

SOBRE LA CURVA DEL DRAGÓN

DIEGO FERNANDO GAMBOA HIGUERA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2020

SOBRE LA CURVA DEL DRAGÓN
DIEGO FERNANDO GAMBOA HIGUERA

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemático

Director
Rafael Fernando Isaacs Giraldo
Magíster en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2020

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres por el apoyo que me han dado durante tantos años en mi preparación académica. Al profesor Rafael Isaacs por tantas conversaciones inspiradores acerca del rol de las matemáticas y de los educadores en la sociedad, así como la influencia matemática que ha ejercido en mí a través de sus clases y exposiciones.

También quiero agradecer a Carolina Archila Prada por acompañarme en tantos momentos cruciales durante la realización de este trabajo y prestarse siempre para escucharme y darme apoyo.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	9
1. DRAGONES AUTOSIMILARES	14
1.1. EL DRAGÓN DE HEIGHWAY	14
1.2. EL TWINDRAGON	17
2. DRAGONES Y SISTEMAS NUMÉRICOS	20
2.1. DRAGÓN DE HEIGHWAY Y REPRESENTACIONES DOBLADAS Y GIRATORIAS	20
2.1.1. Representaciones Numéricas	23
2.1.2. La curva que no se cruza a sí misma.	34
2.2. REPRESENTACIONES NUMÉRICAS EN EL PLANO COMPLEJO Y EL TWINDRAGON	42
2.2.1. Una base compleja binaria	43
2.2.2. Teselación de Twindragons	51
BIBLIOGRAFÍA	59

LISTA DE FIGURAS

		pág.
Figura 1.	Tira de papel doblada cero, una y dos veces.	10
Figura 2.	Diseño de dragón del segundo orden.	10
Figura 3.	A la izquierda primeras 6 iteraciones de H_n . A la derecha H_{14}	15
Figura 4.	Se muestra H_3 compuesta de dos copias de H_2 como en la ecuación (6).	16
Figura 5.	Los enteros Gaussianos expresados con a lo más 8 dígitos en base $1+i$. Los colores indican que las palabras se escriben con al menos k dígitos para $k \in \{1, 2, \dots, 8\}$.	18
Figura 6.	Diseño de dragón de orden 12.	22
Figura 7.	La transformación geométrica implicada en el proceso de la Tabla 3.	33
Figura 8.	4 diseños de dragón de orden 8 generado por el proceso de la Tabla 3. Se indica con colores según la representación del entero Gaussiano comienza por $1, i, \bar{1}, \bar{i}$.	34
Figura 9.	El entero Gaussiano $12+i$ es recorrido dos veces por la curva δ y no se repite algún segmento.	41
Figura 10.	Se muestran las primeras 12 iteraciones del proceso (39).	53
Figura 11.	Los conjuntos F y sus vecinos inmediatos.	54

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Números con representación de a lo más 3 dígitos. Se escriben los primeros enteros positivos en su representación en base 2 y luego se evaluar ésta en $1 + i$ (en lugar de 2).	18
Tabla 2. Tabla de representaciones dobladas de los primeros 7 enteros positivos	28
Tabla 3. Relación de representaciones dobladas con las giratorias.	33
Tabla 4. Comportamiento de las funciones g y δ en los primeros 16 pliegues.	36
Tabla 5. Representaciones de z_n .	51

RESUMEN

TÍTULO: SOBRE LA CURVA DEL DRAGÓN *

AUTOR: DIEGO FERNANDO GAMBOA HIGUERA **

PALABRAS CLAVE: COMPLEJOS, SISTEMAS NUMÉRICOS, TESELACIÓN, CURVAS QUE CUBREN EL PLANO, ENTERO GAUSSIANO.

DESCRIPCIÓN:

El dragón de Heighway es una curva que cubre el plano. El Twindragon es una baldosa con la que se puede teselar el plano, la cual consiste de dos dragones de Heighway. Se usan sistemas numéricos sobre los números complejos para construir estos objetos geométricos y demostrar algunas de sus propiedades. En particular, se demuestra que 4 dragones de Heighway forman una configuración de curvas poligonales que no se cruzan a sí mismas que cubren los enteros Gaussianos y que una cantidad numerable de Twindragons cubre el plano complejo de manera que cualesquiera dos de estos conjuntos no se traslapan (sus interiores no se intersectan).

Para obtener dichos resultados se demuestra que existen representaciones de todo entero Gaussiano en los exóticos sistemas numéricos, y se usan interpretaciones geométricas de este hecho para modelar de manera abstracta el proceso de doblar una tira de papel de manera iterativa y luego desplegarla formando ángulos rectos en cada pliegue. Se demuestra que el objeto geométrico que surge de este proceso es justamente el dragón de Heighway. Todos estos hechos son acompañados de imágenes creadas con software computacional que ilustran la geometría de los objetos que se trabajan algebraicamente a lo largo del trabajo.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Rafael Fernando Isaacs Giraldo, Magíster en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: ON THE DRAGON CURVE *

AUTHOR: DIEGO FERNANDO GAMBOA HIGUERA **

KEYWORDS: COMPLEX, NUMBER SYSTEMS, TILINGS, PLANEFILLING CURVE, GAUSSIAN INTEGER.

DESCRIPTION:

Heighway's dragon is a plane-filling curve. The Twindragon is a tile that produces a tessellation of the plane which is tiled by two Heighway's dragons. Complex number systems are used in order to give constructions of these two objects and show some of their geometrical properties. Namely, it is shown that 4 copies of Heighway's dragon give a configuration of self-avoiding polygonal chains that cover the Gaussian integers and that a countable number of Twindragons produce a tiling of the plane, that is, a covering which is also a packing.

To obtain said results we show there exist representations for every Gaussian integer in the exotic number systems, and we use geometric interpretations of this fact to model abstractly the process of folding a strip of paper repeatedly and then unfolding it making right angles in each fold. We show that the geometric object that this process yields is precisely Heighway's dragon. All these facts are accompanied by images plotted with computational software that illustrate the geometry of the objects that are approached algebraically through this article.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Rafael Fernando Isaacs Giraldo, Magister en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

A finales del Siglo XIX muchas ramas de la matemática que hoy son consideradas fundamentales se encontraban apenas naciendo. La teoría de conjuntos y la topología, por ejemplo, llevaron a varios descubrimientos contraintuitivos. Cantor demostró que el cardinal del cuadrado unitario es el mismo cardinal del intervalo unitario en la recta real. Motivado por este resultado, Peano se dispuso a encontrar una función continua de puntos en el intervalo unitario que cubriera todo el cuadrado unitario. Jordan había introducido una definición de curva continua como una función continua cuyo dominio es el intervalo unitario.

Esto dio lugar al concepto de curvas que cubren el plano. Algunos ejemplos tempranos de este tipo de curvas fueron las creadas por el mismo Peano o la creada por el gran matemático alemán David Hilbert en 1891 ¹.

La curva del dragón fue descubierta por John Heighway, un físico que trabajaba en la NASA, en 1966. De ², traduciendo y parafraseando una cita de William Harter, colega de Heighway:

La curva del dragón nació en Junio de 1966. Jack (Heighway) vino a mi oficina (en realidad, cubículo) y dijo que si uno doblaba un billete varias veces, él pensaba que formaría un camino aleatorio o algo así. Yo estaba dudoso pero dije "Verifiquémoslo con una gran hoja de papel". Bueno, formaba un patrón curioso pero no podíamos verlo muy bien. Uno

¹ Grant SANDERSON. *Hilbert's Curve: Is infinite math useful?* <https://www.youtube.com/watch?v=3s7h2MHQtxc&t=886s>. 2017.

² Donald DAVIS Chandler & KNUTH. "Number Representations and Dragon Curves". En: *Journal of Recreational Mathematics* 3 (1970), págs. 66 -81.

de nosotros tuvo la idea de usar papel traslúcido y “desplegarlo” indefinidamente de manera que pudiéramos registrar un patrón tan grande como quisiéramos. Pero cada vez que llegábamos al siguiente orden, sentíamos que debíamos hacer uno más!

Entonces el dragón de Heighway aparece del simple acto de doblar repetidamente una tira de papel, en teoría (en la práctica si se dobla una tira de papel de un metro de largo, tras doblar 8 veces el largo de la tira sería de menos de 4 centímetros, lo que hace casi imposible continuar el proceso).

Figura 1. Tira de papel doblada cero, una y dos veces.

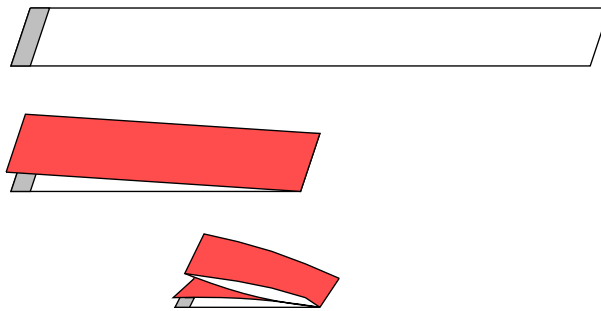
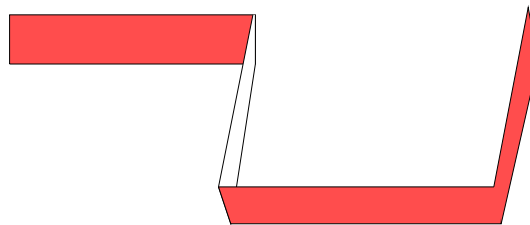


Figura 2. Diseño de dragón del segundo orden.



En ² se desarrolla una teoría de representaciones numéricas de los números complejos que permiten derivar propiedades del dragón de Heighway y de de otras figuras geométricas que poseen algunas características similares.

En conversaciones con William Harter, Knuth aprendió algunas propiedades de estas figuras, como que dos curvas de Heighway se pueden pegar para formar una nueva curva que en la literatura se conoce como el twindragon de Knuth. En ³⁴ el matemático canadiense William Gilbert estudia las propiedades geométricas del twindragon de Knuth y de otras figuras fractales, derivándolas de un sistema numérico en las bases complejas $-n + i$ donde n es un entero positivo. La demostración de que las representaciones de enteros Gaussianos en las bases $-n + i$ son únicas y que todo número complejo es representable en estas bases se encuentra en ⁵.

En este trabajo se demostrará, basado en la literatura mencionada, que la curva del dragón de Heighway es una curva que cubre el plano, y en analogía con el caso de la curva de Hilbert (¹), que un cubrimiento específico que use a esta figura geométrica. En particular, se mostrará que una cantidad contable de twindrags cubren el plano sin superponerse y que dos dragones de Heighway cubren un twindragon también sin superponerse. Además de esto, se explorarán los sistemas numéricos de números complejos que permiten una interesante interpretación de las propiedades geométricas de las figuras.

Se hace un resumen de las referencias bibliográficas que no son directamente usa-

³ William GILBERT. "Fractal geometry derived from complex bases". En: *The Mathematical Intelligencer* 4.2 (1982), págs. 78-86. DOI: 10.1007/BF03023486.

⁴ William GILBERT. "Complex Numbers with three radix expansions". En: *Canadian Journal of Mathematics* 34 (1982), págs. 1335-1348.

⁵ Júlia KÁTAI Imre & SZABÓ. "Canonical number systems for complex integers". En: *Acta Sci. Math.(Szeged)* 37.3-4 (1975), págs. 255-260.

das en este artículo. Por un lado, se tienen los artículos de popularización ⁶, ⁷, ⁸, donde los autores estudian el proceso de paperfolding desde el punto de vista de sucesiones automáticas y con técnicas propias del análisis matemático para calcular la dimensión y la entropía del dragón de Heighway. Así mismo, los artículos ⁹ y ¹⁰ son escritos para alcanzar una audiencia con un nivel de matemáticas de bachillerato, allí se dan definiciones, se ilustran algunas imágenes y se proponen problemas.

El enfoque de ¹¹ es el de resolver problemas topológicos y geométricos sobre la figura del dragón de Heighway. Se usan ciertas propiedades de las curvas poligonales dirigidas para demostrar que es una cadena numerable de discos, donde dos de estos discos se intersectan a lo más en un punto de corte. La dinámica que la describe es la de los números enteros \mathbb{Z} . También se demuestra que la pieza central del dragón de Heighway (el disco en la cadena de mayor tamaño) es una figura autosimilar y los autores producen un sistema iterado de funciones para generarla.

