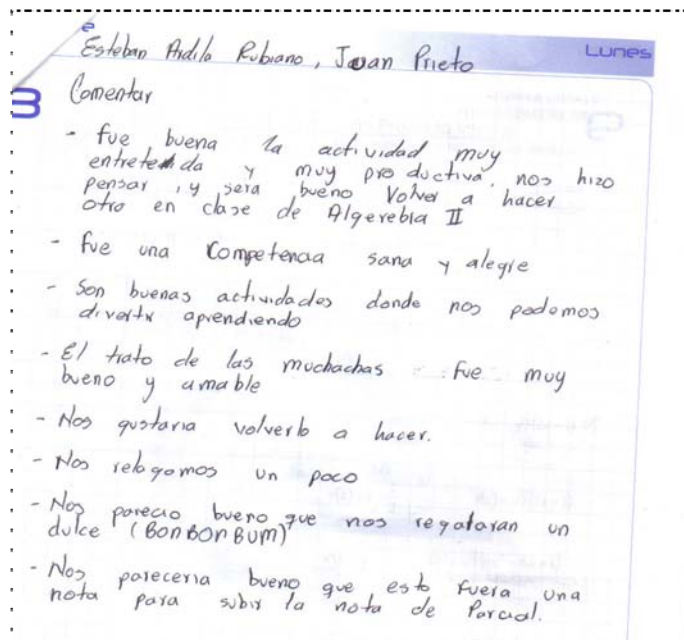


Figura 17. Comentarios de estudiantes

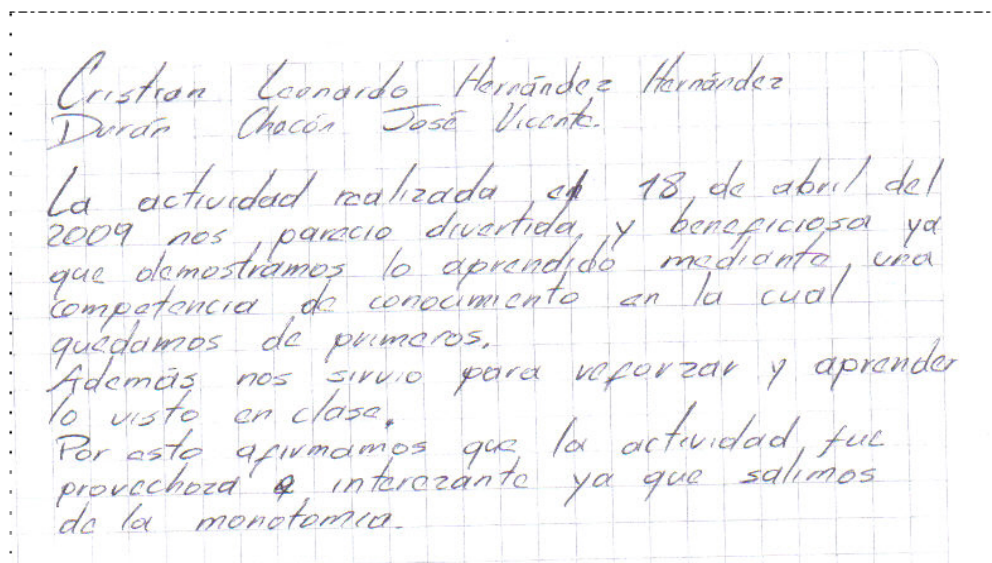


Figura 18. Comentarios de estudiantes

CONCLUSIONES

La teoría matemática y el juego es una buena combinación para enseñar y aprender matemáticas, ya que envuelve al estudiante captando el interés por explorar sus potencias intelectuales y ser el generador de su propio proceso de aprendizaje, logrando el gusto y el placer por lo que está haciendo, alejándose de la rutina y aprendiendo matemáticas en son de juego.

En este proyecto “El juego como recurso didáctico para reforzar métodos de factorización en el grado octavo” algunos de los aspectos que más nos llamó la atención fueron los siguientes:

Con el juego el estudiante se enfrenta a retos, situaciones problema donde su objetivo es encontrar la forma de salir de las dificultades, sortear los obstáculos y conseguir el fin deseado, lo que enfrenta al estudiante a un modelo de la vida misma donde a veces se pierde y otras se gana, pero también se tiene posibilidad de mejorar, cambiar o enmendar los errores cometidos, siempre rodeados de personas que con su experiencia y conocimientos corrigen y hacen caer en la cuenta de los aciertos y desaciertos que se tienen.

