

ESTUDIO DE ÓRBITAS TRIDIMENSIONALES EN CAMPOS
GRAVITACIONALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS

SANDRA MILENA MARTÍNEZ SICACHÁ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2015

ESTUDIO DE ÓRBITAS TRIDIMENSIONALES EN CAMPOS
GRAVITACIONALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS

SANDRA MILENA MARTÍNEZ SICACHÁ

Trabajo de Grado para optar al título de
Físico

Director
GUILLERMO A. GONZÁLEZ VILLEGAS
Doctor en Matemática Aplicada-Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2015

AGRADECIMIENTOS

- Le agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.
- Le doy gracias a mis padres por apoyarme en todo momento, por los valores que me han inculcado, y por haberme dado la oportunidad de tener una excelente educación en el transcurso de mi vida. Sobre todo por ser un excelente ejemplo de vida a seguir.
- A mi director de proyecto el Dr. Guillermo González Villegas, por la orientación y ayuda que me brindó para la realización de esta tesis, por su apoyo y amistad que me permitieron aprender mucho más que lo estudiado en el proyecto.

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN	12
2. ÓRBITAS EN POTENCIALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS	14
2.1. MOVIMIENTO EN EL PLANO MERIDIONAL	14
2.2. SUPERFICIES DE SECCIÓN DE POINCARÉ (PSS)	15
3. ANÁLISIS DE ÓRBITAS EN EL POTENCIAL DE MIYAMOTO Y NAGAI	18
3.1. POTENCIAL DE MIYAMOTO Y NAGAI	18
3.2. ÓRBITAS EN EL MODELO $n = 0$	21
3.3. ÓRBITAS EN EL MODELO $n = 1$	28
3.4. ÓRBITAS EN EL MODELO $n = 2$	35
3.5. ÓRBITAS EN EL MODELO $n = 3$	41
4. CONCLUSIONES	47
A. TÉRMINOS DEL POTENCIAL DE MIYAMOTO Y NAGAI	49
B. ECUACIONES DE MOVIMIENTO	50

LISTA DE FIGURAS

2.1. Superficies toroidales de una órbita.	16
2.2. Órbitas del potencial Hénon-Heiles, (a) $E = 1/12$ y (b) $E = 1/6$	17
3.1. Líneas equipotenciales para $n = 0$	22
3.2. Solución del sistema para $n = 0$ y $h = 0.02$	23
3.3. Trayectorias de órbitas para el modelo $n = 0$	25
3.4. PSS para el modelo $n = 0$ con $h = 0$	26
3.5. PSS para el modelo $n = 0$ con $h = 0.02$	27
3.6. Líneas equipotenciales para $n = 1$	29
3.7. Solución del sistema para $n = 1$	30
3.8. Trayectorias de órbitas para el modelo $n = 1$ con $h = 0$	32
3.9. PSS con $h = 0$ para $n = 1$	33
3.10. PSS con $h = 0.02$ para $n = 1$	34
3.11. Líneas equipotenciales para el modelo $n = 2$	35
3.12. Solución del sistema para $n = 2$	36
3.13. Trayectorias de órbitas para $n = 2$	38
3.14. PSS de órbitas con $h = 0$ para $n = 2$	39
3.15. PSS de órbitas con $h = 0.02$ para $n = 2$	40
3.16. Líneas equipotenciales para el modelo $n = 2$	41
3.17. Solución al sistema para $n = 3$	42
3.18. Trayectorias de órbitas para $n = 3$	44
3.19. PSS con $h = 0$ para $n = 3$	45
3.20. PSS con $h = 0.02$ para $n = 3$	46

LISTA DE TABLAS

3.1. Condiciones iniciales para órbitas de la figura 3.3	24
3.2. Condiciones iniciales para órbitas de la figura 3.8.	31
3.3. Condiciones iniciales para órbitas de la figura 3.13.	37
3.4. Condiciones iniciales para órbitas de la figura 3.18.	43

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO DE ÓRBITAS TRIDIMENSIONALES EN CAMPOS GRAVITACIONALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS¹.

AUTOR: SANDRA MILENA MARTÍNEZ SICACHÁ².

PALABRAS CLAVE: Dinámica y cinemática estelar, dinámica caótica, mecánica celeste.

DESCRIPCIÓN:

En el presente trabajo se realizó un estudio detallado de la naturaleza del movimiento de partículas en presencia de campos gravitacionales axialmente simétricos, bajo las leyes de la mecánica clásica. Las regiones de regularidad o irregularidad de órbitas tridimensionales se determinaron para los primeros cuatro términos de la familia del potencial de Miyamoto y Nagai. En primer lugar, se realizó un análisis de las curvas de velocidad cero o líneas equipotenciales que permiten definir el intervalo de energía donde el movimiento de la partícula es permitido. Seguidamente, utilizando el método de Runge Kutta de cuarto orden, se solucionaron las ecuaciones de movimiento con un determinado conjunto de condiciones iniciales que permitieron encontrar la evolución temporal de las coordenadas (R, z) . A continuación se clasificaron y analizaron las trayectorias de movimiento, variando algunas parámetros como el momento angular y la energía para cada uno de los términos del potencial. Finalmente, se determinaron las regiones regulares o caóticas mediante las superficies de sección de Poincaré en el espacio de fase (R, \dot{R}) para partículas que cruzan el plano $z = 0$ en la dirección positiva, donde a partir de un análisis exhaustivo se pudo determinar si los modelos del potencial estudiado presentan un mayor dominio de regularidad que representan galaxias estables.

¹Tesis de Pregrado.

²Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Guillermo A. González Villegas, Doctor en Matemática Aplicada-Física

ABSTRACT

TITLE: STUDY OF ORBITS THREE-DIMENSIONAL IN FIELDS GRAVITATIONAL AXIALLY SYMMETRICAL³.

AUTHOR: SANDRA MILENA MARTÍNEZ SICACHÁ⁴.

KEYWORDS: Dynamics and stellar kinematics, Chaotic dynamics, Celestial mechanics.

DESCRIPTION:

In the present work we realized a study of nature of the movement of particles in presence of fields gravitational axially symmetrical, under the laws of the classic mechanics. The regions of regularity or irregularity of three-dimensional orbits were determined for the first four terms of the family of the potential of Miyamoto and Nagai. First, we realized an analysis of the lines equipotenciales or zero-velocity curves that define the interval of energy where the movement of the particle is allowed. Immediately afterwards, using Runge Kutta's method of fourth order, the equations of movement were solved by a certain set of initial conditions that allowed to find the temporary evolution of the coordinates (R, z) . Later they qualified and analyzed the paths of movement, changing some parameters as the angular moment and the energy for each of the terms of the potential. Finally, there decided the regular or chaotic regions by means of the surfaces of Poincaré's section in the phase space (R, \dot{R}) for particles that cross the plane $z = 0$ in the positive direction, where from an exhaustive analysis it was possible to determine if the models of the studied potential present a major domain of regularity that represent stable galaxies.

³Bachelor Thesis.

⁴Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Guillermo A. González Villegas , Doctor en Matemática Aplicada-Física

INTRODUCCIÓN

Entre el siglo XIX y el XX inicio el desarrollo hacia la explicación del movimiento de los cuerpos celestes. Algunas de las preocupaciones de esta época eran explicar si nuestro sistema solar es estable o no, o cuál va a ser su evolución en los próximos milenios. Es aquí donde el científico Henri Poincaré aborda el problema de los tres cuerpos [14], que consiste básicamente en estudiar el movimiento colectivo de tres partículas de masas diferentes que se mueven en el espacio bajo la acción de la gravitación mutua dadas unas condiciones iniciales, y demostró que no era posible encontrar una solución exacta tal y como la conocemos para el problema de los dos cuerpos resuelto por Newton en el siglo XVI [1]. A partir de estos nuevos resultados el estudio de sistemas dinámicos tomo más relevancia y en la búsqueda de poder acortar el número de variables se empezó a investigar la naturaleza regular o caótica de órbitas de partículas moviéndose en el plano meridional de un modelo galáctico axialmente simétrico [2, 19]; es decir, el campo gravitacional no depende del ángulo azimutal.

Explorar la naturaleza de órbitas constituye un problema muy importante, no solo por el evidente interés astronómico de clasificar los tipos de órbitas que existen en determinado sistema, sino también por la necesidad de construir modelos auto-consistentes de galaxias [20]. Para estudiar y entender la estructura y dinámica de galaxias, es necesario identificar el tipo de dinámica que caracteriza el movimiento de estrellas y estimar las regiones de cada tipo en el espacio de fase de la galaxia. Esta temática fue abordada por Hénon & Heiles [8], y Seiji Manabe [9] aplicando el concepto de la tercera integral de movimiento para órbitas de estrellas en una galaxia, donde a partir de la conservación del momento angular describieron satisfactoriamente los tipos de órbitas para esta configuración de materia. Además demostraron que no era posible determinar soluciones analíticas específicas, dada la naturaleza del potencial considerado, aplicando entonces métodos numéricos para solucionar este problema.

El estudio de órbitas periódicas en campos gravitacionales axialmente simétricos en el plano meridional para órbitas circulares es estudiado ampliamente para varios tipos de objetos astrofísicos. Por ejemplo, Revaz y Pfenniger [16] estudiaron discos deformados para un modelo de potencial compuesto por un disco galáctico y el bulbo central, Belmonte, Bocaletti y Pucaco [3] analizaron potenciales logarítmicos que describen galaxias elípticas, mientras que Ninković y Jovanović [13] consideraron el potencial de Miyamoto y Nagai que describe un disco galáctico. Por otra parte, el estudio de movimiento regular o caótico fue analizado por Manos y Athannasoula

[10]. Aplicando una combinación de dos métodos de integración numérica [18, 4], que sirven como indicadores de caos que pueden visualizarse en las superficies de sección de Poincaré [5, 6], los autores analizan para galaxias barradas la naturaleza de su movimiento donde las cantidades físicas de interés son la velocidad de la barra y un potencial compuesto por una componente discoidal y una protuberancia o bulbo. Los discos galácticos con un núcleo central esférico fueron estudiados por Zotos y Carpintero [22], centrando su importancia en el estudio de la dinámica de este sistema. En trabajos realizados por el grupo de investigación GIRG [15], se considera el modelo de disco generalizado de Kalnajs [7] y mediante las superficies de sección de Poincaré se logra caracterizar la regularidad o caoticidad. Posteriormente, en un trabajo enfocado al estudio de la estabilidad de las órbitas en la familia del potencial de Miyamoto y Nagai [17], se analizaron las curvas de rotación para el par potencial-densidad en el plano ecuatorial y, al analizar los perfiles de densidad de la distribución de materia, se encontró que este potencial no presentaba forma de un disco aplanado, sino en realidad mostraba un disco grueso con un bulbo central.