Por último en ¹², el matemático holandés Michel Dekking generaliza los resultados

⁶ Michel Mendès & VAN DER POORTEN Alf DEKKING Michel & FRANCE. “Folds! I.” English. En: *Mathematical Intelligencer* 4.3 (sep. de 1982), págs. 130-138. DOI: 10.1007/BF03024244.

⁷ Michel Mendès & VAN DER POORTEN Alf DEKKING Michel & FRANCE. “Folds! II.” En: *The Mathematical Intelligencer* 4.4 (1982), págs. 173-181. DOI: 10.1007/BF03023552.

⁸ Michel Mendès & VAN DER POORTEN Alf DEKKING Michel & FRANCE. “Folds! III.” En: *The Mathematical Intelligencer* 4.4 (1982), págs. 190-195. DOI: 10.1007/BF03023555.

⁹ Sergei TABACHNIKOV. “Dragon Curves Revisited”. En: *The Mathematical Intelligencer* 36 (2014), págs. 13-17.

¹⁰ Victor VASILYEV Nikolay & GUTENMACHER. “Dragon Curves”. En: *Quantum Magazine* 6.1 (1995), págs. 5-9.

¹¹ Nhu NGAI Sze-Man & NGUYEN. “The Heighway Dragon Revisited”. En: *Discrete & Computational Geometry* 29 (2003), págs. 603-623.

¹² Michel DEKKING. “Paperfolding morphisms, planefilling curves, and fractal tiles”. En: *Theoretical Computer Science* 414.1 (2012), págs. 20 -37. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2011.09.025>.

de ² en términos de morfismos sobre palabras. Allí produce una teoría completa de *morfismos de paperfolding*, y da una caracterización para los morfismos que producen curvas que cubren el plano (por medio de $\mathbb{Z}[i]$ o $\mathbb{Z}[\omega]$ donde $\omega = e^{i2\pi/3}$). También muestra que para estas curvas siempre hay una baldosa fractal correspondiente.

1. DRAGONES AUTOSIMILARES

Se introducen las dos figuras geométricas objeto de estudio de este trabajo.

1.1. EL DRAGÓN DE HEIGHWAY

Se definen dos transformaciones geométricas $\phi_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $\phi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como:

$$\phi_0(z) = \frac{(1-i)}{2}z, \quad \phi_1(z) = \frac{(-1-i)}{2}z + 1. \quad (1)$$

Puesto que tanto ϕ_0 como ϕ_1 son de la forma

$$T(z) = az + b, \quad a \neq 0$$

entonces estas transformaciones son conformes, es decir, que preservan ángulos y círculos, y en consecuencia, la forma de la figura.

Ahora se especifica el siguiente proceso inductivo

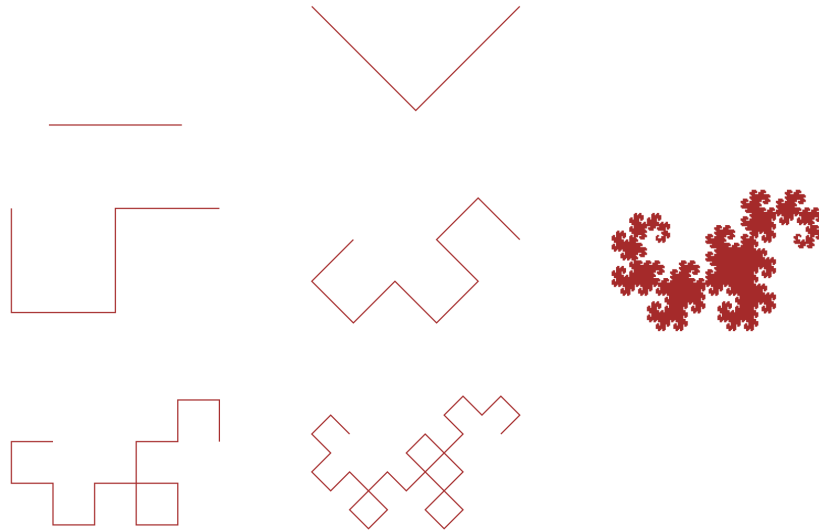
$$H_0 = [0, 1]; \quad H_{n+1} = \phi_0(H_n) \cup \phi_1(H_n). \quad (2)$$

Cada elemento H_n de la sucesión es llamado **diseño de dragón de orden n** . Por inducción es fácil ver que H_n está formado por 2^n copias de $[0, 1]$. El mismo razonamiento nos dice que si $k \leq n$ entonces H_n está formado por 2^{n-k} copias de H_k . En la Figura 3 se ilustra el proceso definido en (1).

A lo largo de este trabajo se considerará que el ángulo que se forma entre dos segmentos complejos $[z_0, z_1]$ y $[z_1, z_2]$ está dado por

$$\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_0}\right). \quad (3)$$

Figura 3. A la izquierda primeras 6 iteraciones de H_n . A la derecha H_{14}



La ecuación (3) dice que un ángulo positivo entre 0 y π si al recorrer la curva poligonal $[z_0, z_1, z_2]$ se gira hacia la izquierda, y negativo si gira a derecha.

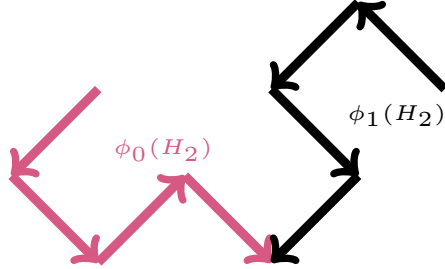
Las transformaciones ϕ_0 y ϕ_1 verifican la identidad

$$\phi_1(z) = -i\left(\phi_0(z) - \frac{(1-i)}{2}\right) + \frac{(1-i)}{2}. \quad (4)$$

En el lenguaje de rotaciones y traslaciones esto quiere decir que la imagen de cualquier punto z bajo ϕ_1 se obtiene de aplicar una rotación de 90° con centro en $(1+i)/2$ a la imagen de z bajo ϕ_0 . Así, H_1 es dos copias de $H_0 = [0, 1]$ que forman ángulo de $+90^\circ$ (giro a izquierda al recorrerlo), es decir, los dos catetos de un triángulo rectángulo isósceles.

De esta manera, es posible establecer ángulos en cada vértice de la curva poligonal

Figura 4. Se muestra H_3 compuesta de dos copias de H_2 como en la ecuación (6).



que describe a H_n . En particular, si

$$H_n = [v_0 = 0, v_1, v_2, \dots, v_{2^n} = (1 - i)/2, \dots, v_{2^{n+1}-1}, v_{2^{n+1}} = 1] \quad (5)$$

para todo $n \geq 1$, y se obtendría por la ecuación (1) y la Figura 4 que

$$H_{n+1} = [\phi_0(v_0) = 0, \dots, \phi_0(v_{2^{n+1}}) = \phi_1(v_{2^{n+1}}) = (1 - i)/2, \dots, \phi_1(v_0) = 1]. \quad (6)$$

Es decir que H_{n+1} es la curva poligonal que aparece de recorrer los vértices $\phi_0(H_n)$, seguido de recorrer los vértices $\phi_1(H_n)$ en sentido contrario.

De la ecuación (3) es fácil ver, el cambio del signo del ángulo cuando se recorre $[z_2, z_1, z_0]$ o $[z_0, z_1, z_2]$; de manera que se puede definir una palabra S_n para cada curva poligonal H_n , donde se representa por la letra D un giro a la izquierda en un vértice interior de H_n y por U un giro a la derecha.

Por ejemplo, si se muestran las palabras S_n que corresponden a las imágenes de la

Figura 3 tenemos:

$$n = 0 \quad \lambda$$

$$n = 1 \quad D$$

$$n = 2 \quad DDU$$

$$n = 3 \quad DDUDDUU$$

$$n = 4 \quad DDUDDUUDDDUUDUU$$

$$n = 5 \quad DDUDDUUDDDUUDUUDDDUDDUUUDDDUUDUU$$

1.2. EL TWINDRAGON

Dados los números en sistema binario, es decir, sus representaciones con dígitos $\{0, 1\}$. ¿Es posible representar todo número de $\mathbb{Z}[i]$ con una representación de sólo 1's y 0's? Al dibujar esto puntos en el plano, ¿qué conjunto geométrico conforman?. El número $1+i$ no se consideró arbitrariamente. La razón por la cual la pregunta tiene sentido es porque $1+i$ tiene norma $N(1+i) = 2$. De manera que es relativamente natural preguntarse si los dígitos $\{0, 1\}$ son suficientes para representar todos los enteros Gaussianos en esta base.

En la Tabla 1, se calculan los valores para algunas cadenas de 1's y 0's. Si representamos cada entero Gaussiano por un cuadrado unitario centrado en el punto que le corresponde en el plano, podemos ver surgir una curiosa imagen al calcular los elementos de $\mathbb{Z}[i]$ que se pueden escribir con a lo más k dígitos.

En cuanto a la pregunta de si estas representaciones cubren todo \mathbb{C} en ³ se da la respuesta puesto que, por ejemplo, no es posible encontrar una representación del número i .

Tabla 1. Números con representación de a lo más 3 dígitos. Se escriben los primeros enteros positivos en su representación en base 2 y luego se evalúa ésta en $1 + i$ (en lugar de 2).

n	Rep. binaria	z_n
0	0	0
1	1	1
2	10	$1 + i$
3	11	$2 + i$
4	100	$2i$
5	101	$1 + 2i$
6	110	$1 + 3i$
7	111	$2 + 3i$

Figura 5. Los enteros Gaussianos expresados con a lo más 8 dígitos en base $1 + i$. Los colores indican que las palabras se escriben con al menos k dígitos para $k \in \{1, 2, \dots, 8\}$.



Para ver esto se usa un algoritmo similar al de división de Euclides.

$$i = 1 + i(1 + i)$$

$$i = 1 + i(1 + i)$$

\vdots

Más adelante, se mostrará que si se toma el número $-1 + i$ como base se obtiene la misma figura geométrica pero esta construcción si cubre todo \mathbb{C} eventualmente. Como se observa en la Figura 5, el conjunto que aparece se aproxima a ser autosimilar, en el sentido que está compuesto de dos copias de una misma figura y que a medida que se incrementa el número de dígitos de los enteros Gaussianos que son dibujados, el conjunto pareciera aproximarse a una figura.

2. DRAGONES Y SISTEMAS NUMÉRICOS

En esta sección se desarrolla la teoría necesaria para construir las figuras geométricas introducidas en la sección anterior usando sistemas numéricos. Se inicia con el dragón de Highway para el cual se usan sistemas numéricos más exóticos, aunque similares, al que se usa para construir el Twindragon.

2.1. DRAGÓN DE HIGHWAY Y REPRESENTACIONES DOBLADAS Y GIRATORIAS

Se sigue el desarrollo de ², agregando ejemplos, figuras y algunas discusiones. Los argumentos de las demostraciones son esencialmente los mismos que los encontrados en el artículo referenciado, pero se han agregado detalles que en el original fueron omitidos.

Se define el proceso de paperfolding con el cual se encuentra la misma cadena S_∞ que se encontró en la Sección 1.1. Esto da una interpretación física de la sucesión S_∞ y por lo tanto del dragón de Highway. Después de esto, se introducen los sistemas numéricos doblado (sobre los enteros) y giratorio (sobre los enteros Gaussianos). Finalmente, se usan las propiedades de estos sistemas numéricos y su relación con S_∞ para demostrar propiedades del dragón de Highway.

Paperfolding Se da una definición inductiva de la sucesión S_n que se encuentra en la Sección 1.1

$$S_0 = \lambda; \quad S_{n+1} = S_n D \overline{S_n}, \quad (7)$$

donde $\overline{S_n}$ quiere decir la cadena que se produce a partir de S_n invirtiendo su orden (leyéndola al revés) e intercambiando D 's por U 's, y λ es la palabra vacía.

Esta sucesión de cadenas converge en el sentido en que S_{n+1} comienza con S_n . El

límite de esta sucesión es la cadena conocida como la sucesión de **paperfolding**² que se denota S_∞ .