Con el juego se desarrolla el pensamiento ya que el estudiante tiene la posibilidad de manipular material, activar su propia capacidad mental, reflexionar constantemente sobre su propio proceso de pensamiento con el fin de mejorarlo, permite transferir situaciones anteriores a experiencias nuevas, adquiere confianza en sí mismo, se divierte con su propia actividad mental, se prepara para otros problemas de la ciencia y de la vida cotidiana.

Generalmente los estudiantes adquieren determinados conocimientos y destrezas que obtendrían en otras situaciones de aprendizaje, pero de esta forma la

información es aprendida más rápida que en otras metodologías, aunque la cantidad aprendida no es mayor que con otros métodos.

El interés por la materia puede que no se mejore, a pesar de que los estudiantes estén motivados por participar en la actividad (sabiendo que esto es lo que más les gusta, jugar) pero los juegos logran una tendencia creciente en los estudiantes por asistir regularmente a la escuela, fomentando con el juego los procesos de socialización, incluyendo el de amistades y grupos desinteresados, así también, habilidades matemáticas durante un periodo de largo tiempo.

Los juegos fueron realizados relativamente cercanos al momento en que se produjo el aprendizaje del maestro-alumno, lo cual fue una gran ventaja para ellos logrando en los estudiantes con bajo rendimiento escolar mejorar con frecuencia el rendimiento a causa de un mayor interés. En estos juegos se tuvo en cuenta la participación de los estudiantes no como observadores, sino como participantes, implicando tanto juegos como ejercicios, permitiendo que el uso de los juegos matemáticos se vuelva una estrategia exitosa para la enseñanza.

Para que se dé el proceso de enseñanza aprendizaje debemos usar los recursos necesarios para trabajar con los alumnos y diseñar estrategias de aprendizaje que permitan superar sus dificultades, ya que si el alumno es un sujeto activo en este proceso, aprenderá más fácilmente si se busca una manera más agradable de abordar o reafirmar los conceptos matemáticos.

Cuando los alumnos tienen pocos deseos de estudiar, y sobre todo en matemáticas, a veces desertan porque no logran superar sus deficiencias, entonces se tiene que buscar una forma de darles seguridad en lo que son capaces de hacer y esto lo podemos lograr por medio del juego.

En los juegos de campo (prueba diagnóstica y carrera de observación) logramos observar que es muy difícil reforzar un tema específico debido a que el medio en el que se desarrolla la actividad presenta muchos distractores que no permiten una total concentración y motivación por parte de los estudiantes.

El parqués nos permitió evidenciar la originalidad y la creatividad de los estudiantes al momento de crear estrategias en la resolución de problemas. Esto recalca la importancia que el docente posibilite al estudiante aprender a pensar.

En el dominó, rompecabezas y mensaje oculto, observamos que el hecho de que la solución de los ejercicios haga parte del juego es una herramienta primordial que exige en los estudiantes una respuesta acertada que permite reforzar el tema que se pretende desarrollar con la actividad.

En muchas ocasiones se piensa que el juego es una pérdida de tiempo, pero a partir de nuestra experiencia podemos aportar que si este es empleado con fines específicos es una herramienta valiosa que si se sabe utilizar aporta mucho al desenvolvimiento de los jóvenes y al refuerzo de los conocimientos adquiridos en el aula de clase.

Utilizando el juego logramos probar desde nuestra práctica que la competencia entre los alumnos permite una mayor motivación en la solución de las actividades y en el trabajo en equipo, ya que esta origina que los estudiantes quieran obtener reconocimiento y aumentar la autoestima.

Estamos de acuerdo en que nuestros alumnos deben adquirir y retener la mayor cantidad posible de conocimientos y habilidades matemáticas. Y también deseáramos tener los elementos implicados en el aprendizaje que estén dirigidos para que los estudiantes disfruten con las matemáticas que aprenden y que estén motivados para el aprendizaje de éstas.

RECOMENDACIONES PARA UNOS PRÓXIMOS TRABAJOS

Para el profesor que decida practicar juegos con sus alumnos, nos permitimos hacerles algunas consideraciones sobre el modo en que hay que proceder, y que hemos obtenido al observar diferentes situaciones que se han presentado a lo largo de la experiencia.

