Curso de refuerzo en matemáticas para estudiantes de admisión especial universitaria: habilidades para la resolución de problemas

Ana Mileydy González García.

Trabajo de Grado para Optar al Título de Magister en Educación Matemática

Directora

Sandra Evely Parada Rico.

Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

Codirector

Ronald Eduardo Paternina Salguedo

Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemáticas

Bucaramanga

2022

Dedicatoria

A DIOS POR SU INFINITO AMOR Y MISERICORDIA EN MI VIVIR.

Agradecimientos

A mis estudiantes por proporcionar sentido y amor a mi vida.

A mis padres Nestor y Amalia por darme la vida y ser ejemplo de fortaleza y fuerza ante las adversidades, gracias por su amor incondicional y todas sus enseñanzas día tras día; a mis hermanas Yurley, Daniela y María son fortaleza; a los amores pequeños: Thiago, Santiago y Sofia, gracias por tanta ternura y amor; a mi abuelito Gilberto, mi tío Hermes por asumir el rol de padres, en fin… al regalo más grande y valioso de la vida: La familia.

A todos mis amigos (en especial a ti Jackson, José, Mayer, Daniel, Wilmer, Gersain, Yeyo) gracias por cada palabra y momento compartido. A mis amigas: Dayra Villabona, Lizeth, Deyanira, Ingrith, Tatiana, Daniela Díaz, Jennifer Rocío, Yennifer Torres, gracias por ser tan incondicionales.

A mis compañeros de estudios: Angelica, Joao, Yessika, Ricardo, Sebastián, Daniela, Fernando, Cristian, Johana, Lised, Joaquín

A Sandra Evely por su confianza, enseñanza y cariño sincero. Profe, siempre tendré gratitud, respeto y admiración hacia usted por su excelente calidad humana.

A la Universidad Industrial de Santander por formarme integralmente y concederme la realización de mis sueños (orgullosa y agradecida con la educación pública y de calidad UIS).

Al Dr. Domingo Yojcom por sus valiosos aportes y todo el apoyo ofrecido.

A los profesores Jorge Fiallo, Ronald, Johana y Luis Ángel Pérez por sus enseñanzas y apoyo durante estos años. ***Gratitud a todos los que han sido parte de mi vivir.***

Al Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia – MINCINCIAS quien está financiando el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”. Código1115-852 70767, con el proyecto “Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores”. Financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología”. Código70783, con recursos del Patrimonio autónomo Fondo Nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas, contrato CT 183-2021.

Tabla de Contenido

Pág.

Introducción 21

1 Génesis de la investigación 24

1.1 Contexto y problemática 24

1.2 Presentación del problema: pregunta y objetivo 30

2 Antecedentes 33

2.1 Educación superior inclusiva 34

2.1.1 A nivel internacional 34

2.1.2 A nivel nacional 36

2.1.3 A nivel local 38

2.2 Curso en matemática para estudiantes de primer nivel universitario 40

2.2.1 A nivel internacional 40

2.2.2 A nivel nacional 41

2.2.3 A nivel local 42

2.3 Habilidades matemáticas 43

2.4 Resolución de problemas en matemáticas 46

3 Marco conceptual 51

3.1 Elementos que sustentan la estructura curricular. 52

3.1.1 Ejes temáticos 52

3.1.1.1 Patrones y Regularidades. 52

3.1.1.2 Procesos algebraicos. 53

3.1.1.3 Análisis de funciones. 54

3.1.2 Estructura metodológica de los talleres..... 55

3.2 Resolución de problemas 56

3.2.1 Resolución de problemas variacionales 58

3.3 Habilidades para la resolución de problemas variacionales. 60

3.3.1 Habilidad para comprender el problema. 63

3.3.2 Habilidad para plantear y ejecutar los diversos caminos de solución. 64

3.3.3 Habilidad para validar y verificar las soluciones encontradas. 66

4 Metodología de la investigación 67

4.1 Fase I: Análisis previo. 68

4.2 Fase II: Planeación del curso. 69

4.3 Fase III: Diseño de los talleres. 71

4.3.1 Taller 1: Patrones y Regularidades 72

4.3.2 Taller 2: Expresiones algebraicas 79

4.3.3 Taller 3: Expresiones algebraicas y cambios de representación. 84

4.3.4 Taller 4: Ecuaciones e inecuaciones 93

4.3.5 Taller 5: Sistema de Ecuaciones lineales de orden 2x2 100

4.3.6 Taller 6: Sistema de Ecuaciones lineales de orden 2x2 107

4.3.7 Taller 7: Procesos Infinitos 113

4.3.8 Taller 8: Sucesiones y procesos infinitos. 117

4.3.9 Taller 9 Análisis funcional. 123

4.3.10 Taller 10: Variación Contextos. 132

4.3.11 Taller 11: Funciones Variaciones Contexto. 138

4.3.12 Taller 12: Noción de límite 144

4.3.13 Taller 13: Volumen caja con tapa 150

4.3.14 Taller 14 Modelos matemáticos 156

4.3.15 Taller 15 Reconociendo la variación. 163

4.4 Fase IV implementación de los talleres. 167

4.5 Fase V: Evaluación de la primera implementación. 168

4.6 Fase VI Rediseño 169

4.7 Fase VII Segunda implementación. 170

4.8 Fase VIII Categorización de habilidades logradas en el curso. 172

5 Rediseño……. 172

5.1 Ajustes a los talleres 173

5.1.1 El Taller 2 de la primera versión pasa a ser el Taller 1 de la segunda versión 173

5.1.2 El Taller 1 de la primera versión pasa a ser el Taller 2 de la segunda versión 174

5.1.3 Taller 3 con un intercambio en el problema de actividad retadora. 174

5.1.4 Taller 4 modificaciones de problemas al interior. 175

5.1.5 Taller 5 y Taller 6 sin modificaciones 175

5.1.6 Taller 7 y Taller 8 se unificaron (omitiendo algunos problemas) 176

5.1.7 Taller 9 y taller 15 se unifican, se convierte en el taller 8 177

5.1.8 EL taller 10 en la primera versión es el taller 9 en la segunda versión 178

5.1.9 El taller 11 en la primera versión se convierte en el taller 10 178

5.1.10 Taller 12 de la primera versión se convierte en el taller 11 (modificaciones) 180

5.1.11 Taller 13 de la primera versión se convierte en el taller 12 (sin modificaciones) 181

5.1.12 Taller 14 de la primera versión se convierte en el taller 13 (modificaciones) 181

5.2 Nueva organización del curso para la segunda implementación 181

6 Análisis y discusión de resultados. 183

6.1 Evidencias de la habilidad para la comprensión del problema 184

6.2 Evidencias de la habilidad para plantear y ejecutar diversos caminos de solución 215

6.3 Evidencias de la habilidad para validar y verificar la solución del problema..... 240

7 Conclusiones 262

7.1 Resultados del diseño del Curso de refuerzo en Matemáticas 262

7.2 Reflexiones de la implementación del Curso de refuerzo en Matemáticas 265

7.3 Descripción de las habilidades para resolver problemas posibilitadas en el curso 268

7.3.1 Descriptores de la habilidad para comprender el problema. 268

7.3.2 Descriptores de la habilidad para plantear y ejecutar diversos caminos solución 269

7.3.3 Descriptores de la habilidad para validar y verificar la solución. 269

7.4 Recomendaciones para la replicabilidad del curso 270

Referencias Bibliográficas 272

Lista de Tablas

Pág.

Tabla 1. Programas académicos por facultad que incluyen las asignaturas. 31

Tabla 2 Descriptores de habilidades para comprender el problema. 64

Tabla 3 Descriptores habilidades plantear y ejecutar diversas soluciones. 65

Tabla 4 Descriptores de Habilidades para validar y verificar la solución. 66

Tabla 5 Organización curso para primera implementación. 70

Tabla 6 Acercamiento aritmético 73

Tabla 7 Uso de la tabla 75

Tabla 8 A embaldosar registro tabular. 75

Tabla 9 Acercamientos analíticos 83

Tabla 10 Solución ecuaciones Problema información y exploración libre taller 4 94

Tabla 11 Estrategia registro tabular. 97

Tabla 12 Impuestos problema Costa Rica. 100

Tabla 13 Estrategia de conteo. 104

Tabla 14 Uso de la tabla 114

Tabla 15 Representación tabular secuencia. 117

Tabla 16 Respuestas sucesiones Fibonacci. 120

Tabla 17 Representación tabular. 120

Tabla 18 Representación tabular de las sucesiones. 122

Tabla 19 Tarifas planes de minutos 127

Tabla 20 Representaciones algebraicas planes de minutos 127

Tabla 21 Libras de arroz vs precio. 131

Tabla 22 Precios de maíz 134

Tabla 23 Situación minutos. 135

Tabla 24 Litros vs tiempo. 140

Tabla 25 Altura vs Tiempo 140

Tabla 26 Casos particulares decrecimiento de la población 163

Tabla 27 Tipo de admisión primera implementación. 168

Tabla 28 Fechas encuentros sincrónicos. 170

Tabla 29 Tipo de admisión para la segunda implementación. 171

Tabla 30 Actividades seleccionadas para la habilidad de comprender. 185

Tabla 31 Actividades seleccionadas para la habilidad de plantear y ejecutar. 215

Tabla 32 Actividades seleccionadas para la habilidad de validar y verificar. 241

Lista de Figuras

Pág.

Figura 1 Admisiones especiales UIS por periodos académicos. 27

Figura 2 Nivel de Riesgo SEA-Matemáticas. 29

Figura 3 Porcentaje de aprobación asignaturas en la UIS. 31

Figura 4 Habilidades para resolver problemas. 45

Figura 5 Elementos teóricos. 51

Figura 6 Proceso metodológico. 68

Figura 7 Problema información y exploración libre del taller 1 73

Figura 8 Problema información y exploración libre del taller 1 74

Figura 9 Problema exploración dirigida del Taller 1 76

Figura 10 Problema tarea retadora del taller 1 77

Figura 11 Problema tarea retadora del taller 1. 79

Figura 12 Problema información y exploración libre del taller 2 81

Figura 13 Problema exploración dirigida del taller 2 82

Figura 14 Problema tarea retadora del taller 2 84

Figura 15 Problema información y exploración libre del taller 3 85

Figura 16 Representación gráfica ahorros. 86

Figura 17 Problema exploración dirigida del taller 3 88

Figura 18 Representación gráfica del problema exploración dirigida del taller 3. 90

Figura 19 Problema tarea retadora del taller 3. 91

Figura 20 Regresión de dos variables software GeoGebra 92

Figura 21 Problema información y exploración libre del taller 4 93

Figura 22 Problema exploración e información libre del taller 4 95

Figura 23 Problema exploración dirigida del taller 4 95

Figura 24 Representación de f(x) y g(x) 96

Figura 25 Problema exploración dirigida 2.2 del taller 4. 97

Figura 26 Problema tarea retadora del taller 4 99

Figura 27 Problema información y exploración libre del taller 5 101

Figura 28 Solución pizza y bebidas método gráfico 102

Figura 29 Problema exploración dirigida del taller 5. 103

Figura 30 Solución método gráfico. 103

Figura 31 Problema tarea retadora del taller 5. 105

Figura 32 Solución gráfica modelada. 106

Figura 33 Problema información y exploración libre del taller 6. 108

Figura 34 Solución por método gráfico 108

Figura 35 Problema exploración dirigida del taller 6 109

Figura 36 Método Gráfico. 110

Figura 37 Problema tarea retadora del taller 6. 111

Figura 38 Sistema de ecuaciones inconsistente. 112

Figura 39 Sistema de ecuaciones con infinitas soluciones. 112

Figura 40 Problema información y exploración libre del taller 7 113

Figura 41 Problema exploración dirigida del taller 7. 115

Figura 42 Problema tarea retadora del taller 7 116

Figura 43 Problema información y exploración libre del taller 8. 118

Figura 44 Problema exploración dirigida del taller 8 119

Figura 45 Representaciones GeoGebra. 121

Figura 46 Problema tarea retadora del taller 8 121

Figura 47 Problema información y exploración libre del taller 9 124

Figura 48 Diversas representaciones para la primera forma de devengar el salario. 125

Figura 49 Representación segunda alternativa 125

Figura 50 Problema exploración dirigida del taller 9 126

Figura 51 Representación gráfica. 128

Figura 52 Análisis en 250 min. 129

Figura 53 Problema exploración dirigida del taller 9. 129

Figura 54 Tabla de valores problema de depreciación. 130

Figura 55 Problema tarea retadora del taller 9 131

Figura 56 Representación situación arroz. 132

Figura 57 Problema información y exploración libre del taller 10 133

Figura 58 Problema exploración dirigida del taller 10. 135

Figura 59 Representación situación minutos. 136

Figura 60 Problema tarea retadora del taller 10. 137

Figura 61 Utilidad situación de trabajo 137

Figura 62 Representación ingresos y sueldo estudiante por un mes 138

Figura 63 Problema información y exploración libre del taller 11 139

Figura 64 Problema exploración dirigida del taller 10. 141

Figura 65 Comparación del llenado de los tanques. 142

Figura 66 Problema tarea retadora del taller 11 143

Figura 67 Problema información y exploración libre del taller 12 145

Figura 68 Situación problema económico. 146

Figura 69 Problema exploración dirigida del taller 12 147

Figura 70 Problema tarea retadora del taller 12 149

Figura 71 Representación gráfica T(w) 150

Figura 72 Problema información y exploración libre del taller 13 151

Figura 73 Desarrollo del paralelepípedo. 152

Figura 74 Problema exploración dirigida del taller 13. 152

Figura 75 Exploración applet GeoGebra para abordar el problema. 153

Figura 76 Problema tarea retadora del taller 13 155

Figura 77 Problema información y exploración libre del taller 14 157

Figura 78 Representación simulación de la situación GeoGebra. 158

Figura 79 Representación problema longitud del cable 159

Figura 80 Problema exploración dirigida del taller 14 159

Figura 81 Modelo matemático situación de salud. 160

Figura 82 Problema tarea retadora del taller 14 161

Figura 83 Decrecimiento de la población 163

Figura 84 Problema información y exploración libre del taller 15 164

Figura 85 Problema información y exploración libre del taller 15 165

Figura 86 Demostración segundo Teorema de Tales 165

Figura 87 Problema información y exploración libre del taller 15 166

Figura 88 Problema información y exploración libre del taller 15 167

Figura 89 Problema información y exploración libre del taller 10. 179

Figura 90 Nueva organización del curso 182

Figura 91 Problema información y exploración libre del taller 1 186

Figura 92 Respuesta de E1 al inciso a) 186

Figura 93 Respuesta de E3 al inciso a) 187

Figura 94 Problema información y exploración libre del taller 2 188

Figura 95 Respuesta de E9 al inciso a) Problema información y exploración libre 189

Figura 96 Respuesta de E6 al inciso a) Problema información y exploración libre 190

Figura 97 Respuesta de E1 al inciso a) Problema del taller 2. 190

Figura 98 Problema exploración dirigida del taller 1. 192

Figura 99 Respuesta de E2 al inciso a) del Problema exploración dirigida del taller 1 193

Figura 100 Respuesta de E1 al inciso b) Problema exploración dirigida del taller 1 193

Figura 101 Respuesta de E9 al inciso b) del problema del taller 1. 194

Figura 102 Problema información y exploración libre del taller 5 194

Figura 103 Respuesta de E3 al inciso a) del problema. 195

Figura 104 Repuesta E4 inciso a) al Problema información y exploración 196

Figura 105 Respuesta de E8 al inciso a) problema del taller 5 197

Figura 106 Respuestas de E1 y E4 al inciso b) del Problema del taller 5. 198

Figura 107 Problema exploración dirigida del taller 6 199

Figura 108 Respuesta de E8 a los incisos a, b) Problema exploración 200

Figura 109 Respuesta de E5 al inciso d) del problema exploración dirigida del taller 200

Figura 110 Respuesta de E10 al inciso e) problema exploración dirigida del taller 6. 201

Figura 111 Problema información y exploración libre del taller 15 202

Figura 112 Respuesta de E3 al problema de los cables 203

Figura 113 Respuesta de E8 al problema de los cables 204

Figura 114 Respuesta de E10 al problema de los cables 204

Figura 115 Respuesta de E1 al problema de los cables. 205

Figura 116 Respuesta de E10 al problema de la semicircunferencia. 206

Figura 117 Respuesta de E8 al problema de la semicircunferencia. 207

Figura 118 Variación una de las alturas del triángulo. 207

Figura 119 Respuesta de E9 al problema de la semicircunferencia 208

Figura 120 Puesta en común problema de la semicircunferencia 209

Figura 121 Puesta en común de la semicircunferencia 209

Figura 122 Posición tradicional de un triángulo rectángulo 210

Figura 123 Respuesta de E4 al problema de las paralelas 211

Figura 124 Respuestas de E2 y E3 al problema de las paralelas 211

Figura 125 Puesta en común donde se evidencia la comprensión 213

Figura 126 Respuesta de E3 problema del anuncio 214

Figura 127 Respuesta de E10 al problema del anuncio 214

Figura 128 Respuesta de E9 al inciso b) del problema 216

Figura 129 Respuesta de E1 al inciso b) 217

Figura 130 Respuesta de E1 al inciso b) 218

Figura 131 Respuesta de E6 al inciso b) 218

Figura 132 Respuesta E3 al inciso b) del problema1 del taller 2 219

Figura 133 Respuesta de E3 Inicio c) Problema exploración dirigida del taller 6. 220

Figura 134 Respuesta de E6 al inciso c) del problema2 del taller 6. 221

Figura 135 Respuesta de E5 al inciso f) del Problema exploración dirigida 222

Figura 136 Respuesta de E3 al inciso f) Problema exploración dirigida. 223

Figura 137 Problema tarea retadora del taller 6 224

Figura 138 Respuesta de E1 al inciso a) del problema tarea retadora 225

Figura 139 Respuesta socialización de E9 problema tarea retadora 225

Figura 140 Respuesta de E5 al inciso b) del Problema tarea retadora 226

Figura 141 Repuesta de E4 al inciso a) del problema tarea retadora del taller 6. 227

Figura 142 Respuesta de E8 inciso a), b) Problema3,2 del taller 6 228

Figura 143 Problema exploración dirigida del taller 8 230

Figura 144 Respuesta de E3 al inciso a) uso de Excel. 231

Figura 145 Respuesta de E7 al inciso a) del Problema exploración dirigida. 232

Figura 146 Respuesta de E4 al inciso a) del Problema exploración dirigida. 233

Figura 147 Respuesta de E10 al inciso a) Problema exploración dirigida del taller 8. 234

Figura 148 Representación de E8 con otras condiciones. 235

Figura 149 Respuesta de E9 al inciso b) representaciones: gráfica y algebraica. 236

Figura 150 Problema información y exploración libre del taller 9 237

Figura 151 Puesta en común E3 planteamiento de la función 237

Figura 152 Respuesta de E3 en la puesta en común. 238

Figura 153 Respuesta de E7 al inciso a) del problema del taller 9 239

Figura 154 Respuesta de E1 al inciso b) del problema 240

Figura 155 E2 Respuesta de inciso b) al problema. 241

Figura 156 Respuesta de E3 al inciso b) del problema 242

Figura 157 Puesta en común respuesta al inciso b) 242

Figura 158 Respuesta de E1 al inciso c) del Problema tarea retadora del taller 6 244

Figura 159 Respuesta de al inciso a) del Problema exploración dirigida del taller 8 246

Figura 160 Validación de las representaciones por parte de E3 247

Figura 161 Representación de E10 para el plan bajo. 248

Figura 162 Respuesta de E3 presentada en Power Point por In. 249

Figura 163 Respuesta de E1 inciso c) Problema exploración dirigida del taller 8 250

Figura 164 Respuesta de E4 al inciso c) del problema exploración dirigida del taller 8 251

Figura 165 Respuesta E8, inciso c) actividad 1 taller 9 252

Figura 166 Repuesta E6 inciso c) actividad 1 taller 9. 253

Figura 167 Problema de exploración dirigida del taller 9 254

Figura 168 Respuesta G1 puesta en común interna 255

Figura 169 Idea E3 para la situación de los minutos. 255

Figura 170 Respuesta G1 función round(x) 256

Figura 171 Respuesta G2 puesta en común interna 257

Figura 172 Respuesta G3 puesta en común interna 258

Figura 173 Respuesta E3 inciso b) c) del Problema exploración dirigida 260

Figura 174 Respuesta E4 Problema exploración dirigida del taller 9. 261

Lista de Apéndices

Ver apéndices adjuntos y pueden ser consultados en la base de datos de la Biblioteca UIS.

Apéndice A. Curso de refuerzo en Matemáticas para estudiantes de admisión especial.

Apéndice B. Autorización para el tratamiento de datos

Apéndice C. Cuestionario dirigido a los participantes del curso

Resumen

Título: Curso de refuerzo en matemáticas para estudiantes de admisión especial universitaria: habilidades para la resolución de problemas[*]

Autor: Ana Mileydy González García[**]

Palabras Clave: Educación superior inclusiva, Resolución de problemas, Habilidades.

Descripción:

Se reporta una investigación que tuvo por objetivo: Diseñar, implementar y valorar un curso de refuerzo en matemáticas dirigido a estudiantes de admisión especial de la Universidad Industrial de Santander (UIS) a fin de favorecer en ellos el desarrollo de sus habilidades en la resolución de problemas. La investigación se sustenta teóricamente en documentos oficiales del Ministerio de Educación Nacional de Colombia y algunas investigaciones del campo de Educación Matemática relacionadas con el proceso de resolución de problemas como eje orientador y organizador del currículo en matemáticas; en este estudio, se hace énfasis en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos.

Para cumplir con el objetivo de investigación se desarrolló un proceso metodológico bajo el enfoque de diseño curricular propuesto por Díaz-Barriga et al. El cual, consistió en ocho fases, en las que se diseñó, implementó y valoró el curso de refuerzo en matemáticas. El estudio se implementó con estudiantes provenientes de grupos priorizados en la Universidad Industrial de Santander (contexto del estudio).

Del estudio emergieron tres categorías de análisis, que corresponden a las habilidades del proceso de resolución de problemas que se potenciaron a través del curso de Refuerzo en matemáticas: i) comprender el problema; ii) plantear y ejecutar diversos caminos de solución iii) validar y verificar la solución del problema. Las habilidades fueron descritas bajo los aportes teóricos de Polya, Krulik & Rudnick, Shoenfeld, Santos-Trigo.

---

[*] Trabajo de Grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Maestría en educación matemática. Directora: Sandra Evely Parada Rico. Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa. Codirector Ronald Eduardo Paternina Salguedo. Doctor en Matemáticas.

Abstract

Title: Mathematics reinforcement course for students with special university admission: problem-solving skills[*]

Author (s): Ana Mileydy González García[**]

Key Words: Inclusive higher education, Problem solving, Skills.

Description:

This research is reported with the objective of designing, implementing and assessing a reinforcement course in mathematics aimed at special admission students of the Industrial University of Santander in order to benefit in them the development of their problem-solving skills. This research is theoretically based on official documents from the Ministry of National Education of Colombia and some research in the field of Mathematics Education related to the process of problem solving as a guiding axis and organizer of the mathematics curriculum. The investigation focuses on the variational thinking and algebraic and analytical systems.

In order to achieve the aim of this research, a methodological process was followed under the curricular design approach proposed by Díaz-Barriga et al. This type of research is based on eight phases, in which the reinforcement course in mathematics was designed, implemented and assessed. The study was implemented with students from prioritized groups at the Industrial University of Santander (context of the study).

Three categories of analysis emerged from the study, corresponding to the skills of the problem-solving process that were enhanced through the Mathematics Reinforcement course: i) understanding the problem; ii) propose and execute various solution paths iii) validate and verify the solution of the problem. The skills were described under the theoretical contributions of Polya, Krulik & Rudnick, Schoenfeld, Santos-Trigo.

[*] Degree Work

[**]Science Faculty. School of Mathematics. Master of Mathematics Education. Director: Sandra Evely Parada Rico. Doctor of Sciences Educational Mathematics Specialty. Codirector: Ronald Eduardo Paternina Salguedo. Doctor of Mathematics

Introducción

La educación es concebida por las naciones como un derecho fundamental y un factor de transformación social, cultural y económico. Colombia desde la (Const., 1991) reconoce y protege la diversidad étnica y cultural, por lo tanto, se define la educación inclusiva como aquella que reconoce y atiende las particularidades.En la política de educación superior inclusiva emitida por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2013) se mencionan orientaciones para que las universidades emprendan acciones y estrategias encaminadas a promover y garantizar a los estudiantes el ingreso, la permanencia y la culminación de programas académicos, asimismo, promover prácticas y currículos flexibles.

La Universidad Industrial de Santander (UIS) cuenta con el (Consejo Académico, Acuerdo 282, 2017) en el que, se posibilita el acceso a bachilleres pertenecientes a diversos grupos priorizados MEN (2013), como los son los indígenas, víctimas del conflicto armado, población desmovilizada, entre otros. En las disposiciones encontramos que a los estudiantes se les exige una puntuación en el examen de estado igual o superior al 80% respecto al corte del programa que aspira cursar. Asimismo, investigaciones previas de Pineda (2018) y Echeverría (2022) se han preguntado ¿qué acompañamiento ofrece la universidad a los estudiantes que ingresan a programas de ciencias e ingenierías para afrontar los cursos de matemáticas como cálculo diferencial o álgebra lineal?; cursos que según los informes de la Vicerrectoría Académica de la UIS tienen un alto índice de repitencia y cancelación.

Teniendo en cuenta lo anterior pretendimos orientar nuestra investigación a responder: ¿Qué habilidades para la resolución de problemas logran desarrollar estudiantes de admisión

especial de la Universidad Industrial de Santander que participan de un curso de refuerzo de matemáticas?

Los sustentos teóricos que fundamentan el estudio corresponden a los lineamientos curriculares en matemáticas MEN (1998), los estándares básicos de matemáticas MEN (2006), los principios y estándares de matemáticas del NCTM (2003) e investigaciones del campo de la educación matemática que emplean la resolución de problemas (objeto de estudio) como un proceso que organiza y estructura el currículo en matemáticas.

La metodología que siguió el estudio correspondió con el enfoque de diseño-curricular propuesto por Díaz-Barriga et al. (1990) y se desarrolló en ocho fases. El primer diseño se llevó a cabo en las fases de: i) análisis previo; ii) planeación del curso; iii) diseño de talleres. La primera implementación en la fase iv) implementación de los talleres. Posterior, se hizo una fase v) de evaluación de la primera implementación y una fase vi) de rediseño del curso; de la que obtuvimos el diseño final del curso. La valoración de las habilidades se realizó en la fase vii) segunda implementación, con estudiantes provenientes de grupos priorizados del semestre 2021-II. Los datos recolectados, fueron proporcionados y autorizados para su tratamiento por parte de diez estudiantes. Esta información nos permitió dar cuenta de las habilidades desarrolladas y que se reportan en esta disertación en la fase viii) categorización de habilidades.

Los resultados que emergieron del estudio se reportan en las tres categorías de análisis: i) habilidad para comprender el problema, ii) habilidad para plantear y ejecutar diversos caminos solución, iii) habilidad para validar y verificar la solución, las cuales, son caracterizadas y sustentadas teóricamente por las perspectivas de los autores Polya (1965), Krulik & Rudnick (1989), Santos-Trigo (2014), Shoenfeld (2016). Este documento se consolidó como el reporte final del estudio y consta de los siguientes apartados:

Capítulo 1. Génesis de la investigación: Aquí mencionamos aspectos generales relacionados con el contexto de la educación inclusiva a nivel mundial, nacional y local. Se describe el contexto de la Universidad Industrial de Santander en el que se desarrolla el estudio y se enuncia concretamente la pregunta y el objetivo de investigación.

Capítulo 2. Antecedentes: Aquí exponemos algunas políticas de educación inclusiva; se describe la incidencia de algunos cursos dirigidos a estudiantes de primer semestre en algunas universidades; finalmente, se mencionan estudios de habilidades y la resolución de problemas.

Capítulo 3. Marco conceptual: En este apartado presentamos los elementos teóricos que sustentan la estructura curricular del curso haciendo énfasis en el objeto de estudio, es decir, la resolución de problemas y las habilidades para este proceso.

Capítulo 4. Metodología de la investigación: Aquí describimos las fases que permitieron alcanzar el objetivo de investigación y se exhiben el curso de refuerzo en matemáticas que planteamos con sus respectivos talleres (análisis previo de los problemas).

Capítulo 5. Rediseño: En este capítulo presentamos los ajustes a los talleres del curso que se realizaron al primer diseño del curso. El rediseño surge luego de un proceso de valoración del primer pilotaje del curso de refuerzo. Aquí el lector encontrará la nueva organización del curso (diseño final)

Capítulo 6. Análisis y discusión de resultados: Allí presentamos los resultados del análisis de los datos de la segunda implementación del curso de refuerzo con relación a la categorización de las habilidades para el proceso de resolución de problemas.

Capítulo 7. Conclusiones: En éste respondemos concretamente a la pregunta de investigación planteada en el estudio.

1 Génesis de la investigación

En este capítulo exponemos aspectos relacionados con la educación superior inclusiva a nivel internacional, nacional y particularmente, desde el contexto de la Universidad Industrial de Santander (UIS). Luego, presentamos las motivaciones que llevaron al planteamiento de nuestra investigación.

1.1 Contexto y problemática

En el año de 1948 la Asamblea general de las Naciones Unidas en la resolución 217 A (III) proclamó la Declaración Universal de los Derechos Humanos (DUDH) en el cual se manifiesta la educación como un derecho fundamental para todas las personas (ver Artículo 26).

Por otro lado, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), la Organización de las Naciones Unidas (ONU) y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) entre otras, desde hace aproximadamente sesenta años, han gestado, orientado, construido y promovido políticas que favorecen la educación como un derecho para todos; estableciéndola como un factor fundamental para la transformación de los pueblos.

No obstante, de acuerdo con los informes de seguimiento de la educación en el mundo (GEM) desarrollados por la UNESCO, el tema la educación para todos pasa a ser de alta complejidad y con la creencia de ser una utopía, pues existen grandes desigualdades y brechas tanto económicas, sociales y culturales en los diferentes países.

En Colombia, la (Const., 1991) en los artículos: 13, 44, 45, 67, 68; instaura la educación como un derecho fundamental, el cual, debe ser garantizado y promovido por el estado, la sociedad

y la familia; además, se menciona que la educación es un servicio público con función social que le permite al individuo formarse en derechos humanos, construir la paz, los valores democráticos, sociales y culturales. Asimismo, establece como obligaciones especiales del estado, la educación dirigida a personas que poseen alguna limitación (física o mental) o aquellas personas con capacidades excepcionales.

En este sentido, el gobierno, a través del Ministerio de Educación Nacional (MEN) crea políticas públicas que promueven y favorecen la inclusión educativa en los diferentes niveles de escolaridad, estas políticas se circunscriben en la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994) y en la Ley de Educación Superior (Ley 30 de 1992).

Sin embargo, en las Instituciones de Educación Superior (IES) la inclusión educativa es un tema reciente, el MEN (2013) reconoce y promueve la protección especial a grupos priorizados (personas con discapacidad, grupos étnicos, población víctima del conflicto armado, población habitante de frontera). El propósito fundamental es la excelencia de la educación superior, promoviendo la paz, la participación e inclusión de distintos actores sociales y culturales en las IES para la construcción de país.

Desde la (Ley 30 de 1992), se crea el Consejo Nacional de Educación Superior (CESU), el cual, bajo sus facultades legales, emite el Acuerdo por lo superior 2034, allí se encuentran lineamientos de la educación inclusiva que atienden principalmente los temas de acceso, permanencia y graduación, como: apoyos académicos, prácticas didácticas y pedagógicas, currículos flexibles y adaptables para atender las particularidades, flexibilidad en los procesos de acceso, entre otras.

De igual manera, el MEN (2013) alude que, un país con mejor educación favorece la construcción de una sociedad equitativa y en paz. Además, el MEN establece que la diversidad se

debe considerar como una característica presente en todo ser humano el cual, exige repensar las políticas y prácticas educativas, para responder a tal diversidad desde el punto de vista individual, social y cultural. Por lo anterior, la política define que:

> La educación inclusiva está relacionada con la capacidad de potenciar y valorar la diversidad (entendiendo y protegiendo las particularidades), promover el respeto a ser diferente, lo cual implica aprender a vivir con los demás, y garantizar la participación de la comunidad dentro de una estructura intercultural en los procesos educativos (…) la educación inclusiva tiene como objetivo central examinar las barreras para el aprendizaje y la participación propias de todo el sistema (MEN, 2013, pp.17-18).

De acuerdo con esto, la mayoría de las universidades en Colombia han emitido acuerdos que contemplan disposiciones especiales para el acceso a programas académicos a las personas provenientes de los grupos allí priorizados, entre estas disposiciones especiales encontramos: incentivos económicos en el valor de la matrícula (descuentos, exoneración del pago y derechos académicos), menor puntaje en las pruebas de admisión, simultáneamente, una cantidad de cupos definidos por cada programa. Aclaramos que, debido a la autonomía universitaria estas disposiciones varían.

Promover la educación inclusiva en Colombia requiere que las IES, examinen las barreras de aprendizaje para emprender acciones y estrategias concretas que permitan mitigarlas. Pero ¿Qué son las barreras de aprendizaje? desde la política se enuncia que “abarcan problemas de índole social, económico, político, cultural, lingüístico, físico y geográfico que imposibilitan a los estudiantes acceder, permanecer y/o graduarse de la educación superior teniendo en cuenta sus particularidades” (MEN, 2013, p.40).

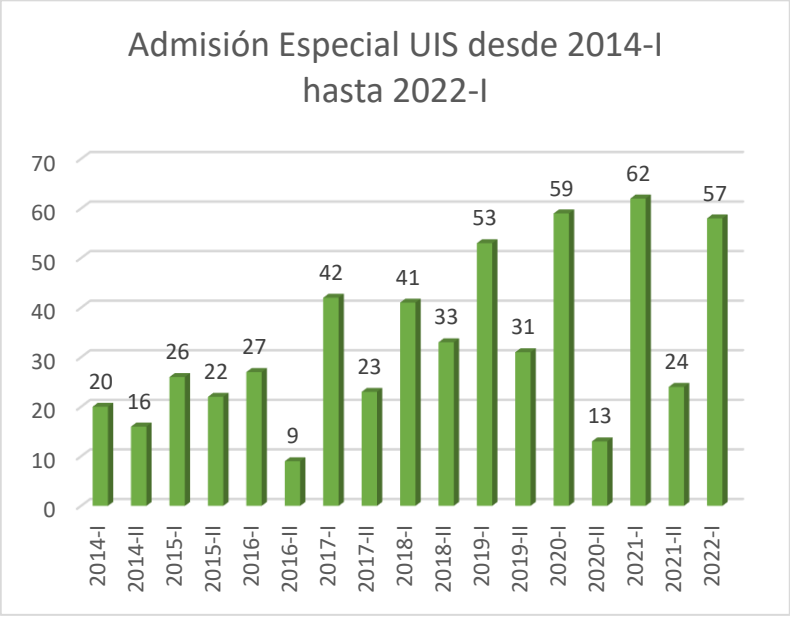
En la política actual de la UIS, en cuanto a las admisiones especiales encontramos estudiantes que pertenecen a: comunidades o resguardo indígena, población negra, afrocolombiana, raizal, procedentes de departamentos donde no existen instituciones de educación superior, difícil acceso o con problemas de orden público, desmovilizados y víctimas del conflicto armado (Consejo Académico, Acuerdo 282 de 2017).

Este acuerdo contempla, la asignación de 1 a 2 cupos por programa académico ofertado en la UIS sede principal Bucaramanga, así mismo, se exige una puntuación en el examen de estado igual o superior al 80% respecto al corte del programa que aspira cursar. Lo cual, favorece el acceso a la educación superior. En la

Figura **1**, presentamos, un reporte emitido por admisiones y registro académico, alusivo al número de estudiantes (558 en total) que ingresaron a la UIS bajo esta modalidad desde el año y periodo 2014-I hasta 2022-I.

Figura 1

Admisiones especiales UIS por periodos académicos.



Nota. Datos suministrados admisiones y registro académico UIS.

Por otra parte, desde la Escuela de Matemáticas, se tiene el programa SEA-Matemáticas adscrito al Sistema de Excelencia Académica (SEA) de la UIS, el cual busca ofrecer acompañamiento a los estudiantes y contribuir a mitigar la repitencia y deserción en las asignaturas de matemáticas. Por tanto, desde el año 2014 realiza a los estudiantes de nuevo ingreso una prueba de caracterización del pensamiento variacional. Los resultados de esta prueba permiten identificar el nivel de riesgo en matemáticas con el que ellos ingresan a la universidad y evidenciar dificultades procedimentales de tipo aritmético, métrico, geométrico y analítico reportadas por Barajas (2015); con el fin de ofrecer apoyos que les permitan atender esas dificultades o deficiencias.

Considerando lo anterior, la UIS, según Parada (2018) por medio de SEA-Matemáticas se atienden las dificultades por medio tutorías entre pares y se ofrece un curso de precálculo para estudiantes de nuevo ingreso con la finalidad de contribuir en la excelencia académica de la UIS. No obstante, hasta el periodo 2021-I; el curso de precálculo no se pudo ofrecer a los estudiantes de admisión especial.

En la Figura 2 presentamos el consolidado de los resultados de la prueba de caracterización de pensamiento variacional realizada por los estudiantes que ingresaron bajo la admisión especial desde el año 2018-I hasta el 2021-I, en las celdas resaltadas se puede ver que la mayoría de los estudiantes ingresan con un nivel de riesgo que sugiere la necesidad del acompañamiento.

La preocupación por atender a los estudiantes de los grupos priorizados había sido tema de interés en investigaciones desarrolladas desde el programa de la maestría en Educación Matemática en la UIS. Inicialmente, Pineda (2018), documenta la situación de inclusión en la UIS desde la escuela de matemáticas y plantea la inclusión de un curso aprovechando la reforma curricular que estaba elaborándose en ese momento en el plan de estudios de la licenciatura. La

investigación, permitió la consolidación del curso “Educación Matemática y Atención a la diversidad” que favorece la formación de futuros egresado de la licenciatura de la UIS, la autora deja abierta la necesidad de atender a los estudiantes de admisión especial refiriendo que “no existe un acompañamiento que les permita afrontar las exigencias de formación universitaria” (p.69).

Figura 2

Nivel de Riesgo SEA-Matemáticas.

Nivel de Riesgo SEA-Matemáticas	2018-I	% 2018-I	2018-II	%2018-II	2019-I	% 2019-I	2019-II	% 2019-II	2020-I	% 2020-I	2020-II	% 2020-II	2021-I	% 2021-I	2021-II	% 2021-II	2022-I	%2022-II	TOTAL	%TOTAL
MUY ALTO	0	0%	0	0	2	4,90%	0	0,00%	1	1,70%	0	0	0	0	0	0,00	1	3,4	4	1,3
ALTO	4	12,10%	3	9,70%	11	26,80%	5	17,30%	19	32,20%	1	12,5	10	16,1	9	75,00	7	24,1	69	22,7
MEDIO ALTO	4	12,10%	7	22,60%	16	39,20%	6	20,70%	19	32,20%	1	12,5	16	25,8	1	8,33	10	34,5	80	26,3
MEDIO	12	36,40%	13	41,90%	8	19,50%	14	48,30%	13	22,00%	4	50	11	17,7	2	16,67	9	31,0	86	28,3
MEDIO BAJO	10	30,30%	2	6,50%	1	2,40%	2	6,90%	5	8,50%	2	25	7	11,3	0	0,00	1	3,4	30	9,9
BAJO	3	9,10%	1	3,20%	0	0%	1	3,40%	2	3,40%	0	0	4	6,45	0	0,00	1	3,4	12	3,9
MUY BAJO	0	0%	0	0%	1	2,40%	0	0,00%	0	0,00%	0	0	5	8,06	0	0,00	0	0,0	6	2,0
N/D	0	0%	5	16,10%	2	4,80%	1	3,40%	0	0,00%	0	0	9	14,5	0	0,00	0	0,0	17	5,6
TOTAL	33	100%	31	100%	41	100%	29	100,00%	59	100,00%	8	100	62	100	12	100,00	29	100,0	304	100,0

Nota. Datos suministrados por el programa de la UIS, SEA-Matemáticas

Posteriormente, Echeverría (2022) en su estudio describió los aprendizajes y las reflexiones que, consolidan en sus prácticas los profesores en formación al enseñar cálculo diferencial (Cálculo I) considerando las características diferenciadas de sus estudiantes (estudiantes provenientes de grupos priorizados), conjuntamente, genera una sensibilidad en la comunidad UIS, al preguntarse ¿qué alternativas existen para atender a esta población? dejando abierta nuevamente esta problemática.

Teniendo en cuenta estos indicadores y los informes de los trabajos de investigación, quisimos abordar la problemática planteada y responder a las inquietudes planteadas por Pineda y Echevarría, asumiendo la necesidad de aunar esfuerzos en pro de ofrecer programas que contribuyan a disminuir las brechas educativas, que según Celis et al. (2012) “cuando existen

diferencias en la calidad de la educación básica y media, quienes reciben la educación de menor calidad ven restringidas sus posibilidades de actuación en la sociedad" (p.68), es decir, que tienen una consecuencia directa en el proyecto de vida, dado que, se tiene mayor dificultada para acceder a la educación superior o al mundo laboral.

1.2 Presentación del problema: pregunta y objetivo

La investigación pretendió desarrollar habilidades para la resolución de problemas en matemáticas de los estudiantes con admisión especial quienes, como ya se mencionó ingresan a la UIS cumpliendo unos requisitos académicos menores y tienen, según los resultados de la prueba de caracterización del pensamiento variacional realizada por el programa SEA-Matemáticas al igual que los estudiantes de admisión regular, reflejan dificultades procedimentales de tipo aritmético, métrico, geométrico y analítico reportadas por Barajas (2015).

Teniendo en cuenta lo anterior, se pretende ofrecer un apoyo académico adicional dado que, algunos estudiantes de nuevo ingreso de la UIS en los programas de estudio ven asignaturas matemáticas avanzadas, como: Matemáticas I (Biología), Fundamentos del Cálculo Diferencial (Física), Fundamentos de Matemáticas (Licenciatura en Matemáticas), Geometría Euclidiana (Matemáticas), Matemática Económica (Economía) y Pensamiento Matemático (Licenciatura en Básica Primaria); Cálculo Diferencial y/o Álgebra Lineal I (Ingenierías y Ciencias).

Así mismo, de los 558 estudiantes que han accedido bajo la modalidad de admisión especial desde los periodos 2014-I hasta 2022-I, el 61,83 % de los estudiantes (345) eligen programas de ciencias e ingenierías y el 38,17% de los estudiantes (213) otros programas. Lo cual implica que, en sus planes de estudio se incluya asignaturas como Cálculo Diferencial y/o Álgebra Lineal.

En la Tabla 1 se establece una estadística de la cantidad de programas que las contienen.

Tabla 1

Programas académicos por facultad que incluyen las asignaturas

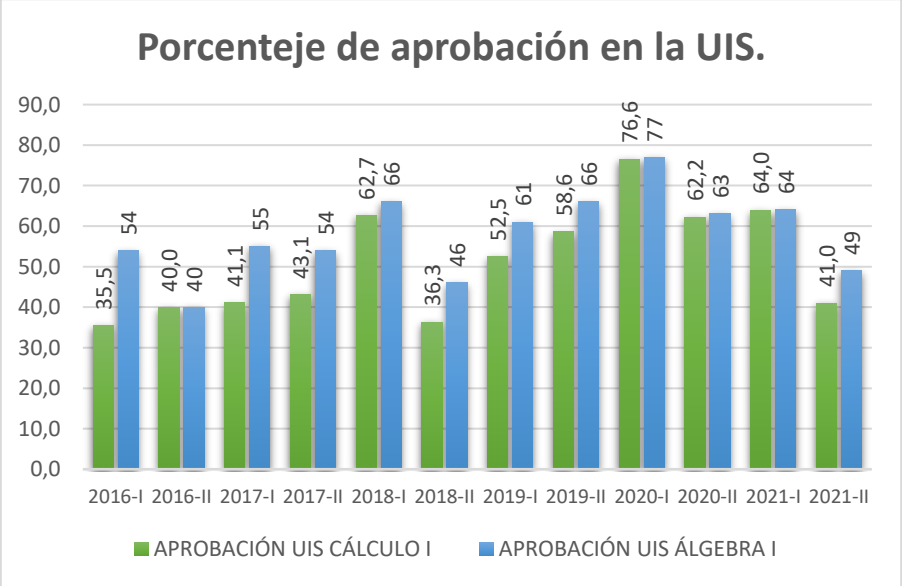
Facultades de la UIS sede Bucaramanga	Cantidad programas	Álgebra Lineal I	Cálculo Diferencial
Ciencias	5	3	2
Ingenierías Fisicomécanicas	7	6	7
Ingenierías Fisicoquímicas	4	4	4

Nota. Revisión planes de estudio ofertados en la UIS de ciencias e ingenieras.

Por otra parte, según informes de la Vicerrectoría académica de la UIS (ver Figura 3), aún persiste un alto índice de repitencia y cancelación de las asignaturas como Cálculo Diferencial y Álgebra Lineal I (desde el año-periodo académico 2016-I-2021-II). Según Parada (2018), esto motivó la creación e implementación de diversos programas para atender esta problemática al interior de la UIS, por ejemplo, SEA-Matemáticas.

Figura 3

Porcentaje de aprobación asignaturas en la UIS.



Nota. Datos suministrados Vicerrectoría académica UIS.

Es importante destacar que, las dificultades asociadas a los aprendizajes y la enseñanza del Cálculo Diferencial y el Álgebra Lineal existen a en varios países y desde diversas investigaciones en didáctica de las matemáticas han sido reportadas y/o abordas. A continuación, mencionares algunos estudios.

En cuanto al cálculo diferencial, según Artigue et al. (1995) se recalca que, algunas dificultades son de tipo: epistemológicas, didácticas y cognitivas, las cuales, se presentan tanto para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo. Por mencionar, en primer lugar, se destaca lograr que los estudiantes alcancen una comprensión de los conceptos y métodos del cálculo, es decir, el cálculo no es sólo elaborar y ejercitar procedimientos; en segundo lugar, se ha establecido una organización curricular y una enseñanza tradicional centrada en el desarrollo de operaciones algebraicas que, ligado a la complejidad epistémica de los objetos matemáticos del cálculo conducen al aprendizaje no significativo.

Asimismo, desde el punto de vista de Hitt (2003), tanto estudiantes como profesores presentan algunas dificultades del Cálculo asociadas a temáticas como: función, límite, derivada e integral, las cuales son producto de “La gran cantidad de tópicos que están íntimamente relacionados en cálculo, y el manejo pobre de algunos de sus subconceptos, obstaculiza el desarrollo profundo de los conceptos propios del cálculo” (p.1). Es decir, los saberes previos influyen directamente en la construcción de los conocimientos.

Por otra parte, López y Escribano (2016) reportaron problemas asociados a la comprensión del álgebra en estudiantes universitarios desde el punto de vista didáctico y cognitivo. De esta manera, se identifican: la práctica rutinaria de ejercicios algorítmicos, errores procedimentales y del proceso de generalización, uso y asignación de sentido al lenguaje algebraico, uso inadecuado de los distintos sistemas de representación, dificultades asociadas al origen del algebra en relación

con la aritmética, además, la influencia de los sentimientos y emociones de los estudiantes en la comprensión.

Estas dificultades pueden presentarse en los estudiantes. Sin embargo, esto no implica que los estudiantes pierdan las asignaturas debido a que existe la posibilidad de ser superadas, si se establecen estrategias de estudio adecuadas y acompañamiento académico. Esto se evidencia en el estudio realizado por Santamaria (2016), quien reportó cómo los estudiantes beneficiarios de tutorías académicas de SEA-Matemáticas desarrollan habilidades procedimentales

En consecuencia, la pregunta de investigación que germina bajo esta problemática es la siguiente: ¿Qué habilidades para la resolución de problemas logran desarrollar estudiantes de admisión especial de la Universidad Industrial de Santander que participan de un curso de refuerzo de matemáticas?

Para responder a esta pregunta de investigación nos planteamos el siguiente objetivo:

Diseñar, implementar y valorar un curso de refuerzo de matemáticas dirigido a estudiantes de admisión especial de la Universidad Industrial de Santander a fin de favorecer el desarrollo de sus habilidades para resolver problemas.

2 Antecedentes

Este capítulo está organizado en cuatro apartados, en el primero describimos el contexto de la educación superior inclusiva a la luz de algunas políticas públicas y se destacan retos por parte de las IES para dar cumplimiento a estas normativas; en el segundo, presentamos resultados de algunas investigaciones referentes a cursos dirigidos a estudiantes de primer nivel universitario en contextos nacionales e internacionales. En el tercer apartado destacamos estudios que tuvieron

por objeto el estudio de habilidades matemáticas; finalmente, en el cuarto apartado citamos diferentes acepciones de la resolución de problemas.

2.1 Educación superior inclusiva

Describimos algunas políticas públicas educativas que, actualmente son utilizadas en el ámbito internacional, nacional y en particular de la UIS en favor de la educación para todos, cuyos principios son la inclusión y la equidad.

2.1.1 A nivel internacional

La ONU con la premisa de la educación como un derecho para todas las personas, en la convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad realizada en la Universidad de Salamanca, el 2 de septiembre 2016, en el artículo 24 menciona: el derecho a la educación inclusiva, donde las personas con discapacidad tienen un reconocimiento en las políticas internacionales y se menciona que, son sujetos de derecho, a quienes, se debería proporcionar igualdad de oportunidades y una educación de calidad, libre de discriminación.

En la convención se indican algunas barreras que impiden el acceso a los programas de educación para personas con discapacidad, pues, en algunas oportunidades son aisladas, separadas y/o excluidas de sus iguales o a quienes, se les ofrece una educación de menor calidad, así mismo, existe una falta de voluntad política por parte de los estados, en cuanto a la asignación de recursos humanos y económicos para atender a estas personas, lo que conlleva a problemáticas como: deficiencias en el acceso, pertinencia y calidad de la educación; prejuicios y falta de conocimiento hacia ellas, discriminación y segregación, entre otras.

Por otra parte, la UNESCO en el Foro Mundial sobre Educación (FME) llevado a cabo del 19 al 22 de mayo 2015, en Incheon República de Corea, en el que participaron más de 160 países y diversos representantes de sectores sociales y organizaciones como UNICEF, el banco mundial,

la ONU y el ARNUC. En el FME se establece una visión común para la educación 2030, discutiendo y analizando diversas estrategias, políticas y condiciones que permitan disminuir los índices de analfabetismo, la baja calidad educativa, el difícil acceso y participación, especialmente de poblaciones vulnerables para de este modo, contribuir con el desarrollo sostenible y la paz mundial.

En el documento la UNESCO (2015) pretende dar continuidad a el compromiso colectivo del movimiento Educación para Todos (EPT), el cual, se estableció desde el año 1990 y el año 2000. La UNESCO (2015) instaura seis debates interdisciplinarios con el fin de abordar y comprender el Objetivo de Desarrollo Sostenible 4 (ODS 4) cuya intención es "garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover las oportunidades de aprendizaje permanente para todos" (p. 1).

Sin embargo, la UNESCO en sus informes anuales desde el año 2002, indica que, tras los múltiples años y los esfuerzos realizados a nivel mundial en los diferentes países hacia una educación para todos, las cifras son desalentadoras comparadas con los objetivos planteados y aún persisten condiciones de inequidad para quienes viven en problemas de conflicto, desplazados, personas que enfrentan alguna discriminación por sus condiciones políticas, personales, sociales, culturales o económicas.

Así mismo, la UNESCO (2020), el 23 de junio en París, emite el informe de Seguimiento de la Educación en el Mundo (Informe GEM) el cual, expone la exclusión como un tema persistente en educación, así uno de cada cinco niños, jóvenes y adolescentes es afectado por este fenómeno, además, manifiesta que se ha agudizado producto de la pandemia del Covid-19, haciendo visible la fragilidad social y la necesidad de unirnos para favorecer a los más vulnerables.

La UNESCO (2020) en su informe GEM, establece que el género, la edad, la etnia, la indigeneidad, desplazamiento, orientación sexual, creencias, entre otras condiciones, no deben convertirse en factores de discriminación, sin embargo, las oportunidades de acceso y permanencia se ven permeadas y afianzadas por estas razones, afectando cada vez más a los más vulnerables.

En educación la diversidad no debería ser un problema sino una oportunidad para darle valor y calidad a la vida de todos los seres humanos, por lo anterior, la UNESCO (2020) expresa que la inclusión no se puede lograr si se considera la diversidad como un inconveniente o se cree que los niveles de capacidad de los estudiantes son fijos. Los sistemas educativos deberían responder a las necesidades particulares de los estudiantes, a través de oportunidades con principios de inclusión, calidad y equidad, de esta forma se deberían repensar las prácticas educativas y el currículo.

2.1.2 A nivel nacional

La educación se establece como un derecho fundamental para todas las personas que habitan el territorio (Const.,1991), no obstante, la educación superior inclusiva, viene instaurándose paulatinamente en las IES, esto se evidencia debido a que hace menos de tres décadas en el país se comenzó a legislar al respecto, por ejemplo: (Ley 30 de 1992) que rige a las instituciones de educación superior, los lineamientos de la política de educación superior inclusiva MEN (2013) y Índice de Inclusión para superior MEN (2018).

En estos documentos, se sustentan los propósitos de una educación superior para todos y todas, que permita la construcción de una sociedad donde prime los derechos humanos, la paz, la equidad y el respeto por la diversidad étnica y cultural de nuestro territorio nacional, además se garantizase la inclusión social, promoviendo el respeto a ser diferente y permite a las IES crear y

ejecutar estrategias y mecanismos de atención para ofrecer oportunidades de acceso, permanencia y culminación de estudios superiores.

Destacamos que, una de las conferencias pionera, fue la realizada en Salamanca 1994 sobre las necesidades educativas especiales. Desde allí, se plantea un cambio de paradigma, es decir, la educación inclusiva deja de centrarse en necesidades y pasa a plantearse como ofrecer oportunidades, considerando los derechos humanos como eje orientador. En Colombia, tan sólo en el año 2008 se establece el primer documento índice de inclusión MEN para la educación media y básica y, hasta 2013 para la educación superior.

Se tiene la premisa de "En educación superior, no son los estudiantes los que deben cambiar para acceder, permanecer y graduarse: es el sistema mismo el que debe transformarse para atender la riqueza implícita en la diversidad estudiantil" (MEN, 2013, p.17). Lo cual no permite cuestionar desde luego, la ejecución de esta premisa en los planes y programas de estudio, porque a pesar de que, la política pública se establece la posibilidad de un currículo flexible y adaptable, esto se contradice con los currículos y las pruebas estandarizados que, finalmente son las que proporcionan la calidad de las IES.

En tanto que, los investigadores Arizabaleta y Ochoa (2016) se refieren a la educación inclusiva como la gestión, transformación y adaptación de las IES, de sus programas académicos y su personal docente para atender las posibles barreras de aprendizaje de sus estudiantes respetando su diversidad étnica y cultural. Los autores manifiestan que parte de la problemática en Colombia corresponde a: i) las dificultades para el acceso a las IES de poblaciones vulnerables y diversas, ii) la permanencia y graduación, ya que existe un elevado índice de fracaso y deserción. según cifras del MEN (2013). Por lo anterior, los autores expresan la necesidad de que, la comunidad educativa se haga sensible a estas problemáticas y emprendan proyectos de

transformación, adaptación y atención en sus currículos, el personal docente y las prácticas pedagógicas, de este modo, mitigar la deserción o falta de acceso a la educación superior. Es importante mencionar que, existe un evidente compromiso de las IES en Colombia, pero, es necesario abarcar esta problemática de una manera más integral y contundente.

2.1.3 A nivel local

Particularmente, en la UIS, desde la instancia del Consejo Académico se han emitido múltiples acuerdos que han ido incorporando diversos estudiantes pertenecientes a grupos priorizados. En este estudio mencionaremos algunos de ellos revelando los estudiantes a los que se dirigía.

En el (Consejo Académico, Acuerdo 146, 1993) se establece un cupo adicional para los integrantes de Comunidades Indígenas en los programas de pregrado de la UIS, con la exigencia de 70 puntos y un pago de matrícula mínimo. En el (Consejo Académico, Acuerdo 098, 1994) se modifica el (Consejo Académico, Acuerdo 146, 1993) y se menciona que, el puntaje ponderado mínimo exigido sea Sesenta (60). No obstante, en el (Consejo Académico, Acuerdo 088, 2001) se deroga la admisión especial en la UIS para las comunidades indígenas, porque el consejo académico menciona su deber para promover la igualdad y mérito académico en las admisiones en la UIS. Fue hasta el año 2010 que, unos ciudadanos de la comunidad Indígena Inga de Aponte-Nariño, por acción judicial vía tutela, lograron que la UIS por mandato de la sentencia de la Corte Constitucional (T-110 de 2010) creará admisiones para comunidades étnicas, pues, las únicas admisiones aplicables eran las del (Consejo Académico, Acuerdo 229, 2008) las cuales, sólo incluían estudiantes bachilleres provenientes de departamentos que no contaran con instituciones de educación superior y a los bachilleres provenientes de municipios con difícil acceso o con

problemas de orden público, allí se reserva de cupo por carrera y por año en la sede UIS Bucaramanga.

Es así como, la UIS en el (Consejo Académico, Acuerdo 134, 2011) incluye bachilleres de comunidades o resguardos indígenas y a los bachilleres de comunidades negras, afro, raizales y palenqueras. Luego, para efectos de la ley de víctimas, mediante el (Consejo Académico, Consejo Académico, Acuerdo 211, 2011) se vinculan los estudiantes reconocidos como víctimas y posteriormente, en el actual (Consejo Académico, Acuerdo 282, 2017) se añaden a los estudiantes que forman parte de la población desmovilizada.

Manifestamos que, a pesar de contar con una modalidad de admisión especial, la cual, favorece el acceso a la educación superior, no hay flexibilización en prácticas pedagógicas y/o curriculares en los programas académicos, que les permita mitigar las barreras de aprendizaje que contempla la normativa MEN (2013).

Giménez et al. (2007) plantean desafíos a los educadores matemáticos para fomentar aulas donde se desvíe la preocupación por el currículo y se promueva la participación de los estudiantes en su aprendizaje, fundamentados en el respeto y la inclusión de diversas perspectivas con enfoques menos competitivos y más democráticos, a fin de minimizar la exclusión que desde las matemáticas a lo largo de la historia se ha perpetuado.

Estamos reafirmando la necesidad, de ofrecer desde las distintas instancias académicas, oportunidades que favorezcan la permanencia y graduación de los estudiantes que ingresan bajo esta modalidad a las universidades, para que, estas disposiciones más que un referente legal, sean realmente políticas de cambio y transformación en los ámbitos académico, personal, social y cultural.

Desde este trabajo, se pretendió a su vez, sensibilizar a la comunidad educativa de la UIS, porque consideramos que, de alguna forma, todos podemos aportar en la construcción de una sociedad más equitativa e inclusiva, pues si bien, la educación es un derecho fundamental, es necesario que los gobiernos, las entidades tanto internacionales, nacionales y locales, continúen trabajando en favor de una educación superior inclusiva.

2.2 Curso en matemática para estudiantes de primer nivel universitario

En el ámbito internacional encontramos diversos nombres a cursos de nivelación matemáticas dirigidos a estudiantes de nuevo ingreso IES. Por mencionar, Bridge Course o cursos puente en los Países Bajos, cursos propedéuticos en México, Panamá, Chile, Ecuador, nivelatorio o cero en España, Precálculo en los Estados Unidos y en Colombia. Además, estos cursos tienen como finalidad afianzar, perfeccionar o adquirir conceptos que todo estudiante egresado de bachillerato necesita para afrontar cursos de matemáticas avanzados. A continuación, presentamos algunas descripciones de resultados de investigaciones.

2.2.1 A nivel internacional

En la Universidad de Georgia, Kilpatrick et al. (1998) diseñaron un curso de precálculo, cuyo propósito fue beneficiar estudiantes que van o no a cursar cálculo, así como aquellos que irán al mundo del trabajo. El curso se centró en los temas de funciones y modelos matemáticos, incluyendo el uso de calculadoras graficadoras y un enfoque distinto a la enseñanza tradicional, lo cual, implicó transformar las prácticas de enseñanza.

Por otra parte, el caso de Países Bajos, los investigadores Cuypers et al. (2012) comentan que, en algunas universidades europeas, se tienen estudiantes de distintas nacionalidades, por lo que, los conocimientos y aptitudes para las matemáticas son heterogéneos. Para contribuir en la formación de los estudiantes ofertan cursos puentes (verano) entre la escuela secundaria y la

universidad. De esta manera, ejecutan proyectos nacionales como NKBW y ONBETWIST que forman parte del programa de aprendizaje virtual holandés, cuyo enfoque principal, es determinar el papel de los exámenes formativos en el aprendizaje de las matemáticas y en las conclusiones afirman que, los cursos de verano han permitido a los estudiantes participantes mejores resultados al realizar los cursos de la universidad comparados con quienes no los realizan.

Estos trabajos tienen como punto de encuentro, favorecer el cambio y la adaptación entre la educación secundaria y universitaria de los jóvenes que acceden a programas de formación superior; pero difieren en sus metodologías de enseñanza.

2.2.2 A nivel nacional

La Universidad Nacional de Colombia (UNAL) oferta desde el año 2008 curso nivelatorio en matemáticas. El estudio reportado por Duarte et al. (2014) indican que con estos cursos se pretende favorecer a los estudiantes en la adquisición de herramientas y conocimiento oportuno, para de esta manera comenzar a cursar las asignaturas correspondientes al programa académico que emprenden. Según los autores realizar curso piloto intensivo de nivelación en matemáticas para estudiantes admitidos a programas de ingeniería sede Bogotá, permitió a los estudiantes de nuevo ingreso un acompañamiento académico, una adaptación a la vida universitaria y la construcción de redes de apoyo académico.

Bustos et al. (2013) realizaron un estudio comparativo del currículo de matemáticas, ofertado en los programas de ingenierías de ocho universidades colombianas. Este estudio demuestra que, el 23,5% de estas universidades ofrecen curso de precálculo. Adicional a esto, en sus conclusiones, los investigadores revelan que el estudio beneficia principalmente a la Universidad Distrital porque les permite tener una perspectiva para establecer estrategias que podrían mejorar los índices de retención y deserción dentro de los programas académicos. Esto,

por medio de cambios curriculares que planteen nuevos espacios de enseñanza y aprendizaje en matemáticas.

Manifestamos que, esta última consideración, fue compartida por los autores de esta investigación, ya que, el avance y la construcción de sociedad, se produce cuando se proporcionan oportunidades en el ámbito educativo. Además, sería oportuno que las IES, diseñaran e implementaran espacios académicos que atienda a los grupos priorizados, de esta manera, llevar a la práctica estas estrategias planteadas desde las políticas MEN (2013) y MEN (2018).

Finalmente, a nivel nacional mencionamos la investigación de Vergel et al. (2016) quienes reportan resultados de un estudio cuyo objetivo era estudiar el impacto de implementar un curso de precálculo utilizando plataforma virtual, así establecer, el avance y la mejora de las competencias en pensamiento variacional de los estudiantes. Por lo anterior, se realizó una comparación entre dos grupos de estudiantes: uno experimental y otro de control. Como conclusiones del estudio, los investigadores enuncian a través de estadísticas que los participantes del grupo experimental lograron mejorar en lo referente a su pensamiento variacional y sus competencias interpretativas.

2.2.3 A nivel local

En la UIS los investigadores Fiallo y Parada (2018) plantearon el desarrollo de un curso de precálculo con el fin de promover el desarrollo del pensamiento variacional y las habilidades de los procesos matemáticos en los estudiantes que ingresan a las facultades de ciencias e ingenierías empleando la mediación de las tecnologías digitales, además lo fundamentan teóricamente en “los núcleos conceptuales de la variación, el cambio, la aproximación y la tendencia” (Fiallo y Parada, 2018, p.14).

Por lo anterior, en los últimos años se han gestado diversas investigaciones en el curso-laboratorio de precálculo UIS, alusivas a las habilidades que los estudiantes requieren y desarrollan en cuanto a los procesos de pensamiento matemático es decir “formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos” (MEN, 2006, p.51). Estas investigaciones dan cuenta de la riqueza de este espacio académico porque ha posibilitado no sólo procesos de enseñanza y aprendizaje del pensamiento variacional a estudiantes beneficiarios, sino que, a su vez, se ha convertido en un espacio óptimo para la investigación en educación matemática.

2.3 Habilidades matemáticas

En cuanto a la Educación matemática, encontramos algunas acepciones respecto al término habilidad. Hernández (1998) citado por Williner (2011), define las habilidades o maneras de actuar que necesariamente implica un vínculo entre el conocimiento y un procedimiento para lograr un objetivo.

Desde la Psicología y la enseñanza de las matemáticas, Delgado (1999) en su tesis doctoral plantea como hipótesis que, si el conocimiento se estructura y permite a los estudiantes resolver una serie de problemas que le exijan el desarrollo de habilidades matemáticas, entonces se tendrá un mejor desempeño en esta área. Para definir habilidad, el autor menciona que el saber algo o tener un conocimiento de algo implica necesariamente saber hacer.

Delgado (1998) citado por Williner (2011) define unas habilidades generales matemáticas (HGM) asociadas a la resolución de problemas y las clasifica como se indicará a continuación:

Habilidades conceptuales: aquellas que se aplican directamente con los conceptos (identificar, fundamentar, comparar, demostrar)

Habilidades traductoras: aquellas que acceden saltar de un dominio del conocimiento a otro para comprender y dar sentido a la situación (interpretar, modelar, recodificar)

Habilidades operativas: aquellas que requieren el tratamiento o ejecución de procedimientos (graficar, aproximar, optimizar, calcular)

Habilidades heurísticas: aquellas que requieren el uso de recursos heurísticos, además presentan un componente reflexivo y creativo en su pensamiento, cuando intentan abordar una situación problema (resolver, analizar, explorar)

Habilidades metacognitivas: aquellas que requieren un control y empleo del conocimiento monitoreado y consciente (planificar, predecir, verificar, comprobar, controlar) (Williner, 2011, p.117).

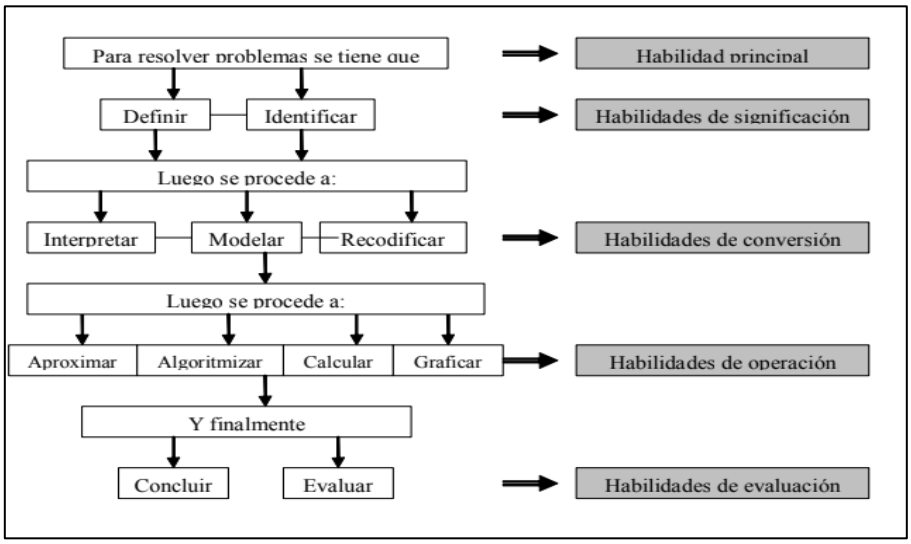
Es decir, el desarrollar HGM en los estudiantes corresponde a un "saber-hacer" que se vincula con un "saber-saber" y que puede evidenciarse ante la necesidad de abordar una situación problema. No obstante, consideramos que tal como lo propone Williner (2011) la importancia de considerar las habilidades matemáticas vinculándolas con el concepto o conocimientos específicos.

Otro trabajo que se fundamenta teóricamente en los planteamientos de Delgado (1999) corresponde al desarrollado por Posada et al. (2006) con el apoyo de la Secretaría de Educación para la Cultura de la Gobernación de Antioquia (Seduca), quienes ofrecieron un diplomado a los docentes de la región en ese año, destinado al desarrollo de competencias básicas en matemáticas para educación básica y media. En la Figura 4, plantean un esquema de las habilidades que un estudiante realiza al momento de enfrentarse a un problema, las cuales consideramos que son actuaciones que pueden ser evidenciadas por los estudiantes al resolver problemas, pero, no de manera secuencial tal como se plantea.

Según Posada et al. (2006) el proceso para resolver problemas inicia con las habilidades de significación, en el que se identifica y definen los conceptos matemáticos para con ellos comprender el problema, seguido de esto, se involucran habilidades de conversión, en la que se interpreta, modela y recodifica, es decir, se atribuye significado. Después, se tienen las habilidades de operaciones que requieren aproximar, calcular, graficar y optimizar, en este se involucran procedimientos y conceptos concretos y finalmente, las habilidades de evaluación en las que, se escribe y comunica la respuesta, también se reflexiona y se valida la respuesta.

Figura 4

Habilidades para resolver problemas.



Nota. Esquema de habilidades para resolver problemas (Posada et al, 2006.p.15)

Así mismo, Parada (2018) describe las habilidades del pensamiento variacional asociada a los procesos matemáticos de: comunicación; representación; elaboración, comparación y ejecución de procedimiento ECPE; finalmente, razonamiento y demostración.

Habilidades asociadas al proceso de comunicación: aquellas que permiten expresar ideas, argumentos, conjeturas con el fin de persuadir y/o convencer a otros y a sí mismo de sus ideas, razonamientos, procedimientos y argumentos. (Interpretar, explicar, justificar).

Habilidades asociadas al proceso de representación: aquellas que permiten reconocer y/o realizar una (s) representación (es) bien sea gráfica, verbal, tabular, asociándole significado en relación con un objeto matemático (Reconocer, interpretar, construir, transformar, coordinar)

Habilidades asociadas al proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (ECEP): aquellas que permiten crear, desarrollar y usar procedimientos (aritméticos, métricos, geométricos y analíticos).

Habilidades asociadas al proceso de razonamiento y demostración: son aquellas que permiten al estudiante validar, verificar, justificar y explicar sus ideas luego de procesos de experimentación y visualización. (demostrar, conjeturar, argumentar)

Desde la perspectiva mencionada, se caracterizan las habilidades asociadas a cada proceso, por lo cual, en este trabajo se enfocará como objeto de estudio el proceso de resolución de problemas, para describir, qué habilidades de este proceso desarrollaron los estudiantes de admisión especial luego de, ser partícipes del curso de refuerzo.

Es importante mencionar que, como lo destacan Felmer y Perdomo (2017) el desarrollo de las habilidades matemáticas forma parte del planteamiento de algunos currículos como por ejemplo: Finlandia, Singapur, Estados Unidos, Chile y Colombia, estás habilidades están fuertemente relacionadas con los procesos matemáticos porque, para resolver un problema se hace necesario emplear representaciones, discutir resultados, conjeturar, plantear modelos matemáticos, argumentar y realizar diversos procedimientos.

2.4 Resolución de problemas en matemáticas

El autor Polya (1965) afirma que “un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay cierto descubrimiento” (p.5). Según el autor, un docente de matemáticas tiene oportunidad de proporcionar problemas intelectualmente inspiradores y

retadores a sus estudiantes, en consecuencia, desarrollar diversas estrategias y aptitudes favorables para el aprendizaje de las matemáticas.

En su obra, Polya (1965) destaca en primera instancia preguntas orientadoras y recomendaciones para el trabajo en el salón de clases tanto por parte de los profesores como de los estudiantes con relación a las cuatro fases: *comprensión del problema:* consiste en entender el enunciado, identificar los datos, las incógnitas, las condiciones del problema; *elaboración del plan:* implica concebir una estrategia, considerando los datos y las incógnitas, conocimientos o experiencias previas por ejemplo: plantear analogías, variaciones al problema, aplicar métodos, buscar definiciones y problemas relacionados, entre otras; *ejecutar el plan:* se lleva a cabo el plan, analizando y comprobando el paso a paso de los procedimientos, *mirar hacia atrás:* implica corroborar la respuesta, los argumentos y procedimientos, además de, derivar otros métodos o caminos solución para otros problemas.

Algunos estudios han empleado estas cuatro fases como una estrategia para resolver problemas en diversos niveles académicos destacando en sus conclusiones que, este método de enseñanza ha permitido a los estudiantes mejorar su desempeño y autonomía, además la resolución de problemas se ha considerado como un método pertinente y viable para el aprendizaje (García y Villalonga (2006); Espinoza (2017); Meneses y Peñaloza (2019))

Bajo la premisa que las matemáticas son una actividad que debe ser consciente desde la experiencia del estudiante, Polya (1965) elabora un dialogo de cómo resolver problemas e indica pautas para: familiarizarse con el problema, trabajar mejor en la comprensión, buscar ideas útiles, ejecutar el plan y realizar una visión retrospectiva; finalmente, expone al lector un breve diccionario de heurísticas, es decir, métodos de invención y descubrimiento en las que se

encuentran: uso de analogías, definiciones, descomponer y recomponer el problema, emplear elementos auxiliares, generalizar, entre otras.

Krulik & Rudnick (1989) expresan que un problema es una situación la cual, requiere el empleo de habilidades y conocimientos previamente aprendidos. Según estos autores una definición de problema aceptada por educadores matemáticos establece que, el individuo se enfrenta a una situación "sin camino aparente", es decir, es un desafío o un reto que no cuenta con una solución inmediata.