Note que la operación $\overline{DDU} = DUU$ que aparece en la ecuación (7) tiene las siguientes propiedades: Para cualesquiera dos palabras S y T

$$\overline{\overline{S}} = S \quad \text{y} \quad \overline{ST} = \overline{T} \overline{S}. \quad (8)$$

Formalmente dice que es un antimorfismo involutivo, pero acá no tendrán en cuenta estas clasificaciones formales. Usando las propiedades de la ecuación (8) se deduce que

$$\overline{S_{n+1}} = \overline{S_n} U \overline{S_n}, \quad (9)$$

lo cual se puede interpretar como la palabra que se produce cuando se refleja el proceso de paperfolding sobre la tira de papel. Usando las ecuaciones (7) y (9) se encuentra una manera distinta de generar $(S_n)_{n \geq 0}$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n D \overline{S_n} \\ &= S_{n-1} D \overline{S_{n-1}} D S_{n-1} U \overline{S_{n-1}} \\ &= S_{n-2} D \overline{S_{n-2}} D S_{n-2} U \overline{S_{n-2}} D S_{n-2} D \overline{S_{n-2}} U S_{n-2} U \overline{S_{n-2}} \\ &\vdots \\ &= S_0 D \overline{S_0} D S_0 U \overline{S_0} D S_0 D \overline{S_0} U S_0 U \overline{S_0} \dots \\ &= DDUDDUUDDDUUDUU \dots \end{aligned}$$

Como se puede observar, en cada paso del proceso se inserta una D en cada posición correspondiente a la palabra S_k y una U en la posición de $\overline{S_k}$. El proceso

Figura 6. Diseño de dragón de orden 12.



entonces se puede escribir en forma inductiva, si $S_n = a_0a_1a_2a_3 \cdots a_{2^n-1}$ entonces

$$S_{n+1} = Da_0Ua_1Da_2Ua_3D \cdots Da_{2^n-1} \quad (10)$$

Esto también puede observarse en la sucesión de conjuntos construida en la ecuación (2), ya que se puede entender que todos los conjuntos D_n con $n \geq 2$ están compuestos por copias de D_1 de forma que dos copias consecutivas están rotadas 90° una respecto a la otra.

Si se toma la tira de papel extendida con sus pliegues descritos por la palabra S_n y se ubica en un plano donde el primer segmento de la tira lo está en el intervalo $[0, 1]$ y de manera que en cada pliegue se forme un ángulo de 90° (sentido positivo si el pliegue es D , negativo si es U), se obtiene esencialmente igual que D_n . (Una imagen bajo una dilatación sobre \mathbb{C}).

2.1.1. Representaciones Numéricas Para realizar una análisis a mayor profundidad y con mayor rigor de la situación presentada hasta ahora se introducen sistemas numéricos sobre enteros. Iniciando con el sistema binario, muy conocido. Por ejemplo el número 982 está representado como

$$982 = (1111010110)_2. \quad (11)$$

Expresado como la suma de potencias de dos

$$\begin{aligned} 982 &= 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^1 \\ &= (2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6) + 2^4 + (2^2 + 2^1) \\ &= (2^{10} - 2^6) + (2^5 - 2^4) + (2^3 - 2^1) \end{aligned} \quad (12)$$

Aquí se ha usado la conocida fórmula

$$2^{n+1} - 1 = 2^n + 2^{n-1} + \dots + 2^1 + 2^0. \quad (13)$$

Entonces al decidir representar números en base 2 con dígitos $\{0, 1, -1\}$ y se representa al dígito -1 como $\bar{1}$, se puede escribir

$$982 = (1000\bar{1}\bar{1}\bar{1}0\bar{1}0)_2 \quad (14)$$

Realizar este procedimiento sobre la representación binaria de cualquier número natural, tendrá una representación en este nuevo sistema numérico en el cual $\{0, 1, -1\}$ son dígitos y los dígitos no nulos alternan entre 1 y -1 . Este sistema serán las **representaciones dobladas** de los números enteros.

Es claro que $\{0, 1, -1\}$ no forman un sistema completo de residuos módulo 2 puesto que -1 y 1 son representantes de la misma clase. Además, no es difícil ver que en

este sistema numérico las representaciones no son únicas. Por ejemplo,

$$982 = (1000\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}10)_2. \quad (15)$$

Se observa que dado $n > 0$ si $n = (a_t a_{t-1} \dots a_1 a_0)_2$ es una representación doblada con $a_t \neq 0$, entonces $a_t = 1$. De lo contrario, $a_t = -1$ implica que $n = \sum_{i=0}^t a_i 2^i = -2^t + \sum_{i=0}^{t-1} a_i 2^i$.

Por la ecuación (13)

$$n < -2^t + \sum_{i=0}^{t-1} 2^i = -2^t + 2^t - 1 = -1, \quad (16)$$

lo cual es absurdo. De manera que toda representación doblada de un número positivo tiene como primer dígito a 1.

Si $n < 0$ entonces el primer dígito de la representación doblada de n debe ser -1 .

La siguiente proposición nos da una idea del patrón que se forma de las representaciones de enteros.

Proposición 2.1.1. Sea $n > 0$. Si n es representado por exactamente k dígitos con $k \geq 2$ entonces

$$2^{k-2} \leq n \leq 2^{k-1}$$

Demostración. Por inducción. Si $k = 2$, sólo existen dos posibilidades.

$$2 = (10)_2 \quad 1 = (1\bar{1})_2$$

Claramente se cumple la desigualdad.

Se supone que la afirmación se cumple para todo entero positivo entre 2 y k .

Si n es representado por $k + 1$ dígitos por la observación anterior su primer dígito debe ser 1. Entonces

$$n = \sum_{i=0}^k a_i 2^i = 2^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i 2^i$$

Si $a_i = 0$ para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$ entonces $n = 2^k$. Suponga que no es así. Entonces existe $j \in \{0, \dots, k-1\}$, tal que $a_j = -1$ y $a_i = 0$ para $i \in \{j+1, \dots, k-1\}$. Sea $m = \sum_{i=0}^j a_i 2^i < 0$. Por hipótesis de inducción $-m = \sum_{i=0}^j (-a_i) 2^i$ cumple la desigualdad

$$2^{j-2} \leq -m \leq 2^{j-1},$$

y por lo tanto

$$-2^{j-1} \leq m \leq -2^{j-2},$$

lo que produce

$$2^k - 2^{j-1} \leq n = 2^k + m \leq 2^k - 2^{j-2}.$$

Claramente, $2^{k-1} = 2^k - 2^{k-1} \leq 2^k - 2^{j-1}$ y $2^k - 2^{j-2} \leq 2^k$.

De donde se concluye que

$$2^{k-1} \leq n \leq 2^k$$

Así, la afirmación queda demostrada para todo $k \geq 2$.

□

La proposición respectiva para $n < 0$ se cumple inmediatamente, pues toda representación doblada de n se obtiene de intercambiar los 1's y -1 's de una representación doblada de $-n > 0$.

Este resultado contrasta con la propiedad análoga del sistema binario tradicional, en la que todo $n > 0$ representado por exactamente k dígitos cumple la desigualdad

$$2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1.$$

El siguiente teorema demuestra que para cada número entero existen exactamente dos representaciones bajo este sistema numérico, una cuyo último dígito no nulo (leyendo de izquierda a derecha) es 1 (que se llamará **representación positiva**), y otra cuyo último dígito no nulo es -1 (que se llamará **representación negativa**).

Teorema 2.1.2. Todo número entero distinto de cero tiene dos representaciones dobladas. Una positiva y una negativa.

Demostración. Se mostrará que hay una única representación positiva de cada entero n . La representación negativa de n se obtiene de multiplicar la representación negativa de $-n$ por -1 .

Para $|n| = 1$. Es fácil ver que $1 = (1)_2$ y $-1 = (\bar{1}\bar{1})_2$. Por la Proposición 2.1.1 se afirma que no existen representaciones de 1 y -1 con exactamente k dígitos para $k \geq 3$. Puesto que las únicas representaciones positivas de 2 o menos dígitos son $1 = (1)_2$, $2 = (10)_2$, $-1 = (\bar{1}\bar{1})_2$ entonces tanto 1 como -1 tienen una sola representación positiva.

Suponga que la afirmación se cumple para todo entero con valor absoluto menor o igual a n .

Sea $m \in \mathbb{Z}$ con $|m| = n + 1$. Si m es par entonces $|m/2| \in \mathbb{Z}$ y $|m/2| < k$ por lo que $m/2$ tiene una sola representación positiva.

Si $m = \sum_{i=0}^t a_i 2^i$, entonces $a_0 = 0$ pues m es par. Luego, $m = \sum_{i=1}^t a_i 2^i$. Entonces

$$\frac{m}{2} = \sum_{i=1}^t a_i 2^{i-1} = \sum_{i=0}^{t-1} a_{i+1} 2^i$$

Luego, la única representación positiva de m es la representación de $m/2$ agregando un 0 como último dígito.

Suponiendo, en cambio, que m es impar entonces de manera similar podemos ver que la única representación positiva de m es la representación es la que se obtiene de tomar la representación positiva $-(n-1)/2$ (existe por hipótesis de inducción), negarla y agregar un 1 como último dígito.

Se concluye que todo entero tiene una única representación positiva y una única representación negativa.

□

La demostración anterior sugiere que es posible realizar un proceso análogo al algoritmo de división pero en el cual el primer residuo no nulo puede ser 1 o -1 según deseamos la representación positiva o negativa de un entero, y luego se alterna entre 1 y -1 cuando el número de la izquierda de la igualdad sea impar.

Por ejemplo, si se toma el número 211, su representación positiva, está dada por

$$\begin{aligned}
 211 &= 1 + 105 \cdot 2 \\
 105 &= -1 + 53 \cdot 2 \\
 53 &= 1 + 26 \cdot 2 \\
 26 &= 0 + 13 \cdot 2 \\
 13 &= -1 + 7 \cdot 2 \\
 7 &= 1 + 3 \cdot 2 \\
 3 &= -1 + 2 \cdot 2 \\
 2 &= 0 + 1 \cdot 2 \\
 1 &= 1 + 0 \cdot 2
 \end{aligned} \tag{17}$$

Entonces $211 = (10\bar{1}1\bar{1}01\bar{1}1)_2$, se obtiene de la representación negativa de 105 agregando un 1 como último dígito.

En la demostración de la Proposición **2.1.1** se observa que es posible pensar en la representación doblada de un $n > 0$ que se escribe con k dígitos, como la suma de las representaciones dobladas de 2^{k-1} y un entero $m < 0$ con una representación de $j < k$ dígitos.

Se generan las representaciones dobladas de los enteros positivos.

Se denomina "corta", la representación que usa menos dígitos distintos de cero y "larga.^a la otra. En la Tabla ?? se muestran los números positivos que se pueden representar con k dígitos para $1 \leq k \leq 4$. Se puede observar que ambas representaciones, corta y larga se obtienen al representar al entero n con $2^{k-2} \leq n < 2^{k-1}$,

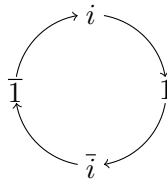
Tabla 2. Tabla de representaciones dobladas de los primeros 7 enteros positivos

n	Representación corta	Representación larga
1	1	$\bar{1}\bar{1}$
2	10	$\bar{1}\bar{1}0$
3	$10\bar{1}$	$\bar{1}\bar{1}1$
4	100	$\bar{1}\bar{1}00$
5	$1\bar{1}01$	$\bar{1}\bar{1}1\bar{1}$
6	$10\bar{1}0$	$\bar{1}\bar{1}10$
7	$100\bar{1}$	$10\bar{1}1$

como $2^{k-1} - m$, con $m \leq 2^{k-2}$. Por ejemplo, $4 < 5 < 8$ y $5 = 8 - 3$.

Es interesante ver que estas representaciones tienen una relación con la palabra infinita S_∞ . En particular, si $S_\infty[n]$ denota el n -ésimo símbolo de S_∞ entonces la representación corta de n es positiva o negativa según $S_\infty[n]$ sea D o U , respectivamente. La relación entre las representaciones dobladas y la sucesión de paperfolding no queda aquí, pero para poder demostrarla es necesario introducir otro sistema numérico.