En el presente trabajo se realiza un estudio de la dinámica de partículas en órbitas tridimensionales en el plano meridional para campos gravitacionales con configuración de materia axialmente simétrica; sin embargo, a diferencia de anteriores trabajos en los cuales solo se considero la aproximación a órbitas circulares, en este trabajo se realizó un estudio más detallado del tipo de trayectorias para finalmente caracterizar el movimiento regular o caótico con las superficies de sección de Poincaré. El capítulo 2 describe la formulación Hamiltoniana de la mecánica que llevaron a la realización de este trabajo. Después de una introducción al capítulo 2, en la sección 2.1, se desarrolla los conceptos de las superficies de sección de Poincaré que es el principal objetivo de este trabajo. Luego en la sección 2.2, partiendo del análisis de sistemas Hamiltonianos autónomos de dos grados de libertad se determinan las expresiones analíticas de la energía y las ecuaciones de movimiento .

En el capítulo 3 se determinan las expresiones de los primeros cuatro términos de la familia del potencial de Miyamoto y Nagai [11, 12] y se determinan las expresiones normalizadas para la energía total y el potencial bajo los parámetros de tiempo y longitud. En las secciones 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5, se caracterizaron las líneas equipotenciales o curvas de velocidad cero que delimitan en ciertos valores de energía en el que el movimiento de la partícula es permitido, después se encontraron las condiciones iniciales para resolver el sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, aplicando el método Runge Kutta de cuarto orden fue posible analizar la evolución temporal de estas soluciones. Finalmente se determino si los modelos estudiados representaban o no sistemas dinámicos regulares, a partir de la clasificación de las trayectorias de movimiento de las partículas, y la caracterización de órbitas en el espacio de fase en las superficies de sección de Poincaré para el momento angular nulo y diferente de cero.

ÓRBITAS EN POTENCIALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS

Este capítulo presenta el formalismo necesario para el estudio de órbitas en potenciales axialmente simétricos con base en la formulación Hamiltoniana de la mecánica y la teoría de sistemas dinámicos. Los sistemas Hamiltonianos analizados constituyen una subclase muy importante de los sistemas dinámicos (dinámica lineal o caos). Matemáticamente, un sistema dinámico es un conjunto de ecuaciones algebraicas, diferenciales, integrables o combinaciones de éstas, cuya solución proporciona la evolución en el tiempo de alguna variable dependiente.

En la sección 2.1 se estudia el movimiento en el plano meridional de órbitas tridimensionales, donde a partir de la formulación Hamiltoniana el sistema dinámico queda reducido a dos grados de libertad como consecuencia de las leyes de conservación de la energía y el momento angular. Seguidamente, se determinan las expresiones generales de las ecuaciones de movimiento. Finalmente, en la sección 2.2 se caracteriza la dinámica de órbitas para el potencial Hénon-Heiles en el espacio de fase mediante las superficies de sección de Poincaré.

2.1. MOVIMIENTO EN EL PLANO MERIDIONAL

Al estudiar órbitas tridimensionales, es usual emplear el sistema en coordenadas cilíndricas (R, φ, z) , con origen en el centro de la fuente, que presenta simetría respecto al plano $z = 0$. El movimiento de una partícula de prueba en un potencial axialmente simétrico se caracterizara por medio de las ecuaciones de Lagrange [2], con las coordenadas R y z ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\dot{R}^2 + (R\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2 \right) - \Phi(R, z). \quad (2.1)$$

Los momentos quedan definidos por

$$p_R = \dot{R}, \quad p_\varphi = R^2\dot{\varphi}, \quad p_z = \dot{z}, \quad (2.2)$$

y el Hamiltoniano está definido por

$$H = \frac{1}{2} \left(p_R^2 + \frac{p_\varphi^2}{R^2} + p_z^2 \right) + \Phi(R, z). \quad (2.3)$$

A partir de (2.3) se encuentran las ecuaciones de movimiento

$$\dot{p}_R = \frac{p_\varphi^2}{R^3} - \frac{\partial\Phi}{\partial R}, \quad (2.4)$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad (2.5)$$

$$\dot{p}_\varphi = \frac{d}{dt}(R^2\dot{\varphi}) = 0. \quad (2.6)$$

La Ec. (2.6) corresponde a la conservación del momento angular sobre el eje z ; por tanto $p_\varphi = \ell$, con ℓ constante, de tal manera que las ecuaciones se reducen a

$$\ddot{R} = -\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial R}, \quad (2.7)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial z}, \quad (2.8)$$

donde

$$\Phi_{eff} = \Phi(R, z) + \ell^2/2R^2 \quad (2.9)$$

es el potencial efectivo y el termino $\ell^2/2R^2$ representa una barrera centrifuga. Así, el problema del movimiento en tres dimensiones para el potencial estudiado queda reducido al movimiento en el plano meridional (R, z) , de dos grados de libertad. Definiendo ahora el Hamiltoniano (2.3) en términos del potencial efectivo

$$H = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \Phi_{eff}(R, z), \quad (2.10)$$

donde el valor numérico de H es simplemente la energía total E . Dado que la energía cinética es no negativa, la órbita se restringe al área en el plano meridional que satisface la desigualdad $E \geq \Phi_{eff}$.

2.2. SUPERFICIES DE SECCIÓN DE POINCARÉ (PSS)

A partir del estudio realizado por Henri Poincaré [14] a los sistemas dinámicos, es posible reducir el problema a uno más simple con menos dimensiones. Para el estudio de las Superficies de Sección de Poincaré (PSS) se aplica el teorema KAM, enunciado primero por Kolmogorov (1957) y después probado independientemente por Arnold y Moser (1961) [1]. Este teorema afirma que el movimiento en un sistema integrable y periódico está confinado a una superficie toroidal (figura 2.1). Se dice que el sistema dinámico es integrable cuando es posible comprobar la existencia de soluciones [18]; es decir, cuando existe un número suficiente de constantes de movimiento, las cuales permiten realizar una predicción cualitativa del movimiento en el espacio de fase. Se denomina espacio de fase al espacio constituido por el conjunto de coordenadas y sus correspondientes velocidades.

Por consiguiente, el movimiento de partículas en órbitas tridimensionales se puede describir como un sistema dinámico de dos grados de libertad. Si el espacio de fase del movimiento viene dado inicialmente en cuatro dimensiones, (R, z, \dot{R}, \dot{z}) , entonces, aplicando la condición $z = 0$, se puede reducir al subespacio tridimensional (R, \dot{R}, \dot{z}) ; sin embargo, dicho subespacio es complicado de visualizar y por consiguiente de analizar. Así que se plantea examinar el movimiento de la partícula cuando cruza el plano $z = 0$ en dirección positiva, es decir, para $\dot{z} > 0$; por lo que el movimiento queda finalmente definido en el espacio de fase (R, \dot{R}) , que permite analizar la regularidad o irregularidad de las trayectorias de órbitas en las PSS [2]. Los comportamientos irregulares en sistemas conservativos también son llamados caóticos. El comportamiento caótico tiene dos características distinguibles, la primera es el comportamiento marcadamente irregular en sus trayectorias y el segundo es que el comportamiento caótico sea sensible al cambio de las condiciones iniciales.

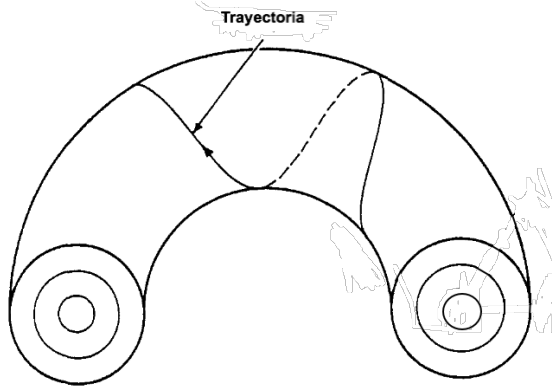


Figura 2.1: Superficies toroidales de una órbita.

Para ilustrar mejor esta teoría utilizaremos el sistema de Hénon-Heiles[8]. Este modelo, definido por las expresiones

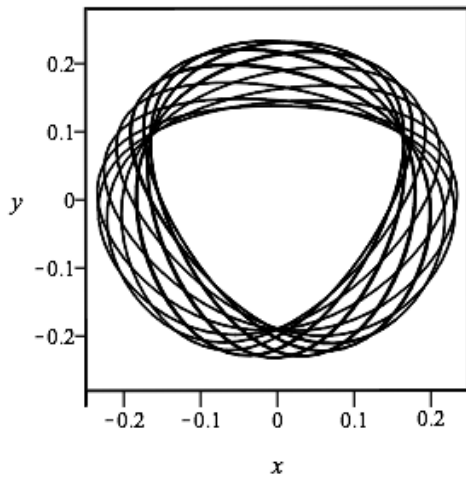
$$V(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + 2x^2y) - \frac{2}{3}y^3, \quad (2.11)$$

$$E = V(x, y) + \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (2.12)$$

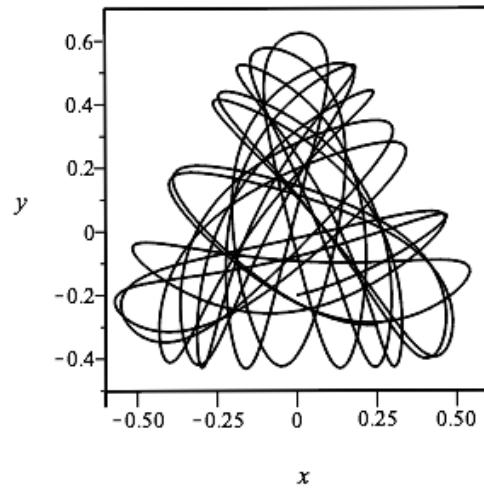
$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (2.13)$$

es uno de los más conocidos y describe la naturaleza del movimiento de estrellas. Implementando integración numérica tomando las condiciones iniciales consideradas en [8], se solucionaron las ecuaciones de movimiento 2.13 y se obtuvieron trayectorias tanto regulares (figura 2.2a) como irregulares (figura 2.2b). Las trayectorias regulares se obtienen cuando al realizar un corte en las superficies toroidales éstas presentan trayectorias cerradas y definidas, tal y como se aprecia en la PSS de la figura 2.2c, mientras que las trayectorias irregulares se presentan cuando las superficies toroidales quiebran su topología deformando los toroides. Es decir las superficies de KAM se aíslan en delgadas capas del movimiento irregular representado por puntos en las PSS (figura 2.2d)¹.

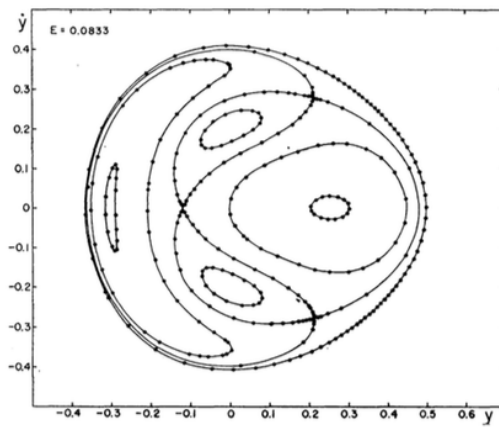
¹Las figuras 2.2c y 2.2d fueron tomadas de [8].