Krulik & Rudnick expresan tres criterios que debe satisfacer un problema: i) aceptación: se refiere a la participación personal y la motivación que tiene el estudiante ii) bloqueo: los estudiantes realizan algunos intentos infructuosos, lo cual, corrobora que no hay una solución inmediata iii) exploración: debido a que, se experimentan y realizan nuevos métodos para abordar la situación. Es por ello, que algunos libros de texto se enuncian "problemas" pero, realmente se convierten en la práctica de ejercicios rutinarios y la aplicación de algoritmos repetitivos; un buen problema proporciona oportunidades para plantear diversas soluciones, conduce a generalizaciones, es desafiante e implica la comprensión de conceptos matemáticos y el uso de habilidades.

Schoenfeld (1987) citado por Santos-Trigo (2014) identificó cuatro dimensiones que permiten entender cómo los estudiantes resuelven problemas: i) Los recursos: se relaciona con los saberes de los estudiantes y las formas en que aprende. ii) las estrategias cognitivas o métodos heurísticos: son estrategias generales que emplean los estudiantes para avanzar en el problema, pueden aparecer en distintos momentos, por ejemplo: al entender el enunciado, plantear un camino solución, etc. iii) las estrategias metacognitivas: se relaciona con el monitoreo y autocontrol que el estudiante puede mostrar al abordar un problema, implica conciencia y autorregulación en la

forma de pensar y actuar, finalmente, iv) el sistema de creencias: involucra la concepción que se tenga el estudiante de las matemáticas.

Asimismo, Schoenfeld (2016) quien ha estudiado ampliamente la resolución de problemas desde la década de los 80, manifiesta que, debido a los múltiples significados que se le ha asignado a la resolución de problemas desde "ejercicios de memoria" hasta "hacer matemáticas como un profesional" (p. 2). Se ha imposibilitado la unicidad de discursos y prácticas bajo este enfoque. Sin embargo, el autor destaca el vínculo entre la resolución de problemas y la construcción de conocimiento.

Liljedahl et al. (2016) expresan que desde 1969 en el International Congress on Mathematical Education (ICME) la resolución de problemas es un tema de discusión y ha tenido una incidencia tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas, por tanto, se convierte en una influencia para los currículos.

Bruder (2016), afirma que, en la resolución de problemas, desde la época de Arquímedes se realizan heurismos o enfoques eficaces para solucionar problemas. Algunos Heurismos que esta autora plantea preceden de Polya, por mencionar: Reducción: los estudiantes reducirán intuitivamente un problema, pueden generar tablas, gráficos, figuras, de esta forma, se hace comprensible y se aborda; atención a aspectos: reconocer relaciones de dependencia; transferencia: Uso de analogías; cambio de aspectos: realizar variantes a las condiciones iniciales (supuestos, criterios). Además, menciona, que desafortunadamente estos enfoques no se producen de manera automática en los estudiantes, por el contrario, se requiere, que el docente oriente y promueva estas estrategias en el aula.

Hadamard (1945) citado por Liljedahl et al. (2016), mencionan que resolver problemas requiere de alguna intuición de creatividad, también es un proceso que consta de cuatro fases:

iniciación, consiste en un trabajo intencional y consciente en el que se emplean experiencias previas, conlleva a intentos infructuosos; Incubación, consiste en un proceso inventivo para una posible alternativa que conlleve a la solución; iluminación, aparece la posible solución y el individuo se hace consciente para superar los intentos infructuosos, finalmente, la fase de verificación, en la que se corrobora y se deduce conclusiones del problema inicialmente planteado. No obstante, hay tensiones en cuanto a las perspectivas de creatividad ya que, algunos tienen una perspectiva absolutista que implica que son procesos que llevan a cabo los genios, por ejemplo, Einstein, por otra parte, una perspectiva relativista que indica, que cualquier individuo tiene momentos de creatividad que conllevan o no a la solución del problema.

Perkins (2000) citado por Liljedahl et al. (2016) habla de pensamiento innovador para la resolución de problemas, porque para que los problemas sean "problemáticos" se requiere más que un paso a paso de una heurística. Desde la perspectiva de este autor, los individuos realizan un proceso de razonamiento extra lógico, el cual, requiere de múltiples esfuerzos por parte del estudiante.

En consecuencia, Santos-Trigo (2014) plantea la necesidad de asumir retos referentes a la problematización de los entornos de aprendizaje donde se empleen tecnologías digitales, debido a que se reconoce que, por ejemplo, el uso de software dinámico favorece la construcción de representaciones dinámicas de los objetos matemáticos, en consecuencia, maneras de explorar, razonar y conjeturar relaciones y propiedades para la construcción de conocimientos por parte de los estudiantes.

Cerramos este apartado destacando el enfoque de la resolución de problemas como una manera de organizar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas con una visión general de algunos planteamientos que serán retomados y profundizados en el siguiente capítulo.

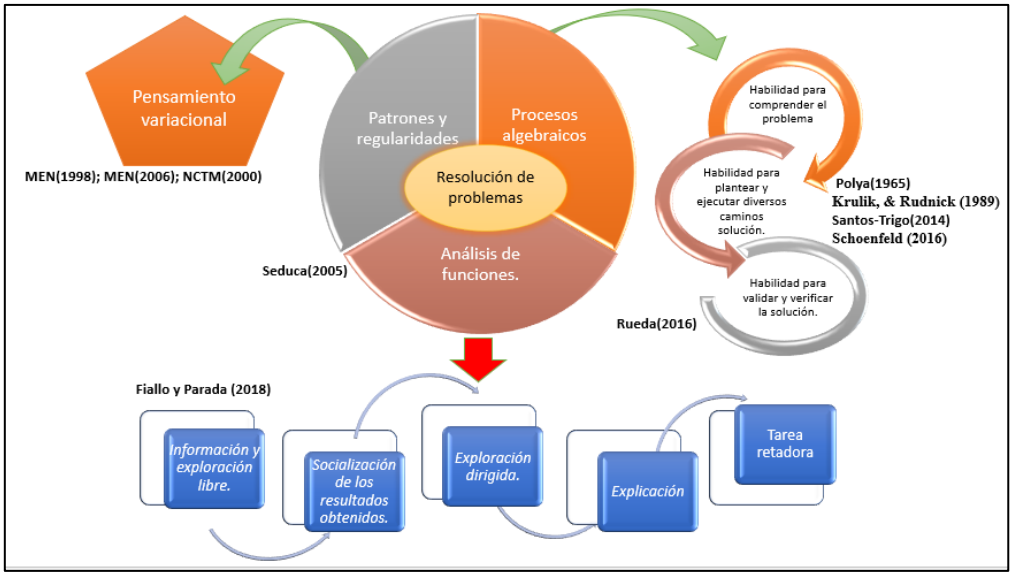
3 Marco conceptual

En este capítulo se detallan los elementos teóricos que sustentan la investigación que aquí se reporta y que tuvo por objetivo: Diseñar, implementar y valorar un curso de refuerzo inicial dirigido a estudiantes de admisión especial de la Universidad Industrial de Santander a fin de favorecer el desarrollo de sus habilidades en la resolución de problemas.

En la primera parte, explicamos los fundamentos teóricos que sustentan la estructura del curso que se diseñó, esto es: los ejes temáticos y la estructura metodológica. En la segunda parte, describimos el proceso de resolución de problemas, dado que el curso tuvo una orientación específica a este proceso. Por último, en la tercera parte, presentamos la conceptualización de las habilidades que consideramos se requieren para resolver problemas del pensamiento variacional, las cuales, serán tomadas como categoría de análisis para responder a la pregunta de investigación.

Figura 5

Elementos teóricos



En la Figura 5 se muestran de manera esquemática los elementos teóricos que sustentaron este capítulo.

3.1 Elementos que sustentan la estructura curricular

Destacamos que el énfasis del curso es el proceso de resolución de problemas desde el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos, los cuales se organizaron en primera instancia, en función de los ejes temáticos que propone (Seduca, 2005): *i)* patrones y regularidades *ii)* procesos algebraicos *iii)* análisis de funciones. Así mismo, se siguió la estructura metodológica de los talleres, propuesta por Fiallo y Parada (2018) para el diseño de los talles del curso. Estos elementos se describen a continuación.

3.1.1 Ejes temáticos

Para el diseño del curso, principalmente se usó como guía el documento presentado por la Seduca (2005) quien plantea que, "el pensamiento variacional tiene que ver con el tratamiento matemático de la variación y el cambio" (p. 49). El interpretar de esta forma el pensamiento variacional implica un trabajo desde la formación primaria, partiendo de problemas provenientes de diversos contextos como, por ejemplo: matemáticos, cotidianos, de las ciencias e ingenierías; que, a su vez, preserven la variación y el cambio como sus principales componentes conceptuales.

3.1.1.1 Patrones y Regularidades. En los distintos niveles educativos pocas oportunidades de tránsito entre lo concreto y lo abstracto se permiten en las aulas, esto genera dificultades en la comprensión y percepción de estructuras que representan regularidades e invariantes de un problema (Mason et al., (1999), Agudelo (2000)). Según el MEN (2006), el desarrollo del pensamiento variacional se inicia con el estudio de regularidades y está relacionado con:

> (…) nociones y conceptos propios del pensamiento variacional, como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, y con los distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones, como las lineales y las afines (o de gráfica lineal), las polinómicas y las exponenciales, así como con las relaciones de desigualdad y el manejo de ecuaciones e inecuaciones. (MEN, 2006, p.67).

Mason et al. (1999) comentan que, el estudio de patrones y regularidades posibilita en los estudiantes detectar alguna generalidad subyacente en dicha estructura, para con ello, encaminar el pensamiento hacia los procesos de generalización asignando sentido y significado a la simbología empleada, por ejemplo: las letras en álgebra.

Por tanto, se define, "un patrón es una propiedad, una regularidad, una cualidad invariante que expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada configuración, disposición, composición, etc." (Seduca, 2005, p.51). Identificar los patrones y regularidades permite a los estudiantes emerger la función como herramienta de conocimiento necesaria para "enlazar" patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio" (MEN,1998, p.52). Así mismo, Mason et al. (1999) plantea que, tanto la identificación como la expresión de regularidades y relaciones matemáticas está al alcance de todos los estudiantes.

Nuestra propuesta implica trabajar con patrones y regularidades porque es una propiedad que cumplen algunas estructuras matemáticas de variación y cambio. De esta manera se puede acercar a los estudiantes a estructuras matemáticas complejas como lo son las funciones, tal como se explicó en líneas anteriores.

3.1.1.2 Procesos algebraicos. Desde los problemas de variación y cambio consisten en reconocer desde diferentes expresiones algebraicas, aquello que, permite establecer una

generalización. Según la Seduca (2005), el estudiante tiene la necesidad de expresar la variación luego de identificar el qué cambia y cómo cambia, para registrar a través del lenguaje simbólico, verbal, icónico o gráfico la relación de variación identificada, es decir, hacer una generalización.

Así mismo, Mason et al. (1999), indica que la expresión de generalidad no como una simple manipulación de símbolos algebraicos permite al estudiante ser consciente del problema fundamental que está desarrollando y explicitar las estructuras variantes o invariantes que están inmersas en la situación y ver por ejemplo el estudio del álgebra más allá de la manipulación de letras.

Mayorga et al. (2018), consideran los procesos algebraicos como actividades que se emplean en la resolución de problemas, algunas de estas corresponden a la comprensión del enunciado, la identificación de variables, transformación de lenguajes y manipulación y uso de operaciones matemáticas.

Consideramos que estos procesos se evidencian en los procedimientos que realiza un estudiante cuando enfrenta a una situación de variación y cambio, lo cual dota de significados porque permite reflexionar respecto al trabajo que realiza cuando está resolviendo el problema.

3.1.1.3 Análisis de funciones. La Seduca (2005) expresa que "el tratamiento de funciones, desde una perspectiva dinámica tiene que ver con los procesos de experimentación, reflexión, construcción de significados y formas de expresar la generalidad como resultado de los procesos de modelación matemática de diferentes tipos de problemas" (p.55).

Es por ello, que se establece una relación entre los distintos sistemas de representación (tabular, verbal, gráfico y simbólico) y la generalidad que puede surgir en problemas que involucren variación y cambio haciendo uso de la modelación matemática, para con ello, finalmente, mostrar predicciones de los fenómenos estudiados.

3.1.2 Estructura metodológica de los talleres

El curso de refuerzo estuvo orientado para promover tanto el trabajo individual como el trabajo grupal de los estudiantes, es por ello, que adoptamos la estructura metodológica para los talleres propuesta por los investigadores Fiallo y Parada (2018), la cual, proporciona unas fases que permiten desempeñarse desde esas formas de trabajo en el aula, así como, favorecer la socialización y discusión de los resultados obtenidos.

La secuencia de actividades se compone de cinco fases, aclaramos que se hicieron algunas adaptaciones, porque en la fase de exploración dirigida Fiallo y Parada (2018) utilizan el software de GeoGebra, mientras que, en nuestras actividades esto no siempre ocurre. Las fases se describen a continuación:

Información y exploración libre: Se plantea un problema, que promueva en los estudiantes evocar y aplicar saberes y/o experiencias previas, es decir, se relaciona con las ideas matemáticas que un estudiante tiene antes de abordar o profundizar en una temática. Aquí, el docente puede identificar ciertas dificultades conceptuales o procedimentales por parte de los estudiantes.

Socialización de los resultados obtenidos: Se establece un espacio de trabajo en el aula que pretende promover la comunicación, la discusión, el análisis, la reflexión y el planteamiento de distintos procedimientos y conceptos empleados para resolver o abordar la situación anterior, de esta manera se exponen y comparten los distintas ideas y acercamientos a la solución por parte de los estudiantes. El docente, orientará el problema y proporcionará preguntas para llevar a buen término la socialización.

Exploración dirigida: Se plantea un problema, en el cual, se hace uso de preguntas orientadoras o guías y así, ir avanzando hacia la identificación de patrones o regularidades,

propiedades, relaciones, es decir, el estudio de algunos objetos matemáticos inmersos en el problema. Aclaramos que, en esta fase, no necesariamente se utilizará software.

Explicación: Se retoma la socialización de procedimientos y conceptos por parte de los estudiantes. El docente tendrá la responsabilidad de ir condensando las ideas de los estudiantes, para finalmente, establecer consensos y/o acuerdos que permitan institucionalizar el conocimiento que se perseguía con el desarrollo y planteamiento de la situación.

Tarea Retadora: se plantea un problema adicional, que le proporcione al estudiante una aplicación de lo aprendido, sin que contenga la misma estructura. De este problema también, se realizó una socialización y se discuten estrategias e ideas.

3.2 Resolución de problemas

En nuestro país, en los documentos oficiales del MEN: Lineamientos curriculares en matemáticas MEN (1998) y los estándares básicos de matemáticas MEN (2006) se establece que, la resolución de problemas es un eje organizador del currículo porque sirve de contexto para llevar a cabo el quehacer matemático y les permite a los estudiantes acceder a las matemáticas con sentido, más que, aquella donde se repite una serie de algoritmos o problemas rutinarias que implican solo memorización, implica actuaciones en los estudiantes como: planificar, tener confianza, voluntad a su vez, favorece un ambiente de comunicación en el aula para aprender con otros.

Además, en el documento de principios y estándares emitido por Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) en los Estados Unidos se declara que “La resolución de problemas es una característica notable de la matemática y un medio importante para desarrollar el conocimiento matemático. Consiste en encontrar una manera de alcanzar un objetivo que no es directamente asequible” (NCTM, 2003, p.120).

En el estudio que reportamos aquí centramos nuestra atención en la resolución de problemas para la enseñanza y construcción de conocimiento matemático. Es por ello, que inicialmente definimos qué entendemos por resolución de problemas y cómo estos inciden en el aprendizaje de los estudiantes.

Krulik, & Rudnick (1989) definen "Un problema es una situación, cuantitativa o de otro tipo, que confronta a un individuo o grupo de individuos, que requiere resolución, y para la cual el individuo no ve camino aparente a la solución" (p. 9). Es decir, el individuo se enfrenta a algo que desconoce, un reto, un desafío. Por tanto, se distingue entre los términos: i) pregunta: corresponde a una situación que se soluciona con evocar un recuerdo o la memoria; ii) ejercicio: problemas que requieren la práctica de un algoritmo o destreza adquirida previamente, finalmente, iii) problema: situación que requiere una síntesis y análisis de conocimiento y experiencias previas. Se convierte en un desafío para el individuo o grupo que lo enfrentan.

Santos-Trigo (2014) comenta que un problema o tarea es una oportunidad para los estudiantes, puesto que, promueve en ellos: formular preguntas, expresar y comunicar sus razonamientos, establecer y utilizar diversas formas de representación, plantear diversos caminos de solución, establecer conexiones entre los conceptos y procedimientos, es decir, es un proceso que favorece el aprendizaje en matemáticas. El autor, manifiesta que aprender bajo el enfoque de resolución de problemas implica involucrar a el(los) estudiante(s) en el quehacer del matemático en el aula, donde se valore la participación y las ideas matemáticas, entendiendo que, no es un proceso terminado, sino dinámico que se enriquece paulatinamente en pro de responder a ciertas preguntas en cada situación.

Destacamos la clasificación de problemas rutinarios y no-rutinarios en términos de Santos-Trigo (2014), los cuales, están presentes en nuestro curso de refuerzo. Implica la medicación de

sus recursos, experiencias y conocimientos previos de los estudiantes, posiblemente para algunos estudiantes, los problemas se conviertan en tareas de rutina o lo contrario.

Schoenfeld (2016), sugiere una transformación en el currículo y la forma de enseñar matemáticas, menciona que las matemáticas es la ciencia que busca comprender patrones que se encuentran en el mundo. Además, el autor plantea que los docentes vayan de la memorización de procedimientos, formulas y ejercicios a la búsqueda de soluciones, exploración de patrones y planteamiento de conjeturas, esto permitirá ver las matemáticas más allá de un corpus de conocimiento y hechos, que pueden ser motivadores para los estudiantes.

3.2.1 Resolución de problemas variacionales

En este apartado exponemos una síntesis relativa a la resolución de problemas variacionales desde nuestros referentes teóricos que son documentos oficiales del MEN (1998), el MEN (2006) y los NCTM (2003). El curso se plantea como un acompañamiento a los estudiantes de admisión especial que favorezca el tránsito entre la educación secundaria y la universitaria, además el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas. Por ello, que presentamos una caracterización de los tipos de problemas en matemáticas que deberían enfrentar los estudiantes de educación media y bachillerato, para a partir de esta caracterización plantear en qué hacer refuerzo.

De los documentos antes citados, se resalta la necesidad de utilizar la resolución de problemas como proceso para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, además, por medio de este proceso, se espera posibilitar en los estudiantes: la formulación de preguntas y problemas; la identificación de información relevante y necesaria; el uso y adaptación de conocimientos; el uso de estrategias y experiencias previas; la planificación, reflexión y adecuación de un repertorio amplio de métodos que permitan asignar significado y uso a las matemáticas. Además, en el

(NCTM, 2003) se enfatiza en que compartir resultados e ideas que coadyuven en la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos.

Desde los documentos MEN (1998), MEN (2006) y los NCTM (2003) se indica que los estudiantes al finalizar la secundaria resolverán problemas de variación para:

Aprender a identificar, percibir, reconocer, expresar y comprender patrones, relaciones y funciones.

Hacer uso de las distintas representaciones (verbal, icónico, gráfico, tabular y algebraico) para modelar el cambio presente en fenómenos de variación inmersos en problemas de la vida cotidiana, las ciencias y las matemáticas mismas. De esta manera surge la función como herramienta de conocimiento para expresar, caracterizar y representar la variación. Además, se espera que el estudiante, reconozca y comprenda que existen diversas familias de funciones, dependiendo del tipo y el comportamiento del cambio que se esté analizando.

Resolver problemas en los que se promueva la comprensión del uso de la variable y se representen estructuras matemáticas empleando símbolos algebraicos, analicen sus propiedades y tengan fluidez en la manipulación, interpretación y transformación de los símbolos en las expresiones, ecuaciones e inecuaciones.

Construir, interpretar y analizar modelos matemáticos apoyados en patrones recursivos o iterativos, aproximaciones numéricas y la estimación, los cuales pueden ser argumentos usados en la resolución de problemas de variación, asimismo, transitar de lo concreto a lo abstracto. Por lo cual, emergen algunos objetos matemáticos como: variable, funciones, sucesiones, ecuaciones, inecuaciones, series infinitas, procesos infinitos, límites, razón de cambio, derivada, entre otros.

Además, de los documentos orientadores para la enseñanza de las matemáticas se puede inferir la sugerencia para que el docente promueva el análisis de propiedades de estos objetos de

estudio y proporcionar espacios para compartir y discutir ideas, valorando los puntos de encuentro, las exploraciones, deducciones y descubrimientos que realicen los estudiantes, así como, el debate de argumentos, explicaciones y justificaciones para la validación y el consenso.

Por otra parte, desde estos referentes teóricos se plantea que, el uso de las tecnologías digitales puede favorecer la manipulación simbólica de los objetos matemáticos mediante la construcción de sus representaciones y la creación de modelos que se ajusten a los datos de los fenómenos estudiados. Como lo expresa Santos-Trigo (2016) “en términos generales, el uso sistemático y coordinado de diferentes tecnologías debe ayudar a los estudiantes a desarrollar formas de pensar que resultan importantes en la formulación de preguntas y la resolución de problema” (p. 2).

Debido a la emergencia sanitaria del covid-19 las tecnologías digitales, se han convertido en el medio idóneo para desarrollar las actividades de enseñanza y aprendizaje, muchos cursos y programas en los diversos niveles educativos a nivel nacional e internacional se impartieron utilizando recursos como: la plataforma virtual de GeoGebra (AVG), video tutoriales, Moodle, Zoom, WhatsApp, entre otros. De esta manera Santos-Trigo (2020) manifiesta que “el uso de las tecnologías digitales abre nuevas rutas para que los jóvenes extiendan sus formas de solucionar problemas” (p. 3). Por lo anterior, el curso se llevó a cabo gracias a la accesibilidad de los estudiantes y la docente a las tecnologías digitales, las cuales, fueron empleadas para abordar los problemas que se plantearon en el curso.

3.3 Habilidades para la resolución de problemas variacionales.

En este apartado, pretendemos caracterizar y describir habilidades presentes en la resolución de problemas matemáticos. Esto lo realizamos considerando aportes teóricos de autores como Polya, Schoenfeld, Krulik, & Rudnick y Santos-Trigo -Trigo.

Para efectos de esta investigación acogemos la definición de habilidad, como expresa Rueda (2016) “Conjunto de acciones secuenciales coherentes y coordinadas realizadas por un individuo, en la consecución de un objetivo. Estas acciones están mediadas por los conocimientos previos y pueden desarrollarse mediante la práctica” (p.57). Esto ha suscitado centrar atención tanto en el diseño, orientación y estructuración de problemas para la enseñanza, como en los aspectos esenciales que involucran a los estudiantes al interactuar con las diversas tareas matemáticas (saberes previos) y la manera cómo posiblemente puedan desarrollar, perfeccionar o adquirir habilidades para la resolución de problemas.

Polya (1965) sugiere un camino para la resolución de problemas, el cual consta de cuatro etapas: i) comprensión del problema, ii) concepción de un plan, iii) ejecución de plan y iv) visión retrospectiva, es decir, reconocer información relevante y asignarle sentido, establecer algunas estrategias que pueden desarrollarse y llevarlas a cabo, finalmente, reflexionar sobre la solución que mejor se adapte al problema inicial, haciendo las validaciones respectivas para determinar si la solución es adecuada o no.

Por lo anterior, pensamos que las habilidades asociadas al proceso de resolución de problemas son las acciones que los individuos realizan para transitar por cada una de estas fases enunciadas por Polya (1965). Por tanto, expresamos las habilidades para la resolución de problemas podrían ser: comprender el problema; plantear y ejecutar diversos caminos de solución; validar y verificar las soluciones encontradas, además, tal como lo establece Williner (2011) las habilidades se deben adaptar a los conocimientos específicos, por lo tanto, se establecen descriptores asociados al pensamiento variacional.

En su obra Polya (1965) plantea unas estrategias generales para la resolución de problemas, que ha denominado Heurísticas, que hemos considerado como evidencias de las habilidades para

la resolución de problemas. A continuación, describimos a partir de este autor en qué consisten algunas de estas heurísticas.

Realizar analogías: Hace referencia a encontrar un tipo de similitud para encontrar ciertas relaciones en las que concuerdan los objetos análogos, por lo anterior, el estudiante puede abandonar por un momento el problema inicial e intentar plantear un problema semejante más sencillo. Según el autor abarca desde conversaciones cotidianas hasta realizaciones científicas.

Descomponer y recomponer el problema: El estudiante puede, considerar y distinguir partes de la condición examinando cada una de ellas por separado, también, puede establecerse el uso de definiciones para introducir elementos auxiliares que permitan destacar elementos implícitos del problema.

Emplear elementos auxiliares: Un elemento que se introduce con la finalidad de abordar la situación, por ejemplo, líneas en la figura, incógnitas, teoremas. El estudiante puede hacer uso de sus experiencias con otros problemas relacionado y abordados.

Examinar sus hipótesis: ciertas hipótesis requieren de un análisis y no una aceptación inmediata e irrevocable. El estudiante podría considerar sus ideas y hacer un examen que permita, identificar la pertinencia de estas al resolver el problema.

Crear figuras: Implica dibujar una representación o una configuración figural. Estas no son exclusivas de los problemas de geometría. En efecto, estas representaciones podrán posibilitar la distinción de detalles, asimismo, recordar observaciones.

Plantear una generalización: consiste en pasar de examinar un objeto a un conjunto de objetos, es decir, se pasa de examinar un conjunto limitado de objetos, a ampliar o extender el conjunto inicial que lo incluya a su vez.

Emplear la particularización: Consiste en pasar de explorar un conjunto de objetos a considerar un conjunto más pequeño de objetos, es decir, implica restringir el conjunto. Además, el particularizar permite encontrar contraejemplos que refuten una hipótesis general.

Plantear una ecuación: consiste en expresar por medio de símbolos matemáticos una situación formulada en palabras. Es un ejercicio de traducir las condiciones al lenguaje matemático.

Utilizar una definición: “Definir un término es dar su significado en otros términos que se suponen conocidos” (Polya, 1965, p.67).

Cómo ya se mencionó, las heurísticas son estrategias generales que se usan para resolver problemas. Por ejemplo: un estudiante puede realizar una figura para comprender un problema, pero, quizás en otro problema esa figura se use para plantear el camino solución o para validar la respuesta. En el capítulo de análisis de resultados se mostrarán evidencias de lo antes mencionado.

3.3.1 Habilidad para comprender el problema.

Polya (1965) plantea que, para comprender un problema, el estudiante debería pensar sobre: qué es lo desconocido o la incógnita, qué le preguntan, cuáles son los datos, cuál (es) la condición(es) de la situación, que conocimientos necesito emplear, qué es lo que requiere. Es decir, se encamina obtener cuál es la información y establecer las relaciones entre los datos y las incógnitas. De lo contrario es imposible llegar a la solución, porque como lo expresa el autor, no es posible contestar algo que no se comprende.

En efecto, la comprensión del problema requiere análisis y síntesis, es decir, no es suficiente con la identificación de la información del enunciado, el estudiante deberá hacer uso del repertorio procedimientos, conocimientos y habilidades que posee para establecer cómo utilizará la información (Krulik & Rudnick, 1989). Es por ello, que, la resolución de problemas como lo

expresa Schoenfeld (1987) citado por Santos (2014) involucra los recursos que posee, es decir, los conocimientos y las experiencias previos de los estudiantes.

Santos-Trigo (2014) menciona que, los estudiantes formulan una serie de preguntas cuando se enfocan en el proceso de resolución de problemas, lo que conlleva, a identificar datos, incógnitas y relaciones que ayudan a representar y entender las condiciones del problema. Algunos descriptores para verificar la comprensión del problema son:

Tabla 2

Descriptores de habilidades para comprender el problema

Notación	Descriptor
C_1	Lee el enunciado e identifica las palabras claves del problema.
C_2	Identifica la incógnita y los datos del problema (pregunta).
C_3	Enuncia el problema con sus propias palabras.
C_4	Plantea las hipótesis y condiciones del problema.
C_5	Identifica un patrón o una regularidad.
C_6	Reconoce relaciones de covariación (identificar qué cambia)
C_7	Introduce una notación adecuada.
C_8	Organiza la información del problema (crear una tabla, una figura)
C_9	Reconoce las variables de la situación.
C_{10}	Asigna sentido a una representación

3.3.2 Habilidad para plantear y ejecutar los diversos caminos de solución.

Los estudiantes deberían desarrollar un repertorio amplio de estrategias sobre la resolución de problemas, debido a que, algunas alternativas pueden servir, mientras que, otros deben ser abandonados por no conducir a la solución. Los problemas se convierten en desafíos, que son enfrentados por diversos métodos (Krulik & Rudnick,1989)

Es por ello, en algunas ocasiones emplean métodos *heurísticos* los cuales son estrategias que les permiten a los estudiantes abordar los problemas, de esta manera, pueden cambiar condiciones del problema, hacer conexiones con la información identificada y los conocimientos previos, realizar conjeturas para luego, abordar la situación. Autores como: Polya (1965);

mencionan que las heurísticas son generales y aplicables a todo tipo de problemas, pueden proporcionar orientación para abordar la situación.

Según los autores Krulik, & Rudnick (1989) aplicar la heurística es una habilidad difícil en sí misma. En ocasiones requiere que como docentes mostremos a los estudiantes cómo (y cuándo) usar cada estas estrategias. Es así, cómo se sugiere a los docentes incentivar la generalización para predecir, la particularización para probar hipótesis, el uso de tablas para organizar la información y comprender el problema, etc.

Describimos algunas acciones que dan cuenta de la habilidad (ver Tabla 3)

Tabla 3

Descriptores habilidades plantear y ejecutar diversas soluciones

Notación	Descriptor
PyE$_1$	Establece relaciones de covariación.
PyE$_2$	Realiza una representación (gráfica, tabular, algebraica, figural)
PyE$_3$	Plantea una generalización.
PyE$_4$	Plantea una(s) ecuación(es) que represente la situación y resuelve por diversos métodos de solución.
PyE$_5$	Emplea casos particulares (particularización)
PyE$_6$	Realiza estimaciones por ensayo y error para aproximarse a la solución.
PyE$_7$	Emplea una analogía.
PyE$_8$	Descarta parte de la condición del problema.
PyE$_9$	Examina su hipótesis.
PyE$_{10}$	Emplea elementos auxiliares

En conclusión, Polya (1965), dice que al tratar un problema se consideran los diversos aspectos, en algunas ocasiones una variación del problema empleando la descomposición o recomposición de sus elementos, el uso de una definición, examinar las hipótesis. Así, el empleo de una generalización, particularización y analogía puede inducirnos a elementos o un problema auxiliar más accesible.

3.3.3 Habilidad para validar y verificar las soluciones encontradas.

Polya (1965) y Santos-Trigo (2014), expresan que, es importante que los estudiantes examinen y monitoreen sus razonamientos, procedimientos y reconsideren la solución para evaluar el sentido que puede llegar a tener (validar), además, pensar en la posibilidad de emplear dicho resultado a otros problemas o pensar en otra manera de abordar la situación. Es necesario que los estudiantes se estén preguntando qué necesito, qué debo hacer, hacia dónde voy, qué conocimientos utilice, entre otras. Algunos descriptores que dan cuenta de esta habilidad son los siguientes:

Tabla 4

Descriptores de Habilidades para validar y verificar la solución.

Notación	Descriptor
VyV$_1$	Reconsidera la solución
VyV$_2$	Revisa procedimientos y cálculos.
VyV$_3$	Evalúa si la representación del objeto matemático se ajusta a las condiciones del problema.
VyV$_4$	Discute y compara la solución con el profesor y/o los compañeros.
VyV$_5$	Busca otras alternativas de solución.
VyV$_6$	Emplea procedimientos ya validados para solucionar problemas semejantes.
VyV$_7$	Prueba con casos particulares (Particularización)
VyV$_8$	Establece contraejemplos (Particularización)
VyV$_9$	Evalúa la utilidad del problema (aplicabilidad contextos)

Santos-Trigo (2014) expresa que, un aspecto esencial es cuestionar y discutir ideas relativas a ciertas preguntas, estrategias, métodos y procedimientos entre estudiantes y docentes. Dado que, se podrían identificar ciertas dificultades o diversas alternativas que contribuyan al avance hacia la solución. El autor, expresa que, en un ambiente de resolución de problemas, en la discusión ellos mismos puedan evaluar los alcances y las limitaciones de lo que han ejecutado y

planteado. Reiteramos que, el docente debe prestar atención especial e inducir a los estudiantes a siempre verificar y validar la respuesta del problema.

En conclusión, estos elementos teóricos nos permitieron hacer el análisis del proceso que siguieron los estudiantes cuando se enfrentaron a diversos problemas planteados en el curso de refuerzo.

4 Metodología de la investigación

En este capítulo se describe la metodología que se siguió en el desarrollo de la investigación, bajo el enfoque de diseño curricular propuesto por Díaz-Barriga et al. (1990), ya que, se diseñó, implementó y valoró un curso de refuerzo inicial con el fin de favorecer el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas en estudiantes de admisión especial.

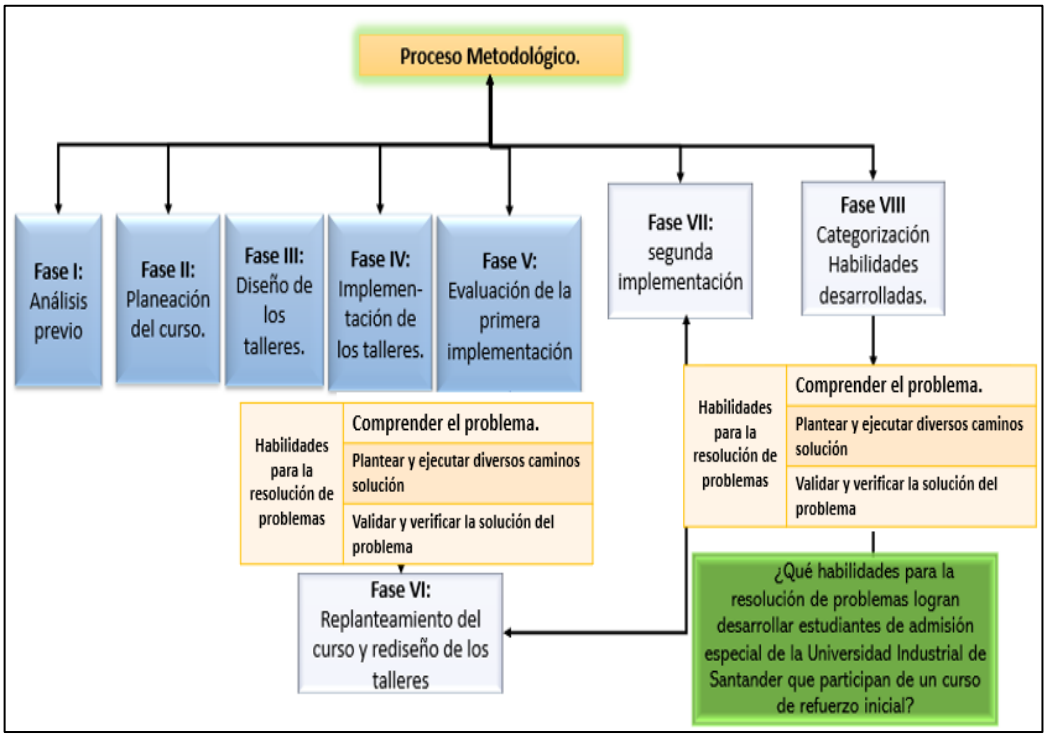
Arredondo (1981) citado por Díaz-Barriga et al. (1990) menciona que el diseño es un proceso que, consiste en la organización y estructuración del currículo, que comprende cuatro fases: i) Análisis previo: se estudian las características y condiciones económicas, políticas y sociales del contexto en particular y se debe considerar aspectos como los recursos, los estudiantes, entre otros. ii) diseño curricular: en esta etapa se tiene en consideración el análisis previo para determinar los fines y objetivos que se persiguen, además, se definen los medios, procedimientos y los recursos que se requieren y que posibiliten lograr dichos fines iii) aplicación curricular: es la puesta en marcha de los diseños y procedimientos planteados; finalmente, iv) evaluación curricular: se contrarresta los alcances en cuanto a los fines, objetivos, medios y procedimientos considerando las condiciones del análisis previo, y se hace una valoración de la eficiencia y eficacia de los componentes, para satisfacer las necesidades del contexto. Díaz-Barriga et al.

(1990) mencionan que el diseño curricular es dinámico, por tanto, las fases no necesariamente se llevan a cabo en este orden estricto.

En este capítulo, se describe el proceso metodológico de la investigación (que se desarrolló en ocho fases y que se bosqueja en la Figura 6, se mencionan las características de los participantes, la forma en que se diseñaron e implementaron las actividades, los métodos de recolección y la forma como se analizaron los datos.

Figura 6

Proceso metodológico.



4.1 Fase I: Análisis previo.

La política de admisión especial en la UIS (Consejo Académico, Acuerdo 282, 2017), posibilitan el acceso a la educación superior de bachilleres provenientes de grupos priorizados. Sin embargo, por procedimientos administrativos de admisión, el curso de precálculo que según Parada (2018) está dirigido a estudiantes de bajos niveles en matemáticas como una alternativa

remedial, sólo se había ofertado a estudiantes de admisión regular y fue hasta 2021-I que se posibilitó el acceso.

Considerando lo anterior, bajo la premisa de la política pública MEN (2013), la cual, reconoce que las IES pueden emprender acciones estratégicas que permitan mitigar las barreras de aprendizaje que se presentan en los diversos grupos priorizados por ejemplo, para la barrera 2: las dificultades académicas de la educación media que afecten el desempeño en los cursos de la universidad, se contemplan tres acciones estratégicas: *i)* promover las competencias en los estudiantes de la educación media de manera articulada con las IES *ii)* formación continua de profesores y *iii)* dar incentivos a las IES que trabajen en mejorar la calidad educativa (MEN, 2013,p.84)

Con el curso de refuerzo inicial se pretende generar oportunidades para promover habilidades en el proceso de resolución de problemas en matemáticas, las cuales, posiblemente beneficien la formación de los estudiantes para afrontar cursos universitarios en matemáticas.

4.2 Fase II: Planeación del curso.

El curso de refuerzo se planificó de 60 horas, además, en el período intersemestral durante 15 sesiones de 4 horas de trabajo continuo diario. El curso, se planeó en la modalidad de presencialidad remota porque la mayoría de los estudiantes de admisión especial provienen de zonas de difícil acceso y se les hace difícil (por costos) el desplazamiento y manutención en la sede principal, además, porque se gestó durante la emergencia sanitaria por Covid-19.

La plataforma que se planificó fue Zoom, dado que fue la que proporcionó la universidad (para el trabajo remoto en toda la universidad durante la contingencia por Covid 19) y también se programó el apoyo del Aula Virtual de GeoGebra AVG, modalidad grupos de GeoGebra Online,

porque es un espacio gratuito y permite monitorear y evaluar las interacciones de los estudiantes con los objetos matemáticos de estudio.

En la Tabla 5, se presenta la organización curricular del curso para su primera implementación. Cada uno de los talleres consta de cinco momentos a desarrollar en la clase (información y exploración libre; socialización de resultados obtenidos; exploración dirigida; explicación; y tarea retadora).

Tabla 5

Organización curso para primera implementación.

Taller	Objeto matemático	Eje temático	Problemas
1	Sucesiones.	Patrones y regularidades	**1.1 Judy** **1.2 Secuencia de figuras.** **2.1 A embaldosar** **3.1 Doblar la hoja de papel** **3.2 Regularidades lineales**
2	Expresiones algebraicas, uso variable.	Procesos algebraicos	**1.1Expresiones algebraicas.** **2.1Binomio al cuadrado perfecto** **3.1Áreas Geométricas**
3	Expresiones algebraicas, función lineal.	Procesos algebraicos	**1.1 Expresiones algebraicas y cambios de representación.** **2.1 Situación de ahorros**. 3.1 Deuda Externa
4	Ecuaciones e inecuaciones	Procesos algebraicos.	**1.1 Ecuaciones e inecuaciones de primer grado.** **2.1 Solución gráfica** **2.2 problemas de ecuaciones** **3.1Planteamiento problemas con inecuaciones.**
5	Sistema de ecuaciones 2x2	Procesos algebraicos.	**1.1 Pizza y bebidas** **2.1 Zoológico** **2.2 Jorge Andrés (compras)** **3.1 Dos números.**
6	Interpretación analítica y geométrica solución 2x2	Procesos algebraicos.	**1.1Rectángulo** **2.1 Precio frutas.** **3.1 Suma de dos números** **3.2 Triangulo isósceles.**

9	Procesos infinitos	Patrones y regularidades	1.1 Bisección de un Segmento 1.2Caída de una pelota 2.1 Sumas infinitas 3.1 Suma de términos
8	Sucesiones y procesos infinitos	Patrones y regularidades	**1.1 Suma de los números impares** **2.1 Sucesión de Fibonacci** **3.1 Sucesiones**
9	Función lineal y función por partes.	Análisis de funciones	1.1Salario+ comisión 2.1 Planes de telefonía. **3.1 Depreciación** **3.2 Precio de arroz**
10	Funciones.	Análisis de funciones	**1.1 Maíz situación económica** **2.1 Un habitante de San Basilio de Palenque minutos.** **3.1 Trabajo situación económica**
11	Funciones	Análisis de funciones	**1.1 Llenado de recipiente**. **2.1 Modelación lineal llenado recipientes.** **3.1 Llenado recipientes llaves (inversa).**
12	Noción de limite	Análisis de funciones	**1.1 Venta de leche** **2.1 Transporte Palenqueros "moto taxi"** 3.1 Temperatura Crecimiento Horno
13	Funciones Optimización	Análisis de funciones	**1.1 Caja con tapa** **2.1 Función volumen** 3.1 Razón de cambio función volumen
14	Modelación matemática.	Análisis de funciones	1.1 Dos cables. 2.1 Gastos salud **3.1 Decrecimiento de la población indígena**
	Reconociendo la variación		**Dos cables** **De la semicircunferencia** **De las paralelas** **Del anuncio.**

Aclaramos que, los problemas que se desarrollaron en la primera implementación son las que se encuentran resaltados en negrilla en la Tabla 5.

4.3 Fase III: Diseño de los talleres.

En ese apartado se describen los talleres en el orden que se planteó en la Tabla 5. En cada taller se presenta su respectivo propósito y los problemas con las soluciones previstas (éstas a partir de lo que se reporta en la literatura alrededor de los objetos matemáticos que se estudian con

cada uno de ellos). A lo largo del análisis previsto de cada taller iremos citando las investigaciones de las que se rescataron los problemas que se plantean o se rediseñan.

4.3.1 Taller 1: Patrones y Regularidades

Con este primer taller se pretendía que los estudiantes observaran e identificaran el patrón y la regularidad presente en los problemas, de esa manera, establecieran los elementos variantes e invariantes, luego, dieran tratamiento a la situación de variación y cambio de manera cualitativa y cuantitativa. Algunas estrategias que pueden ser empleadas en este tipo de problemas puede ser: el uso de casos particulares y la organización de los datos en tablas. Con esto, el objetivo fue, construir la expresión de generalidad, lo cual es una acción difícil "porque ver lo general en lo particular no es fácil de lograr" (Mason et al., 1999, p.102).

Por otra parte, el MEN (1998) indica que, sí, se considera en un primer momento generalizar patrones bien sea aritméticos, geométricos, figúrales; consecuentemente, esta actividad "se constituye en una potente herramienta para la modelación de problemas de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello, debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados" (MEN, 1998, p.17).

En el problema información y exploración libre del taller 1 (Figura 7) los estudiantes pueden relacionar la covariación entre el dinero y los kilómetros recorridos. Específicamente, es más favorable la tarifa diaria si Judy va a recorrer "x" kilómetros del intervalo $[0; 283,\overline{3}]$ en caso contrario, la tarifa semanal.

Así, un acercamiento que esperamos corresponde a estimaciones aritméticas por ensayo y error. Para poder establecer posibles intervalos o valores numéricos en los que le es más favorable cada tarifa, por ejemplo, para el inciso a) desde un acercamiento aritmético el estudiante puede realizar cálculos empleando la tarifa diaria tal como aparece en la Tabla 6.

Tabla 6

Acercamiento aritmético

Acercamiento aritmético 1:	$(\mathbf{95.000})(\mathbf{5}) + (\mathbf{1.500})(\mathbf{250}) = \mathbf{850.000}$ Luego, hace la diferencia de las tarifas: ($\$\mathbf{900.000} - \$\mathbf{850000} = \$\mathbf{50.000}$)
Acercamiento aritmético 2:	[95.000+(50) (1.500)] (5) = 850.000 Luego, hace la diferencia de las tarifas: ($\$900.000 - \$850000 = \$50.000$)

Posteriormente, Esperamos que los estudiantes compartan con sus compañeros sus procedimientos y argumenten que, existió un ahorro para Judy equivalente a $50.000.

Figura 7

Problema información y exploración libre del taller 1

1.1 Judy necesita alquilar un carro para usarlo desde el lunes hasta el viernes, y ve el siguiente aviso en un periódico local.

Modelo	Tarifa básica diaria más kilómetros recorridos	Tarifa semanal (kilometraje ilimitado incluido)
Renault Logan	$95.000 +$1.500 por kilómetro recorrido	$900.000

a) Judy piensa que necesita recorrer cerca de 250 kilómetros en total durante los cinco días ¿Cuál de las dos tarifas es más económica para Judy? **Justifica tu respuesta.**
b) Supongamos que Judy no estaba segura del kilometraje que tenía que recorrer ¿Cuál tarifa le favorece más? ¿Por qué? **Explica tu respuesta.**

Nota. Adaptado de: (Mason et al., 1999, p.35)

Por otra parte, en el inciso b) los estudiantes pueden emplear procesos analíticos como: identificar las cantidades variantes: kilómetros recorridos (x), cantidad de dinero a pagar en la primera tarifa durante los 5 días en función de los kilómetros recorridos $(f(x) = 95000(5) + 1500x)$; mientras las cantidades invariantes: tarifa básica diaria ($95.000) el precio de cada kilómetro recorrido ($1500) y finalmente, la tarifa semanal ($900.000). Se esperaba que los estudiantes relacionaran estos datos y plantearan una ecuación de primer grado así; $95000(5) + 1500x = 900000$. Seguidamente, se pretendía que los estudiantes resolvieran

la ecuación determinando con ello, la cantidad límite de kilómetros recorridos para los cuales, es más favorable elegir la tarifa semanal, es decir, $x = 283,\overline{3}$

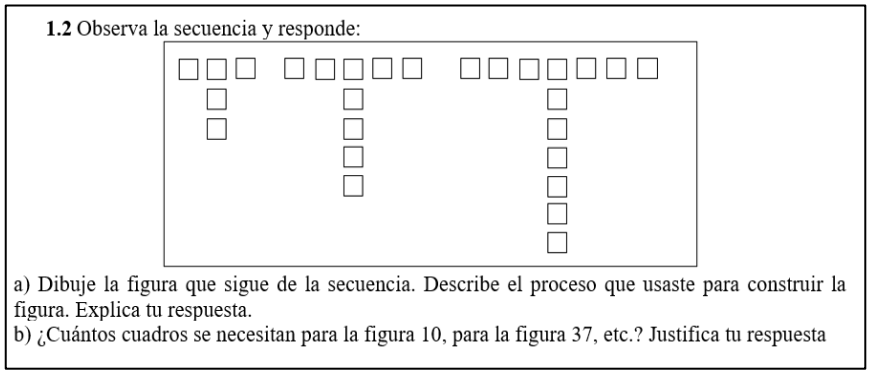
Otro acercamiento analítico, corresponde a relacionar el resultado del inciso *a)*, es decir, sí Judy para un recorrido de 250 kilómetros se paga $50.000 menos que la tarifa semanal entonces, la cantidad de kilómetros que puede recorrer con esta cantidad de dinero es igual a:

$x = \frac{50000}{1500}$; $x = 33{,}333\ldots$ es decir, el costo en un consumo correspondiente a $250 + 33,\overline{3} = 283,\overline{3}\ldots$

En el problema información y exploración libre del taller (Figura 8) pretendimos que los estudiantes empleando la figura dada, estableciera la secuencia. Mason et al. (1999) manifiesta que, la identificación y expresión de patrones representa un inicio en procesos de construcción de ideas matemáticas (relaciones funcionales).

Figura 8

Problema información y exploración libre del taller 1



Nota. Adaptado de (Mason et al., 1999, p.47).

Para el inciso a) suponemos que los estudiantes empleando la particularización podrían establecer el patrón y la regularidad de la configuración inicial, con el fin de plantear la expresión de generalidad. Los estudiantes, podrían emplear expresiones algebraicas equivalente, así, definir las sucesiones: $a_n = 5n - (n-1)$ en la que se, obtiene la figura restándole la posición anterior;

$b_n = 4n + 1$; $c_n = 4(n-1) + 5$; donde n representa el número de la figura. Con lo anterior, se espera que en el momento de la socialización ellos reconozcan que las sucesiones a_n, b_n, c_n son equivalentes, por tanto, las tres respuestas serán permitidas.

Otra posibilidad para expresar la generalidad se da cuando se inicia con $n = 0$, Así, se establece la sucesión $z_n = 5 + 4n$. Se destaca, que, para cada una de las sucesiones definidas, los estudiantes expongan cada uno de los procedimientos y razonamientos usados y que verifiquen si se cumplen o no las condiciones de la configuración dada.

Al respecto, se esperaba que los estudiantes pudieran expresar la variación por medio de registro de lenguaje natural, figural o mediante la construcción de una Tabla (como la Tabla 7).

Tabla 7

Uso de la tabla

Figura	**1**	**2**	**3**	**…**	***n***
Número de cuadritos.	$5 = 4 + 1$	$9 = 4(2) + 1$	$13 = 3(4) + 1$	…	$4n + 1$

En el problema exploración dirigida del Taller 1 (Figura 9), los estudiantes están inicialmente invitados a trabajar en casos particulares, para que luego, busquen un registro simbólico de la covariación entre el número de baldosas negras y el número de baldosas blancas.

Tabla 8

A embaldosar registro tabular.

Número Baldosas Negras	3	5	8	…	***n***
Número Baldosas Blancas	7	9	12	…	$n + 4$
Número Total de Baldosas	$3 + 3 + 4$	$5 + 5 + 4$	$8 + 8 + 4$	…	$n + n + 4$

Algunas estrategias que los estudiantes pueden emplear se muestran en la Tabla 8, así Mason et al. (1999) expresan que cuando se usan casos particulares, se avanza a la expresión de generalidad.

Figura 9

Problema exploración dirigida del Taller 1

2.1 Pedro es constructor. Embaldosa las entradas de las casas de la urbanización "La colina" Utilizando baldosas negras y blancas como se muestra en la imagen.

Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas baldosas blancas usa Pedro si empieza con una fila de 8 baldosas negras? **Explica tu respuesta.**

b) ¿Cuántas baldosas blancas necesitaría Pedro si empieza con un número cualquiera de baldosas negras? **Justifica tu respuesta**

Pedro quiere saber cuántas baldosas se usan, en total, para la entrada de cualquier casa

c) Escribe una expresión que permita determinar el número total de baldosas. **Justifica tu respuesta.**

d) ¿El número de baldosas es siempre par o impar?

Nota. Adaptado de: (Agudelo, 2000, p. 26)

En el inciso b) los estudiantes pueden establecer la relación de covariación entre el número de baldosas negras (n) y el número de baldosas blancas (b), así; i) $b = n + 4$: o ii) $n = b - 4$. . En el inciso c) los estudiantes podrían establecer el número total de baldosas en función de las baldosas negras (n) en relación con el número de baldosas blancas para establecer en términos de una sola variable, el total, así: $f(n) = 2n + 4$.

En el inciso d) esperaba los estudiantes y el docente generaran una discusión porque la pregunta puede tener dos posibilidades de respuesta: i) si se considera la totalidad de baldosas, siempre va a ser un número par de baldosas es decir, si la cantidad de baldosas negras es par (de la forma $2n$) entonces $2(2n) + 4 = 2(2n + 2)$ lo cual siempre es par, y, para el caso ii) cantidad de baldosas negras es impares (de la forma $2k + 1$) por tanto $2n + 4$, para este caso $2(2n + 1) + 4 = 2((2n + 1) + 2)$, en conclusión, el número total de baldosas siempre es par.

Mientras que, ii) si se considera la relación entre el número de baldosas blancas y número de baldosas negras, estas dependen directamente de, sí el número de baldosas negras es impar, el número de baldosas blancas también lo será y viceversa.

En el problema tarea retadora del taller 1 (Figura 10), indagaba a los estudiantes sobre el patrón y la regularidad que emerge en este contexto del doblado de la hoja de papel. Además, se esperaba involucrar procesos infinitos (se trabaja sucintamente el infinito actual), que como fenómeno físico tiene una cantidad finita de realizaciones.

Figura 10

Problema tarea retadora del taller 1

3.1 ¿Cuántas veces se puede doblar una hoja de papel por la mitad?

a) ¿Cuántas partes quedan luego de dividir la hoja en 6 veces, 11veces, etc.? **Justifica tu respuesta.**
b) Escribe una expresión que permita determinar el número de partes en que queda dividida la hoja. **Explica tu respuesta.**
c) Sí, el grosor de la hoja es de 0,01 mm y además que se puede realizar 54 dobleces. ¿Cuál es el grosor de la hoja doblada? ¿Cómo hiciste el cálculo? **Justifica tu respuesta.**

Nota. Adaptado de: (Beltrán et al., 2016, p.199)

En el inciso a) se promovía la particularización para que, los estudiantes al realizar la exploración (quizás lo pueden hacer manualmente), reconocieran el patrón y la regularidad, luego, generalizar la relación entre el número de dobleces *(n)* y el número de partes en que queda divida

la hoja. En el inciso b) Esperamos que los estudiantes plantearan la expresión algebraica que representa la covariación entre el número de dobleces y el número de partes que quedaba dividida la hoja, la cual corresponde con 2^{n}.

En el inciso c) pretendimos que los estudiantes reconocieran que, cada vez que se dobla la hoja, el grosor de la hoja se va "acumulando", es decir, si se dobla una vez, se tendría $(0{,}01)(2) = 0{,}02$; si se dobla 4 veces se tendría 16 partes ($2^4 = 16$), por tanto, el grosor será $(0{,}01)(16) = 0{,}16$. continuando con el mismo razonamiento, para 54 dobleces, se tendría un grosor equivalente a $2^{54}(0{,}01)= 180143985094819.84\, mm$ es decir, como 1km=$\frac{1}{1000000mm}$ se tiene un aproximado de 180.143.985,09 km. Finalmente, en la socialización, se esperaba que los estudiantes generan una discusión de esta última cifra y debatieran a qué distancia se puede asemejar o comparar.

En el problema tarea retadora del taller 1 (Figura 11), procuramos que los estudiantes emplearan diversas estrategias para obtener la generalización. Para ello, pueden hacer uso de casos particulares y determinar de una a otra fase, cual es la diferencia que se obtiene entre el número de círculos y el número de la fase consecutiva (progresiones aritméticas). Es importante destacar que, el applet de regularidades lineales rectangulares presenta varias posibilidades a los estudiantes para elegir una configuración figural.

Esperamos acercamientos inductivos o recursivos para expresar la covariación que se establece entre la fase (n) y la cantidad de círculos que tiene la disposición rectangular a_n, Los estudiantes podrían establecer una sucesión que evidencia la dependencia de un término con el anterior, además, que, de un término a otro, se adiciona la misma cantidad de círculos (para este caso, la razón de la progresión aritmética correspondía a 36). Finalmente, registra que ellos puedan plantear la expresión de generalidad.

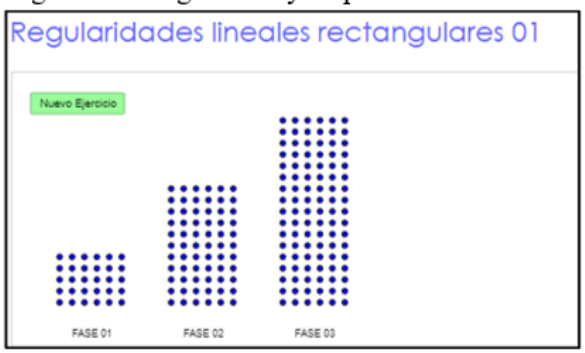
$$a_1 = 30$$
$$a_2 = a_1 + 36 = 66$$
$$a_3 = a_2 + 36 = (a_1 + 36) + 36 = a_1 + 2(36)$$
$$a_4 = a_3 + 36 = (a_2 + 36) + 36 = (a_1 + 2(36)) + 36 = a_1 + 3(36)$$
$$\dots$$
$$a_n = a_{n-1} + 36 = a_1 + 36(n-1)$$

Figura 11

Problema tarea retadora del taller 1.

3.2 Regularidades lineales rectangulares.

Elige una configuración y responde:



a) ¿Cuántos círculos hay en la fase 70?
b) Encuentre la generalización para la fase n
c) ¿Cuántos círculos tiene la fase 236?
d) ¿Cuántos círculos tiene la fase 164?

3.3 Socialice y comparte tus resultados con tus compañeros y tu profesor.

Nota. Adaptado Recurso GeoGebra Ciencias Básicas Puente Alto

Así mismo, suponemos que los estudiantes pueden encontrar expresiones algebraicas equivalentes como las siguientes: $a_n = 30(n) + 6(n-1)$ también, $a_n = 36(n) - 6$, que proporcionan un tratamiento al problema. En este problema sugerimos una socialización de diversas configuraciones, lo cual consideramos que enriquece la discusión y la búsqueda de estrategias para registrar la variación.

4.3.2 Taller 2: Expresiones algebraicas

Propósito: Se pretendía que, el estudiante planteara expresiones algebraicas equivalentes y dar sentido a los diversos usos de la variable. En este taller queremos promover el cambio de

representación de las áreas geométricas a lenguaje algebraico, esto con el fin de que la variable tenga un sentido para los estudiantes.

Desde el MEN (2006) en el pensamiento variacional es importante el reconocimiento de los elementos variables o invariantes, así como la identificación "del campo de variación de cada variable y sus posibles relaciones" (p. 68). Además, el álgebra más que un conjunto símbolos, se convierte en un sistema de representación y descripción de fenómenos de variación.

Küchemann y Collins (como se citó en De la Fuente (2016)) menciona la comprensión de la letra por parte de los estudiantes así: letra evaluada: donde se le asigna un valor numérico; letra no usada: en este el estudiante ignora o desconoce la existencia de la letra y puede que, no le asigne un significado; letra como objeto: se entiende como una abreviatura de un objeto o como un objeto en sí mismo; letra como incógnita especifica: le asigna un número específico, pero desconocido y puede operar con él directamente; letra como número generalizado: aquí, la letra puede tomar diferentes valores; letra como variable: es decir, se asigna un rango de valores no especificados y se reconoce que hay una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

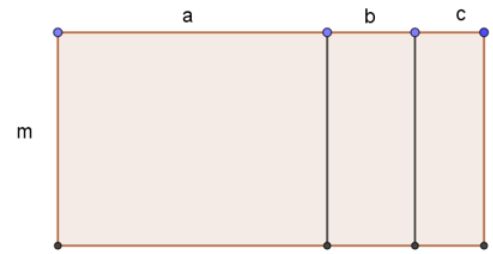
En el problema información y exploración libre del taller 2 (Figura 12) diseñamos al estudiante un problema que da la posibilidad de vincular la representación figural de las áreas geométricas con la expresión algebraica.

Para el inciso a) procuramos que los estudiantes comprendan la letra (variables) como un número generalizado, por tanto, $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ y m, son magnitudes positivas cuyo campo de variación corresponde con el conjunto de los números reales positivos. Por lo anterior, suponíamos que los estudiantes lograran encontrar el área del rectángulo al expresar uno de los lados como la suma: $(a + b + c)$ luego, multiplicarlo por su altura m.

Figura 12

Problema información y exploración libre del taller 2

Actividad: 1.1 Información y exploración inicial



a) ¿Qué representan las variables, a, b, c, m? ¿Qué valores pueden tener las variables a, b, c, m? **Explica tu respuesta.**

b) Expresa el área del rectángulo ¿Existe una expresión equivalente? ¿por qué? **Justifica tu respuesta**

c) siendo m=5 ¿De cuántas formas pueden combinarse las variables a, b, c para que el área total del cuadrilátero sea igual a 100 unidades cuadradas? **Explica tu respuesta.**

Nota. Libro Elementos de Euclides.

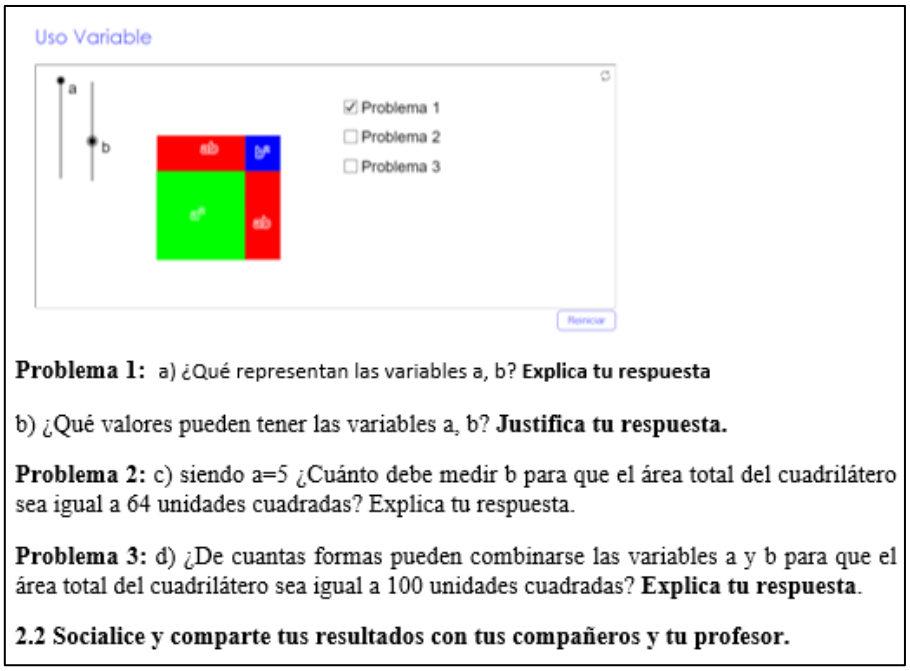
También, suponíamos que lograran encontrar el área de cada uno de los rectángulos y luego, sumarlas. Es decir, reconocer que son expresiones algebraicas equivalentes $(a + b + c)m = am + bm + cm$. En la socialización, pretendimos establecer con los estudiantes una discusión referente a los conjuntos numéricos y sus propiedades.

En el inciso b) intentamos recordar las propiedades de los números reales respecto a la adición y la multiplicación, específicamente la propiedad distributiva o asociarla con factorización (factor común). Por otra parte, para el *inciso c)* pretendimos que los estudiantes plantearan una expresión algebraica que considera las condiciones del problema, es decir, $m = 5$ (altura del rectángulo) y A=100 (área del rectángulo), así: $(a + b + c)5 = 100$, de donde, requeríamos que los estudiantes bosquejaran que las variables cumplen la condición que la suma es igual a: $(a + b + c) = 20$.

En el problema exploración dirigida del taller 2 Figura 13 se promueve el uso de la variable como una generalización. En la construcción el estudiante puede manipular el applet y explorar la variación que se presenta cuando se mueven los deslizadores a y b.

Figura 13

Problema exploración dirigida del taller 2



Nota. Adaptado de: Recurso GeoGebra https://www.geogebra.org/m/uafybyss

En el inciso a) Esperamos que los estudiantes plantearan la relación entre las variables así: $(a+b)$ corresponde a la longitud del lado del cuadrado. Luego, el área corresponde a: $(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ En el inciso b) Esperamos que los estudiantes expresaran la variable como un rango de valores no especificados, pero que dadas las condiciones del problema pertenecen al conjunto de los números reales positivos debido a que, a, b son magnitudes

En el inciso c), se esperaba que los estudiantes reconocieran valor numérico de la variable (b). Algunos estudiantes en este tipo de problemas pueden realizar estimaciones numéricas y de

esta manera dar Respuesta de o desde acercamientos analíticos, se puede generar acercamientos como que se enuncian en la Tabla 9, donde esperamos despeje de ecuaciones o aplicación de casos de factorización.

Tabla 9

Acercamientos analíticos

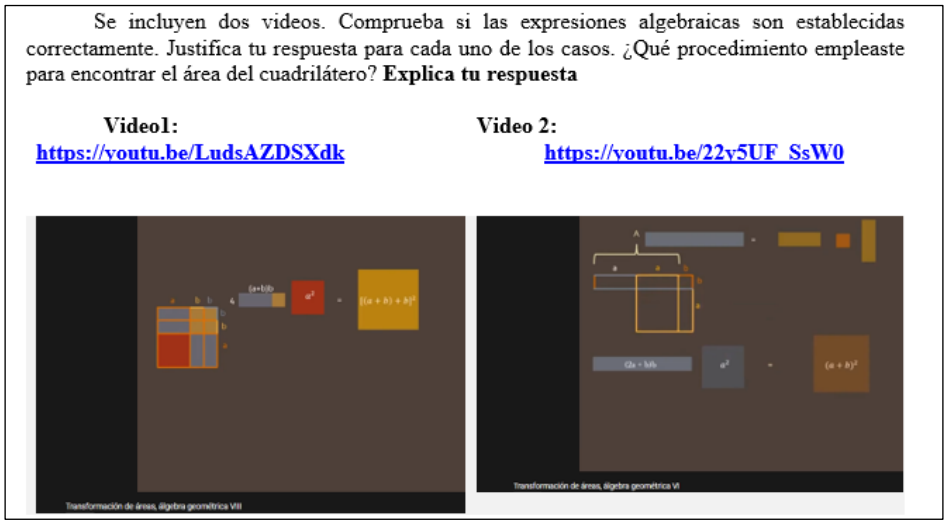
Reemplazando $a = 5$ y despejando b	Desarrollar el binomio y factorizar	Desarrollar el binomio y emplear la fórmula ecuación cuadrática
$(a+b)^2 = 64$ $\sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{64}$ $(5+b) = \sqrt{64}$ $b = \mp 8 - 5$ *Por tanto, b=3.*	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(5+b)^2 = 5^2 + 2(5)b + b^2$ $= 64$ $25 + 10b + b^2 = 64$ $b^2 + 10b - 39 = 0$ $(b+13)(b-3) = 0$ $b = -13 \quad b = 3$	$b^2 + 10b - 39 = 0$ $a = 1 \quad b = 10 \quad c = (-39)$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x = \frac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4(1)(-39)}}{2(1)}$ $x = \frac{-10 \pm \sqrt{256)}}{2}$ $x_1 = 3 \quad x_2 = -13$

Finalmente, en el inciso d) pretendimos que los estudiantes expresaran la variable como un rango de valores no especificados, con dominio en los números reales positivos y con la condición $(a+b)^2 = 100$, $\sqrt{100} = \mp 10$ considerando $(a+b) = 10$. Algunos estudiantes se quedarán en asignar valores particulares, especialmente, valores enteros positivos, motivo por el cual se sugiere promover una discusión para para promover el empleo de argumentos e ideas respecto al campo de variación para las variables

En el problema tarea retadora del taller 2 (Figura 14) esperamos que los estudiantes coordinar la representación geométrica con su respectiva expresión algebraica. Se presentaban dos videos cuyo propósito estaba orientado en la construcción dinámica de las áreas geométricas de cada una de las figuras, para que posteriormente, se registrará la expresión algebraica.

Figura 14

Problema tarea retadora del taller 2



Nota. Adaptado de Libro de Euclides.

En este problema se pretendió establecer la veracidad de la equivalencia visualizada en el video, los estudiantes pueden realizar para el video 1:

$$(a+b+b)^2 = (a+b+b)(a+b+b)$$

$$= a^2 + ab + ab + ab + b^2 + b^2 + ab + b^2 + b^2$$

$$= a^2 + 4ab + 4b^2$$

También pueden indicar según la visualización la equivalente representación algebraica. Para el video 2: $(a+a+b)b + (ab) + (aa) = (ab + ab + b^2) + ab + a^2 = 3ab + a^2 + b^2$

4.3.3 Taller 3: Expresiones algebraicas y cambios de representación.

Propósito: Desde el MEN (1998) se plantea promover el uso de la variable y el dominio de las expresiones algebraicas para comprender y establecer relaciones entre las cantidades cambiantes inmersas en un problema. Así mismo, los NCTM (2003) establecen como un tema importante para el estudio del álgebra el uso de símbolos y la generalización para expresar ideas matemáticas. Por tal motivo, en el taller pretendimos que los estudiantes lograran identificar

relaciones y propiedades de la representación gráfica, simbólica o tabular de una función, con énfasis en la función lineal para dar sentido a los parámetros como: la pendiente de la recta y el intercepto en cada uno de los problemas planteados.

El problema información y exploración libre del taller 3 (Figura 15) pretendimos que los estudiantes reconocieran la manera cómo está cambiando cada una de las formas de ahorros, así, se establecieran posibles intervalos en los que predomina el ahorro de cierto nieto. También, sugerimos que los estudiantes describan los diferentes tipos de comportamientos de ahorro, por ejemplo: si es creciente, decreciente o constante.

Figura 15

Problema información y exploración libre del taller 3

1.1 Las siguientes expresiones describen los ahorros de los diferentes nietos del abuelo Joan (x denota el número de semanas)

Mónica $7x$	Gus 300
Anna $10x$	Pere $60+3x$
Javi $30+5x$	Helena $-20+4x$
Laura $300-5x$	Gerard $-70+7x$

a) ¿Quién ahorra más dinero? ¿Por qué? **Justifica tu respuesta.**
b) ¿Qué representa cada uno de los puntos de intersección de las representaciones gráficas? **Justifica tu respuesta.**
c) En qué intervalo Pere ahorra más dinero que Helena y Gerard. **Justifica tu respuesta.**

Todos los nietos viven bastante cerca y han descubierto que hay una forma muy divertida de poder comunicarse entre ellos: el Walkie-Talkie. Para eso tiene que comprar un trasmisor para cada dos de ellos. Así que juntaran sus ahorros para poder llegar a los 400 euros que cuesta ese modelo de Walkie-Talkie.
Responde las siguientes preguntas:
d. Encuentra expresiones tan cortas como sea posibles para describir la cantidad de ahorros que se puedan conseguir juntando los ahorros por pareja de todas las parejas posibles. Haz una descripción tanto verbal como algebraica ¿Cuál de las parejas sería la primera en conseguir ahorrar los 400 euros que cuestan los Walkie-Talkie?
e. ¿podrías sugerir una agrupación de parejas que beneficie a todo el grupo?

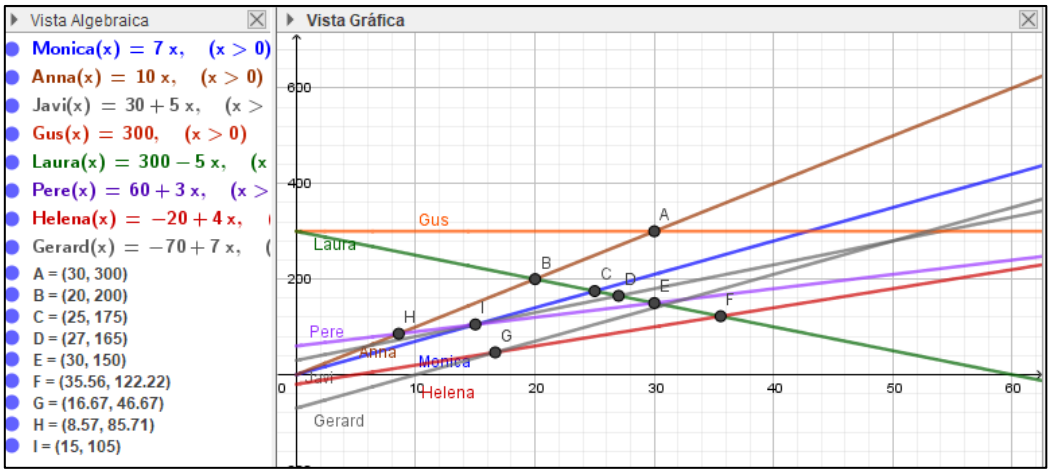
Nota. Adaptado de: (De la Fuente, 2016, p.81-82).

En el inciso a) pretendimos que, los estudiantes establecieran ciertos intervalos de tiempo para los cuales se genera más ahorro y a quién corresponde. Se promueve la lectura de la

representación gráfica (Figura 16), la deducción de ciertas conclusiones respecto a los puntos de corte entre rectas y la razón de cambio, por ejemplo: Gus hasta la semana 30 fue quien mantuvo el mayor ahorro.

Figura 16

Representación gráfica ahorros.



Para inciso b), inciso c) se pueden generar algunas preguntas como: Qué representa cada uno de los puntos de intersección de las representaciones gráficas, en qué intervalo Pere ahorra más dinero que Helena y Gerard. ¿se puede considerar valores negativos para el tiempo?, por lo anterior, se promueve la comprensión del enunciado, la verificación y validación de conjeturas.

Por otra parte, en el *inciso d)* suponíamos promover el razonamiento de los estudiantes, para establecer estrategias de cómo pueden agrupar los nietos para adquirir el Walkie-Talkie. Inicialmente, los estudiantes podrán agrupar aleatoriamente, pero esto, les exigirá algún tipo de criterio o hacer uso del concepto de combinación para determinar cuántas parejas posibles hay en el espacio muestral, entonces pueden surgir acercamientos analíticos como el siguiente. Donde se tiene un grupo de 8 personas para combinarlas en grupos de a dos personas.