De manera análoga a lo que se ha hecho con los enteros, se puede introducir en los enteros Gaussianos un sistema numérico en base $1+i$ y con dígitos $\{0, 1, i, -1, -i\}$. De nuevo, se representa a -1 como $\bar{1}$ y a $-i$ como \bar{i} . Esta vez se exigirá que los dígitos no nulos de una representación sigan el patrón cíclico cuando se lee de izquierda a derecha.



Por ejemplo,

$$12 + i = (10\bar{i}\bar{1}i01\bar{i}\bar{1}). \quad (18)$$

Se pone el siguiente cálculo, como referencia. Así para dada una representación es posible determinar el entero Gaussiano, que es representado por ella,

$$\begin{array}{ll}
 (1+i)^8 = 16 & (1+i)^{10} = 16 \\
 (1+i)^6 = -8i & -i(1+i)^6 = -8 \\
 (1+i)^5 = -4-4i & -(1+i)^5 = 4+4i \\
 (1+i)^4 = -4 & i(1+i)^4 = -4i \\
 (1+i)^2 = 2i & (1+i)^2 = 2i \\
 (1+i)^1 = 1+i & -i(1+i)^1 = 1-i \\
 (1+i)^0 = 1 & -1(1+i)^0 = -1 \\
 & \text{Total} = 12+i
 \end{array}$$

Se clasifican las representaciones según su último dígito no nulo. La representación **tipo** σ , es la representación cuyo último dígito no nulo es σ . La situación es totalmente análoga a las representaciones dobladas de los enteros, en el sentido de que cada entero Gaussiano tiene exactamente 4 de estas representaciones (una por cada dígito no nulo) a las cuales se les etiqueta como **representaciones giratorias**. Parecido a lo que se dijo de las representaciones dobladas se puede usar un algoritmo de división para encontrar las representaciones giratorias de un entero Gaussiano.

Tipo 1

$$\begin{aligned}
12 + i &= 1 + (6 - 5i)(1 + i) \\
6 - 5i &= i + (-6i)(1 + i) \\
-6i &= 0 + (-3 - 3i)(1 + i) \\
-3 - 3i &= 0 + (-3)(1 + i) \\
-3 &= -1 + (-1 + i)(1 + i) \\
-1 + i &= 0 + i(1 + i) \\
i &= -i + (1 + i)(1 + i) \\
1 + i &= 0 + 1(1 + i) \\
1 &= 1 + 0(1 + i) \\
(10\bar{i}0\bar{1}00i1)_{1+i}
\end{aligned}$$

Tipo $\bar{1}$

$$\begin{aligned}
12 + i &= -1 + (7 - 6i)(1 + i) \\
7 - 6i &= -i + (1 - 6i)(1 + i) \\
1 - 6i &= 1 + (-3 - 3i)(1 + i) \\
-3 + 3i &= 0 + (-3)(1 + i) \\
-3 &= i + (-2 + i)(1 + i) \\
-2 + i &= -1 + i(1 + i) \\
i &= -i + (1 + i)(1 + i) \\
1 + i &= 0 + 1(1 + i) \\
1 &= 1 + 0(1 + i) \\
(10\bar{i}\bar{1}i01\bar{i}\bar{1})_{1+i}
\end{aligned}$$

Tipo i

$$\begin{aligned}
12 + i &= i + (6 - 6i)(1 + i) \\
6 - 6i &= 0 + (-6i)(1 + i) \\
-6i &= 0 + (-3 - 3i)(1 + i) \\
-3 - 3i &= 0 + (-3)(1 + i) \\
-3 &= -1 + (-1 + i)(1 + i) \quad (19) \\
-1 + i &= 0 + i(1 + i) \\
i &= -i + (1 + i)(1 + i) \\
1 + i &= 0 + 1(1 + i) \\
1 &= 1 + 0(1 + i) \\
(10\bar{i}0\bar{1}000i)_{1+i}
\end{aligned}$$

Tipo \bar{i}

$$\begin{aligned}
12 + i &= -i + (7 - 5i)(1 + i) \\
7 - 5i &= 0 + (1 - 6i)(1 + i) \\
1 - 6i &= 1 + (-3 - 3i)(1 + i) \\
-3 - 3i &= 0 + (-3)(1 + i) \\
-3 &= i + (-2 + i)(1 + i) \\
-2 + i &= -1 + i(1 + i) \\
i &= -i + (1 + i)(1 + i) \\
1 + i &= 0 + 1(1 + i) \\
1 &= 1 + 0(1 + i) \\
(10\bar{i}\bar{1}i010\bar{i})_{1+i}
\end{aligned}$$

Ahora se usa un razonamiento similar en la demostración del siguiente teorema.

Teorema 2.1.3. Para cada $m + ni$ en $\mathbb{Z}[i]$, no nulo, existen exactamente cuatro representaciones giratorias. Una de tipo 1, una de tipo i , una de tipo -1 y una de tipo $-i$.

Demostración. Note que que todo entero Gaussiano tiene una única representación de cada tipo.

Se usará el hecho de que si existe una representación tipo σ de $m + ni$ entonces existe una representación tipo $\sigma \cdot i$ de $i(m + ni)$ (basta sólo multiplicar todos los dígitos de la primera por i).

Note que $(a + bi)(1 + i) = (a - b) + (b + a)i$. Entonces la suma de la parte real y la parte imaginaria de todo múltiplo de $1 + i$ es par.

Por inducción sobre la norma de $m + ni$.

Si $N(m + ni) = 1$ entonces claramente $1 = (1)_{1+i}$ y se aplica el algoritmo que se muestra en (19) para encontrar que $i = (i1)_{1+i}$, $-1 = (i01)_{1+i}$ y $-i = (\bar{1}i1)_{1+i}$. Esto implica que la unicidad de las representaciones tipo 1 de i , -1 , $-i$ dependen de la unicidad de la representación de 1.

Puesto que 1 no es un múltiplo de $1 + i$ entonces si $(a_t \dots a_0)_{1+i}$ con $a_t \neq 0$ es una representación giratoria tipo 1 de 1 entonces $a_0 = 1$. Se deduce que $(a_t \dots i)_{1+i} = 0$, lo cual es absurdo.

Entonces también existen las representaciones tipo i , -1 e $-i$ de estos números.

	1	i	-1	$-i$
Tipo 1	1	$i1$	$i01$	$\bar{1}i1$
Tipo i	$i\bar{1}i$	i	$\bar{1}i$	$\bar{1}0i$
Tipo -1	$i0\bar{1}$	$1i\bar{1}$	$\bar{1}$	$i\bar{1}$
Tipo $-i$	$1\bar{i}$	$10\bar{i}$	$i1\bar{i}$	\bar{i}

Ahora, se supone que todo entero Gaussiano $a + bi$, con norma $N(a + bi) \leq k$ tiene exactamente una representación giratoria de cada tipo.

Considere $N(m + ni) = k + 1$. Si $m + n$ es par, entonces la única representación giratoria tipo 1 de $m + ni$ es la representación giratoria tipo 1 de

$$\frac{m + ni}{1 + i} = \left(\frac{m + n}{2}\right) + \left(\frac{n - m}{2}\right)i,$$

seguida de un cero. Si $m + n$ es impar, entonces la única representación tipo 1 de $m + ni$ es la representación tipo i de

$$\frac{m + ni - 1}{1 + i} = \left(\frac{m + n - 1}{2}\right) + \left(\frac{1 - m + n}{2}\right)i$$

seguido de un 1.

Note que en el caso $m + n$ impar y $N(m + ni) > 1$, la ecuación

$$m^2 + n^2 - \left(\left(\frac{m + n - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - m + n}{2}\right)^2\right) = \frac{(m + 1)^2}{2} + \frac{n^2}{2} - 1 = 0,$$

tiene solución para $m + 1, n = \pm 1$. De aquí, se obtiene que $m + ni = -2 \pm i$, son los únicos casos en los cuáles $N(m + ni)$ no decrece. Cuando esto sucede se debe primero encontrar las representaciones de $1 \pm 2i$. Aparte de éste, en todos los otros casos la norma decrece y se puede usar la hipótesis de inducción.

Se concluye que cada $m + ni$ no nulo en $\mathbb{Z}[i]$ tiene exactamente una representación de cada tipo.

□

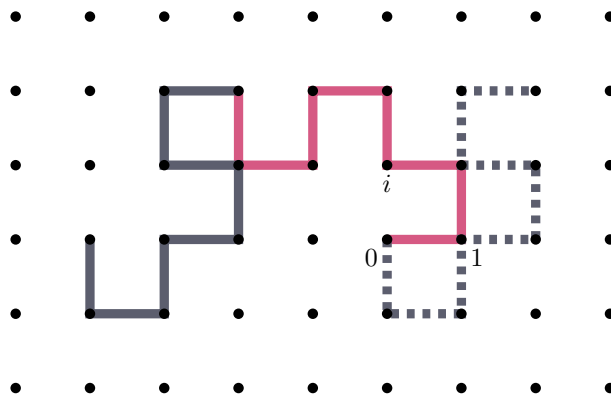
Como se hizo anteriormente con las representaciones dobladas de los enteros, se ilustra un proceso en la Tabla 3, para generar ciertas representaciones gaussianas. Se realiza con la representación tipo 1, pues en todos los otros casos nos dan la misma información. Se enumeran las representaciones giratorias que aparecen de este algoritmo según el orden en el que ocurren.

Note que se puede multiplicar estas representaciones giratorias por i y la curva

Tabla 3. Relación de representaciones dobladas con las giratorias.

n	Rep. Dob. Corta	Rep. Giratoria	z
1	1	1	1
2	10	10	$1 + i$
3	$10\bar{1}$	$10\bar{i}$	i
4	100	100	$2i$
5	$1\bar{1}01$	$1\bar{i}0\bar{1}$	$-1 + 2i$
6	$10\bar{1}0$	$10\bar{i}0$	$-1 + i$
7	$100\bar{1}$	$100\bar{i}$	$-2 + i$
8	1000	1000	$-2 + 2i$

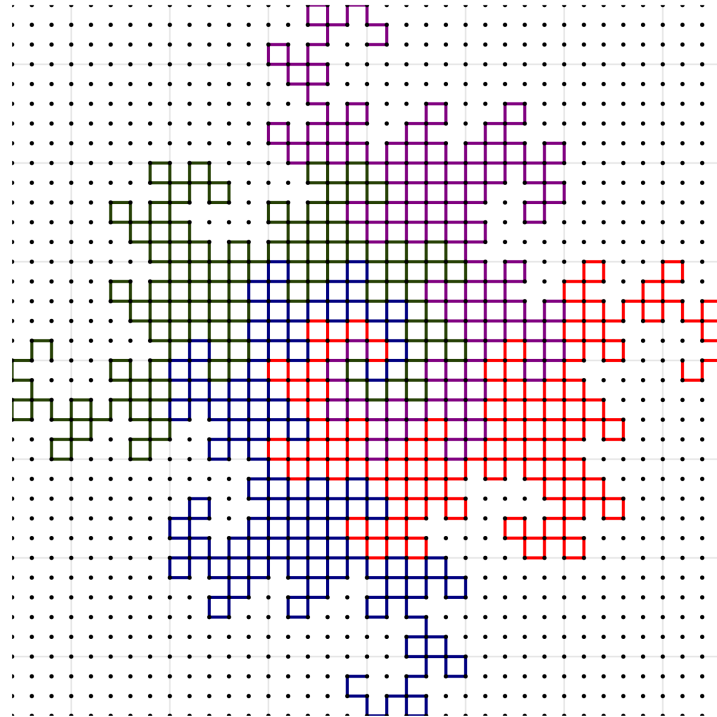
Figura 7. La transformación geométrica implicada en el proceso de la Tabla 3.



poligonal generada será la misma curva, pero rotada 90° en sentido antihorario. De esta manera, se obtienen 4 curvas, una por cada dígito distinto de cero, que representadas gráficamente, llevando el proceso hasta generar $2^8 = 256$ enteros Gaussianos se obtiene la Figura 8.

La Figura 8 sugiere que el proceso que describe la Tabla 3 produce un dragón de Heighway y que además las representaciones generadas así cubren un cuarto del plano $\mathbb{Z}[i]$ para cada dígito inicial $1, i, \bar{1}, \bar{i}$. En lo que resta de esta sección se formalizará este resultado.