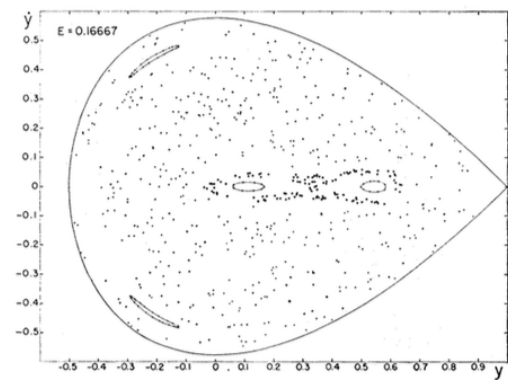
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2.2: Órbitas del potencial Hénon-Heiles, (a) $E = 1/12$ y (b) $E = 1/6$.

ANÁLISIS DE ÓRBITAS EN EL POTENCIAL DE MIYAMOTO Y NAGAI

En este capítulo se presenta un análisis detallado de la dinámica de órbitas para el potencial de Miyamoto y Nagai [11, 12] con base en las expresiones generales para el estudio de órbitas en potenciales axialmente simétricos presentadas en el capítulo anterior. Debido a que este potencial describe una familia infinita de modelos, el análisis se restringirá al estudio de los primeros cuatro términos de la familia; es decir, desde $n = 0$ a $n = 3$. Cada uno de estos modelos particulares del potencial son generados a partir de la expansión del potencial gravitacional propuesta por Vogt y Letelier [21]. En el presente trabajo, las expresiones de energía, potencial, y momento angular están normalizadas con las unidades de velocidad al cuadrado. Para determinar la primera constante del problema, la energía, se estudian las curvas de velocidad cero o líneas equipotenciales que delimitan la región en la que el movimiento de la partícula es permitido. Luego, para un determinado conjunto de condiciones iniciales, se muestra la solución de las ecuaciones de movimiento mediante la evolución temporal de las coordenadas (R, z) . Finalmente, se determina si las trayectorias de movimiento y las PSS para cada modelo tienen un comportamiento regular o caótico. En la sección 3.1 se determina la expresión de los modelos del potencial de Miyamoto y Nagai. A continuación, se presenta la expresión normalizada del modelo $n = 0$ del potencial. Seguidamente, se designan las cantidades de los parámetros k , ℓ y \tilde{a} , a partir de valores que pertenecen a galaxias. Por último, en las secciones 3.2 a 3.5, se muestra el análisis detallado de la dinámica de órbitas para cada uno de los cuatro modelos del potencial de Miyamoto y Nagai.

3.1. POTENCIAL DE MIYAMOTO Y NAGAI

El potencial de Miyamoto y Nagai [11, 12] define una familia de modelos de potencial gravitacional expresados en coordenadas cilíndricas y en términos de dos parámetros a y b , los cuales son diferentes de cero y dependiendo de los valores escogidos para estos parámetros, es posible representar desde discos infinitesimalmente delgados hasta un sistema esférico. Debido a lo mencionado anteriormente se define un potencial gravitacional generalizado

$$\Psi = - \sum_{l=0}^n \frac{a_l P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}}, \quad (3.1)$$

en donde P_l son los polinomios de Legendre, a_l son constantes que caracterizan cada modelo y (r, θ) corresponden a la coordenada radial y el ángulo polar en coordena-

das esféricas.

Considerando ahora la expansión del potencial gravitacional hasta el término $n = 3$ se obtiene

$$\Psi(r, \theta) = -\frac{a_0}{r} - \frac{a_1 \cos \theta}{r^2} - \frac{a_2(3 \cos^2 \theta - 1)}{2r^3} - \frac{a_3(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)}{2r^4}. \quad (3.2)$$

Ahora bien, al pasar de un sistema de coordenadas esféricas a un sistema de coordenadas cilíndricas, se emplean las siguientes transformaciones

$$\cos \theta \rightarrow \frac{z}{r}, \quad (3.3)$$

$$r \rightarrow \sqrt{R^2 + z^2}. \quad (3.4)$$

Aplicando una transformación adicional sobre z se tiene que el laplaciano sea distinto de cero

$$z \rightarrow z^* = a + \sqrt{z^2 + b^2}. \quad (3.5)$$

en donde a y b son parámetros diferentes de cero que tienen dimensiones de longitud. De manera que el potencial 3.2 en términos de z^* , queda definido por un nuevo potencial $\Phi(R, z)$

$$\Psi(R, z) \rightarrow \Phi(R, z) = \Psi(R, z^*). \quad (3.6)$$

Por lo tanto, la expresión para el potencial gravitacional correspondientes al primer modelo de la familia de Miyamoto y Nagai¹, expresado en coordenadas cilíndricas y en términos de las transformaciones dadas anteriormente, queda definido de la forma

$$\Phi_0(R, z) = -\frac{a_0}{\left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2 \right]^{1/2}}. \quad (3.7)$$

En donde el parámetro $a_0 = GM$, siendo M la masa total y G es la constante de gravitacional universal.

A continuación, se muestra en detalle la normalización de las expresiones de energía y potencial potencial efectivo para el modelo $n = 0$.

$$E = \frac{1}{2} (\dot{R}^2 + \dot{z}^2) - \frac{a_0}{\left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2 \right]^{1/2}} + \frac{\ell^2}{2R^2}. \quad (3.8)$$

Definiendo $\tilde{R} = \dot{R}/b$, $\tilde{z} = \dot{z}/b$, $\tilde{R} = R/b$ y $\tilde{a} = a/b$, se obtiene

$$E = \frac{1}{2} \left(b^2 \tilde{R}^2 + b^2 \tilde{z}^2 \right) - \frac{a_0}{b \left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{1/2}} + \frac{\ell^2}{2b^2 \tilde{R}^2}. \quad (3.9)$$

¹Ver apéndice A para los modelos del potencial para $n = 0$ a $n = 3$.

Dividiendo por b^2 y definiendo $k = a_0/b^3$, se obtiene

$$\frac{E}{b^2} = \frac{1}{2} \left(\dot{\tilde{R}}^2 + \dot{\tilde{z}}^2 \right) - \frac{k}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{1/2}} + \frac{\ell^2}{2b^4 \tilde{R}^2}. \quad (3.10)$$

Por último, dividiendo la expresión anterior en k y definiendo $h = \ell^2/a_0b$, se obtiene

$$\varepsilon = \frac{1}{2k} \left(\dot{\tilde{R}}^2 + \dot{\tilde{z}}^2 \right) - \frac{1}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{1/2}} + \frac{h}{2\tilde{R}^2}, \quad (3.11)$$

donde $\varepsilon = E/kb^2$, y así el potencial efectivo se expresa como

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{1/2}} + \frac{h}{2\tilde{R}^2}, \quad (3.12)$$

donde $\tilde{\Phi} = \Phi/kb^2$.

Con el fin de determinar soluciones lo más aproximadas a objetos astrofísicos, se tomaron los valores de los parámetros k , b , h cercanos a los conocidos en la literatura.

- La constante gravitacional $G = 6,67 * 10^{-11} Kg^{-1}m^3/s^2$
- La masa total $M = 10^{11} M_{\odot} \approx 2 * 10^{41} Kg$
- La escala de longitud del disco $b = 1Kpc = 3 * 10^{19}m$

El valor de k queda expresado en unidades de tiempo con $a_0 = GM$

$$k = \frac{GM}{b^3} = \frac{(6,67 * 10^{-11} Kg^{-1}m^3/s^2) (2 * 10^{41} Kg)}{(3 * 10^{19}m)^3} \quad (3.13)$$

$$k = 0.49 * 10^{-27} s^{-2} \quad (3.14)$$

Donde el tiempo en este tipo de sistemas está dado en Millones de años, entonces, si 1 Millón de años = 10^6 años = $3.2 * 10^{13}$ s

$$\begin{aligned} k &= 0.49 * 10^{-27} s^{-2} * (3,2 * 10^{13} s)^2 / (10^6 años)^2 \\ &= 0.5 * 10^{12} años^{-2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si el momento angular se define como $\ell = vR$, entonces

$$\frac{\ell}{b^2} \approx 3.33 * 10^{-15}/s, \quad (3.16)$$

donde $R \approx 1Kpc$ y $v \approx 100Km/s \approx 3.33 * 10^{-15} Kpc/s$ y transformando a unidades de tiempo de años, se obtiene

$$\frac{\ell}{b^2} \approx 10^{-1} años^{-1} \quad (3.17)$$

Por tanto los modelos desde $n = 0$ a $n = 3$ quedan normalizados con los parámetros de longitud b y tiempo k .

3.2. ÓRBITAS EN EL MODELO $n = 0$

A partir de las ecuaciones generales de energía (Ec. 2.10) y potencial efectivo (2.9) se determinaron las expresiones particulares para el primer término del modelo de Miyamoto y Nagai²,

$$\varepsilon = \frac{1}{2k} \left(\dot{\tilde{R}}^2 + \dot{\tilde{z}}^2 \right) - \frac{1}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{1/2}} + \frac{h}{2\tilde{R}^2}, \quad (3.18)$$

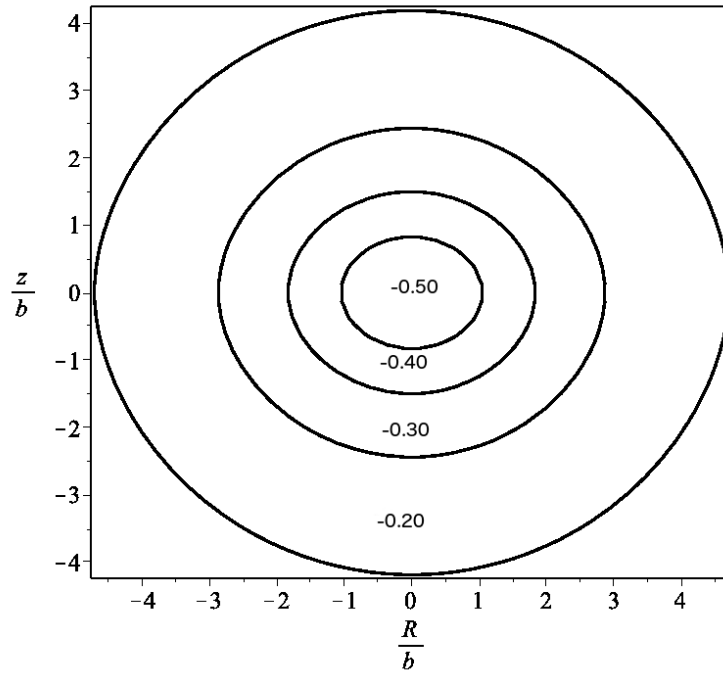
$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{1/2}} + \frac{h}{2\tilde{R}^2}. \quad (3.19)$$

Donde $\varepsilon = E/kb^2$, $\dot{\tilde{R}} = \dot{R}/b$, $\dot{\tilde{z}} = \dot{z}/b$, $\tilde{R} = R/b$, $\tilde{a} = a/b$, $\tilde{z} = z/b$, y $\tilde{\Phi} = \Phi/kb^2$. La ecuación de energía (Ec. 3.18) representa un sistema dinámico de dos grados de libertad, donde los parámetros de energía ε y momento angular h son constantes.