Es necesario que el profesor practique el juego antes de presentarlo a sus alumnos por las siguientes razones:

1. La eficacia de una actividad depende, en buena medida, del entusiasmo con que la realice el profesor. Por tanto, si un juego agrada personalmente a un profesor, este lo presentará de manera que sus alumnos también lo disfruten.
2. El profesor podrá observar, y corregir si fuera necesario, aspectos tales como si hay lagunas o errores en las reglas, si hay jugadas que tienen dificultades, si el juego puede llevar a situaciones monótonas, si la duración es excesiva.
3. De su propia experiencia sacará la información sobre los procesos que llevan a la solución, sobre los bloqueos que se puedan producir... Así tendrá más posibilidades de prestar ayuda a sus alumnos en el momento oportuno y en el modo más efectivo.

El juego hay que proponerlo a los alumnos en el momento preciso. Es decir, que hay que determinar si el juego corresponde al nivel pre-instruccional, coo-instruccional, post-instruccional. Y en el último caso hay que practicarlo relativamente próximo al momento en que se introdujo la instrucción, ya que se espera reforzar el tema, como sucedió en este proyecto.

El juego ha de utilizarse para el fin adecuado. Los alumnos deben conocer que el juego sirve para potenciar su aprendizaje y, por tanto, no ha de practicarse para cubrir tiempos libres. Además, el profesor distingue si hay que emplear un juego de conocimiento o de estrategia, buscando, en cada caso, que se adapte a los objetivos educativos previstos.

El juego hay que practicarlo en la forma correcta. Antes de iniciar el juego hay que dedicar alguna sesión para que los alumnos conozcan el material, para que se entiendan a fondo las reglas, para que todos conozcan la forma en que se gana o se pierde, después es bueno que se comience practicando alguna jugada sencilla; o que se utilicen reglas sencillas, o que se hagan jugadas para practicar, etc.

Todos los alumnos han de participar en el juego, que sea una actividad igual para todos, aunque en el desarrollo del mismo pueda haber grupos de alumnos que lo practiquen con diferentes grados de dificultad.

Arbitrar medidas para que la solución de juegos de estrategia lo puedan alcanzar todos, que no se haga pública la solución para que a ningún alumno (con las ayudas necesarias), se le hurte el placer de descubrir el resultado con sus propios medios. En ese sentido puede resultar interesante que el profesor tenga previsto pedir al alumno que ha encontrado la solución que trate de extender sus resultados a situaciones más complejas.

El profesor puede recurrir a los juegos comercializados o publicados para ponerlos a sus alumnos. Para hacer la elección mas conveniente, el profesor debe hacer preguntas como las siguientes: sirve el juego para los objetivos propuestos?, qué conocimientos necesita el alumno para practicar el juego?, qué habilidades se requieren para practicar el juego?, el juego es atractivo teniendo en cuenta la edad y maduración de los alumnos?, los alumnos tienen limitaciones físicas para practicar el juego?, hay problemas de costos o de espacio para la práctica del

juego?, existe algún compañero que haya experimentado el juego en situaciones similares a las de mis alumnos? ...

Si el profesor decide elaborar un juego para que lo practiquen sus alumnos es conveniente recordar que hay muchos juegos, educativos o no, que ya han sido inventados, que llevan mucho tiempo practicándose y que suelen ser conocidos por los alumnos. Por ello, es bueno buscar un juego entre los existentes, para después modificar las reglas y/o los materiales y adaptarlos a nuestros intereses pedagógicos, como sucedió en este proyecto.

Este proyecto nos dio la oportunidad de experimentar nuevas ideas a la enseñanza de las matemáticas y verlas desde una perspectiva más didáctica, lo que hace pensar que la mayor parte es responsabilidad nuestra el hacer que los estudiantes amen las matemáticas. Cada vez que transcurre el tiempo crece la necesidad de renovar métodos de enseñanza aplicada a las nuevas generaciones, en el cual se debe tener en cuenta el medio, el contexto, la cultura, la información y los cambios.

Esperamos que “el juego, como recurso didáctico para reforzar métodos de factorización” haya sido de gran importancia para todos aquellos lectores que tuvieron la oportunidad y el agrado de leerlo. Además sirvan para nuevas investigaciones en el ámbito de las matemáticas relacionadas con el juego. Ya que nuestro deber como maestros es crear metodologías de aprendizaje con medios didácticos que permita lograr el interés y motivación de los estudiantes por la asignatura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]. ALVAREZ, R. y ORTEGA, R. (2004). *Interpretación de la letra en 8º. Una propuesta didáctica*. Sincelejo, Sucre. Universidad de Sucre. Departamento de Matemáticas.
- [2]. BUHLER, K. (1934). *El desarrollo mental del niño*. Espasa-Calpe. Madrid
- [3]. CAILLOIS, R. (1979) *Sobre la naturaleza de los juegos y su clasificación*. Miñón. Valladolid.
- [4]. CHATEAU, J. (1973). *Psicología de los juegos infantiles*. Kapelusz. Buenos Aires.
- [5]. CORBALAN, F. (1990). *Juegos, enseñanza y matemáticas*. Boletín nuevas tecnologías y educación.
- [6]. CORBALAN, F. (1996). *Números, cultura y juegos*. Madrid. Videocinco
- [7]. DE GUZMÁN, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Recuperado el 7 de mayo de 2008 <http://www.sectormatematica.cl/articulos/juegosmaten.pdf>
- [8]. DE GUZMÁN, M.; GIL, D. (1993). *Enseñanza de las ciencias y las matemáticas. Tendencias e innovaciones*. Madrid: Editorial Popular.
- [9]. DELVAL, J. (1999). *El desarrollo Humano*. Siglo veintiuno de España Editores. Madrid.