Figura 8. 4 diseños de dragón de orden 8 generado por el proceso de la Tabla 3. Se indica con colores según la representación del entero Gaussiano comienza por $1, i, \bar{1}, \bar{i}$.



2.1.2. La curva que no se cruza a sí misma. Ahora, se estudiará la estructura de la palabra S_∞ . El primer paso que se tomará con vista a formalizar el resultado expuesto en la Figura 8 es definir la función

$$d(n) = \begin{cases} +1, & \text{si la } n\text{-ésima letra de } S_\infty \text{ es } D; \\ -1, & \text{si la } n\text{-ésima letra de } S_\infty \text{ es } U; \end{cases} \quad (20)$$

De manera equivalente se define a d como la función que envía a un número natural n en el último dígito no nulo de su representación doblada.

Por la ecuación (10) se tiene otra definición de d , quizás aún más sencilla:

$$d(2n + 1) = (-1)^n, \quad d(2n) = d(n). \quad (21)$$

La función d tiene también otra propiedad característica. Por la ecuación (7) se tiene que

$$d(2^{n+1} - m) = -d(m), \quad \text{para } 0 < m < 2^n. \quad (22)$$

Ahora se define una función

$$g(n) = d(1) + \cdots + d(n - 1), \quad \text{para } n \geq 1. \quad (23)$$

Esta función da el valor de los excesos de D 's sobre U 's en S_∞ para cualquier n , es decir, para la n -ésima letra de S_∞ . Para ver la relación de esta función con la curva formada del proceso de paperfolding (se fija $g(1) = 0$ por conveniencia).

A cada letra de S_∞ corresponde un pliegue enumerado con un natural $n > 0$ al cual se le asigna un ángulo 90° si $d(n) = +1$ y un ángulo de 90° si $d(n) = -1$.

Se define una curva poligonal denotada δ para $n \in \mathbb{N}$:

$$\delta(0) = 0; \quad \delta(n) = \sum_{k=1}^n i^{g(k)} \quad \text{para } n \geq 1, \quad (24)$$

donde $\delta(n)$ es el $n + 1$ -ésimo vértice de la curva δ .

Proposición 2.1.4. δ es la curva formada al desplegar la tira de papel a la que se ha aplicado el proceso de paperfolding de manera que se forman ángulos rectos.

Demostración.

Por inducción. Primero note que $g(1) = d(0) = 0$, entonces $\delta(1) = i^{g(1)} = i^0 = 1$. Entonces el primer segmento de la curva δ es el segmento $[0, 1]$ lo cual coincide con la construcción explicada anteriormente.

Suponga que $\delta(n - 1)$ da el $n - 1$ -ésimo vértice de la tira de papel.

$$\delta(n) = \delta(n - 1) + i^{g(n)}.$$

Dado que $g(n) = g(n - 1) + d(n - 1) = g(n - 1) \pm 1$ por (23). Esto quiere decir que $i^{g(n)} = i^{g(n-1) \pm 1}$. Es decir, que la curva gira en el n -ésimo vértice hacia la izquierda si $d(n - 1) = +1$ y hacia la derecha si $d(n - 1) = -1$.

Se concluye que en efecto la curva poligonal δ representa la curva formada del proceso de paperfolding.

□

En la Tabla 4 se referencian los valores iniciales de $g(n)$ y $\delta(n)$ para observar la dinámica de esta función.

Tabla 4. Comportamiento de las funciones g y δ en los primeros 16 pliegues.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d(n)$	-	+1	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
$g(n)$	-	0	1	2	1	2	3	2	1
$i^{g(n)}$	-	1	i	-1	i	-1	$-i$	-1	i
$\delta(n)$	0	1	$1 + i$	i	$2i$	$-1 + 2i$	$-1 + i$	$-2 + i$	$-2 + 2i$

n	9	10	11	12	13	14	15	16
$d(n)$	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1
$g(n)$	2	3	4	3	2	3	2	1
$i^{g(n)}$	-1	$-i$	1	$-i$	-1	$-i$	-1	i
$\delta(n)$	$-3 + 2i$	$-3 + i$	$-2 + i$	-2	-3	$-3 - i$	$-4 - i$	-4

Ahora, el siguiente cálculo nos muestra una relación que satisface $g(n)$ lo cual a su vez nos da información sobre δ .

Para todo $n > 0$, $1 \leq m \leq 2^n$ y teniendo en cuenta la propiedad de d en la ecuación

(22)

$$\begin{aligned}g(2^{n+1}) &= g(2^{n+1} - m + 1) + d(2^{n+1} - m + 1) + \cdots + d(2^{n+1} - 1) \\ &= g(2^{n+1} - m + 1) - d(m - 1) - \cdots - d(1) \\ &= g(2^{n+1} - m + 1) - g(m).\end{aligned}\tag{25}$$

Para $m = 2^n$ se tiene que

$$g(2^{n+1}) = g(2^{n+1} - 2^n + 1) - g(2^n) = g(2^n + 1) - g(2^n) = d(2^n) = 1.$$

Por (25) se obtiene:

$$g(2^{n+1} - m + 1) = 1 + g(m).\tag{26}$$

Esto permite calcular de manera relativamente eficiente la dirección del n -ésimo segmento de δ . Por ejemplo,

$$\begin{aligned}g(86) &= g(128 - 43 + 1) = 1 + g(43), \\ &= 1 + g(64 - 22 + 1) = 2 + g(22), \\ &= 2 + g(32 - 11 + 1) = 3 + g(11), \\ &= 3 + g(16 - 6 + 1) = 4 + g(6), \\ &= 4 + g(8 - 3 + 1) = 5 + g(3), \\ &= 5 + g(4 - 2 + 1) = 6 + g(2), \\ &= 6 + g(2 - 1 + 1) = 7 + g(1), \\ &= 7.\end{aligned}$$

Esto quiere decir que el n -ésimo segmento de δ tiene dirección $i^7 = i^3 = -i$.

Ahora se usa la ecuación (26) para encontrar una propiedad análoga de δ , que dará la relación entre las representaciones dobladas y las giratorias.

Para todo $n \geq 1$ tal que $1 \leq m \leq 2^n$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
\delta(2^{n+1}) &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}} i^{g(k)}, \\
&= \sum_{k=1}^{2^{n+1}-m} + \sum_{k=2^{n+1}-m+1}^{2^{n+1}} i^{g(k)}, \\
&= \delta(2^{n+1} - m) + \sum_{k=1}^m i^{1+g(k)}, \\
&= \delta(2^{n+1} - m) + i \sum_{k=1}^m i^{g(k)}, \\
&= \delta(2^{n+1} - m) + i\delta(m).
\end{aligned} \tag{27}$$

Si en esta nueva relación se reemplaza $m = 2^n$ se obtiene,

$$\delta(2^{n+1}) = \delta(2^{n+1} - 2^n) + i\delta(2^n) = \delta(2^n) + i\delta(2^n) = (1 + i)\delta(2^n).$$

Entonces se encuentra que

$$\delta(2^n) = (1 + i)^n. \tag{28}$$

Ahora, se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.1.5. Si $n = 2^{t_0} - 2^{t_1} + \dots + (-1)^j 2^{t_j}$ con $t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_j$ entonces

$$\delta(n) = (1 + i)^{t_0} - i(1 + i)^{t_1} + \dots + (-i)^j (1 + i)^{t_j}.$$

Demostración. Suponga $n_0 = n$ y por la Proposición 2.1.1 se tiene que $2^{t_0-1} \leq n_0 \leq 2^{t_0}$. Luego, existe n_1 tal que $1 \leq n_1 \leq 2^{t_0-1}$ y $n_0 = 2^{t_0} - n_1$.

Entonces por (27) y (28) se obtiene

$$\delta(n_0) = \delta(2^{t_0} - n_1) = (1 + i)^{t_0} - i\delta(n_1).$$

Entonces por hipótesis $-n_1 = -2^{t_1-1} + \dots + (-1)^{t_j} 2^{t_j}$, y por Proposición **2.1.1** se tiene que $2^{t_1-1} \leq n_1 \leq 2^{t_1}$, en consecuencia existe n_2 con $1 \leq n_2 \leq 2^{t_1}$ tal que $n_1 = 2^{t_1} - n_2$, y por lo tanto $\delta(n_1) = (1+i)^{t_1} - i\delta(n_2)$. Finalmente,

$$\delta(n_0) = (1+i)^{t_0} - i(1+i)^{t_1} - \delta(n_2).$$

Siguiendo este proceso que acaba con t_j se ha demostrado el teorema. □

Esta nueva fórmula para la función δ hace que el proceso de doblar papel y extenderlo en ángulos rectos sea totalmente explícito. En la Tabla 3 se muestra la correspondencia de las representaciones dobladas y giratorias para los 8 primeros vértices de δ . Es posible utilizar otros ángulos al colocar la tira de papel en el plano, cambiando i por algún $\zeta = e^{\pi-\theta}$, donde θ es el ángulo deseado.

También es fácil ver que se obtienen cuatro curvas distintas, como se muestra en la Figura 8,

$$\delta(n), i\delta(n), -\delta(n), -i\delta(n). \quad (29)$$

Ahora se dará un ejemplo de la traducción de representaciones dobladas a representaciones giratorias.

Sea $n = 207$, entonces tenemos

$$n = (10\bar{1}0100\bar{1}1)_2 = (10\bar{1}01000\bar{1})_2$$

las representaciones dobladas positivas y negativas, que al traducirlas usando el Teorema **2.1.5**, vemos que

$$(10\bar{i}0\bar{1}00i1)_{1+i} = 12 + i \quad \mathbf{y} \quad (10\bar{i}0\bar{1}000i)_{1+i} = 12 + i$$

son las representaciones Tipo 1 y Tipo i que ya se había calculado en (19).

Acá surge la pregunta ¿Qué sucede con las representaciones Tipo -1 y Tipo $-i$ de $12 + i$? Para encontrar el entero n' que produce estas representaciones giratorias, tenemos por Teorema **2.1.5**

$$12 + i = (10\bar{i}\bar{1}i01\bar{i}\bar{1})_{1+i} \mapsto (10\bar{1}\bar{1}\bar{1}01\bar{1}\bar{1})_2 = 211,$$

como en (18). De la misma manera,

$$12 + i = (10i\bar{1}\bar{i}010i\bar{1})_{1+i} \mapsto (10\bar{1}\bar{1}\bar{1}010\bar{1})_2 = 211.$$

Se denomina **similares** a las representaciones giratorias que corresponden a un mismo entero según el Teorema **2.1.5**.

Para completar un poco más la imagen intuitiva dada de este proceso, se calcula $g(207)$, $g(208)$ y $g(211)$, $g(212)$. El cálculo se realiza como en (25), así se obtiene

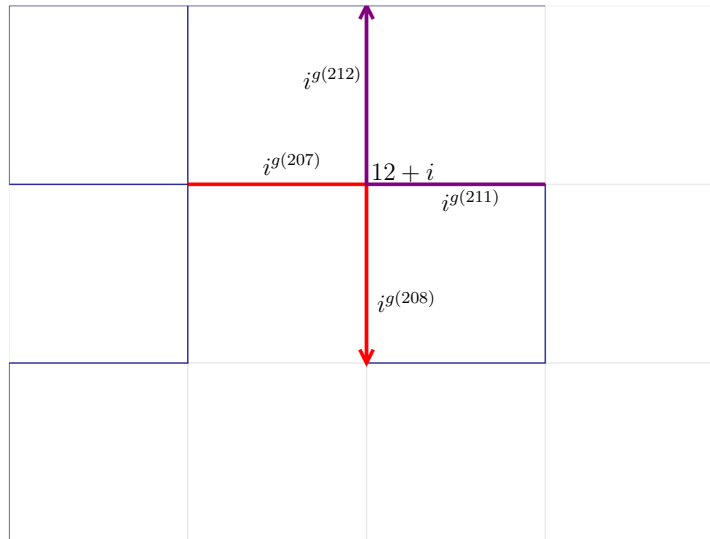
$$g(207) = 4, \quad g(208) = 3 \quad \text{y} \quad g(211) = 6, \quad g(212) = 5. \quad (30)$$

Recordando la definición de δ en (24), que nos dice, que la curva δ pasa dos veces por el punto $12 + i$. Primero pasa viniendo del oeste y girando hacia el sur, y tres segmentos después vuelve a pasar por este mismo punto, pero esta vez proviene del este y gira al norte. La Figura ?? muestra lo aquí descrito.