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \text{Para este caso, } n = 8 \text{ y } r = 2$$

Por tanto, $C_2^8 = \frac{8!}{2!(8-2)!}$, $C_2^8 = \frac{8!}{2!(6)!}$,

$C_2^8 = \frac{1x2x3x4x5x6x7x8}{1x2(1x2x3x4x5x6)}$, $C_2^8 = 28$

Otra estrategia consiste en plantear ecuaciones de primer grado que, permitan determinar el tiempo que se requiere para ahorrar el valor del Walkie-Talkie. Por ejemplo: la pareja de Mónica y Javi, se demoran 30,8 semanas, entonces se puede plantear la ecuación $7x + 30 + 5x = 400$ que representa la relación entre los ahorros y el tiempo, al resolver se obtendría lo siguiente: $12x = 400 - 30$, $x = \frac{370}{12} \rightarrow x = 30{,}8333$ ...

Un análisis detallado permitiría a los estudiantes plantear que, al agrupar a Laura y Gus, completan el dinero inmediatamente. Es decir, $300 + 300 - 5x = 400$, de esta manera se puede sugerir tipos de agrupaciones (suma de términos semejantes). Algunos argumentos de la estrategia que más le favorece al grupo puede ser, agrupar a quien tiene más dinero comparando las pendientes y el valor inicial de ahorro.

En el problema exploración dirigida del taller 3 (Figura 17) presentamos diversas representaciones a los estudiantes de los ahorros de cuatro personas al pasar cierto tiempo. Intentamos que el estudiante comprenda cada una de estas representaciones para extraer información que le permita indicar cuánto dinero ahorra en relación con el tiempo trascurrido, empleando una expresión algebraica.

Para el inciso a), en el caso de Helena se presentaba una representación tabular, de la cual se pretendía inferir una relación de proporcionalidad directa, (constante de proporcionalidad es igual a 7). Dada esta condición, se posibilitaba expresar el ahorro de Andrea empleando la expresión algebraica $y = 7x$ donde x representa el tiempo. Presumimos que la cantidad de

semanas que tiene un año es equivalente a 52. Entonces, Andrea ahorro $y = 7(52)$ $y = 364$ euros durante todo el año.

Figura 17

Problema exploración dirigida del taller 3

2.1 Los ahorros de Andrea, Helena, Javier y Joan han cambiado durante el último año tal como está descrito bajo estas líneas. Los números indican las cantidades de dinero en euros y al final de cada semana

Helena: La tabla muestra cuánto dinero ha ahorrado al final de cada semana. La tabla continúa de la misma forma durante todo el año.

Semana	1	2	3	4	5	6
Dinero	7	14	21	28	35	42

Xavier: Durante todo el año ha tenido ahorrado 300 euros

Andrea: El grafico describe los ahorros durante las primeras veinte semanas. El gráfico continúo de la misma manera durante el resto de año.

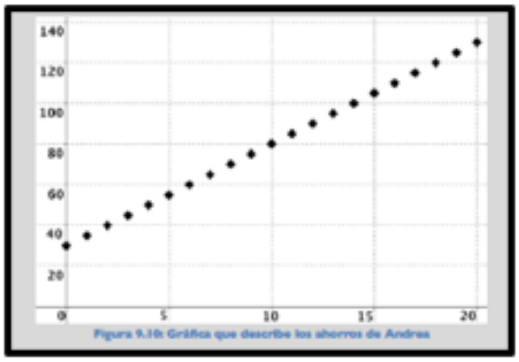


Figura 9.10: Gráfica que describe los ahorros de Andrea

Joan: Los ahorros de Joan se pueden describir mediante la siguiente expresión algebraica: $y = 300 - 5x$ Siendo x el número de semanas e y los ahorros en euros.

2.1 Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto dinero ahorro Andrea, Helena, Javier y Joan durante el último año? **Explica tu respuesta.**
b) Exprese algebraicamente la cantidad de dinero que ahorra Andrea, Helena, Javier y Joan. **Explica tu respuesta.**
c) Realice un gráfico ¿Qué figura se genera? ¿por qué? **Explica tu respuesta.**
d) Teniendo en cuenta, el ítem anterior, realice un análisis descriptivo del comportamiento de ahorro de Andrea, Helena, Javier y Joan. **Justifica tu respuesta.**
e) ¿Cómo interpretas la pendiente y el intercepto? **Explica tu respuesta**

Nota. Adaptado de: (De la Fuente, 2016, p.80).

A su vez, esperamos que realicen procedimientos algebraicos identificando dos puntos cualesquiera y encuentren la ecuación de la recta. Por ejemplo: el punto $P_1(5,35)$ y el punto

$P_2(1,7)$, con ello encontrarán la pendiente de la recta, como la variación o razón de cambio entre las ordenadas y las abscisas, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $m = \frac{35-7}{5-1}$, $m = \frac{28}{4} = 7$, luego, encontrarán la expresión explicita de la recta $y - y_{1ó2} = m(x - x_{1ó2})$, finalmente, $y = 7x$. Xavier todo el año había tenido ahorrado 300 euros, es decir su ahorro es constate.

En el caso de Andrea, presentamos una representación gráfica. En la cual, empelar una aproximación algebraica, al elegir dos puntos, luego encontrar la ecuación de la recta. Así, seleccionar dos puntos, el punto $P_1(0,30)$ y el punto $P_2(10,80)$ se encontraba la pendiente de la recta $m = \frac{80-30}{10-0}$; $m = \frac{50}{10} = 5$. Ahora, se elige un punto y la pendiente de la recta para encontrar la ecuación explicita $y - y_{1ó2} = m(x - x_{1ó2})$ al reemplazar por estos valores, los estudiantes obtienen la expresión $y - 80 = 5(x - 10)$, $y = 5x + 30$. Finalmente, **Joan** representaba sus ahorros mediante la siguiente expresión algebraica $y = 300 - 5x$.

En el inciso b) los estudiantes requerían expresar algebraicamente la cantidad de dinero que ahorra Andrea ($y = 5x + 30$); Helena ($y = 7x$), Xavier (300) y Joan ($y = 300 - 5x$).

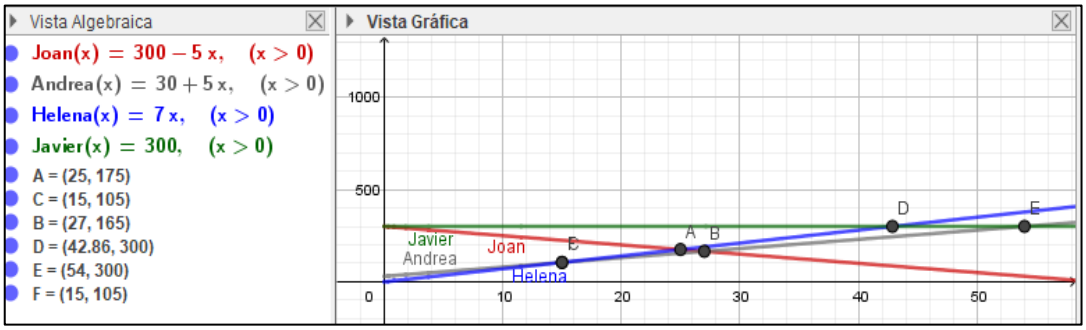
En el inciso c) pretendimos promover la construcción de diversas representaciones, tabular, gráfica, verbal y algebraica. Se posibilita que los estudiantes reconozcan en este problema que existen diversos tipos de comportamiento de las funciones encontradas, es decir, un comportamiento de ahorro creciente para Andrea y Helena; un comportamiento de ahorro decreciente para Joan; constante para Xavier. Además, realizar el gráfico correspondiente como se muestra en la Figura 18.

Una vez realizada la gráfica, se solicitaba que interpretaran la pendiente de la recta, como la razón de cambio entre la cantidad de dinero ahorrado y el tiempo trascurrido. Además, el intercepto con el eje “y” correspondiente al dinero inicial. Es importante, que el docente destaque los valores que puede tomar las variables. Es decir, como en la situación se emplea la variable

tiempo el dominio de las funciones son los reales positivos (variable continua). Por otra parte, el docente puede generar discusiones alusivas a ¿Quién ahorra más? ¿Por qué? ¿en qué intervalos de tiempo? ¿cómo se interpreta el valor negativo? ¿Qué implicaciones tiene que la pendiente sea negativa? ¿el tiempo puede ser negativo en esta situación?

Figura 18

Representación gráfica del problema exploración dirigida del taller 3.



Con el problema tarea retadora del taller 3 (Figura 19) esperamos que los estudiantes reconozcan la variación es creciente y exponencial. En un primer momento, se trabaja con lápiz y papel para que hagan un bosquejo de datos suministrados. Por tanto, la lista de puntos deberá estar en una escala adecuada lo que les permitiría realizar la representación en el plano cartesiano.

En este problema se pretendía que los estudiantes representaran la información y utilizaran en el software de GeoGebra, la herramienta de lista de puntos o quizás sí cuentan con algunos conocimientos de análisis de regresión de dos variables, los empleen para determinar el modelo que permita comprender el problema, además de interpretar que la variación no es constante, y el incremento año a año es exponencial. Como se ilustra en la Figura 20.

Debido a que en matemáticas existen problemas donde una de las características principales se debe a que se posee datos dispersos que pocas veces se ajustan a una recta con exactitud se hace necesario recurrir a el modelado para poder predecir el comportamiento de los

datos. El software de GeoGebra posee herramientas como el análisis de regresión de dos variables que permitirán a los estudiantes construir modelos que se adapten a los datos suministrados.

Figura 19

Problema tarea retadora del taller 3.

Actividad Tarea Retadora.

3.1 La siguiente tabla muestra la deuda nacional de Estados Unidos desde 1900 hasta 1995, para ciertos años escogidos.

año	Deuda de Estados Unidos ($miles de millones)	año.	Deuda de Estados Unidos ($miles de millones)
1900	1.2	1975	533.2
1910	1.1	1985	1823.1
1920	24.2	1987	2350.3
1930	16.1	1989	2857.4
1940	43.0	1990	3233.3
1945	258.7	1991	3665.3
1955	272.8	1992	4064.6
1965	313.8	1994	4692.8

Nota: 1 Fuente: Bureau of Public Debt, U.S.Treasury

a) Interprete la información suministrada y realice una descripción del comportamiento de los datos.
b) Realice un bosquejo de cómo cree que será la gráfica de la función de la deuda nacional de Estados Unidos con respecto al tiempo.
c) Realice un comentario sobre el tipo de gráfica, ¿se le parece a alguna función conocida?
d) Reconstruya la tabla anterior en GG.
e) Construya la gráfica en GG con los datos y determine el mejor tipo de función para modelar estos datos. (Suponga que x = 0 en 1900).

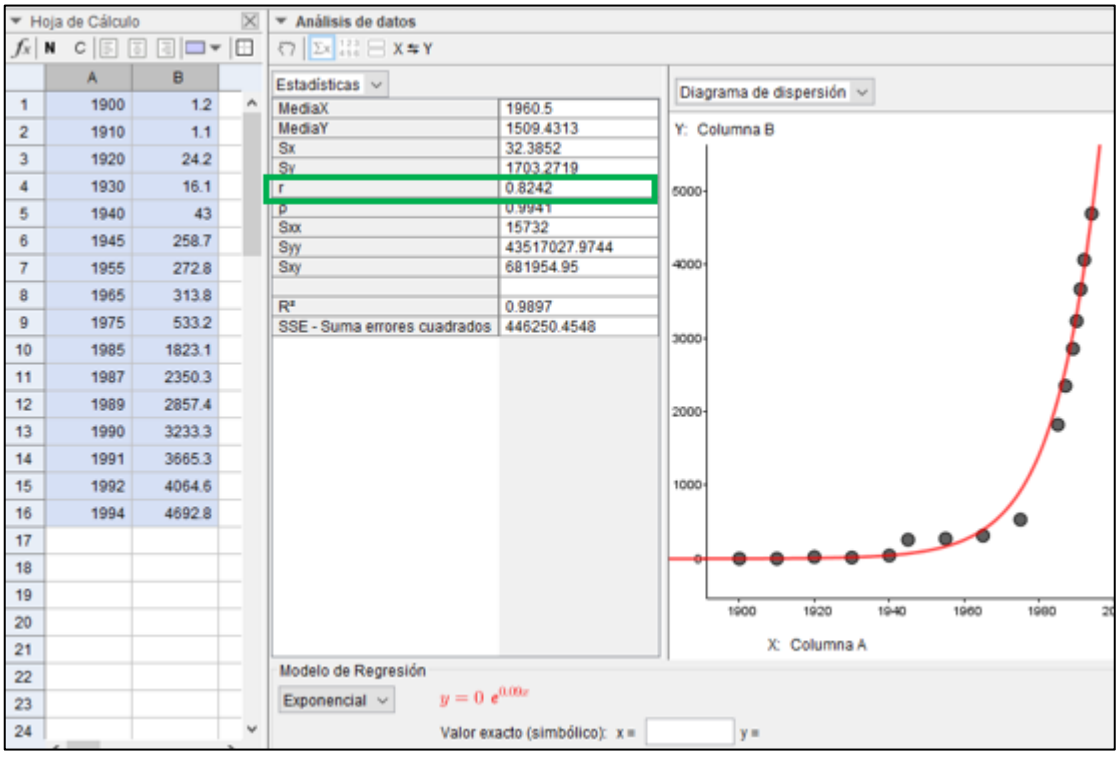
Nota. Adaptado de: (Infante Mejía, F. 2016, p.137).

Es importante decir, que se sugiere que el docente oriente la discusión y las preguntas que pueden emerger con el manejo del software. En primera instancia se sugiere que los estudiantes registren en la hoja de cálculo del programa los datos del problema. Luego, seleccionen los datos y con el apoyo de la herramienta “análisis de regresión de dos variables” construyan la gráfica de dispersión de los datos (muestra los datos en años y la deuda de Estados Unidos en $ miles de millones de pesos) para observar una posible tendencia de los datos.

Los estudiantes pueden elegir diferentes curvas que se ajusten a los datos, pero es tarea del profesor generar la discusión y hacer énfasis en que, para la elección del modelo, es importante considerar que la recta de mejor ajuste es aquella tan cercana como sea posible a todos los puntos de datos, y que el software encuentra al calcular la recta de regresión.

Figura 20

Regresión de dos variables software GeoGebra



Para determinar el "mejor ajuste" se sugiere que los estudiantes evalúen algunos estadísticos como: el coeficiente de correlación r que es un número entre -1 y 1 que mide qué tan cercanos están los datos a la recta de regresión, o bien, en otras palabras, "qué tan fuertemente están correlacionadas las variables" (Stewart et al., 2012, p. 134). A su vez, sugerimos recordar a los estudiantes que si el valor de r está en cercanías de -1 o a 1 los datos están fuertemente correlacionados, es decir, la recta de regresión está muy próxima al gráfico de dispersión. En este caso particular el valor de $r = 0.882$. (recuadro verde de la Figura 20).

Es deseable que se reflexione y evalué los modelos que el software proporciona pensando el contexto del problema y el comportamiento de los datos suministrados.

4.3.4 Taller 4: Ecuaciones e inecuaciones

Propósito: Planteamos este taller con la finalidad de llevar al aula problemas en los que los estudiantes tienen la necesidad de traducir enunciados del lenguaje natural al lenguaje simbólico o matemático utilizando ecuaciones e inecuaciones, de esta manera, se hacen evidentes las relaciones entre los datos y las incógnitas del problema (NCTM, 2003), además de permitir emplear diversos métodos para encontrar los valores desconocidos en una expresión algebraica o utilizar la generalización para dar tratamiento a los problemas y expresar simbólicamente ideas abstractas. El énfasis de este taller recae en la necesidad de plantear y resolver ecuaciones o inecuaciones que permitan deducir para cada problema, una solución con sentido, es decir, implica una comprensión del uso de la variable para que se adapte a las condiciones de cada problema.

En el problema información y exploración libre del taller 4 (Figura 21) tiene como finalidad vislumbrar la manera cómo los estudiantes transforman el enunciado verbal en lenguaje simbólico (algebraico) además, por ser problemas del contexto matemático pretendían establecer operaciones entre los números reales y ver cómo los estudiantes realizan esos procedimientos.

Figura 21

Problema información y exploración libre del taller 4

1.1 (Problema del Papiro de Moscú) Encontrar un número tal que, multiplicado 1 vez y media y sumado 4, de cómo resultado 10.

(Problema 31 del Papiro Rhind) Encontrar una cantidad tal que, sumando a dicha cantidad $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}$ de la misma, de como resultado 33.

(Problema 26 del Papiro Rhind) Encontrar una cantidad tal que, sumando a dicha cantidad $\frac{1}{4}$ de la misma, el resultado sea 15.

Nota. Adaptado de: (Lasa, 2016, p.108)

Esperamos el uso de estrategias como el planteamiento y despeje de ecuaciones. Tal como se muestra en la Tabla 10. De esta manera los estudiantes representaran en sus expresiones simbólicas las relaciones entre los datos, las incógnitas y las condiciones del problema.

Tabla 10

Solución ecuaciones Problema información y exploración libre taller 4

Problema del Papiro de Moscú	Problema tarea retadora del taller 1 del Papiro Rhind	Problema exploración dirigida del taller 6 del Papiro Rhind:
$\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{x}+\mathbf{4}=\mathbf{10}$ $\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{x}=\mathbf{6}$ $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)\mathbf{x}=\mathbf{6}(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}})$ $\mathbf{x}=\mathbf{4}$	$\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)x=33$ $\left(\frac{97}{42}\right)x=33$ $x=\frac{1386}{97}$	$x+\frac{1}{4}x=15$ $\frac{5}{4}x=15$ $x=12$

Otra estrategia que se posibilita es la particularización, es decir, por ensayo y error se puede aproximarse a la solución de la ecuación. En la socialización y comparación de resultados sugerimos compartir los diferentes planteamientos, pues tal como lo afirma Polya (1965) traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico es un proceso de complejidad y análisis.

El problema exploración e información libre del taller 4 (Figura 22) pretende que los estudiantes planteen las inecuaciones de primer grado correspondientes a cada uno de los problemas planteados. De este modo, para cada uno de los problemas, promovemos el planteamiento de las inecuaciones tal como se muestra a continuación para cada uno de los incisos:

$a)\ x \leq 7.000.000;\ \ b)\ 2{,}8 < x < 5\ ;\quad c)\ \ 35 > x \quad x > 37$. Con esto, pretendimos que los estudiantes recordaran el concepto de intervalo. En esto pueden surgir distintas representaciones del objeto matemático: representación como conjunto, en la recta real, de manera algebraica

Figura 22

Problema exploración e información libre del taller 4

1.2 Escriba la inecuación o inecuaciones que describan cada situación planteada.
Cada una permite analizar el concepto de solución y conjunto solución de una desigualdad, así como establecer la representación algebraica de cada situación dada.
a) Las ganancias mensuales de la importadora Del Valle son menores o iguales a 7.000.000 de pesos colombianos.
b) Un estudiante requiere para aprobar su curso un promedio mínimo de 3,0. En los primeros exámenes obtuvo 2,3; 4,5; 2,4 ¿Qué calificación debe obtener para aprobar su curso?
c) La temperatura corporal de una persona es normal entre 35° y 37°. Determine dos intervalos en los cuales la temperatura es anormal.

Nota. Adaptado de: (Vargas, 2013, p.12).

En el problema exploración dirigida del taller 4 (Figura 23) pretendimos en el *inciso a)* que los estudiantes utilizaran la gráfica de las funciones con el fin de determinar en qué intervalos se cumplen las condiciones: $f(x) \leq g(x)$ y $f(x) > g(x)$ para las funciones $f(x) = x^2$ además, $g(x) = 3x + 4$.

Figura 23

Problema exploración dirigida del taller 4

2.1 Analice, por medios gráficos, la solución de cada inecuación (GeoGebra)
a. $f(x) \leq g(x)$ para las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 4$. Enseguida, haga lo mismo para $f(x) > g(x)$
b. Las siguientes inecuaciones $4x^2 < 16$ y $2x < 4$. Son o no equivalentes. Justifique su respuesta. ¿Qué propiedades de los números reales es posible emplear? Justifique su respuesta.

Nota. Adaptado de: (Barbosa, 2003, p. 209).

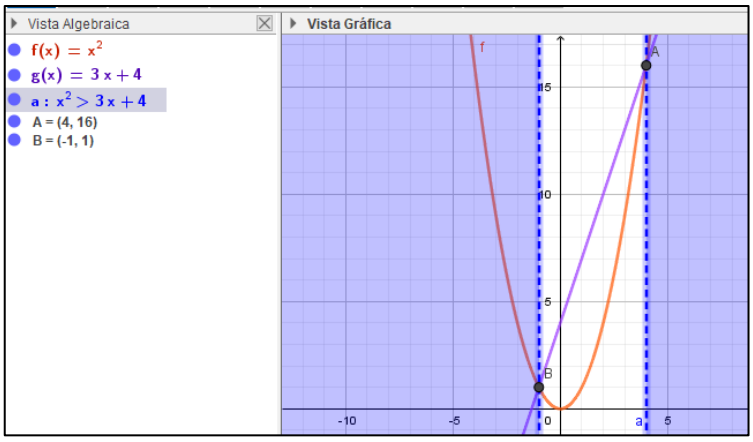
Pretendemos desde un acercamiento algebraico que los estudiantes, con el apoyo del software o por medio de lápiz y papel, construyan procedimientos algebraicos para determinar el punto de corte de las gráficas. Es decir, donde sus imágenes son iguales, se planteaba la desigualdad de las funciones $x^2 \leq 3x + 4$, $x^2 - 3x - 4 \leq 0$, se despeja: $x^2 - 3x - 4 = 0$,

finalmente, se factoriza $(x-4)(x+1)=0$ y determinan los puntos críticos $x=4 \quad y \quad x=-1$, los cuales corresponden con los valores donde se hacían iguales las imágenes de $f(x)$ y $g(x)$. Es decir, los puntos en el plano, (4,16); (-1,1). Los estudiantes debieron considerar las funciones, $f(x)=x^2;\ \ g(x)=3x+4 \quad f(x) \leq g(x)$, por lo cual, esperamos que la solución corresponde a: $-1 \leq x \leq 4$ Enseguida, haga lo mismo para $f(x) > g(x)$ es decir, para $x < -1 \quad \cup \quad x > 4$

Esperamos desde un acercamiento gráfico que los estudiantes emplearan la representación gráfica (Figura 24) (utilizando el software o por medio de lápiz y papel) para con ello determinar los intervalos donde se cumplen cada una de las desigualdades establecidas en el enunciado.

Figura 24

Representación de f(x) y g(x)



En el inciso b) del Problema exploración dirigida del taller 4, planteábamos la opción de factorizar el binomio al cuadrado perfecto $4x^2-16 \leq 0$, es decir: $(2x+4)(2x-4) \leq 0$, luego, se analizaría ¿Cuándo el producto es menor que cero? Por tanto, el conjunto solución NO es equivalente, porque, el conjunto solución la primera inecuación ($4x^2 \leq 16$) es igual $x \ \epsilon$ [-2,2] mientras que para, la inecuación $2x < 4$ la solución es equivalente a los $x < 2$. Se esperaba que los estudiantes también utilizaran las estrategias de validación empleando la recta numérica o un registro de valores por ensayo y error. ver Tabla 11

Tabla 11

Estrategia registro tabular.

Puntos prueba	$(x+2)$	$(x-2)$	$(x+2)(x-2) \leq 0$
$x=-3$	-1	-4	+4 no es mayor menor que cero
$x=-1$	1	-3	-3 Menor que cero, si cumple.
$x=-2$	0	-4	0 se cumple la igualdad en los extremos.
$x=2$	4	0	0
$x=3$	5	1	5 mayor que cero por tanto no se cumple.

En el problema exploración dirigida del taller 4 (Figura 25) esperamos que los estudiantes plantearan las ecuaciones y las resuelvan, de esta manera se pueden evidenciar ciertos acercamientos analíticos o aritméticos, que permiten abordar los problemas planteados.

Figura 25

Problema exploración dirigida 2.2 del taller 4.

2.2 Soluciona las siguientes situaciones:

a) Un plomero y su ayudante trabajan juntos para cambiar las tuberías de una casa vieja. El plomero cobra \$45 por hora por su propio trabajo y \$25 por hora por el trabajo del ayudante. El plomero trabaja el doble de tiempo que su ayudante en el trabajo, y el cobro por mano de obra en la factura final es de \$4025. ¿Cuánto tiempo trabajaron el plomero y su ayudante en este trabajo? Justifica tu respuesta

b) Una parcela de terreno mide 6 pies más de largo que de ancho. Cada diagonal desde una esquina a la esquina opuesta es de 174 pies de largo. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela? ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela en metros? Explica tu respuesta.

c) Si un fabricante vende x unidades de cierto producto, el ingreso R y el costo C (en dólares) están dados por: $R = 20x \;\; C = 2000 + 8x + 0.0025x^2$. Utilice el hecho de que utilidad = ingreso – costo, para determinar cuántas unidades debe vender el fabricante para disfrutar de una utilidad de al menos \$2400. Justifica tu respuesta.

Nota. Adaptado de: (Stewart et al., 2012, p.82)

Para el inciso a) exponemos un problema en el que los estudiantes deben encontrar la relación entre el número de horas y el dinero recibido por el trabajo efectuado. Esperamos los estudiantes creen una ecuación que represente la relación entre los datos suministrados por el problema así: $45(2x) + 25(x) = 4025$ donde x corresponde a el tiempo trabajado, se tiene la

relación de tiempo plomero $2x = x$. Entonces, resolviendo se obtiene que $90x + 25x = 4025$ luego $x = 35$, es decir, el plomero trabajo 70 horas y su ayudante 35 horas. A esta respuesta los estudiantes también pueden aproximarse por ensayo y error.

Para el inciso b) esperamos que los estudiantes identificaran algunos conceptos implícitos en la situación, así, una alternativa era usar el teorema de Pitágoras, en el cual, se obtendría la ecuación que modela la situación, así, $(x + 6)^2 + x^2 = 174^2$ al desarrollar encontrarían que el valor de uno de los lados es 126 y el otro 120. Es importante destacar que, pueden surgir diversos acercamientos como: factorización, uso de la ecuación cuadrática.

Finalmente, en el inciso c) sugeríamos que los estudiantes reconocieran la información del enunciado y plantearan la función que modela la utilidad en términos de la variable "x", que representa la cantidad de productos vendidos tal como se expresa:

$U(x) = 20x - (2000 + 8x + 0.0025x^2)$.

Para esta situación las utilidades correspondían a $2400, por tanto, Esperamos que los estudiantes encontraran la cantidad de unidades que el fabricante necesita vender para obtener dicha utilidad. Es decir, resolvieran la ecuación cuadrática: $2400 = -2000 + 12x - 0.0025x^2)$. Por tanto, pretendemos que emplee aproximaciones numéricas o emplee estrategias analíticas como factorización, uso de formula cuadrática, para posteriormente llegar $x \geq 400$ Unidades.

Al finalizar, Esperamos que los estudiantes compartieran los procedimientos y se discutieran los diferentes acercamientos a la solución, para con ello, promover la validación y verificación de resultados.

En el problema tarea retadora del taller 4 (Figura 26) presentamos a los estudiantes una tabla de datos, para que con ello generaran una representación funcional o por intervalos relacionada con la cantidad de dinero que pagan según el salario.

Figura 26

Problema tarea retadora del taller 4

3.1 Cálculo de impuesto o tarifas de servicios: a. Impuesto al salario: Para calcular este impuesto en Costa Rica, se utiliza la fórmula presentada en la tabla 4:

Tabla 4

Impuesto al salario en Costa Rica, 2013

	Salario bruto	Impuesto al salario
Hasta	¢714.000,00	No sujeto a impuesto
Sobre el exceso de	¢714.000,00 hasta ¢1.071.000,00	10 %
Sobre exceso de	¢1.071.000,00	15 %

Fuente: Construcción propia de la autora (2013) a partir de la información brindada por el Ministerio de Hacienda de Costa Rica (2013) y recuperado de: http://dgt.hacienda.go.cr/impuestosobrelarenta/Paginas/Impuestosobrelarenta.aspx

Responda las siguientes preguntas:

Determine el monto que pagaría un trabajador que gana ¢700.000,00.
Determine el monto que pagaría un trabajador que gana ¢900.000,00.
Determine el monto que pagaría un trabajador que gana ¢1.200.000,00.
Escriba una inecuación que contenga los montos en colones de los salarios que:

- **no pagan impuestos.**
- **pagan el 10 %**
- **pagan el 15 %**

Nota. Adaptado de: (Vargas, 2013, pp. 12-13)

El cálculo de este impuesto permite definir funciones que tienen diferentes condiciones según el intervalo de números reales en el cual se defina. Para este caso en particular podríamos definir la función por partes, donde "x" representa el salario, $f(x)$ el impuesto a pagar.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \leq 714000 \\ 0{,}1x & si \;\; 714000 < x < 1107000 \\ 0{,}15x & si \;\; x \geq 1107000 \end{cases}$$

Esto les permitiría definir el monto a pagar en función al salario del empleado. Los estudiantes deberían reconocer la variación lineal presente en esta situación. Además, puede realizar una regla de tres simple para determinar los montos específicos y registrar empleando una tabla de datos (como en la Tabla 12)

Tabla 12

Impuestos problema Costa Rica.

Dinero ¢	**% impuesto**
¢700000	No paga impuesto
¢900000	Como se encuentra en el intervalo de $714000 < x < 1107000$ le corresponde pagar el 10% es decir, ¢90000
¢1200000	Se encuentra en el intervalo $x \geq 1107000$ le corresponde pagar el 15% del salario, es decir: ¢180000

4.3.5 Taller 5: Sistema de Ecuaciones lineales de orden 2x2

Propósitos: Este taller tiene el propósito de iniciar con el estudio de problemas para que los estudiantes reconozcan el comportamiento de una magnitud variable con respecto a otra, es decir, que identifiquen las variables y las relaciones entre ellas. Desde los NCTM (2003) se menciona la importancia de que los estudiantes de secundaria tengan la oportunidad de resolver problemas empleando el planteamiento de sistemas de ecuaciones y aplicando diversos métodos de solución que van desde el cálculo mental, acercamientos analíticos o el uso de las tecnologías. Al respecto, Hernández (2018) menciona que este tipo de problemas favorece el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes.

En el problema información y exploración libre del taller 5 (Figura 27), planteamos que los estudiantes comprendieran la relación de covariación que existe entre el precio de las pizzas y el precio de las bebidas. Así, establecen infinitos valores porque dan paso a una relación funcional entre las variables del problema. Es importante destacar que, el estudiante traduce un enunciado figural.

Figura 27

Problema información y exploración libre del taller 5

Pedro Pérez se encontraba en un viaje por España y junto con unos amigos ingresaron a una pizzería donde realizaron la compra que se muestra en la Ilustración 1

1.1 Observa la imagen y responde:

Ilustración 1

a) ¿Se puede determinar el valor de una porción de pizza y una bebida? Justifica tu respuesta
b) ¿Qué podemos saber del precio de 4 bebidas y 2 porciones de pizza?
c) Si consideras la *ilustración 1 e ilustración 2* ¿Qué precio tiene 5 bebida y 8 porciones de pizza?

Ilustración 2

Nota. Adaptado de: (De la Fuente, 2016, p.98)

En el inciso a) pretendimos que los estudiantes reconocieran que existen infinitos valores para la pizza y la bebida, así, pueden construir una relación funcional, donde x es el valor de la pizza; y el valor de las bebidas. Por tanto, se puede plantear una ecuación como la siguiente:

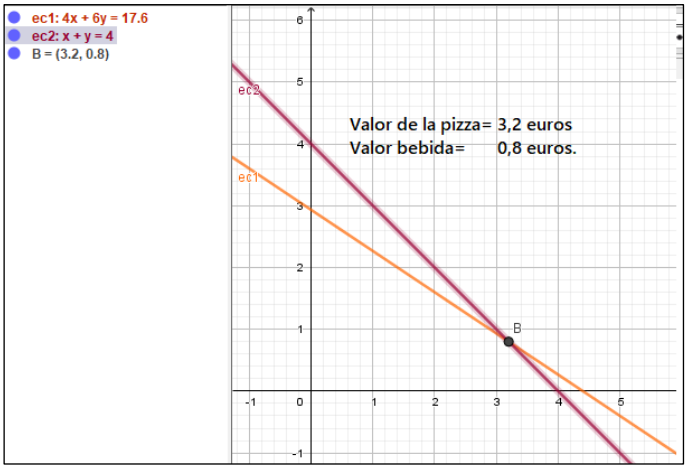
$4x + 6y = 17.60$ euros, de la cual, se pudieron derivar expresiones funcionales como la siguientes: $x = \frac{17.60-6y}{4}$ euros (1) para expresar el valor de las pizzas en función de las bebidas o ($y = \frac{17.60-4x}{6}$ euros (2)) viceversa. Para el inciso b) esperamos que los estudiantes reconocer la variación en el precio de las bebidas y las pizzas, considerando algunos valores numéricos que pueden asignar a (1) o a (2).

Finalmente, para el inciso c) planteábamos que los estudiantes expresaran un sistema de ecuaciones lineales 2x2, así: $4x + 6y = 17.60$ euros. (1); $3x + 3y = 12$ euros. (2). Luego,

solucionarlo por los diversos métodos analíticos, gráfico o empleando estimaciones numéricas. Por ejemplo: la solución gráfica Figura 28

Figura 28

Solución pizza y bebidas método gráfico



Planeamos en el contexto de la denominación de dinero en euros, para verificar el uso de los números reales por parte de los estudiantes. Además, promovíamos la discusión referente a la unicidad de la solución, considerando el método gráfico, el estudiante relacionaría la solución del sistema como el punto B (Figura 28) que corresponde a la intersección o el punto que cumple con las dos condiciones. En este caso la respuesta es única.

En el problema exploración dirigida del taller 5 (Figura 29) esperamos que los estudiantes realizaran procesos algebraicos, en los que reconocen qué varía (inciso a), y cómo varía (inciso b). Es por ello, que pretendemos identifiquen las variables de la situación y la relación de covariación entre ellas.

Los estudiantes una vez logran extraer la información, conseguirán plantear un sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2, así (1) $\rightarrow \quad x + y = 60; \quad (2) \rightarrow \quad 2x + 4y = 200$, para posteriormente, emplear distintos métodos de solución. Así, por ejemplo, en la La respuesta que esperamos es los estudiantes expresen que las coordenadas del punto A, (intercepto de las dos

rectas) es la solución del problema porque A cumple con las dos condiciones del sistema planteado, es decir hay 20 aves y 40 bestias $(A(20,40))$

Figura 30 se representan en el plano cartesiano las ecuaciones y se fija el punto A, que corresponde a la solución del problema.

Figura 29

Problema exploración dirigida del taller 5.

2.1 En un zoológico hay aves (de dos patas) y animales (de cuatro patas). Si el zoológico contiene 60 cabezas y 200 patas.
Responda las siguientes preguntas:

- **a)** Identifica las variables de la situación. Explica tu respuesta
- **b)** ¿Qué relaciones encuentras entre las variables? Describe esas relaciones con tus palabras.
- **c)** ¿Cuántas aves y cuántos animales viven en el zoológico? Justifique su respuesta.

2.2 Jorge y Andrés, compraron en la tienda Adidas. Jorge compró una camisa de la selección Colombia y 2 balones por un valor total de $789.000 mientras, Andrés adquirió dos camisas de la selección y un balón de fútbol $678.000
Responda las siguientes preguntas:

- **a)** Identifica las variables de la situación
- **b)** ¿Cuánto cuesta un balón y cuatro camisas? Justifica tu respuesta.

Nota. Autoría Ronald Eduardo Paternina

La respuesta que esperamos es los estudiantes expresen que las coordenadas del punto A, (intercepto de las dos rectas) es la solución del problema porque A cumple con las dos condiciones del sistema planteado, es decir hay 20 aves y 40 bestias $(A(20,40))$

Figura 30

Solución método gráfico.

Así mismo, pueden hacer uso del método de igualación. Por tanto, los estudiantes despejarían de cada una de las dos ecuaciones una de las incógnitas en función de la otra (representan las relaciones entre los datos y las variables del problema) De (1) despejamos x, por tanto, $x = 60 - y$, De (2) se despeja x, por tanto; $x = 100 - 2y$. Esperamos que estas expresiones fueran igualadas y de esta manera, se encuentra el valor de numérico de la variable *"y"* es decir, $60 - y = 100 - 2y$; agrupamos términos semejantes $2y - y = 100 - 60$, se obtendrían el valor de $y = 40$ luego, reemplazamos éste valor en (1) o en (2), conseguirían el valor numérico de "x" es decir, $x + 40 = 60$ agruparan términos semejantes y encontraran el valor de la incógnita $x = 60 - 40$, $x = 20$. De esta manera, se obtiene que hay 20 aves y 40 bestias.

Otra estrategia que puede emerger consiste en que los estudiantes hicieran uso de estimaciones y aproximaciones numéricas, tal como se plantea en la Tabla 13

Tabla 13

Estrategia de conteo.

Número de aves	**Número de Bestias**	**Total, animales.**	**Número patas de aves**	**Número patas de bestias**	**Total, patas**
30	30	60	60	120	180
25	35	60	50	140	190
10	50	60	20	200	220
20	40	60	40	160	200

En el problema exploración dirigida del taller 2 (Figura 29) esperamos que los estudiantes identificaran que hay una variación entre el precio a pagar y el número de artículos adquiridos por Jorge y Andrés. El sistema de ecuaciones lineales que modela este problema es:

$$x + 2y = 789000 \qquad (1)$$

$$2x + y = 678000 \qquad (2)$$

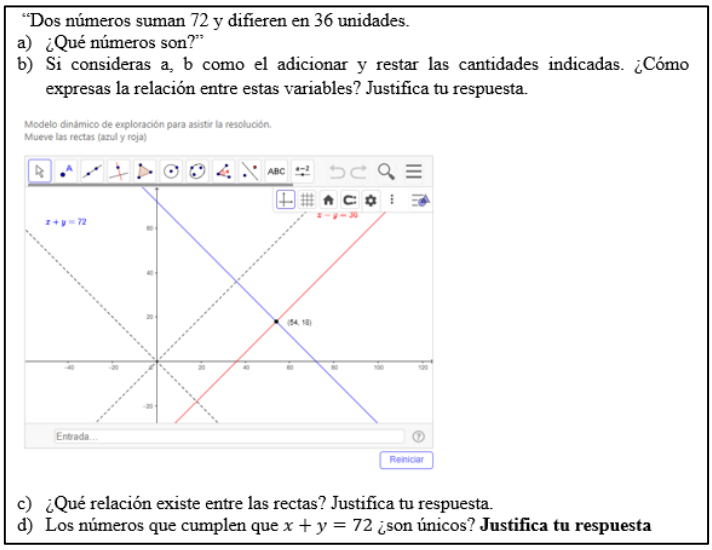
Para que resolvieran el sistema de ecuaciones 2x2, los estudiantes Esperamos que empleen diferentes métodos de solución: reducción, igualación, sustitución, determinantes, gráfico, etc. Por ejemplo: método de sustitución; donde se despeja "x" de (1); $x = 789000 - 2y$ luego se sustituye en otra ecuación, quedando $2(789000 - 2y) + y = 678000$; resolver la ecuación, por tanto, $y = 300000$ Luego, se reemplazó el valor numérico de "y" en (1) o en (2); así: $2x + 300000 = 678000$, de allí se despeja $x = \frac{378000}{2}$; $x = 189000$

Pretendimos que los estudiantes discutan y compartan sus procedimientos aritméticos o analíticos y describieran si era válido el precio de un balón en $300.000 y una camisa $189.000

Con el problema tarea retadora del Taller 5 (Figura 31) Se pretendía promover en los estudiantes la habilidad identificar los datos suministrados en el problema, así como que pueda establecer algunas estrategias ensayo y error**,** a través de aproximaciones numéricas o el planteamiento de ecuaciones lineales.

Figura 31

Problema tarea retadora del taller 5



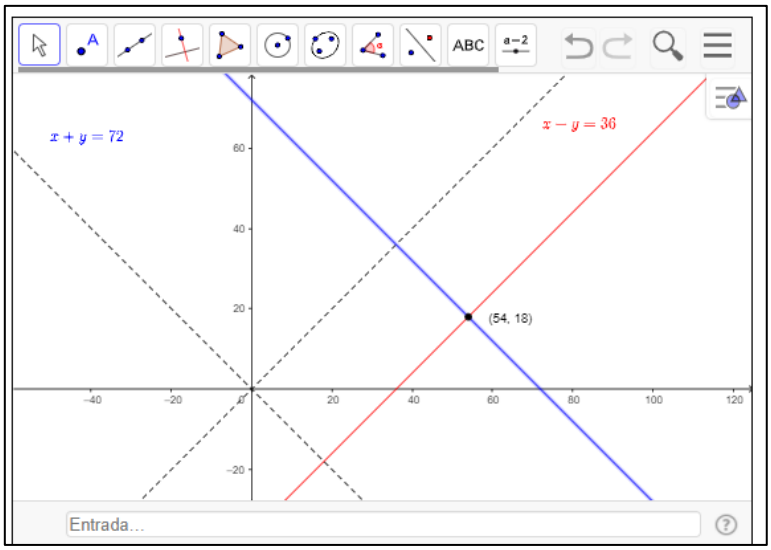
Nota: 23 Adaptado de: (Lasa, 2016, p. 123-132)

Para el *inciso a)* esperamos que los estudiantes realicen procedimientos analíticos o aritméticos (ecuaciones lineales 2x2). Por ejemplo, el método de eliminación, así se suman las ecuaciones (1) y (2), obtienen: $2x = 108;$ entonces el valor de $x = 54,$ luego de ello, reemplazar el valor de "x" en (1) o en (2) así: $54 + y = 72$, se despeja: $y = 18.$

También proporcionamos a los estudiantes un applet, en el que se da el modelo para que los estudiantes tengan la posibilidad de manipular y representar las dos condiciones del problema. Es decir, las dos rectas, que corresponden al sistema de ecuaciones lineales 2x2 del problema: como se muestra en la (Figura 32); ($(1) \rightarrow x + y = 72$, $(2) \rightarrow x - y = 36$), así pueden indicar que la solución corresponde al punto de corte entre las rectas es decir (54, 18).

Figura 32

Solución gráfica modelada.



Para el inciso b) inducimos a los estudiantes a plantear una generalidad. Así, la suma de dos cantidades puede ser cualquier cantidad *"a"*, por ello $x + y = a \rightarrow (1)$, la diferencia entre las dos cantidades es "*b"* se establece $x - y = b \rightarrow (2)$. Si se suma (1) y (2); $x = \frac{(a+b)}{2}$, luego se reemplaza en (1) $x + y = a \rightarrow \frac{(a+b)}{2} + y = a;$ posteriormente se despeja $y = a - \frac{(a+b)}{2}$

obteniendo que el valor de "y" se puede determinar así: $y = \frac{a-b}{2}$ En general, se tiene que, $(\frac{(a+b)}{2}, \frac{a-b}{2})$ son las coordenadas del punto solución, dado cualquier a, b.

Para el inciso c) Esperamos que los estudiantes recordaran las relaciones de las rectas y su correspondencia con la pendiente. Es decir, si dos o más rectas son: i) paralelas involucra que sus pendientes son iguales, ii) perpendiculares implica que la pendiente de una es el recíproco negativo de la pendiente de la otra, iii) secantes entonces las pendientes tienen diferente valor. Además, en el inciso d) insistimos en el tratamiento de relación funcional que existe al considerar en este caso particular, una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

4.3.6 Taller 6: Sistema de Ecuaciones lineales de orden 2x2

Propósito: El propósito de este taller consistió en representar geométrica y analíticamente sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 para brindar a los estudiantes la posibilidad de dotar de significado la solución algebraica y geométrica (Soto-López, 2012)

Según los NCTM (2003) el álgebra está ligada íntimamente con la geometría, por lo anterior, el fin de este taller es permitir a los estudiantes la posibilidad de relacionar la solución analítica de un sistema de ecuaciones lineales de orden 2X2 con su representación gráfica. Sugerimos problemas donde primero se logre establecer las relaciones entre las variables y los datos que intervienen a fin de generar una representación simbólica, posteriormente resolver y evaluar la solución de acuerdo con las condiciones del problema.

En el problema información y exploración libre del taller 6 (Figura 33) posibilitamos a los estudiantes el identificar las variables de la situación y traducir del lenguaje natural al lenguaje matemático, de esta manera los estudiantes pueden avanzar en la construcción de unas expresiones algebraicas que les permitan acceder y dar tratamiento matemático a la situación.

Figura 33

Problema información y exploración libre del taller 6

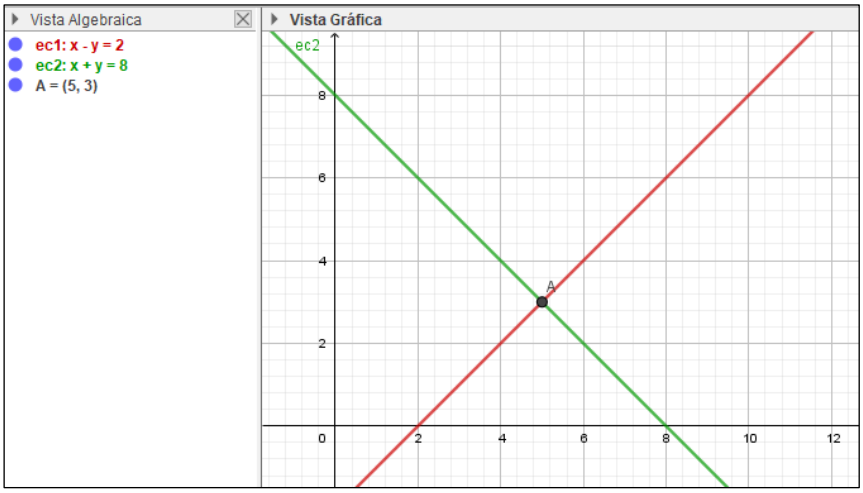
> **1.1** Si los lados de un rectángulo se alargan 2 centímetros cada uno, el perímetro es de 24 centímetros, si se sabe ademas que la diferencia entre la medida de los lados es de 2 centímetros.
>
> Responda las siguientes preguntas:
>
> a) ¿Cuánto miden las medidas de sus lados? Justifica tu respuesta
> b) Existen otras medidas que se le puedan asignar a los lados del rectángulo. Si, no ¿por qué?

Nota. Adaptado de: (Segura de Herrero, 2004, p. 5)

Esperamos que los estudiantes definan los lados del rectángulo como: $y = \text{base}; x =$ altura. $x - y = 2$. Una primera ecuación de la situación, $2(x + 2) + 2(y + 2) = 24$; entonces $x + y = 8$ como la segunda ecuación. Así mismo, los estudiantes pueden realizar cálculos y estimaciones que le permitan encontrar los valores que cumplen con las dos condiciones, o plantear alternativas gráficas que conlleven a la representación y posible solución como se muestra en la Figura 34.

Figura 34

Solución por método gráfico



Por tanto, la medida del rectángulo inicial es de base 5 cm y altura 3 cm. Se espera que los estudiantes identifiquen que estos valores son únicos, es decir, el sistema tiene única solución y es consistente.

En el problema exploración dirigida del Taller 6 *(*Figura 35) los estudiantes se enfrentan a un problema que sugiere establecer las variables que intervienen, por decir, "x" cantidad dinero por kilo de manzana, "y" la Cantidad dinero por kilos de peras. Luego, estimamos que representen las relaciones, que representan la compra de Ana y Leticia.

Figura 35

Problema exploración dirigida del taller 6

Actividad Exploración dirigida

2.1 Ana y Leticia fueron al mercado por fruta. Ana por cinco kilos de manzana y tres kilos de pera pagó \$139 y Leticia pagó \$226.50 por ocho kilos de manzana y cinco de peras.

a) Identifica las variables de la situación. **Explica tu respuesta**
b) ¿existe una relación entre dichas variables? Representa algebraicamente.
c) ¿Cuánto costaba el kilo de manzana y el kilo de pera ese día en el mercado? **Justifica tu respuesta**
d) Suponga que (x, y) designan las coordenadas de un punto en el plano denotado por $P(x, y)$ **¿por qué?**
e) ¿Qué figura representa cada una de las ecuaciones en el plano cartesiano? **¿por qué?**
f) Considere los puntos $(5,12)$ y $(6,14)$, pertenecen al grafico de alguna ecuación del problema **¿por qué?**
g) Considere los gráficos de las ecuaciones. ¿Qué observas? **Explica tu respuesta.**
h) Compara la solución encontrada inicialmente y lo que observas en el gráfico. Existe alguna relación entre estos. **Explica tu respuesta.**

Nota. Adaptado de: (Olvera, 2010, p.54)

Una vez planteado el sistema de ecuaciones de orden 2x2, es decir, i) $5x + 3y = 139$; ii) $8x + 5y = 226{,}50$, Esperamos que los estudiantes empleen acercamientos analíticos, gráficos o numéricos, con la finalidad determinar el precio de cada kilogramo de fruta comprado por Ana y Leticia. Por ejemplo: por el método analítico de reducción:

i) $(5x + 3y = 139)(-8) \quad \rightarrow -40x - 24y = -1112$

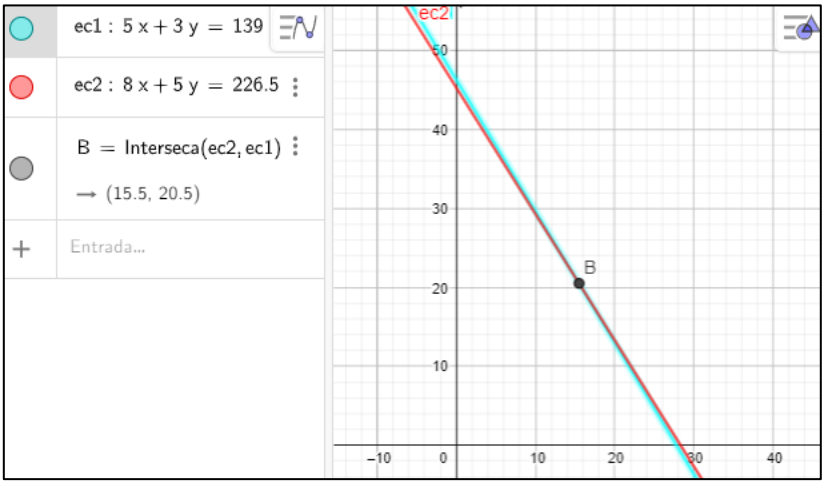
ii) $(8x + 5y = 226{,}50\ )(5)$ → $40x + 25y = 1132{,}5$

Al sumar (i) y (ii) tenemos que $y = 20{,}5$ luego, $x = 15{,}5$

Los incisos d) y inciso e) pretendían que los estudiantes generan el gráfico de estas ecuaciones a fin de establecer otra forma de representación del sistema de ecuaciones y además lo interpretaran (Figura 36). El inciso f) esperamos que los estudiantes verifiquen si los (5,12); (6,14) pertenecen al sistema de ecuaciones, por lo cual, los estudiantes pueden ubicar los puntos en el plano, reemplazar los valores de las coordenadas en cada una de las ecuaciones para establecer si pertenecen o no. Finalmente, en el inciso g) y h) suponemos que los estudiantes confrontaran las dos respuestas (método analítico y gráfico) y conjeturaran sobre la posible relación entre ellas.

Figura 36

Método Gráfico.



En el problema tarea retadora del taller 6 (Figura 37) presentamos dos problemas de contextos matemáticos, el primero problema es inconsistente, es decir, no tiene solución. El segundo problema tiene infinitas soluciones. Este taller hizo énfasis en la solución tanto analítica como gráfica de sistemas de ecuaciones lineales de orden lineales 2x2, (Figura 38 y Figura 39)

para que, finalmente los estudiantes puedan conjeturar cual es la relación que existe entre estos métodos de solución.

Figura 37

Problema tarea retadora del taller 6.

3.1 La suma de dos números es 1000 y el doble de su suma es 700.

a) ¿Cuáles son esos números? **Explica tu respuesta.**

b) Realiza un gráfico que represente la situación.

3.2 El perímetro de un triángulo isósceles es 18 centímetros, si se suma la medida de uno de sus lados congruentes a la mitad del lado de la medida del lado no congruente se obtiene 9.

a) ¿Cuál es la medida de cada lado**? Explica tu respuesta.**
b) Realiza un gráfico que represente la situación.
c) ¿Qué podemos concluir de las tres actividades respecto a los gráficos y la solución de cada sistema de ecuaciones lineales? **Explica tu respuesta.**

Nota. Adaptado de: (Segura de Herrero, 2004, p.55)

Los estudiantes pueden establecer la inconsistencia del sistema, solamente reflexionando y asignándole una comprensión al enunciado. Otros podrían intentar plantear un sistema de ecuaciones lineales 2x2. Así: $x + y = 1000 \quad (1)$;

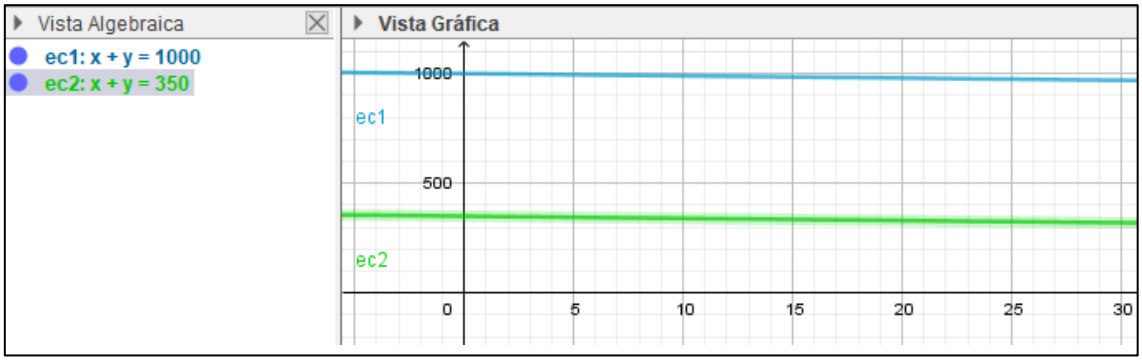
$$2(x + y) = 700 \quad (2)$$

Luego, por ejemplo, por el método de igualación, se llega a una inconsistencia. Despejar x de (1) y (2) $x = 1000 - y$; $x = 350 - y$ Al igualar obtenemos: $1000 - y = 350 - y \rightarrow 1000 = 350$ lo cual, es contradictorio. Por tanto, el sistema es inconsistente.

Otra representación que se esperaba era la gráfica, en donde se observan dos rectas paralelas lo que implica que tengan la misma pendiente (Figura 38). Al reflexionar, los estudiantes pueden indicar que no existe un punto en el plano cartesiano que cumpla con las dos condiciones simultáneamente.

Figura 38

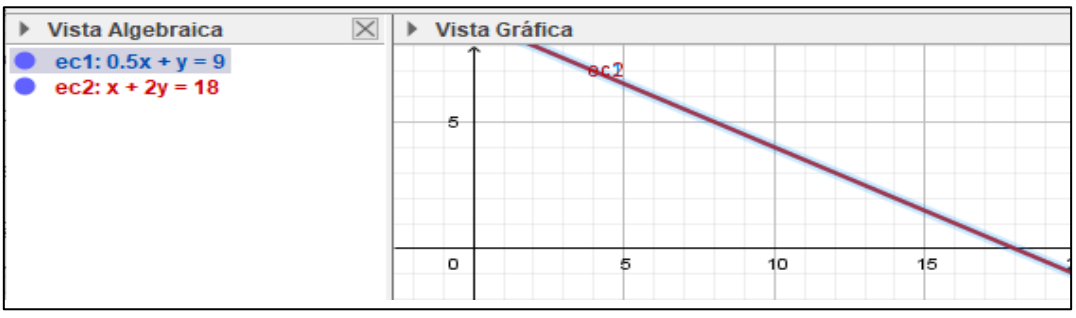
Sistema de ecuaciones inconsistente.



Para el problema del triángulo, suponíamos que los estudiantes pueden representar gráficamente el triángulo una primera ecuación $x + 2y = 18 \rightarrow$ **(1)** además, la segunda condición está dada por la expresión $y + \frac{1}{2}x = 9 \rightarrow$ **(2).** Si multiplica por un medio (1/2) a **(1),** se obtiene la equivalencia con **(2)** por tanto, las gráficas coincidieron, lo que implica que el sistema tiene infinitas soluciones.

Figura 39

Sistema de ecuaciones con infinitas soluciones.



Esperamos que los estudiantes compararan las respuestas que obtuvieron analíticamente y las gráficas en cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 analizados. Finalmente, pretendimos que ellos lograran establecer la relación gráfica y analítica al resolver sistemas de ecuaciones lineales de orden lineal 2x2. Así conjeturen: sí tiene única solución las

rectas se intersecan un punto, el cual, satisface las dos condiciones; sí el sistema es inconsistente las rectas son paralelas, es decir, no existe ningún punto en el plano que satisface las dos condiciones del sistema; finalmente, sí el sistema tiene infinitas soluciones, las rectas se sobreponen o son la misma.

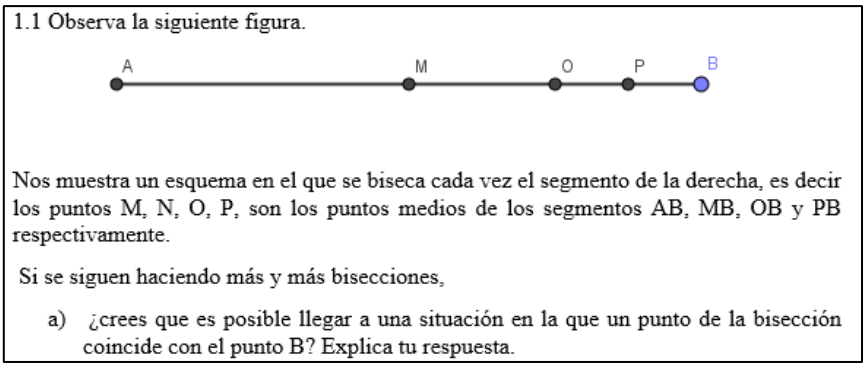
4.3.7 Taller 7: Procesos Infinitos

Propósito: Se pretendía que los estudiantes identificaran el patrón y la regularidad inmersa en estos problemas predomina el análisis de algunas sucesiones, haciendo énfasis en el comportamiento de cambio tienden al infinito. Por ello, planteamos los problemas para este taller teniendo en cuenta lo mencionado por el MEN (1998) "en lo referente a la construcción del continuo numérico, los escenarios deben ser los numéricos y los geométricos. Particularmente el trabajo con las representaciones decimales, cobra especial relevancia. Los procesos infinitos deben ser introducidos en contextos geométricos" (p.51).

En el problema información y exploración libre del taller 7 (Figura 40) presentamos unos problemas para trabajar los procesos infinitos. Inspirados en la paradoja de Zenón según Garbín (2005).

Figura 40

Problema información y exploración libre del taller 7



Nota. Adaptado de: (Garbín (2005) pp. 179-180)

En el *inciso a)* inducimos a un acercamiento al infinito actual, debido a que se habla de la bisección de un segmento, si consideramos esta situación, los estudiantes tendrán cada vez que bisecan un segmento de longitud $(\frac{l}{2})$ equivalente a la mitad de la inicial. Por tanto, algunos estudiantes pueden definir la progresión geométrica suponiendo que $\overline{AB}$ tiene una longitud de 1 unidad. Por tanto, se puede definir la siguiente progresión geométrica:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 * \frac{1}{2} \qquad a_3 = a_2 * \frac{1}{2} \rightarrow\ a_3 = \left(1 * \frac{1}{2}\right) * \frac{1}{2} \rightarrow a_3 = \left(1 * (\frac{1}{2})^2\right)$$

$$a_4 = a_3 * \frac{1}{2} \rightarrow\ a_4 = \left(1 * (\frac{1}{2})^2\right) * \frac{1}{2} \rightarrow a_4 = \left(1 * (\frac{1}{2})^3\right)$$

En general… $a_n = a_{n-1} * a_1 * (\frac{1}{2})^{n-1} \rightarrow\ a_n = \left(a_1 * (\frac{1}{2})^{n-1}\right)$

Donde la razón (r) de la progresión geométrica es igual a $r = \frac{1}{2}$. Es, por tanto, para cualquier progresión geométrica, el termino general corresponde a $\boldsymbol{a_n = (a_1 * (r)^{n-1})}$

Otros estudiantes pueden hacer analogías de este planteamiento, por ejemplo, con cortar una cuerda a la mitad, recorrer la mitad de cierta distancia, o incluso, desde la experiencia del problema de la hoja de papel. Esperamos también que hagan uso de una tabla de valores para ir observando la regularidad así:

Tabla 14

Uso de la tabla

Número de bisecciones	1	2	3	…	$\boldsymbol{n}$
Longitud del segmento	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}(\frac{1}{2})=\frac{l}{2^2}$	$\frac{l}{2}(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})=\frac{l}{2^3}$	…	$\frac{l}{2^n}$

Esperamos que algunos estudiantes que ya vieron limites en el colegio, puedan establecer un acercamiento analítico $\lim_{n\to\infty} \frac{l}{2^n} = \frac{\lim_{n\to\infty} l}{\lim_{n\to\infty} 2^n}$ de allí que, $\lim_{n\to\infty} l = l$ y $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$, si se

reemplaza esos valores generaría una indeterminación, esperamos los estudiantes apliquen la propiedad de los números reales $\frac{c}{\infty} = 0$, Así, justifiquen que se llega al punto B

En el problema exploración dirigida del taller 7 (Figura 41) los estudiantes pueden conjeturar que la suma sea igual a 2. Algunos pueden argumentar que cada vez se va a sumar una cantidad infinitesimal y la tendencia a un valor numérico es igual a 2

Figura 41

Problema exploración dirigida del taller 7.

2.1 Se deja caer una pelota desde 2 metros de altura sobre una superficie horizontal. Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura h, rebota hasta una altura h/2

a) ¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota? Explica tu respuesta.

b) ¿Podrías decir cuántos rebotes hará la pelota? Explica tu respuesta.

Nota. Adaptado de: (Garbín, 2005, p.179)

Para resolver este problema suponemos que los estudiantes utilizarán la fórmula de la sumatoria de los términos de una progresión geométrica $s = \frac{a_1}{1-r}$ donde, a_1 es el primer término de la progresión geométrica, r es la razón de la progresión geométrica. Es decir, $r = 1/2$ por tanto, $a_1 = 1$ Reemplazando obtenemos: $s = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ $s = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Para el inciso b) pretendimos que los estudiantes reconocieran que la pelota no tendrá un número infinito de rebotes porque, esto es físicamente imposible. Por otra parte, la distancia que va a recorrer la pelota se reduce a la mitad, cada vez que hay un rebote, es decir, se puede considerar una sucesión cuyo comportamiento es decreciente.

Suponga que está a una altura h, por tanto, la pelota al caer rebota una altura $\frac{h}{2}$, luego,

$$\frac{h}{4}; \frac{h}{8}; \frac{h}{16} \ldots$$

Se puede definir una sucesión para encontrar la distancia total recorrida.

$$= h + \frac{h}{2} + \frac{h}{4} + \frac{h}{8} + \frac{h}{16} + \frac{h}{32} + \cdots$$

$$= h + \frac{h}{2} + \frac{h}{2^2} + \frac{h}{2^3} + \frac{h}{2^4} + \cdots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} h(\frac{1}{2})^i$$

En el problema tarea retadora del taller 7 (Figura 42) se pretende que los estudiantes, determinen el valor de la suma infinita y puedan expresar finalmente la suma que converge. Para encontrar la sumatoria de la progresión, se empleará la fórmula: $s = \frac{a_1}{1-r}$ donde, a_1 es el primer término de la progresión geométrica, r es la razón de la progresión geométrica.

Figura 42

Problema tarea retadora del taller 7

3.1 Considera la siguiente suma:

$$\mathbf{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots +}$$

a) ¿Cuál crees que es el valor de esta suma? Explica tu respuesta.
b) ¿Podrías expresar algún patrón o regularidad? ¿cuál? Justifica tu respuesta

3.2 Considera la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots}$$

¿Podrías decir para qué valor de n resulta $y = 2$? Explica tu respuesta

Nota. Adaptado de: (Garbín, 2005, p. 180)

En esta situación, "$\boldsymbol{y}$" representa la sumatoria. Se espera que los estudiantes, identifiquen la razón de la progresión geométrica. Es decir, $\boldsymbol{r = 1/2}$ por tanto, $\boldsymbol{a_1 = 1}$

Reemplazando obtenemos: $\boldsymbol{s = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}}$ $\boldsymbol{s = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} = 2}$ Es decir, que esa suma converge.

4.3.8 Taller 8: Sucesiones y procesos infinitos.

Propósitos: Este taller tiene como objetivo que los estudiantes desarrollen nociones de convergencia o divergencia de sucesiones que se presenta cuando n tiende a ∞. Así mismo, que los estudiantes tengan la posibilidad de identificar el tipo de comportamiento de la sucesión, es decir, creciente, decreciente, alternante. Desde el MEN (2006) se plantea que las regularidades se pueden encontrar en las sucesiones propias de los contextos de la vida cotidiana o de las matemáticas mismas. Permiten representar la variación y cambio a través del empleo de algoritmos o formulas. En los NCTM (2003) se planea el uso de las sucesiones para definir cambios recursivos (por ejemplo, la sucesión de Fibonacci) que están presentes en diversos contextos y de esta manera, orientar la comprensión los patrones, relaciones y funciones.

En el problema información y exploración libre del taller 8 (Figura 43) esperamos que los estudiantes visualizaran la suma de los primeros n números impares, lo cual, es equivalente al área de un cuadrado de lado n, como se puede observar en las imágenes. Para este problema, se proporcionaba un applet donde el estudiante deslizaba a "n", luego, planteara la posible variación del problema y resolviera.

Tabla 15

Representación tabular secuencia.

1	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1^2}$
1+3	4	2^2
1+3+5	9	3^2
1+3+5+7	16	4^2
1+3+5+7+9	25	5^2
$\mathbf{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$	…	n^2

Para el inciso a) los estudiantes pueden observar que, el número de círculos corresponden a la suma de los *n*- números impares. Esperamos que los estudiantes pueden generar una

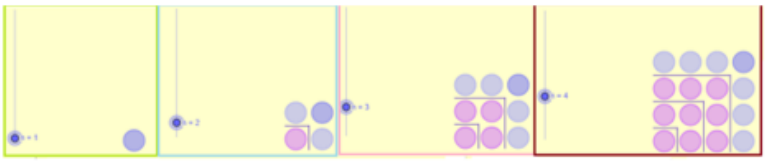
representación tabular (Tabla 15) en la que se involucre los términos de la suma, y el resultado, expresado como una potencia. Así: $a_n = n^2$,

Para el inciso b) promovíamos la generalización del patrón identificado en el inciso anterior, es decir, la relación de covariación entre el número total de círculos y el número de la figura corresponde, para plantear la expresión: $a_n = n^2$, donde n es el número de la figura o la posición.

Figura 43

Problema información y exploración libre del taller 8

1.1 Desliza a n y observa lo que está ocurriendo en la animación. Luego responde.



Complete la tabla:

#Figura	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**14**	**n**
#círculos							

a) En la hoja de cálculo, utilice la herramienta lista de puntos y considera los puntos (x, y) ¿Qué relación encuentras entre el número de la figura respecto al número de círculos? **Explica tu respuesta**
b) ¿Cuál es el número de círculos de la figura 14? **Explica tu respuesta**
c) ¿Cómo cambia la cantidad de círculos? **Explica tu respuesta.**
d) ¿Cómo calcularían el número de círculos de cualquiera de las figuras? **Justifica tu respuesta**
e) ¿El comportamiento es creciente o decreciente? **Explica tu respuesta**
f) ¿la sucesión es divergente o convergente? Explica tu respuesta

Nota. Adaptado de (NCTM, 2003, p.81).

Para el inciso c) y inciso d) promovemos la comprensión del enunciado, es decir, la relación de los datos y las incógnitas. Estas preguntas estuvieron orientadas para ayudar a los estudiantes que aún no habían encontrado la respuesta de al inciso b).

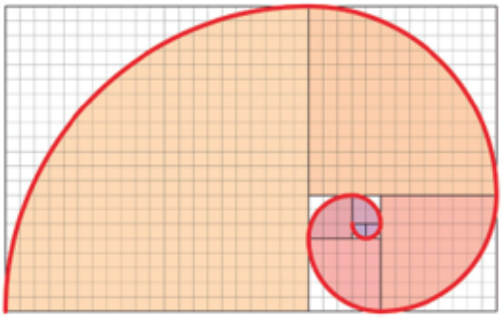
Para el inciso e) pretendíamos que, los estudiantes validaran y verificaran el comportamiento creciente de la sucesión, finalmente para el inciso f), planteamos que reconocieran y justificaran la divergencia de esta sucesión.

En el problema exploración dirigida del taller 8 (Figura 44) procuramos que los estudiantes a partir de una representación geométrica identificaran la sucesión de Fibonacci, al considerar la variación del cuadrado que se va agregando a la configuración inicial.

Figura 44

P*roblema exploración dirigida del taller 8*

2.1 Observa y responde



a) Completa la tabla al iniciar con el lado, el perímetro y el área del cuadrado más pequeño e interior de la espiral (su lado mide 1 unidad).

N° cuadrados	1	2	3	4	5	6
Lado	1	1	2	3	5	
Área	1	4				
Perímetro.	4					
Cociente						

b) ¿Cuál sería el número de la posición 11? ¿podrían generalizar a la posición n? Explica tu respuesta.
c) Observen el listado de números obtenido haciendo el cociente de cada número de la secuencia con su antecesor ¿Qué particularidad tienen? Explica tu respuesta.
d) Utilice el applet Geogebra, para registrar los datos obtenidos, así mismo, considere los cocientes y grafica. Explica tu respuesta.
e) ¿Existe alguna tendencia del cociente de las magnitudes en la sucesión de Fibonacci? Justifica tu repuesta.

Nota. Adaptado DBA Versión 2, MEN (2016, p.67); (Jara,2020, p.20)

En el problema se indagaba a los estudiantes sobre cómo varía la representación, la unicidad de la ubicación de la próxima pieza en el tablero, de esta manera el estudiante puede conjeturar que para el siguiente término requiere de la suma de los dos anteriores a este. Además, los estudiantes analizaran el área y el perímetro del cuadrado que se va agregando. Finalmente estableciera el cociente dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

En el inciso a) se esperaba que los estudiantes identificaran varias sucesiones y realizaran el registro tabular tal como se muestra en Tabla 16.

Tabla 16

Respuestas sucesiones Fibonacci

N° cuadrados	1	2	3	4	5	6
Lado	1	1	2	3	5	8
Área	1	1	4	9	25	64
Perímetro.	4	8	12	16	20	24
Cociente	1/1	2/1	3/2	4/3	5/4	6/5

Para el inciso b) esperamos que los estudiantes identificaran los términos de la sucesión e intentar definirla recursivamente, de tal manera que; obtengan la siguiente generalización:

$a_1 = 1$; a_2=1, para $n \geq 3$ a_n está definida por: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ Es decir, el termino n-ésimo es igual a la suma de los dos términos anteriores. El estudiante a partir de la exploración y visualización puede conjeturar la tendencia de los cocientes y el comportamiento de la sucesión de Fibonacci cuando $n \to \infty$.

Tabla 17

Representación tabular.

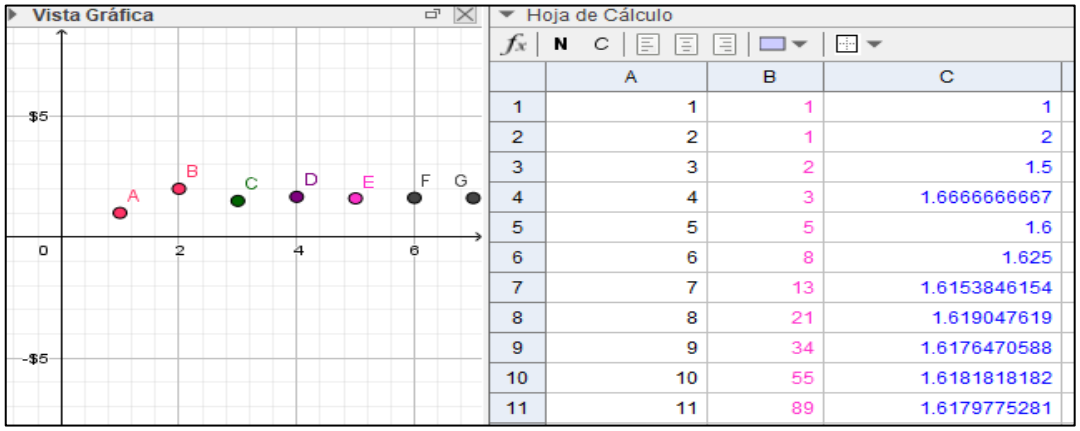
Cuadrado	**Rectángulo**		**Cociente**
1			
1	2	1	2
2	3	2	1.5
5	8	5	1.6
8	13	8	1.625
13	21	13	1.61538

Para el inciso c) propusimos el uso de casos particulares del cociente entre dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, es decir; $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ así, pretendimos acercar al estudiante a la

noción convergencia de los términos. El estudiante al hacer varios cocientes (casos particulares), se ira aproximando al número de oro, así como se presenta en la Tabla 17.Para el inciso d) Con ayuda del GeoGebra o el Excel, se puede definir la sucesión de Fibonacci, así mismo, graficar los puntos en el plano y establecer el cociente entre los dos términos sucesivos (Figura 45).

Figura 45

Representaciones GeoGebra.