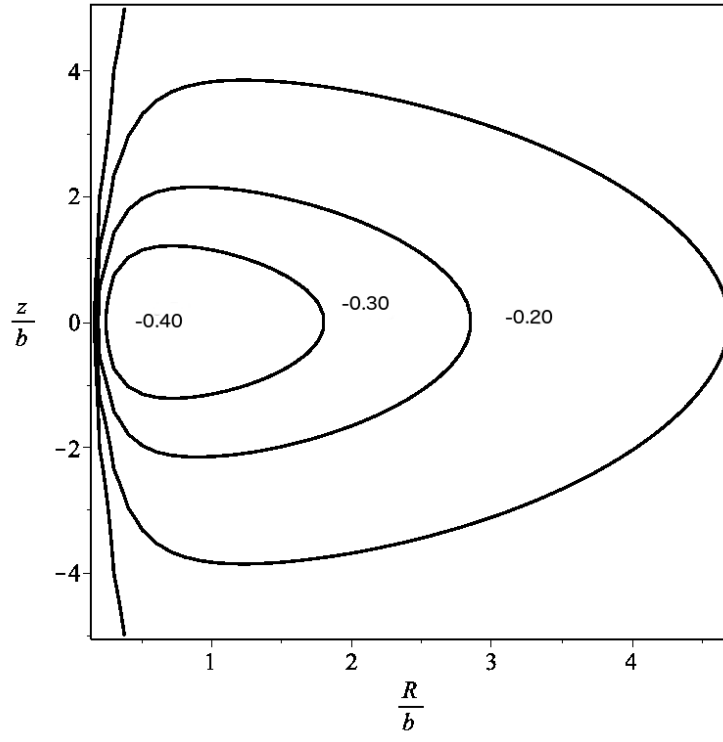
Las gráficas de la figura 3.1 muestran las líneas equipotenciales de $\tilde{\Phi}(\tilde{R}, \tilde{z})$ (Ec. 2.9) con los parámetros $\tilde{a} = 0.7$ y $k = 0.5$ para (a) $h = 0$ y (b) $h = 0.02$. Las líneas equipotenciales son también llamadas curvas de velocidad cero, estas curvas restringen las regiones de movimiento de la partícula. Por tanto, si la partícula de prueba está confinada dentro de una región donde el valor de la energía es mayor al valor del potencial efectivo³ este movimiento es permitido. Las figuras 3.1a y 3.1b muestra que las líneas equipotenciales de la energía son proporcionales al radio, es decir, a medida que \tilde{R} aumenta la energía aumenta cada vez más. Se puede observar una diferencia en el aspecto de cada uno de estas gráficas. Para el caso de $h = 0$ corresponde a elipses; mientras que para $h = 0.02$ solo están permitidos radios positivos donde la configuración de líneas equipotenciales toma una forma más aplanada a medida que la energía aumenta.

²Ver Apéndice A para los modelos de Miyamoto y Nagai.

³El mayor valor del potencial efectivo se alcanza cuando la velocidad es cero.



(a)



(b)

Figura 3.1: Líneas equipotenciales para $n = 0$.

A continuación se presenta la evolución temporal de las coordenadas (\tilde{R}, \tilde{z}) , para el conjunto de condiciones iniciales $\tilde{R} = 0.44$, $\tilde{z} = 0$, $\dot{\tilde{R}} = 0.03$, y $\dot{\tilde{z}} = \sqrt{2(\varepsilon - \tilde{\Phi}(\tilde{R}, 0)) - \dot{\tilde{R}}^2}$, y los parámetros $\varepsilon = -0.40$, $h = 0.02$, $\tilde{a} = 0.7$. Las figuras 3.2a y 3.2b muestran la solución de las ecuaciones de movimiento (B.1 y B.2), encontradas a partir de integración numérica⁴. De estas soluciones es posible deducir que presentan un comportamiento oscilatorio regular que se mantiene en el tiempo.

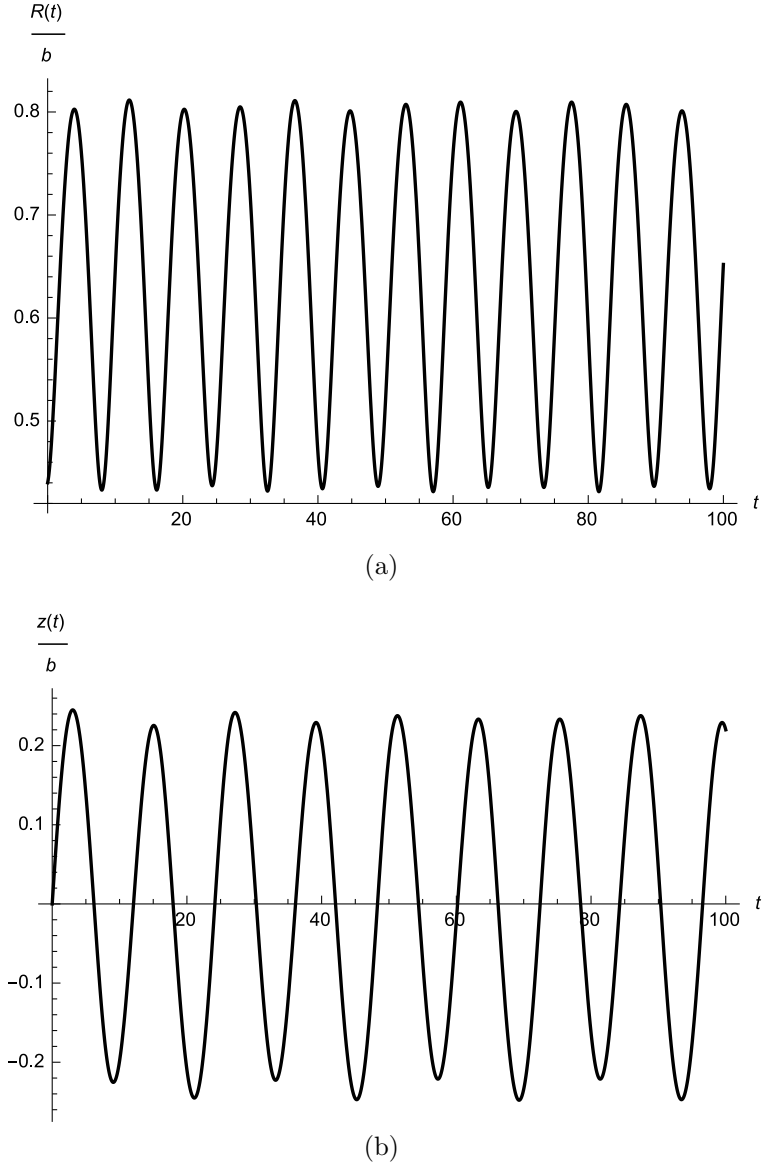


Figura 3.2: Solución del sistema para $n = 0$ y $h = 0.02$.

⁴Solucionado por Runge Kutta de cuarto orden en Mathematica.

La tabla 3.1 muestra el resultado de la integración del modelo de potencial $n = 0$ para diferentes valores de energía y momento angular. Las trayectorias de órbitas tridimensionales son representadas por la dependencia $\tilde{z}(\tilde{R})$. Las órbitas mostradas en la figura 3.1 presentan en general trayectorias cerradas, por tanto se consideran como órbitas regulares. Las figuras 3.1a y 3.1b se clasifican como órbitas de caja porque llenan trayectorias rectangulares, donde para $h = 0$ cubren un rango de $-\tilde{R}$ a \tilde{R} . Mientras, las figuras 3.1c y 3.1f, presentan un comportamiento caótico donde las trayectorias muestran una configuración totalmente irregular. Para el caso de $h = 0.02$, las figuras 3.1c y 3.1d son órbitas de caja que cubren valores de radios positivos.

Figura	Órbita	\tilde{R}	$\dot{\tilde{R}}$	$\dot{\tilde{z}}$	ε	h
3.3a	Caja	0.56	0.20	0.13	-0.50	0
3.3b	Caja	0.56	0.20	0.34	-0.40	0
3.3c	Irregular	0.56	0.20	0.56	-0.20	0
3.3d	Caja	0.44	0.03	0.34	-0.40	0.02
3.3e	Caja	0.44	0.03	0.46	-0.30	0.02
3.3f	Irregular	0.44	0.03	0.64	-0.10	0.02

Cuadro 3.1: Condiciones iniciales para órbitas de la figura 3.3

Analizando el comportamiento de las trayectorias para este primer término del potencial estudiado, se puede concluir que cuando se hace un cambio en algunas de las condiciones iniciales, como la energía y el momento angular, las trayectorias cambian su morfología, pero no cambia el tipo de órbitas a la que pertenece; por ejemplo, para el caso de las figuras 3.1d y 3.1e, son órbitas de caja donde para esta última trayectoria se deforma la caja tal y como se aprecia en la figura.