La situación que se acaba de describir es la que se presenta, para todo elemento de $\mathbb{Z}[i]$ (aunque no siempre todos los segmentos pertenecen a la misma curva, se pueden tener puntos que son recorridos una vez por la curva δ y una segunda vez por la curva $i\delta$). Estas observaciones motivan el siguiente resultado.

Teorema 2.1.6. Los cuatro dragones, es decir, las curvas δ , $i\delta$, $-\delta$ y $-i\delta$ cubren el conjunto de los enteros Gaussianos exactamente en el sentido en que un segmento unitario entre dos puntos de $\mathbb{Z}[i]$ es recorrido exactamente una vez.

Figura 9. El entero Gaussiano $12 + i$ es recorrido dos veces por la curva δ y no se repite algún segmento.



Demostración. Todo segmento unitario se puede ver como un segmento de $a + bi$ a $a + bi + \sigma$, donde $m + ni$ es múltiplo de $1 + i$ y $\sigma \in \{1, i, -1, -i\}$. Usando el Teorema 2.1.3, se considera la representación tipo σ de $a + bi + \sigma$,

$$a + bi + \sigma = \sigma i^t (1 + i)^{k_t} + \dots + \sigma i (1 + i)^{k_0} + \sigma,$$

donde $0 \leq k_0 < \dots < k_t$ y $t \geq 0$.

Sea $n = 2^{k_t} + \dots + 2^{k_0} + (-1)^t$, por Teorema 2.1.5

$$\delta(n) = \frac{a + bi + \sigma}{\sigma i^t},$$

es decir,

$$a + bi + \sigma = \sigma i^t \delta(n);$$

$$a + bi = \sigma i^t \delta(n - (-1)^t).$$

Si un segmento que incide con $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ fuera recorrido por la unión de las curvas $\bigcup_{k=0}^3 i\delta$ más de una vez, entonces puesto que los cuatro segmentos incidentes con $a + bi$ están en esta unión, se tendría que z es recorrido por $\bigcup_{k=0}^3 i\delta$ al menos tres veces. Esto es absurdo, puesto que z tiene cuatro representaciones giratorias que corresponden (por el Teorema **2.1.5**) a las representaciones dobladas (positiva y negativa) de dos números naturales. En otras palabras corresponde exactamente a dos vértices de δ .

Se concluye que todo segmento entre dos enteros Gaussianos ocurre sólo una vez en el conjunto de las cuatro curvas $\delta, i\delta, -\delta$ y $-i\delta$.

□

2.2. REPRESENTACIONES NUMÉRICAS EN EL PLANO COMPLEJO Y EL TWIN-DRAGON

Esta sección está dedicada a estudiar un ejemplo de un sistema numérico con base compleja que tiene las propiedades análogas a los sistemas numéricos familiares sobre los números reales o binarios. En particular, todo número complejo tiene representaciones en base $-1 + i$ y se cumple que los enteros (los elementos de $\mathbb{Z}[i]$) tienen representación única. Los resultados aquí expuestos son motivados por los trabajos en ³ y ⁴. Las demostraciones de los Teoremas **2.2.3** y **2.2.4** son basadas en las demostraciones encontradas en ⁵ donde se trata el caso más general de las bases $-n + i$ donde n es un entero positivo. Se han agregado ejemplos y cálculos para explicar los detalles y las técnicas usadas en tales demostraciones. La demostración

del Teorema **2.2.3** también usa aspectos muy similares a los del Teorema **2.1.3** donde se implementan los argumentos de las demostraciones de ². La parte dedicada a demostrar que la familia de twindragons es un empaquetamiento (lo que culmina en el Teorema **2.2.8**) no es tratada en la literatura mencionada. Tal vez es considerada trivial pues no se hace alguna referencia a la necesidad de demostrar este hecho. El razonamiento aquí presentado relativo a esta última parte de mi autoría.

2.2.1. Una base compleja binaria Note que todo $z \in \mathbb{Z}[i]$ se puede escribir de manera única como una sucesión finita de 0's y 1's.

$$w = (b_n b_{n-1} \cdots b_1 b_0)_{-1+i} \quad (31)$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} w &= (1010101010)_{-1+i} \\ &= (-1+i) + (-1+i)^3 + (-1+i)^5 + (-1+i)^7 + (-1+i)^9 \\ &= (-1+i) + (2+2i) + (4-4i) + (-8-8i) + (-16+16i) \\ &= -19+7i \end{aligned}$$

Para comprender que es suficiente usar los dígitos $\{0, 1\}$ para expresar enteros Gaussianos en base $-1+i$ se mostrará, que forman un sistema completo de residuos.

Proposición 2.2.1. $\{0, 1\}$ es un sistema completo de residuos módulo $-1+i$.

Demostración. Se define un homomorfismo

$$\begin{aligned} h : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}[i]/\langle -1+i \rangle \\ z &\mapsto z + \langle -1+i \rangle. \end{aligned}$$

Es claro que h es en efecto un homomorfismo, pues es la composición de un homomorfismo canónico con una inclusión.

h es un homomorfismo sobreyectivo. Sea $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces

$$a + bi = a + bi - b + b = a + b + (-1 + i)b = (a + b) + \langle -1 + i \rangle$$

Por lo tanto, $h(a + b) = a + bi$.

Ahora, el núcleo de este homomorfismo.

$$\begin{aligned}\ker(h) &= \{z | h(z) \in \langle -1 + i \rangle\}, \\ &= \{z | z \in \langle -1 + i \rangle\}, \\ &= \{z | z = (a + bi)(-1 + i) = -a - b + (a - b)i\}.\end{aligned}$$

Puesto que $z \in \mathbb{Z}$ entonces se debe tener que $a = b$ y por lo tanto $z \in \ker(h)$ si y sólo si $z = -2a \in 2\mathbb{Z}$.

Por el Teorema fundamental de homomorfismos se tiene que

$$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[i]/\langle -1 + i \rangle$$

Luego $0 + \langle -1 + i \rangle \neq 1 + \langle -1 + i \rangle$ y además, cualquier para cualquier entero Gaussiano $a + bi$ se tiene que $a + bi + \langle -1 + i \rangle = 0 + \langle -1 + i \rangle$ ó $a + bi + \langle -1 + i \rangle = 1 + \langle -1 + i \rangle$.

□

Lema 2.2.2. Existen representaciones en base $-1 + i$ de $1, i, -1, -i$.

Demostración. Se usa una variación del algoritmo división sobre -1 .

$$\begin{aligned} -1 &= 1 + \frac{-2}{-1+i}(-1+i), \\ 1+i &= 0 + (-i)(-1+i), \\ -i &= 1 + \frac{-1-i}{-1+i}(-1+i), \\ i &= 1 + \frac{-1+i}{-1+i}(-1+i), \\ 1 &= 1 + 0(-1+i). \end{aligned}$$

Luego,

$$1 = (1)_{-1+i}, \quad i = (11)_{-1+i}, \quad -1 = (11101)_{-1+i}, \quad -i = (111)_{-1+i}$$

□

Ahora se demuestra que todo entero Gaussiano se puede escribir de manera única en base $-1+i$.

Teorema 2.2.3. Si $z \in \mathbb{Z}[i]$ entonces existe una cadena dígitos $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k \in \{0, 1\}$ tal que $(b_k \dots b_2 b_1 b_0)_{-1+i} = z$. Además, esta representación es única.

Demostración. Sea $z = m + ni$ con $m, n \in \mathbb{Z}$.

Con $|z| = |m + ni| = m^2 + n^2$, por inducción sobre $|z|$.

Dado que si $|z| = 1$ entonces existe la representación para z en base $-1+i$.

Suponga que existen representaciones para todos los enteros Gaussianos con norma menor o igual a k , con $k \geq 1$.

Sea $|z| = m^2 + n^2 = k + 1$.

Si $m + n$ es par, entonces

$$\frac{m + ni}{-1 + i} = \frac{-m + n}{2} + \frac{(-m - n)i}{2}.$$

Puesto que $|\frac{m+ni}{-1+i}| < |z| = k + 1$, existe una representación base $-1 + i$ de $|z|/(-1 + i) = (b_m \cdots b_1 b_0)_{-1+i}$. Luego, la representación en base $-1 + i$ se puede construir agregando un 0

$$z = (b_m \cdots b_1 b_0 0)_{-1+i}$$

Si $m + n$ es impar,

$$\frac{m + ni - 1}{-1 + i} = \frac{(1 - m + n)}{2} + \frac{(1 - m - n)i}{2}.$$

De nuevo, por hipótesis de inducción existe una representación de $(z - 1)/(-1 + i) = (b_m \cdots b_1 b_0)_{-1+i}$. En este caso se agrega un 1 para obtener la representación en base $-1 + i$ de z .

$$z = (b_m \cdots b_1 b_0 1)_{-1+i}$$

Entonces para $z \in \mathbb{Z}[i]$ arbitrario, se puede encontrar una representación en base $-1 + i$

Supongamos que existen dos de tales representaciones de z . Entonces

$$z = (b_m \cdots b_1 b_0) = (c_p \cdots c_1 c_0).$$

De aquí que

$$0 = b_m(-1+i)^m + \cdots + b_{p+1}(-1+i)^{p+1} + (b_p - c_p)(-1+i)^p + \cdots + (b_1 - c_1)(-1+i) + (b_0 - c_0)$$

Se deduce que $b_0 - c_0 \in \langle -1 + i \rangle$, pero $b_0, c_0 \in \{0, 1\}$ y este es un sistema completo de residuos, entonces $b_0 = c_0$. Se obtiene que

$$0 = b_m(-1+i)^{m-1} + \cdots + b_{p+1}(-1+i)^p + (b_p - c_p)(-1+i)^{p-1} + \cdots + (b_1 - c_1).$$

Aplicando el mismo razonamiento, se deduce que $b_1 = c_1$.

Así, sucesivamente se tiene que $b_0 = c_0, b_1 = c_1, \dots, b_p = c_p$. Además $b_j = 0$ para $j > p$ pues de lo contrario $-1 + i$ sería un divisor de cero.

En consecuencia, la representación de todo entero Gaussiano en base $-1 + i$ siempre existe y es única.

□

Ahora, se va a demostrar que es posible expresar todo número complejo usando una representación en base $-1 + i$ que permite una parte decimal. Es decir, expresiones como $(110.11)_{-1+i} = (-3 - 2i)/2 = 0$ o incluso expresiones infinitas como

$$\begin{aligned}
 (110.\overline{11}\dots)_{-1+i} &= -1 - i + \sum_{k=1}^{\infty} (-1 + i)^{-k}, \\
 &= -1 - i + \frac{1}{-1 + i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1 + i)^{-k}, \\
 &= -1 - i + \frac{-1 - i}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{-1+i}}, \\
 &= -1 - i + \frac{-1 - i}{2} \frac{-1 + i}{-2 + i}, \\
 &= -1 - i + \frac{1}{-2 + i}, \\
 &= \frac{4 + i}{-2 + i} = (4 + i) \frac{-2 - i}{5} = \frac{-7 - 6i}{5}.
 \end{aligned}$$

Se demuestra que para todo $z \in \mathbb{C}$ existe una representación en base $-1 + i$ con dígitos $\{0, 1\}$. Estas representaciones pueden consistir de una cantidad infinita de dígitos en la **parte fraccionaria** de la representación, es decir, los dígitos después del punto decimal pueden ser infinitos. No podemos garantizar que esta representación sea única. La idea de la demostración es tomada del artículo de ⁵.

Teorema 2.2.4. Todo número complejo tiene una representación en base $-1 + i$.