	A	B	C
1	1	1	1
2	2	1	2
3	3	2	1.5
4	4	3	1.6666666667
5	5	5	1.6
6	6	8	1.625
7	7	13	1.6153846154
8	8	21	1.619047619
9	9	34	1.6176470588
10	10	55	1.6181818182
11	11	89	1.6179775281

En el problema tarea retadora del taller 8 (Figura 46) presentamos a los estudiantes unas sucesiones, para que a partir de la particularización determinaran el comportamiento de estas cuando n tiende a ∞, así mismo, es decir, si son crecientes, decrecientes o alternantes, además indicar la posible convergencia o de divergencia.

Figura 46

Problema tarea retadora del taller 8

Considere las siguientes sucesiones

$$b_n = 5 + (-2)^n$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

a) ¿Cuáles son los términos 4, 7, 9, 10, 25 de cada una de las sucesiones?
b) Teniendo como referencia los términos obtenidos ¿cómo describes el comportamiento de las sucesiones? ¿son crecientes, decrecientes o alternantes?
c) si consideramos valores muy grandes de n, las sucesiones son ¿convergentes o divergentes? Explica tu respuesta.

Nota. Adaptado de: (Stewart et al., 2012, p.785)

En el inciso a) esperamos que los estudiantes pueden hacer uso de la variable y, evaluar en cada una de las sucesiones los valores que se buscan, a fin de reconocer y encontrar sus imágenes. Una estrategia que se puede generar corresponde a un registro de representación tabular como se presenta en la Tabla 18.

Tabla 18

Representación tabular de las sucesiones.

Sucesión $\boldsymbol{b_n = 5 + (-2)^n}$	Sucesión $\boldsymbol{c_n = \frac{(-1)^n}{n}}$
$\boldsymbol{b_4 = 5 + (-2)^4 = 21}$	$c_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$
$\boldsymbol{b_7 = 5 + (-2)^7 = -251}$	$c_7 = \frac{(-1)^7}{7} = -\frac{1}{7}$
$\boldsymbol{b_9 = 5 + (-2)^9 = -507}$	$c_9 = \frac{(-1)^9}{9} = -\frac{1}{9}$
$\boldsymbol{b_{10} = 5 + (-2)^{10} = 1029}$	$c_{10} = \frac{(-1)^{10}}{10} = \frac{1}{10}$
$\boldsymbol{b_{25} = 5 + (-2)^{25}}$= -33554427	$c_{25} = \frac{(-1)^{25}}{25} = -\frac{1}{25}$

Para el inciso b) esperamos que los estudiantes reconozcan que las sucesiones son

i) $b_n = 5 + (-2)^n$ alternada y divergente

ii) $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$, es alternada y convergente,

Para el inciso c) esperamos que los estudiantes al explorar el con algunos casos particulares (inciso a), puedan establecer el comportamiento de dichas sucesiones cuando n tiende a ∞, es decir, para i) $\boldsymbol{b_n = 5 + (-2)^n}$ la sucesión es divergente debido a que no tiene límite. Es decir, la

sucesión no se aproxima a un número finito, en esta sucesión ocurre: cuando n es impar $n \to \infty$ entonces b_n tiende a -∞, y cuando *n* es par, cuando $n \to \infty$ entonces b_n tiende a ∞.

Para ii) $\boldsymbol{c_n = \frac{(-1)^n}{n}}$**,** a pesar de ser alternante**,** es convergente a cero porque cuando $n \to \infty$.

No esperamos demostraciones formales, sobre la convergencia o divergencia, pues lo que, se pretende es trabajar con estas nociones, así como, con las nociones de comportamiento creciente, decreciente o alternante. Al finalizar las discusiones, el docente aclarará que, las sucesiones, son funciones cuyo dominio son los números naturales.

4.3.9 Taller 9 Análisis funcional.

Propósitos: El propósito es permitir a los estudiantes reconocer e interpretar problemas que involucren la variación y el cambio para con ello, establecer relaciones funcionales que permitan cuantificar el cambio y generar un modelo matemático para predecir el comportamiento de las variables que intervienen en el problema.

Desde los NCTM (2003) se propone que los estudiantes de secundaria comprendan los diversos tipos de funciones. Estos objetos matemáticos deberían ser reconocidos y empleados para expresar las relaciones entre las cantidades y las estructuras que se encuentran presentes en los problemas analizados. Los problemas que planteamos en este taller tienen la finalidad de aportar en el estudio de funciones lo cual, involucra la creación de representaciones y el uso de la simbología matemática para expresar ideas abstractas que permitan comprender la situación.

En el problema información y exploración libre del taller 9 (Figura 47) intentamos proporcionar a los estudiantes una situación del contexto económico que les permitiera crear, explorar y predecir un modelo para determinar el salario de Camila. En este problema los estudiantes debieron reconocer la relación de covariación entre el salario y la cantidad de ventas de periódico.

Figura 47

Problema información y exploración libre del taller 9

Actividad 1.1 Información y exploración libre.

Camila trabaja en el periódico "El tiempo" y tiene un sueldo básico de $20.000 diarios, y se incrementa en las ventas que realice a diario.
Responde las siguientes preguntas.

a) Si por cada periódico vendido tiene una comisión de $700 ¿Cuánto dinero devengaría en un día Camila realiza 5, 10 o 16 ventas?
b) Existe alguna relación entre el salario devengado a diario y el número de suscripciones vendidas a diario. Expresa y explica tu respuesta.
c) La nueva administración propone una nueva forma de pago, el salario básico diario será disminuido en un 20%, y se pagará una comisión por cada venta de $900. Analice las dos alternativas salariales y exprese cuál de las dos alternativas le traen mejores beneficios a Camila.

1.2 Socialice y comparte los resultados con tus compañeros y tu profesor.

Nota. Adaptado de: (Seduca, 2006, p.150)

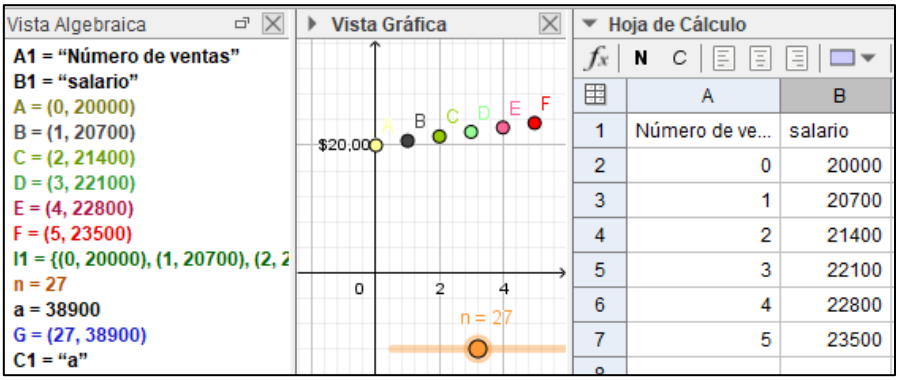
En el inciso a) se esperaba que los estudiantes plantearan la relación entre el dinero devengado en función a la tarifa básica y la cantidad de periódicos vendidos por Camila. El empleo de casos particulares permitiría a los estudiantes restringir el dominio de la relación funcional a los números naturales, pues en este contexto, no tiene sentido el empleo de los números reales.

Para el inciso b) pensamos que los estudiantes podrán crear diversas representaciones, por ejemplo, una tabla de valores, una representación simbólica $f(x) = 20000 + 700x$ donde $x \epsilon \mathbb{N}$, otra posibilidad es crear una lista de puntos en el plano cartesiano $P(x, y)$, los cuales, hacen alusión a la relación de covariación entre la cantidad de suscripciones diarias (x) y el salario devengado (y) (Ver Figura 48).

Es importante destaca que, los procedimientos se pueden realizar sin necesidad de hacer uso del software de GeoGebra.

Figura 48

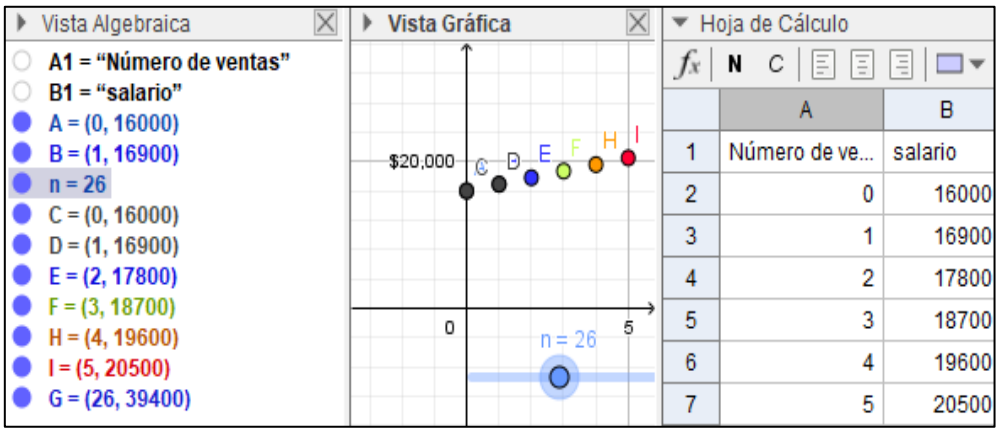
Diversas representaciones para la primera forma de devengar el salario



Finalmente, para el inciso c) pretendimos que los estudiantes contrastaran una nueva forma de salario con la propuesta en el inciso a). Para ello, encontrar la tarifa básica que corresponde al 20% de $20.000 es decir, el salario será disminuido $4.000 por tanto, corresponde a $16.000. Un procedimiento aritmético que esperamos era encontrar el salario básico nuevo así; $(20000)(0.80) = 16000$, luego, plantear una expresión algebraica ($g(x) = 16000 + 900x$), tabular o gráfica como se muestra en Figura 49 que represente la nueva forma de devengar el salario.

Figura 49

Representación segunda alternativa



Para comparar los dos salarios, esperamos que los estudiantes interpreten las dos representaciones gráficas, tabulares o algebraicas para concluir que, si Camila vende diariamente entre $0 \leq x < 20$ con $x \epsilon \mathbb{N}$ es más conveniente, la primera forma de recibir el salario ($f(x) = 20000 + 700x$) mientras que, si Camila vende más de 20 periódicos, de esta manera, sí, $x > 20$ con $x \epsilon \mathbb{N}$ le favorece más la segunda forma de recibir su salario (es decir, $g(x) = 16000 + 900x$). En caso de que vendiera $x = 20$ periódicos ganaran lo mismo.

Otra estrategia que contemplamos es el uso de la Hoja de cálculo de Excel, algún software, o cálculos a lápiz y papel.

En el problema exploración dirigida del taller 9 (Figura 50) esperamos que los estudiantes generaran para cada uno de los planes las representaciones tabular, algebraica, gráfica y luego, las compararan para determinar cuál plan le favorece adquirir a María.

Figura 50

Problema exploración dirigida del taller 9

Una empresa de telefonía móvil tiene los siguientes planes

Plan Bajo	**Plan Medio**	**Plan Alto**
Cargo Básico: $\$35.000 + IVA$	Cargo Básico: $\$70.000 + IVA$	Cargo Básico: $\$120.000 + IVA$
Minutos incluidos: 65	Minutos incluidos: 150	Minutos incluidos: 300
Minuto adicional: $\$800 + IVA$	Minuto adicional: $\$700 + IVA$	Minuto adicional: $\$600 + IVA$

2.1 Responda las siguientes preguntas:

a) Suponga que usted puede pagar cualquiera de los tres planes, pero quiere escoger el que, de acuerdo con su consumo mensual, le salga más favorable, ¿Cuál escogería? Suponga una tasa del 20% para el IVA. Explica tu respuesta.
b) Exprese utilizando una representación gráfica o simbólica el valor de consumo mensual en cada uno de los planes.
c) Si María tiene un estimado de consumo de 250 min, ¿Cuál de los planes le beneficia? ¿por qué?

Nota. Adaptado de: (Seduca,2006, p.152)

En el inciso a) esperamos que los estudiantes hicieran un supuesto del consumo mensual de minutos, luego decidirán cuál es el plan más favorable. Para comprender el problema es necesario que encuentren el 20% del valor del plan y lo sumen al cargo básico, que favorecen los acercamientos aritméticos (con el cálculo del IVA). Luego, esperamos que, encuentren el valor del minuto adicional más IVA incluido, de esta manera, se tienen las tarifas que se presentan en la Tabla 19. Es importante, socializar las distintas estrategias como el uso de los casos particulares, de esta manera se avanza en la comprensión del enunciado, para luego modelar.

Tabla 19

Tarifas planes de minutos

Valor con IVA	Plan Bajo	Plan Medio	Plan Alto
Cargo Básico en $	42.000	84.000	144.000
Minuto adicional en $	960	840	720

En el inciso b) el docente puede proporcionar preguntas que permitan un análisis detallado, así para cada plan esperamos que los estudiantes plantearan una función por partes, como se muestra en Tabla 20, donde hay una función constante en para cierta cantidad de minutos incluidos y luego, se cobra por minuto o fracción de minuto de manera proporcional, lo cual, genera un modelo lineal, es decir, la razón de cambio del precio con respecto al tiempo es constante (dependiendo del tipo de plan).

Tabla 20

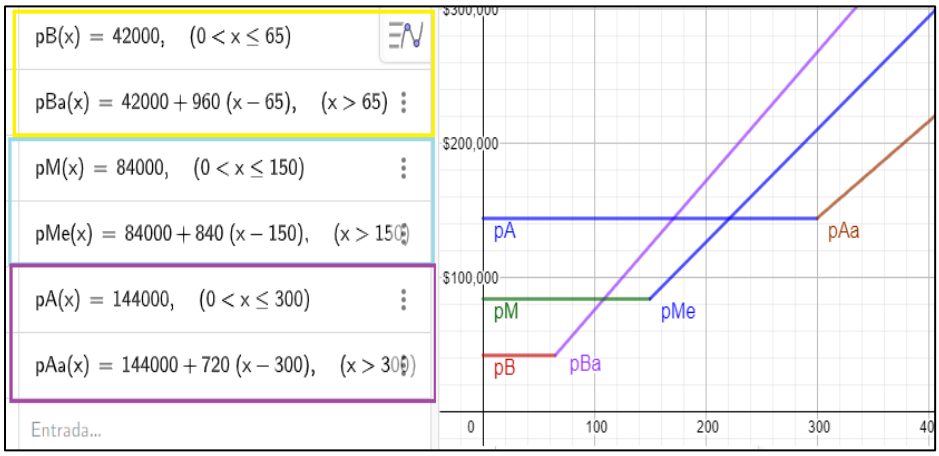
Representaciones algebraicas planes de minutos.

Plan	Representación algebraica
Bajo	$f(x) = \begin{cases} 42000, & 0 \leq x \leq 65 \\ 42000 + 960(x - 65), & x > 65 \end{cases}$
Medio	$g(x) = \begin{cases} 84000, & 0 \leq x \leq 150 \\ 84000 + 840\ (x - 150), & x > 150 \end{cases}$
Alto	$h(x) = \begin{cases} 144000, & 0 \leq x \leq 300 \\ 144000 + 720(x - 300), & x > 300 \end{cases}$

El inciso b) también posibilitaba la representación gráfica de los tres planes como se muestra en la Figura 51.

Figura 51

Representación gráfica.

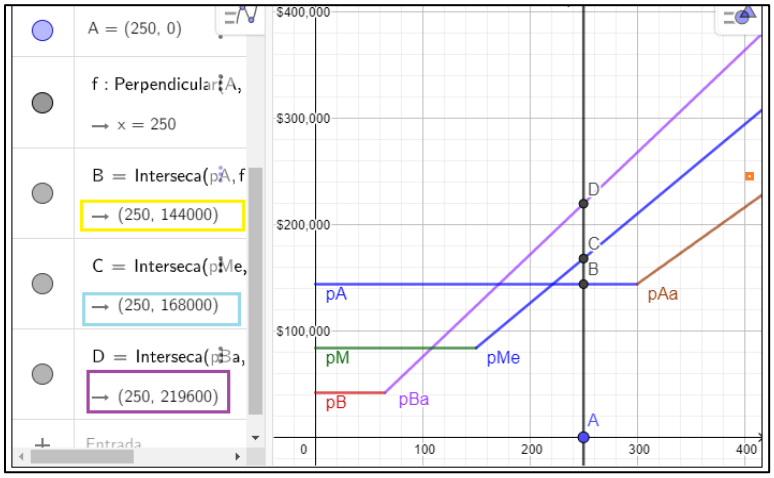


Esperamos que, estas representaciones sean validadas y verificadas por parte de los estudiantes, por ello, en el inciso c) indagábamos sobre una cantidad específica de minutos ($x = 250$) y la cantidad de dinero a pagar, de tal suerte, que fuera el plan con la tarifa más baja. Es decir, la opción más favorable es $h(x)$ plan alto. Esté problema permite comparar las imágenes de las funciones, el comportamiento y la rapidez con la que crece cada una de ellas, es decir, permite analizar propiedades referentes a la covariación entre las variables tiempo vs tarifa a pagar.

En la interpretación que le den a la gráfica (Figura 52), para casos particulares ($x = 250$) el estudiante deberá reconocer la imagen como el valor a pagar de la factura, dada esa cantidad de minutos y elegir la mejor opción. Así mismo, se puede aprovechar el problema para crear otras hipótesis, alusivas a distintos consumos, de esta manera, los estudiantes analizan para intervalos de tiempo específicos cuál es la mejor opción o incluso, suponemos poder indagar sobre las cantidades de consumos que hacen que se generen las mismas tarifas (puntos de corte)

Figura 52

Análisis en 250 min.



En el Problema exploración dirigida del taller 9 (Figura 53) pretendimos que los estudiantes analizaran un problema que se modela con una función lineal cuya pendiente es negativa, debido a que la depreciación, es considerada como la pérdida de valor de un bien o inmueble.

Figura 53

Problema exploración dirigida del taller 9

La depreciación en términos contables es la pérdida de valor anual de un activo en la medida que pasa el tiempo, que en teoría llega a ser cero cuando caduca la vida útil del bien. Sin embargo, éste tiene un valor comercial subjetivo. Puede ser por desgaste, por el tiempo u obsolescencia. El método más sencillo y utilizado por las empresas, consiste en dividir el valor del activo entre la vida útil del mismo.

Según el decreto 3019 de 1989, que reglamenta parcialmente el Estatuto Tributario en Colombia, los inmuebles tienen una vida útil de 20 años, los bienes muebles, maquinaria y equipo, trenes aviones y barcos, tienen una vida útil de 10 años, y los vehículos y computadores tienen una vida útil de 5 años.

Usted es el contador del colegio Carlos III este plantel de 940 estudiantes después de llevar varios años contratando los servicios de empresas de transporte ha decidido que debe adquirir un bus propio para llevar a sus estudiantes a diferentes actividades deportivas y culturales.

Le piden a usted que presente una opción de bus para la compra y la posible depreciación de cada uno de ellos. Puede consultar la página para comenzar su búsqueda: http://www.carroya.com/web/buscar/vehiculos/ultimabusqueda.do

a) Sí representara en un sistema de coordenadas el valor neto del vehículo al correr de los años, ¿Qué tipo de gráfica cree que resultaría? **Justifica tu respuesta.**
b) Halle la ecuación de la función que representa la gráfica, ¿cómo podría hacerlo? Explica tu respuesta.

Nota. Adaptado de: (Infante Mejía, 2016, p.100)

El docente, puede generar la discusión respecto al modelo que mejor se adapta al problema, ya que, los estudiantes podrían pensar que el valor de depreciación es constante durante todo el año, hecho que, generar una función escalonada.

En el inciso a) posibilitamos a los estudiantes la elección y búsqueda del valor de un vehículo para calcular la depreciación. Esperamos múltiples soluciones, que coincidan con el modelo lineal con pendiente negativa. Por ejemplo: suponemos que se compró un automóvil cuyo costo fue: $132.000.000, entonces el valor de la depreciación correspondió a $d = \frac{132.900.000}{5} = 26.580.000$. Esperamos que, se registren en la tabla de datos algunos valores del automóvil en la medida que cambia el tiempo, comprendiendo que el dato d, se le resta al valor neto del vehículo (Ver Figura 54)

Figura 54

Tabla de valores problema de depreciación.

	A	B	C	D
1	AÑO	CUOTA DEPRECIACIÓ	DEPRECIACIÓN ACUMULADA	VALOR NETO
2	1	26580000	26580000	106320000
3	2	26580000	53160000	79740000
4	3	26580000	79740000	53160000
5	4	26580000	106320000	26580000
6	5	26580000	132900000	0

Como la variación año a año, es proporcional al tiempo (información suministrada en el enunciado) los estudiantes pueden calcular el modelo lineal que represente el problema, así por ejemplo, se eligen dos puntos P (año (x) , valor neto (y)), se calculó la razón de cambio entre el valor neto y el tiempo transcurrido : $(m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})$, de esta manera se obtuvo $m = \frac{106320000 - 0}{1 - 5} = -26580000$ posteriormente, se eligió un punto y el valor de la pendiente para encontrar la representación algebraica. (empleando la ecuación punto-pendiente) $y - y_1 = m(x - x_1)$ se

obtiene $y - 0 = -26580000(x - 5)$, es decir, la ecuación explicita: $y = -26580000x + 132900000$. Esperamos generar una discusión, respecto a si el modelo es lineal o no. El planteamiento gráfico, así como la comprensión que tiene la pendiente negativa y el intercepto tanto con el eje horizontal como el eje vertical.

En el problema tarea retadora del taller 9 (Figura 55) pretendimos que los estudiantes reconozcan y den tratamiento a la situación de variación y cambio presente en la venta de bolsas de arroz, así establezcan la relación de covariación entre el número de libras de arroz y la cantidad de dinero que debe pagar.

Figura 55

Problema tarea retadora del taller 9

3.2 Almacén Jumbo está vendiendo bolsas de arroz Roa cinco libras por un precio de 17500 pesos.
a) ¿Cuál es el precio de 9 libras, 12 libras, 25 libras? Elabora una representación tabular y grafica. **Explica tu respuesta.**
b) Si se aumenta la cantidad de libras de arroz ¿Qué ocurre con el precio a pagar? ¿Qué relación existe entre las magnitudes involucradas en esta situación? **Explica tu respuesta.**
c) ¿La relación entre el precio a pagar y la cantidad de libras de arroz es función? Sí su respuesta es afirmativa ¿Cuál es el rango y el dominio de esta función? Considerando las condiciones del problema. **Explica tu respuesta.**

Nota. Adaptado de: (Posada et al,. 2006, p. 108)

Para el inciso a) esperamos que los estudiantes puedan condensar el valor del precio de los casos particulares por los que se indagaba en una tabla de datos como se muestra en Tabla 21.

Tabla 21

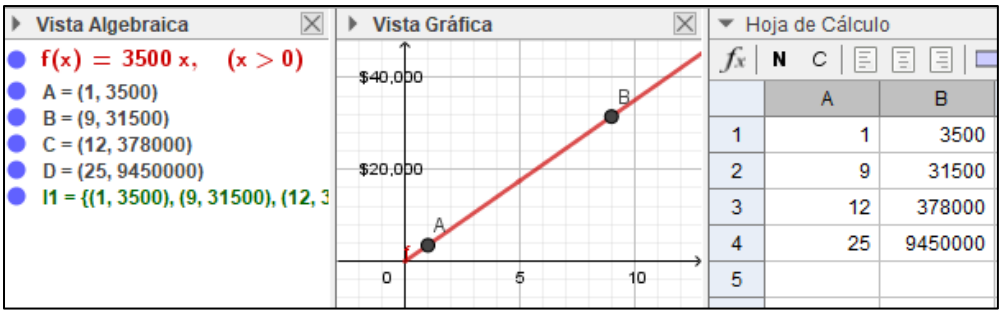
Libras de arroz vs precio.

Libras de arroz	1	5	9	12	25
Precio	3500	17500	31500	42000	87500

Así mismo, esperamos que elaboren una representación gráfica, como un conjunto de puntos en el plano cartesiano cuyas, coordenadas $P(x, y)$ corresponden a $x =$ libras de arroz $y =$ precio del arroz (Ver Figura 56). Así, al relacionar la cantidad de dinero con el número de libras, el docente puede indagar sobre el dominio de la relación, por ejemplo: ¿es posible encontrar el valor de 1,6 libras de arroz? (números reales positivos).

Figura 56

Representación situación arroz



En el inciso b*)* posibilitamos a los estudiantes pensar en cómo varían las libras de arroz y el precio del producto, de esta manera se puede generar el modelo lineal (Figura 56). Para *el inciso c)* los estudiantes pueden establecer algunas propiedades presentes en la relación funcional y que favorece la comprensión del problema, por ejemplo: la restricción del dominio a los números reales positivos (libras de arroz) que simbólicamente corresponde a: $D_f = \{x > 0, x \in \mathbb{R}\}$. Además, como se habla de dinero, a pesar de ser una función continua, los estudiantes pueden establecer aproximaciones acordes a la moneda colombiana (pesos).

4.3.10 Taller 10: Variación Contextos.

Propósito: Se pretendía que los estudiantes crearan representaciones de problemas relacionadas con diversos tipos de variación y cambio, de esta manera generar inferencias y resolver problemas de la vida cotidiana.

Los problemas de este taller fueron elegidos de un trabajo previo propuesto por Echeverría (2022), donde se consideran reflexiones didácticas, pedagógicas y matemáticas para presentar los objetos matemáticos del cálculo diferencial a los estudiantes que ingresan bajo admisión especial, de esta manera, se pretende hacer más cercanos los problemas a los estudiantes. Por ello, se presentas tres problemas del contexto de económico de las comunidades.

En el problema información y exploración libre del taller 10 (Figura 57) , pretendía que los estudiantes establecieran la relación de dependencia entre el precio del año anterior y el porcentaje del IPC para el siguiente año. De esta manera, el agricultor decide que cantidad de dinero deberán subirle al precio del maíz para que no cobren menos y genere pérdidas por este concepto.

Figura 57

Problema información y exploración libre del taller 10

1.1 Para sustentar su economía, los indígenas realizan tejidos artesanales; además de dedicarse a cultivos tales como el maíz. En Colombia el aumento del costo de los productos de la canasta familiar, incluido el maíz, está relacionado con el índice de precios al consumidor (IPC), el cual es un porcentaje que determina el aumento o disminución de estos productos. A continuación, se muestra una tabla con la variación anual del IPC en los últimos años, según el DANE.

AÑO	IPC (Anual)	Precio de Maíz (kg)
2016	5,57%	
2017	4,09%	$700
2018	3,37%	
2019	3,31%	
2020	3,62%	
2021	3,9%	

a) Complete la tabla anterior.
b) ¿Cuál será el precio del Maíz en el 2021 si el IPC es de 3,9%?
c) Halle una función que relacione el IPC (%) y el Precio de Maíz (kg) en el 2020.
d) ¿Cómo crees que pueda ayudar a las comunidades indígenas conocer el IPC anualmente?

Nota. Adaptado de (Echeverría, 2022, p.77**)**

Para el inciso a) Esperamos que los estudiantes completen la información de la tabla (Tabla 22). Algunos acercamientos que se esperan son de tipo aritmético a su vez, plantear acercamientos analíticos (regla de tres simple). Por ejemplo: Para establecer el precio del maíz para el año 2019

($P(2019)$), debe considerar el precio del maíz año 2018 $P(2018)$, luego sumarle el incremento del IPC correspondiente al año 2019.

Es decir: $P(2019) = P(2018) + P(2018) * IPC(2019)$, luego se remplaza

$P(2019) = 723{,}6 + 723{,}6 * (\frac{3{,}31}{100})$ y se obtiene

$P(2019) = 747{,}5$

Tabla 22

Precios de maíz

AÑO	IPC (Anual) %	$ Precio de Maíz (kg)
2016	5,57	671,37
2017	4,09	700
2018	3,37	723,6
2019	3,31	747,5
2020	3,62	774,6
2021	3,9	804,8

En el inciso b) esperamos que los estudiantes hagan el cálculo

$$P(x) = 774{,}6\left(\frac{x}{100}\right) + \ 774{,}6$$

donde $P(x)$: el precio del maíz por kilogramo y $\boldsymbol{x}$ $es\ el\ IPC$ $(\%)$ $en\ el$ 2021.

Encuentren el valor de 804,8 pesos.

Para el inciso c) Esperamos que se establezca la relación de dependencia entre el precio del año anterior y el porcentaje del IPC para el siguiente año. De esta manera, el agricultor decide cuál sería el precio adecuado para el producto y obtener utilidades.

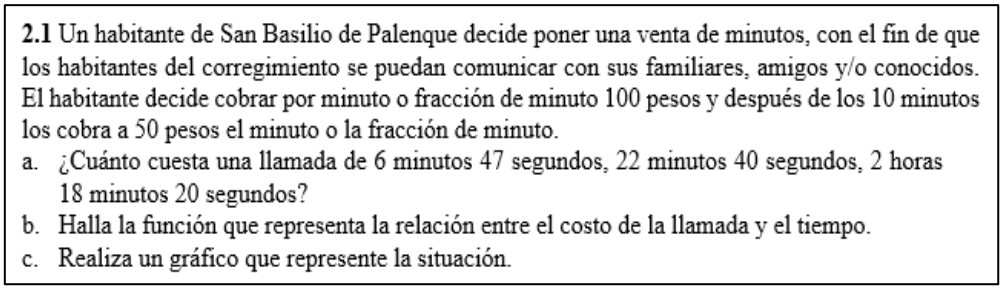
El trabajo con estos porcentajes genera en los estudiantes la necesidad de aproximar o realizar estimaciones considerando dos o tres cifras decimales. Es recomendable, que se genere una discusión al respecto y se verifiquen los cálculos efectuados. Los estudiantes también pueden

hacer uso de calculadoras para tal fin o emplear software como Excel o GeoGebra para definir la relación entre el IPC, y el precio del año anterior.

En el problema exploración dirigida del taller 10 (Figura 58) los estudiantes deberán comprender la información, a partir del minuto 10 se cobra 50 pesos por minuto o fracción de minuto.

Figura 58

Problema exploración dirigida del taller 10.



2.1 Un habitante de San Basilio de Palenque decide poner una venta de minutos, con el fin de que los habitantes del corregimiento se puedan comunicar con sus familiares, amigos y/o conocidos. El habitante decide cobrar por minuto o fracción de minuto 100 pesos y después de los 10 minutos los cobra a 50 pesos el minuto o la fracción de minuto.

a. ¿Cuánto cuesta una llamada de 6 minutos 47 segundos, 22 minutos 40 segundos, 2 horas 18 minutos 20 segundos?
b. Halla la función que representa la relación entre el costo de la llamada y el tiempo.
c. Realiza un gráfico que represente la situación.

Nota. Adaptado de: (Echeverría, 2022, p.99)

Inicialmente en el inciso a) se indaga sobre algunas cantidades especificas con el ánimo de que los estudiantes comiencen a generar algunas representaciones y procedimientos aritméticos,

Tabla 23

Situación minutos.

Minutos	**Procedimientos**	**Costo de la llamada.**
6 minutos 47 segundos	Se cobran 7min (7) (100)	700
22 minutos 40 segundos.	Se cobran los primeros 10 min a 100 pesos, es decir 1000 pesos, luego, los trece minutos se cobra cada uno a 50 pesos. (50)(13) =650 pesos.	1000+650=1650
2 horas 18 minutos 20 segundos	Inicialmente los estudiantes pueden realizar la conversión de unidades, en total pagará 139 min, los primeros 10 a 100 pesos y los demás a 50 es decir: (10) (100) =1.000 (129) (50) =6.450	7450

de esta manera comprendan el enunciado y puedan establecer el registro de los precios dependiendo de la cantidad de minutos consumidos (Ver Tabla 23). El empleo de casos particulares creemos puede favorecer la comprensión del problema.

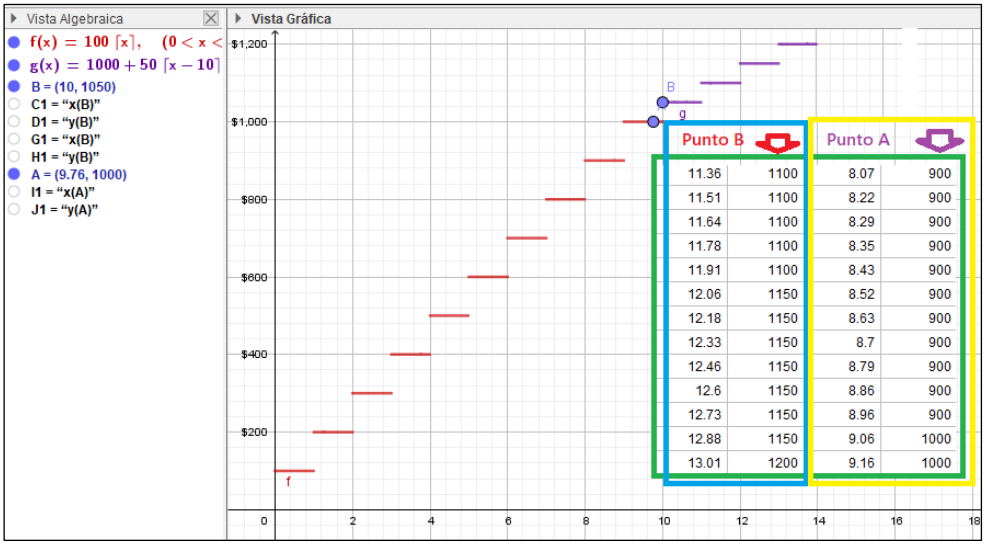
El inciso b, los estudiantes requieren expresar la variación como una función para poder dar respuesta a la situación de manera analítica. Por ello, se espera que, luego de reflexionar cómo se aproxima las fracciones de minutos al siguiente número entero, puedan conjeturar el uso de la función parte entera ("techo") es decir, para cada x real, el techo de x es el menor entero mayor o igual a x. Así se define:

$$f(x) = \begin{cases} 100\,\lceil x \rceil & si\ \ 0 \leq x \leq 10 \\ 50\lceil x - 10 \rceil + 1000 & si\ x > 10 \end{cases}$$

En el inciso c) los estudiantes pueden utilizar un software o simplemente realizar el trazo a lápiz y papel. Por lo cual, obtendrán Figura 59. Los estudiantes podrían aprovechar y transitar por los diversos tipos de representación de esta función. (tabular, verbal, gráfico, algebraico).

Figura 59

Representación situación minutos.



En el problema tarea retadora del taller 10 (Figura 60) proponemos que los estudiantes expresen en qué condiciones es más favorable un trabajo que otro. Por ello, los estudiantes pueden modelar la situación empleando el modelo lineal donde x representa la cantidad de dinero recibida por las ventas de productos de catálogos o prendas de vestir en el almacén.

Figura 60

Problema tarea retadora del taller 10.

3.1 Una estudiante proveniente de una zona de difícil acceso ha ingresado a la Universidad Industrial de Santander. Para sustentar algunos de sus gastos mensuales, la estudiante decide buscar un empleo. Un amigo le recomienda trabajar en la venta de productos por catálogos, en donde recibirá como pago el 25% del total de las ventas que realice. Otro amigo le recomienda trabajar vendiendo prendas de vestir en un almacén en donde deberá cumplir un horario de 4 horas por día, recibiendo diariamente una base de 15000 pesos más el 1% de cada venta.

a. Realiza un gráfico que represente las situaciones.
b. ¿En qué situación el estudiante ganaría la misma cantidad mensual de dinero independientemente del trabajo que escoja?

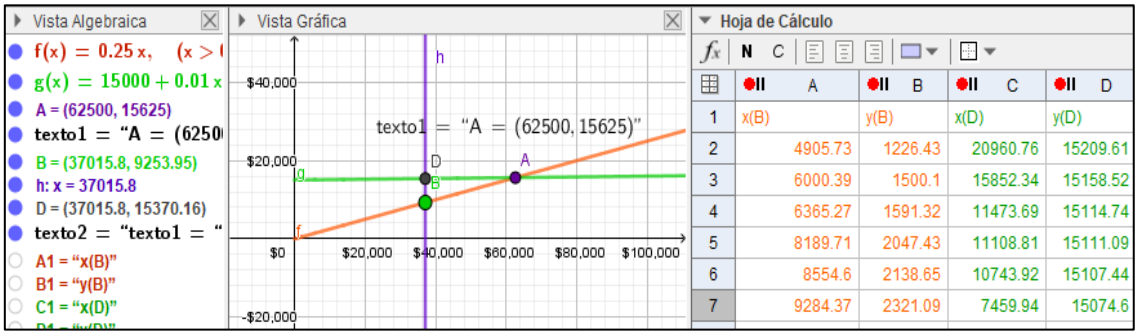
¿Cuál trabajo le recomendarías al estudiante? ¿Por qué?

Nota. Adaptado de: (Echeverría, 2022, p.101)

En el inciso a) esperamos que los estudiantes a partir del análisis de la gráfica como se muestra en la Figura 61 puedan identificar que cuando se vende 62.500 pesos, la utilidad en los dos trabajos es la misma, (15650 pesos).

Figura 61

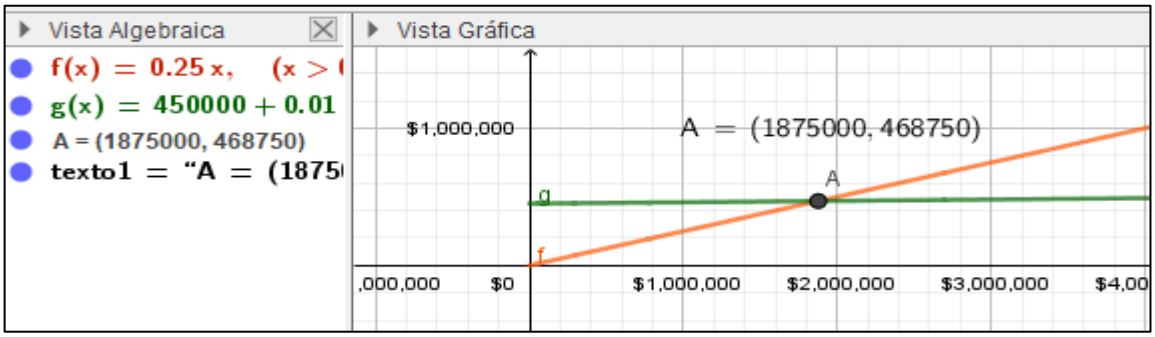
Utilidad situación de trabajo.



En el inciso b) tenía la finalidad de poder vislumbrar el salario que podría obtener el estudiante durante un periodo de un mes (30 días). Los estudiantes pueden realizar procedimientos aritméticos que permitan calcular el salario durante un mes. Es decir, puede indicar que, el valor mensual de ventas, en el cual, el estudiante tendría el mismo ingreso (en los dos trabajos) corresponde a 1.875.000 pesos; con una rentabilidad de 469.5000 pesos. Así mismo, desde acercamientos analíticos interpretar la Figura 62.

Figura 62

Representación ingresos y sueldo estudiante por un mes



Los estudiantes deberán deducir y validar, que sí, la cantidad de dinero producto de las ventas sea menor a 1.875.000 pesos, es recomendable el trabajo donde gana el básico diario de 15000 pesos más el 1% de utilidad, en caso contrario, el estudiante tendrá mayor beneficio mensual con el trabajo que le proporciona el 25% de comisión sobre el valor de las ventas.

4.3.11 Taller 11: Funciones Variaciones Contexto.

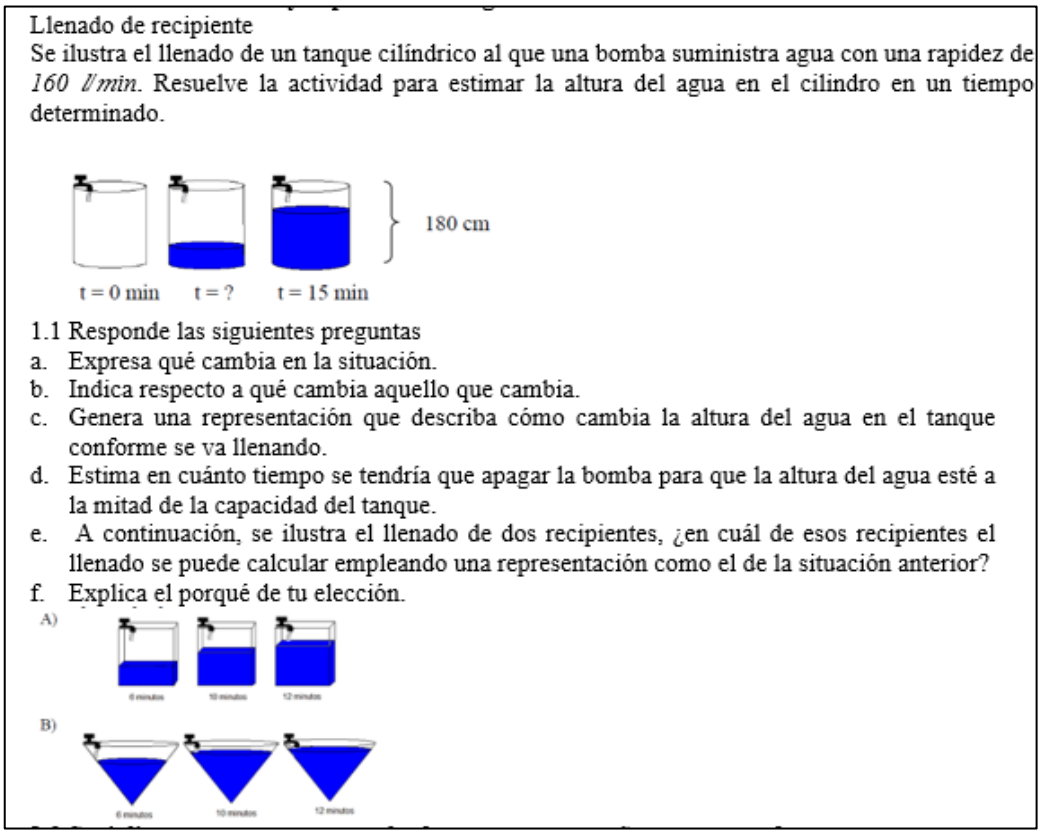
Propósito: pretendía trabajar situaciones de llenado de recipientes. Inicialmente, haciendo énfasis en el modelo lineal. Además, queríamos que los estudiantes desarrollaran la noción de la pendiente de la recta, reconociendo la variación de la altura con respecto al tiempo, es decir, la interpretación de la pendiente como la razón de cambio. En el problema de la tarea retadora, planteamos una relación de proporcionalidad inversa con el fin de desarrollar un modelo

matemático de llenado de recipientes que represente otro tipo de variación. Según el MEN (1998) la construcción del concepto de función de variable real puede surgir de problemas geométricos y de medida. Luego, los problemas de este taller se fundamentaron en este planteamiento.

En el problema información y exploración libre del taller 11 (Figura 63) pretendimos que los estudiantes identificaran la velocidad de llenado del tanque, además de la dependencia que existe con respecto a la forma del recipiente y la velocidad en la que se llena. En este problema se tiene variación constante entre la cantidad de llenado de agua y el tiempo, por lo cual, los estudiantes pueden expresar mediante un modelo lineal la covariación presente en este problema y cuantificar el cambio.

Figura 63

Problema información y exploración libre del taller 11


Llenado de recipiente

Se ilustra el llenado de un tanque cilíndrico al que una bomba suministra agua con una rapidez de *160 l/min*. Resuelve la actividad para estimar la altura del agua en el cilindro en un tiempo determinado.

1.1 Responde las siguientes preguntas

a. Expresa qué cambia en la situación.
b. Indica respecto a qué cambia aquello que cambia.
c. Genera una representación que describa cómo cambia la altura del agua en el tanque conforme se va llenando.
d. Estima en cuánto tiempo se tendría que apagar la bomba para que la altura del agua esté a la mitad de la capacidad del tanque.
e. A continuación, se ilustra el llenado de dos recipientes, ¿en cuál de esos recipientes el llenado se puede calcular empleando una representación como el de la situación anterior?
f. Explica el porqué de tu elección.

A)

B)

Nota. Adaptado de: (Sosa, 2011 p.147-148).

En el inciso a) y el inciso b) esperamos que los estudiantes reconozcan las variables del problema y logren establecer las magnitudes variantes, es decir: la cantidad de litros con respecto al tiempo. Los estudiantes pueden registrar en una tabla (como Tabla 24) algunos valores numéricos correspondientes.

Tabla 24

Litros vs tiempo

Litros	0	160	320	480	640
Tiempo (min)	0	1	2	3	4

Así mismo, los estudiantes pueden expresar una relación de covariación entre la altura y el tiempo transcurrido, tal como se registra en la Tabla 25

Tabla 25

Altura vs Tiempo

Altura (cm)	0	¼ $\boldsymbol{de\ 180 = 45}$	$\frac{1}{2}$ $\boldsymbol{de\ 180 = 90}$	¾ $\boldsymbol{de\ 180 = 135}$	180
Tiempo.	0	5 min	10 min	15 min	20 min

Para el inciso c) con la información suministrada, esperábamos que los estudiantes establecieran la relación de correspondencia entre la altura y el tiempo transcurrido, es decir, que se estableciera que la altura varia en una proporción de 9cm por minuto.

En el inciso d) esperamos que los estudiantes relacionaran establecieran que como la altura máxima es 180 cm, la razón de llenado por minuto corresponde a 9 cm, entonces el tiempo en llenar el tanque es $t = 180/9$.

En el inciso e) pretendimos que los estudiantes relacionaran la velocidad del llenado y la forma del recipiente. Luego, identificaran que, el cono presenta una variación en su radio y en su

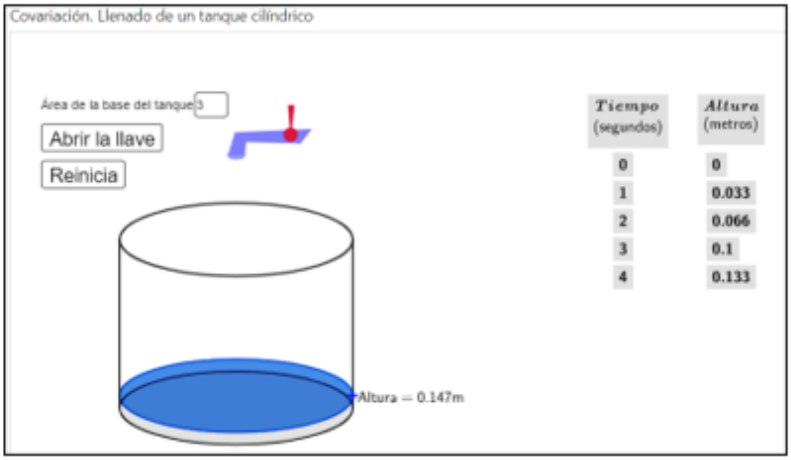
altura. La opción A que representa un paralelepípedo presenta una variación en su altura, por lo tanto, al igual que el cilindro de presentar como una variación lineal.

En el problema exploración dirigida del taller 10 (Figura 64) se pretendía que los estudiantes exploraran un applet donde se modelaba el llenado del recipiente cilíndrico, manteniendo la altura constante, y variando su base.

Figura 64

Problema exploración dirigida del taller 10.

Usa los botones para controlar la llave de agua. A medida que el tanque se llena, se registran los datos de tiempo y altura del nivel del agua.



En la simulación.

a) ¿Qué cambia? ¿Cómo cambia? **Explica tu respuesta.**
b) ¿Qué relación establecerías entre las magnitudes que cambian? **Explica tu respuesta.**
c) Específicamente fijémonos en el nivel del agua. Al llenarse el tanque ¿la velocidad del nivel del agua siempre es el mismo? **Justifica tu respuesta.**
d) Comparemos dos simulaciones en las que el tamaño del tanque es diferente. ¿Qué puede decir si comparamos las velocidades del nivel del agua de un tanque a otro? **Explica tu respuesta.**
e) Compare dos simulaciones en las que el tamaño del tanque es diferente. Representa el gráficamente el tiempo en relación con la altura. ¿Qué gráfico obtienes? ¿Cómo interpretas? **Explica tu respuesta.**

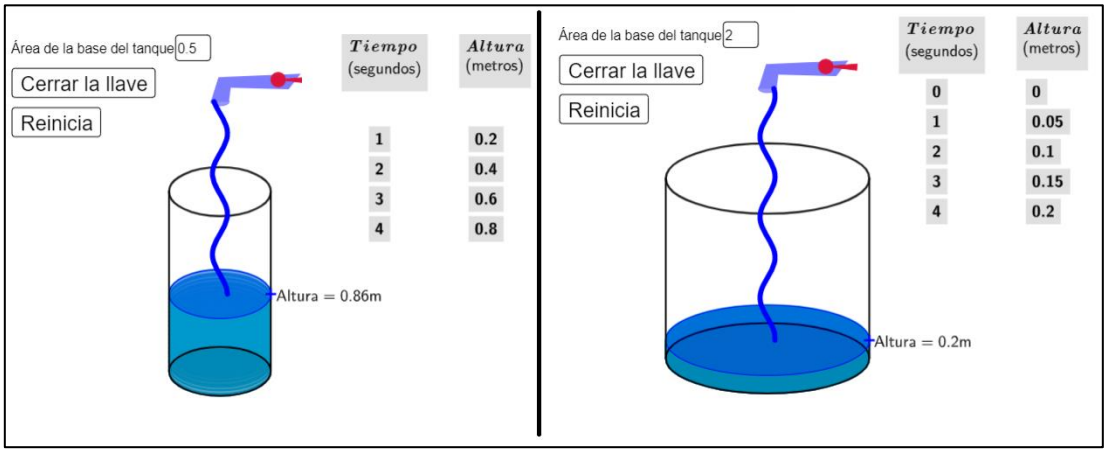
Nota. Adaptado de: https://www.geogebra.org/material/copy/id/d8b7uwnq

El applet permite visualizar un registro de los datos donde se relacionan las variables del tiempo transcurrido y la altura del cilindro. Luego, suponíamos que los estudiantes relacionarían

estas magnitudes para determinar la velocidad de llenado. En el inciso a) pedíamos que los estudiantes reconocieran las magnitudes variantes del problema. En el inciso b) que establecieran la razón de cambio entre estas magnitudes, es decir; el cociente entre la altura y el tiempo. En el inciso c) establecimos a los estudiantes la posibilidad de comparaciones entre dos simulaciones, con ello, argumentar que, si la altura permanece constante y la base del recipiente varia entonces, se emplea menos tiempo en llenarse el recipiente que tenga una menor base, porque su velocidad de llenado es mayor (ver Figura 65).

Figura 65

Comparación del llenado de los tanques.



Finalmente, en el inciso e) pueden establecer la comparación entre los modelos generados para cada simulación y establecer analizando la razón de cambio de llenado de los recipientes ¿Cuál crece más rápido? De esta manera, se promueve la habilidad para verificar y validar los modelos planteados, por ejemplo: los modelos de la Figura 65, $y_1 = 0{,}2x$ para el cilindro de base 0,5; $y_2 = 0.05x$

En el problema tarea retadora del taller 11 (Figura 66) pretendimos el applet les proporciona a los estudiantes, el tiempo que demora en llenarse el tanque con una llave (120min) y con dos llaves (60), luego les pide realizar un registro tabular referente a la cantidad de llaves

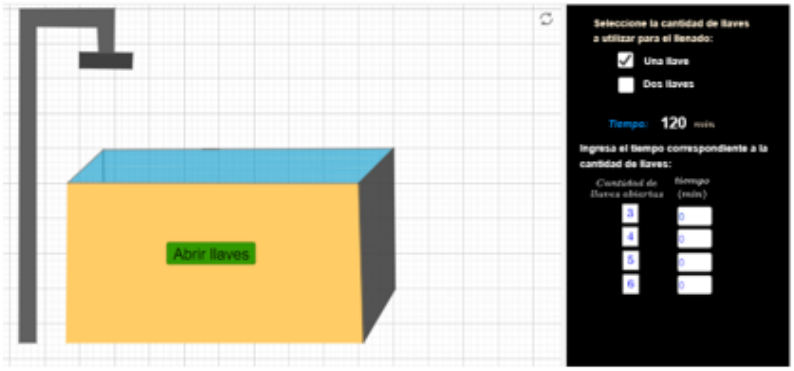
abiertas y el tiempo que demora en llenarse. Es importante, que se genere la discusión respecto el tipo de variable (discreta) por tratarse de número de llaves. El applet les proporciona a los estudiantes un botón para validar y verificar los resultados.

Figura 66

Problema tarea retadora del taller 11

Actividad Tarea retadora.

3.1 Juan indica si se tiene un tanque con una llave se demora 120 minutos en llenar, observa la simulación y responde



a) ¿Qué varia? ¿Cómo varia? Explica tu respuesta
b) Realiza una representación de la situación. ¿Cómo puedes expresar el tiempo empleado en llenar el tanque en relación con el número de llaves? ¿Es función? Explica tu respuesta.
c) Si se aumenta el número de llaves ¿Qué ocurre con el tiempo empleado para llenar el tanque? ¿Qué relación existe entre las magnitudes involucradas en esta situación? Explica tu respuesta.

3.2 Socialice y comparte tus resultados con tus compañeros y tu profesor.

Nota. Adaptado de: https://www.geogebra.org/m/BFtqasNd

En el inciso a) planteamos a los estudiantes tendrán la posibilidad identificar las magnitudes que varían, luego de explorar la simulación. En el inciso b) pretendimos que completaran la tabla de valores que relacionaba la cantidad de llaves con el tiempo empleado para llenar el recipiente, que gracias a la identificación de cómo varían, pudieran expresar algebraicamente esta relación. Así: $f(x) = \frac{120}{x}$ donde x representa el número de llaves y es una variable discreta $x > 0$. En el *inciso c*) se pretendía que los estudiantes caracterizaran esta

variación es decir indicaran que se trata de una variación inversamente proporcional (donde 120 es la constante de proporcionalidad).

4.3.12 Taller 12: Noción de límite

Propósito: Los problemas son propuestos por una investigación previa de Echeverría (2022) quien documentó luego de un proceso de reflexión e investigación con una comunidad de práctica de profesores, la pertinencia del uso de problemas contextualizados para la enseñanza de límites. Se argumenta que, desde el punto de vista didáctico emplear problemas rediseñados y adaptados a los contextos cercanos de los estudiantes puede favorecer e incentivar el interés y la solución de posibles necesidades propias de sus realidades. Así mismo, desde los NCTM (2003) se propone que se posibilite a los estudiantes el trabajo con modelos matemáticos para comprender el cambio.

Este taller se plantean problemas propios de algunos grupos priorizados en diversos contextos, en los cuales, predomina la variación y el cambio, específicamente, están vinculados a la actividad económica de la venta de leche y el costo de moto taxi al interior de la comunidad palenquera, finalmente, el decrecimiento de la población de la comunidad indígena en Colombia.

En el problema información y exploración libre del taller 12 (Figura 67), esperamos que los estudiantes se involucren con un problema del contexto de una actividad económica propia de la comunidad palenquera. El modelo matemático que representa esta situación es una función por partes compuesta por dos funciones lineales.

Para el inciso a) esperamos que los estudiantes definieran una función por partes cuyo dominio son todos los reales positivos, donde $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ representa el costo de la leche y **x** representa la cantidad de litros de leche.

$$f(x) = \begin{cases} 2000x & si \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 1900x & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Figura 67

Problema información y exploración libre del taller 12

Según el ministerio de cultura de la república de Colombia, las mujeres palenqueras se dedican a la venta de dulces en ciudades turísticas, principalmente en Cartagena, con el fin de obtener ingresos monetarios para comprar bienes y servicios que no pueden autoproducir, tales como: los servicios de comunicación, transporte, educación de sus hijos y algunos víveres.

Los hombres palenqueros se dedican a actividades agrícolas como la siembra de ñame, yuca, arroz, patilla, melón, frijol y maní. Además de actividades agropecuarias como la cría de cerdos, aves de corral y ganado vacuno lechero.

Supongamos que los palenqueros venden la leche de vaca a 2000 pesos por litro y si la compra es superior a 3 litros la venden a 1900 pesos el litro.

a) Realice una función, que modele la situación, y grafíquela.
b) Si tengo 5800 pesos ¿Cuántos litros de leche puedo comprar?
c) Si tengo entre 5000 y 6000 pesos ¿Cuántos litros de leche puedo comprar?
d) ¿A qué valor se aproxima el precio de la leche si deseo comprar una cantidad, en litros, muy cercana a 3 litros, pero menor a 3 litros? ¿Y si la cantidad que deseo comprar es muy cercana a los 3 litros, pero mayor que los 3 litros?
e) ¿Cómo crees que las respuestas anteriores le ayudarían a las personas pertenecientes a la comunidad palenquera?

Nota. Adaptado de: (Echeverría, 2022 p.81)

Para el *inciso b)* los estudiantes deberán encontrar para qué valor (es) de x para los cuales la imagen de $f(x) = 5800$ → El estudiante puede realizar procedimientos aritméticos o de estimación numérica o también, podrían ejecutar acciones de tipo analítico como las siguientes:

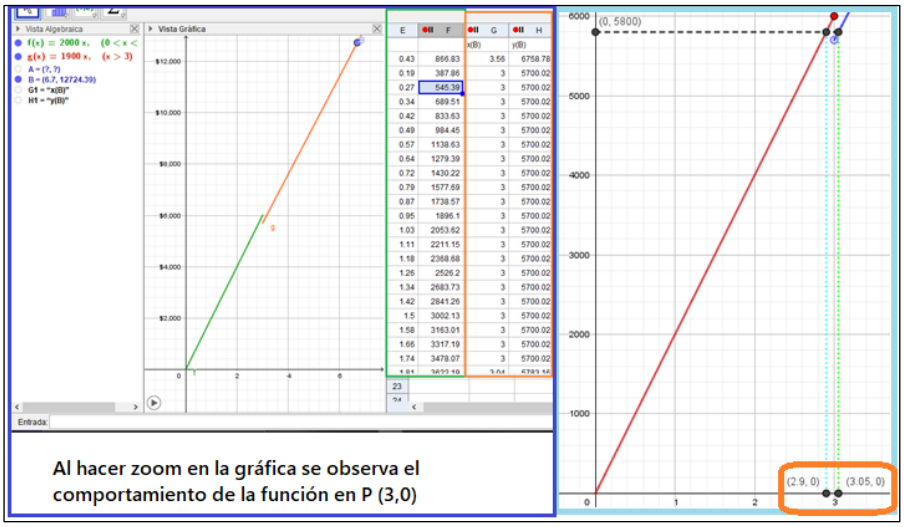
$f(x) = 2000x$ → $5800 = 2000x$ donde obtiene $x = 2.9$ litros.

Así mismo cuando $f(x) = 1900x$ → 5800=1900x donde obtiene $x = 3.05$ litros.

Al considerar el intervalo de imágenes de 5000 a 6000 pesos, la función definida presenta una discontinuidad en el punto $x = 3$. Lo cual, hace que en el *inciso c)* los estudiantes puedan considerar la opción de acercarse a este punto por derecha y por izquierda y ver la tendencia de la función definida. Por tanto, si el estudiante se aproxima a $x = 3$ por derecha, los valores a los que tiende la función es 5700 pesos, mientras que, si se aproxima a $x = 3$ por la izquierda, los valores a los que tiende la función corresponden a 6000 pesos (Ver Figura 68).

Figura 68

Situación problema económico.



El estudiante puede deberá reflexionar sobre la opción más conveniente y compartir con sus compañeros sus razonamientos. Los estudiantes podrían aprovechar la oportunidad para expresar en notación matemática la solución del problema, es decir:

$\lim_{x\to 3^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ además, si el $\lim_{x\to 3} f(x)$ Existe o no existe.

El problema exploración dirigida del taller 12 (Figura 69) esperamos que los estudiantes relacionaran las matemáticas con la situación económica de la comunidad de San Basilio de Palenque denominada “Moto-taxi”, desde donde se plantea para desplegar la noción de limite en un punto.

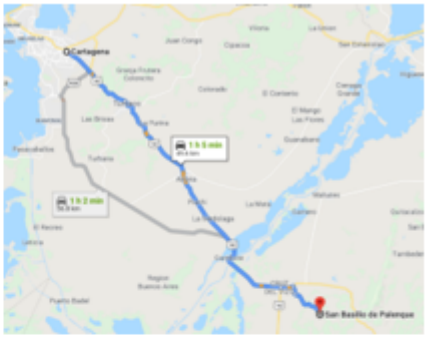
En el inciso a) esperamos que los estudiantes realicen los cálculos para determinar el costo de cada km recorrido, es decir, considerando la información del problema cada 2.000km se consume 18.000 pesos en aceite, así mismo, si compra un galón de gasolina por un costo de 9.000 pesos, para recorrer 2.000km debería comprar 20 galones los cuales tendrán un costo de 180.000, sumando el valor del aceite y los costos de la gasolina obtenemos que cada 2000 km el palenquero invierte 216.000 pesos (porque debe suministrar aceite dos veces). Al dividir esta cantidad entre

2138,2 km, cada recorrido tiene un costo de inversión equivalente a 101 pesos. Por lo cual, se deduce que debería cobrar más de 101 pesos por km recorrido para no generar pérdidas.

Figura 69

Problema exploración dirigida del taller 12

2.1 Algunos palenqueros** trabajan en "moto taxi" para obtener algunos ingresos; principalmente transportan a las personas desde San Basilio de palenque al centro de Cartagena, al igual que a sus zonas aledañas; o viceversa. Tenga en cuenta los siguientes datos:



- Cada 2000 kilómetros a las motos se les debe cambiar el aceite de motor para evitar daños en este. El aceite tiene un valor aproximado de 18000 pesos.
- Un galón de gasolina en una moto alcanza para recorrer 100 km, aproximadamente, y cuesta alrededor de 9000 pesos.
- Desde Cartagena hasta san Basilio de Palenque hay aproximadamente 49,7 kilómetros. Desde Arjona a san Basilio de palenque hay aproximadamente 27,3 kilómetros. Desde Turbaco a san Basilio de Palenque hay aproximadamente 39,6 kilómetros.

Si en una semana de trabajo el palenquero "moto taxista" realiza 10 viajes, desde san Basilio de palenque hasta Cartagena, y viceversa. 5 viajes desde san Basilio de palenque hasta Arjona, y viceversa. Y 11 viajes desde san Basilio de palenque hasta Turbaco, y viceversa.

a) ¿A partir de cuánto dinero tendrá que cobrar el palenquero, por kilómetro, para que al final de la semana logre obtener ganancias?
b) Realice una función que modele los gastos vs kilómetros recorridos. Y grafíquela.
c) Al acercarse a los 2000 kilómetros ¿Cuánto dinero aproximadamente ha gastado el palenquero?
d) Si por mes el palenquero recorre 4276.4 kilómetros, transportando a sus pasajeros ¿Cuánto dinero, por kilómetro, tendrá que cobrar el palenquero para que al final del mes logre ganar 800000 pesos?
e) Teniendo en cuenta la respuesta del inciso anterior realice una función que modele las ganancias versus los kilómetros recorridos. ¿Cuánto dinero aproximadamente habrá ganado al acercarse a los 4000 kilómetros?
f) ¿Cómo podría ayudarle a los palenqueros el hecho de saber estos resultados?

Nota. Adaptado de: (Echeverría, 2022, p.84)

En el inciso b) La función que se espera sea generada por los estudiantes es equivalente a: $f(x) = 101x$ donde x es la cantidad de km recorridos y f(x) corresponde a los gastos de inversión. El inciso c), pretende que el estudiante analice la tendencia de la función en valores próximos a los 2000 km, de esta manera se trabaja con ellos de manera implícita el concepto de limite en un punto.

$\lim_{x\to 2000^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 2000^+} f(x)$ además, si $\lim_{x\to 2000} f(x)$ Existe o no existe.

El inciso d) establece que el palenquero recorre mensualmente 4276.4 kilómetros, lo cual implica que tiene unos gastos de $f(4.276{,}4) = 101(4.276.4)$ → $f(4.276{,}4) = 431.916{,}4$ pesos. Para obtener una utilidad de 800.000 recorriendo esa cantidad de km específicamente, los estudiantes pueden dividir el valor de la utilidad entre los km que debe recorrer, de esta manera, obtiene el valor de utilidad que debería tener por cada km recorrido. Es decir: $\frac{800.000}{4.276{,}4} = 187$ pesos, luego, se determina el valor a cobrar por km, sumando los gastos (101 pesos), y la utilidad por km que se espera (287 pesos), lo cual permite fijar una tarifa mínima de 288 pesos por km recorrido.

Al inciso e) la función que modela las ganancias versus los kilómetros recorridos estaría dada por la expresión $\mathrm{g(x)} = (288 - 101)\mathrm{x} = 187x$. Los estudiantes una vez generados la función de ganancia $g(x)$, se puede establecer que al cabo de 4000 kilómetros las ganancias serian de 748000 pesos. Lo cual da Respuesta de Finalmente, el *inciso f)* les permite evaluar sus respuestas y considerar la importancia que tienen las matemáticas para que, el palenquero pueda establecer el valor en pesos de cada km para establecer unas tarifas que le proporcionen rentabilidad.

En el problema tarea retadora del taller 12 (Figura 70) teníamos el objetivo que los estudiantes identifiquen el comportamiento de la función $T(w)$ en un punto (noción de límite), y en un intervalo. Es por ello, que pueden hacer uso de la tecnología para graficar la función y analizarla. $T(w) = 200°$, luego

$$200 = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

$$0.1w^2 + 2.155w - 180 = 0$$

O emplear la fórmula cuadrática para encontrar los valores de w.

$$w = \frac{-(2.155) \pm \sqrt{2.155^2 - 4(0.1)(-180)}}{2(0.1)} \rightarrow w_1 = 54{,}548 \qquad w_2 = 32{,}998$$

Figura 70

Problema tarea retadora del taller 12

> **3.1** Se utiliza un horno de crecimiento de Cristales en la investigación para determinar cuál es la mejor manera de fabricar cristales que se usaran en las partes electrónicas de los transbordadores espaciales. Para que el crecimiento de los cristales sea correcto, la temperatura se tiene que controlar exactamente, ajustando la potencia de entrada. Suponga que la relación que se presenta con donde T es la temperatura en grados Celsius y w es la entrada de la potencia en Watts
>
> a) ¿Cuánta potencia se requiere para mantener la potencia en 200 grados Celsius? Explica tu respuesta
>
> b) si se le permitiera una variación de temperatura de hasta +_1°C, con respecto a 200 °C, ¿Qué intervalo de potencia en Watts se permite para la potencia de entrada? Justifica tu respuesta

Nota. Adaptado de: (Guarín, 2018, p. 81).

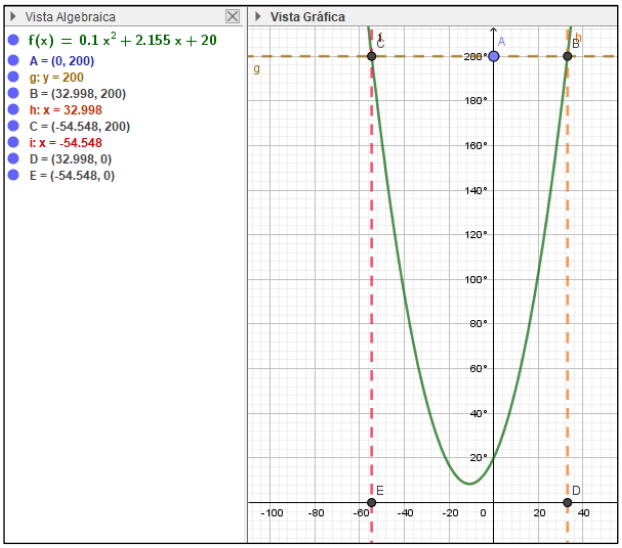
Para el inciso a) esperamos que los estudiantes discutan sobre la posibilidad de la potencia negativa, lo cual implica, considerar la relación entre el trabajo realizado y el tiempo, por tanto, el trabajo puede ser positivo o negativo dependiendo la fuerza aplicada, si va en el mismo sentido del desplazamiento del cuerpo, se produciendo una aceleración positiva o viceversa.

La interpretación de la representación gráfica (Figura 71) puede permitir a los estudiantes ver el comportamiento (creciente, decreciente) de la temperatura en ciertos intervalos en relación con la potencia en Watts.

Para el *inciso b)* se espera que los estudiantes establezcan que $199 \leq T(w) \leq 201$ considerando sólo las potencias positivas se puede establecer los intervalos de Watts entre: $[32.884, 33.112]$; asimismo para las potencias negativas $[-54.434, -54.662]$

Figura 71

Representación gráfica T(w)



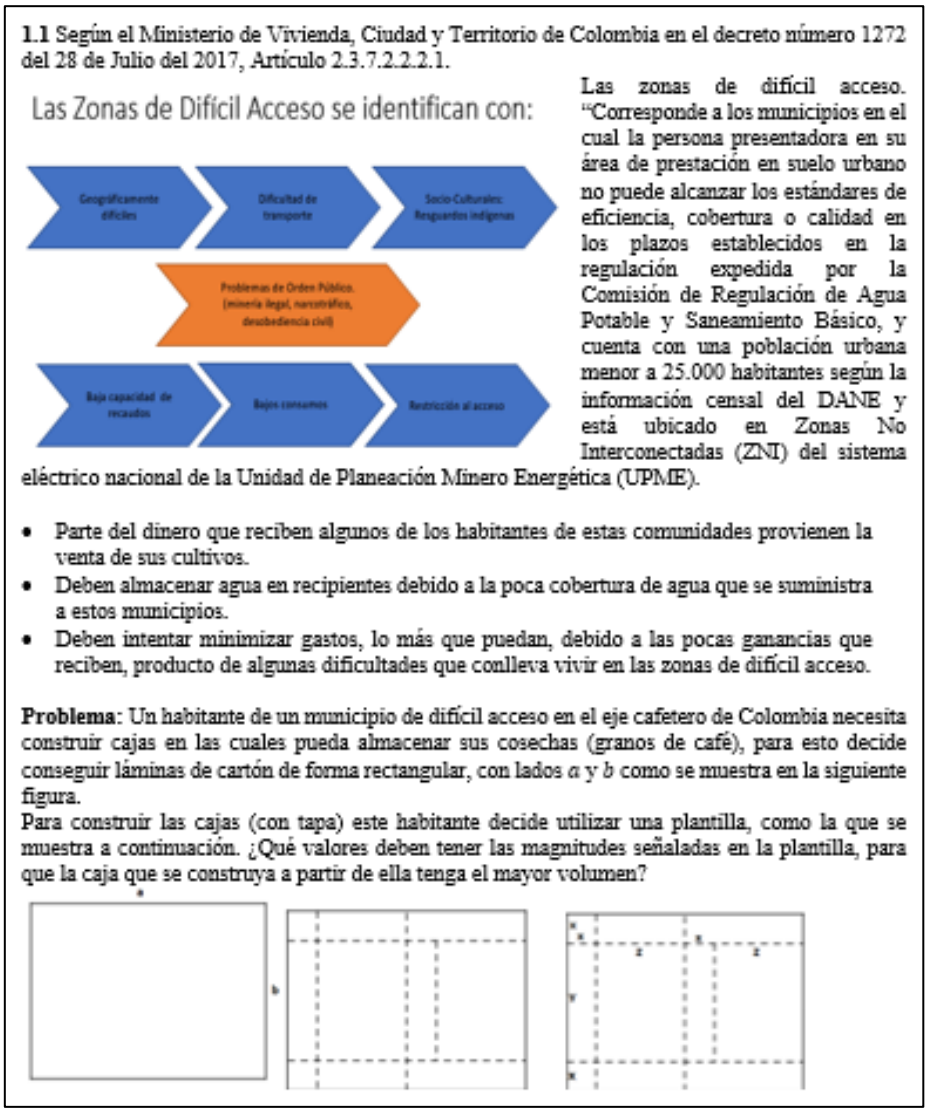
4.3.13 Taller 13: Volumen caja con tapa

Propósito: En este taller se pretende que los estudiantes analicen el comportamiento de la función del volumen de una caja con tapa, emergente de un problema contextualizado de un habitante de una zona de difícil acceso, el modelo le permitirá estimar tendencia de los datos y el volumen máximo de la caja con tapa. Este problema es planteado por Echeverría (2022) para desarrollar la noción de derivada de una función en un punto cómo la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

En el problema información y exploración libre del taller 13 (Figura 72) pretendemos en primera instancia los estudiantes identifiquen que magnitudes varían y cómo lo hacen, de esta manera, en este problema sugerimos que los estudiantes tengan la posibilidad de las magnitudes apoyados del desarrollo del paralelepípedo.

Figura 72

Problema información y exploración libre del taller 13



1.1 Según el Ministerio de Vivienda, Ciudad y Territorio de Colombia en el decreto número 1272 del 28 de Julio del 2017, Artículo 2.3.7.2.2.2.1.

Las Zonas de Difícil Acceso se identifican con:

Las zonas de difícil acceso. "Corresponde a los municipios en el cual la persona presentadora en su área de prestación en suelo urbano no puede alcanzar los estándares de eficiencia, cobertura o calidad en los plazos establecidos en la regulación expedida por la Comisión de Regulación de Agua Potable y Saneamiento Básico, y cuenta con una población urbana menor a 25.000 habitantes según la información censal del DANE y está ubicado en Zonas No Interconectadas (ZNI) del sistema eléctrico nacional de la Unidad de Planeación Minero Energética (UPME).

- Parte del dinero que reciben algunos de los habitantes de estas comunidades provienen la venta de sus cultivos.
- Deben almacenar agua en recipientes debido a la poca cobertura de agua que se suministra a estos municipios.
- Deben intentar minimizar gastos, lo más que puedan, debido a las pocas ganancias que reciben, producto de algunas dificultades que conlleva vivir en las zonas de difícil acceso.

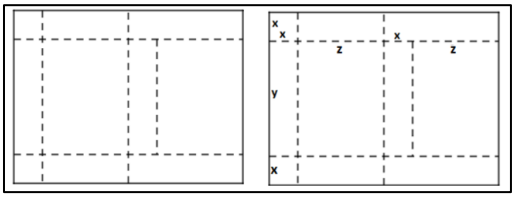
Problema: Un habitante de un municipio de difícil acceso en el eje cafetero de Colombia necesita construir cajas en las cuales pueda almacenar sus cosechas (granos de café), para esto decide conseguir láminas de cartón de forma rectangular, con lados a y b como se muestra en la siguiente figura.