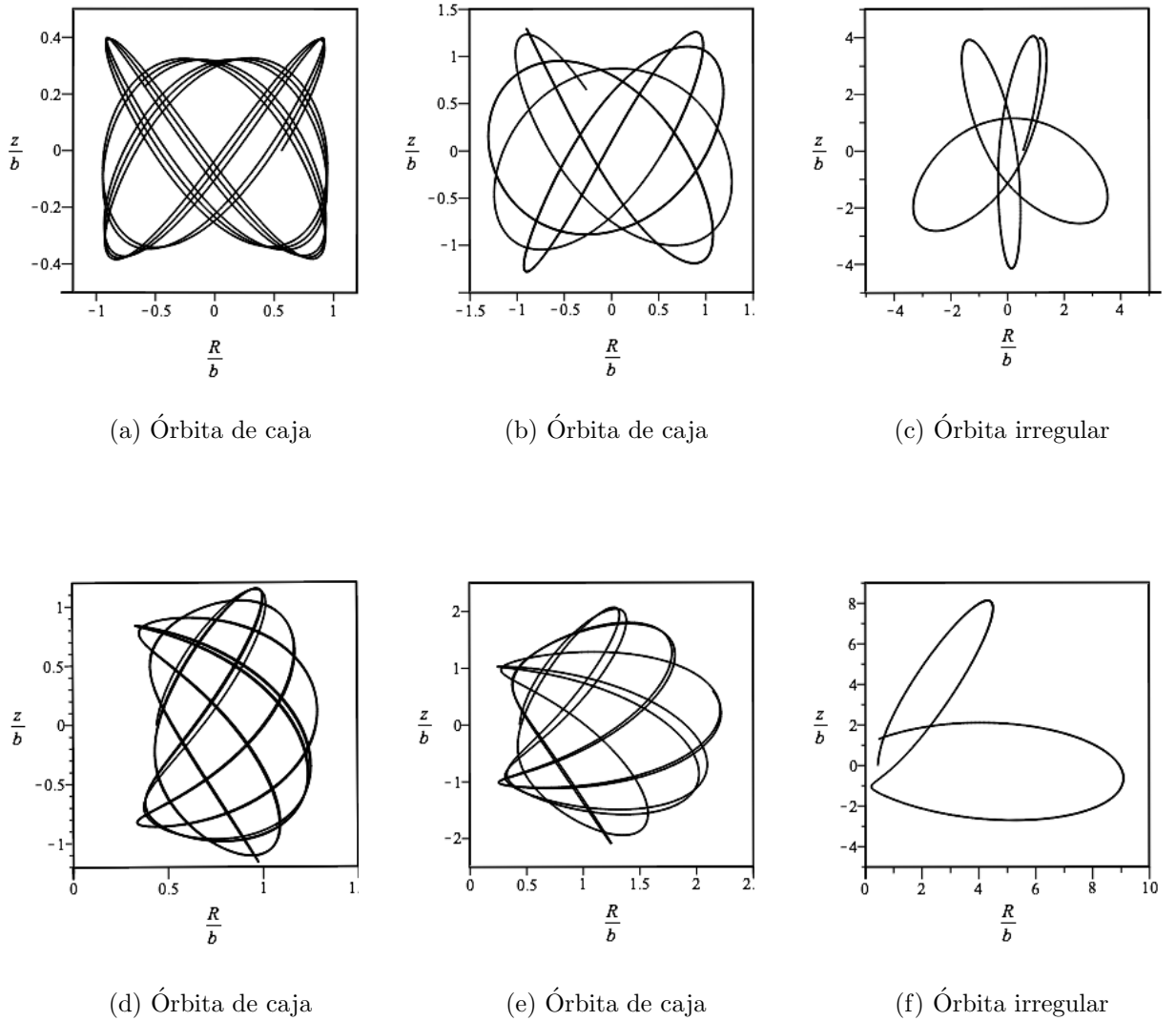
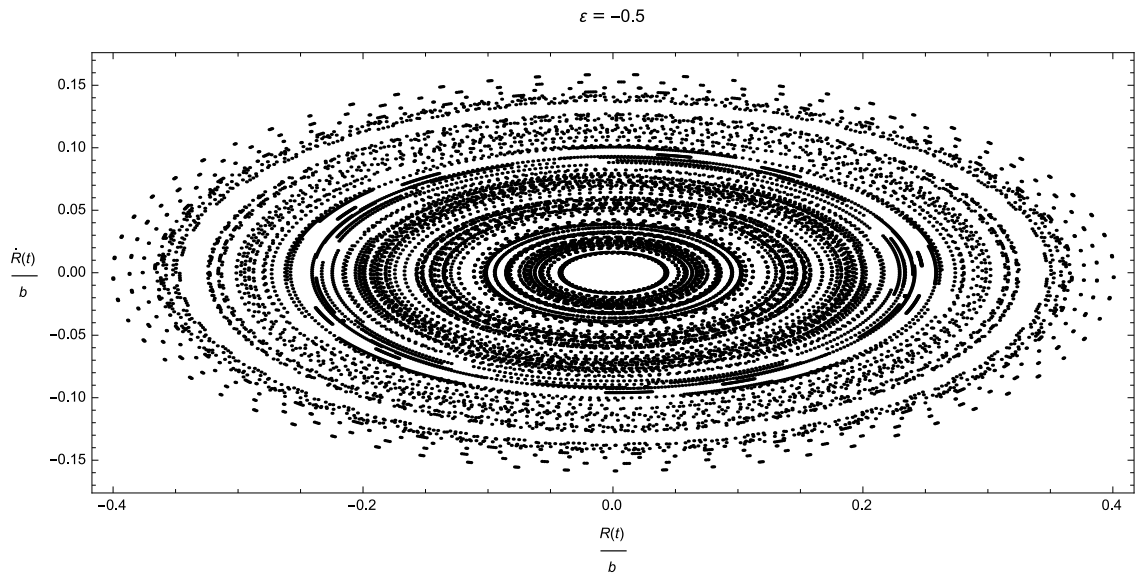
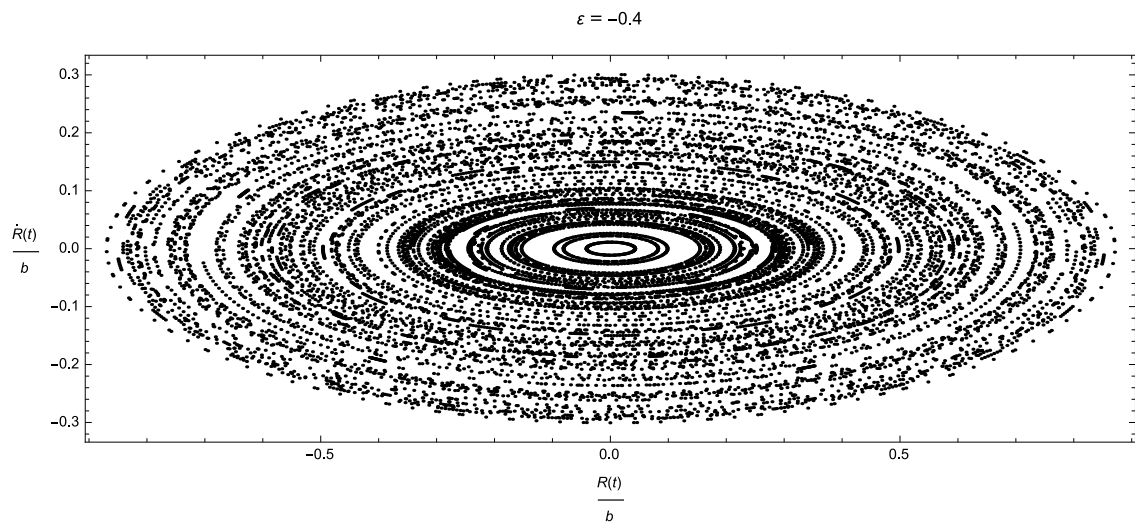


Figura 3.3: Trayectorias de órbitas para el modelo $n = 0$

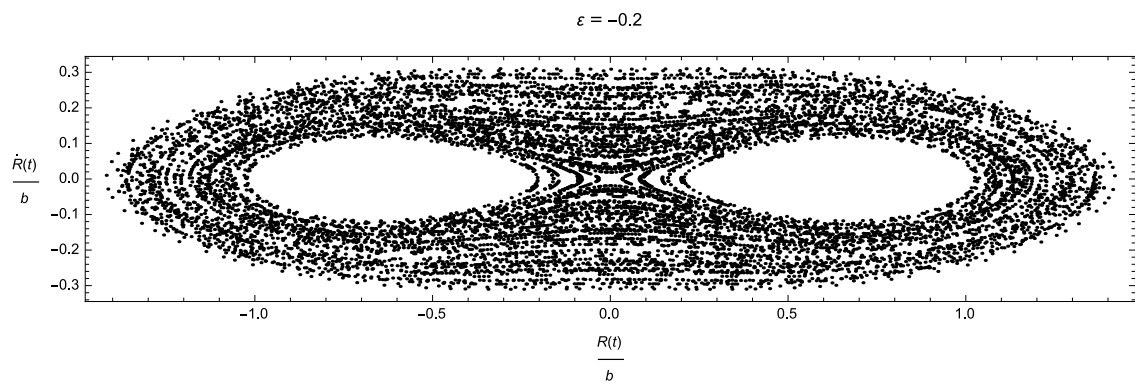
A continuación se presenta el comportamiento de las superficies de sección en el espacio de fase (\tilde{R}, \tilde{R}) para las condiciones dadas en la figura 3.3a de la tabla 3.1. Se puede observar que las órbitas de las figuras 3.4a y 3.4b tienen islas de regularidad concéntricas, presentando un mayor dominio de regiones de regularidad. Mientras que la figura 3.4c presenta en general una configuración irregular donde están presentes dos islas de regularidad que ocupan gran parte de las PSS para el potencial 3.19. Es importante resaltar el hecho que según las figuras anteriores se observan radios negativos debido a las condición de $h = 0$, por tanto, se tiene que $\varphi = 0$, y en realidad el movimiento de la órbita se restringe al plano cartesiano bajo las coordenadas (\tilde{R}, \tilde{z}) .



(a)



(b)



(c)

Figura 3.4: PSS para el modelo $n = 0$ con $h = 0$.