Demostración. Se denota $[a]$ a la parte entera de a donde $a \in \mathbb{R}$. Sea $z \in \mathbb{C}$. Se definen dos sucesiones $(z_n)_{n \geq 0}$ y $(\delta_n)_{n \geq 0}$, tales que para todo $n \geq 0$, $x_n = \text{Re } z(-1 +$

$i)^n$ y $y_n = \text{Im } z(-1 + i)^n$, así

$$\begin{aligned} z &= \frac{z(-1 + i)^n}{(-1 + i)^n} = \frac{x_n + iy_n}{(1 + i)^n}, \\ &= \frac{\lfloor x_n \rfloor + i\lfloor y_n \rfloor}{(-1 + i)^n} + \frac{(x_n - \lfloor x_n \rfloor) + i(y_n - \lfloor y_n \rfloor)}{(-1 + i)^n} = z_n + \delta_n. \end{aligned}$$

Es decir,

$$z_n = \frac{\lfloor x_n \rfloor + i\lfloor y_n \rfloor}{(-1 + i)^n}, \quad \delta_n = \frac{(x_n - \lfloor x_n \rfloor) + i(y_n - \lfloor y_n \rfloor)}{(-1 + i)^n} \quad (32)$$

Se debe tener que $|x_n - \lfloor x_n \rfloor|, |y_n - \lfloor y_n \rfloor| < 1$, y por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\delta_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1 + i|}{|(1 + i)|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}^{n-1}} = 0.$$

Lo cual implica que $\delta_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z - \delta_n = z. \quad (33)$$

Puesto que $\lfloor x_n \rfloor + i\lfloor y_n \rfloor \in \mathbb{Z}[i]$, existe una representación única

$$(a_t \dots a_1 a_0)_{-1+i} = \lfloor x_n \rfloor + i\lfloor y_n \rfloor = z_n(-1 + i)^n,$$

donde t depende de n . Ahora se demuestra que $t - n$ es acotado, es decir que la representación de $z_n(1 + i)^n$ no sobrepasa algún número de dígitos K para algún n .

Se tiene que

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{a_t(-1 + i)^t + \dots + a_1(-1 + i) + a_0}{(-1 + i)^n}, \\ z_n &= a_t(-1 + i)^{t-n} + \dots + a_k + \frac{a_{k-1}}{-1 + i} + \dots + \frac{a_0}{(-1 + i)^n}, \\ z_n - \left(\frac{a_{k-1}}{-1 + i} + \dots + \frac{a_0}{(-1 + i)^n} \right) &= a_t(-1 + i)^{t-n} + \dots + a_k. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|a_t(-1+i)^{t-n} + \dots + a_n| &\leq |z_n| + \left| \left(\frac{a_{n-1}}{-1+i} + \dots + \frac{a_0}{(-1+i)^n} \right) \right|, \\
&\leq |z| + |\delta_n| + \sum_{j=0}^{\infty} |-1+i|^j, \\
&\leq |z| + |\delta_n| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}.
\end{aligned}$$

La expresión a la derecha de la desigualdad está acotada pues δ_n converge a 0, entonces existe un real $c > 0$, tal que

$$|a_t(-1+i)^{t-n} + \dots + a_n| \leq c, \quad (34)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, que el entero Gaussiano con representación $a_t(-1+i)^{t-n} + \dots + a_n$ está contenido en la bola de radio c con centro en el origen. Puesto que en esta bola sólo puede haber un número finito de enteros Gaussianos, se concluye que existe un K tal que $t-n \leq K$ para todo número natural n .

Se puede entonces escribir,

$$z_n = a_K^{(n)}(-1+i)^K + \dots + a_0^{(n)} + \frac{a_{-1}^{(n)}}{-1+i} + \frac{a_{-2}^{(n)}}{(-1+i)^2} + \dots \quad (35)$$

donde cada $a_j^{(n)} \in \{0, 1\}$ para $j \leq K$.

Se procede a definir una representación de z . Cada sucesión $(a_j^{(n)})_{n \geq 0}$ tiene sólo dos valores posibles. Entonces al menos uno de ellos debe suceder infinitas veces.

Tomamos b_K un valor de $(a_K^{(n)})_{n \geq 0}$ que sucede infinitas veces. Sea S_K el conjunto de los índices m tales que $(a_K^m) = b_K$. Ahora, por inducción sean b_K, \dots, b_{l+1} tales que para cada uno de estos existe un conjunto infinito de índices $S_K \supseteq \dots \supseteq S_{l+1}$ tales que si $m \in S_j$ entonces $b_j = a_j^{(m)}$.

Entonces dado que S_{l+1} es infinito, se toma b_l un valor de $(a_l^{(n)})_{n \in S_{l+1}}$ que se repite

infinitas veces y definimos $S_l \subseteq S_{l+1}$ como el conjunto de los índices m tales que $a_l^{(m)} = b_l$.

Se define así,

$$w = b_K(-1+i)^K + \dots + b_0 + \frac{b_{-1}}{-1+i} + \frac{b_{-2}}{(-1+i)^2} + \dots \quad (36)$$

Entonces se construye una sucesión de números naturales n_α con $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $n_\alpha \in S_{K-\alpha}$, y puesto que $S_K \supseteq \dots \supseteq S_{K-\alpha}$

$$z_{n_\alpha} = b_K(-1+i)^K + \dots + b_{K-\alpha} + a_{K-\alpha-1}^{(n_\alpha)}(-1+i)^{n_\alpha} + \dots$$

Ahora,

$$w = \lim_{n_\alpha \rightarrow \infty} z_{n_\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad (37)$$

Se concluye que (36) es una representación válida de un número complejo z en base $-1+i$. Es decir, que todo número complejo posee un representación base $-1+i$.

□

En la Tabla 5 se sigue la construcción usada en la demostración del Teorema **2.2.4**. La última columna corresponde a las representaciones expresadas en la ecuación (35), se observa que las representaciones de los números complejos de la forma $(a_t \dots a_0.a_{-1} \dots)_{-1+i}$ no son necesariamente únicas. El ejemplo ilustrado en la Tabla 5 es $z = (1-2i)/5$. En este caso la representación de z_n tiene a lo más 3 dígitos antes del punto decimal. La sucesión z_n oscila entre representaciones con tres distintas partes enteras $0, 1$ y $-i$. En efecto, $(1-2i)/5$ tiene tres representaciones distintas en base $-1+i$,⁴

Tabla 5. Representaciones de z_n .

n	$z(-1+i)^n$	$\lfloor x_n \rfloor + i \lfloor y_n \rfloor$	Representación de $\lfloor x_n \rfloor + i \lfloor y_n \rfloor$	Representación de z_n
0	$(1-2i)/5$	$-i$	$(111)_{-1+i}$	$(111)_{-1+i}$
1	$(1+3i)/5$	0	$(0)_{-1+i}$	$(0)_{-1+i}$
2	$(-4-2i)/5$	$-1-i$	$(110)_{-1+i}$	$(1.10)_{-1+i}$
3	$(6-2i)/5$	$1-i$	$(111010)_{-1+i}$	$(111.010)_{-1+i}$
4	$(-4+8i)/5$	$-1+i$	$(10)_{-1+i}$	$(0.0010)_{-1+i}$
5	$(-4-12i)/5$	$-1-3i$	$(110010)_{-1+i}$	$(1.10010)_{-1+i}$
6	$(16+8i)/5$	$3+i$	$(111010010)_{-1+i}$	$(111.010010)_{-1+i}$
7	$(-24+8i)/5$	$-5+i$	$(10010)_{-1+i}$	$(0.0010010)_{-1+i}$
8	$(16-32i)/5$	$3-7i$	$(110010010)_{-1+i}$	$(1.10010010)_{-1+i}$
9	$(16+48i)/5$	$3+9i$	$(111010010010)_{-1+i}$	$(111.010010010)_{-1+i}$
10	$(-64-32i)/5$	$-13-7i$	$(10010010)_{-1+i}$	$(0.0010010010)_{-1+i}$
11	$(96-32i)/5$	$19-7i$	$(110010010010)_{-1+i}$	$(1.10010010010)_{-1+i}$

2.2.2. Teselación de Twindragons Es posible dar una interpretación geométrica de las múltiples representaciones en base $-1+i$ de algunos números complejos. Para esto considere el conjunto de **fracciones**

$$F = \{(0.a_{-1}a_{-2}\dots)_{-1+i} \mid a_i \in \{0, 1\}\}. \quad (38)$$

Para dar inicio al procedimiento, se parte del 0. Se representa gráficamente por medio de un cuadrado de área 1 centrado en 0. Ahora, los elementos de F con representación $0.a_100\dots$ donde $a_1 \in \{0, 1\}$. Son 0 y $(-1-i)/2$ y se representan como cuadrados de área $1/\sqrt{2}$ girados 45° (es decir cuadrados como el que rodeaba a 0 en la etapa anterior pero multiplicado por $1/(-1+i)$) centrados en 0 y $(-1-i)/2$, respectivamente. Continuando este proceso indefinidamente, surge una figura que se aproxima al conjunto de puntos que es formado por F en el plano complejo. Este proceso se describe un sistema iterado de funciones con conjunto inicial el cuadrado F_0 encerrado por la curva poligonal $[(-1-i)/2, (1-i)/2, (1+i)/2, (-1+i)/2]$,

y con el par de funciones

$$\rho_0(z) = \frac{z}{-1+i}, \quad \rho_1(z) = \frac{z}{-1+i} + \frac{1}{-1+i}.$$

Entonces se define una sucesión de conjuntos $(F_n)_{n \geq 0}$ donde F_0 es el cuadrado ya definido y se cumple la ley inductiva

$$F_{n+1} = \rho_0(F_n) \cup \rho_1(F_n). \quad (39)$$

Claramente, F_n son los números complejos que se pueden representar como fracciones con a lo más n dígitos diferentes de cero después del punto decimal. Así, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$. En la Figura 10 se representan las primeras iteraciones del proceso definido en (39), y nos da una idea bastante aproximada de la representación gráfica del conjunto definido en (38).

Lo anterior implica que se puede usar a F para cubrir al plano complejo en su totalidad

$$\mathbb{C} = \bigcup_{w \in \mathbb{Z}[i]} w + F \quad (40)$$

lo cual se justifica bajo los Teoremas **2.2.3** y **2.2.4**.

En la gráfica de los conjuntos que aparecen en la ecuación (40), se observará que los conjuntos $w + F$ donde w es algún entero Gaussiano forman una teselación del plano.

Se demostrará que es posible cubrir \mathbb{C} con un número contable de copias de F tales que la intersección de sus interiores es vacía, por lo tanto $\bigcup_{w \in \mathbb{Z}[i]} w + F$ es un **cubrimiento** de \mathbb{C} . Para mostrar que $\bigcup_{w \in \mathbb{Z}[i]} w + F$ es una teselación falta ver que este conjunto es un **empaquetamiento** de sus miembros, es decir que

$$(w + F)^\circ \cap (w' + F)^\circ = \emptyset \quad \text{para } w, w' \in \mathbb{Z}[i]; w \neq w' \quad (41)$$

Figura 10. Se muestran las primeras 12 iteraciones del proceso (39).