Para construir las cajas (con tapa) este habitante decide utilizar una plantilla, como la que se muestra a continuación. ¿Qué valores deben tener las magnitudes señaladas en la plantilla, para que la caja que se construya a partir de ella tenga el mayor volumen?

Sugerimos que los estudiantes usen sus conocimientos geométricos y determinar, las dimensiones de la caja que, genera el máximo volumen. Los primeros acercamientos pueden ser de manera intuitiva, haciendo casos particulares e incluso, realizando una construcción manual de la caja con una hoja de papel rectangular muestra en la Figura 73. Consideramos que pueden surgir distintas respuestas debido a que no se dan las medidas la plantilla

Figura 73

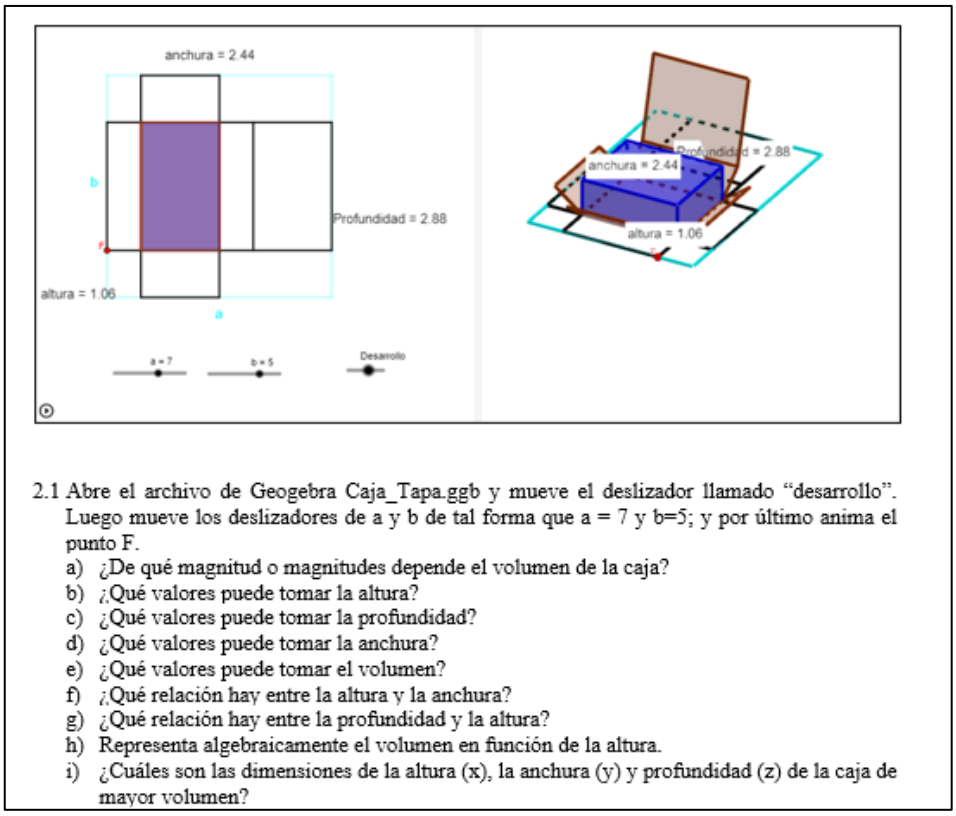
Desarrollo del paralelepípedo



En el problema exploración dirigida del taller 13 (Figura 74) presentamos a los estudiantes un applet **e**speramos que la exploración les permita identificar los valores que puede tener el ancho, el volumen, la altura y la profundidad de la caja.

Figura 74

Problema exploración dirigida del taller 13.



Nota. Adaptado de: (Echeverría, 2022, p.p.109-110)

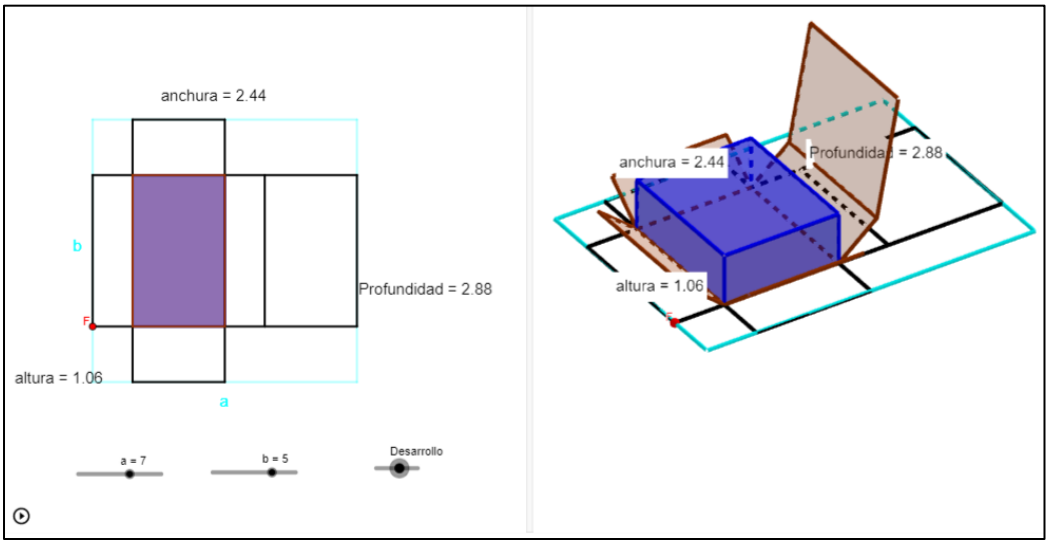
Se espera que los estudiantes puedan establecer las magnitudes que varían como lo son la altura, el ancho, la profundidad y el volumen bajo las condiciones establecidas de $a = 7$ y $b = 5$. La Figura 75 permite visualizar el desarrollo de la caja con tapa, de esta manera al animar el applet los estudiantes pueden conjeturar que las dimensiones de la caja pueden variar así: la (x) altura (0,3.5); (y) el ancho (0,2.5) y (z)la profundidad de (0,5). El volumen a $v = xyz$

Esperamos que establezca las relaciones entre la altura y la anchura: $y = 5 - 2x$

Esperamos que establezca las relaciones entre la altura y la profundidad: $z = \frac{7}{2} - x$

Figura 75

Exploración applet GeoGebra para abordar el problema.



En el inciso h) se espera que logre establecer una expresión del $v(x)$ en función de la altura. Entonces, las condiciones del problema indicaron que $a = 7$ y $b = 5$. Considerando además las siguientes relaciones:

$$7 = 2x + 2z \rightarrow \quad z = \frac{7}{2} - x$$

$$5 = 2x + y \rightarrow \quad y = 5 - 2x$$

Luego, el $v = xyz$ está dado en términos de la altura x

$v(x) = x(\frac{7}{2} - x)(\ 5 - 2x)$

$v(x) = 2x^3 - 12x^2 + \frac{35x}{2}$

Para encontrar el valor de x mínimo, igualamos la derivada a cero porque en este punto, la pendiente es igual a cero. Así: $6x^2 - 24x + 17{,}5 = 0$. Tenemos una ecuación cuadrática. El estudiante puede emplear la formula cuadrática para establecer finalmente el valor de:

Sólo se considera $x_1 = 0{,}959$ y $x_2 = 3{,}04$ aproximadamente. Como la altura puede alcanzar un valor máximo de 2.5 no se considera el valor de $x_2 = 3{,}04$

Considerando lo anterior, para el inciso i) los estudiantes establecen las medidas del volumen máximo cuando: $x = 0.959;\ z = 2.541\ \ y = 3.082\ \ v = 7.51$. Es importante destacar que estos valores pueden obtenerse de manera experimental.

En el problema tarea retadora del taller 13 (Figura 76) pretendimos que el estudiante tuviera la posibilidad de trabajar la noción de derivada desde la interpretación cómo la pendiente de la recta tangente a la función $v(x)$, es decir, la razón de cambio entre el volumen y la altura de la caja con tapa.

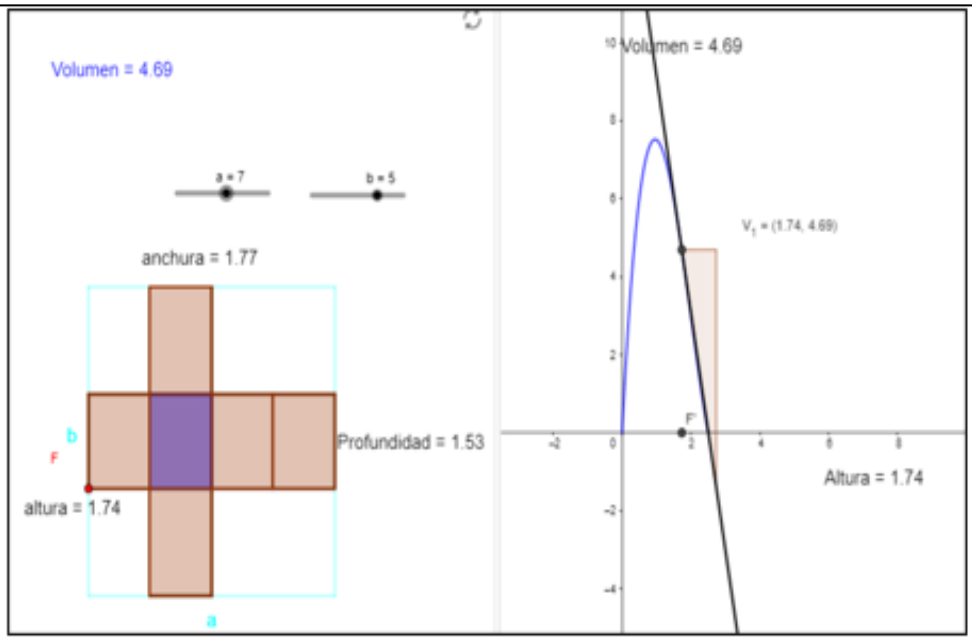
En el inciso a) se ubicaba el punto V para que identificaran que corresponde a los puntos en el plano que representan la relación entre la altura y el volumen $(x, v(x))$. Luego, en el inciso b) pretendimos escribiera en la barra de entrada del software la representación algebraica (del problema anterior) $v(x) = x(\frac{7}{2} - x)(\ 5 - 2x)$. En el *inciso c)* encontrar empleando el software la recta tangente a la función $v(x)$ que pasa por V. Allí, esperamos que recordaran la interpretación de la pendiente de una recta como la razón de cambio $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (volumen-altura).

El inciso d) suponemos que los estudiantes identificarán el comportamiento de la pendiente de la recta tangente y darán argumentos para explicar, qué sucede con el volumen de la caja cuando

la pendiente de la recta tangente es negativa, qué sucede la pendiente de la recta tangente se acerca al punto máximo de la función, etc.

Figura 76

Problema tarea retadora del taller 13



3.1 Abre el archivo Función Volumen Caja.ggb. Anima el punto F.

a) ¿Qué representa el punto V_1?
b) Escribe en la barra de entrada la fórmula que representa el volumen en función de la altura.
c) Traza la recta tangente por el punto V_1 a la gráfica que representa el volumen en función de la altura. Halla la pendiente de esta recta. ¿Qué representa la pendiente?
d) ¿Cómo es el comportamiento de la recta tangente y de su pendiente antes y después del valor de la altura que genera el mayor volumen?
e) Registra en la Hoja de Cálculo 30 valores cercanos a la pendiente por la derecha y por la izquierda del valor de la altura que genera el mayor volumen.
f) ¿A qué valor tiende la pendiente de la recta tangente cuando aproximas al valor de la altura que genera el mayor volumen?
g) ¿Cuál es el volumen máximo?
h) El saber el volumen máximo ¿En qué podría ayudar al habitante del municipio de difícil acceso?

Nota. Adaptado de: (Echeverría 2022, p. 111)

Con el inciso e) pretendimos que los estudiantes encontraran 30 valores numéricos de la pendiente de la recta tangente cuando se acerca al punto máximo, tanto por valores próximos por

izquierda y por derecha. A fin de que los estudiantes puedan establecer que la m tiende a cero. Finalmente, se indaga sobre la utilidad del modelo para la comunidad. En la discusión de resultados esperamos compartir los diversos acercamientos emergentes en al desarrollar este problema.

4.3.14 Taller 14 Modelos matemáticos

El propósito de este taller trabajar con las nociones de maximizar y minimizar magnitudes, lo cual, se convierte en una aplicación de las derivadas en cálculo diferencial. Para el tratamiento de estas situaciones planteamos tal como lo menciona los NCTM (2003) el uso de herramientas tecnológicas para el análisis de datos, de esta manera determinar la correlación de las variables para poder predecir y hacer inferencias relacionadas con el problema abordado. Se suele asociar a este tipo de tratamiento con el pensamiento aleatorio y probabilístico, sin embargo, tal como lo menciona el MEN (1998) el pensamiento variacional tiene estrecha relación con los demás pensamientos matemáticos dado que, su objetivo es dar tratamiento a problemas que involucran la variación y el cambio.

En el problema información y exploración del taller 14 (Figura 77) tiene como propósito que los estudiantes reconozcan las magnitudes que varían y cómo varían. Por ello, pueden establecer relaciones algebraicas entre las magnitudes, los lados de los triángulos rectángulos y sus respectivas hipotenusas.

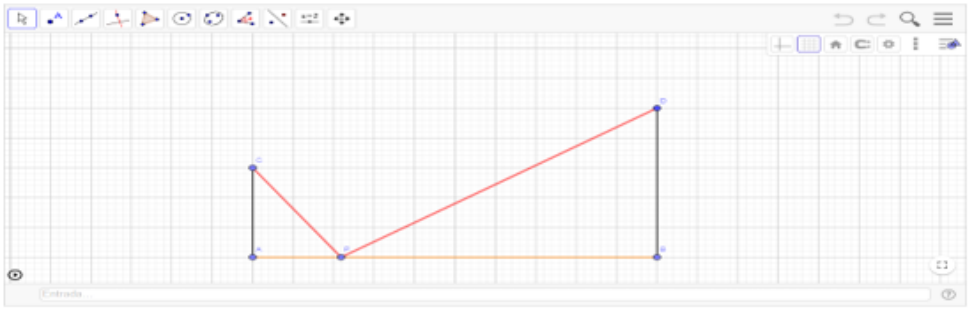
Presentamos un Applet para que los estudiantes tengan la oportunidad de manipularlo y realizar el registro de algunas de la longitud del cable, en la hoja de cálculo del programa. La simulación en GeoGebra (Figura 78) con ella, los estudiantes pueden emplear los conocimientos del manejo de la hoja de cálculo registrar la variación en los valores de x, que corresponde a la magnitud del segmento AP, luego, se relaciona la suma de la longitud del cable, es decir, la

magnitud del segmento CP+PD, de esta manera se establece que $f(x) \in [0,10]$ y el rango (longitud del cable) (12,8, 15,44)

Figura 77

Problema información y exploración libre del taller 14

1.1 Una compañía de líneas de transmisión eléctrica desea sujetar dos postes, de diferente altura, con un cable de acero que va de la parte superior de cada uno de ellos a un punto en el piso que está en la recta determinada por sus bases. La altura del poste AC es 3 y la altura del poste BD es 5. Sea P es el punto de sujeción en el piso (entre A y B).



Anima el applet. Luego responde
a) ¿Qué cambia si se mueve el punto P? ¿Por qué crees que cambia? ¿Cómo cambia?
b) Escribe una expresión para determinar las magnitudes variantes del problema. Justifica tu respuesta.
Abre la hoja de cálculo, analiza los datos que requieres para la solución de este problema. Luego indica.
c) ¿Cuál es el punto de sujeción (P) en el piso, entre A y B, con el que se utiliza la menor cantidad de cable de acero? Justifique su respuesta
d) Elabora una representación gráfica de algunos valores. ¿Existe algún punto de sujeción (P) en el piso, con el que se utiliza una mayor cantidad de acero? Justifica tu respuesta.

Nota. Adaptado de: (Santos-Trigo, 2014, p.170).

Es por ello, para encontrar la magnitud de CP (Hipotenusa1) aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene: $CP = \sqrt{3^2 + AP^2}$

Para encontrar la magnitud de PD (Hipotenusa 2). Entonces, $PD = \sqrt{5^2 + (10 - AP)^2}$

Luego llamemos $AP = x$. $l(x)$ es la suma de las longitudes del cable. Se espera que los estudiantes establezcan la función así: $l(x) = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{125 - 20x + x^2}$. Los estudiantes pueden derivar $l(x)$ para posteriormente encontrar el valor x, para que la longitud del cable sea la mínima posible

$$l'(x) = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + \frac{x-10}{\sqrt{125-20x+x^2}}$$

$$l'(x) = \frac{x\sqrt{125-20x+x^2} + (x-10)\sqrt{9+x^2}}{(\sqrt{9+x^2})(\sqrt{125-20x+x^2})}$$

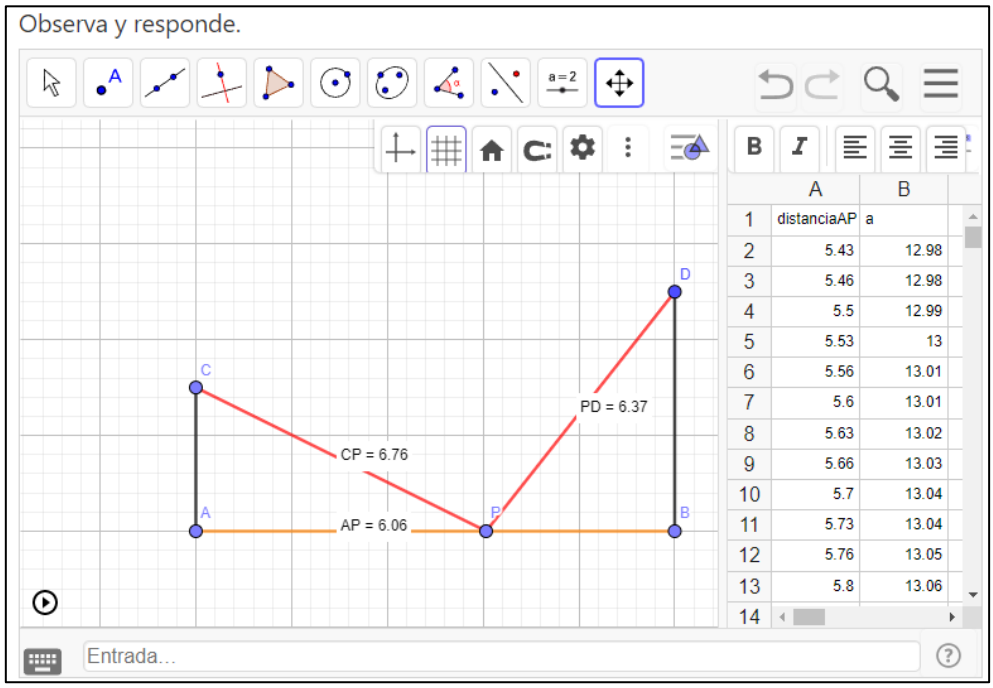
$$0 = \frac{x\sqrt{125-20x+x^2} + (x-10)\sqrt{9+x^2}}{(\sqrt{9+x^2})(\sqrt{125-20x+x^2})}$$

$$x^2[25+(10-x^2)] = (10-x)^2(x^2+9)$$

$$25x^2 = 9(10-x)^2 \rightarrow 16x^2 + 180x - 900 = 0$$

Figura 78

Representación simulación de la situación GeoGebra.

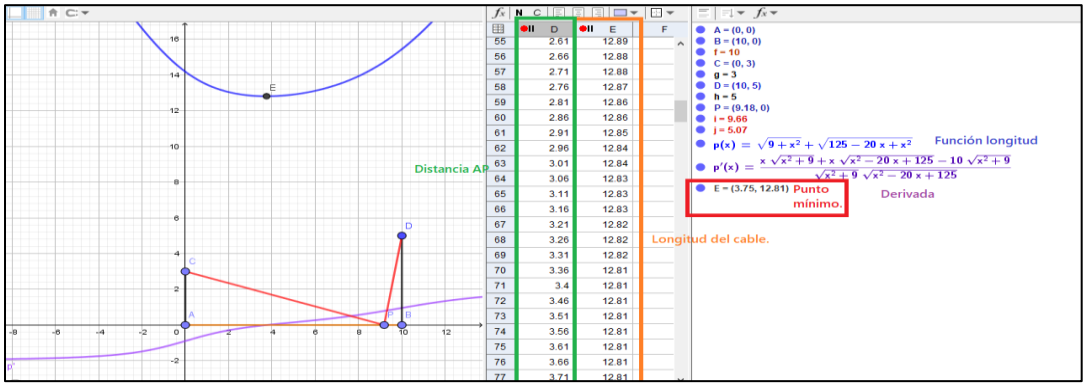


	A	B
1	distanciaAP	a
2	5.43	12.98
3	5.46	12.98
4	5.5	12.99
5	5.53	13
6	5.56	13.01
7	5.6	13.01
8	5.63	13.02
9	5.66	13.03
10	5.7	13.04
11	5.73	13.04
12	5.76	13.05
13	5.8	13.06
14		

Sin embargo, para encontrar el valor de x, es posible empleando la ecuación cuadrática. Algunos estudiantes pueden hacer uso de las herramientas del software GeoGebra, de esta manera, se puede encontrar los puntos críticos de la función $l(x)$ cómo se muestra en la Figura 79, el cual corresponde al punto E (3.75,12.81)

Figura 79

Representación problema longitud del cable



En el Problema exploración dirigida del taller 14 Figura 80 los estudiantes se enfrentan a una situación en la cual, deben representar utilizando una regresión de dos variables, la relación que existe, entre el aumento del salario durante algunos años en Colombia

Figura 80

Problema exploración dirigida del taller 14

2.1 Gastos en salud Los gastos en salud en Estados Unidos para los años 1970-2001 se dan en la tabla siguiente. Cree el diagrama de dispersión y responda:

Año	Gastos en salud en millones de dólares
1980	251.1
1985	434.5
1987	506.2
1990	696.6
1992	820.3
1994	937.2
1996	1039.4
1998	1150.0
2000	1310.0
2001	1424.5

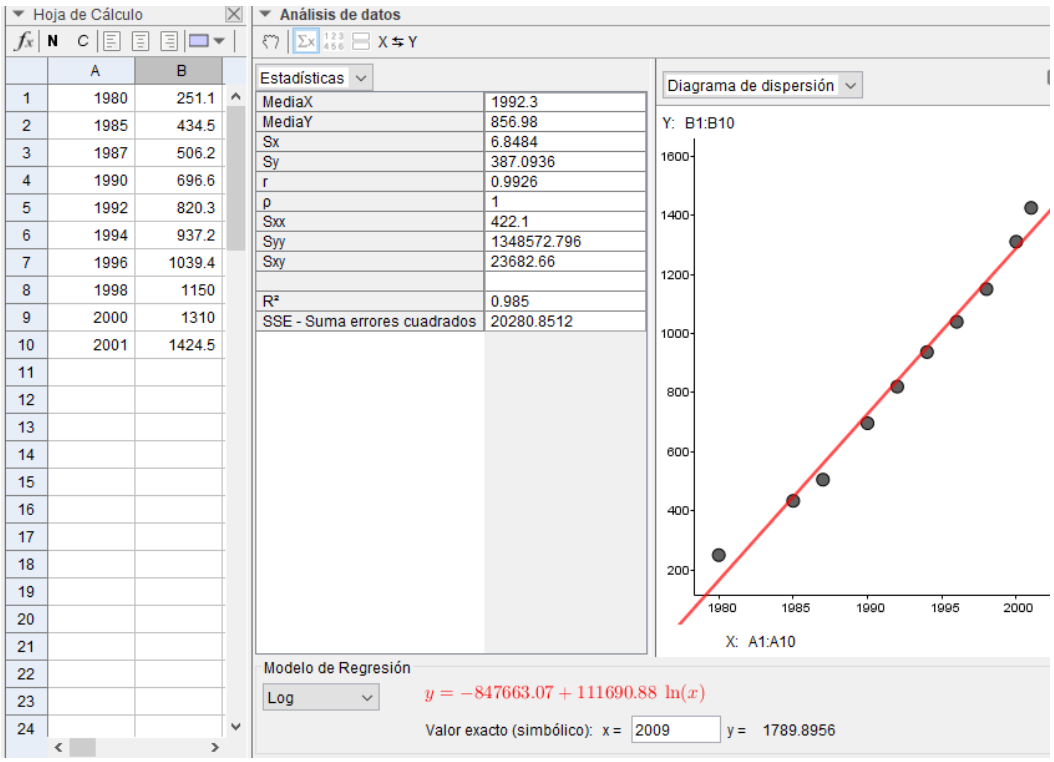
(a) ¿Qué modelo matemático puede predecir el comportamiento de los datos?
(b) Encuentre una recta de regresión para los datos de la parte (a)
(c) Use su modelo para predecir los gastos totales en salud en 2009.

Nota. Adaptado de (Stewart et al., 2012, p.363)

Se define una función a trozos, en la que se presenta, cada cierta cantidad de años, un modelo, que corresponde al ajuste que hace el estudiante de los datos suministrados en la información del problema. En el *inciso a)* esperamos que los estudiantes construyan una representación tabular con los datos del problema y luego, realicen el análisis de regresión de dos variables (herramienta de GeoGebra) de tal manera que puedan establecer algunos modelos matemáticos que se adapten a las condiciones del problema. Es decir, al crecimiento de los gastos de salud en millones de dólares tras el trascurrir de los años. El modelo que esperamos sea validado corresponde a el que se presenta en la Figura 81.

Figura 81

Modelo matemático situación de salud



Seguidamente el inciso b) y el inciso c) los planteamos para que los estudiantes validen el modelo matemático considerando el coeficiente de regresión. Elegido el modelo log, los

estudiantes pueden predecir para el año 2009 en los gastos de la salud en millones de dólares, correspondientes a 1789.8956.

En el problema tarea retadora del taller 14 (Figura 82) pretendimos que los estudiantes dieran tratamiento a un problema que aqueja a la población indígena colombiana y tiene que ver con el porcentaje de decrecimiento de la población. Las causas de esta problemática son diversas y es una realidad propia de nuestro país.

Figura 82

Problema tarea retadora del taller 14

3. 1 Según datos suministrados por el DANE en 2005, de los 42'090,502 colombianos, 1'378.884 pertenecen a distintas comunidades indígenas, con presencia en 27 departamentos del país. La organización Nacional Indígena de Colombia (ONIC) asevera que cientos de pueblos indígenas están en riesgo de desaparecer, no sólo por el conflicto armado en el país, sino, además, porque sus habitantes mueren de hambre, enfermedades y la indiferencia. Se estima que el promedio de decrecimiento de la población es del 1.2% anual aproximadamente.

a) ¿Cuántos habitantes de las comunidades indígenas existirán finalizando el presente año? ¿En 2021? ¿En 2050? Explica tus respuestas.
b) Halla la función que representa la interdependencia entre el año y la población indígena. Justifica tu respuesta.

Nota. Adaptado de: (Echeverría, 2022, p.78)

Para le *inciso a)* desde acercamientos analíticos, los estudiantes pueden definir por recursión la función que modela el problema, así pueden establecer a $p_0 = 1.378.884$ como la población colombiana perteneciente a distintas comunidades indígenas (2005, según DANE). Para el año 2006, decrece un 1,2% (0,012 del año 2005), entonces para el año 2006, la población (p_1) corresponde a:

$p_1 = p_0 - p_0(0{,}012)$

$p_1 = p_0(1 - (0{,}012))$

Para el año 2007 la población (p_2), se obtiene al calcular el decrecimiento de 0.012 de la población del año 2006 (p_1)

$p_2 = p_1 - p_1(0{,}012)$ como $p_1 = p_0(1-(0{,}012))$

$p_2 = p_0\big(1-(0{,}012)\big) - p_0(1-(0{,}012))(0{,}012)$

$p_2 = p_0\big(1-(0{,}012)\big)(1-(0{,}012))$

$p_2 = p_0(1-(0{,}012))^2$

Para el año 2008, la población (p_3), se obtiene al calcular el decrecimiento de 0.012 de la población del año 2007 (p_2).

$p_3 = p_2 - p_2(0{,}012)$ como $p_2 = p_0(1-(0{,}012))^2$

$p_3 = (p_0(1-(0{,}012))^2 - (p_0\big(1-(0{,}012)\big)^2)(0{,}012))$

$p_3 = \Big(p_0\big(1-(0{,}012)\big)^2\big(1-(0{,}012)\big)\Big)$

$p_3 = p_0\big(1-(0{,}012)\big)^3$

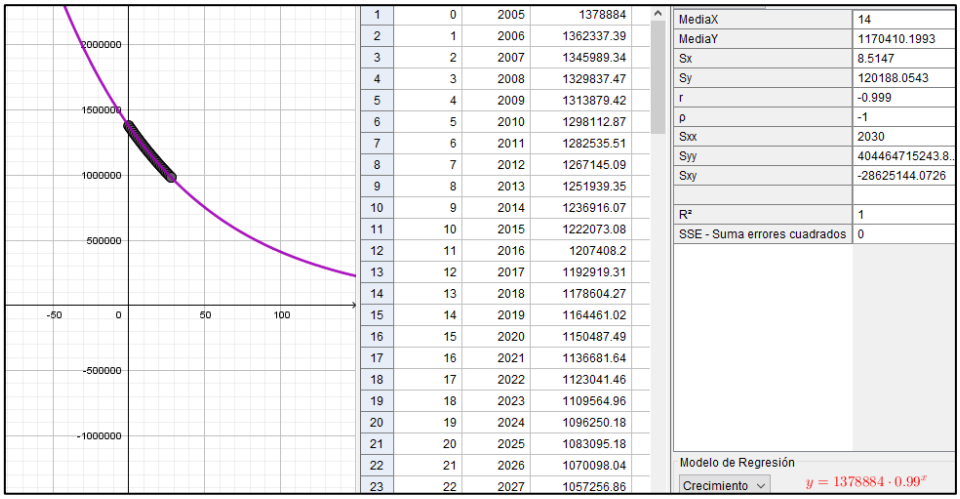
Los estudiantes al observar el patrón de regularidad pueden establecer la expresión general para n cantidad de años después del 2005 así: $p_n = p_0\big(1-(0{,}012)\big)^n$.

Esperamos que algunos estudiantes empleen las tecnologías digitales Excel o GeoGebra, de esta manera, puedan realizar un análisis de regresión de dos variables y elegir el modelo que más se adapte a las condiciones de variación y cambio presente en esta situación (ver Figura 83).

Esperamos que promueva la discusión alrededor del uso de las cifras decimales y se le dé un sentido acorde al contexto del problema (valores enteros positivos), para continuar con el análisis de la función se pueden generar discusiones con los estudiantes referentes a la tendencia de la función para ciertos valores (sin tener en cuenta el índice de natalidad).

Figura 83

Decrecimiento de la población



1	0	2005	1378884
2	1	2006	1362337.39
3	2	2007	1345989.34
4	3	2008	1329837.47
5	4	2009	1313879.42
6	5	2010	1298112.87
7	6	2011	1282535.51
8	7	2012	1267145.09
9	8	2013	1251939.35
10	9	2014	1236916.07
11	10	2015	1222073.08
12	11	2016	1207408.2
13	12	2017	1192919.31
14	13	2018	1178604.27
15	14	2019	1164461.02
16	15	2020	1150487.49
17	16	2021	1136681.64
18	17	2022	1123041.46
19	18	2023	1109564.96
20	19	2024	1096250.18
21	20	2025	1083095.18
22	21	2026	1070098.04
23	22	2027	1057256.86

Una vez definido el modelo matemático del problema los estudiantes pueden reemplazar en la representación algebraica y registrar la cantidad de habitantes en una tabla, por ejemplo: (Tabla 26) en *el inciso b)* La función que representa la interdependencia corresponde a:

$$p_n = p_0\big(1-(0{,}012)\big)^n, \text{ donde } \; p_0 = 1'378.884 \rightarrow \; p_n = 1'378.884\big(1-(0{,}012)\big)^n$$

Tabla 26 *Casos particulares decrecimiento de la población*

Casos particulares decrecimiento de la población

Año	Años transcurridos referencia 2005	Cantidad habitantes
2020	15	1’150.488
2021	16	1’136.682
2050	45	800.922

4.3.15 Taller 15 Reconociendo la variación.

Se presentan cuatro problemas en las que se indaga a los estudiantes sobre el cambio y se pide justifiquen sus respuestas. Estos problemas tienen como objetivo servir valorar cualitativamente las respuestas de los estudiantes y generar un balance cuantitativo respecto a las nociones de cambio y variación que los estudiantes perciben.

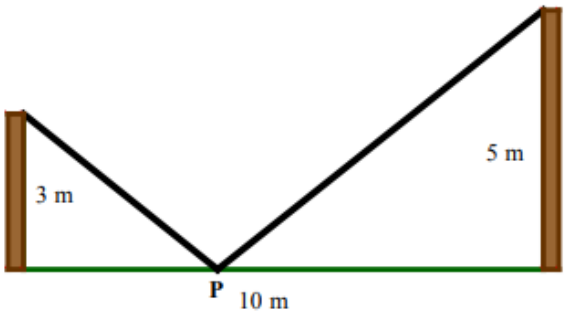
Figura 84

Problema información y exploración libre del taller 15

De los cables

La distancia entre dos postes que se emplean en las instalaciones telefónicas es de 10 metros, como se muestra en la figura

La longitud de los postes es de tres y de cinco metros. A manera de soporte, un cable que une la parte superior de ambos se sujetará a un punto P en tierra, localizado en el segmento que une los dos postes.



a) ¿La longitud total del cable es variable?

b) ¿La longitud total es constante? **Justifica tu respuesta.**

Nota. Adaptado de: (Benítez & Bueno, 2009, p.14)

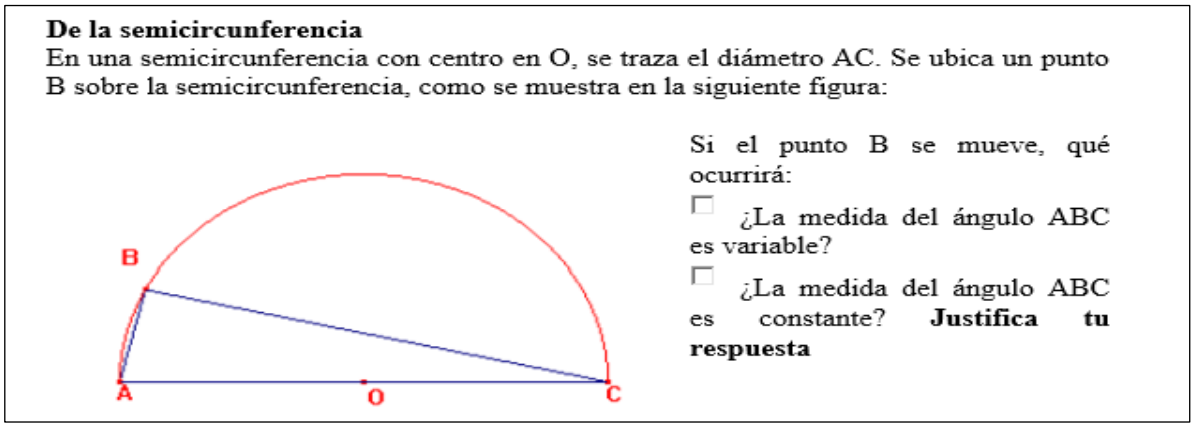
Esperamos que los estudiantes indiquen que la longitud del cable es variable, argumentando que esta varía dependiendo de la posición del punto P (ver Figura 84).

La justificación teórica que puede emerger en este contexto es emplear argumentos geométricos como el teorema de Pitágoras, debido a que se forma dos triángulos rectángulos, en los que la suma de la magnitud de sus hipotenusas corresponde a la longitud del cable (el análisis de este problema se establece en el apartado 4.3.14 problema información y exploración libre del taller 14.

En el problema pretendemos que los estudiantes manifiesten que la medida del ángulo es constante (Segundo Teorema de Tales, Figura 85) Esto porque se tiene triángulo formado por el diámetro de una circunferencia y dos líneas secantes a la misma, formando de esta manera el Δ ABC, entonces se forma un ángulo recto ($\measuredangle$ABC).

Figura 85

Problema información y exploración libre del taller 15

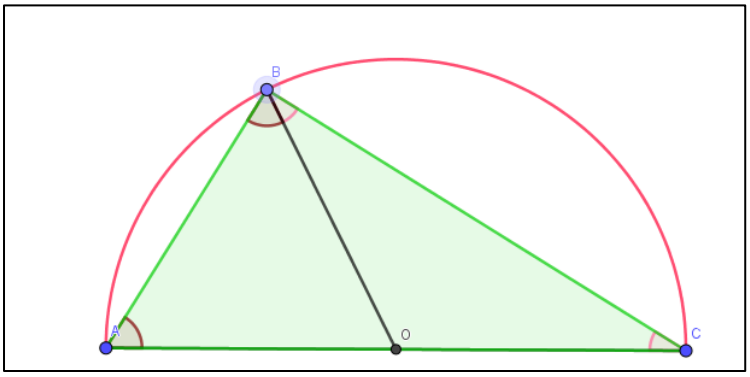


Nota. Adaptado de: (Benítez & Bueno, 2009, p.15)

La demostración corresponde: Se traza $\overline{B0}$, Los segmentos $\overline{A0}$, $\overline{OB}y\ \overline{OC}$ Son iguales por ser radios entonces, los triángulos isósceles $\Delta\, AOB$ y el ΔBOC por tener dos lados iguales. Tal como se muestra en Figura 86.

Figura 86

Demostración segundo Teorema de Tales



Así los ángulos ∢BAO=∢ABO porque son ángulos de la base del $\Delta\, AOB$ isósceles, También se tiene que, ∢OBC=∢OCB porque son los ángulos de la base del ΔBOC isósceles.

Por otra parte, los ángulos internos de cualquier triángulo suman 180°, por ello, en $\Delta\, ABC$ se cumple que, ∢BAC+∢ABC+∢BCA=180°:

Entonces,

$$\measuredangle BAC+\measuredangle ABO+\measuredangle OBC+\measuredangle BCA=180°$$

$$\measuredangle ABO+\measuredangle OBC+\measuredangle ABO+\measuredangle OBC=180°$$

$$2(\measuredangle ABO+\measuredangle OBC) =180°$$

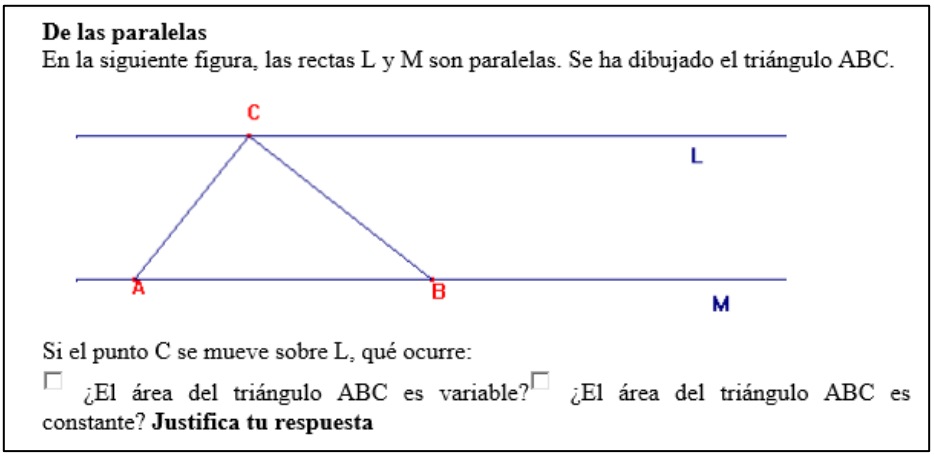
$\measuredangle ABO+\measuredangle OBC=180/2 \rightarrow \measuredangle ABO+\measuredangle OBC= 90°$.

De esta manera, se obtiene que, $\measuredangle ABC= \measuredangle ABO+\measuredangle OBC= 90°$.

Pretendimos que el estudiante exprese el área de $\Delta\ ABC$. Por lo anterior, el estudiante puede acudir a la definición del área de un triángulo ($A = \frac{bh}{2}$) e indicar cómo será su comportamiento a partir de las magnitudes de las cuales depende (Figura 87).

Figura 87

Problema información y exploración libre del taller 15



Nota. Adaptado de: (Benítez & Bueno, 2009, p.15)

Es decir, una de sus bases (en particular ($\overline{AB}$)) y una de sus alturas (en particular, la altura Δ ABC respecto a $\overline{AB}$), la cual permanece invariante por estar entre rectas paralelas L y M. Esperamos que concluyan que a partir el área de Δ ABC depende de las magnitudes mencionadas y estás permanecen invariantes.

El estudiante puede inferir que el valor del anuncio es variable, porque área fija, pero, el valor de este está sujeto a las dimensiones y estas, cambian dependiendo de la orientación vertical u horizontal (ver Figura 88)

Figura 88

Problema 4 información y exploración libre del taller 15

Del anuncio
Un periódico cobra los anuncios de la siguiente manera:
• Cobra 7 pesos por cada centímetro lineal en forma horizontal
• Cobra 8 pesos por cada centímetro lineal en forma vertical

Un empresario quiere mandar a hacer un anuncio de área A (fija)
a) ¿El costo del anuncio es variable?
b) ¿El costo del anuncio es constante? **Justifica tu respuesta**

Nota. Adaptado de: (Benítez & Bueno, 2009, p.16)

Los estudiantes pueden identificar los datos, es decir, A (área fija); x: medida del anuncio en forma horizontal; y: medida del anunció en forma vertical. Costo por cada centímetro lineal en forma tanto horizontal como vertical. Luego, puede emplear casos particulares para deducir que un anuncio puede tener un área fija, pero, precio variable. Por ejemplo:

$A = 20cm^2$

Anuncio 1: $x = 5cm \quad y = 4cm \quad C(x,y) = 7x + 8y \rightarrow 7(5) + 8(4) = 67$

Anuncio 2: $x = 4cm \quad y = 5cm \quad C(x,y) = 7x + 8y \rightarrow 7(4) + 8(5) = 68$

4.4 Fase IV implementación de los talleres.

La primera implementación del curso se desarrolló en el periodo 2021-I, bajo la modalidad de presencialidad remota, la cual estableció encuentros sincrónicos entre la docente (investigadora principal de la tesis) y los estudiantes. Se empleó la plataforma Zoom y el Aula Virtual de GeoGebra AVG, modalidad grupos de GeoGebra Online, en el horario 2 pm a 6 pm desde lunes

hasta el sábado. Las fechas en las que se realizó el curso fueron las siguientes: semana 1 (8 al 13 de marzo); Semana 2 (15 al 20 de marzo); y finalizó el día 23 de marzo. Se pudieron realizar 13 encuentros de los 15 que se habían planeado.

La implementación fue realizada con un grupo de 23 estudiantes (9 mujeres y 14 hombres), el 70% de ellos ingresó a programas de ciencias e ingenierías. El número de estudiantes en cada tipo de admisión se relacionan en la Tabla 27.

Los estudiantes eran de procedencia de departamentos como la Guajira, Arauca, Casanare, Atlántico, Norte de Santander, Meta, Cundinamarca, Cesar y Santander, cuyo rango de edad estaba entre los 16 y 20 años, además, son egresados del bachillerato de diversos colegios público del país en los años 2018 (14,3%), 2019 (28,6%) y el 2020 (57,1%).

Tabla 27

Tipo de admisión primera implementación.

Admisión Especial	Cantidad
Comunidad O Resguardo Indígena.	6
Población Negra, Afrocolombiana, Palenquera Y Raizal	5
Víctimas Del Conflicto Armado En Colombia	4
Municipios De Difícil Acceso O Problemas De Orden Publico	8

El seguimiento de las actividades implementadas se realizó a partir de los registros guardados en el AVG y de algunas fotografías que ellos enviaron al correo o a la página web de sus procedimientos y trabajo personal. Además, se grabaron todas las sesiones, quedando establecidos éstos como los instrumentos de recolección de datos para el posterior análisis.

4.5 Fase V: Evaluación de la primera implementación.

En esta fase se analizó el proceso seguido por los estudiantes, la viabilidad de proceso metodológico, la calidad y claridad de los problemas, los tiempos requeridos para el desarrollo de

cada taller y orden de la secuencia de talleres. A partir de los datos de esta primera implementación se busca enriquecer y mejorar el diseño del curso y los talleres.

El análisis de los procesos realizados por los estudiantes en cada taller nos permitió vislumbrar unas primeras categorías de análisis que nos dieran cuenta de las habilidades necesarias para resolver problemas, ellas son: a) comprender el problema, por ello, b) plantear y ejecutar diferentes caminos de solución; y c) validar y verificar los caminos de solución. Adicionalmente, se identificó como una habilidad transversal el uso de herramientas tecnológicas para desarrollar estrategias y la validación de las soluciones encontradas bien sea de manera individual o grupal.

Estas habilidades emergieron de esta fase y por ello se incluyó la explicación y definición estas en el en el Capítulo Marco conceptual.

4.6 Fase VI Rediseño

Una vez analizado el diseño de las actividades y su implementación consideramos que se deben mantener los siguientes aspectos que se plantearon para el diseño inicial del curso Fase II: Planeación del curso. Es decir, la duración de 60 horas, modalidad de presencialidad remota, estructura curricular y la estructura metodológica de los talleres.

El rediseño del curso es el primero de los resultados de nuestro objetivo de investigación, por ello, dedicaremos un capítulo (5 rediseño) para reportar los ajustes que se hicieron a cada taller, y el planteamiento de las habilidades para la resolución de problemas que proponemos en cada una de las actividades de cada taller. Consolidando en el Apéndice A el diseño final.

Los ajustes surgen del análisis de la primera implementación y se relaciona directamente con el planteamiento de cada una de las actividades con sus respectivas preguntas con el fin, de que esas actividades queden más claras para los estudiantes y realmente estén orientadas a

favorecer el desarrollo de las habilidades de la resolución de problemas que hemos definido como categorías a priori para el análisis de resultados de la investigación.

4.7 Fase VII Segunda implementación.

La segunda implementación se desarrolló de manera sincrónica, la docente-investigadora, empleando el Aula Virtual de GeoGebra (AVG). Las sesiones de clase se llevaron a cabo en el horario de 8: 00 am- 12: 00 pm, en las fechas

Tabla 28

Fechas encuentros sincrónicos.

Semana 1:	20-25 septiembre	6 sesiones
Semana 2:	27 sept- 2 de octubre	6 sesiones
Sábados	9, 16 y 30 de octubre	3 sesiones
Total: sesiones de clase.		15 sesiones

En la segunda implementación se contó con la participación de 14 estudiantes, provenientes de: Saravena, Curumani-cesar, Chiquinquirá, Pelaya – Cesar, Puerres-Nariño, El Retorno Guaviare, San Pablo Sur de Bolívar, Mercaderes-Cauca, Agustín Codazzi -Cesar, Valledupar, Cimitarra-Santander. El 42,86% de los estudiantes asistieron a todas las sesiones (15), el 35,71% asistieron a 14 sesiones, el 14,28% asistieron a 13 sesiones y el porcentaje restante a menos de trece sesiones.

Las edades de los estudiantes oscilaron entre 17 y 20 años y todos culminaron sus estudios en colegios públicos de los distintos lugares de procedencia en los años 2018-2020. El 57,14% de los estudiantes participantes ingresaron a carreras de ingenierías, el 35,71% a las facultades de ciencias y un estudiante de la facultad de salud.

En la Tabla 29 se muestra la relación de tipo admisión de los estudiantes que participaron en la segunda implementación del curso de refuerzo inicial.

Tabla 29

Tipo de admisión para la segunda implementación.

Admisión Especial	**Cantidad**
Comunidad o resguardo indígena.	1
Población negra, afrocolombiana, palenquera y raizal	3
Víctimas del conflicto armado en Colombia	4
Municipios de difícil acceso o problemas de orden público	6

Al finalizar el curso, se hizo un cuestionario (Apéndice C) el cual, diligenciaron 10 de 14 estudiantes y tenía la intención de valorar cualitativamente la experiencia de los estudiantes al realizar el curso de refuerzo inicial. El 80% considera que su formación matemática del colegio fue regular debido a que, en algunas oportunidades no se profundizaba o se omitían los temas; se realizaban prácticas rutinarias de ejercitación. Ellos comentaron que, en el último año, debido a la pandemia los docentes no explicaban, tan sólo enviaban guías de trabajo que se resolvían en ocasiones con gran esfuerzo y dificultad, por ello, tuvieron dificultades en la prueba de caracterización de matemáticas de la UIS pues no comprendían las preguntas. El 70% de los estudiantes consideran deficiente su formación para la exigencia de la universidad.

Además, por unanimidad los estudiantes destacaron que los cursos de matemática universitarias son pertinentes y necesarios, destacando que, son una oportunidad para reforzar, recordar, adquirir y afianzar conocimientos, habilidades y destrezas para posiblemente permanecer en la universidad, ya que, manifestaron no tener la misma formación matemática, es decir, el curso aportó positivamente.

Para el manejo de los datos producto del trabajo de cada uno de los estudiantes, se diligenció un permiso el cual, fue firmado voluntariamente por los 11 estudiantes para el manejo de la información (grabaciones, Aula virtual GeoGebra) Se adjunta en el Apéndice B.

4.8 Fase VIII Categorización de habilidades logradas en el curso.

Como lo mencionamos anteriormente de la primera implementación logramos identificar habilidades necesarias para la resolución de problemas, ellas son: i) comprender el problema; ii) plantear y ejecutar diversos caminos de solución, iii) validar y verificar la solución del problema. En cada una de estas habilidades, se puede hacer uso de las tecnologías digitales. Por lo que la facilidad en el manejo de las herramientas como los softwares de geometría dinámica favorecerían el desarrollo de las habilidades. Estas habilidades se usan como categorías de análisis, para responder al objetivo de investigación tomando las evidencias de la segunda implementación.

Para la categorización de las habilidades se usaron los registros del seguimiento de las actividades realizadas en la segunda implementación del curso (2021-2) guardadas en el AVG. Además, se grabaron todas las sesiones, de donde se extraen episodios de las discusiones y procedimientos realizados por los estudiantes.

5 Rediseño.

En este capítulo reportaremos los ajustes que se realizan a los talleres presentados en el capítulo 4, apartado 4.3; mismos que fueron implementados en el período 2021-1. Como ya lo hemos mencionado la primera implementación tenía como objetivo pilotear los talleres y analizar qué habilidades del proceso de resolución se posibilitaba con cada problema.

El análisis de resultados del primer proceso de implementación nos condujo a hacer ajustes de orden de la secuencia de talleres, de replanteamiento de problemas y preguntas; a ese proceso lo hemos llamado Rediseño.

Este capítulo se divide en dos apartados, en el primero se describen los ajustes realizados a cada taller y la justificación de porque se proponen los cambios en términos del objetivo de la investigación (habilidades del proceso de resolución de problemas); y en la segunda se presenta la Figura 90 con la nueva estructura del curso, que fue la que se usó para la segunda implementación que fue de donde se toman los datos para responder a la pregunta de investigación.

La propuesta del curso completo (taller por taller) se presenta en el Apéndice A, y éste se constituye el primer resultado de la investigación que estamos reportando aquí, cuyo objetivo en su primera parte tenía como propósito presentar el Diseñar un curso de refuerzo inicial dirigido a estudiantes de admisión especial de la Universidad Industrial de Santander a fin de favorecer el desarrollo de sus habilidades en la resolución de problemas.

5.1 Ajustes a los talleres

Recordemos que el curso se planteó inicialmente para 60 horas con 15 sesiones (una por taller) de 4 horas cada una (ver Tabla 5) cuyos talleres fueron descritos en el apartado 4.3. El curso sufrió ajustes en su estructura general porque se movieron unos problemas de un taller a otro, contando ahora con 13 talleres, en los que dos de ellos requieren de dos sesiones consecutivas (Taller 8 y 13).

A continuación, se presentan cada taller en el orden de la primera versión y se indican los ajustes realizados, en los que algunos problemas se mueven para otro taller (se indica a que taller se movió) y también aparecen los problemas que fueron incluidos.

5.1.1 El Taller 2 de la primera versión pasa a ser el Taller 1 de la segunda versión

El taller que se presenta ahora en primer lugar en la segunda versión del curso es el que fue descrito en el inciso 4.3.2 (Taller 2). El taller tenía como propósito que los estudiantes planteara expresiones algebraicas equivalentes y dar sentido a los diversos usos de la variable.

Para este taller, que fue descrito en el apartado 4.3.2 (1.1Expresiones algebraicas; 2.1 Binomio al cuadrado perfecto; 3.1 Áreas Geométricas) se suprime la actividad 3.1 (áreas geométricas), porque, presentábamos dos videos de áreas geométricas que debido a configuraciones de privacidad en YouTube no pudieron ser visualizados. En su lugar se decide implementar el Problema información y exploración libre .1 (Expresiones algebraicas) de este mismo taller, estableciendo una imagen (en lugar de los videos).

5.1.2 El Taller 1 de la primera versión pasa a ser el Taller 2 de la segunda versión

En el taller 1 que describimos en el apartado (4.3.1), que ahora se convirtió en el taller 2, inicialmente se tenían propuestos 5 problemas (1.1 Judy; 1.2 Secuencia de figuras; 2.1 A embaldosar; 3.1 Doblar la hoja de papel; 3.2 Regularidades lineales), las cuales, fueron desarrollados y socializados. El Problema información y exploración libre .1 se implementará con el ajuste en el inciso b) a la pregunta b (¿En qué condiciones?) generó confusión, por tanto, se suprime y se plantea la pregunta: ¿por qué?, esto con el ánimo de desarrollar la habilidad de validación y verificación por parte de los estudiantes.

El cambio de orden en los talleres, lo establecimos debido a la discusión que se generó en la primera implementación referente al campo de variación de las variables (lados de las figuras geométrica), el cual, permitió recordar el conjunto de los números reales, sus propiedades y algunas relaciones.

5.1.3 Taller 3 con un intercambio en el problema de actividad retadora.

El taller 3 que se describió en el apartado 4.3.3. tenía como propósito que los estudiantes identificaran relaciones entre distintas representaciones de la función lineal y dieran una interpretación a la pendiente de la recta y el intercepto desde una situación cuyo contexto menciona

diversas formas de ahorro. Este taller, estaba conformado por los problemas (1.1 Expresiones algebraicas y cambios de representación, 2.1 Situación de ahorros, 3.1 Deuda Externa).

El ajuste realizado consistió en el intercambio el problema de la actividad retadora (3.1 Deuda externa) por el problema (3.1 Depreciación) planteado en el apartado (4.3.9) del taller 9, debido a que, la variación de esta última se representa a través de un modelo lineal preservando la coherencia del objeto matemático a estudiar en este taller.

5.1.4 Taller 4 modificaciones de problemas al interior.

El taller que se presentamos busca posibilitar la traducción de enunciados verbales a lenguaje simbólico, cada uno de estos problemas favorece el trabajo con ecuaciones o inecuaciones. La descripción de los problemas se encuentra en el apartado (4.3.4) (Taller 4), además estaba constituido por los problemas (1.1 Ecuaciones e inecuaciones de primer grado; 2.1 Solución gráfica, 2.2 problemas ecuaciones y 3.1 planteamiento problemas con inecuaciones).

También, mencionamos que el problema de "3.1 planteamiento problemas con inecuaciones" era de contesto de la economía costarricense y generó confusión, por tal motivo decidimos suprimirlo.

En concordancia con lo anterior, el nuevo orden de los problemas que quedaron para el taller 4, corresponde a: i) 1.1: Ecuaciones e inecuaciones de primer grado; ii) 2.1: Problemas de ecuaciones; y iii) 3.1 Solución gráfica; que es el problema retador. Estos problemas ya fueron explicados en el apartado (4.3.4).

5.1.5 Taller 5 y Taller 6 sin modificaciones

Para el taller 5 planteamos como propósito bosquejar problemas que se modelen con sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 para que el estudiante lo represente y lo solucione por diversos métodos. Además, se pretende que, recuerden relaciones entre las rectas paralelas,

perpendiculares y secantes. El análisis antes de la implementación se realizó en el apartado 4.3.5 (Taller 5)

Para el taller 6 Esperamos que los estudiantes compararan y relacionaran (geométrica y analíticamente) la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2, además, que asociación la solución con las relaciones entre rectas (paralelismo, secantes, perpendiculares). La descripción de los problemas se encuentra en el apartado 4.3.6 (Taller 6).

5.1.6 Taller 7 y Taller 8 se unificaron (omitiendo algunos problemas)

En el taller 7 y taller 8 se pretendía que los estudiantes abordaran en los problemas de la noción de convergencia y divergencia de sucesiones. Además, que los estudiantes caractericen el tipo de comportamiento de cambio que tienen las sucesiones (crecientes, decrecientes, alternantes, oscilantes).

El taller 7 se describió en el apartado (4.3.7) y no se implementó en el primer pilotaje debido a que, como mencionamos tuvimos sólo 13 encuentros y se decidió omitir por tener similitud en los objetos matemáticos a trabajar con el taller 8. Este taller estaba conformado por 3 problemas (1.1 Bisección de un Segmento, 1.2 Caída de una pelota, 2.1 Sumas infinitas, 3.1 Suma de términos)

Por otra parte, describimos el taller 8 en el apartado (4.3.8), que contaba con 3 problemas (1.1: Suma de los números impares; 2.1: Sucesión de Fibonacci; 3.1: Sucesiones) los cuales se implementaron en su totalidad. Sin embargo, el Problema tarea retadora del taller. Se convirtió en una práctica rutinaria (reemplazar valores numéricos en la sucesión) y consideramos que no desarrolla habilidades para la resolución de problemas, por lo que decidimos omitir este problema y en su lugar implementar el Problema información y exploración libre .1 Bisección de un segmento del taller 7.

Finalmente, tenemos una nueva organización del taller 7 y taller 8, que conformaron para la nueva implementación el taller 7, el orden de los problemas se estableció así: i) 1.1 Suma de los números impares; ii) 2.1: Sucesión de Fibonacci; iii) 3.1:Bisección de un Segmento.

5.1.7 Taller 9 y taller 15 se unifican, se convierte en el taller 8

Para el taller 9 planteábamos tres problemas (1.1 Salario+ comisión, 2.1 Planes de minutos, 3.1 Depreciación) los cuales, describimos en el apartado 4.3.9; sin embargo, cuando se hizo el rediseño, el problema (3.1 Depreciación) se movió al taller 4 porque allí se tenía por objeto de estudio la función lineal. En la reflexión de los dos problemas que quedaron identificamos que el problema de 1.1 Salario+ comisión era similar al problema de 3.1 Trabajo situación económica del taller 10, por lo que se decidió omitir.

En el nuevo taller proponemos inicial con el estudio de problemas que tienen como fin reconocer la variación, es decir, indicar si las magnitudes son variantes o invariantes y dar los argumentos del porqué de su elección. Estos problemas se describieron en el apartado 4.3.15 (1.1: Dos cables, 1.2 De la semicircunferencia; 1.3 De las paralelas, 1.4 Del anuncio)

Se estimó un tiempo de 30 minutos para responder, luego, se hace la socialización de las respuestas para, establecer un consenso y una explicación teórica del porqué son o no magnitudes invariantes, por lo que, se permitió reflexionar con los estudiantes sobre el análisis detallado que se debe hacer para resolver un problema, la importancia emplear algunas estrategias como: recurrir a las definiciones, agregar algunos elementos auxiliares, probar con casos particulares para corroborar la validez de una afirmación, etc.

5.1.8 EL taller 10 en la primera versión es el taller 9 en la segunda versión

En este taller se pretende seguir con el tratamiento de la variación y el cambio, pero en esta oportunidad teniendo en cuenta algunos problemas cercanos a los contextos de los estudiantes. Las descripciones de los problemas se realizan en el apartado 4.3.10 y no tuvo ninguna modificación.

5.1.9 El taller 11 en la primera versión se convierte en el taller 10

Para este taller se dejó la misma secuencia de problemas, no obstante, se modificó el Problema información y exploración libre del taller 11, esto con el fin de proporcionar un contexto cercano al estudiante para tratar la variación de llenado de recipientes. Además, mencionamos que en la nueva organización este taller corresponde con el taller 10.

La descripción de los problemas que componen este taller fue realizada en el apartado 4.3.11. A continuación presentamos el problema y el análisis antes de la implementación.

En el Problema información y exploración libre del taller 10 (Figura 89), pretendimos que los estudiantes identifiquen la relación de covariación entre la altura (h) del recipiente y el tiempo que se demora en llenar. Para abordar la situación es necesario que los estudiantes recuerden como encontrar el volumen del cilindro, demás, establezcan la correspondencia en cada una de las alturas.

En el inciso a) sugerimos que los estudiantes identificaran los datos del problema $h = 1{,}8\,m \quad d = 0{,}8\,m,$ $\text{velocidad de llenado} = 160\ l.$ por minuto, que se debe pasar a unidades de medida equivalente, es decir $\text{velocidad de llenado} = 0{,}16\ \frac{m^3}{min}$. En el *inciso b)* Como el volumen varió a velocidad constante, el nivel de agua (altura) varía de manera constante también, esto por la forma del recipiente. Suponemos que los estudiantes pueden establecer las siguientes relaciones:

$$Tiempo\ t\ \ (min), Altura\ h\ (m);\ \ Volumen\ v = \pi r^2 h\ (m^3)$$

$$5{,}65h = 1{,}8v = \pi(0{,}4)^2\,(1{,}8) \;\; = 0{,}288\,\pi$$

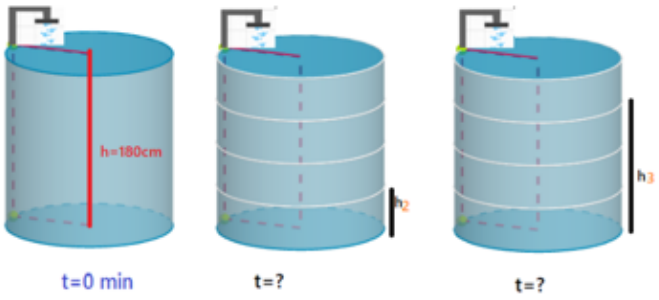
$$1{,}47h_2 = 0{,}45v = \pi(0{,}4)^2\,(0{,}45) = 0{,}072\pi$$

$$4{,}23h_3 = 0{,}45v = \pi(0{,}4)^2\,(1{,}35) = 0{,}216\pi$$

Figura 89

Problema información y exploración libre del taller 10.

En el municipio de la Mesa de los Santos hay dificultades en el suministro de agua, la junta comunal de este municipio dotó de algunos recipientes para recolectar agua para cada una de las viviendas. Se ilustra el llenado de un tanque cilíndrico al que una bomba suministra agua potable. El tanque tiene una altura h igual a 180 cm y el diámetro de la base corresponde a 80 cm.



A partir de un instante en el que el depósito está completamente vacío, comienza a llenarse con agua a una razón 160 Litros por minuto. Encuentre el tiempo necesario para que el nivel este en las alturas h2 y h3

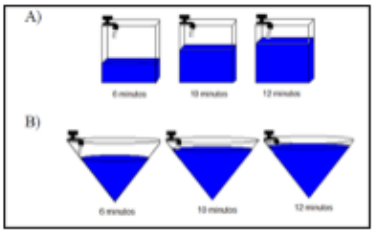
1.1 Responde las siguientes preguntas

a. Expresa qué cambia en la situación y con respecto a que cambia. **Explica tu respuesta.**

b) Genera una representación que describa cómo cambia la altura del agua en el tanque conforme tiempo empleado para llenar el tanque. **Justifica tu respuesta**

c)Estima en cuánto tiempo se tendría que apagar la bomba para que la altura del agua esté a la mitad de la capacidad del tanque. **Explica tu respuesta**

d) A continuación, se ilustra el llenado de dos recipientes, ¿en cuál de esos recipientes el llenado se puede calcular empleando una representación como el de la situación anterior? **Explica el porqué de tu elección**



1.3 Socialice y comparte con tus compañeros y tu profesor.

Nota. Adaptado de: (Echeverría, 2022, p.116)

En el inicio c) plantemos determinar el tiempo que tarda en alcanzar cada una de las alturas, por lo cual, el estudiante debería plantear la relación entre el volumen de llenado sobre la velocidad

de llenado, así, finalmente indicar la cantidad de tiempo para cada una de las alturas establecidas.

Así: $t = \frac{Volumen}{Velocidad\ de\ llenado.}$

$t = (0{,}288\pi\ (m^3)\ )/(0{,}16\ (m^3/min)$

$t = 5{,}65$ minutos aproximadamente.

En el inciso d) intentamos que los estudiantes relacionen el llenado de recipiente y la forma que se adapta a un llenado lineal, cuando la velocidad es constante. El cono presenta una variación en su radio, esto implica, que a pesar de indicar que, la velocidad de llenado es constante, la altura y el volumen no varía de manera constante (considerando la variación del radio, lo cual, influye directamente en la variación tanto de la altura del agua, como el volumen). La opción, por tanto, que se espera, los estudiantes reconozcan y relacionen con la situación inicial (llenado constate) corresponde a la A.

5.1.10 Taller 12 de la primera versión se convierte en el taller 11 (modificaciones)

El taller 12 de la primera versión se describió en el apartado (4.3.12) estaba conformado por los problemas (1.1 Venta de leche; 2.1 Transporte Palenqueros “moto taxi”; 3.1 Temperatura Crecimiento Horno) y tenía como propósito que los estudiantes desarrollaran la noción de limite a partir de la tendencia y aproximación en un punto. El problema de 3.1 Temperatura Crecimiento Horno fue eliminado y en su lugar, decidimos implementar el Problema información y exploración libre .1 del taller 14 (apartado 4.3.14) con el fin de mantener una secuencia de problemas contextualizados que desarrollen la noción de límite. Por lo anterior, el taller 11 para la versión final del curso condensó los siguientes problemas (1.1 Venta de leche, 2.1 Transporte Palenqueros “moto taxi”, 3.1 Decrecimiento Población indígena). Estos problemas fueron tomados de un trabajo previo propuesto por Echeverría (2022) como alternativa didáctica para la enseñanza del cálculo a estudiantes de admisión especial

5.1.11 Taller 13 de la primera versión se convierte en el taller 12 (sin modificaciones)

El taller 13 estaba conformado por tres problemas, (1.1 caja con tapa; 2.1 Función volumen, 3.1 Razón de cambio función volumen). Todos fueron planteados por Echeverría (2022) y se relataron en el apartado (4.3.13). En este taller pretendimos trabajar el análisis de funciones para determinar la variación del volumen y la noción de derivada, desde el punto de vista de la razón de cambio del volumen con respecto a la altura de la caja con tapa.

5.1.12 Taller 14 de la primera versión se convierte en el taller 13 (modificaciones)

El taller 14 estaba conformado por tres problemas en los que su objetivo principal que los estudiantes trabajaran con datos y a través de la modelación lograran el tratamiento matemático de los problemas. Estos problemas se escribieron en el apartado (4.3.14) correspondían a (1.1 Dos cables; 2.1 Salario Mínimo Colombia; 3.1 Decrecimiento de la población indígena). En la nueva versión se convirtió en el taller 13 el propósito es abordar problemas de modelación empleando las herramientas de GeoGebra (análisis de regresión dos variables). Se desea promover la elección del mejor ajuste por parte de los estudiantes para que puedan utilizarlo en la toma de decisiones, la predicción y estimación de datos. Los problemas que conforman este taller los describimos en el apartado (4.3.14) (1.1: Dos cables, 2.1: Salario Mínimo Colombia) y (4.3.4) (3.1: Deuda Estados unidos).

5.2 Nueva organización del curso para la segunda implementación

En la Figura 90 presentamos el nuevo orden del curso con el número de sesiones que se requiere para cada uno de ellos, en la columna de la izquierda (amarilla) aparece el orden en que aparecía el taller en la primera versión y en la columna siguiente (rosada) aparece el orden en el que queda propuesta en la versión final del curso.

Figura 90

Nueva organización del curso

Orden Talleres Versión 1	Orden Talleres Versión 2	Objeto matemático	Eje temático Nº Taller nueva versión.	Problemas Versión 1 del curso	Problemas Versión 2 del curso
1	1 y 2	Uso de la variable.	Patrones y regularidades *Taller 1*	1.1 Judy 1.2 Secuencia de figuras. 2.1 A embaldosar 3.1 Doblar la hoja de papel 3.2 Regularidades lineales	1.1 Judy 2.1 Binomio al cuadrado perfecto 3.1Expresiones algebraicas
2	1	Expresiones algebraicas, uso variable.	Procesos algebraicos *Taller 2*	1.1Expresiones algebraicas. 2.1Binomio al cuadrado perfecto ~~3.1Áreas Geométricas~~	1.1 Secuencia de figuras. 2.1 A embaldosar 3.1 Doblar la hoja de papel 3.2 Regularidades lineales
3	3 y 9	Expresiones algebraicas, función lineal.	Procesos algebraicos *Taller 3*	1.1 Expresiones algebraicas y cambios de representación. 2.1 Situación de ahorros. 3.1 Deuda Externa	1.1 Expresiones algebraicas y cambios de representación. 2.1 Situación de ahorros. 3.1 Depreciación.
4	4	Ecuaciones e inecuaciones	Procesos algebraicos. *Taller 4*	1.1 Ecuaciones e inecuaciones de primer grado. 2.1 Solución gráfica 2.2 problemas de ecuaciones ~~3.1 Planteamiento problemas con inecuaciones.~~	1.1 Ecuaciones e inecuaciones de primer grado. 2.1 problemas de ecuaciones 3.1 Solución gráfica.
5	5	Sistema de ecuaciones 2x2	Procesos algebraicos. *Taller 5*	1.1 Pizza y Bebidas 2.1 Zoológico 2.2 Jorge Andrés (compras) 3.1 Dos números.	1.1 Pizza y Bebidas 2.1 Zoológico 2.2 Jorge Andrés (compras) 3.1 Dos números.
6	6	Interpretación analítica y geométrica solución 2x2	Procesos algebraicos. *Taller 6.*	1.1Rectángulo 2.1 Precio frutas. 3.1 Suma de dos números 3.2 Triangulo isósceles.	1.1 Rectángulo 2.1 Precios frutas. 3.1 Suma de dos números 3.2 Triángulo isósceles
7	7 y 8	Sucesiones y procesos infinitos	Patrones y regularidades *Taller 7.*	1.1 Bisección de un Segmento ~~1.2Caída de una pelota~~ ~~2.1 Sumas infinitas~~ ~~3.1 Suma de términos~~	1.1 Suma de los números impares 2.1 Sucesión de Fibonacci 3.1 Bisección de un Segmento
8				1.1 Suma de los números impares 2.1 Sucesión de Fibonacci ~~3.1 Sucesiones~~	
9	9 y 15	Reconociendo la variación Dos sesiones de clase.	Análisis de funciones. *Taller 8*	~~1.1Salario+ comisión~~ 2.1 Planes de telefonía. 3.1 Depreciación 3.2 Precio de arroz	1.1 "Reconociendo la variación" Dos cables De la semicircunferencia De las paralelas Del anuncio. 2.1 Planes de telefonía. 3.1 Precio de arroz ***(Requiere de dos sesiones)***
10	10	Funciones.	Análisis de funciones *Taller 9*	1.1 Maíz situación económica 2.1 Un habitante de San Basilio de Palenque minutos. 3.1 Trabajo situación económica	1.1 Maíz situación económica 2.1 Un habitante de San Basilio de Palenque minutos. 3.1 Trabajo situación económica
11	11	Funciones	Análisis de funciones *Taller 10*	~~**1.1 Llenado de recipiente**~~. 2.1 Modelación lineal llenado recipientes. 3.1 Llenado recipientes llaves (inversa).	**1.1** Mesa **de los Santos** 2.1 Modelación lineal llenado recipientes. 3.1 Llenado recipientes llaves (inversa).
12	12 y 13	Noción de Limites	Análisis de funciones *Taller 11*	1.1 Venta de leche 2.1 Transporte Palenqueros "moto taxi" ~~3.1 Temperatura Crecimiento Horno~~	1.1 Venta de leche 2.1 Transporte Palenqueros "moto taxi" 3.1 Decrecimiento Población indígena.
13		Funciones optimización	Análisis de funciones *Taller 12*	1.1 caja con tapa 2.1 Función volumen 3.1Razón de cambio función volumen	1.1 caja con tapa 2.1 Función volumen 3.1 Razón de cambio función volumen
14	14	Optimización	Análisis de funciones. *Taller 13*	1.1 Dos cables. 2.1 Gastos salud 3.1 Decrecimiento de la población indígena	1.1 Dos cables. 2.1 Gastos salud 3.1 Deuda externa ***(Requiere de dos sesiones)***
15		Reconociendo la variación	Análisis de funciones	Dos cables De la semicircunferencia De las paralelas Del anuncio.	No hay

En la misma tabla en la columna de la derecha (rosada) se enuncian los problemas de la versión final de los talleres del curso en la que aparecen problemas nuevos que serán descritos a continuación. Aquí contaremos los movimientos de los problemas, por ejemplo, los que aparecen tachados se eliminaron, los aparecen en negro sin resaltar son problemas que se mantuvieron, los nuevos que apareen subrayados (que se explican en los siguientes apartados) y los que aparecen resaltados con diferentes colores se movieron tal como se muestra en Figura 90.

6 Análisis y discusión de resultados.

Con el fin de alcanzar el objetivo de la investigación planteado, en este capítulo presentamos los resultados del análisis de las evidencias recolectadas en la segunda implementación del curso categorizadas en habilidades para la resolución de problemas que lograron desarrollar los estudiantes que se beneficiaron del curso. Estos resultados los vamos a presentar de acuerdo con las tres categorías (explicadas en el apartado 4.4), ellas son:

i. Habilidad para comprender el problema

ii. Habilidad para plantear y ejecutar diversos caminos de solución

iii. Habilidad para validar y verificar la solución del problema

Se eligió la segunda implementación del curso de refuerzo, en la cual, participaron 14 estudiantes del periodo 2021-II. No obstante, 10 firmaron la autorización para el tratamiento de los datos obtenidos (Apéndice B).