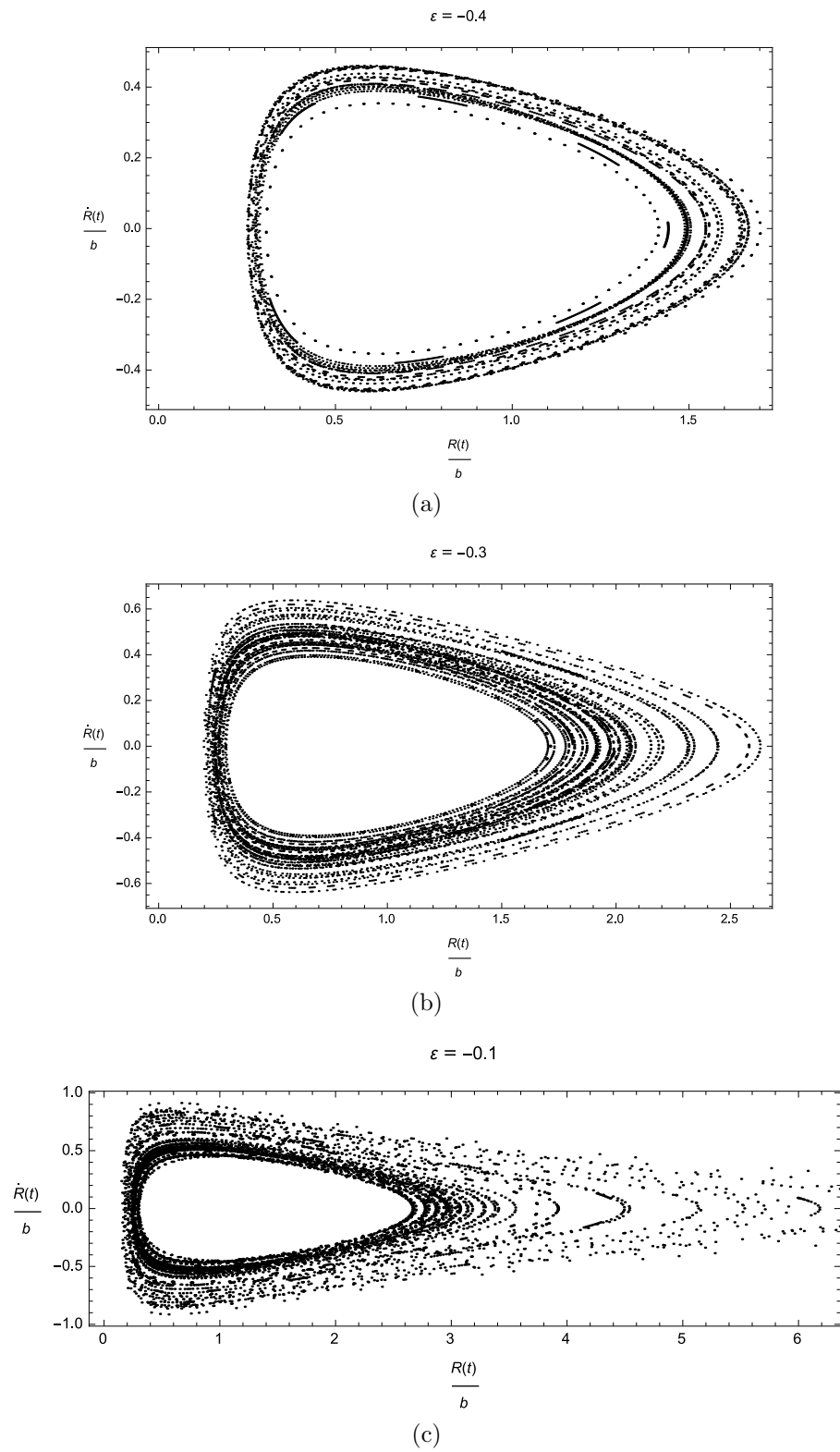


Figura 3.5: PSS para el modelo $n = 0$ con $h = 0.02$.

El análisis anterior se realizó también para el caso de $h = 0.02$ con las condiciones de la figura 3.3d para energías $-0.40 < \varepsilon < -0.10$. La figura 3.5a y 3.5b muestran un comportamiento mayormente regular de órbitas, mientras para la figura 3.5c las regiones de regularidad se presentan en menor cantidad y el movimiento es mayormente caótico mostrando puntos aislados en el espacio de fase y por tanto no forman líneas continuas. Las PSS de las figuras 3.4 y 3.5 muestran la transición de la regularidad al caos; es decir, a medida que aumentamos el nivel de energía, se obtiene un mayor dominio de irregularidad en regiones que antes presentaban regularidad.

3.3. ÓRBITAS EN EL MODELO $n = 1$

En esta sección se determinan las ecuaciones de energía 3.20 y potencial efectivo 3.21 para el segundo término del modelo de Miyamoto y Nagai, las cuales se expresan como

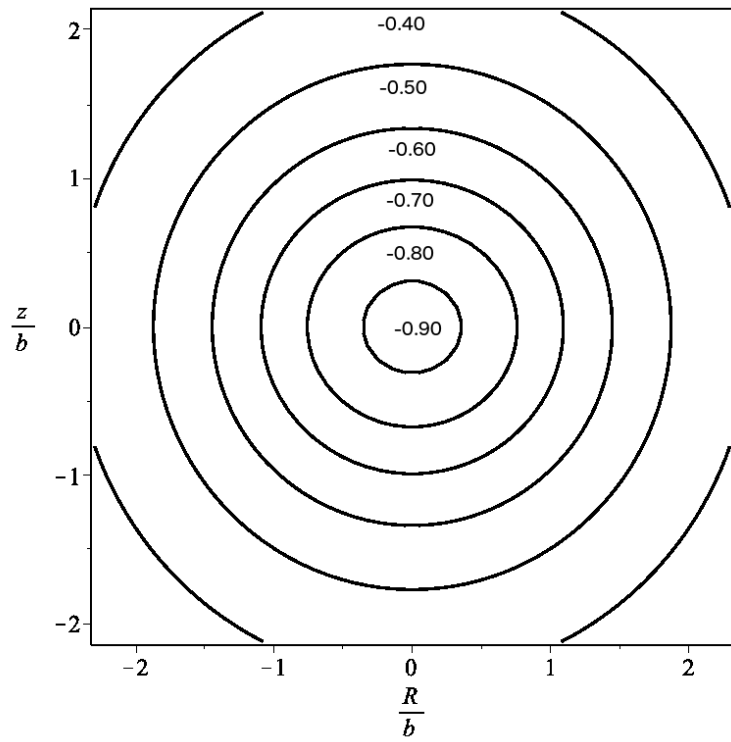
$$\varepsilon = \frac{1}{2k} \left(\dot{\tilde{R}}^2 + \dot{\tilde{z}}^2 \right) - \frac{1}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{1/2}} - \frac{\tilde{a}_1(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{3/2}} + \frac{h}{2\tilde{R}^2}, \quad (3.20)$$

$$\tilde{\Phi} = -\frac{1}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{1/2}} - \frac{\tilde{a}_1(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{3/2}} + \frac{h}{2\tilde{R}^2}, \quad (3.21)$$

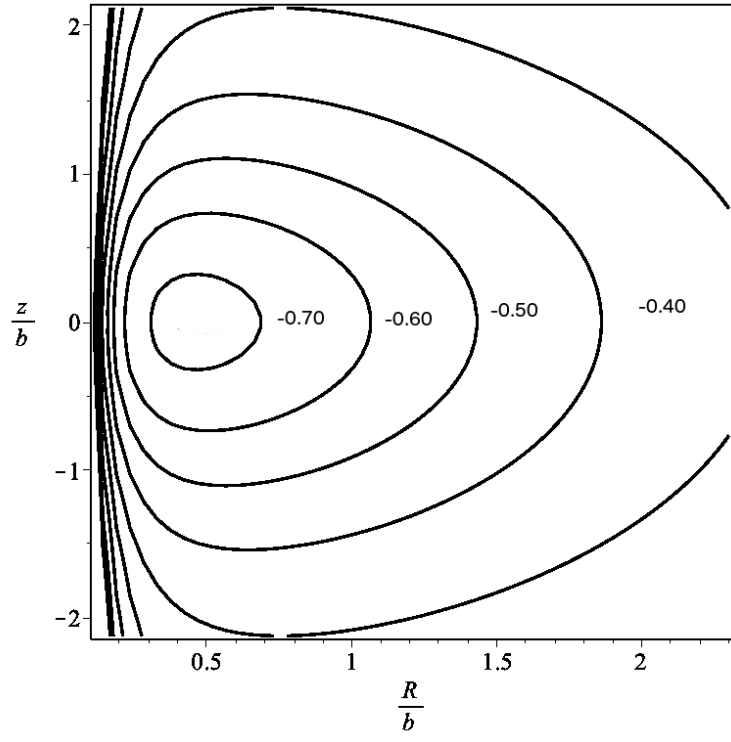
donde $\tilde{a}_1 = a_1/kb^4$ y los valores de \tilde{a} y k son los mismos de la sección anterior. Los parámetros y constantes también fueron reescalados en términos de b . Para el valor de $\tilde{a}_1 = 1$, la ecuación anterior se reduce al modelo de Miyamoto y Nagai (Ec. A.2).

En las figuras 3.6a y 3.6b se muestran las gráficas de las líneas equipotenciales de la energía con los parámetros (a) $h = 0$, y (b) $h = 0.02$. De las gráficas anteriores se deduce que las figuras siguen presentando una dependencia directa con el radio, además comparándolas con las figuras de líneas equipotenciales de la sección 3.2, es posible inferir que su configuración no presenta un cambio significativo, aunque el potencial efectivo⁵ 2.9 presente una constante adicional.

⁵Ver apéndice A para el término del potencial $n = 1$.



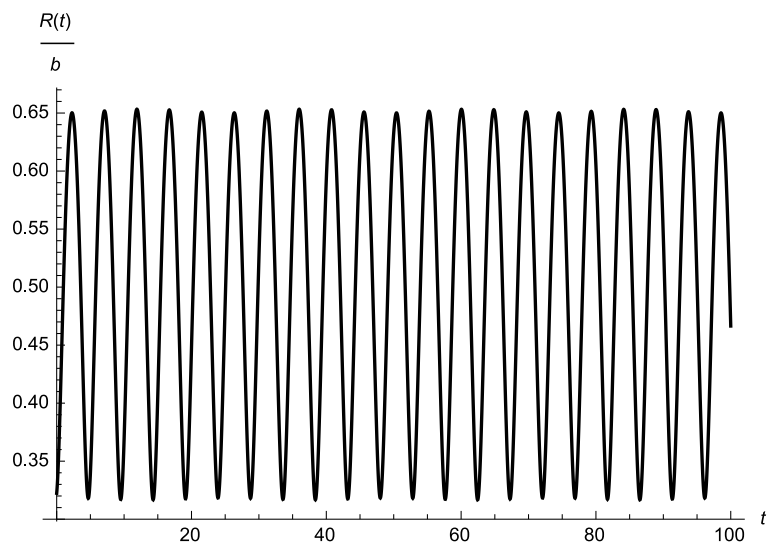
(a)



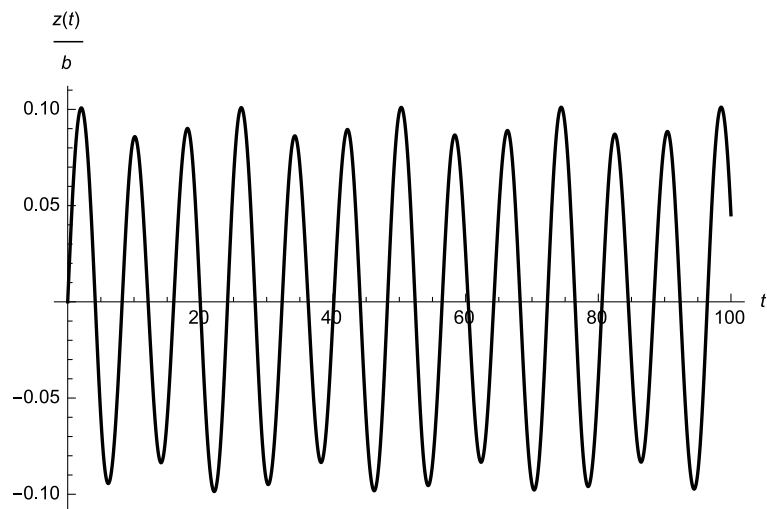
(b)

Figura 3.6: Lineas equipotenciales para $n = 1$.

La figuras 3.7a y 3.7b representan la solución de las ecuaciones de movimiento (B.3 y B.4), encontradas a partir de integración numérica, y muestran la evolución de la coordenadas \tilde{R} y \tilde{z} . Estas gráficas muestran que se presenta un comportamiento oscilatorio regular para el conjunto de condiciones iniciales: $\tilde{R} = 0.32$, $\tilde{z} = 0$, $\dot{\tilde{R}} = 0.06$ y para los parámetros, $\varepsilon = -0.70$ y $h = 0.02$. La Figura 3.7a demuestra que la solución para $R(t)$ solo es posible para valores positivos del radio que oscilan alrededor de 0.35 y 0.65. El mismo análisis se hizo para para $z(t)$ donde si es posible que la solución oscile entre valores positivos y negativos porque representa al eje de simetría y no tiene ninguna restricción.