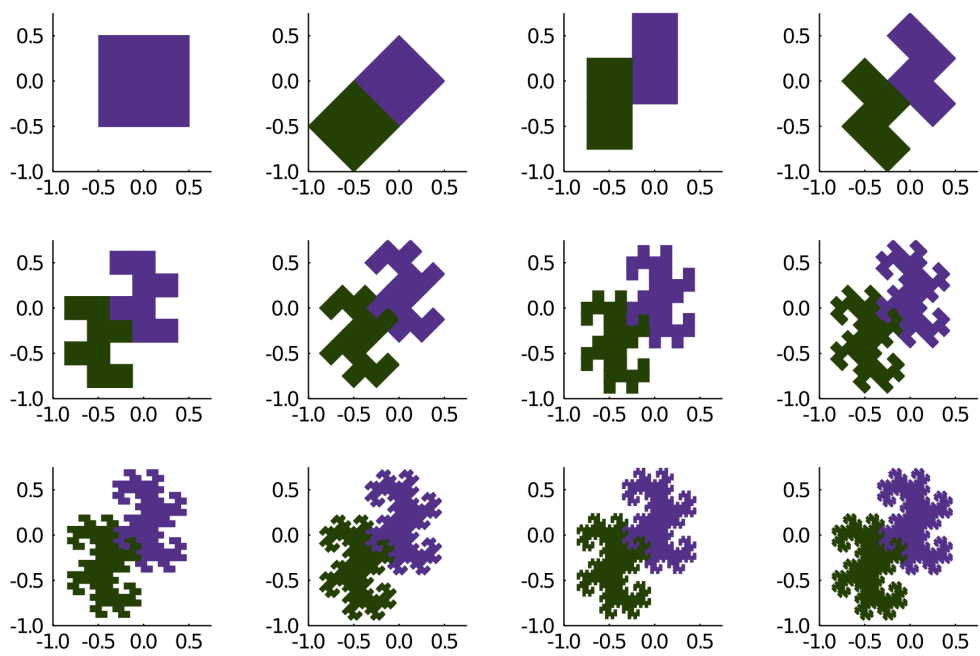
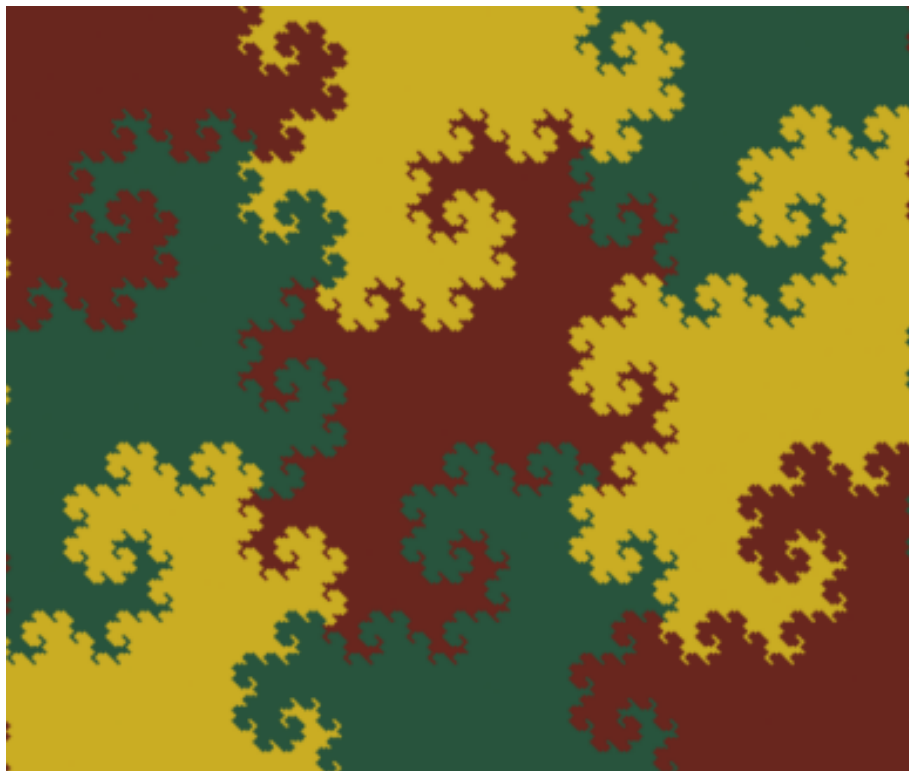


Figura 11. Los conjuntos F y sus vecinos inmediatos.



En palabras, que los interiores de dos copias de F diferentes tienen intersección vacía. Esto es equivalente, a mostrar que la intersección de dos copias diferentes de F no contiene algún disco y por lo tanto tiene medida de Lebesgue cero.

Procedemos entonces a demostrar que nuestra familia $\{w + F\}_{w \in \mathbb{Z}[i]}$ es una teselación del plano. Esta demostración usará conceptos bastante elementales de topología. El siguiente lema implicará el resultado.

Lema 2.2.5. Los números complejos de la forma $(m + ni)(-1 + i)^{-k}$ (que pertenecen al conjunto $(-1 + i)^{-k}\mathbb{Z}[i]$) para algunos enteros m, n y algún $k \in \mathbb{N}$, forman un conjunto denso en \mathbb{C}

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces $d(z, \mathbb{Z}[i]) \leq \sqrt{2}$, puesto que los enteros Gaussianos forman una malla de cuadrados con lado 1, la cual cubre todo el plano complejo.

Sea $r > 0$. Por la propiedad Arquimediana de los números reales existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $kr > 1$ y por lo tanto $r > 1/k$. Para $k \geq 3$ se tiene que $r > 1/k \geq 1/\sqrt{2}^k$.

Si se considera el conjunto $(-1 + i)^{-k-1}\mathbb{Z}[i]$, entonces las distancias entre los puntos de la malla formada por estos puntos es reducida en un factor $\sqrt{2}^{-(k-1)}$

$$d(z, (-1 + i)^{-k-1}\mathbb{Z}[i]) \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^{-(k-1)} = \sqrt{2}^{-k}.$$

Por lo tanto, si el disco con centro z y radio r es $D(z, r)$, se tiene que

$$D(z, r) \cap (-1 + i)^{-k-1}\mathbb{Z}[i] \neq \emptyset,$$

ya que $r > \sqrt{2}$.

Por lo tanto, que $(-1 + i)^{-k-1}\mathbb{Z}[i]$ es denso en \mathbb{C}

□

Se denota $M = (-1 + i)^{-k}\mathbb{Z}[i]$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Corolario 2.2.6. Si $A \subseteq \mathbb{C}$ es un subconjunto abierto entonces $M \cap A$ es denso en A .

Demostración. Para $z \in A$ se toma un disco abierto con radio $r > 0$ tal que $D(z, r) \subseteq A$. Puesto que M es denso en todo el plano complejo, existe algún punto de esta malla en $D(z, r)$. Por lo tanto, $D(z, r) \cap M \neq \emptyset$.

□

Lema 2.2.7. Si $z \in M$ entonces z tiene una única representación en base $-1 + i$.

Demostración. Si $(a_t \dots a_0.a_{-1}a_{-2} \dots)_{-1+i}$ es una representación de $z \in M$ entonces existe un k tal que $z' = (-1 + i)^k z$ es un entero Gaussiano y por lo tanto $(a_t \dots a_{-k}.a_{-(k+1)} \dots)$ es una representación de z' . Entonces es suficiente demostrar que todo entero Gaussiano tiene una única representación en base $-1 + i$. En particular, esta representación es la representación finita que encontramos en el Teorema 2.2.3.

Se procede por contradicción. Suponga que es posible escribir un entero Gaussiano w como $(0.b_{-1}b_{-2} \dots)_{-1+i}$. Entonces se considera representación finita única de $-w$, así $-w = (b_s \dots b_0)_{-1+i}$. Entonces es claro que con ambas representaciones se obtiene una representación de 0:

$$(b_s \dots b_0.b_{-1}b_{-2} \dots)_{-1+i} = w - w = 0. \quad (42)$$

Sea $D(0, 3) \cap \mathbb{Z}[i]$ el conjunto de los enteros Gaussianos con magnitud menor que 3. Dado que este conjunto es finito, y por el Teorema 2.2.3, estos elementos tienen una única representación cuya parte fraccionaria es nula, entonces se puede decir que hay un número finito de representaciones y por lo tanto, un entero positivo K tal que si $z \in D(0, 3) \cap \mathbb{Z}[i]$ su representación finita tiene a lo más K dígitos.

Multiplicando la ecuación (42) por $(-1 + i)^{K+1}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^s b_j (-1 + i)^{j+K+1} + \sum_{j=1}^{\infty} b_{-j} (-1 + i)^{-j+K+1} &= 0. \\ \sum_{j=0}^{s+K+1} b_{j-(K+1)} (-1 + i)^j &= - \sum_{j=1}^{\infty} b_{-j-(K+1)} (-1 + i)^{-j}. \end{aligned} \quad (43)$$

Tomando valor absoluto a ambos lados, y teniendo en cuenta que a la izquierda se representa de un entero Gaussiano con parte fraccionaria nula, y con dígito no nulo en la posición $s + K + 1 > 1$ (es decir, un entero Gaussiano fuera de $D(0, 3)$) se encuentra la siguiente contradicción.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{s+K+1} b_{j-(K+1)} (-1 + i)^j \right| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} b_{-j-(K+1)} (-1 + i)^{-j} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 < 3. \end{aligned} \quad (44)$$

En consecuencia, todo entero Gaussiano tiene una única representación (no existen representaciones finitas) en base $-1 + i$. Por lo tanto, los elementos de M también tienen una única representación.

□

Este resultado se puede escribir: si $w, w' \in \mathbb{Z}[i]$ y $w \neq w'$ entonces $(w + F \cap w' + F) \cap M \neq \emptyset$. Es decir, no hay un elemento de M que se encuentre en dos copias del conjunto F .

Ahora es posible demostrar la ecuación (41) y concluir que la familia de twindragons forman una teselación del plano.

Teorema 2.2.8. Si w, w' son enteros Gaussianos y $w \neq w'$ entonces los interiores de $w + F$ y $w' + F$ son disyuntos.

Demostración. Suponga que $A = (w + F)^\circ \cap (w' + F)^\circ \neq \emptyset$. Puesto que A es un conjunto abierto no vacío, por el Corolario **2.2.6** existe un elemento m de M tal que $m \in A$. Pero esto contradice el Lema **2.2.7**, pues m tendría una representación con parte entera w y otra con parte entera w' .

Se concluye que, $A = (w + F)^\circ \cap (w' + F)^\circ = \emptyset$.

□

Finalmente se ha demostrado que la familia $\{w + F\}_{w \in \mathbb{Z}[i]}$ es una teselación del plano complejo, lo cual era el objetivo principal de esta sección.

En esta sección se desarrolla la teoría necesaria para construir las figuras geométricas introducidas en la sección anterior usando sistemas numéricos. Se inicia con el dragón de Heighway para el cual se usan sistemas numéricos más exóticos, aunque similares, al que se usa para construir el Twindragon.

BIBLIOGRAFÍA

BENEDEK Ana Maria & PANZONE, Rafael. “On some notable plane sets, II: Dragons”. En: 1994.

DAVIS Chandler & KNUTH, Donald. “Number Representations and Dragon Curves”. En: *Journal of Recreational Mathematics* 3 (1970), págs. 66 -81 (vid. págs. 9, 10, 13, 20, 21, 43).

DEKKING, Michel. “Paperfolding morphisms, planefilling curves, and fractal tiles”. En: *Theoretical Computer Science* 414.1 (2012), págs. 20 -37. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2011.09.025> (vid. pág. 12).

DEKKING Michel & FRANCE, Michel Mendès & VAN DER POORTEN Alf. “Folds! I.” English. En: *Mathematical Intelligencer* 4.3 (sep. de 1982), págs. 130-138. DOI: 10.1007/BF03024244 (vid. pág. 12).

— “Folds! II.” En: *The Mathematical Intelligencer* 4.4 (1982), págs. 173-181. DOI: 10.1007/BF03023552 (vid. pág. 12).

— “Folds! III.” En: *The Mathematical Intelligencer* 4.4 (1982), págs. 190-195. DOI: 10.1007/BF03023555 (vid. pág. 12).

GILBERT, William. “Complex Numbers with three radix expansions”. En: *Canadian Journal of Mathematics* 34 (1982), págs. 1335-1348 (vid. págs. 11, 42, 50).

— “Fractal geometry derived from complex bases”. En: *The Mathematical Intelligencer* 4.2 (1982), págs. 78-86. DOI: 10.1007/BF03023486 (vid. págs. 11, 17, 42).

- KÁTAI Imre & SZABÓ, Júlia. "Canonical number systems for complex integers". En: *Acta Sci. Math.(Szeged)* 37.3-4 (1975), págs. 255-260 (vid. págs. 11, 42, 47).
- NGAI Sze-Man & NGUYEN, Nhu. "The Highway Dragon Revisited". En: *Discrete & Computational Geometry* 29 (2003), págs. 603-623 (vid. pág. 12).
- SANDERSON, Grant. *Hilbert's Curve: Is infinite math useful?* <https://www.youtube.com/watch?v=3s7h2MHQtxc&t=886s>. 2017 (vid. págs. 9, 11).
- TABACHNIKOV, Sergei. "Dragon Curves Revisited". En: *The Mathematical Intelligencer* 36 (2014), págs. 13-17 (vid. pág. 12).
- VASILYEV Nikolay & GUTENMACHER, Victor. "Dragon Curves". En: *Quantum Magazine* 6.1 (1995), págs. 5-9 (vid. pág. 12).