Por otra parte, como se señaló en la metodología, las sesiones de clase se realizaron de manera sincrónica empleando la plataforma Zoom. Se grabaron en audio y video cada uno de los encuentros. En este capítulo, se presentarán evidencias donde se identificaron habilidades para la

resolución de problemas. mediante algunas transcripciones de episodios. Para la lectura de las transcripciones se usarán las siguientes convenciones: **In** (voz de la investigadora), [] en estos corchetes cuadrados se presentarán las interpretaciones de las acciones de los estudiantes, […] aparecerá cuando se esté omitiendo parte de lo expresado porque no ofrecer ningún aporte.

En la recuperación de evidencias también se hará uso de capturas de pantalla extraídas de las discusiones entre la investigadora-docente del curso (**In**) y los estudiantes (a quienes mencionaremos como E**1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10**).

Las discusiones o interacciones emergentes en las clases o en el área de trabajo de cada estudiante en la plataforma de Aula Virtual GeoGebra (AVG) donde a su vez, se encontraron capturas o fotografías de procedimientos elaborados a lápiz y papel o empleando alguna herramienta tecnológica (subidas en formato URL).

6.1 Evidencias de la habilidad para la comprensión del problema

Según Polya (1965) comprender el problema implica que los estudiantes reconozcan los datos, las variables y las condiciones del problema. Krulik & Rudnick (1989) plantean que la comprensión va más allá de la identificación de la información sino como logra articularla y utilizarla a fin de resolver un problema

Para presentar los resultados en relación de la habilidad para comprender el problema se han seleccionado algunos de los problemas que desde los diferentes talleres tenían orientación en ella.

En la Tabla 30, se muestra la relación de los problemas que se retoman de cada taller con los respectivos descriptores (que fueron enunciados en la Tabla 2)

Tabla 30

Actividades seleccionadas para la habilidad de comprender.

Problema/Taller/Figura	Descriptores de la habilidad para comprender problemas
1/1 (Figura 91)	Identifica la incógnita y los datos del problema (pregunta). Reconoce y establece relaciones de covariación (identificar qué cambia y cómo cambia) Reconoce las variables de la situación.
2/1/ (**Figura 98**)	Reconoce las variables de la situación Identifica las palabras claves del problema.
1/2 (Figura 94)	Identifica el patrón o una regularidad. Plantea las hipótesis y condiciones del problema. Reconoce relaciones de covariación (identificar qué cambia y cómo cambia) Enuncia el problema con sus propias palabras.
1/5(Figura 102)	Plantea las hipótesis y condiciones del problema. Reconoce relaciones de covariación.
2/6 (Figura 107)	Reconoce las variables Reconoce relaciones de covariación Introduce una notación adecuada Lee el enunciado e identifica las palabras claves del problema
1/8 (Figura 111)	Identifica la incógnita y los datos del problema. Enuncia el problema con sus propias palabras. Reconoce relaciones de covariación (identificar qué cambia y cómo cambia) Reconoce las variables de la situación Introduce una notación adecuada.

Iniciamos con el problema información y exploración libre del taller 1 (Figura 91) en la que se pretendía que el estudiante identificara la relación de covariación entre el número de kilómetros recorridos con la tarifa diaria, además, que reconociera la tarifa semanal como una cantidad invariante. En el inciso a) cuando se pregunta por un caso particular, se pretende fomentar la habilidad de comprender porque el estudiante debe emplear los datos y las relaciones que se tienen entre ellos para especificar el precio y tomar decisiones.

Figura 91

Problema información y exploración libre del taller 1

1.1 Judy necesita alquilar un carro para usarlo desde el lunes hasta el viernes, y ve el siguiente aviso en un periódico local.

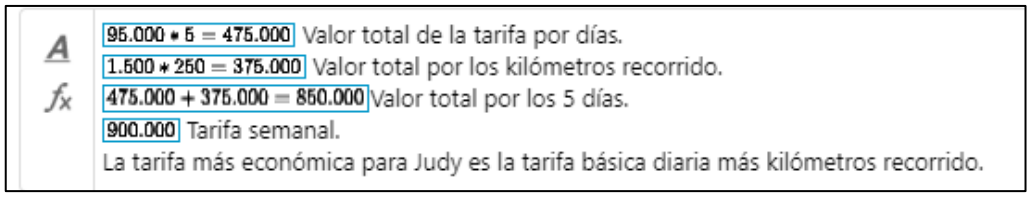
Modelo	**Tarifa básica diaria más kilómetros recorridos**	**Tarifa semanal (kilometraje ilimitado incluido)**
Renault Logan	$95.000 +$1.500 por kilómetro recorrido	$900.000

a) Judy piensa que necesita recorrer cerca de 250 kilómetros en total durante los cinco días ¿Cuál de las dos tarifas es más económica para Judy? **Justifique su respuesta.**
b) Supongamos que Judy no estaba segura del kilometraje que tenía que recorrer. ¿Cuál opción le favorece más? ¿En qué condiciones? **Explica tu respuesta.**

En la plataforma AVG se registraron 10 respuestas a este problema, de ellas las de E1, E4, E5, E6, E7 dan evidencia de la comprensión del problema porque lograron establecer las relaciones adecuadas entre los datos de forma aritmética, tal como se muestra en la Figura 92. Al respecto, Polya (1965) manifiesta que comprender el problema consiste en determinar la incógnita, los datos y las condiciones del problema.

Figura 92

Respuesta de E1 al inciso a)



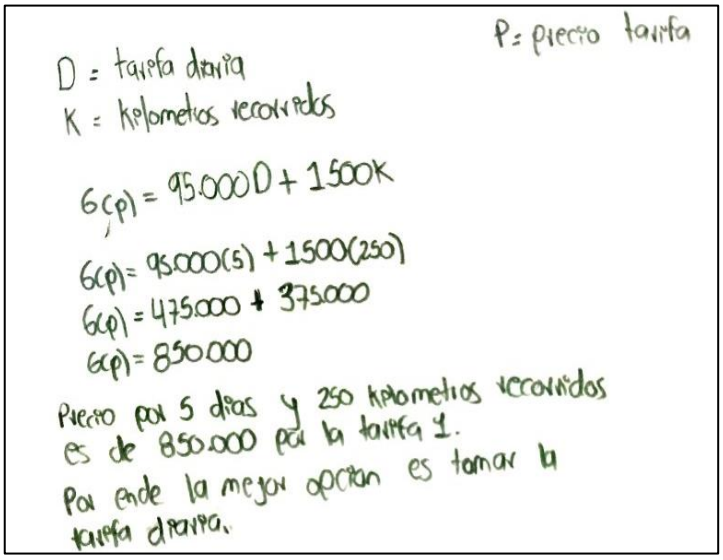
También, se encontraron las respuestas de E3, E8, quienes denotaron las variables con letras asociadas a las palabras claves de la situación (D de diario, k de kilómetros, y p de precio), para establecer una expresión que representara las relaciones existentes entre ellas (ver Figura 93). Como se explicó en el apartado *5.3.1*, lo que se esperaba aquí era que plantearan la relación como

$f(x) = 95.000(5) + 1500x$, donde $f(x)$ representaba la tarifa básica durante cinco días más los kilómetros recorridos.

Al contrastar la ecuación construida por E3 con la esperada, se puede apreciar el uso de la notación G(p), donde E3 nombra a la función como G porque lo relaciona con el término gasto, pero lo relaciona con la variable p, tal vez buscando representar algebraicamente el enunciado verbal. No obstante, la expresión la plantea en términos de "k" y no de "p". Lo que hace E3 es una acción frecuente que hacen los estudiantes cuando intentan hacer la traducción del enunciado verbal a la expresión algebraica, porque como lo menciona Mason et al. (1999), el vínculo de un contexto de la vida real les proporciona a los estudiantes la oportunidad de realizar una representación general y asignarles sentido a las variables, haciendo uso de la notación matemática para establecer las relaciones entre las variables y los datos identificados.

Figura 93

Respuesta de E3 al inciso a)

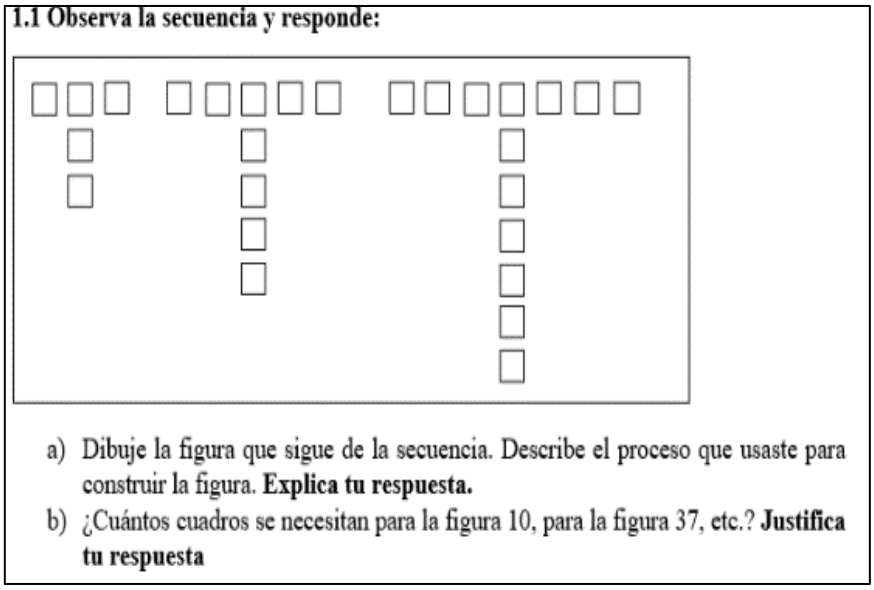


En el problema información y exploración libre del taller 2 (Figura 94) en el inciso a) pretendió que los estudiantes crearan la representación figural de la secuencia dada, luego,

describieran cómo cambiaba la configuración estableciendo una progresión aritmética y la generalización. Se esperaba que los estudiantes lograran establecer la relación de covariación entre el número de la secuencia y la cantidad de cuadros que componen la figura.

Figura 94

Problema información y exploración libre del taller 2



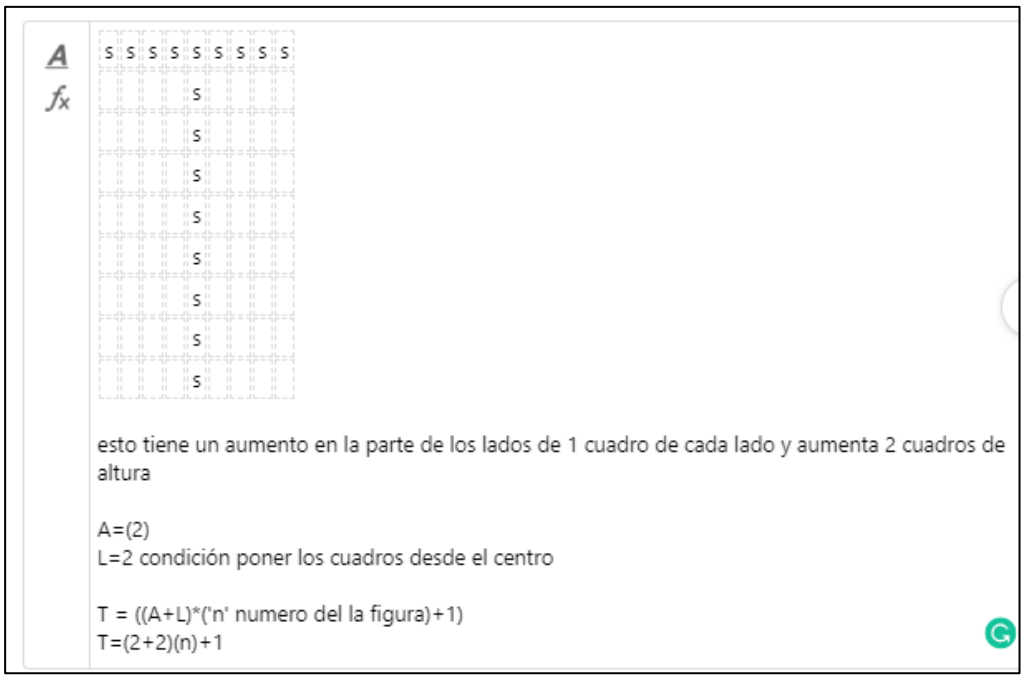
En las respuestas encontradas se destacan tres acercamientos, de los cuales inferimos acciones para la comprensión del problema.

El primer acercamiento, corresponde a las respuestas de E2, E3, E4, E5, E7, E8, E9, E10, donde se muestra la habilidad de identificar el patrón o la regularidad de la configuración, es decir, la razón de cambio de la progresión aritmética que concierne a 4 unidades por cada posición (ver Figura 95).

En el análisis antes de la implementación se estableció una posible respuesta empleando una expresión algebraica como $4n + 1$ con $n \geq 1$, donde n representa el número de la secuencia ($n \in \mathbb{N}$), al contrastar con la evidencia, existe una correspondencia.

Figura 95

Respuesta de E9 al inciso a) Problema información y exploración libre



Observamos (Figura 95) cómo E9 combina las palabras y los símbolos para poder establecer la manera cómo cambia la secuencia figural. Al respecto Mason et al. (1999) menciona que en este tipo de razonamientos se deberían promover en el aula, puesto que mezclar los símbolos y las palabras muestran asociaciones de significados, que se van perfeccionando y se convierten en las más adecuadas cuando son entendidas por todos.

El segundo acercamiento, corresponde a la Respuesta de E6, donde se establece la variación en términos de la posición de la secuencia menos la posición anterior, allí E6 muestra habilidad para reconocer qué cambia y cómo cambia alcanzando el tratamiento matemático del problema (Ver Figura 96) Destacamos que, al desarrollar la expresión algebraica dada por E6 se obtienen una expresión equivalente a la expresada en el primer acercamiento por E9, así: $5n - (n-1) = 5n - n + 1 = 4n + 1$

Figura 96

Respuesta de E6 al inciso a) Problema información y exploración libre

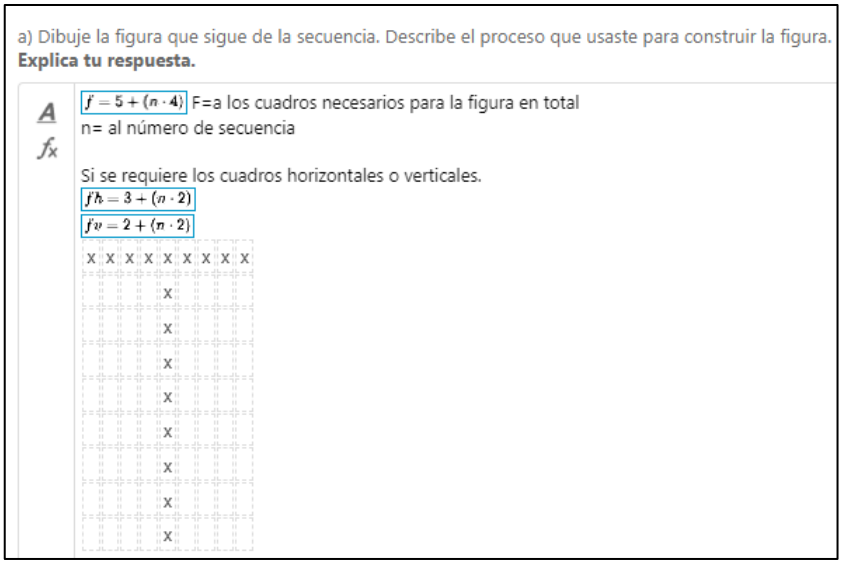
Multipliqué 5 por 4 y luego le resté 3, es decir, la posición anterior 5n-(n-1)

La estrategia empleada por E6 para comprender corresponde a la particularización, en su intento, está pasando de un tratamiento aritmético a la generalización, lo cual, corresponde a un acercamiento hacia la construcción de una regla del álgebra para expresar la generalidad presente en el problema. Mason et al. (1999) mencionan que el éxito de la aritmética generalizada radica en la correspondencia de los números como un sistema que cumple ciertas propiedades.

El tercer acercamiento, se evidencia en la respuesta de E1, donde se referencia el aumento del número de cuadros de la secuencia al multiplicar por cuatro unidades el número de la figura y sumar la cantidad invariante cinco ($5 + 4n$). Sin embargo, para que corresponda, se deberá iniciar con la posición cero ($n = 0$). Al respecto Polya (1965) establece que una acción para comprender el problema es examinar sus hipótesis y las condiciones del problema (ver Figura 97).

Figura 97

Respuesta de E1 al inciso a) Problema del taller 2.



E1 define la generalización con base en la figura inicial ($n = 0$) (ver Figura 94). A partir de la observación se fija que la figura inicial está compuesta por tres cuadros horizontales y dos cuadros verticales, es decir, cinco cuadros (5); luego, para cada nueva figura, se le agregan dos cuadrados por cada número de la figura, tanto horizontal como verticalmente $(4n)$. Es decir, se obtiene la generalización $5 + 4n$ con n representa el número de la secuencia ($n \in \mathbb{N}$), lo cual, coincide con una de las respuestas esperadas para este problema. En este sentido, Mason et al. (1999) menciona que los estudiantes le van asignando significado a las expresiones de acuerdo con la manera como han percibido la variación en la figura inicial. En este caso, desde la variación horizontal (f_h) y vertical (f_v) que E1 expresó.

A continuación, se presentan evidencias de la habilidad para comprender problemas, ahora vistas desde las expresiones orales de los estudiantes, por ello, usaremos algunas transcripciones tomadas de los momentos de socialización de sus respuestas.

El *inciso a)* permite describir el proceso de construcción de la secuencia. En el Episodio 1 mostramos la forma como ellos enuncian el problema con sus propias palabras, lo que para Polya (1965) es una acción propia de la comprensión.

> **E3:** Una curiosidad para agregar es que, la figura siempre va a tener como el mismo número de cuadros hacia acá y hacia abajo [haciendo referencia a lo horizontal y vertical]. Es decir, si tiene ocho espacios a la derecha, también va a tener ocho espacios hacia abajo.
> In: Muy bien, ahora ¿Quién más desea compartirnos lo que realizó?
> **E9**: […] Lo único que hice fue establecer variables fijas, A que es de ancho y la L que es de largo. Sería A+L, n que sería el número de la figura que desea, [la tercera, cuarta…] más uno, porque en el centro queda un cuadrito. [A+L =4 por el número de la figura + 1]
> **E5:** […] observé cuántos cuadritos aumentaba por cada figura; me fijé que estaba aumentado dos en la parte de abajo y uno y uno a los laterales, entonces, a partir de eso, realicé una fórmula que dice $f(n) = 1 + 4n$.
>
> **Episodio 1**

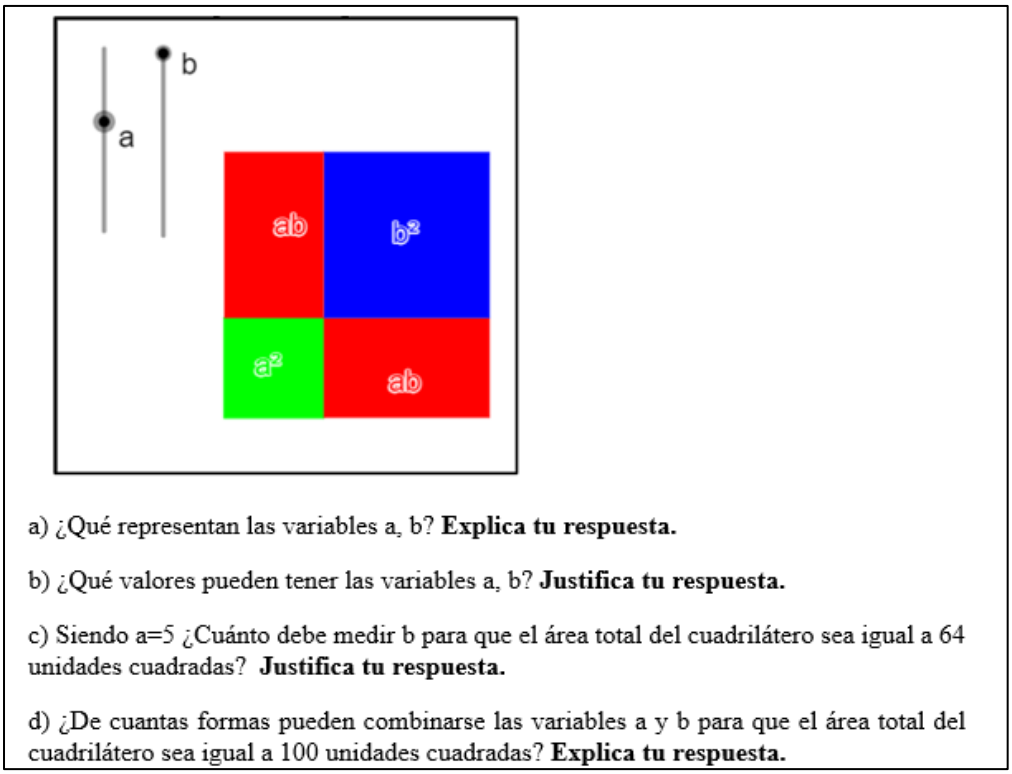
De lo anterior, se puede establecer las definiciones recursivas y el empleo del lenguaje natural por parte de los estudiantes para explicar el enunciado a sus compañeros y a la docente.

Observamos cómo los estudiantes emplearon diversas variables como estrategias para consolidar la generalización. Al respecto, Mason et al. (1999) menciona que, el trabajo con patrones tiene diversas formas de verlos, lo cual implica, diferentes formas de expresarlos y registrarlos.

En el problema exploración dirigida del taller 1 (Figura 98) se pretendía que los estudiantes vincularan la representación geométrica con la representación algebraica, este problema se presenta en una simulación (GeoGebra), permite a los estudiantes explorar y mover los deslizadores de a, b para establecer qué representan las variables en la figura y qué valores numéricos podrían asignárseles.

Figura 98

Problema exploración dirigida del taller 1.

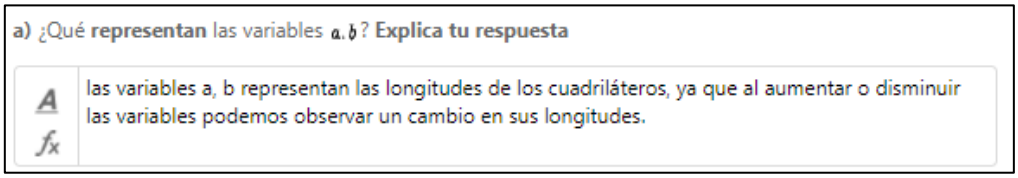


En el inciso a) en las respuestas de todos estudiantes mostraron que la manipulación de los deslizadores a, b, que les permitió establecer que *a y b* representan las longitudes del cuadrilátero

(ver Figura 99), lo que para Polya (1965) sería el reconocimiento de las variables de la situación, que se consolida en un descriptor de la habilidad de comprensión del problema.

Figura 99

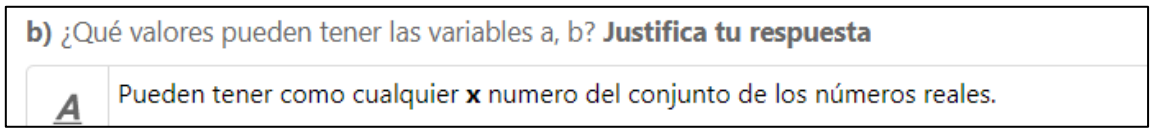
Respuesta de E2 al inciso a) del problema exploración dirigida del taller 1



Como respuesta al *inciso b)* E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E10 expresaron que *a, b* puede tomar cualquier valor real positivo (ver Figura 100) que era el razonamiento esperado (tal como se explicó en 4.3.2) En las respuestas los estudiantes logran identificar las palabras clave del problema para poder asignar los valores numéricos a las variables, un descriptor propio de la habilidad para comprender el problema.

Figura 100*1*

Respuesta de E1 al inciso b) Problema exploración dirigida del taller 1



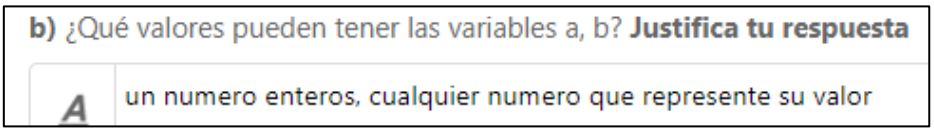
Para esta respuesta, inferimos que los estudiantes dan un sentido a las variables como un número generalizado, al respecto Áke (2021) menciona que cuando los estudiantes logran establecer los objetos algebraicos, es decir, las variables como un número generalizado han logrado identificar estructuras relacionales y funcionales presentes en el problema, lo cual, les permite el cambio de representaciones.

Al respecto, E9 expresa que las variables solo pueden tomar valores enteros (ver Figura 101). Lo cual, también corresponde a una respuesta válida porque los números enteros están

contenidos en el conjunto de los números reales. Sin embargo, en este razonamiento restringe la asignación de los valores de a, b a los enteros, además incluye tanto los valores positivos como los negativos.

Figura 101

Respuesta de E9 al inciso b) del problema del taller 1.

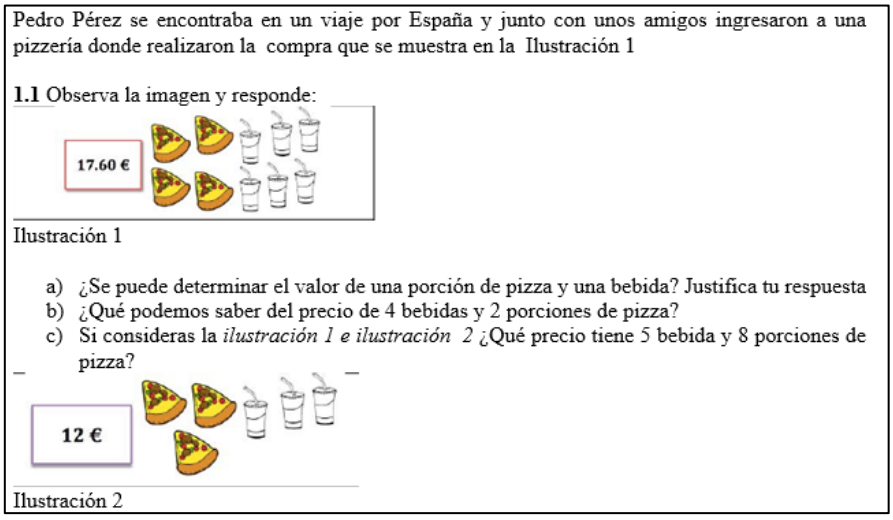


Por ello, indicamos que este razonamiento conlleva a la asignación de valores a las letras como valores desconocidos en el campo de los números enteros y tal como lo reportan Bolaños y Gómez (2021) una de las mayores complejidades que se tiene con el uso de las letras es la manipulación y asignación de un rango de valores.

En el problema información y exploración libre del taller *5 (*Figura 102) se pretendía iniciar el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales de orden de 2x2, los cuales modelan problemas de variación.

Figura 102

Problema información y exploración libre del taller 5.

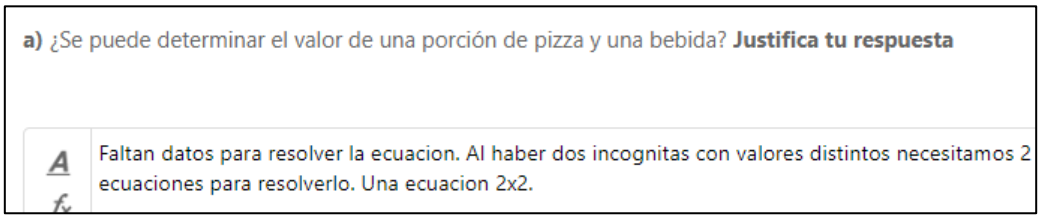


Para el inciso a) se presentó una imagen que puede ser traducida al lenguaje natural o simbólico. Se pretendía que los estudiantes identificaran las relaciones que se generan entre la cantidad de productos adquiridos y el precio a pagar.

En las respuestas de E1, E3, E5, E10, E11 para el inciso a) ellos expresaron que para encontrar el precio de una pizza y una bebida faltan datos (ver Figura 103), esto nos permite concluir, que tienen la idea de que un sistema de n-ecuaciones tiene solución sólo si tiene n-incógnitas.

Figura 103

Respuesta de E3 al inciso a) del problema.



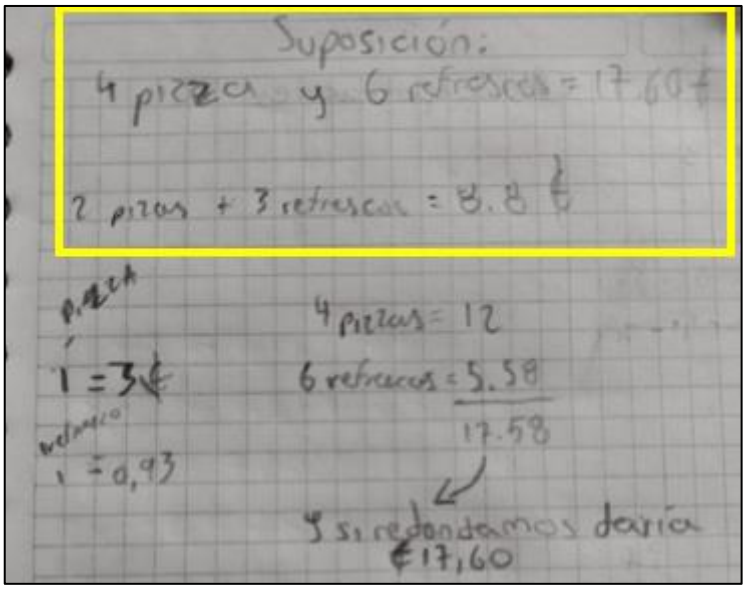
Por lo anterior, como lo expresa Hernández (2018), los estudiantes tienden a reconocer como una característica algebraica la equivalencia entre el número de ecuaciones y de incógnitas presentes en los sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 (2-ecuaciones, 2-incognitas). Por tal motivo, algunos estudiantes no lograron identificar la relación funcional que se puede establecer entre la cantidad de productos y el precio a pagar, es decir, $4x + 6y = 17{,}60\ €$ dicho de otro modo, como una relación que posibilito calcular uno de los precios de un producto en función del otro precio.

Para este mismo inciso E4, E6 muestran otro razonamiento, ellos primero plantearon de manera implícita hipótesis del precio de un producto bajo la condición que la suma de la compra de los dos productos es igual a 17,60 € (tal como se muestra en el recuadro amarillo) Luego, conjeturaron el precio de un producto para realizar las respetivas operaciones aritméticas que les

permitiera encontrar el precio del otro producto (ver Figura 104). En términos de Polya (1965) los que ellos hicieron da cuenta de la habilidad de comprensión del problema porque lograron evidenciar las principales partes del problema: la incógnita, los datos y las condiciones.

Figura 104

Repuesta E4 inciso a) al Problema información y exploración

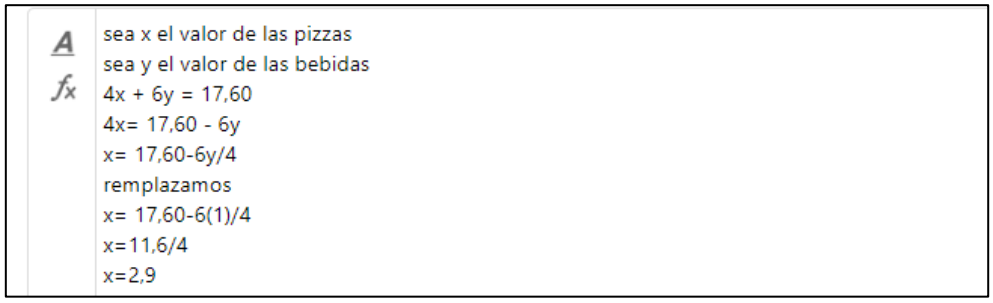


Se destaca cómo E4, realiza de manera implícita intentos por pasar del lenguaje verbal al lenguaje algebraico. Según Mason et al. (1999), aunque no emplea una notación sucinta se convierte en una acción que le permite al estudiante exteriorizar su pensamiento y encontrar una alternativa para representar las relaciones identificadas en el problema.

Finalmente, en las respuestas de E7, E8, E9 se muestra el despeje de la variable “x” (precio de las pizzas) en función de “y” (precio de las bebidas) (ver Figura 105), se hace evidente el identificar la relación entre los datos y las variables, el uso adecuado de la notación matemática, las cuales, según Polya (1965) son muestra de la comprensión del problema.

Figura 105

Respuesta de E8 al inciso a) problema1 del taller 5.



En el **Episodio 2**, se observa cuando E8 expresa la idea de la ecuación a sus compañeros. Esta idea llevo a reflexionar y establecer una variable en función de la otra variable, lo cual correspondió con una de las posibles respuestas esperadas.

E9: […] ¿Quién fue la de la idea de la ecuación?
E8: Yo [escribe en la pizarra†† $\mathbf{4x + 6y = 17,60}$ euros]
E7: A pues mire, se podía hacer de una manera, se podría pues, 4x=17,60- 6y […]

Episodio 2

Al respecto, inferimos que los estudiantes identificaron la relación de covariación entre el precio de los productos y las cantidades adquiridas para satisfacer el pago total. Esto se evidencia al establecer en una ecuación de primer grado con dos variables y encontrar la ecuación explícita de una variable. Asimismo, gracias al trabajo en equipo, como lo menciona De la Fuente (2016) se favoreció la discusión del problema para dar una explicación de cómo usar una ecuación de dos variables para determinar el valor de una de las variables en función de la otra.

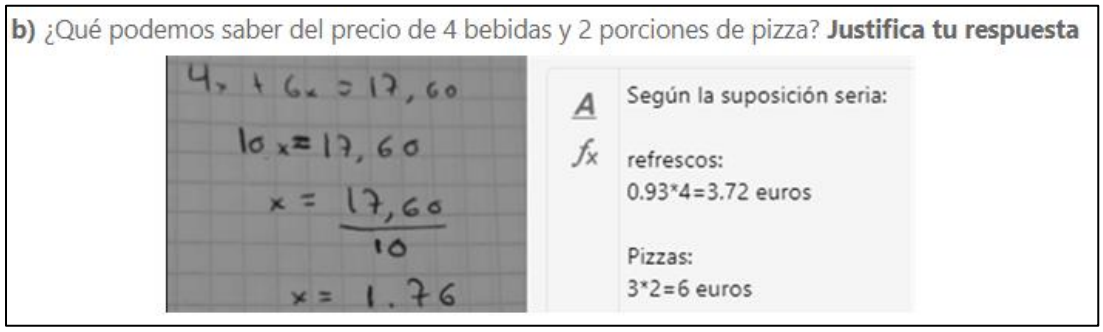
En el *inciso b)* del problema información y exploración libre del Taller *5* (Figura 100), las repuestas de E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10, emplearon cálculos aritméticos instaurados en valores hipotéticos de precios y calcularon el valor promedio de precios (ver Figura 106).

†† La pizarra es una herramienta de la plataforma de Zoom que se estaba usando para el desarrollo del curso de forma presencial remota.

Aquí, en las respuestas los estudiantes expresan de manera general la relación de las variables y los datos. E1 planteó la ecuación lineal de una variable, es decir, supone que los productos tienen el mismo valor, por lo tanto, "x" representa la cantidad a pagar por cada producto (pizzas y bebidas). Según Aké (2021) los estudiantes pueden usar la letra (variable) como una incógnita y dar un significado operacional del signo igual como una equivalencia, lo cual, es evidente en el acercamiento empleado por parte de E1.

Figura 106

Respuestas de E1 y E4 al inciso b) del Problema del taller 5



También, observamos la aplicación de la heurística de particularización propuesta por Polya (1965) (acercamiento de E4), donde se hace evidente el planteamiento de un supuesto precio de un producto y de las condiciones del problema (cantidades adquiridas por producto y pago total) de esta manera logra obtener los valores correspondientes. Aké (2021) indica que los estudiantes cero de algebrización, realiza su exploración con números particulares, es decir, con los supuestos de precios mencionados por E4. Este *inciso b)* permitió a los estudiantes establecer varios casos particulares e identificar diversos precios para presumir que existen infinitos precios para los productos.

En el problema exploración dirigida del taller 6 (Figura 107) se pretendía que los estudiantes comprendieran el vínculo que existe entre la solución analítica y la gráfica de un

sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2 cuya solución es única. Se planteó el uso de valores decimales para que con ello el estudiante emplee sus conocimientos de los números reales. Los incisos que permiten la comprensión son el inciso a) donde se identifican las variables, el inciso b) que plantea la relación entre las variables y los datos, el inciso d); inciso e), donde se promueve la construcción gráfica y su respectiva lectura.

Figura 107

Problema exploración dirigida del taller 6

2.1 Ana y Leticia fueron al mercado por fruta. Ana por cinco kilos de manzana y tres kilos de pera pagó $139 y Leticia pagó $226.50 por ocho kilos de manzana y cinco de peras.

a) Identifica las variables de la situación. **Explica tu respuesta**

b) ¿existe una relación entre dichas variables? Representa algebraicamente.

c) ¿Cuánto costaba el kilo de manzana y el kilo de pera ese día en el mercado? **Justifica tu respuesta**

d) Suponga que (x, y) designan las coordenadas de un punto en el plano denotado por $P(x, y)$ **¿por qué?**

e) ¿Qué figura representa cada una de las ecuaciones en el plano cartesiano? **¿por qué?**

f) Considere los puntos (5,12) y (6,14), pertenecen al grafico de alguna ecuación del problema **¿por qué?**

g) Considere los gráficos de las ecuaciones. ¿Qué observas? **Explica tu respuesta.**

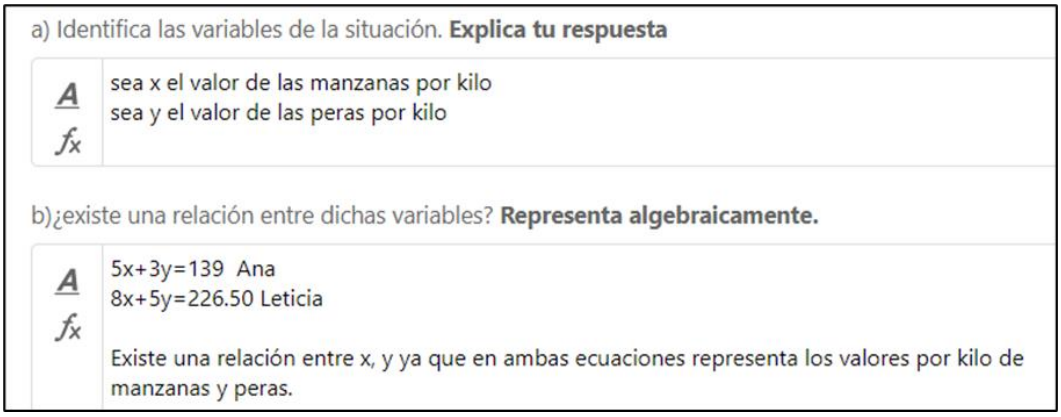
h) Compara la solución encontrada inicialmente y lo que observas en el gráfico. Existe alguna relación entre estos. **Explica tu respuesta.**

De las respuestas registradas en el AVG, las de los estudiantes E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9, E10 (ver Figura 108) en el inciso *a)* hicieron evidentes la identificación de las variables así mismo.

En el inciso b) reconocieron las relaciones entre los datos y las variables, luego, plantearon las ecuaciones. Según Polya (1965) cuando se traduce un enunciado a simbología matemática se hace evidente la comprensión del problema.

Figura 108

Respuesta de E8 a los incisos a, b) Problema exploración

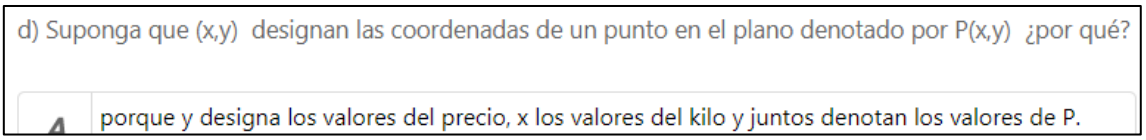


En el inciso a) se hace evidente que el estudiante distingue el precio de las manzanas (le asigna la letra "x") y el precio de las peras (le asigna la letra "y"), luego, en el *inciso b)* realiza una traducción del lenguaje verbal al lenguaje algebraico lo cual, según Olvera (2010) hace necesario que, con antelación el estudiante comprendiera el enunciado e identificara las relaciones entre los datos y las variables.

En las respuestas de E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E9, E10, para el inciso d) se estipula la relación de correspondencia en el plano cartesiano de los puntos que se le puede asignar a las variables "x" e "y" (precios de manzanas y peras), que satisfacen la condición del precio y la cantidad de productos para la compra de Ana, es decir, i) $5x + 3y = 139$ y para la compra de Leticia $ii) \; 8x + 5y = 226.50$ (ver Figura 109).

Figura 109

Respuesta de E5 al inciso d) del problema exploración dirigida del taller

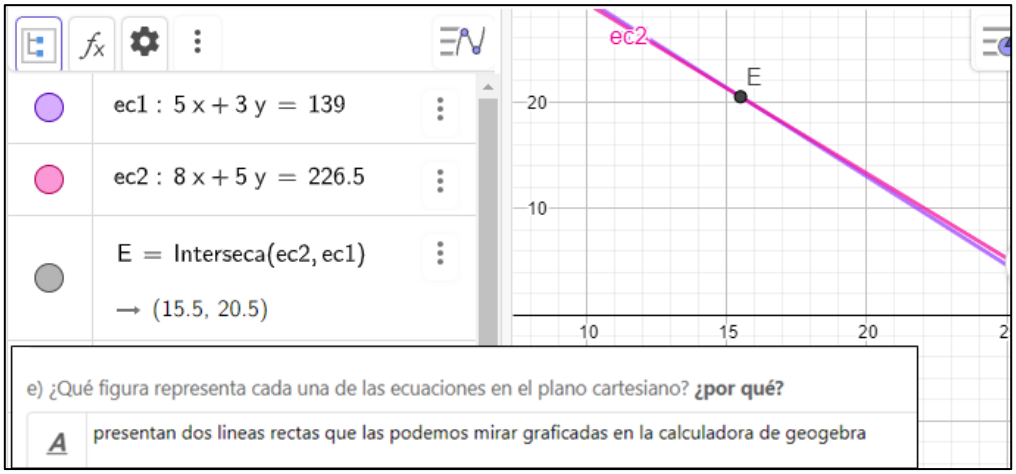


En este inciso pretendía hacer evidente la necesidad de introducir una notación adecuada con el ánimo de vincular el registro numérico y direccionar a los estudiantes a la representación gráfica de los valores que cumplen las condiciones del inciso b). De esta manera, cómo lo expresa Olvera (2010) la representación gráfica complementa la actividad del estudiante, al permitir entrelazar la representación simbólica y numérica.

Para el inciso e) las respuestas de E1, E2, E3, E4, E5, E6, E8, E9, E10 expresan de manera unánime que la figura que se genera corresponde a la gráfica de dos funciones lineales que se intersecan (rectas secantes). Destacamos en la Respuesta de E10 (Figura 110), empleo el software de GeoGebra para representar las expresiones elaboradas en el *inciso b)* y expresar que se formaban dos líneas rectas (desde lo que visualizó).

Figura 110

Respuesta de E10 al inciso e) problema exploración dirigida del taller 6.



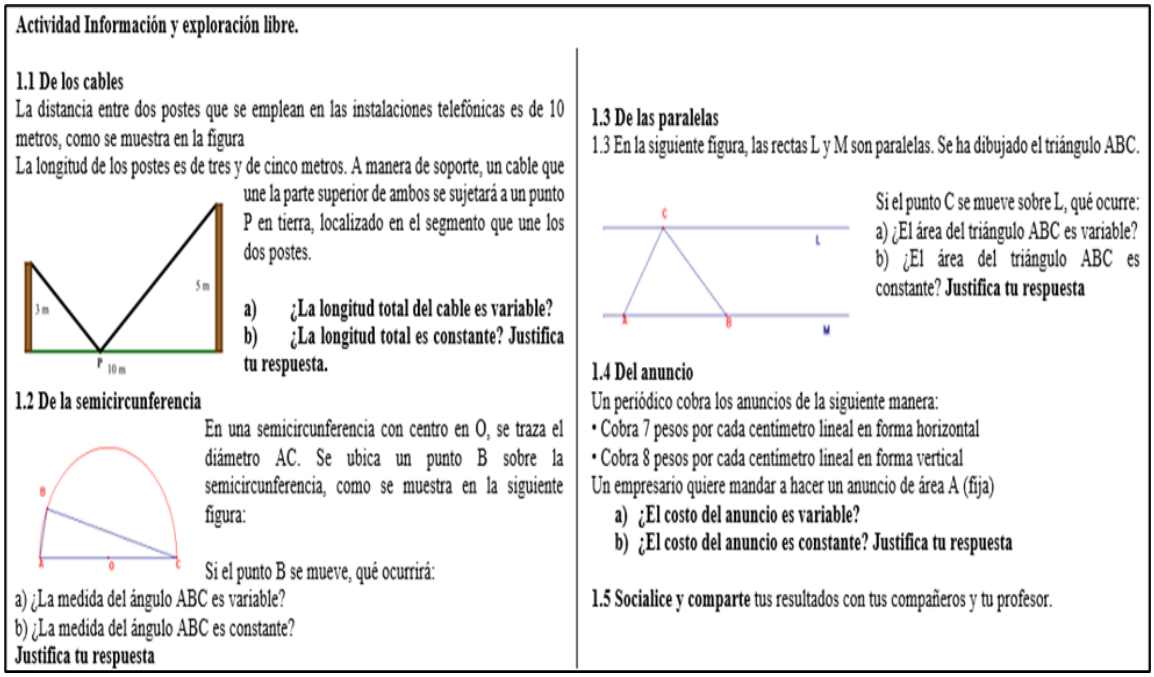
Observemos que E10 indica con diferentes colores las ecuaciones a su vez, las representaciones graficas coinciden con la asignación de estos colores, lo cual, desde nuestra interpretación favorece en el vínculo y la coordinación de las estas representaciones. Asimismo, se instituye que empleó la herramienta punto de intersección (E) entre las rectas. Santos-Trigo

(2014) menciona que el uso de las herramientas tecnologías provee a los estudiantes de opciones para representar e interactuar con la información identificada en los problemas. Debido a las condiciones de presencialidad remota, se hizo necesario emplear los diversos dispositivos y herramientas de comunicación, lo cual, favoreció el desarrollo de los problemas como se hace evidente en este inciso.

El Problema información y exploración libre del taller 8 (Figura 111) establece cuatro problemas con la finalidad de que los estudiantes indicaran para cada una de ellas, si las magnitudes son variantes o constantes (longitud del cable, el ángulo ABC; el área del triángulo, el precio del anuncio). Vale la pena rescatar que de acuerdo con lo que habíamos previsto alcanzar con este problema (ver apartado 4.3.15) algunos estudiantes presentaron varias dificultades en el proceso.

Figura 111

Problema información y exploración libre del taller 15



Actividad Información y exploración libre.

1.1 De los cables

La distancia entre dos postes que se emplean en las instalaciones telefónicas es de 10 metros, como se muestra en la figura

La longitud de los postes es de tres y de cinco metros. A manera de soporte, un cable que une la parte superior de ambos se sujetará a un punto P en tierra, localizado en el segmento que une los dos postes.

a) ¿La longitud total del cable es variable?
b) ¿La longitud total es constante? Justifica tu respuesta.

1.2 De la semicircunferencia

En una semicircunferencia con centro en O, se traza el diámetro AC. Se ubica un punto B sobre la semicircunferencia, como se muestra en la siguiente figura:

Si el punto B se mueve, qué ocurrirá:
a) ¿La medida del ángulo ABC es variable?
b) ¿La medida del ángulo ABC es constante?
Justifica tu respuesta

1.3 De las paralelas

1.3 En la siguiente figura, las rectas L y M son paralelas. Se ha dibujado el triángulo ABC.

Si el punto C se mueve sobre L, qué ocurre:
a) ¿El área del triángulo ABC es variable?
b) ¿El área del triángulo ABC es constante? **Justifica tu respuesta**

1.4 Del anuncio

Un periódico cobra los anuncios de la siguiente manera:
• Cobra 7 pesos por cada centímetro lineal en forma horizontal
• Cobra 8 pesos por cada centímetro lineal en forma vertical
Un empresario quiere mandar a hacer un anuncio de área A (fija)

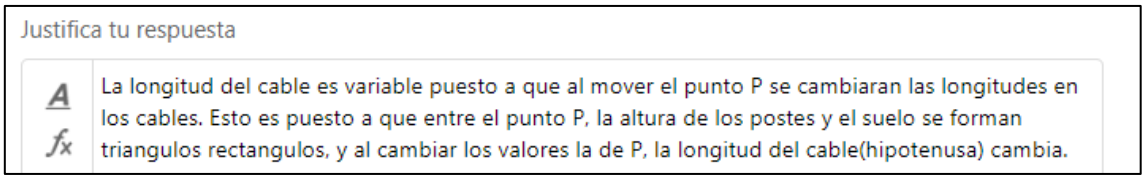
a) ¿El costo del anuncio es variable?
b) ¿El costo del anuncio es constante? Justifica tu respuesta

1.5 Socialice y comparte tus resultados con tus compañeros y tu profesor.

En el problema de los cables *(*Figura 111*)*, se planteó con el fin de que los estudiantes identificarán y reconocieran la variación de la longitud del cable cuando se desplaza el punto P sobre la distancia que separa los dos postes. De las 4 respuestas correctas, E3 y E9 responden empleando el teorema de Pitágoras (Figura 112), justificación esperada para este problema. Inferimos de lo expresado que los estudiantes logran identificar que al variar el punto P, se forman dos triángulos rectángulos, los cuales mantienen uno de sus catetos invariantes, mientras que, el otro cateto depende de la posición de P, lo cual, implica la variación de la magnitud de la hipotenusa (la longitud del cable).

Figura 112

Respuesta de E3 al problema de los cables



Al respecto, Santos-Trigo (2014) menciona que para comprender el problema es importante que los estudiantes identifiquen los elementos claves del problema, en este caso particular, que se reconozca que la variación del cable está ligada a la ubicación del punto P sobre la distancia que separa los postes.

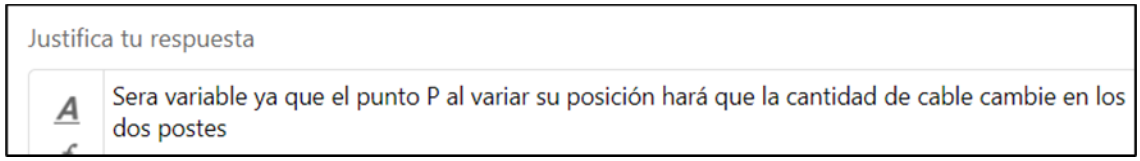
En lo que sigue se muestran las respuestas erradas que presentaron los estudiantes y se infieren posibles causas del error.

En las respuestas de E8 y E2 se mencionó que la longitud del cable es variable, explicando con sus palabras que la variación dependía de la ubicación del punto P (ver Figura 113). De este razonamiento podemos establecer que los estudiantes identificaron la relación de dependencia entre la distancia que separa cada uno de los postes con ese punto P de referencia, lo que implica

directamente la variación de la longitud del cable. Sin embargo, no se hizo evidente cómo encontrar la magnitud de la distancia entre el poste y el punto P o la distancia entre el punto P y el punto de altura máxima del poste (Longitud de cable de sujeción).

Figura 113

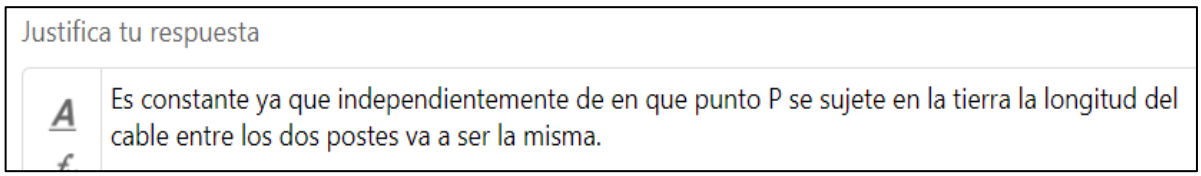
Respuesta de E8 al problema de los cables



No obstante, seis respuestas declaran que, la longitud del cable es constante y no logran distinguir que la variación de las hipotenusas de los triángulos depende de la posición del punto P (ver Figura 114). Las justificaciones de la no variación por parte de E6, E7, E10 se fundamenta en que la longitud del cable entre los postes es la misma, en términos de Polya (1965) ellos no identifican las condiciones del problema, que es una parte esencial de la habilidad de comprensión.

Figura 114

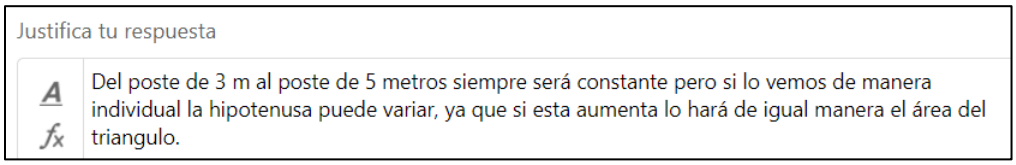
Respuesta de E10 al problema de los cables



En las respuestas de E1, E5, E4 se establecen que al mover P (ver Figura 115) la variación de la hipotenusa se le atribuye a la variación del área, lo cual, es evidencia de una dificultad para distinguir la pregunta del problema porque el área no se relaciona con lo que se solicitaba (variación de la longitud)

Figura 115

Respuesta de E1 al problema de los cables



Algunas explicaciones de los estudiantes en la puesta en común hacen más claras sus percepciones, (ver **Episodio 3**) en relación con las dificultades antes mencionadas.

> **E1:** Si lo vemos de manera individual [al parecer se refiere a la longitud de la hipotenusa en relación con el área del triángulo] la hipotenusa varía en cada triángulo, ya que, pues si una aumenta la otra disminuye… de igual manera lo haría el área del triángulo. Entonces, para mi eran constantes [se refiere a las longitudes de los cables].
> **E4:** […] El total [se refiere a distancia entre los postes] del punto P no cambia, sabemos que la base son 10 metros, por más que usted mueva el punto la longitud de los cables va a ser la misma, porque no aumenta la base.
> **E9:** […] inicialmente, pensé que lo que variaba era la distancia, y al variar la distancia iba a variar la longitud del cable. Pero, ya escuchando mejor, para mí sí el punto P se moviera de todas formas iba a quedar constante, porqué como lo dijo E1, los cables están conectados y si uno se hace pequeño el otro se hace grande y viceversa.
> In: ¿Usted dice que si varia en 0,2 en un lado al otro lado se compensa esa medida?
> **E4:** […] es que si la pregunta dijera: ¿si la longitud de cada cable varia, ¿cuál sería esa variación?, entonces sí variaría. Pero, como pregunta es por el total del cable, la longitud total es constante porque la base es siempre la misma [se refiere a la distancia que separa los dos postes, es decir: 10 metros] por más que usted lo mueva. Si varia, pero cada cable, la suma siempre va a ser la misma.

Episodio 3

En la discusión anterior se hace evidente la confrontación de ideas entre los estudiantes, quienes emplean elementos perceptivos e intuitivos para dar sus explicaciones con sus propias palabras del por qué es constante la longitud del cable. E4 le da énfasis especial al hecho de que la distancia entre los dos postes es fija (10 metros), argumentando que, la base de los triángulos será constante y por ende la longitud total del cable también. Por otra parte, E1 y E9 recurren a

ideas de “compensación de la longitud del cable” en la misma proporción de la longitud de cada cable, desde la variación del punto P.

Benítez & Bueno (2009) mencionan en su estudio que algunos estudiantes tienen dificultad para plasmar, argumentar y justificar la variación debido a que las ideas empleadas para tal fin se pueden fundamentar en la percepción, argumentos matemáticos no válidos o problemas para entender el enunciado, tal como lo comprobamos en la Figura 115 y el Episodio 3.

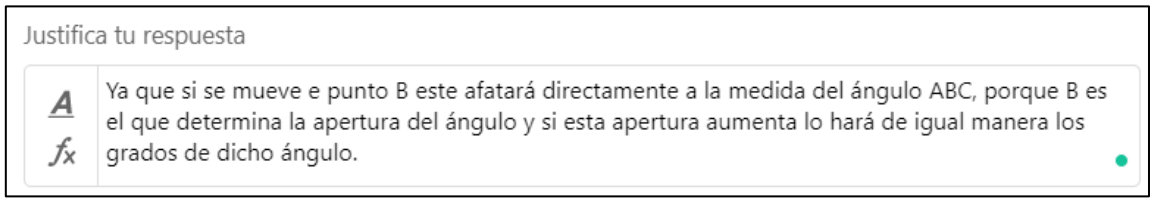
En el problema de la semicircunferencia *(*Figura 111*)*, un aspecto importante de reconocer es que el ΔABC tiene como base el diámetro de la semicircunferencia (el segmento $\overline{AC}$), que B es un punto de la semicircunferencia diferente de A y de C, y que, por lo tanto, el ∠ABC es recto (tal como se explicó en el apartado 5.3.15 del Teorema de Tales). La intención del problema es que los estudiantes expresen que la magnitud del ∠ABC es invariante.

En las respuestas de los 10 estudiantes, destacamos en ellos tres percepciones, que nos permiten indicar que los estudiantes asocian la variación a los elementos de la figura cómo lo son: los ángulos y los lados. A continuación, mencionamos las justificaciones de los estudiantes para este problema.

i) Las respuestas de E2, E3, E4, E7, E10, dan a entender que el mover el punto B implica la variación del ángulo ABC (ver Figura 116), es decir asociación la variación con el movimiento del punto B.

Figura 116.

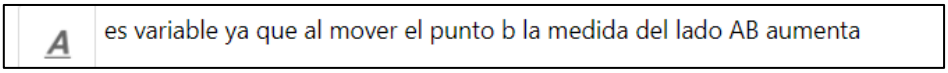
Respuesta de E10 al problema de la semicircunferencia



ii) En las respuestas de E1, E5, E6, E8, ellos asocian la variación de este ángulo con la longitud de los lados del triángulo, de esta manera, el estudiante reconoce y establece una relación entre la longitud de los lados del triángulo y las magnitudes de los ángulos internos, sin embargo, en este razonamiento no se considera que la longitud de $\overline{AC}$ es constante.

Figura 117

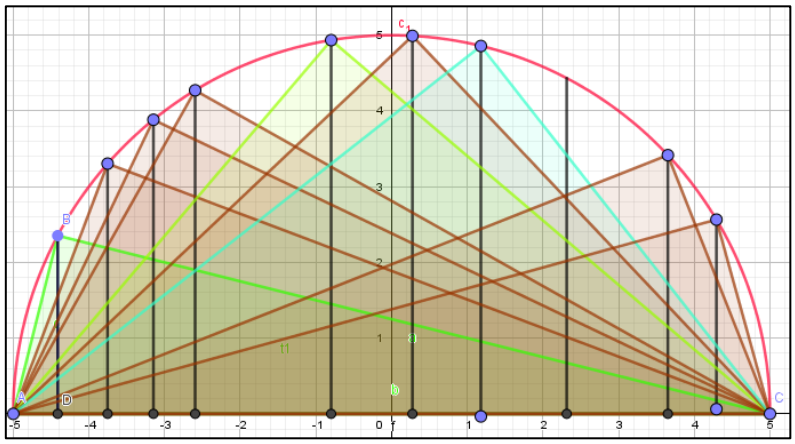
Respuesta de E8 al problema de la semicircunferencia.



iii) En la respuesta enunciada por E9 (ver Figura 119) se muestra una justificación en la que se asocia la variación del ángulo con una sus alturas (inferimos que él se refiere a la que pasa por B y es perpendicular a $\overline{AC}$). Esta respuesta no la consideramos en el análisis inicial, sin embargo, nos parece muy interesante que el estudiante se haya fijado en esa variación, que, aunque no responde a la pregunta que se le planteó si busca otras relaciones de variación del ΔABC. Nosotros lo interpretamos como en la Figura 118y valdría la pena de que si esta respuesta vuelve a surgir en un curso sea aprovechada por el profesor para provocar una discusión al respecto.

Figura 118

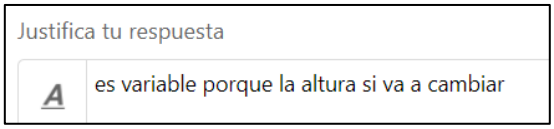
Variación una de las alturas del triángulo



Así, desde esta percepción, se pudo llegó a que no hay una dependencia entre estos dos elementos (magnitud del ángulo y altura del triángulo) del objeto matemático para determinar, dadas las condiciones del triángulo formado con el diámetro de la semicircunferencia.

Figura 119

Respuesta de E9 al problema de la semicircunferencia



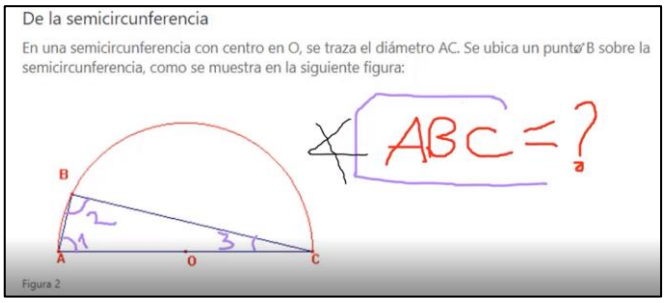
Ante lo anterior, Camargo y Acosta (2012) expresan que la geometría es una rama multifacética de la matemática, que es vista como una actividad humana y una disciplina formal, además, en la geometría desde sus orígenes existe dos polos en constante tensión: i) el polo empírico donde se encuentra lo perceptivo, intuitivo y visualizado, ii) el polo teórico que consolida la estructura axiomática de la geometría.

Según los autores la dependencia y relación entre estos dos polos hacen que la actividad de los estudiantes se direccione, además no es posible hacer geometría prescindiendo de uno de ellos. Esto explicaría porqué los estudiantes no logran establecer la relación entre la variación del ángulo ABC, ya que, se fundamentan en el polo empírico, pero no dan evidencia de aspectos teóricos relacionados con las propiedades del triángulo inscrito en la semicircunferencia.

Una vez se notó que ningún estudiante llegó al proceso esperado y que se dieron las tres percepciones antes narradas, la docente-investigadora se percató de que tal vez ellos no habían identificado correctamente el ángulo al que se hacía referencia, por ello les presentó la Figura 120 y les preguntó qué número correspondía al ángulo $\measuredangle ABC$ y las respuestas que ellos dieron se muestran en el Episodio 4

Figura 120

Puesta en común problema de la semicircunferencia



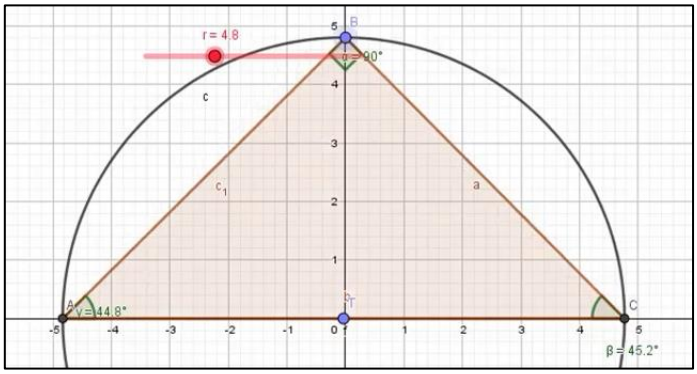
In: ¿qué ángulo se están refiriendo cuando se pregunta por ∡ ABC? Al ∡1, ∡2, ∡3
E3: al ∡2
E9: a los tres ángulos.
E4: al ∡2
E10: el ∡3

Episodio 4

En el episodio se puede evidenciar que la dificultad pudo recaer en la no identificación del ángulo, ya que, la notación del problema no era familiar para algunos estudiantes. Una vez aclarada la notación e identificación del ángulo se presenta un applet con la simulación del problema, en el que se anima el punto B para que ellos observaran que el ángulo es recto y que esta magnitud invariante. En el **Episodio 5** se muestra la interpretación de E4.

Figura 121

Puesta en común de la semicircunferencia

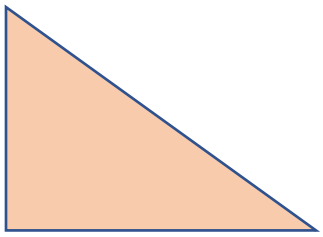


E4: Ubiqué el punto B, en el 5 de "y" y no veo un triángulo rectángulo [él se refería al punto encerrado en el recuadro azul de la **Figura 121**].
[La investigadora mueve el punto B hasta y = 5 tal como lo indicó E4]
E9: Por la inclinación, acomódelo por un cateto, usted imagínese o mueva el teléfono, que quede derecho por un cateto [E9 le explicaba como girar el triángulo haciendo uso de su celular].
E4: Espere… ya muevo el computador [al parecer el joven iba a girar la pantalla de su computador para poder visualizar el triángulo rectángulo].
In: ¿hay un triángulo rectángulo?
E9: Es que hay una inclinación que no lo deja ver a uno, porque uno siempre ve todo derecho y acomodadito [él se refiere a que el triángulo rectángulo siempre se le presenta como se muestra en la [**Figura 122**].

Episodio 5

Figura 122

Posición tradicional de un triángulo rectángulo



Del dialogo inferimos que E4 tiene la percepción de la existencia de un modelo mental alusivo a un triángulo rectángulo cuando se muestra como en la Figura 122. Según Scaglia & Moriena (2005) esto es una dificultad que se presenta en algunos estudiantes e implica el no identificar figuras geométricas debido a los modelos esquemáticos que se han creado como imágenes de las figuras (ejemplo prototípico).

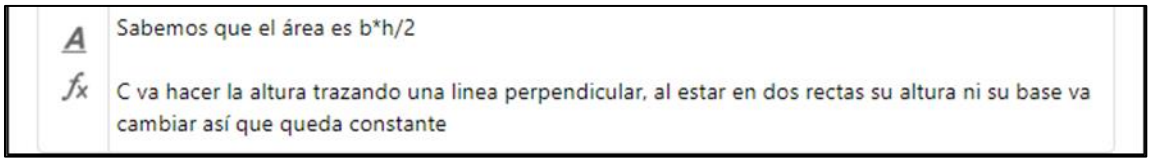
En el problema de las paralelas (Figura 111), los estudiantes pueden identificar los datos principales para poder resolverlo. Lo que se esperaba que ellos vieran era que L y M son rectas paralelas ($L||M$), que la base del Δ ABC es el segmento $\overline{AB}$, que la magnitud de $\overline{AB}$ no cambia, que cuando se mueve punto C sobre la recta L la forma del Δ ABC es distinta. Era importante, que

los estudiantes reconocieran que, las variables que intervienen en el cálculo del área de un triángulo son las magnitudes de sus alturas y de sus bases de este, además que, por estar el triángulo al interior de las rectas paralelas la altura no variaba (condiciones del problema).

En las respuestas descritas en el AVG, los estudiantes E1, E2, E3, E4, E6 expresan el área del triángulo como una magnitud constante. No obstante, tan sólo E4 emplea la justificación de la definición de área de un triángulo (Ver Figura 123). E4 mencionó y reconoció las magnitudes invariantes, es decir, la base y la altura del triángulo que se encuentra entre las dos rectas paralelas y la dependencia del área del triángulo de estas dos magnitudes invariantes.

Figura 123

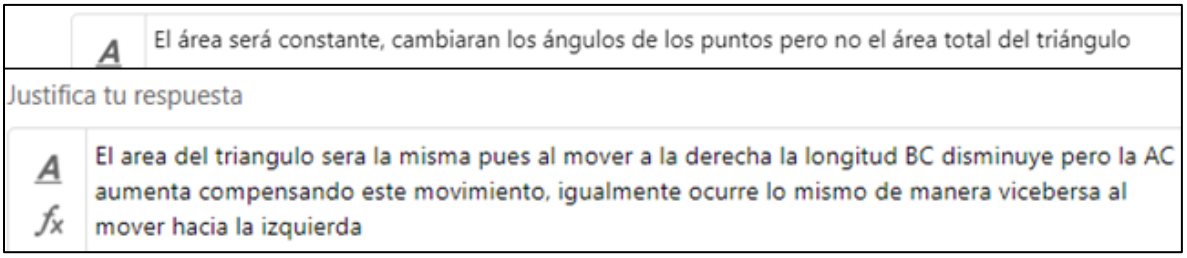
Respuesta de E4 al problema de las paralelas



En la Figura 124, se muestran las justificaciones de E1, E2, E3, E6 quienes fundamentan la dependencia entre otros elementos de la figura, como los ángulos o los lados, pero no emplean argumentos matemáticos válidos. Además, E3 acude a la percepción e intuición, así, estableció que al mover el punto C sobre L, los lados varían y experimentan una compensación entre sí, la cual, asocia de manera equivocada con la magnitud del área del triángulo.

Figura 124

Respuestas de E2 y E3 al problema de las paralelas



Finalmente, en las respuestas de E5, E7, E8, E9, E10 ellos mencionan que el área es variable y emplean justificaciones incorrectas asociando esta variación a los argumentos ya mencionados en la Figura 124 y basaron sus percepciones e intuiciones para justificar la variación que se planteaba en el problema. En concordancia con lo expuesto, evidenciamos que lo estudiantes no identificaron las magnitudes invariantes y las condiciones del problema en su totalidad, tampoco hicieron conexiones entre los conceptos de área de un triángulo.

Por lo anterior, se hace necesario para abordar problemas que involucren configuraciones geométricas, en palabras de Santos-Trigo (2014) que los estudiantes establezcan relaciones y propiedades entre las figuras y sus elementos (rectas, puntos, segmentos, triángulos…), además vale la pena preguntarles sobre los conceptos y las propiedades que están inmersas en la configuración de una situación para establecer posibles conexiones entre ideas y argumentos, de esta manera, dar tratamiento al problema.

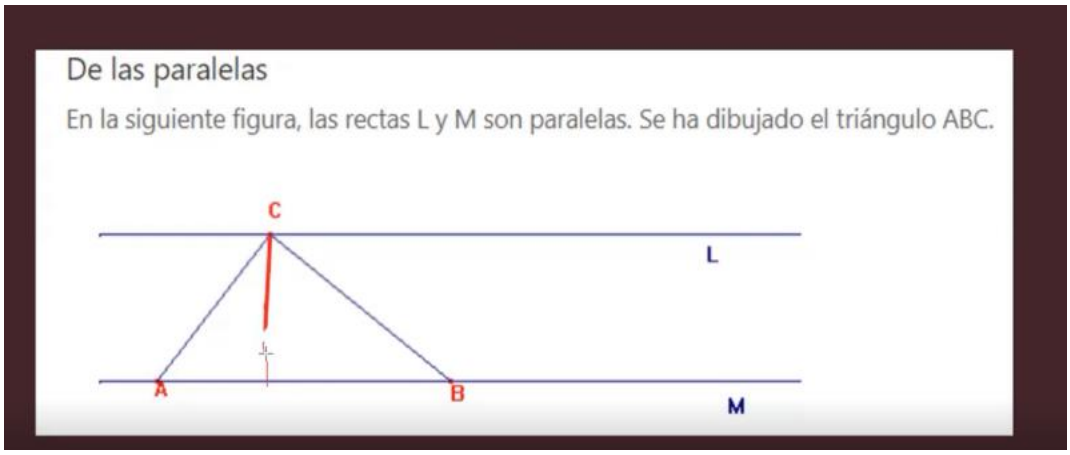
En el **Episodio 6** mostramos cómo la socialización permitió a los estudiantes manifestar los elementos teóricos empleados para comprender el problema. Polya (1965) establece que el uso de definiciones (en este caso, la definición del área de un triángulo) puede proporcionar la identificación de elementos auxiliares para abordar el problema.

> **E4:** AB está en la recta M, C en L. Sabemos que si trazamos una línea perpendicular [él iba dibujando la altura en la pantalla con las herramientas de zoom como se muestra en la Figura 125]
> **In:** ¿Esta trazando la altura?
> **E4:** Sí, C se puede mover en la recta, entonces, la altura no va a variar, es decir, va a ser constante el área.
>
> **Episodio 6**

De lo anterior podemos inferir que el estudiante E4 empleó sus conocimientos previos para justificar que el área era constante, específicamente usó la definición de área de un triángulo. También, se observa en el dibujo de E4 un elemento auxiliar cuando traza la altura del triángulo.

Figura 125

Puesta en común donde se evidencia la comprensión.



Al respecto, Polya (1965) dice que esos elementos auxiliares en problemas de geometría pueden ser líneas, puntos, que permiten deducir con mayor facilidad la solución del problema, de donde E4 logra interpretar que no hay una variación de la altura en el triángulo (Episodio 6).

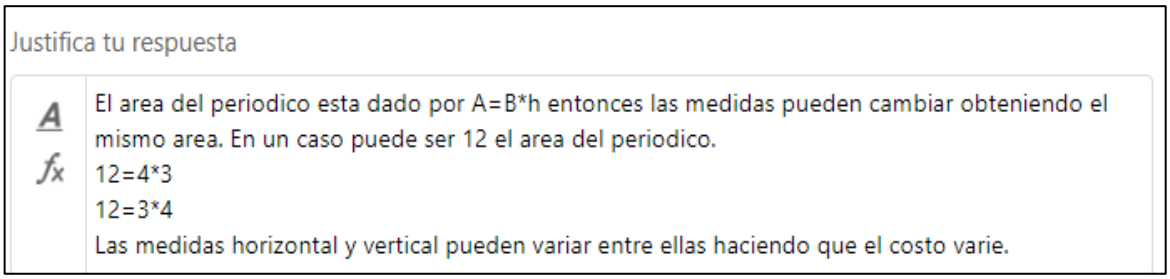
En el problema del anuncio (ver Figura 111) se requería que los estudiantes plantearan que para un área fija se pueden obtener varias dimensiones de los lados, que, consecuentemente mantengan la magnitud del área constante.