(a)



(b)

Figura 3.7: Solución del sistema para $n = 1$.

A continuación en la tabla 3.7 se muestran los tipos de órbitas y el conjunto de condiciones iniciales que describen las trayectorias para el modelo $n = 1$ del potencial de Miyamoto y Nagai. Las trayectorias de las figuras 3.8b y 3.8c se clasifican como órbitas de tubo porque circulan alrededor de un anillo central oscilando entre un radio máximo y mínimo, pero la figura 3.8c se considera que presenta un movimiento cuasiperiódico. Se considera que un movimiento es cuasiperiódico cuando el tipo de evolución temporal que presenta el sistema sin ser periódico se repite una y otra vez para condiciones arbitrariamente cercanas a una posición previa del sistema. Un fenómeno cuasiperiódico oscila una y otra vez mostrando cada cierto tiempo un aspecto similar al que tuvo el sistema previamente.

Figura	Órbita	\tilde{R}	$\dot{\tilde{R}}$	$\dot{\tilde{z}}$	ε	h
3.8a	Caja	0.30	0.04	0.08	-0.90	0
3.8b	Tubo	0.30	0.04	0.45	-0.70	0
3.8c	Tubo	0.30	0.04	0.64	-0.50	0
3.8d	Caja	0.32	0.06	0.32	-0.70	0.02
3.8e	Caja	0.32	0.06	0.45	-0.60	0.02
3.8f	Caja	0.32	0.06	0.63	-0.40	0.02

Cuadro 3.2: Condiciones iniciales para órbitas de la figura 3.8.

En las figuras 3.8d a 3.8f las trayectorias para el caso del momento angular $h = 0.02$ son regulares y se clasifican como órbitas de caja, pero a diferencia de la figura 3.8a, éstas presentan trayectorias cerradas de cajas deformadas. Este tipo de trayectorias es usual encontrarlas para potenciales que tienen configuración de materia esférica.

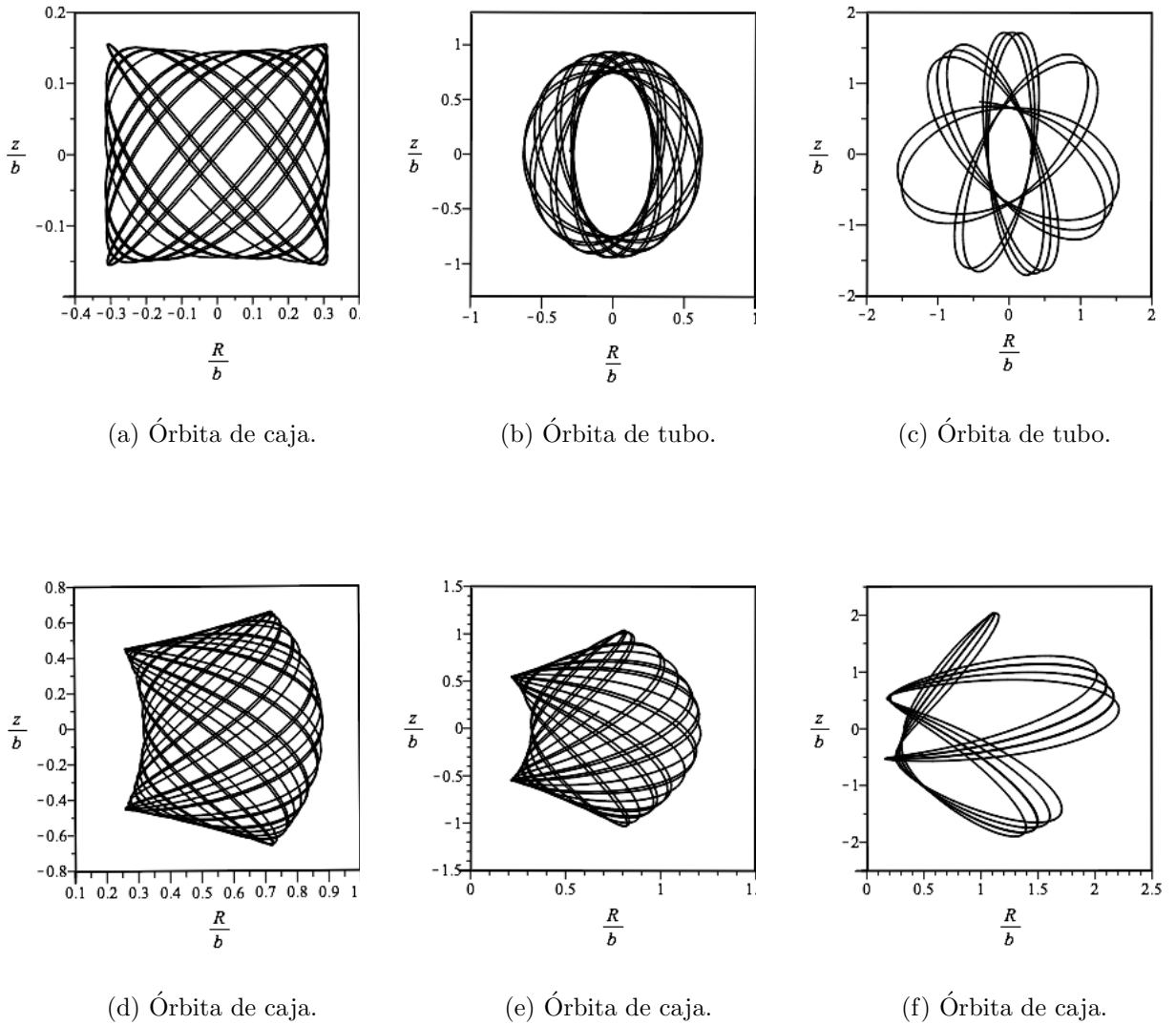


Figura 3.8: Trayectorias de órbitas para el modelo $n = 1$ con $h = 0$.

Seguidamente se determinan las PSS para el conjunto de condiciones iniciales y parámetros de la figura 3.9a. Se observa que cuando el valor de la energía aumenta se forman islas de regularidad (figura 3.9a) deformando la topología de órbitas regulares para un menor valor de energía, tal y como se aprecia en las figuras 3.9b y 3.9c. Las gráficas de la figura 3.10, las PSS con las condiciones y parámetros de la figura 3.9d, en general tienen un comportamiento regular de órbitas concéntricas, como se puede apreciar en las Figuras 3.10a y 3.10b, pero la figura 3.10c presenta un mayor dominio de irregularidad mostrando puntos aislados en el espacio de fase (\tilde{R}, \tilde{R}) . Finalmente, analizando el cambio en la topología de las PSS para las diferentes condiciones iniciales, se demostró que en el modelo predominan regiones de regularidad.

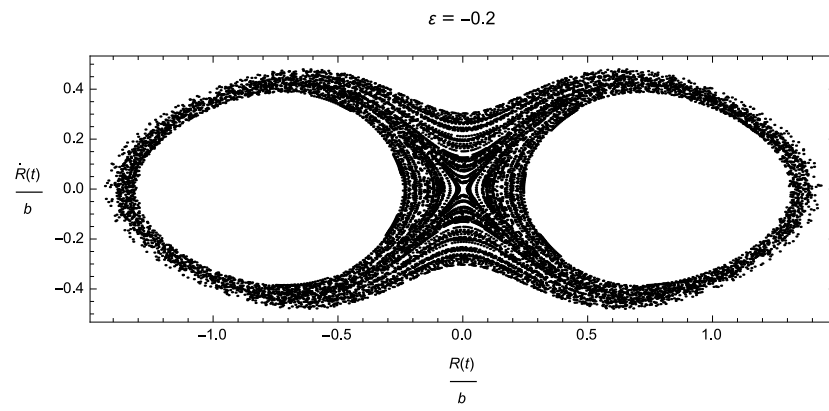
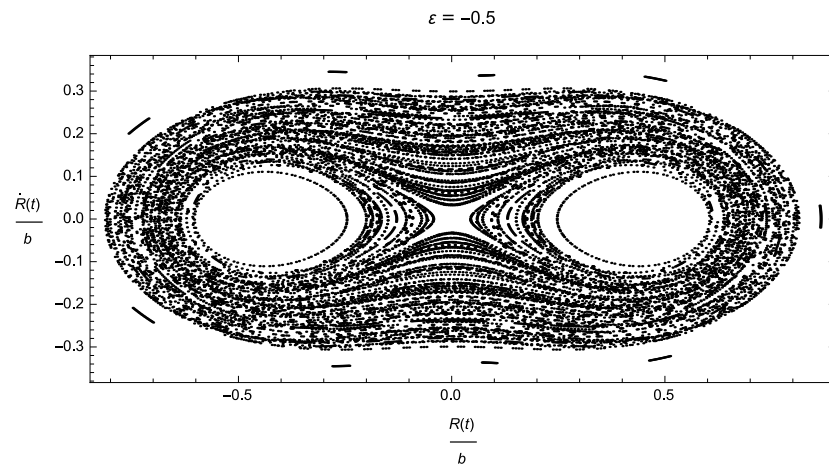
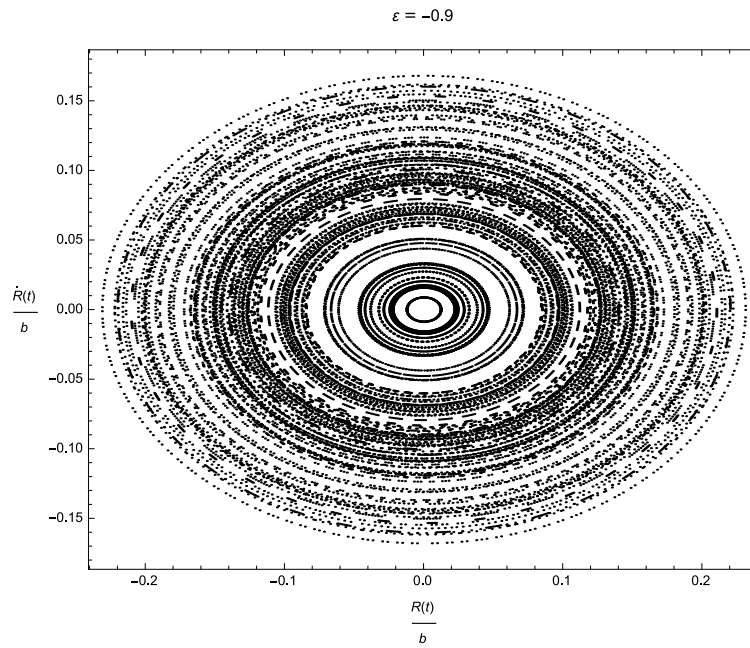


Figura 3.9: PSS con $h = 0$ para $n = 1$.