- [10]. DEULOFEU, J. (1999). *Recreaciones, juegos y actividades matemáticas*. UNO, nº 20, págs. 89-101
- [11]. DEULOFEU, J. (2001). *Una recreación matemática: historias, juegos y problemas*. Barcelona. Planeta
- [12]. DIEUDONNÉ, J. (1984). *Pensar las matemáticas*. Matemáticas vacías y matemáticas significativas. Tusquets Editores. Barcelona.
- [13]. ELKONIN, D. (1985). *Psicología del juego*. Visor. Madrid.
- [14]. *El papel del juego en la educación matemática*. Publicado por la OIE. Recuperado el 28 de enero de 2009. <http://www.educared.pe/docentes/articulo/903/el-papel-del-juego-en-la-educacion-matematica/>
- [15]. FERNANDEZ, F. *El paso de la aritmética al álgebra*. Una propuesta didáctica. Aula de innovación educativa, ISSN 1131-995X, Nº 50, 1996 , pág. 17
- [16]. FERRERO, L. (1991). *El juego y la matemática*. Madrid: Editorial la Muralla.
- [17]. GAIRÍN, J. (1990). *Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas*. Recuperado el 15 de enero de 2009 de <http://ddd.uab.cat/pub/educar/0211819Xn17p105.pdf>
- [18]. GOMEZ, P. *Teorías de aprendizaje y formación inicial de profesores*. La práctica en la formación inicial del profesorado de magisterio y Educación Secundaria: avances de investigación, fundamentos y programas de formación Universidad de Granada, 2003, ISBN 84-338-3005-8 , págs. 459-468

- [19]. GROOS, K. (1902). *The play of man*. Appleton. N. York.
- [20]. GUTIÉRREZ, M. (2004). *Las bondades del juego, pero...* Escuela Abierta. Recuperado el 23 de enero de 2009 de <http://www.ceuandalucia.com/>.
- [21]. HUIZINGA, Johan (2000). *Homo Ludens*. Alianza Editorial. ISBN 978-84-206-3539-2.
- [22]. *Juego, juguetes y desarrollo infantil*. Recuperado el 9 de febrero de 2009 de <http://sepbcgs.gob.mx>
- [23]. *Juego, pensamiento y lenguaje* (1986). Recuperado el 18 de febrero de 2009 de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo>.
- [24]. KINDERSPIEL, D. (1985). *El juego de los niños*. Munchen, 1965.
- [25]. MANZANO, J y OTROS. (2003). *Currículo, deporte y actividad física en el ámbito escolar*. La visión del profesorado de EF en Andalucía. Málaga.
- [26]. MOOR, P. (1987). *El juego en la educación*. Herder. Barcelona.
- [27]. MORALES, F. (1994). *Psicología social*. McGraw-Hill. Madrid
- [28]. NEUMANN, J. (1926). *Teorema de minimax*. Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. Recuperado el 15 de enero de 2009 de <http://ddd.uab.cat/pub/educar/0211819Xn17p105.pdf>

[29]. ORTEGA, R. (1999). *Jugar y aprender. Una estrategia de intervención educativa*. 4º ed. Sevilla: Díada Editora.

[30]. PARLEBAS, P. (2003). *El juego en la actualidad*. Docentes de EF. Jerez de la Frontera.

[31]. WINTER y ZIEGLER. (1983). *Introducción al juego de los conjuntos*. Interduc-Schroedel.

[32]. WINNICOTT, D. (1979). *Realidad y juego*. Gedisa. Barcelona.

[33]. ZERMELO, E. (1912). *Teorema de Zermelo*. Recuperado el 01 de marzo de 2009 de <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/cultura/Literatura/TeoriaJuegos2.asp>