Las respuestas de E3, E6 identificaron la dependencia del precio con las dimensiones de la hoja, E3 empleó en primer lugar su conocimiento referente a cómo encontrar el área de un rectángulo.

Él usó la estrategia heurística de particularización planteada por Polya (1965), de esta manera, logran identificar un contraejemplo que les permite inferir que el precio del anuncio es variable y de esta manera comprender el problema (Figura 126).

Figura 126

Respuesta de E3 problema del anuncio

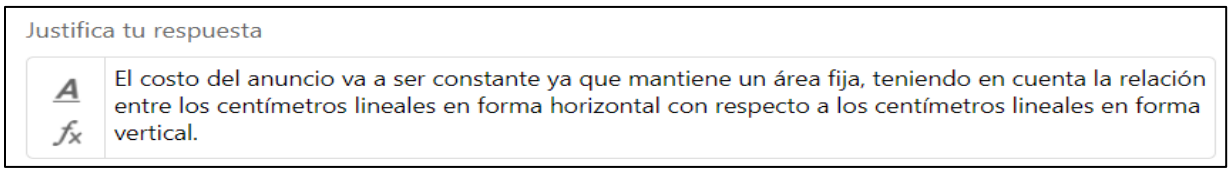


Observamos que tal como lo establecen Fiallo y Parada (2018), el uso casos particulares como un procedimiento empírico permiten a los estudiantes aproximarse al planteamiento de conjeturas y razonamientos para acercarse a la solución de un problema.

Por el contrario, en las respuestas de E1, E2, E4, E5, E7, E8, E9, E10 se justifica que, el precio del anuncio es constante porque el área fija. En este planteamiento, vislumbramos que, los estudiantes no establecen las relaciones entre los datos para indicar el costo en función las medidas del anunció (vertical y horizontal). Es decir, para un área fija, se pueden tener diversas medidas de las dimensiones de la base y la altura que posibiliten la preservación del área.

Figura 127

Respuesta de E10 al problema del anuncio



De la valoración de las actividades, podemos inferir que los estudiantes en algunas oportunidades no identifican la información relevante, ni las relaciones entre los datos inmersos en la situación, tampoco las magnitudes variantes o invariantes presentes en cada uno de estos problemas, lo cual, se convierte en factores que imposibilitan la comprensión del enunciado y, por

tanto, la obtención de una respuesta que se ajuste a las condiciones de los problemas. Según Santos-Trigo (2014) para la comprensión del problema se hace necesario la asociación y vinculación de algunas definiciones, conceptos, procedimientos para aplicarlos en estos contextos

6.2 Evidencias de la habilidad para plantear y ejecutar diversos caminos de solución

Polya (1965), Krulik & Rudnick (1989), Santos (2014), mencionan que, los estudiantes pueden emplear diversas estrategias de solución para resolver un problema y que éstas son generales, es decir, pueden emplear en cualquier tipo de problema, algunas de ellas son: el uso de casos particulares, tablas, gráficos, dibujos, ecuaciones, analogías, etc.

Para presentar los resultados hemos identificado algunos problemas que favorecen el desarrollo de esta habilidad. En la Tabla 31 se muestra la relación de los problemas que se retoman de cada taller con los respectivos descriptores (retomados de la Tabla 3)

Tabla 31

Actividades seleccionadas para la habilidad de plantear y ejecutar.

Problema/Taller/Figura	Descriptores de la habilidad plantear y ejecutar diversos caminos solución.
1/2(Figura 94)	Realiza una tabla. Realiza una figura. Emplea casos particulares. Plantea generalizaciones.
2/6(Figura 107)	Plantea y resuelve una (s) ecuación (es) que represente la situación. Los estudiantes emplearon diversos métodos de solución de ecuaciones lineales 2x2 Realizar una gráfica (empleando GeoGebra)
3/6 (Figura 137)	Plantea y resuelve una (s) ecuación (es) que represente la situación. Realizar una gráfica (empleando GeoGebra) Empleo ensayo y error para encontrar los valores desconocidos
2/8 (Figura 143)	Realizar una tabla (usando Excel) Realizar una gráfica (empleando GeoGebra) Realiza una representación algebraica.
1/9 (Figura 150)	Establece relaciones de covariación Realiza una representación tabular (usando Excel) Plantea una generalización.

El problema información y exploración libre del taller 2 (Figura 94) tenía el propósito que los estudiantes encontraran el patrón o la regularidad y luego expresará la generalidad. Observamos que, en el desarrollo del problema los estudiantes emplearon estrategias fundamentadas en la variación identificada desde lo numérico y lo figural. Desde esta perspectiva surgen tres expresiones de generalidad, donde se define a $n =$ número de la figura. A continuación, mencionamos los diversos caminos que emplearon los estudiantes:

i) En la Figura 128, se muestra la respuesta de E9 donde se empleó una tabla para organizar algunos casos particulares que él obtuvo al contar a partir de la figura, la cantidad de cuadrados presentes.

Figura 128

Respuesta de E9 al inciso b) del problema

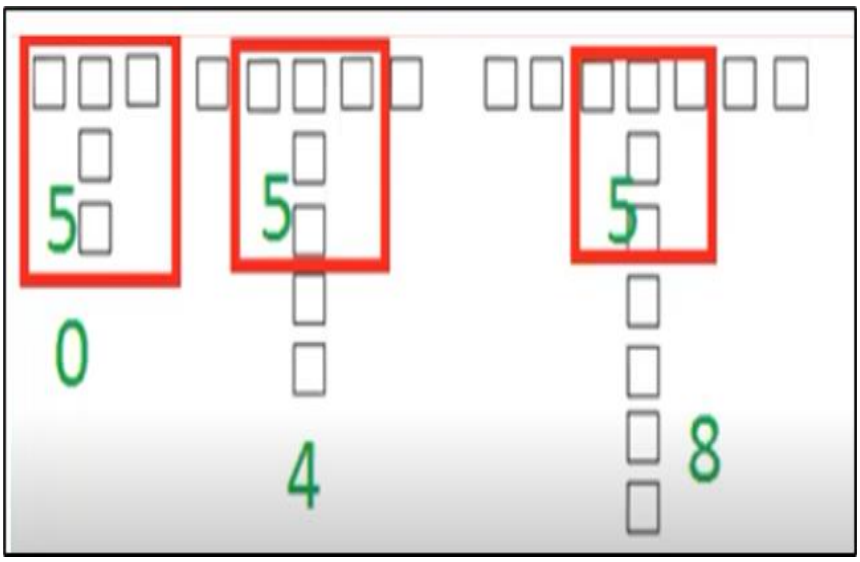
figura		1	2	3	4
cantidad de cuadros	5		9	13	17

Cetina & Cabañas-Sánchez (2022) mencionan que, para generalizar patrones y regularidades, la estrategia recursiva consiste en identificar en cada par de términos consecutivos la diferencia, luego, hacer los incrementos de manera constante. En la tabla construida por E9, se registró la información proporcionada en la Figura 94 de la representación figural del problema hasta la figura 3 y él identifica la diferencia de cuadrados para la figura 4 (de la numeración que él estableció).

ii) En la Figura 129 se muestra la respuesta de E1 donde se evidencia la creación de un rectángulo con la configuración inicial de la secuencia, allí se pude ver que él empleó la heurística de hacer una figura. Acción que según Polya (1965) no debe restringirse exclusivamente a problemas geométricos y puede proporcionar al estudiante la posibilidad de plasmar información relevante para dar solución al problema.

Figura 129

Respuesta de E1 al inciso b)



E1 plantea una agrupación inicial en la que identificó una cantidad invariante de 5 cuadrados (señalados en los recuadros rojos de la Figura 129). Posteriormente, él registra el incremento como los múltiplos de 4 (números verdes fuera de los cuadros). Inferimos que, el dibujo se convirtió en una estrategia que le permitió a la estudiante plantear la generalización. Al respecto, García et al. (2015) indica que el presentar una figura para que los estudiantes reconozcan el patrón y la regularidad involucra la percepción de los estudiantes, por lo tanto, ellos pueden identificar diferentes sub-configuraciones en la figura inicial.

Además, tal como se muestra en la Figura 130 E1 logró expresar la generalización, relacionando el número de la posición y la cantidad de elementos que posee, de esta manera se establece una expresión mediante una función de la forma $f = 5 + (n * 4)$, aquí el estudiante, aunque no usa la notación correcta porque no expresa la función en términos de n, se puede evidenciar que si encuentra el patrón. Además, a E1 le faltó aclarar que para que esa expresión modele la representación dada n debe tomar valores desde cero.

Figura 130

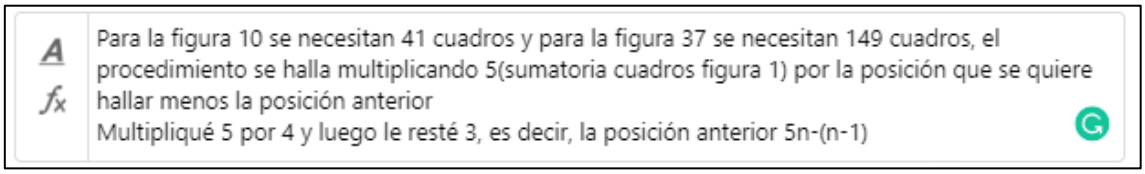
Respuesta de E1 al inciso b)

Al respecto, Cetina & Cabañas-Sánchez (2022) menciona que los estudiantes pueden establecer una estrategia funcional para relacionar una posición con una cantidad de elementos y expresar mediante una función afín de la forma ($f(n) = an + b$).

iii) En la Figura 131 se muestra la respuesta de E6, donde inicialmente solucionó unos casos particulares. Observamos que E6 establece la relación en la que se multiplica por cinco el número de la posición que se requiere (n) y se le resta la posición anterior $(n - 1)$. Es decir, E6 expresó $5n - (n - 1)$. El estudiante identifica empleando casos particulares que, por ejemplo, $n = 10$ realiza lo siguiente: $5(10) - (10 - 1) = 41$; también para $n = 37$, muestra que el mismo razonamiento $5(37) - (37 - 1) = 149$

Figura 131

Respuesta de E6 al inciso b)

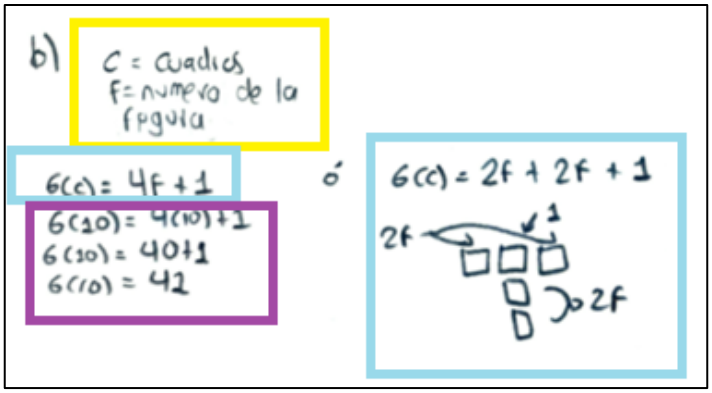


Polya (1965) manifiesta que la particularización es una estrategia empleada en la resolución de problemas, que permite pasar de un conjunto de objetos a uno más pequeño. De esta manera inferimos que él estudiante logró ver la relación entre la figura "n" y su posición anterior "$n - 1$", para posteriormente, expresar la generalidad.

iv) En la Figura 132, la respuesta de E3 permite inferir un acercamiento apoyado en la descripción de la variación del número de cuadrados de la figura inicial. En este sentido E3 registra la variación empleando notación matemática donde cada una de las variables tiene un sentido particular para él, así, c= cuadrados; f= número de la figura, y $G(c) = 4f + 1$

Figura 132

Respuesta E3 al inciso b) del problema1 del taller 2



Destacamos que, la generalización ii) y iv) son expresiones algebraicamente equivalentes, pero logradas mediante diversos caminos de solución, asi mismo preservan la identificación de una relación funcional entre el número de la figura y la cantidad de cuadrados.

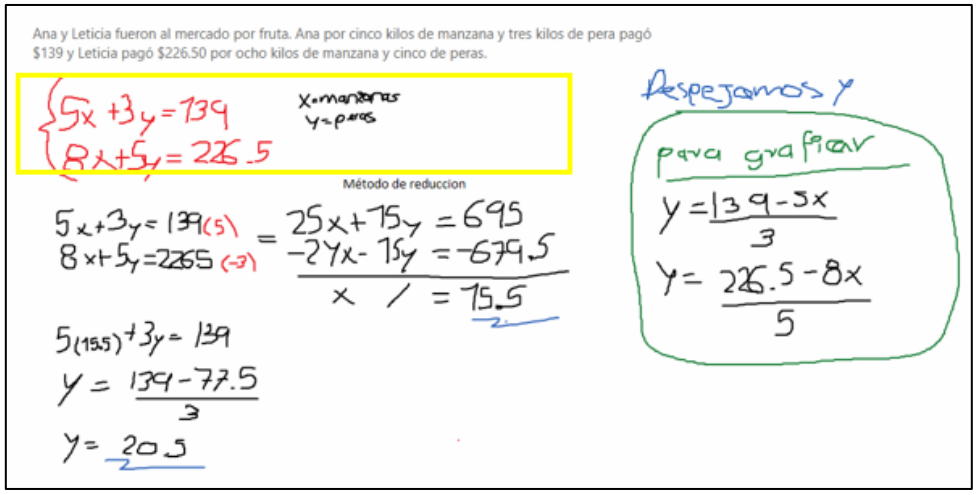
En el Problema exploración dirigida del taller 6 (Figura 107) se pretendía generar un sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2 que fue abordado por los estudiantes empleando diversos métodos algebraicos. Para Polya (1965) plantear una ecuación es una acción similar a una traducción y consiste en representar con símbolos matemáticos el enunciado verbal. El inciso c) buscó que los estudiantes encontraran el precio de cada uno de los productos adquirido por Ana y Leticia. Mencionaremos acercamientos algebraicos empleados por los estudiantes, abordar el problema.

i) En las respuestas registradas por E1, E2, E3, E5, E7, E8, E9, los estudiantes plantearon las ecuaciones que representan la compra efectuada por Ana y Leticia, definieron unas letras que

representaban el precio de lo kilos de manzanas y peras como se mencionó en la Figura 133 (recuadro amarillo). Luego, se evidenció el procedimiento analítico denominado método de reducción.

Figura 133

Respuesta de E3 Inicio c) Problema exploración dirigida del taller 6.

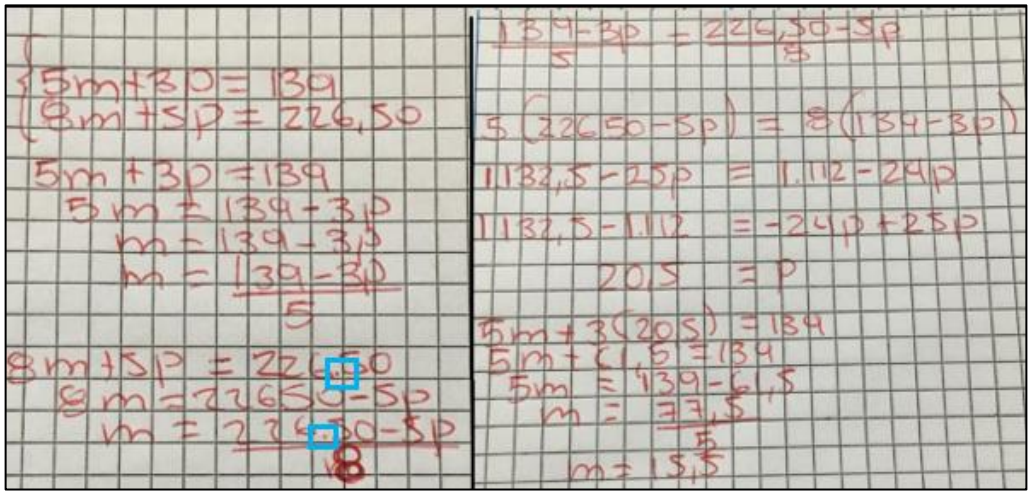


Observamos que E3, buscó eliminar la variable “y” realizó las operaciones algebraicas correspondientes, encontró el valor numérico $x = 15.5$ el precio del kg de manzanas; posterior a ello, reemplazó en la primera ecuación el valor de x”, despejó la variable “y” ($y = 20.5$). Así logró establece el valor de los productos adquiridos por Ana y Leticia. Asi mismo E3 realizó procedimientos de despeje de ecuaciones para graficar, estableció la ecuación explicita de cada una de las rectas (encerró en verde Figura 133). Por lo anterior, identificamos que él reconoce la relación de covariación entre el precio de las peras y el precio de las manzanas en cada una de las ecuaciones planteadas, también podemos observar en él que transitó desde el lenguaje verbal y el lenguaje simbólico. Al respecto, Bernal, et al. (2012) y Cogua (2013) manifiestan que es muy frecuente que la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2 se convierta en una aplicación de algoritmos.

ii) En la Figura 134, se muestran las respuestas de E4 y E6, quienes solucionan el sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2 empleando el método de igualación.

Figura 134

Respuesta de E6 al inciso c) del problema2 del taller 6.



E6 define “m” como la variable que representa el precio de los kilos de manzana; “p” la variable que representa el precio de los kilos de pera. Se observó en el procedimiento algebraico que de cada una de las ecuaciones despejo la variable “m” estableciendo el precio por kg manzana corresponde a 20,5; luego, reemplazó y encontró el valor numérico de la variable “p” de lo anterior, evidenciamos el predominio en la aplicación de algoritmos propios del método de igualación. Identificamos que E6 mostró la combinación del “punto y la coma” para expresar los números decimales.

Creemos que como lo expresa Cogua (2013) en algunas oportunidades los estudiantes no suelen revisar los procedimientos para hacer una interpretación de la respuesta obtenida, es decir, siguen una serie de pasos y si obtienen una respuesta incorrecta no saben por qué llegaron a ella. En este caso la respuesta es coincide con la esperada, sin embargo, es de gran relevancia tal como lo expresan Puga et al. (2016), los estudiantes tengan un lenguaje matemático que siga las reglas

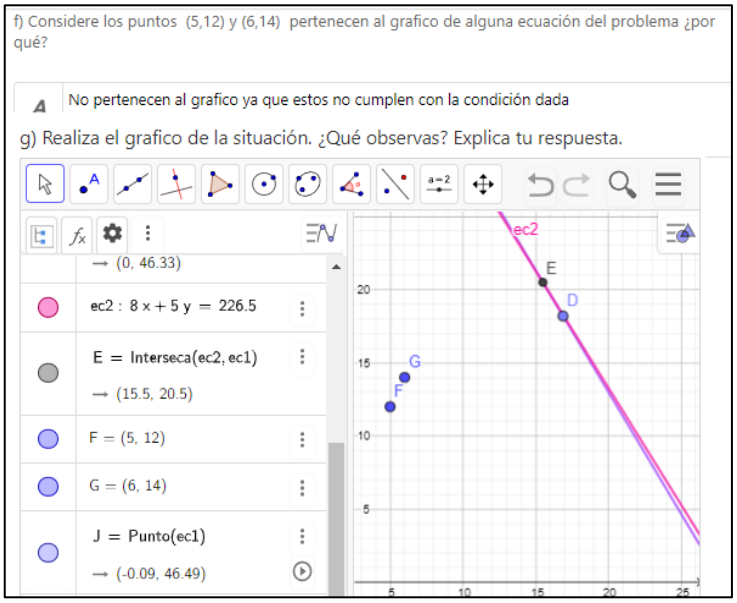
y principios de la ciencia. Es importante mencionar que el uso del separador decimal, es decir, el símbolo que se emplea para separar la parte entera de la parte decimal (punto-coma) los cuales son aceptados de manera simultánea en varios países, por ejemplo, en Colombia se suele emplear la coma decimal, mientras que, en Reino Unido, Australia, se suele emplear el punto decimal. Lo que no es correcto es combinar los dos símbolos en un procedimiento.

Por otra parte, para el inciso f) del Problema exploración dirigida (Figura 107) se pretendía que los estudiantes indicaran si los puntos (5,12) y (6,14) pertenecían al gráfico de alguna de las ecuaciones. Se identificaron dos acercamientos i) construye una recta con estos puntos ii) ubica los puntos en el plano.

i) Las repuestas expresadas por E1, E5, E7, E8, E9 (ver Figura 135) muestran su razonamiento considerando para que los puntos pertenezcan a la ecuación deberían pertenecer a la recta.

Figura 135

Respuesta de E5 al inciso f) del Problema exploración dirigida

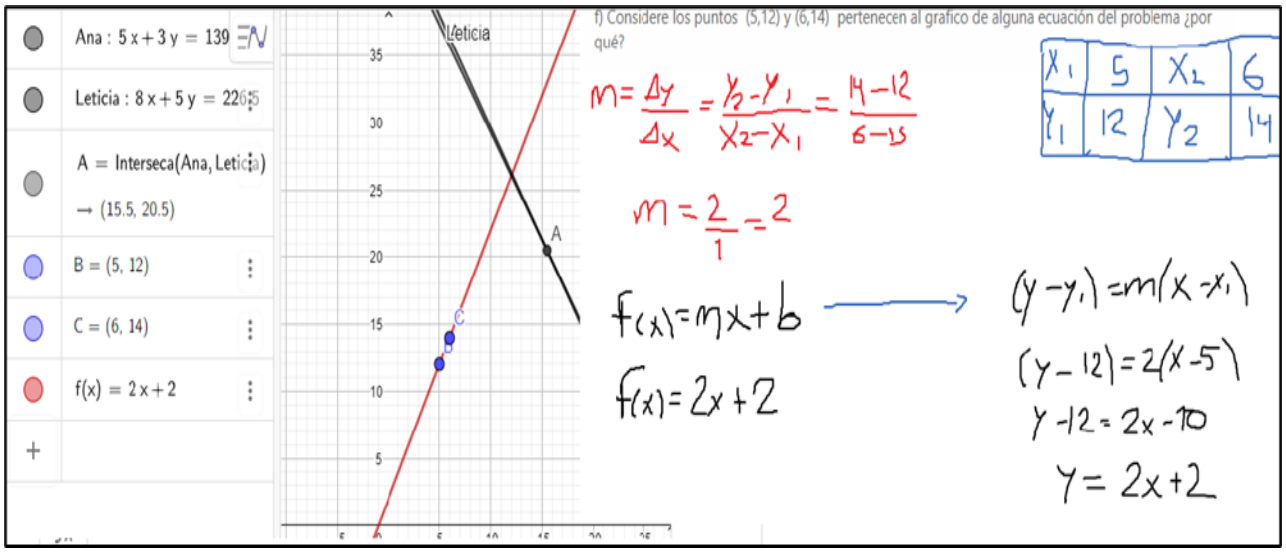


Establecemos en lo expresado por E5 que hay una conexión según Bernal et al. (2012) entre la representación gráfica y representaciones algebraicas de las ecuaciones lineales, ya que, E5, ubicó en la vista gráfica de GeoGebra los punto F y G, además escribió las ecuaciones en la barra de entrada generando las dos rectas; concluimos que él reconoció que los puntos no pertenecen al gráfico de ninguna de las dos ecuaciones, por lo tanto, expresó que los puntos no cumplen con la condición dada. (Figura 135).

ii) En Figura 136 se muestra la repuesta registrada por parte de E3, quien usó el programa de GeoGebra para crear su representación. Allí, ubicó los puntos (B, C) y construyó la representación de la recta que pasa esos puntos (recta roja $f(x) = 2x + 2$). Además, en la parte derecha de la pantalla se logra ver el uso de una tabla de valores y el procedimiento analítico para encontrar expresión algebraica de la recta. Lo cual nos permite inferir que E3 empleó diversas estrategias para dar respuesta a este inciso.

Figura 136

Respuesta de E3 al inciso f) Problema exploración dirigida.



Destacamos el uso del software como una estrategia para le resolución de problemas por parte de E3. Moreno (2014) menciona que el uso de un sistema de Geometría dinámica como

GeoGebra se convierte en un mediador debido a que les ofrece la posibilidad a los estudiantes de representar y manipular los objetos matemáticos para establecer un vínculo entre el conocimiento y el estudiante.

El problema tarea retadora del taller 6 (Figura 137) pretendía en primer lugar, que los estudiantes pueden traducir del lenguaje natural a lenguaje simbólico, en segundo lugar, el interés fue que los estudiantes vincularan los métodos algebraicos y el método gráfico presente en la manera como se aborda la solución de los sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2. En el Problema tarea retadora del taller ,1 es inconsistente, mientras que el *problema tarea retadora del taller 2* posee infinitas soluciones.

Figura 137

Problema tarea retadora del taller 6

3.1 La suma de dos números es 1000 y el doble de su suma es 700.
a) ¿Cuáles son esos números?
b) Realiza un gráfico que represente la situación.

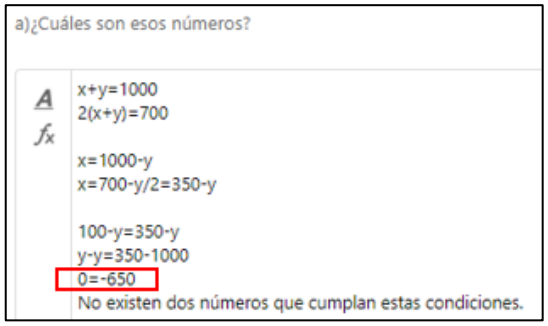
3.2 El perímetro de un triángulo isósceles es 18 centímetros, si se suma la medida de uno de sus lados congruentes a la mitad del lado de la medida del lado no congruente se obtiene 9.

a) ¿Cuál es la medida de cada lado? **Justifica tu respuesta.**
b) Realiza un gráfico que represente la situación.
c) ¿Qué podemos concluir de las tres actividades respecto a los gráficos y la solución de cada sistema de ecuaciones lineales?

Las respuestas registradas en la plataforma de E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9 y E10 plantean la relación entre las variables a partir de una representación algebraica, posteriormente indican que el sistema de ecuaciones lineales 2x2 no tiene solución, es decir, no existen dos números que cumplan las condiciones del problema (ver Figura 138).

Figura 138

Respuesta de E1 al inciso a) del problema tarea retadora



En el acercamiento de E1, en primea instancia se observa que el estudiante estableció la relación entre las variables y los datos del problema, acción que le permitió plantear el sistema de ecuaciones lineales, luego, lo resolvió por el método de igualación mostrando fluidez con la manipulación y despeje de ecuaciones. Observamos que E1 llegó a una contradicción (recuadro rojo) y concluyó que no existen dos números que cumplan con las condiciones del problema planteado.

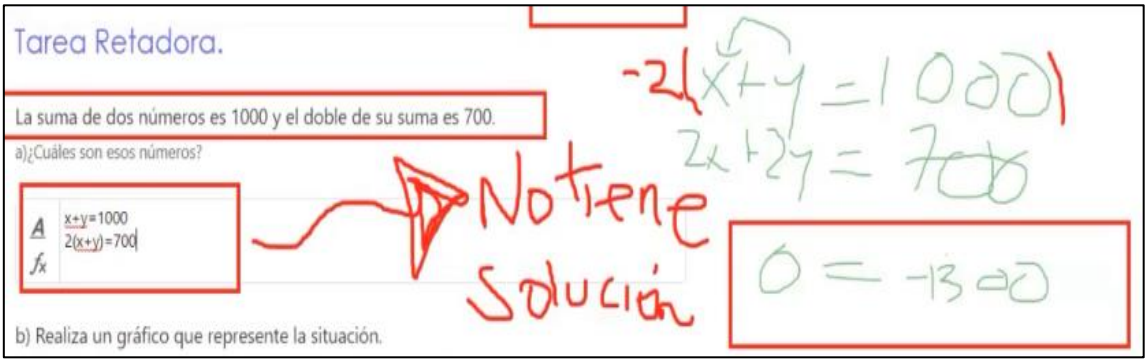
En el **Episodio 7** E9 expresa el uso de otro método de solución del sistema de ecuaciones.

> **E9:** […] al hacerlo por método de reducción [se refiere a cómo soluciono el sistema] al intentar reducir los dos términos nos va a dar cero porque se van a reducir ambos términos a la vez entonces, por dar cero ya va a ser insoluble. [ver **Figura 139**]

Episodio 7

Figura 139

Respuesta socialización de E9 problema tarea retadora

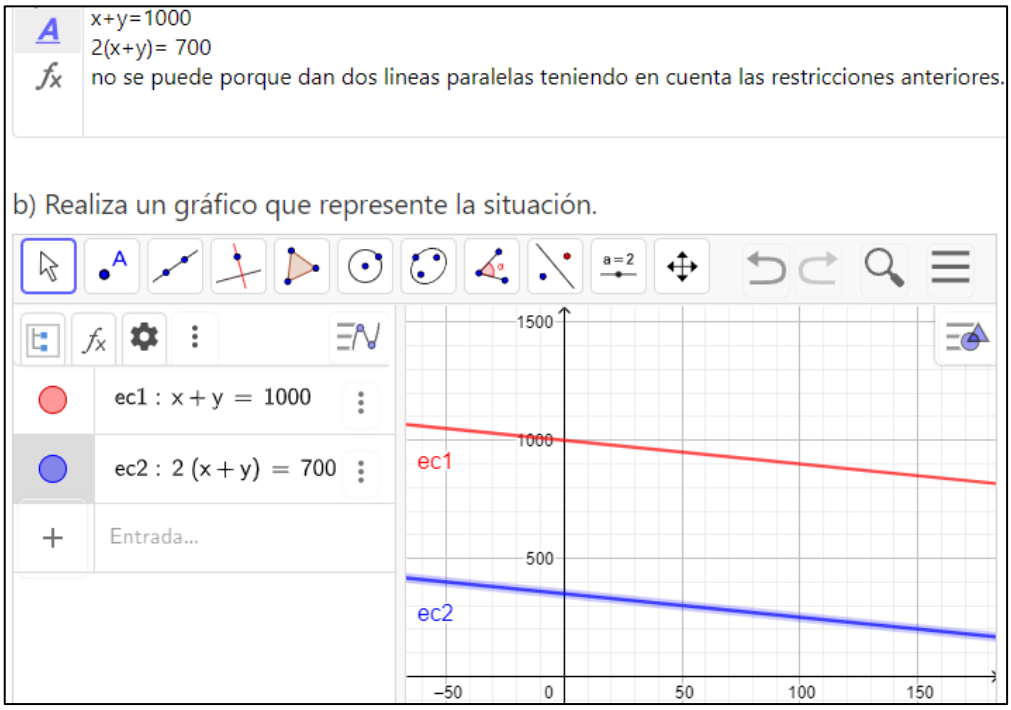


Por lo anterior, concluimos que los estudiantes lograron identificar que el sistema no tenía solución, debido a que llegaron a un resultado contradictorio lo cual implica un planteamiento inconsistente desde el inicio, tal como se menciona en Bernal et al. (2012)

En el inciso b) el Problema tarea retadora del taller 6, se promueve la acción de crear una representación gráfica de la situación. Por lo anterior, en las respuestas de E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9 y E10 se utilizó la aplicación de GeoGebra, esto les permitió inferir la posición relativa de las rectas, es decir, que son rectas paralelas (ver Figura 140).

Figura 140

Respuesta de E5 al inciso b) del Problema tarea retadora



Observamos como E5 muestra un uso sistemático del software de GeoGebra, y tal como lo expresa Santos-Trigo (2016) el empleo de las tecnologías digitales ayuda a los estudiantes a representar objetos matemáticos y a razonar sobre ellos. Pensamos que E5 a partir de lo que visualizó de las gráficas concluye que las rectas son paralelas. Sin embargo, no hace evidente una

justificación teórica de este hecho. (por ejemplo, emplear que las pendientes de las rectas son iguales).

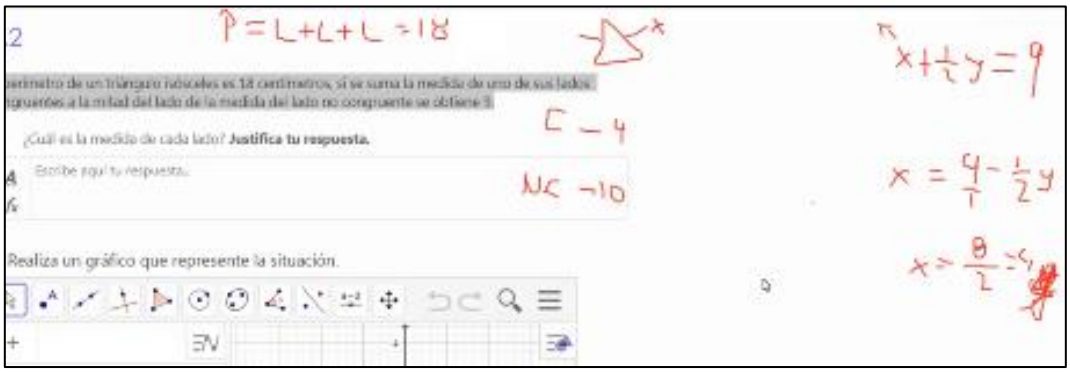
Para el Problema tarea retadora del taller .2, durante la clase sincrónica observamos que E4 empleó la heurística mencionada por Polya (1965) que consistió en realizar una figura para asignar sentido al enunciado y representar la información suministrada, posteriormente, planteó las ecuaciones.

> **E4:** Lo podía dibujar mejor, […realiza los dibujos de la **Figura 141**] sabemos que los triángulos isósceles, los dos catetos o bueno, estos dos lados son los congruentes [ubica en el dibujo los lados congruentes]… que es "x" es decir que, es el mismo valor en este lado y en este lado.
> **In:** Ahora, me estás diciendo el perímetro es esto [In encierra la fórmula de P=L+L+L=18 en la pantalla]
> **E4:** El perímetro es la suma de estos tres lados.

Episodio 8

Figura 141

Repuesta de E4 al inciso a) del problema tarea retadora del taller 6.



Destacamos en el dialogo del **Episodio 8** del que E4 usó la definición de triángulo Isósceles y la definición de perímetro para establecer la relación entre los datos y las variables, es decir que gracias a estas acciones concibe el plan que le permitirá abordar el problema.

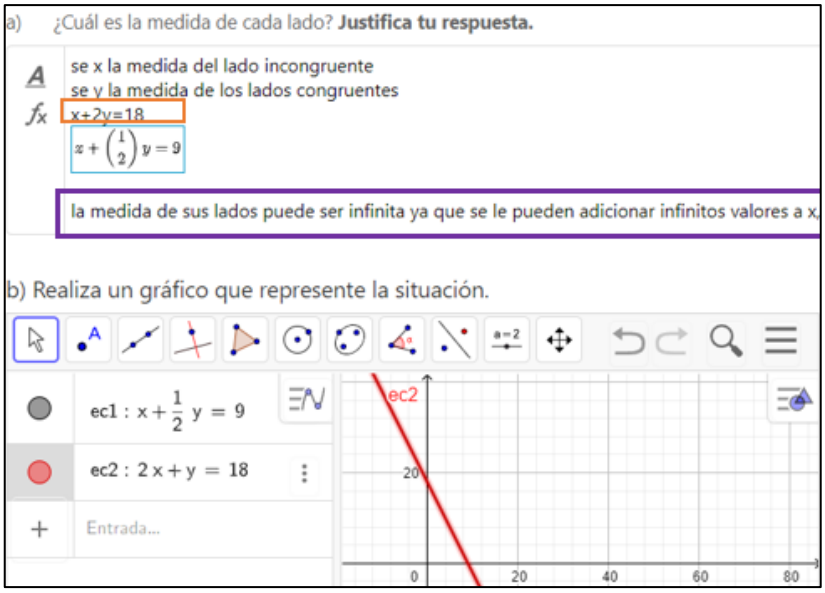
En las respuestas de E1, E2, E4, E5, E6, E7, E8, E9 y E10 se evidencian las ecuaciones que representan el problema, además, la gráfica de las dos ecuaciones lineales, las cuales, coinciden. Por lo anterior, los estudiantes manifiestan que problema tiene infinititas soluciones. (ver Figura 142). Sin embargo, del **Episodio 9** los estudiantes se muestran algo confundidos con la manera de responder en este problema

> **E9:** […] Nosotros lo que hicimos fue hallar la formula y como nos daba cero [se refiere a que plantearon y resolvieron el sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2] dijimos, vamos a graficarla a ver que nos da y aparecieron así las dos rectas, una encima de la otra.
> **In:** ¿Qué ocurre entonces?
> **E9:** por eso, no nos daba nada, ósea, no supimos cómo responder.
>
> **Episodio 9**

Al respecto, Bozzalla & García (2014) manifiestan que, una de las problemáticas que se presentan en los estudiantes al trabajar con ecuaciones lineales es la manera cómo se expresa y se da tratamiento a un sistema que tiene infinitas soluciones. Tal como se evidenció en el **Episodio 9** y en la figura que se muestra a continuación

Figura 142

Respuesta de E8 inciso a), b) Problema3,2 del taller 6



Pensamos que E8 reconoció que son expresiones algebraicas equivalentes, es decir, al multiplicar por 2 la ecuación ($y + \frac{1}{2}x = 9$) (recuadro celeste en la Figura 142) obtiene la expresión algebraica equivalente a $x + 2y = 18$ (recuadro naranja de la misma figura) lo que implica que las representaciones graficas de estas ecuaciones coinciden. Posteriormente, suponemos que E8 logró despejar una la variable "y" en función de la variable "x" asi, $y = -\frac{1}{2}x + 9$, con ello expresa que existen infinitos valores (recuadro morado).

Finalmente, E10, expresa una solución fundamentada en un acercamiento de tipo aritmético, específicamente empleando un caso particular. Esto se evidencia en el **Episodio 10**.

> **E10:** […] también lo podríamos mirar sin todo eso [se refiere a no plantear las ecuaciones] mire, si el lado congruente es 7, sería entonces 7+7=14, y el lado no congruente valdría 4 [se cumple la primera condición $x + 2y = 18$]; ahora la mitad de 4 es 2, por lo cual 2+7 daría 9. [se cumple la segunda condición $y = -\frac{1}{2}x + 9$]
>
> **Episodio 10**

Al respecto, Godino et al. (2014) menciona que algunos estudiantes pueden emplear la estrategia de ensayo y error para encontrar los valores numéricos que satisfacen una expresión algebraica. En este caso, E10 estableció que la medida del lado no congruente del triángulo es igual a 4, y medida del lado congruente del triángulo igual a 7. Estos valores numéricos cumplen con las condiciones del problema, y, se convierten en un caso particular de triángulo isósceles.

En el problema exploración dirigida del taller 8 (Figura 143) se pretendía resolver un problema que involucra la oferta de planes de telefonía móvil. Se esperaba que los estudiantes reconocieran y relacionaran la información suministrada a fin de crear una función para cada uno de los planes, que permitiera establecer el precio en relación con los minutos consumidos (x) , así:

Plan bajo → $f(x) = \begin{cases} 42000, \ si\ 0 \leq x \leq 65 \\ 42000 + 960(x - 65), \ si \ \ x > 65 \end{cases}$

Plan medio → $g(x) = \begin{cases} 84000, si \ \ 0 \leq x \leq 150 \\ 84000 + 840\ (x - 150), si \ \ \ x > 150 \end{cases}$

$$\textbf{\textit{Plan alto}} \rightarrow h(x) = \begin{cases} 144000, \ si \ \ 0 \leq x \leq 300 \\ 144000 + 720(x - 300), si \ \ x > 300 \end{cases}$$

Figura 143

Problema exploración dirigida del taller 8

Una empresa de telefonía móvil tiene los siguientes planes

Plan Bajo	**Plan Medio**	**Plan Alto**
Cargo Básico: $\$35.000 + IVA$	Cargo Básico: $\$70.000 + IVA$	Cargo Básico: $\$120.000 + IVA$
Minutos incluidos: **65**	Minutos incluidos: **150**	Minutos incluidos: **300**
Minuto adicional: $\$800 + IVA$	Minuto adicional: $\$700 + IVA$	Minuto adicional: $\$600 + IVA$

2.1 Responda las siguientes preguntas:

a) Suponga que usted puede pagar cualquiera de los tres planes, pero quiere escoger el que, de acuerdo con su consumo mensual, le salga más favorable, ¿Cuál escogería? Suponga una tasa del 20% para el IVA. **Explica tu respuesta.**

b) Exprese utilizando una representación gráfica o simbólica el valor de consumo mensual en cada uno de los planes. **Justifica tu respuesta.**

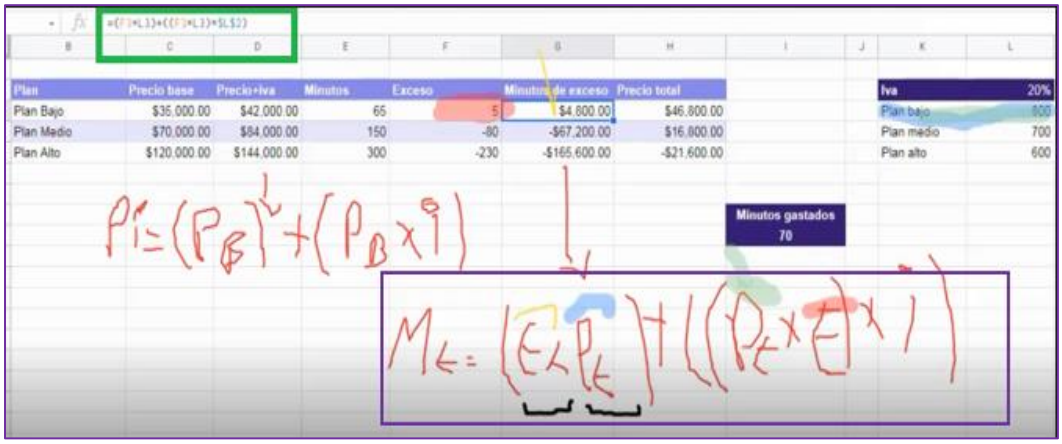
c) Si María tiene un estimado de consumo de 250 min, ¿Cuál de los planes le beneficia? ¿por qué? **Justifica tu respuesta.**

Para la solución de este problema se evidenció algunas estrategias como: acercamientos de tipo aritmético y analítico, el uso de software como GeoGebra y Excel para representar y dar tratamiento matemático al problema. A continuación, proporcionamos evidencias al respecto.

La Figura 144 evidencia las respuestas al *inciso a)* del problema por parte de E3, E5, E8. Allí los estudiantes emplearon el programa Excel donde establecen algunos comandos que le permiten calcular el precio a pagar para cada uno de los planes en función a la cantidad de minutos consumidos.

Figura 144

Respuesta de E3 al inciso a) uso de Excel.



Observamos que E3 transfirió la información suministrada en el problema a Excel, agrega unas casillas donde él hace explícito y para cada uno de los planes indica: el cargo básico (P_B), precio+IVA (P_i), minutos que incluye el plan, los minutos de exceso (E), el precio de los minutos de exceso con IVA (P_t), y el precio total (M_t). Para calcular el precio a pagar por los minutos de exceso, E3 estableció la siguiente: Olvera (2015) enuncia que el uso de la hoja de cálculo de Excel les proporciona a los estudiantes oportunidades para plasmar las condiciones del problema y las relaciones entre los datos suministrados. En el **Episodio 11** E3 expresa el modelo que construye con apoyo de Excel.

> **E3:** […]por ejemplo, para un consumo de 70 minutos, seria 65+5 [se refiere al plan bajo], pagaría $4.800 de exceso con el IVA y el total es $46.800 [ver **Figura 144**]
> **In:** ¿Cuál es la expresión que determina el valor a pagar?
> **E3:** […] se está multiplicando el exceso por este valor por los $800 y lo vuelve a multiplicar, pero para calcular el IVA, luego suma al primer valor [cargo básico]
> **In:** ¿por qué?
> **E3**: toca calcular primero el valor del precio del exceso para sobre ese valor calcular el IVA
>
> **Episodio 11**

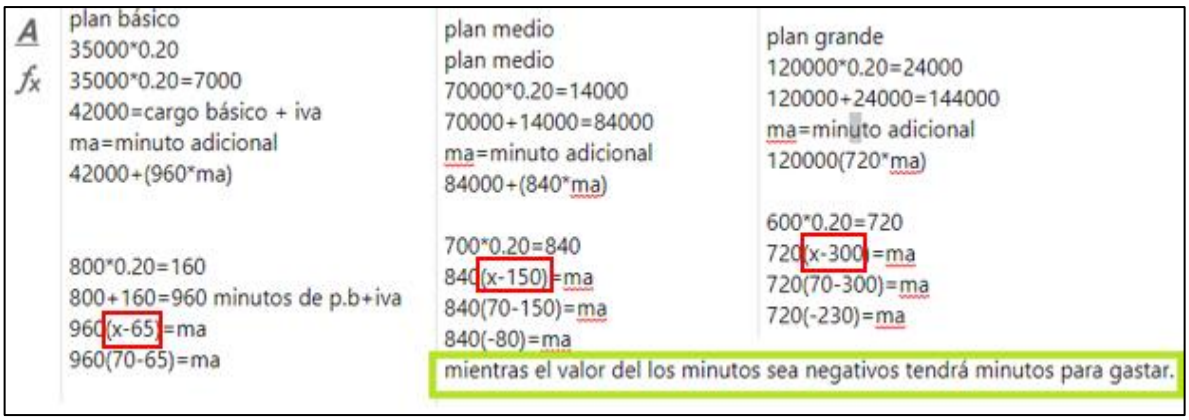
Del dialogo, se puede evidenciar finalmente el modelo matemático que planteo E3 para encontrar el valor a pagar. $M = (EP_t) + (P_tE)i + (P_B)$, de manera equivalente se puede expresar

$M = (EP_t)(1 + i) + (P_B)$, que corresponde a multiplicar la cantidad de minutos de exceso (E ubicado en F3) por el precio del minuto con IVA (ubicado en L3) más el cargo básico del plan. (Ver recuadro verde Figura 144). Al respecto, Godino & Batanero (2002) mencionan que los porcentajes mantienen una proporcionalidad directa, en este caso, podemos inferir que de lo expresado por E3 (Recuadro morado Figura 144) $M_t = (EP_t) + (P_tE)i$; lo cual es equivalente al factorizar a $M_t = (EP_t)(1 + i)$, él aplicó el aumento de un número en el *i* % de su valor implica calcular el (100+i) % de dicho número o de manera equivalente multiplicar el número por (1+*i*/100).

En las respuestas registradas en el AVG E1, E2, E4, E6, E7, emplean cálculos aritméticos para deducir el precio de los planes dadas las condiciones del problema. En el acercamiento planteado por E7 (Figura 145) el estudiante reconoce el porcentaje del IVA y le da tratamiento desde su representación decimal ($20\% = 0.20$).

Figura 145

Respuesta de E7 al inciso a) del Problema exploración dirigida.



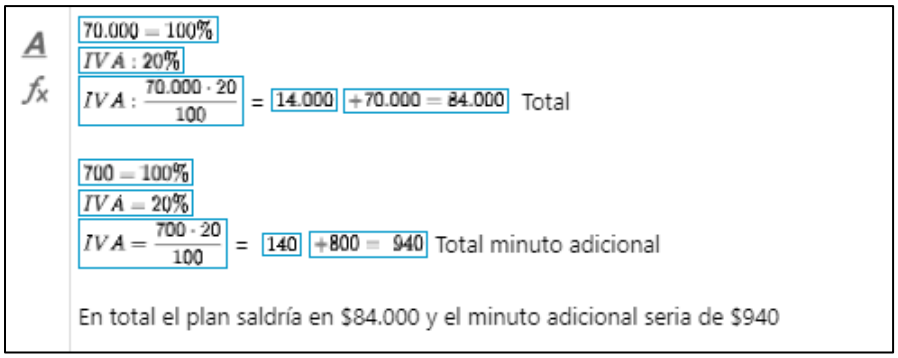
E7 planteó para cada uno de los planes i) el cargo básico con IVA incluido, ii) para cada una de las tarifas estableció la relación del cargo básico más el valor de cada minuto adicional con IVA incluido. Por lo anterior, creemos que E7 identificó la relación funcional presente en este

problema y se encuentra en el transitó entre la aritmética y el álgebra tal como lo menciona Mason et al. (1999), definió la cantidad variable como "ma" (minutos adicionales), plantea, por ejemplo, para el plan bajo: $42.000 + 960(ma)$ iii) E7 identifica que, cada uno de los planes incluye cierta cantidad de minutos. Entonces expresó la condición al escribir $(x - 65)$, $(x - 150), (x - 300)$ (recuadro rojo en cada plan)

En la respuesta de E4 también se realiza un acercamiento aritmético (ver Figura 146) él hace uso de la equivalencia entre porcentaje y su fracción decimal. Es decir, $20\% = 20/100$.

Figura 146

Respuesta de E4 al inciso a) del Problema exploración dirigida.



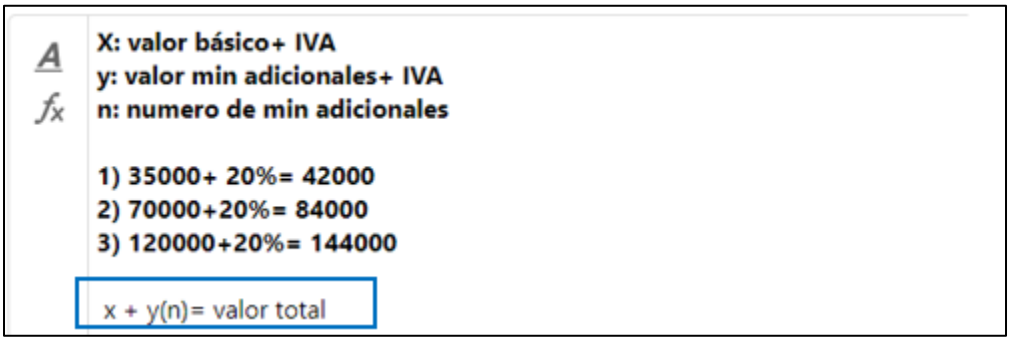
Observamos en el acercamiento a la solución por parte de E4, quien encontró el IVA al cargo básico del *plan medio* ($\frac{70000*20}{100}$), luego, adiciona a este valor el cargo básico $(14.000 + 70.000 = 84.000)$ E4, realizó el mismo procedimiento para encontrar el valor del minuto adicional con IVA. Finalmente, expresó con sus palabras que el precio total del plan se obtiene al sumar el precio del plan con IVA incluido ($84000) más el precio con IVA incluido de los minutos adicionales. Por lo anterior, deducimos cierta generalidad en la respuesta. Según Posada et al. (2006) las relaciones funcionales implican en los estudiantes analizar relaciones de covariación entre las variables. Allí el estudiante logra establecer la covariación entre el precio a

pagar con respecto a la tarifa base y los minutos adicionales. Destacamos de esta respuesta la relación numérica que establece el problema y la representación verbal que el estudiante creó.

Finalmente, presentamos la respuesta de E10, donde se evidencia la construcción de una expresión algebraica que modela el problema (ver Figura 147), hacemos la aclaración que a pesar no cuenta con un lenguaje matemático sucinto, refleja las relaciones que el estudiante logró reconocer y plantear.

Figura 147

Respuesta de E10 al inciso a) Problema exploración dirigida del taller 8.



En la respuesta de E10 mencionamos que, definió como el valor básico con IVA del plan "x", el valor de los minutos adicionales con IVA "y" y el número de minutos adicionales como "n". Luego, presentó acudiendo a la numeración 1), 2) y 3) el precio con IVA incluido de cada uno de los planes (bajo, medio, alto). Finalmente plantea una expresión que relaciona las variables definidas y las relaciones entre ellas, así, plantea que el valor básico con IVA incluido más el número de minutos adicionales por el precio del minuto adicional le da el valor total. (ver recuadro azul Figura 147).

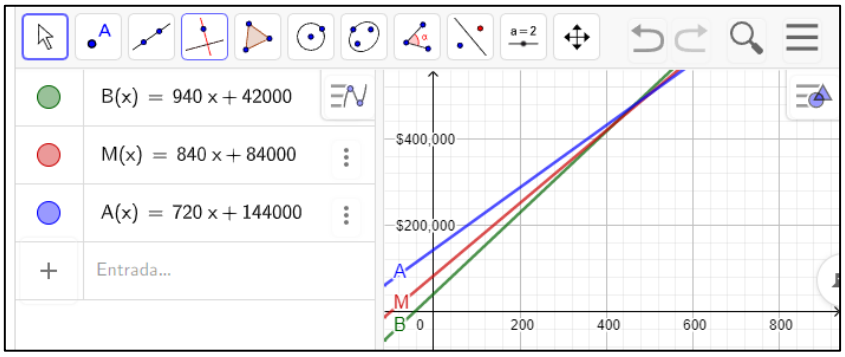
En la respuesta de E10 recalcamos el sentido que le atribuye a cada una de las variables que definió y la expresión analítica que usó (ecuación) $x + y(n) = valor\ total$. Mason et al. (1999) menciona que los estudiantes suelen emplear símbolos y palabras combinados para registrar

la generalidad, en este caso, él proporciona una expresión que permite establecer el precio de los tres planes.

Para el inciso b) pretendió que los estudiantes expresaran por medio de una representación gráfica y algebraica el valor de consumo mensual de cada uno de los planes. En este primer acercamiento, las respuestas de E5, E4, E7, E8 establecen una representación algebraica y gráfica que permite encontrar el valor de consumo mensual de los minutos adicionales.

Figura 148

Representación de E8 con otras condiciones



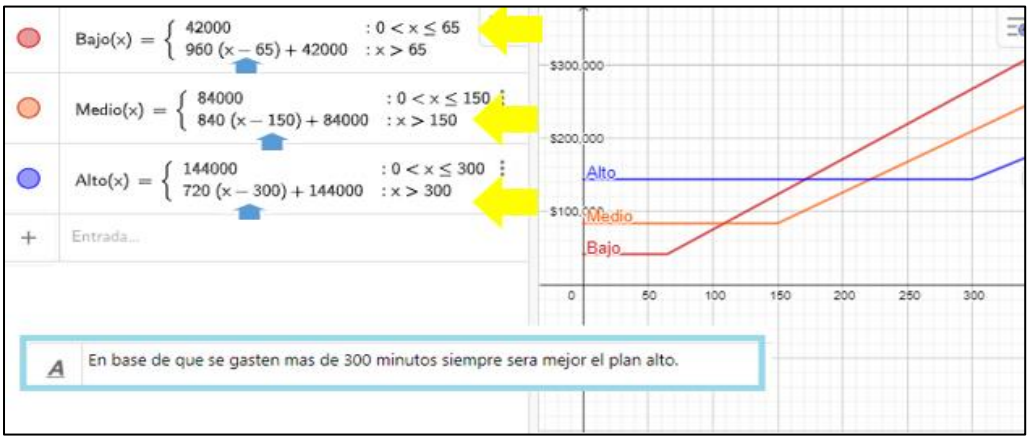
Inferimos que, los estudiantes logran establecer la variación lineal constante de los tres planes de acuerdo con el precio de minuto adicional en cada uno de estos. Sin embargo, destacamos de esta representación que puede corresponder al precio si se establece la condición de x: representa el número de minutos adicionales en cada plan. Por ejemplo, si para el plan B(x) se tiene un exceso de 9,5 minutos, $B\ (9{,}5)\ = 940(9.5)\ + 42.000$, es decir, $B(9{,}5) = 50.930$, por lo tanto, el valor a pagar por el consumo en el plan bajo con 9,5 minutos de exceso es igual a $50.930. De este planteamiento inferimos que, es importante analizar con los estudiantes en dominio y el recorrido de la función definida tal como lo siguiere Fiallo y Parada (2018)

En el segundo acercamiento, para el *inciso b)* las respuestas registradas en el AVG de E1, E6, E10 y E3 realizan tanto la representación algebraica como gráfica (ver Figura 149). En este

planteamiento, los estudiantes consideraron para cada uno de los planes, la cantidad de minutos incluidos y el cargo básico (función constante), luego, los estudiantes definen una función lineal en el que se tiene como constante de variación el valor de cada minuto adicional con IVA incluido (dependiendo del plan) por la cantidad de minutos adicionales.

Figura 149

Respuesta de E9 al inciso b) representaciones: gráfica y algebraica



Como se mencionó al inicio en el apartado (4.3.9) lo expresado en la respuesta de E9 era lo esperado. Aquí acentuamos el uso que él hace del software de GeoGebra para representar la función establecida algebraicamente. Observamos que, para cada uno de los planes, E9 estableció cómo encontrar los minutos de adicionales (flechas azules); expresó los intervalos de cada una de las funciones por partes que modelan el problema (flechas amarillas), definió el dominio de la relación funcional (números reales positivos)

En el problema información y exploración libre del taller 9 (Figura 150) se pretendía que los estudiantes dieran tratamiento a una situación del contexto económico de una población indígena. los estudiantes deberían identificar la relación de covariación entre el precio del maíz del año próximo y el precio del año anterior más el aumento del IPC aplicado al precio de ese año anterior. Para completar una tabla de valores, se hace necesario que los estudiantes lleven a cabo

algunas estrategias que les permitan establecer las relaciones entre los datos y las variables de problema.

Figura 150

Problema información y exploración libre del taller 9

1.1 Para sustentar su economía, los indígenas realizan tejidos artesanales; además de dedicarse a cultivos tales como el maíz. En Colombia el aumento del costo de los productos de la canasta familiar, incluido el maíz, está relacionado con el índice de precios al consumidor (IPC), el cual es un porcentaje que determina el aumento o disminución de estos productos. A continuación, se muestra una tabla con la variación anual del IPC en los últimos años, según el DANE.

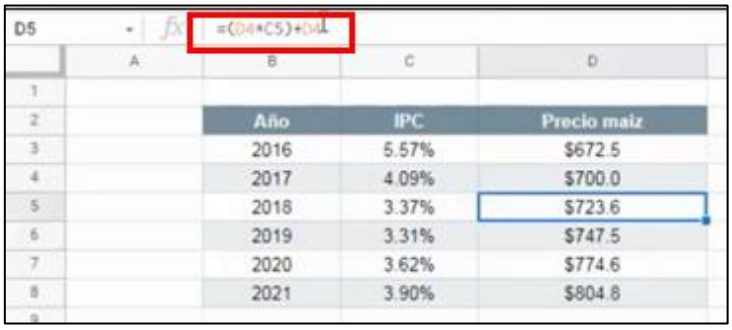
AÑO	IPC (Anual)	Precio de Maíz (kg)
2016	5,57%	
2017	4,09%	$700
2018	3,37%	
2019	3,31%	
2020	3,62%	
2021	3,9%	

a) Complete la tabla anterior.
b) ¿Cuál será el precio del Maíz en el 2021 si el IPC es de 3,9%?
c) Halle una función que relacione el IPC (%) y el Precio de Maíz (kg) en el 2020.
d) ¿Cómo crees que pueda ayudar a las comunidades indígenas conocer el IPC anualmente?

En las respuestas registradas en el AVG, se observó que E3 y E6 emplearon Excel para realizar la tabla de valores solicitada (ver Figura 151).

Figura 151

Puesta en común E3 planteamiento de la función



E3 vincula los precios del maíz y el IPC, mediante una fórmula que se logró identificar (recuadro rojo) cuando el estudiante socializó su respuesta, y que nos permite inferir la relación

entre los datos, pues, para ver como encontró el precio del maíz en el año 2018, se ubica en la casilla correspondiente ($D5$), allí observamos la fórmula que relaciona, las casillas D4, que representa el precio del maíz para el año 2017, la casilla C5, donde se establece el porcentaje de incremento del IPC para el año 2018. Finalmente, las acciones realizadas por E3 permiten mostrar que para calcular el precio del maíz para el año 2018, el estudiante sumó el incremento del IPC con respecto al precio del año 2017 ($D4 * C5$), luego, sumó el precio del maíz del año 2017 (D4), es decir, simbólicamente obtuvo la formula $D5 = D4 * C5 + D4$, la cual, arrastró para que el software le permitiera encontrar el precio del maíz de los otros años.

Al respecto, Olvera (2010) documentó cómo los estudiantes cambian su pensamiento algébrico al emplear como apoyo en la resolución de problemas la hoja de cálculo, de esta manera plasmar las condiciones del problema, tal como lo hizo E3.

En el **Episodio 12**, se muestra el razonamiento de E3 sobre cómo empleó Excel, es evidente que logró establecer qué variables cambian y cómo cambian para poder expresar la relación existente entre las estas.

> **E3:** Entendiendo cómo funciona la tabla [se refiere a la información del problema] nosotros la llevamos a Excel… y El Excel nos calcula todo directamente […] quedaría el precio del maíz para el año entrante, es igual al precio del maíz por el interés, más el precio del maíz ($P_{m+1} = P_m xI + P_m$) [escribe en rojo ver Figura 152]

Figura 152.

Respuesta de E3 en la puesta en común.

Año	IPC	Precio maiz
2016	5.57%	$672.5
2017	4.09%	$700.0
2018	3.37%	$723.6
2019	3.31%	$747.5
2020	3.62%	$774.6
2021	3.90%	$804.8

$P_{m+1} = (P_m xI) + P_m$

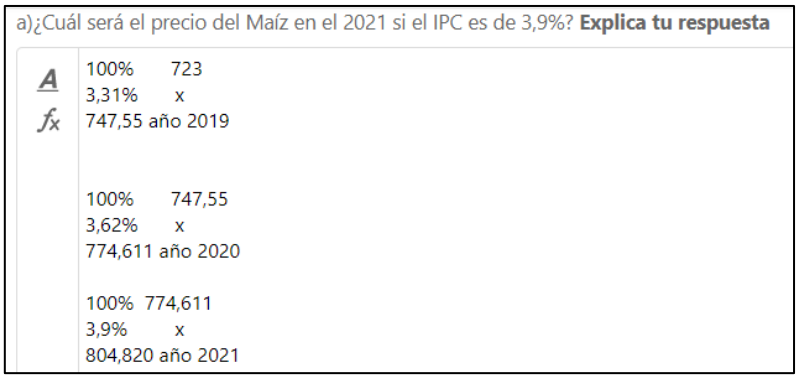
El conocer estos valores ayudara a las comunidades indigenas a saber como se maneja el precio de su producto, el cual va creciendo

Episodio 12

En las respuestas reportadas por E7, E8, E9, E10 se emplea el procedimiento de regla de tres simple, allí se observa el reconocimiento de la variable “x” como el precio del maíz con el incremento del IPC correspondiente al año de interés (ver Figura 153)

Figura 153

Respuesta de E7 al inciso a) del problema del taller 9



Se hace explicito el uso de la regla de tres simple. En esta Respuesta E7 no se plantea una generalización. En el acercamiento realizado E7 se hace hincapié la aplicación reiterativa de la regla de tres. Al respecto, Obando (2018) y Godino & Batanero (2002) menciona que es un algoritmo de los más utilizados por los estudiantes, coinciden con que se aplica en situaciones donde se requiere calcular un aumento proporcional, es decir, existe una relación de covariación directamente proporcional (tasas fijas de variación) entre las magnitudes.

En las respuestas registradas por E1, E2, E4, E5, E9, E10 se evidencian procedimientos que consideran la dependencia del precio del año en cuestión (ver Figura 154), con el precio del año inmediatamente anterior más el incremento porcentual de esté. En el Episodio 13 E1 lo relaciona con una experiencia anterior, es decir, plantea una analogía o similitud Polya (1965)

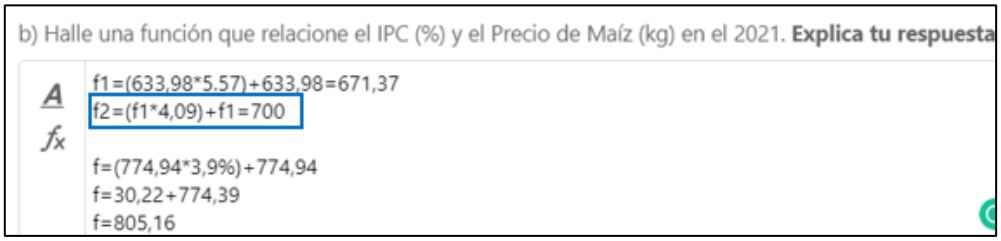
E1: […] nos dimos cuenta de que, f2 iba a depender de f1 por el porcentaje que se le añadía más f1. ¿si me hago entender?
In: ¿quién es f1 y quién es f2?
E1: f1 es el valor inicial ósea el primero, el que aparece en la tabla. [refiriéndose al precio del maíz del año 2016 (f1) para encontrar el precio del maíz para el año 2017 (f2) Figura 154]

E1: […] algo similar a lo de la sucesión de Fibonacci que hicimos la vez pasada.

Episodio 13

Figura 154

Respuesta de E1 al inciso b) del problema



Concluimos que E1 logró plantear una función establece la dependencia entre el precio de un año con el precio del año anterior más IPC (ver recuadro azul Figura 154)

6.3 Evidencias de la habilidad para validar y verificar la solución del problema

Desde la perspectiva de Polya (1965) se menciona la necesidad de realizar una visión retrospectiva o "mirar hacia atrás" lo cual hace necesario que los estudiantes se estén preguntando sobre: los conocimientos y procedimientos que han empleado, los cálculos efectuados, la información han empleado, entre otras acciones que los ayuden convencerse y converse a los demás de que sus resultados son correctos. Desde esta habilidad, la respuesta no es el fin último del problema, se requiere monitoreo, control y verificación durante todo el proceso.

En la Tabla 32 presentamos algunos problemas que la se adecuaron para el desarrollo de habilidades para validar y verificar la solución del problema, problemas que relacionamos con descriptores de la Tabla 4.

Reconocemos que la metodología propuesta por Fiallo y Parada (2018) permitió al final de cada problema una socialización y discusión de resultados en donde tanto los estudiantes como la docente exteriorizaron y compartieron sus ideas, razonamientos y procedimientos a fin de, evaluar y monitorear las respuestas.

Tabla 32

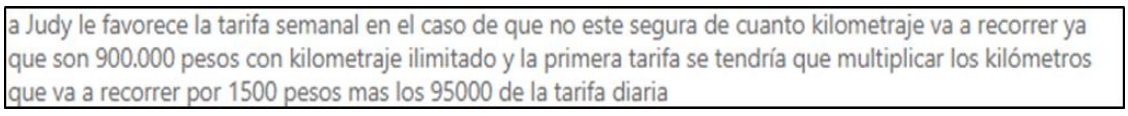
Actividades seleccionadas para la habilidad de validar y verificar.

Problema/Taller/Figura	Descriptores de la habilidad para comprender problemas
1/1 (Figura 91)	Discute la solución con el profesor y los compañeros. Compara la solución con el profesor y los compañeros. Establece casos particulares para validar.
1/2(Figura 94)	Discute la solución con el profesor y los compañeros Evalúa si la Respuesta de obtenida se ajusta a las condiciones del problema.
3/6 (Figura 137)	Emplea procedimientos ya validados para solucionar problemas semejantes.
2/8 (Figura 143)	Emplea elementos auxiliares para validar Prueba con casos particulares Evalúa si la Respuesta de obtenida se ajusta a las condiciones del problema. Discute la solución con el profesor o los compañeros.
2/9 (Figura 167)	Reconsidera la solución Discute la solución con el profesor o los compañeros Compara la solución con el profesor y los compañeros.

Continuando con el análisis de la situación de Judy (Figura 91), para el *inciso b* se pretendía que los estudiantes se decidieran por una tarifa (diaria o semanal) que le proporcionará más beneficios. En los registros del AVG, las respuestas E1, E2, E4, E5, E6, E7, E9, E10 expresan razonamientos cualitativos donde manifiestan que la mejor opción es la que ofrece kilometraje ilimitado (ver Figura 155).

Figura 155

E2 Respuesta de inciso b) al problema.

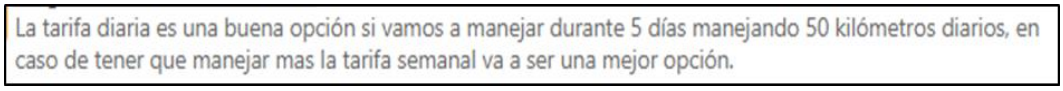

a Judy le favorece la tarifa semanal en el caso de que no este segura de cuanto kilometraje va a recorrer ya que son 900.000 pesos con kilometraje ilimitado y la primera tarifa se tendría que multiplicar los kilómetros que va a recorrer por 1500 pesos mas los 95000 de la tarifa diaria

E2 muestra una comprensión del problema adecuada y en su respuesta mencionó los datos y las condiciones del problema. Él da a entender que el precio de la tarifa diaria es variable, pero no hace explicitó hasta que cantidad de kilometraje recorrido le favorece elegir esta tarifa.

Así mismo, en la plataforma se encontraron las respuestas de E3 y E8 (Figura 156) en las que los estudiantes se intentaron aproximar al límite del kilometraje mediante ensayo y error (particularización). Estos razonamientos se convirtieron en los primeros intentos para expresar un límite de kilometraje.

Figura 156

Respuesta de E3 al inciso b) del problema



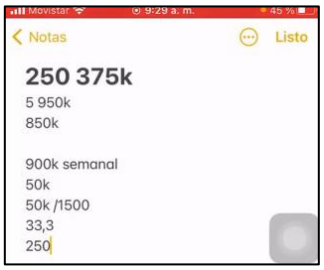
De lo planteado por E3 inferimos que relacionó la respuesta del *inciso a)* que implicaba una tarifa de $850.000 por un recorrido de 250 kilómetros durante los 5 días de la semana. Él empleó este hecho en su razonamiento e intentó plantear una aproximación de la cantidad de kilómetros que hace más favorable la tarifa diaria.

En **Episodio 14** se pueden evidenciar acciones de verificación de procedimientos, realizados por parte de E8 y E3 durante el momento de la puesta en común.

> **E8:** si ella sobrepasa los $900.000 que es la tarifa semanal, ya tendría pérdidas al elegir la tarifa diaria. Entonces, quiere decir que, sobran $50.000 que no podemos exceder, pues, al recorrer 250 km en los cinco días paga $850.000. Los 50.000 se dividen en 1500 para determinar cuántos kilómetros hay. Esto da 33,333… más los 250 km, es decir: 283,333… km [E8 comparte pantalla en Zoom y realiza los procedimientos de la Figura 157]

Figura 157

Puesta en común respuesta al inciso b)



In: ¿Qué opinan los demás? […]

E3: Se solucionaba, planteando primero la ecuación $95000(5) + 1500x = 900.000$, donde x que representa la cantidad de km, se resuelve y obtiene 283,3… km

Episodio 14

Inferimos que bajo el enfoque de resolución de problemas los estudiantes enriquecen sus ideas y razonamientos al discutir la solución con el profesor y compañeros ya que, en esta discusión se comparten dos caminos diferentes para abordar el problema. Santos-Trigo (2014) menciona que es importante revisar y analizar el significado de la solución del problema, verificar las operaciones y pensar en las conexiones que se pueden generar.

A continuación, en el **Episodio 15** se presenta un fragmento de la puesta en común del problema información y exploración libre del taller 2 (**Figura 94**). Evidenciamos el planteamiento de tres generalizaciones diferentes, por lo tanto, se realizó la discusión y comparación de las soluciones

E6: Yo sumé, bueno, en la figura 1 [se refiere a la representación proporcionada en el problema **Figura 94**], sabemos que tiene 5 cuadritos. Entonces, me está pidiendo la figura 10; lo que hice fue multiplicar 5 por 10 y le resté la figura anterior ósea 9. Ahí, se hace como un patrón y siempre me va a dar la cantidad de cuadritos que se necesitan. Para la posición 37, multiplico 5 por 37 y luego le resto la anterior la posición (36) … me da 149 cuadritos. Sería como una ecuación $5\mathrm{n} - (\mathrm{n} - 1)$.
E3: […] Exactamente profe, queda igual al mío $4\mathrm{n} + 1$, ya simplificado y más rápido [se refiere a que son expresiones algebraicas equivalentes]
E6: Es lo mismo, pero de otra forma.
In: E1 llegaste a otra respuesta ¿nos puedes explicar?
E1: […] tenemos como referencia la imagen inicial, así que, por eso mi formula es diferente, porque para mí ésta es la imagen cero y ésta es la imagen uno [encierra y enumera en la pantalla las dos primeras configuraciones **Figura 129**]…digamos el cuadrito debe ir acomodándolo así, en cada una. Luego, los cuadritos que me quedaban los sumaba al resultado, y ya, después me daba que la sucesión que tenía era cuatro, es decir, la sucesión que tenía va aumentado de cuatro en cuatro ($5 + 4n$), comenzando en cero.

Episodio 15

De este episodio, identificamos algunas estrategias de los estudiantes, por ejemplo, E6 usó casos particulares; E1 empleó una figura donde planteó unas condiciones que hacen valida su

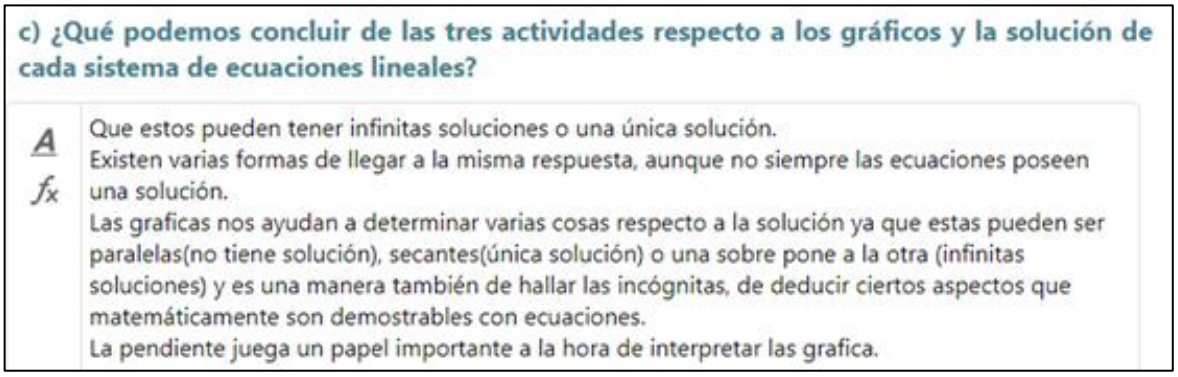
conjetura. Mientras que, E3 logró comparar la expresión algebraica que él mismo había establecido con la de E6 y concluye que sus respuestas son equivalentes. Aunque E3 no lo dijo explícitamente, inferimos que E3 realizó las operaciones algebraicas así: $5n - (n - 1) = 5n - n + 1 = (5n - n) + 1 = 4n + 1$.

Tal como lo sugiere Mason et al. (1999) en el trabajo con este tipo de problemas es importante que se reconozca un amplio rango de formas de expresar la generalidad, en especial, porque cada estudiante puede percibir la variación de manera distinta, lo cual representa una oportunidad para escuchar lo que ellos piensan y plantean, además, enriquecer el trabajo en el aula. De esta manera, se evidenció la habilidad para validar y verificar la solución del problema.

En el problema tarea retadora del taller 6 (Figura 137) deseábamos promover en los estudiantes el empleo de procedimientos ya validados para solucionar problemas semejantes, que según Polya (1965) consiste en que los estudiantes traten de aplicar los conocimientos construidos a otros problemas. El empleo de procedimientos ya validados para solucionar problemas semejantes se hace evidente en la respuesta de la Figura 158 por parte del estudiante E1.

Figura 158

Respuesta de E1 al inciso c) del Problema tarea retadora del taller 6



De lo expresado por E1, mencionamos que él logra establecer un vínculo entre la solución analítica y la gráfica de un sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2. Así mismo, es consciente

de que se pueden emplear diversos métodos para resolver un problema de este tipo, existiendo la posibilidad de que: el sistema no tenga solución, tenga infinitas soluciones o, tenga una única solución. Y en la última frase se puede observar que E1, logra reconocer la pendiente de la recta y la incidencia de esta en la representación gráfica, al parecer lo hacen identificándola como la razón de cambio.

Al respecto, Santos-Trigo (2014) expresa la importancia de que la construcción de soluciones por parte de los estudiantes sea compartida y se puedan extrapolar a otros problemas, con el ánimo de posibles aplicaciones. El autor destaca, que más allá de los constructos personales se deberían promover y plantear formas generales de solución. Por lo anterior, en el razonamiento expresado por E1 hay una evidencia de los constructos conceptuales construidos por él, también de la generalización de las posibles soluciones para un sistema de ecuaciones lineales de orden 2x2.

En la socialización del Problema exploración dirigida del taller 8 (Figura 143), pretendimos que los estudiantes lograran establecer una representación que permitiera dar cuenta de los precios a pagar en relación con el consumo de minutos. Esta actividad planteaba una tarifa básica para cada plan hasta cierta cantidad de minutos (función constante), luego, se les cobraba de manera proporcional por minuto adicional (función lineal).

En el AVG las respuestas de E1, E3, E4, E5, E6, E8, E9 y E10 se puede observar que ellos encontraron el valor de cada uno de los planes para el consumo indicado y que concluyen que la mejor opción es el plan alto. A continuación (en el Episodio 16) se muestra cómo E3 (apoyado en ls herramientas de Excel) explica su representación tabular y hace evidente la acción de revisar procedimientos y cálculos; revisión que hace a través del uso de casos particulares, una actuación propia de la habilidad para validar y verificar la solución.

E3: Tomamos todos los datos [señala la tabla y el 20% en la pantalla, tal como se india en la flecha naranja de la **Figura 159**] y lo pasamos a un Excel. ¿qué nos dice el Excel? El tipo de plan [bajo, medio, alto], el cargo básico, nos calcula el precio con el IVA, nos da, los minutos incluidos en el plan, nos calcula el exceso según los minutos gastados [señala el recuadro azul oscuro, como lo indica la flecha verde de la Figura], y nos da el precio total. Entonces sí, por ejemplo, digo que son 300 minutos, nos da un exceso de cero en este plan [señala el plan alto, recuadro rojo] en el medio 150. Y nos da el precio del plan. [hace casos particulares evaluando en 500, 1000, 2000].

Figura 159

Respuesta de al inciso a) del Problema exploración dirigida del taller 8

In: Yo tengo el plan bajo y gasto 70 minutos ¿Cuánto debo pagar?
E3: Seria 65+5 [evalúa en el programa minutos gastados] hay 4800 de exceso con el IVA y el total es 46.800.
In: ¿cuál es la expresión que me determina?
E3: [..] Esta multiplicando el exceso por los 800, lo vuelve a multiplicar, pero,para calcularle el IVA, y luego, suma eso al primer valor (Precio +IVA)

Episodio 16

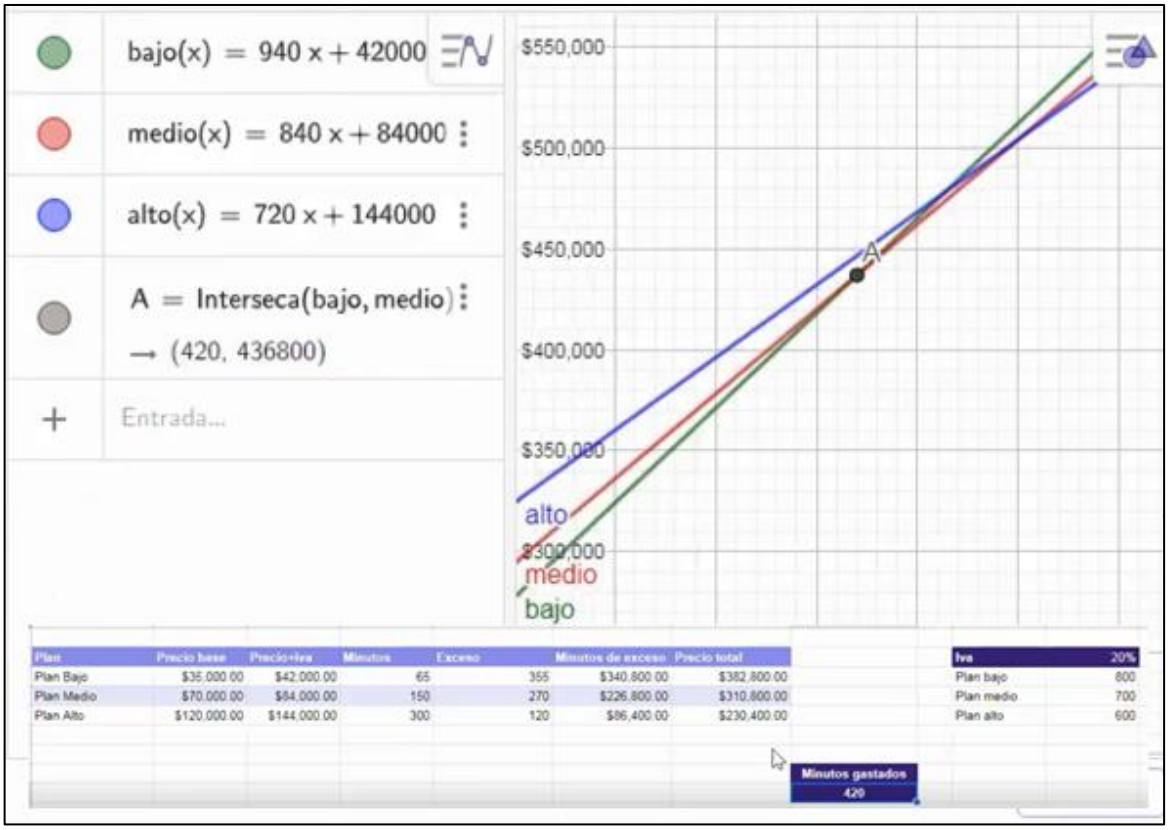
Por lo anterior, el E3 está realizando un proceso de validación al explicar con sus palabras la manera como calculó el valor del plan. De esta manera, inferimos existe un modelo matemático de la situación configurado en el software de Excel, él estableció el cargo básico más el precio de los minutos de exceso.

E3 también mostró una representación gráfica y algebraica elaborada en GeoGebra (ver Figura 160) la cual, cuando se realizó la socialización se identificó que no correspondía con la representación tabular generada en Excel.

En el Episodio 17 se muestra la acción de evaluar si la representación del objeto matemático se ajusta a las condiciones del problema, una acción propia de la habilidad para validar y verificar la solución.

Figura 160

Validación de las representaciones por parte de E3



In: Mire, según estos datos, por el plan bajo y el plan medio [se refiere al punto A **Figura 160**] pagaría $436.800. Pero, según lo que usted tiene allá en Excel. No paga eso. ¿Eso que me indica?
E3: profe, que la gráfica esta mala.

Episodio 17

De lo anterior, se evidencia que In hace comentarios que conllevan a E3 verificar la representación creada, por lo cual E3 establece que la representación gráfica no cumple con las condiciones del problema.

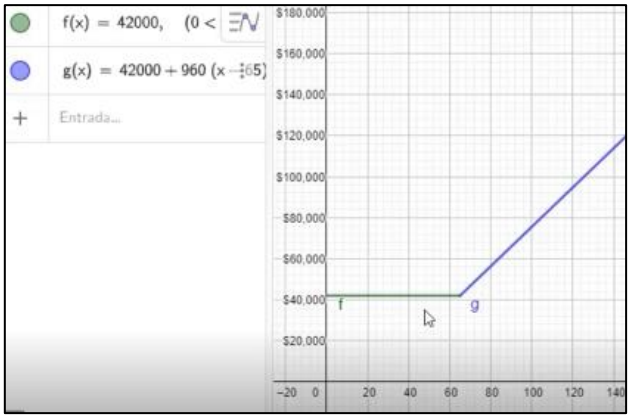
Por otra parte, E1 y E10 muestran otra representación del problema (ver Figura 161) la cual, es validada considerando una situación análoga con el contexto actual de los planes. En el Episodio 18 se evidencia un dialogo que da cuenta de lo mencionado.

> **E1**: así está perfecta [refiriéndose a la representación Figura 161]. Ese si es, la mía no [E1 había creado un modelo lineal]. Porque igual, si uno gasta un minuto, tiene que pagar igual los 42.000 pesos y no coordina.
> **E10:** Es como comprar un plan en la actualidad profe, ósea, si usted compra un plan de datos da tanta capacidad, si usted no se los gasta tiene que pagar el valor.

Episodio 18

Figura 161

Representación de E10 para el plan bajo.



Destacamos que, se terminó la sesión de clase, por tal motivo, se dejó la socialización para el próximo encuentro. In revisaba la plataforma en la jornada de la tarde, para seleccionar algunas respuestas y realizar una presentación en Power Point para favorecer la discusión al siguiente día. Encontró que E3, había modificado sus representaciones y le pidió una explicación nuevamente.

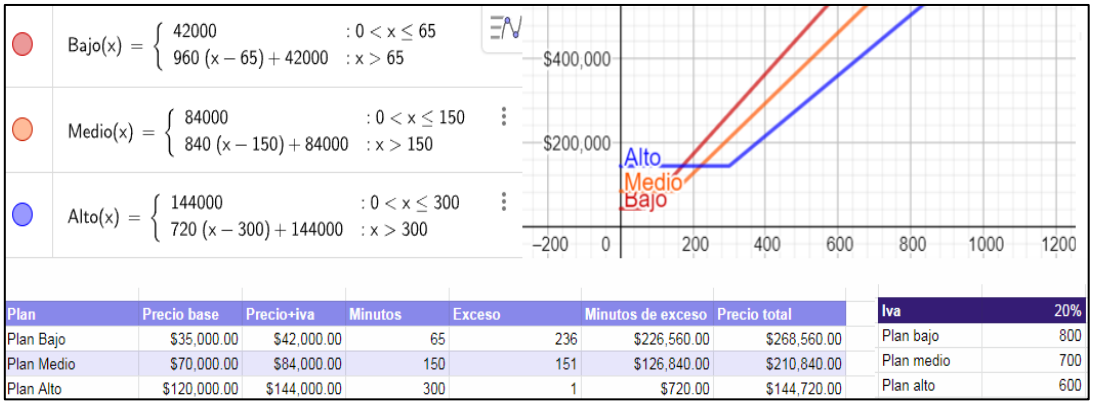
En el **Episodio 19** presentamos un dialogo entre la In y E3, donde se comprueba que el estudiante modificó su solución porque al verificar la condición del precio no coincidía con el modelo planteado en su Excel.

E3: Para hacer la gráfica, yo hice una doble condición. Primero, cuando los números eran mayores a cero, empezaba la gráfica porque no puede ser negativo, por ejemplo, hasta el número 65 es un valor constante [se refiere al cargo básico] luego empezaba la función que nos daba los minutos de exceso. Así quedó la gráfica [muestra la Figura **162**] y yo la **comprobé** con el Excel y sí, da lo mismo.
In: Los puntos A y B ¿Qué representan?
E3: Esos puntos de intersección son puntos en los cuales, en cierta cantidad de minutos en dos planes se paga la misma cantidad de dinero […] pues, también la comprobé en el Excel y da lo mismo.

Episodio 19

Figura 162

Respuesta de E3 presentada en Power Point por In.



Plan	Precio base	Precio+iva	Minutos	Exceso	Minutos de exceso	Precio total
Plan Bajo	$35,000.00	$42,000.00	65	236	$226,560.00	$268,560.00
Plan Medio	$70,000.00	$84,000.00	150	151	$126,840.00	$210,840.00
Plan Alto	$120,000.00	$144,000.00	300	1	$720.00	$144,720.00

Iva	20%
Plan bajo	800
Plan medio	700
Plan alto	600

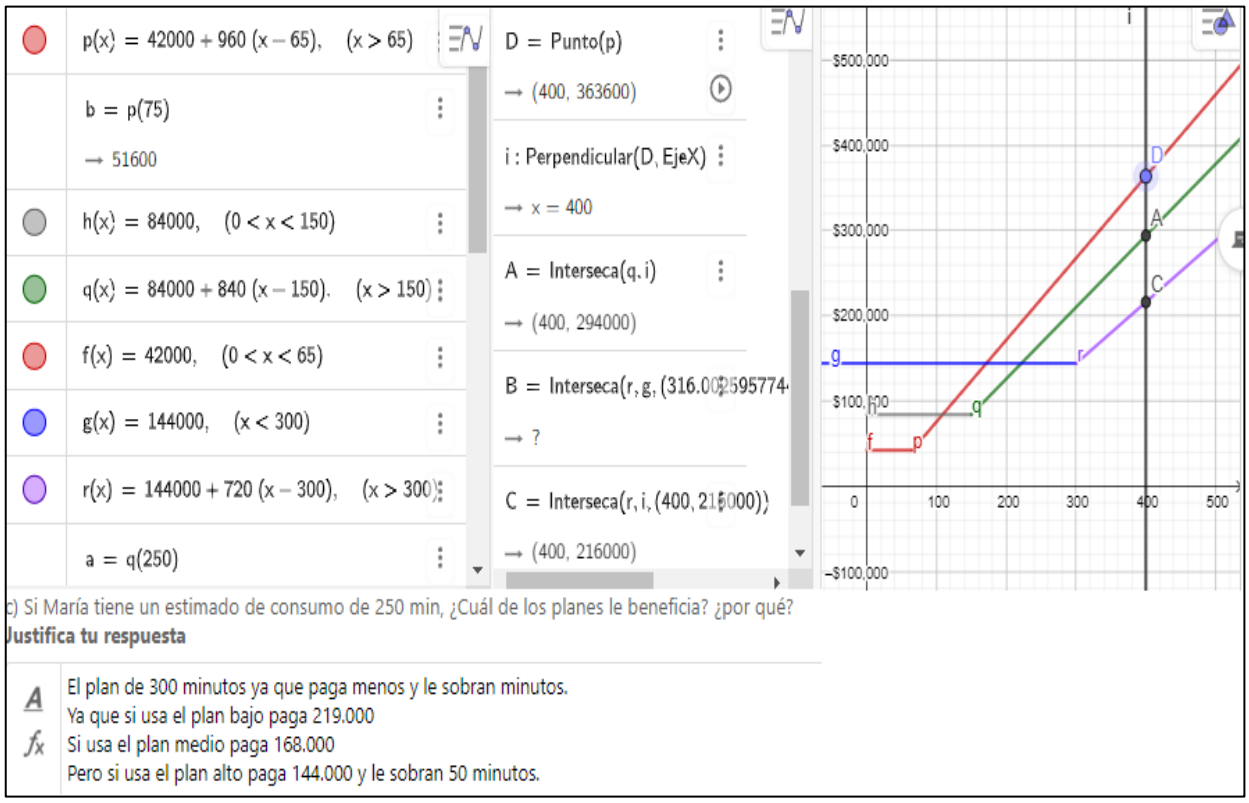
Consideramos que el proceso de socialización le permitió a E3 una coordinación de las distintas representaciones generadas (tabular, gráfica, algebraica). Al respecto, Rueda (2016) menciona que la coordinación de distintas representaciones es una habilidad superior y consiste en la capacidad de articular y transformar de un registro de representación a otro.

Para el inciso c) del Problema exploración dirigida del taller 8 (Figura 143), pretendimos que los estudiantes evaluaran las representaciones construidas para el problema, específicamente para el consumo de 250 minutos, de esta manera eligieran el plan que proporcionara una tarifa más baja. E3 evalúa en su modelo de Excel el consumo de 250 minutos, tal como se muestra en la Figura 162 .

En este inciso nos llamó la atención que E1 trazar lo que Polya (1965) ha definido como un elemento auxiliar, es decir, el estudiante empleó la herramienta de recta perpendicular (al eje horizontal) que proporciona el software de GeoGebra tal como se muestra en la Figura 163, para consecuentemente establecer las imágenes de las funciones en $x = 250$. Es así validó y eligió la mejor opción de plan.

Figura 163

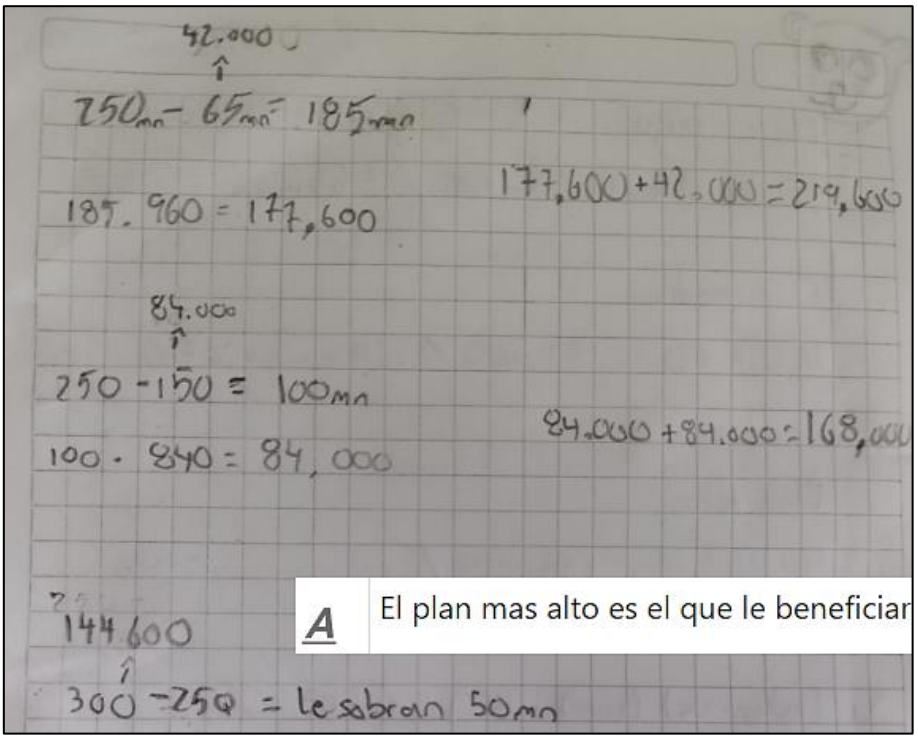
Respuesta de E1 inciso c) Problema exploración dirigida del taller 8



En las respuestas de E2, E4, E5, E7, E6, E8, E9, E10 se evalúan los modelos creados empleando procedimientos aritméticos tal como se muestra en Figura 164. Destacamos que, la heurística de particularización propuesta por Polya (1965) fue empleada por los estudiantes para evaluar en el modelo una cantidad específica de minutos y luego, tomar decisiones.

Figura 164

*Respuesta de E4 al inciso c) del problema exploración dirigida del taller **8***



De esta manera, en el procedimiento E4 se evidencia la validación y elección del modelo más adecuado para el consumo correspondiente a 250 minutos. Destacamos que, E4 primero establece cuántos son los minutos adicionales para cada uno de los planes, luego, establece el costo de estos para sumarlos a la tarifa básica correspondiente a cada uno de los planes. Desde el MEN (2006) se recomienda que las situaciones problemas propuestas en el aula proporcionen oportunidades en los estudiantes para la toma de decisiones.

En el inciso d) del Problema información y exploración libre del taller 9 (Figura 150) pretendimos que los estudiantes expresaran para qué les sirve conocer el IPC a las comunidades indígenas. En el Episodio 20 se muestra la acción de evaluar la solución del problema desde la utilidad en el contexto.

E4: les ayudaría al mejor control de sus finanzas.

In: ¿Sí? ¿Todos de acuerdo?
E1: Bueno pues no sólo para eso, mi familia está un poco relacionada con estas cosas del campo y eso entonces, a veces las personas que vienen del campo y sacan sus productos y bregan literalmente para sacarlos no se les paga como se debe porque pues, no están enterados de los precios. Entonces, pues supongo yo, que más que ayudarles al control de sus finanzas, les permite conocer e informarse si sube o disminuye el precio de su producto.
E4: por eso, un mejor control

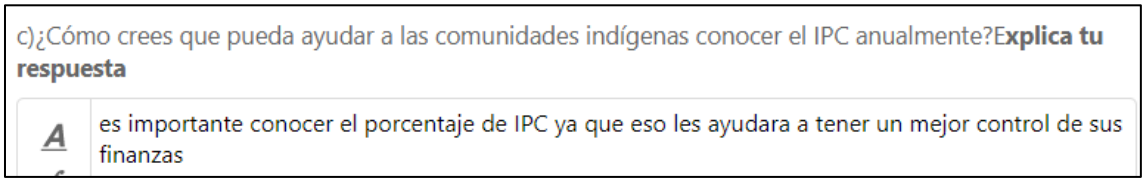
Episodio 20

De lo anterior inferimos que efectivamente los estudiantes mostraron que el problema se convirtió en una situación coherente con su realidad y la de su familia. Por lo tanto, el conocimiento construido le permitió establecer una aplicación y una interpretación de la actividad económica llevada a cabo en su contexto.

En las respuestas de E4, E5, E9 y E8, se conserva la idea de ayudar al tener un mejor control de sus finanzas (Figura 165). Deducimos que los estudiantes adjudican una relación directa entre el manejo del dinero de esta forma, plantearon una implicación en desarrollar una actividad económica (venta de maíz) sostenible y rentable, de esta manera, tal como lo establece Echeverría (2022) los estudiantes establecen una implicación directa del IPC sobre el cálculo de precios para vender sus productos.

Figura 165

Respuesta E8, inciso c) actividad 1 taller 9.

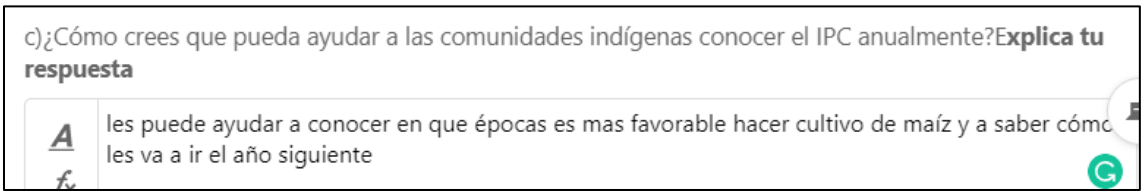


Las respuestas expresadas por E2, E6, E7 establecen que es importante debido a que les puede ser útil para determinar cuándo sembrar y predecir los precios del maíz para el siguiente año. (ver Figura 166) en esta respuesta rescatamos el énfasis que se le asigna al tiempo (“época”)

así, el estudiante reconoce que el IPC se establece para ciertos periodos de tiempo, y que es pertinente medir la evolución del costo promedio del maíz para los hogares.

Figura 166

Repuesta E6 inciso c) actividad 1 taller 9



De lo anterior es explicitó que los estudiantes establecen una implicación directa de este conocimiento sobre las finanzas de las comunidades indígenas, es decir, a la obtención, manejo y ahorro del dinero y el capital. Según Echeverría (2022) los problemas contextualizados hacen que los estudiantes comprendan mejor el objeto matemático de estudio (función) debido a que le encuentran sentido y una utilidad especifica por la familiaridad la situación puede tener en la vida cotidiana del estudiante.

El Problema exploración dirigida del taller *9 (*Figura 167*)* se convirtió en un problema no rutinario, que implicó varios intentos infructuosos por parte de los estudiantes. Esperamos que los estudiantes trabajaran un problema del contexto económico de los habitantes de San Basilio Palenque, relacionada con la venta de minutos y el precio que deberían cobrarles a los clientes por cada minuto o fracción de minuto. Debido a la información del problema, los estudiantes pueden establecer un modelo matemático que implica el uso de la función parte entera (“techo”) es decir, para cada x real, el techo de x es el menor entero mayor o igual a x. Así se define:

$$f(x) = \begin{cases} 100\,\lceil x \rceil & si\ \ 0 \leq x \leq 10 \\ 50\lceil x - 10 \rceil + 1000 & si\ x > 10 \end{cases}$$

Figura 167

Problema de exploración dirigida del taller 9

2.1 Un habitante de San Basilio de Palenque decide poner una venta de minutos, con el fin de que los habitantes del corregimiento se puedan comunicar con sus familiares, amigos y/o conocidos. El habitante decide cobrar por minuto o fracción de minuto 100 pesos y después de los 10 minutos los cobra a 50 pesos el minuto o la fracción de minuto.

a) ¿Cuánto cuesta una llamada de 6 minutos 47 segundos, 22 minutos 40 segundos, 2 horas 18 minutos 20 segundos?
b) Halla la función que representa la relación entre el costo de la llamada y el tiempo.
c) Realiza un gráfico que represente la situación.

El problema se abordó siguiendo la posibilidad que establece la secuencia metodológica planteada de Fiallo y Parada (2018) para desarrollar los talleres en grupos pequeños para de esta manera favorecer el aprendizaje colaborativo. Por tanto, existieron tres subgrupos de trabajo los cuales llamaremos como G1, G2 y G3.

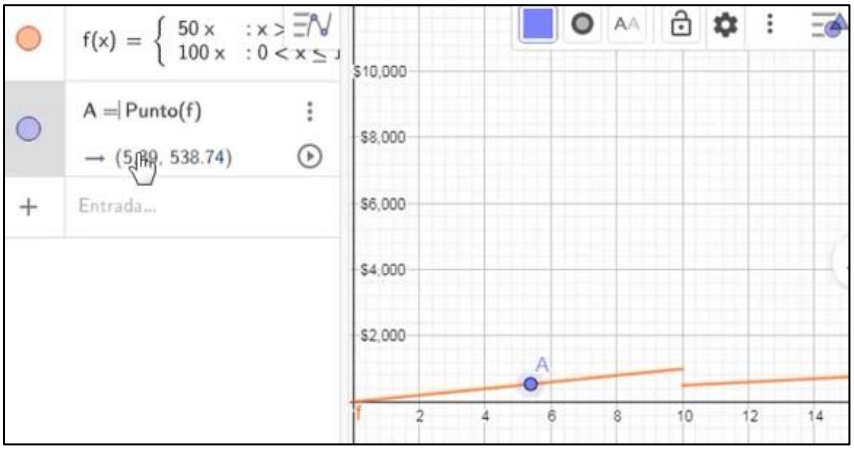
G1 conformado por E3, E8 y E10 en la validación establecen varios acercamientos que no corresponde a la situación por lo que se hace evidente la acción de reconsiderar la solución y evaluar los procedimientos. A continuación, mencionaremos algunos intentos para abordar el problema y cómo la habilidad de validación y verificación se hizo evidente.

En la Figura 168 se muestra un modelo lineal planteado por G1, quien define un modelo matemático donde “x” representa la cantidad de minutos o fracción de minutos consumidos y

$f(x)$ el precio por pagar $f(x)\begin{cases} 50x, & x > 10 \\ 100x, & 0 \leq x \leq 10 \end{cases}$

Figura 168

Respuesta G1 puesta en común interna



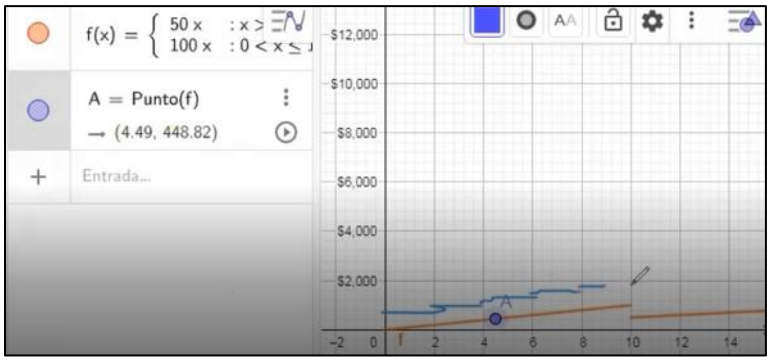
Los investigadores Fiallo y Parada (2018) expresan que en este tipo de problemas un acercamiento corresponde a la asignación de un modelo lineal.

En el Episodio 21 expresamos algunas ideas que plantea E3 y E8 para reconsiderar la respuesta de la **Figura** 168. E3 empleó un elemento auxiliar (Punto A) para realizar su respectiva validación.

> **In:** ¿sí hablo 4 minutos y medio, ¿cuánto me cobran? según su gráfica [el estudiante mueve el punto A hasta ubicarlo en valores próximos a 4,5] […]
> **E3:** Está malo. Toca poner una condición para que el valor sea constante. Ósea el valor tiene que ser así, según yo. [El estudiante empleó el lápiz de zoom para realizar la gráfica Figura 169]

Figura 169

Idea E3 para la situación de los minutos.



E8: Si, porque cuando yo compraba un minuto así por unos segundos me cobraban 100 pesos.
E3: ¿No hay ninguna función para redondear profe? [escribe en la barra de entrada de GeoGebra la palabra redondear], [al ver que no apareció el comando en GeoGebra pregunta:] ¿de aproximar tampoco? [escribe aprox (x)]

Episodio 21

De lo expuesto anteriormente (en la Figura 169 y en el episodio 21), destacamos los intentos por resolver el problema por parte de los estudiantes. De esos razonamientos se vislumbra una idea de cómo varía el precio total de minutos por cada minuto o fracción de minuto consumido.

En sus intentos por aproximar E3, busca información en internet y emplea la función $round(x)$. Esta función lo que hace es redondear un número al número de decimales especificado, pero no se cumple para este caso, porque lo que requiere es que, a cada número real, la función le asigne el número entero más próximo por exceso, es decir, la función techo de x $(ceil(x))$ nuevamente hace una validación del modelo. En el siguiente dialogo se muestra otro intento por representar en GeoGebra la función.

In: ¿Está redondeando (mueve el punto A la Figura 170)?

Figura 170

Respuesta G1 función round(x)

E3: […] si está redondeando, pero, desde 4,5 a 5. [E3 señala como se muestra en el recuadro rojo el punto 4,5]

Episodio 22

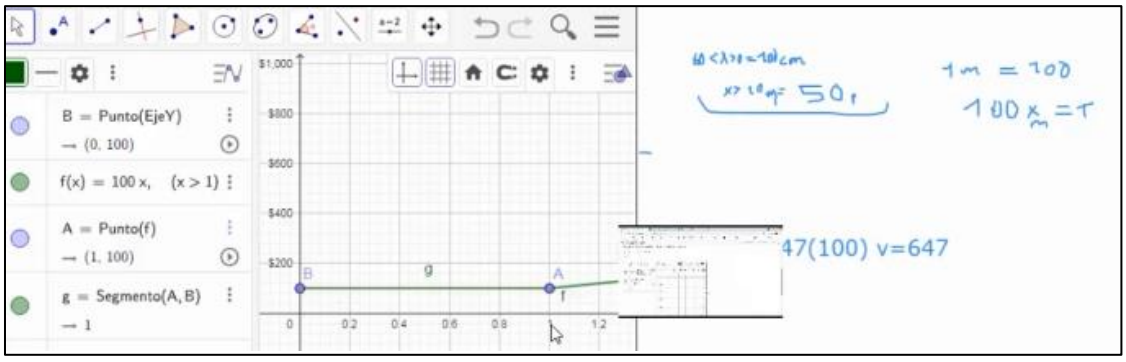
Desde este acercamiento, deducimos que G1 tiene una idea de cómo debería representarse gráficamente la relación, sin embargo, como lo reportan Fiallo y Parada (2018) la función escalonada suele ser desconocida para muchos estudiantes que requiere usar una notación específica, generalmente también desconocida. Este hecho crea una necesidad de búsqueda y clarificación de conceptos por parte de los estudiantes y la orientación constante del docente.

Por su parte, en el G2 conformado por E2, E6, E9 plantearon una representación gráfica (ver Figura 171) definida por partes: i) precio de un minuto o fracción de minuto en el intervalo [0,1] así, con la herramienta de segmento (software) dibujan $\overline{AB}$, ii) plantean una función lineal.

Es decir, definen: $f(x)\begin{cases} 100x, & x > 1 \\ 100, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Figura 171

Respuesta G2 puesta en común interna



En el **Episodio 23**, In indaga por un caso particular para que los estudiantes reflexionen sobre el modelo construido.

In: […] ¿si consumo de 1 a 2 minutos cuánto me van a cobrar? por ejemplo, para 1,8 ¿cuánto me cobran?
E9: […] Vamos a mirar acá arriba [se devuelve a leer el enunciado]
E8: pues en 1,8 minutos le deberían cobrar dos minutos.
E9: [..] pero en la recta no está así.

In: ¿Qué está pasando?
E8: Creo que faltaría esa condición.

Episodio 23

De lo anterior, mencionamos cómo la acción de volver a leer el enunciado contribuye al esclarecimiento de las condiciones del problema, así como, a la modificación y el refinamiento de las ideas planteadas.

Finalmente, en el G3 conformado por E1, E4, E7, en el momento en el que la investigadora ingresa a la sesión de G3, ellos estaban visualizando el Applet de GeoGebra (de la Figura 172) donde se encontraba la gráfica correspondiente a la representación de dos funciones $f(x) = x100$, $si\ \ 0 < x < 10$ y $g(x) = x50,\ \ si\ x > 10$ en la que ellos desarrollan la discusión del episodio 21.

Figura 172

Respuesta G3 puesta en común interna

E1: tiene que quedar la gráfica [E1 dibuja en la pantalla y escribe uno, dos, tres, cuatro, cinco (tal como se muestra en el ovalo rojo de la **Figura 172**).
E4: como escalera.

Episodio 24

De las opiniones expresadas y validadas en los grupos, como ya lo mostramos creemos que ya se había establecido la idea de cómo debería ser la representación gráfica. Por lo tanto, los

grupos buscaron en internet nuevamente y encontraron información referente a la función techo de x, lo cual les permitió establecer la representación algebraica y gráfica del problema.

Consideramos importante mencionar, que debido a la interpretación que los estudiantes dan la información suministrada, se obtuvieron dos representaciones del problema. La primera fue explicada por E3 y la segunda representación por E4.

> **E3:** […] se tiene la función techo de "x" que se llama ceil en inglés y lo que hace es aproximar al número siguiente, digamos, si es 0.1 lo manda al número siguiente nunca puede ser un decimal los pone en enteros. Y pues de los primeros 10 min nos cobran $100 aproximados al techo, y luego va a $50 de $(x - 10)$ porque ya hablamos 10 minutos. Nos van a cobrar los siguientes minutos más los $1.000 que ya debían (**Figura 173**)
> **E4:** […] así pasaran dos, tres segundos o diez segundos, le cobran como uno completo. Entonces dijimos eso no puede ser una recta, tiene que ir como escalerita. Pero, no sabíamos cómo, entonces, había una función que se llama ceil y con esa función fue la que graficamos (ver **Figura 174**), pusimos que $0 < x < 10$ para que ese 100 no se pasara de los 10 minuto, esa fue la primera grafica (refiriéndose a g(x)). Con la segunda función, sería lo mismo, sólo que para $x > 10$ para que la gráfica iniciara de ahí en adelante; y partir de ahí cobran los minutos a 50.
> In: ¿Eso dice el problema?
> **E3:** No profe, dice que a partir de los 10 minutos pagaría $1000 más $50 por minuto.
> **E4:** […] nosotros ayer tuvimos ese debate, yo decía que si tocaba incluir los $1000 pero E1 decía que no tendría mucha lógica, y yo en mi lógica creería que sí [risas] me dejé convencer.
> E1: pues, en el enunciado decía que después de los 10 minutos los cobraban a $50 lo tomé de esa manera, pero pues ellos tenían la razón […]

Episodio 25

El episodio anterior fue aprovechado para que los estudiantes argumentaran sobre la comprensión del enunciado, escucharan los diversos puntos de vista y enriquecieran la posibilidad de estas soluciones, logrando de esta manera que los estudiantes fueran distinguiendo que la respuesta no es el fin último del proceso de resolución de problemas.

Al respecto, Santos-Trigo (2014) indica que el proceso de resolución de problemas se sugiere permita a los estudiantes desarrollar un método inquisitivo, donde, ellos se estén

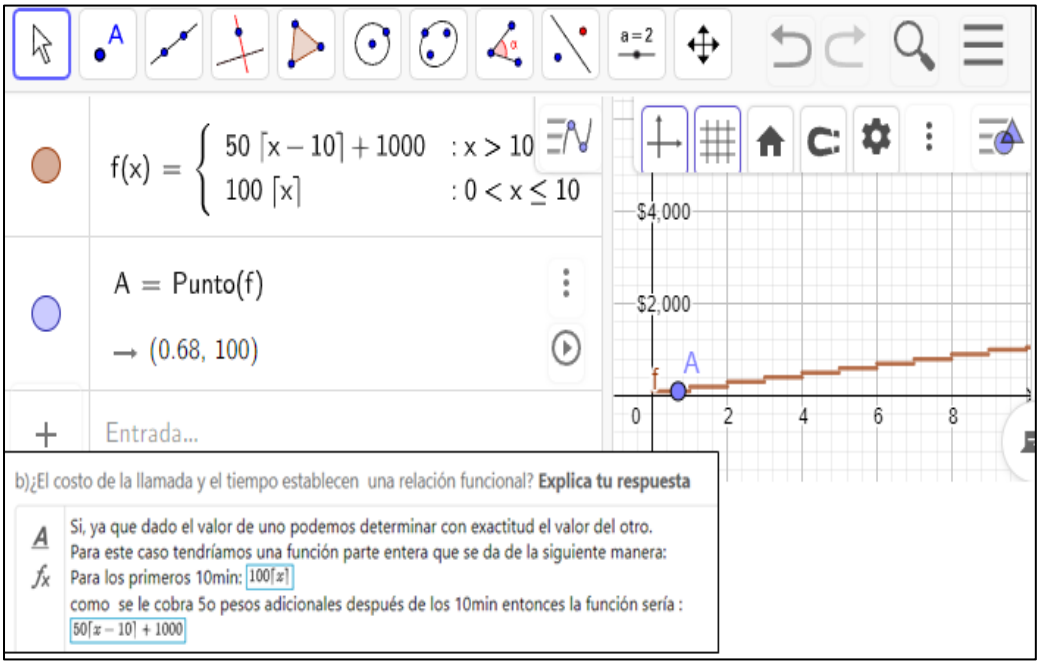
cuestionando sobre el uso de representaciones, sus conjeturas y argumentos, la pertinencia de los distintos acercamientos a fin de evaluar y monitorear sus resultados.

Una de las reflexiones emergentes del análisis de las respuestas de los estudiantes es que es necesario plantear claramente el enunciado porque lo expresado en el problema: “El habitante decide cobrar por minuto o fracción de minuto 100 pesos y después de los 10 minutos los cobra a 50 pesos el minuto o la fracción de minuto”, puede permitir establecer:

i) A partir del consumo de minutos $si\ 0 \leq x \leq 10$ el habitante de San Basilio cobra $100 por minuto o fracción de minuto, pero si el consumo supera los 10 minutos o fracción de minutos, le cobran los $1.000 más cada minuto o fracción de minuto adicional a $50, mencionamos que las respuestas de E3, E8, E9 y E10 redactan esta respuesta Figura 173

Figura 173

Respuesta E3 inciso b) c) del Problema exploración dirigida.

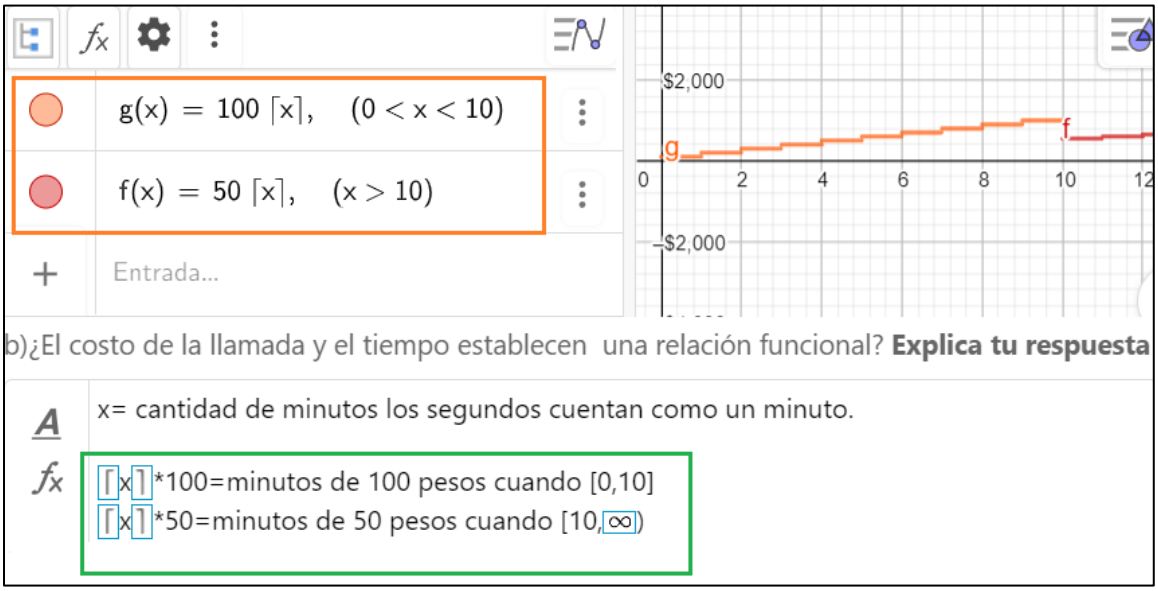


Destacamos que E3 reconoció la relación de covariación que se establece entre el tiempo de una llamada y el costo de la llamada, además él usó distintas representaciones (gráfica, verbal, algebraica).

ii) a partir del minuto o fracción de minuto si, $x > 10$ el habitante de San Basilio cobra todos los minutos o fracción de minuto a $50, destacamos que las respuestas de respuestas de E1, E2, E4, E5, E6 emplearon está idea. En la respuesta de E4 se indica que efectivamente es una función parte entera techo. En los planteamientos se ve cómo el estudiante comienza a definir algunas condiciones para realizar la expresión algebraica. Se destaca que, E4 a pesar de escribir en el inciso b) una función parte entera techo (recuadro verde) se referiría a las funciones techo (recuadro naranjado)

Figura 174

Respuesta E4 Problema exploración dirigida del taller 9



Al respecto, Puga et al. (2016) expone sus reflexiones en torno al uso del lenguaje para lograr el aprendizaje significativo en los estudiantes. Se precisa que el lenguaje sea claro y coherente pues como lo mencionan los autores “el lenguaje es el elemento primordial en todo acto

comunicativo-educativo y depende de este para que el sujeto “aprenda lo que el emisor quiere que aprenda” (p.217). Bajo esta premisa consideramos necesario rediseñar el enunciado del problema así: “El vendedor de minutos decide cobrar los 10 primeros minutos (o fracción de minuto, ejemplo: si consume 9.3 minutos se cobran 10) a 100 pesos, después de los 10 minutos se cobra el minuto (o la fracción de minuto adicional a 50 pesos”

7 Conclusiones

En este capítulo presentamos las respuestas a la pregunta de investigación: ¿Qué habilidades para la resolución de problemas logran desarrollar estudiantes de admisión especial de la Universidad Industrial de Santander que participan de un curso de refuerzo de matemáticas?

En el inciso 7.1 se describimos las conclusiones emergentes de las etapas de diseño y rediseño del curso; en el apartado 7.2 explicamos los principales resultados del proceso de implementación, que una primera vez se dio para refinar los problemas y talleres del curso; y una segunda vez para analizar las habilidades para la resolución de problemas. En el apartado 7.3 respondemos a las habilidades de resolución de problemas que se posibilitaron con el desarrollo del curso por parte de los estudiantes participantes. Finalmente, en el apartado 7.4 mostramos unas recomendaciones generales para aquellos que deseen replicar el estudio o poner en escena el curso que proponemos.

7.1 Resultados del diseño del Curso de refuerzo en Matemáticas

El curso se diseñó durante la época de pandemia del Covid-19, por tal motivo pensamos un diseño que se pudiera implementar en una modalidad de presencialidad remota. Se realizó un diseño inicial, que se convirtió en el primer pilotaje (estudiantes de admisión especial del periodo

2021-I) luego, se hizo un rediseño que se convirtió en uno de los resultados de la investigación que aquí se reporta.

Para el diseño mencionaremos que el tiempo considerado para desarrollar el curso de refuerzo en matemáticas debe ser mínimo de 60 horas y 15 sesiones de trabajo continúo, tal como lo habíamos planeado.

El curso estuvo orientado principalmente por los planteamientos de los documentos oficiales del MEN (1998) y MEN (2006) y los principios y estándares de matemáticas del NCTM (2003). El objeto de estudio fue las habilidades para la resolución de problemas ya que, desde estos documentos se considera puede servir como eje orientador y organizador de un currículo. Por lo anterior, se plantearon para el desarrollo del curso problemas de diversos contextos: matemáticos (ej. sucesión de Fibonacci, problemas de papiro de Moscú, reconociendo la variación, suma de dos números…) ciencias e ingenierías (ej. deuda externa, temperatura crecimiento) y la vida cotidiana (ej. venta de leche, decrecimiento población indígena, "moto taxi"), porque discurrimos que el curso podía ofrecer oportunidades para abordar cualquier tipo de problema. Sin embargo, consideramos relevantes los problemas que surgieron de una investigación previa por parte de Echeverría (2022) quien plantean como orientación didáctica contextualizar y adaptar algunos problemas del cálculo diferencial para la enseñanza dirigida a estudiantes pertenecientes a los grupos priorizados MEN (2013).

En cuanto a los ejes temáticos bajo los cuales se organizó el curso expresamos algunas conclusiones sin ánimo de generalizar.

i) Evidenciamos la utilidad de trabajar con patrones y regularidades porque los estudiantes tuvieron la oportunidad de explorar, argumentar, plantear conjeturas y generalizaciones para dar tratamiento a la variación y el cambio. Además, los resultados de la aplicación de

los problemas orientados bajo este eje temático nos permitieron corroborar que tal como lo plantean Mason et al. (1990), Agudelo (2000), MEN (1998), MEN (2006), Aké (2021) los estudiantes logran establecer relaciones funcionales al establecer cómo y qué está variando, logrando contribuir al tránsito de lo concreto desde lo numérico, figural o verbal a lo abstracto desde la expresión en lenguaje simbólico.

ii) Los procesos algebraicos dieron cuenta del trabajo con objetos matemáticos específicos como las ecuaciones lineales dos por dos, las ecuaciones de primer grado e inecuaciones. Como resultado de estos problemas, algunos estudiantes presentaron dificultad para traducir del lenguaje verbal al lenguaje simbólico que había sido reportada en parte de la literatura consultada (Polya (1965), Olvera (2010), Cogua (2013), Lasa Oyarbide (2016), De la Fuente (2016)).

Recalcamos que, la resolución de estos problemas permitió a los estudiantes y a la docente reconocer la importancia del uso adecuado de la notación matemática para expresar la interdependencia entre las variables, la identificación de la covariación de dos variables, el planteamiento de ecuaciones que modelen la situación, el tratamiento matemático empleando diversos métodos de solución, fluidez con las operaciones entre expresiones algebraicas, despeje de ecuaciones, etc.

iii) En el eje temático del análisis de funciones identificamos en la resolución de problemas en las que el estudiante empleó diversas estrategias como el uso de casos particulares, gráficas, tablas de datos, expresiones algebraicas, entre otras; que les permitieron establecer las relaciones de covariación entre magnitudes, dependencia e independencia de variables, modelos matemáticos, actuaciones propias para cuantificar el cambio (Fiallo y Parada (2018), los NCTM (2003), Seduca (2006))

Por último, la secuencia metodológica propuesta por Fiallo y Parada (2018) para el diseño de los talleres mostró ser de gran utilidad porque permitió el aprendizaje autónomo y colaborativo. Además, facilitó la socialización y discusión de resultados, que desde nuestra experiencia permitió a los estudiantes reconocer el proceso de resolución de problemas como un proceso dinámico que se puede enriquecer con la acción de compartir ideas y procedimientos para afianzar, adquirir o reestructurar algunos conocimientos en matemáticas. Así mismo, en la encuesta realizada por los estudiantes se valoró positivamente la metodología del curso, principalmente porque ellos manifiestan importante el trabajo en grupos y la socialización de los resultados. El rol del docente en esta metodología consistió en orientar y acompañar a los estudiantes (afirmación emergente de los resultados de la encuesta de satisfacción, ver Apéndice C).

El resultado principal de esta primera parte del objetivo general de la investigación es la propuesta del curso con sus respectivos talleres y orientaciones, mismo que se encuentra en el Apéndice A: Curso de refuerzo en Matemáticas para estudiantes de admisión especial.

7.2 Reflexiones de la implementación del Curso de refuerzo en Matemáticas

El curso se puso en escena tal como se planificó (de forma remota), para ello se usó la plataforma de Zoom. La modalidad de presencialidad remota permitió que estudiantes de diferentes departamentos del país pudieran participar (En la primera implementación: Guajira, Arauca, Casanare, Atlántico, Norte de Santander, Meta, Cundinamarca, Cesar y Santander. En la segunda implementación: Arauca, Cesar, Boyacá, Nariño, Guaviare, Cauca y Santander). Vale la pena mencionar que algunos estudiantes se encontraban en zonas rurales o de difícil acceso donde la conectividad a internet era inestable, lo que obstaculizó en algunas sesiones de clase el buen desarrollo de las actividades. En general, la asistencia fue igual o superior a las 12 sesiones (el 80 % de la IH del curso).

El uso del Aula Virtual de GeoGebra bajo la modalidad grupo, favoreció la comunicación y la retroalimentación mediante la posibilidad de plasmar comentarios por parte de la docente y los estudiantes en los espacios de trabajo personal de cada uno de los participantes. Además, el AVG posibilitó a los estudiantes herramientas para comunicar sus procedimientos y respuestas, allí pueden: editar formulas y textos, crear tablas, elaborar gráficos, insertar Applets e imágenes (evidencias a lápiz y papel) con procedimientos.

Consideramos que el uso de las tecnologías digitales (Zoom (como plataforma de comunicación), el AVG (como espacio para manipular y visualizar objetos de geometría dinámica), Excel (como organizador de datos)) son esenciales para dar acceso a los estudiantes que no pueden desplazarse desde sus lugares de origen y como herramientas de apoyo matemático. Los estudiantes, aunque no habían tenido acceso a estas tecnologías, con el desarrollo de los talleres adquirieron cierto grado de experticia, que se evidenció en su área de trabajo personal del AVG.

Por otra parte, como resultado de la implementación de los problemas del curso podemos establecer que los problemas contextualizados propuestos por Echeverría (2022) fueron de interés para los estudiantes y les permitieron identificar una utilidad de las matemáticas para la interpretación y modelación de algunas actividades económicas (venta de minutos, precio del maíz) o problemáticas sociales (decrecimiento de la población indígena).

En los 15 talleres del curso, se encuentran problemas rutinarios y no rutinarios (en términos de Santos-Trigo (2014)), algunos estudiantes mostraron poseer conocimientos y experiencias previas que permitían abordar los problemas de manera inmediata, es decir, el problema se convierte en prácticas de algoritmos o de ejercitación.

Consideramos afortunada la decisión de plantear el curso de refuerzo en matemáticas, que está dirigido exclusivamente a los estudiantes de admisión especial, antes del curso de Precálculo, con el fin de que ellos puedan tener acceso a estas dos ayudas para poderse enfrentar con más herramientas a los cursos de matemáticas del primer nivel. Los estudiantes beneficiarios del curso unánimemente expresaron en la encuesta de satisfacción, que consideran pertinente recibir ambos cursos porque les permite recordar, afianzar, perfeccionar y adquirir algunos conocimientos matemáticos, que por sus condiciones de vulnerabilidad no han obtenido en su formación preuniversitaria. También mencionaron que el desarrollo de los cursos les permite autoevaluarse para ver cómo pueden mejorar y prepararse para sentirse más seguros del proceso de formación que van a iniciar.

Tal como lo planteamos en la metodología, la primera implementación del curso fue necesaria para valorar la estructura del curso, la elección de los ejes conceptuales, el orden de los talleres y la precisión en el planteamiento de los problemas y preguntas. Esa primera implementación nos permitió el rediseño del curso que se consolida en el producto principal de la investigación que estamos reportando aquí. Curso que se ha incluido dentro las actividades del programa de acompañamiento a las asignaturas de Matemáticas de la UIS (SEA-Matemáticas), quedando institucionalizado, desde nuestra perspectiva es un logro muy importante desde el componente práctico de la matemática educativa, puesto al servicio de los estudiantes de admisión especial de la universidad.

La segunda implementación, se desarrolló tal como se planeó y nos permitió centrarnos en el desarrollo de las habilidades necesarias para resolver problemas de variación. Resultados que pasamos a describir en el siguiente apartado.

7.3 Descripción de las habilidades para resolver problemas posibilitadas en el curso

Aquí respondemos a la pregunta de investigación caracterizando las habilidades para la resolución de problemas, que identificamos como categorías de análisis, y para ello usamos descriptores que enunciamos a lo largo del capítulo de análisis y discusión de resultados.

7.3.1 Descriptores de la habilidad para comprender el problema.

Como mostramos en el apartado 6.1, la habilidad para comprender el problema es fundamental, los estudiantes dan cuenta que más allá de no manejar unos procedimientos o algoritmos, lo que los lleva a fallar es no entender lo que el problema les pide, así como no poder extraer los datos del problema que se constituyen en recursos para abordarlos.

Los estudiantes mostraron diferentes formas de comprender los problemas tal como se muestra en el apartado 6.1. Allí, los estudiantes realizaron diversas acciones para: extraer los datos, las condiciones y las variables del problema. Por lo anterior concretamos algunas acciones que dan cuenta de la habilidad para comprender un problema:

- Leer el enunciado e identificar las palabras claves del problema.
- Identificar la incógnita, las condiciones y los datos del problema (pregunta).
- Enunciar el problema con sus propias palabras.
- Plantear las hipótesis y condiciones del problema.
- Identificar un patrón o una regularidad.
- Reconocer relaciones de covariación (identificar qué cambia)
- Introducir una notación adecuada.
- Organiza la información del problema (crear una tabla, una figura)
- Reconocer las variables de la situación.
- Asignar sentido a una representación
- Emplear una definición o un teorema.

7.3.2 Descriptores de la habilidad para plantear y ejecutar diversos caminos solución

En la resolución de los problemas planteados evidenciamos el empleo de diversas estrategias para concebir un plan y ejecutarlo, de esta manera abordar el problema. Algunos estudiantes suelen emplear casos particulares para determinar algunos valores numéricos que den cuenta de la variación, construir una tabla de valores, gráficas o expresiones algebraicas entre otras estrategias reportadas en el apartado 6.2. Algunos descriptores que dan cuenta comportamientos que realizan los estudiantes para el desarrollo de esta habilidad son:

- Establecer relaciones de covariación.
- Realizar una representación (gráfica, tabular, algebraica, figural)
- Plantear una generalización.
- Plantear una(s) ecuación(es) que represente la situación y resolver por diversos métodos de solución.
- Emplear casos particulares (particularización)
- Realizar estimaciones por ensayo y error para aproximarse a la solución.
- Emplear una analogía.
- Descartar parte de la condición del problema.
- Examinar su hipótesis.
- Emplear elementos auxiliares

7.3.3 Descriptores de la habilidad para validar y verificar la solución.

A través del curso, los estudiantes mostraron intentos infructuosos que habían emprendido para solucionar el problema, ellos valoraron la necesidad de ir monitoreando cada paso (estrategia o heurística) que usaban en el desarrollo de la situación, tal como se mostró en el apartado 6.3. Además, les permitió reconocer algunos elementos (conceptos, procedimientos, algoritmos, definiciones, etc.,) que no habían considerado para emprender nuevas acciones para avanzar en la búsqueda de una solución. Algunos descriptores que dan cuenta de los comportamientos que desarrollan esta habilidad son:

- Revisar procedimientos y cálculos.
- Evaluar si la representación del objeto matemático se ajusta a las condiciones del problema.
- Discutir y compartir la solución con el profesor y/o los compañeros.
- Buscar otras alternativas de solución (Analogías)
- Emplear procedimientos ya validados para solucionar problemas semejantes.
- Probar con casos particulares (Particularización)
- Establecer contraejemplos (Particularización)
- Evaluar la utilidad del problema (aplicabilidad contextos)

La metodológica propuesta por Fiallo y Parada (2018) proporciona un ambiente de clase favorable para que los estudiantes compartan y debatan sus ideas, lo que permite esa valoración y monitoreo de las estrategias que planean para resolver un problema.

7.4 Recomendaciones para la replicabilidad del curso

La experiencia nos mostró que algunos estudiantes poseen dificultades de tipo aritmético, métrico, analítico y geométrico y los procesos matemáticos, atribuidas por ellos principalmente a su formación secundaria, pero, que por no ser el objetivo estudio en esta investigación no fueron reportadas. Sin embargo, consideramos que sería muy interesante seguir documentando esta problemática tal como lo hizo Barajas (2015) a fin de que tanto los colegios como las universidades establezcan un trabajo mancomunado en la mejora de la educación del país.

El estudio nos permitió corroborar que un curso de refuerzo tal como lo planteamos (basado en la resolución de problema y el apoyo de las tecnologías) alejado de un listado de temas, puede consolidarse en una alternativa de acompañamiento a los estudiantes con características de vulnerabilidad, tal como lo son los estudiantes de admisión especial en la universidad.

Sin pretensión de generalizar, a través de la investigación pudimos identificar algunas deficiencias, que también fueron expresadas por los estudiantes en la encuesta: la poca formación

matemática de los docentes de sus lugares de origen; la falta de una metodología y recursos adecuados para el desarrollar de las temáticas, el enfoque alejado de la resolución de problemas y la priorización de la mecanización de algoritmos. Además, algunos estudiantes participantes del curso sufrieron el proceso de haber vivido el último año del bachillerato durante la pandemia por Covid-19, que les dificultó el desarrollo de las clases y por ende el incumplimiento de los contenidos que debían estudiarse en ese grado.

Finalmente, sabemos que diseñar un curso es un proceso que requiere constante transformación, reflexión y una mejora continua. Por lo anterior, el curso que aquí proponemos puede ser objeto de análisis y rediseño, a fin de mejorarlo o adaptarlo según las necesidades.

Referencias Bibliográficas

Acuerdo Académico 146 de 1993 [Consejo Académico]. Por el cual se dictan disposiciones acerca del ingreso a la Universidad de integrantes de Comunidades Indígenas. Noviembre 23 de 1993.

Acuerdo Académico 098 de 1994 [Consejo Académico]. Por el cual se modifica el Acuerdo No. 146 del 23 de noviembre de 1993, emanado de este Consejo. Diciembre 20 de 1994.

Acuerdo Académico 088 de 2001 [Consejo Académico]. Por el cual se deroga la admisión especial en la UIS, para comunidades indígenas. Septiembre 18 de 2001.

Acuerdo Académico 229 de 2008 [Consejo Académico]. Por el cual se dictan disposiciones sobre el ingreso a la Universidad de aspirantes provenientes de departamentos donde no hay instituciones de educación superior y aspirantes que provengan de municipios de difícil acceso o con problemas de orden público. Agosto 19 de 2008.

Acuerdo Académico 134 de 2011 [Consejo Académico]. Por el cual se dictan disposiciones sobre el ingreso a la universidad de aspirantes por la modalidad de admisiones especiales. Junio 7 de 2011.

Acuerdo Académico 211 de 2011 [Consejo Académico]. Por el cual se adiciona al acuerdo 134 de junio 7 de 2011 el proceso de admisión especial para los beneficiarios de la ley de víctimas del conflicto armado interno, sobre el ingreso a la universidad de aspirantes por la modalidad de admisiones especiales. Agosto 23 de 2011.

Acuerdo Académico 282 de 2017 [Consejo Académico]. Por la cual se dictan disposiciones sobre el ingreso a la Universidad de aspirantes por la modalidad de Admisiones Especiales. Noviembre 17 de 2017.

Acuerdo por lo superior 2034 [Consejo Nacional de Educación Superior] Propuesta de política pública para la excelencia de la educación superior en Colombia en el escenario de la paz. Agosto 4 de 2014.

Agudelo, C. (2000) *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico.* Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Aké, L (2021). El carácter algebraico en el conocimiento matemático de maestros en formación. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, (49),* 15-34

Arizabaleta D., Ochoa, S., Cubillos, A. (2016). Hacia una educación superior inclusiva en Colombia. *Pedagogía y Saberes. (45)*,41-52.

Artigué, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, (1), 97-140.

Asamblea General de la ONU. (1948). "Declaración Universal de los Derechos Humanos" (217 [III] A). Paris. Recuperado de http://www.un.org/en/universal-declaration-human-rights/

Barajas, C. (2015). *Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos: una mirada desde la resolución de problemas que implican fenómenos de variación* (tesis de maestría). Centro de Investigaciones en Ciencias Aplicadas y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México. D.F

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 6* (3). 199-219.

Batanero, C., & Godino, J. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

Beltrán, D., Duque, K., Fernández, C., & Suárez, B. (2016). El proceso de generalización a partir de pliegues de papel. *Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM*. (3), 198-205.

Benítez, D., & Bueno, A. (2009). Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas. *El cálculo y su enseñanza (*1), 13-31.

Bernal, M., Castro, P., Pinzón, A., Torres, F., & Romero, I. (2012). Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2x2. *En Gómez, Pedro (Ed.), Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp. 200-260). Bogotá: Universidad de los Andes.

Bolaños, H., & Lupiáñez, J. L. (2021). Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario. *Uniciencia,* 35(1), 1-18. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.1

Bozzalla, A., & García, S. (2014). Espacios de reflexión sobre la enseñanza de la matemática en la escuela media. Análisis gráfico como puerta de entrada hacia el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1031-1039). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México, DF:

Bustos, E., Sarmiento, E., & Flórez, E. (2013). Estudio comparativo del currículo de matemáticas ofertado en ingenierías por la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. *Revista Científica, 15(1),* 58-68. https://doi.org/10.14483/23448350.3938

Camargo, L., & Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (32), 4-8.

Celis, M. T., Jiménez, O., & Jaramillo, J. F. (2012). ¿Cuál es la brecha de la calidad educativa en Colombia en la educación media y en la superior? *ICFES, Estudios sobre la calidad de la educación en Colombia, Bogotá: Ministerio de Educación Nacional*, 67-89.

Cetina, M., & Cabañas, G. (2022). Estrategias de generalización de patrones y sus diferentes formas de uso en quinto grado. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *40* (1), 65-86.

Constitución Política de Colombia [Const]. Art. 6. Julio 7 de 1991 (Colombia).

Corte suprema de justicia. Sala primera de revisión. Sentencia: T-110 de 2010 (M.P Maria Victoria Calle; 16 de febrero de 2010)

Cogua, M. (2013). Aprendizaje de la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 (método gráfico), en grado Noveno, utilizando el graficador Winplot. *Revista Ejes*, *1*(1), 71-72.

Cuypers, H., Heck, A., Tempelaa, D., Kuperus, B. T., van der Kooij, H., & Van de Vrie, E. (2012). El papel de los exámenes formativos digitales en el aprendizaje virtual de matemáticas: un estudio de caso en los Países Bajos. *RUSC. Universities and Knowledge Society Journal*, *9*(1), 92-114.

De la Fuente Pérez, J. A. (2016). *Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del conocimiento del profesor* (tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona,Barcelona, España.

Delgado, R. (1999) *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas* (tesis de doctorado). Instituto Superior Politécnico: José Antonio Echeverría, Habana, Cuba.

Díaz-Barriga, F., Lule, M., Pacheco, D., Rojas, S., & Saad, E. (1990). *Metodología de diseño curricular para educación superior*. Trillas.

Duarte, O., Rodríguez, G., y López, C. (2014). Curso piloto intensivo de nivelación en matemáticas para admitidos a programas de Ingeniería en la Universidad Nacional de Colombia. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*, Buenos aires, Argentina

Echeverría, C. (2022). *Enseñanza del cálculo a personas con características diferenciadas: Reflexiones de una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación* (tesis de maestría) Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Espinoza, J. (2017). La resolución y planteamiento de problemas como estrategia metodológica en clases de matemática. *Atenas*, *3*(39), 64-79.

Felmer, P., y Perdomo-Díaz, J. (2017). Un programa de desarrollo profesional docente para un currículo de matemática centrado en las habilidades: la resolución de problemas como eje articulador. *Educación Matemática, 29*(1), 201-217.

Fiallo, J., y Parada, S. (2018). *Estudio Dinámico del cambio y la variación, curso de precálculo mediado por GeoGebra*. Ediciones UIS.

García, Á., Callejo, L., & Fernández-Verdú, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones lineales. *Investigación en Educación Matemática XIX. Alicante: SEIEM*. (279-288)

García, R y Villalonga, M (2006). Estrategia para la resolución de problemas en estudiantes de ingeniería química *Revista Cubana de Química*, 8(2), 28-29

Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 8(2), 169-193.

Giménez, J., Sirera, M., Palomar, J., Knijnik, G., Serentill, P., Sala, N., Goñi, J., Valero, P., Wehrle, P. (2007). *Educación matemática y exclusión.* España. Editorial grao.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *32*(1), 199-219.

Godino, J., & Batanero, C. (2002). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. *Granada: Proyecto de Investigación y Desarrollo del Ministerio de Ciencia y Tecnología*.

Guarín, A. S., (2018) *Aproximación y Tendencia: nociones para la comprensión del límite de una función en un punto* (tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Hernández, D. (2018) *Desarrollo del pensamiento variacional desde la solución de sistema de ecuaciones lineales 2 x 2 para estudiantes de grado noveno* (tesis de pregrado). Universidad Santo Tomás, Bogotá, Colombia.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *In XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers*, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico).

Infante Mejía, F. (2016). *La enseñanza y aprendizaje de la modelización y las familias de funciones con el uso de GeoGebra en un primer curso de ciencias Administrativas y Económicas en Colombia* (tesis doctoral) Universidad de Valencia, España.

Jara, M. (2020). *Una Propuesta Didáctica para la enseñanza de las sucesiones y los procesos infinitos desde la mirada de la Teoría de los Registros de Representación* (tesis de maestría) Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (1998). Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia. Una empresa docente.

Krulik, S., & Rudnick, J. (1989). *Problem solving: A handbook for teachers.* Allyn and Bacon, Inc., 7 Wells Avenue, Newton, Massachusetts 02159.

Lasa, A. (2016*). Instrumentación del medio material GeoGebra e idoneidad didáctica en procesos de resolución de sistemas de ecuaciones*. (tesis doctoral) Universidad Pública De Navarra, Cataluña, España.

Ley 30 de 1992. Por la cual se organiza el servicio público de la Educación Superior. 29 de diciembre de 1992. D.O N° 40.700

Ley 115 de 1994. Por la cual se expide la ley general de educación. Febrero 8 de 1994. D.O N° 41.214

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education. In: Problem Solving in Mathematics Education.* ICME-13 Topical Surveys. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2_1

López, W., & Escribano, E. (2016). Los problemas de comprensión del álgebra en estudiantes universitarios. *Ciencia e interculturalidad*, 19(2), 54-64.de Navarra.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., Gowar, N. (1999). *Rutas hacia el Álgebra, raíces del Álgebra*. Traducido Cecilia Agudelo Valderrama, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Mayorga, C., Muquinche, C., Revelo, Q., & Allauca, H. (2018). Los procesos algebraicos y su incidencia en el razonamiento lógico matemático en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado. *Cuadernos de Educación y Desarrollo*, (93).

MEN (1998) *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Colombia-Bogotá. https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Colombia-Bogotá http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf

MEN (2013). *Lineamientos política de educación superior inclusiva.* Colombia-Bogotá https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-357277_recurso_0.pdf

MEN (2016) *Derechos Básicos de Aprendizaje V2.* Colombia-Bogotá https://wccopre.s3.amazonaws.com/Derechos_Basicos_de_Aprendizaje_Matematicas_1.pdf

MEN (2018). *Índice de inclusión para educación superior.* Colombia. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-357277_recurso_1.pdf

Meneses, M. y Peñaloza, D. (2019). Método de Pólya como estrategia pedagógica para fortalecer la competencia resolución de problemas matemáticos con operaciones básicas *Zona Próxima*, (31) 8-25.

Moreno, L. (2014) *Educación matemática: del signo al píxel*. Ediciones UIS.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción de M. Fernández (Traducción de la versión del 2000 del NCTM). SAEM Thales. Sevilla.

Obando, G. (2018). Regla de tres simple directa: avatares de un algoritmo. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 113-124.

Olvera, M. (2010) *Rutas de comprensión y construcción del pensamiento algebraico que exhiben estudiantes con el uso de la hoja de cálculo en la resolución de problemas (*tesis de maestría). Centro de Investigaciones en Ciencias Aplicadas y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México. D.F

Olvera, M. (2015) *El uso de herramientas digitales en el estudio de funciones y el desarrollo de competencia matemática para la enseñanza* (tesis de doctorado). Centro de Investigaciones en Ciencias Aplicadas y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México. D.F

Parada, S. (2018). Caracterización de habilidades del Pensamiento Variacional. RECME - *Revista Colombiana de Matemática Educativa*. 3 (1). 10-18.

Pineda, S. (2018). *formación Inicial De Profesores De Matemáticas Alrededor De La atención a la Diversidad* (tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Polya, G., (1965) *Cómo plantear y resolver problemas.* Editorial Trillas.

Posada, F., Obando, G., Munera, J., & Villa, J. (2006). *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico*. Medellín: Gobernación de Antioquia.

Puga, L., Rodríguez, J., & Toledo, A. (2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo. *Sophia, colección de Filosofía de la Educación, 20*(1), 195-218.

Rueda, N. (2016). *Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación* (tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Scaglia, S., & Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática, 17*(3),105-120. [fecha de Consulta 7 de junio de 2022]. ISSN: 0187-8298 https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517306

Santamaria, A. (2016). *Habilidades procedimentales desarrolladas por estudiantes beneficiarios de un programa de acompañamiento en matemáticas.* (tesis de maestría) Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Santos-Trigo, L. (2014) *Resolución de problemas matemáticos fundamentos cognitivos*. Editorial Trillas.

Santos-Trigo, L. (2016). La resolución de Problemas Matemáticos y el uso coordinado de tecnologías digitales.

Santos-Trigo, L. (2020) Tecnologías digitales e innovación en escenarios de aprendizaje *Revista Ciencia y Cultura (3)* 1-3

Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. (2005). *Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas*. Colombia: Gobernación de Antioquia.

Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. (2006). *Problemas sobre el pensamiento variacional*. Colombia: Gobernación de Antioquia.

Segura de Herrero, S. M. (2004). R 11 GE Matemática Educativa. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 7(1), 49-78.

Stewart, J., Lothar, R., y Saleem W. (2012) *Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta Edición* ISBN: 978-607-481-826-0

Schoenfeld, A. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education*, 196(2), 1-38.

Sosa, L., Aparicio, E., & Pérez-Oxté, I. (2011). Nociones y habilidades matemáticas asociadas al pensamiento variacional. Análisis de un diseño didáctico. *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educat*iva, 143-150

Soto, C. (2012). *Conocimiento del contenido y de estudiantes que posee el profesor de bachillerato en el contexto del concepto solución de sistemas de ecuaciones lineales de orden lineales* (tesis de Maestría), Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN Departamento de Matemática Educativa, México.

UNESCO (2015) Educación 2030. Declaración de Incheon y Marco de Acción para la realización del objetivo de Desarrollo Sostenible 4.

UNESCO (2020) Global Education Monitoring Report Summary 2020: Inclusion and education: All means all. Paris.

Vargas, A. (2013). Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. *Revista educación*, *37*(2), 1-16.

Vergel, M., Hernández, R., & Rincón, O. (2016). Influencia de curso precálculo y actividades de apoyo institucional en desarrollo de competencias y creencias en matemáticas. *Eco Matemático Journal of Mathematical Sciences*, 7(1), 33-47.

Williner, B. (2011). Estudio de habilidades matemáticas cuando se realizan actividades usando software específico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 27, 115-129.