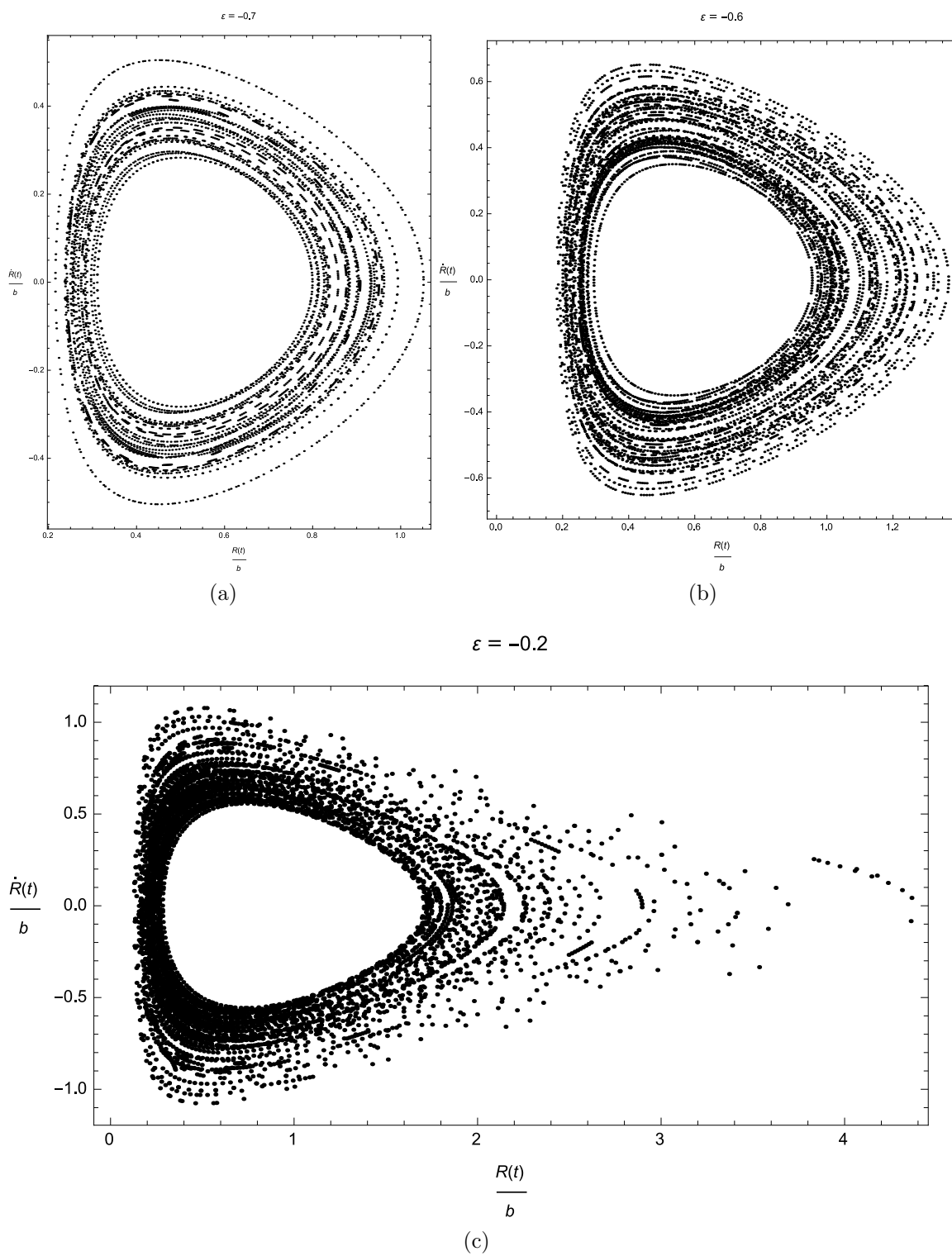


Figura 3.10: PSS con $h = 0.02$ para $n = 1$.

3.4. ÓRBITAS EN EL MODELO $n = 2$

En esta sección se determinan las ecuaciones de energía 3.22 y potencial efectivo 3.23 para el tercer término del modelo de Miyamoto y Nagai A.3, las cuales se expresan como

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2k} \left(\dot{\tilde{R}}^2 + \dot{\tilde{z}}^2 \right) - \frac{1}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{1/2}} - \frac{\tilde{a}_1(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{3/2}} \\ & - \frac{\tilde{a}_2 \left(2(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 - \tilde{R}^2 \right)}{2 \left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{5/2}} + \frac{h}{2\tilde{R}^2}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} = & -\frac{1}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{1/2}} - \frac{\tilde{a}_1(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{3/2}} \\ & - \frac{\tilde{a}_2 \left(2(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 - \tilde{R}^2 \right)}{2 \left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{5/2}} + \frac{h}{2\tilde{R}^2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En donde $\tilde{a}_2 = a_2/kb^5$, los valores de \tilde{a} , k , y \tilde{a}_1 son los mismos de la sección anterior. Los parámetros y constantes también fueron reescalados en términos de b .

Las gráficas de las líneas equipotenciales para diferentes valores de energía se muestran en las figuras 3.11a y 3.11b para los parámetros (a) $\tilde{a}_2 = 1$ y $h = 0$, y (b) $\tilde{a}_2 = 1$ y $h = 0.02$. Estas gráficas muestran un comportamiento similar a las obtenidas para los modelos anteriormente estudiados, demostrando que cuando se hace una superposición de términos la naturaleza de la familia del potencial no se ve afectada.

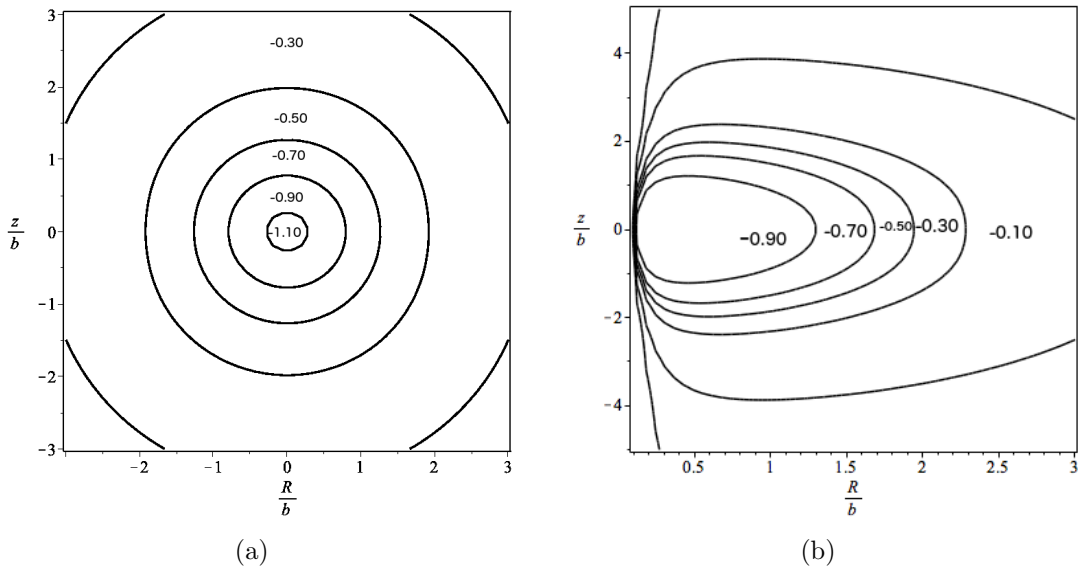
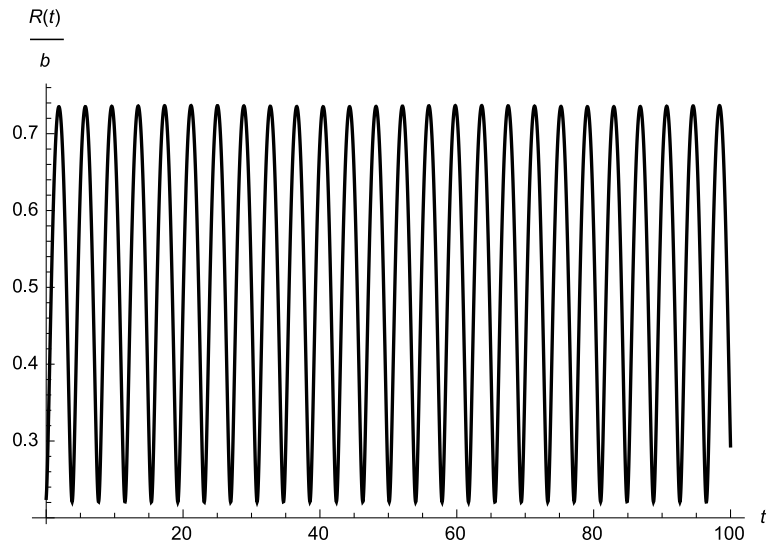
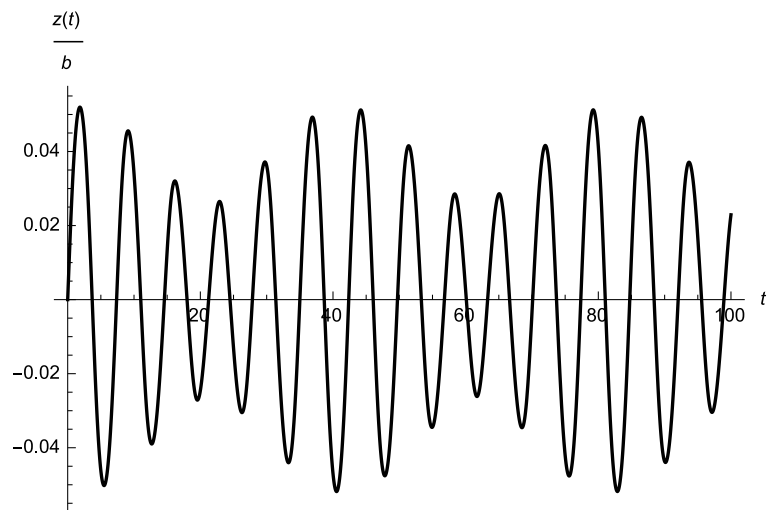


Figura 3.11: Líneas equipotenciales para el modelo $n = 2$

La figura 3.12 muestra la solución de las ecuaciones de movimiento (B.5 y B.6), para el conjunto de condiciones iniciales: $\tilde{R} = 0.22$, $\tilde{z} = 0$, $\dot{\tilde{R}} = 0.12$ y para los parámetros: $\varepsilon = -0.90$ y $h = 0.02$. La Figura 3.11a presenta una evolución regular, mientras que para la figura figura 15b se observa que las oscilaciones son regulares para intervalos de tiempo cortos. Demostrando que para este modelo de potencial la evolución de la coordenada z se ve afectada por la superposición de términos.



(a)



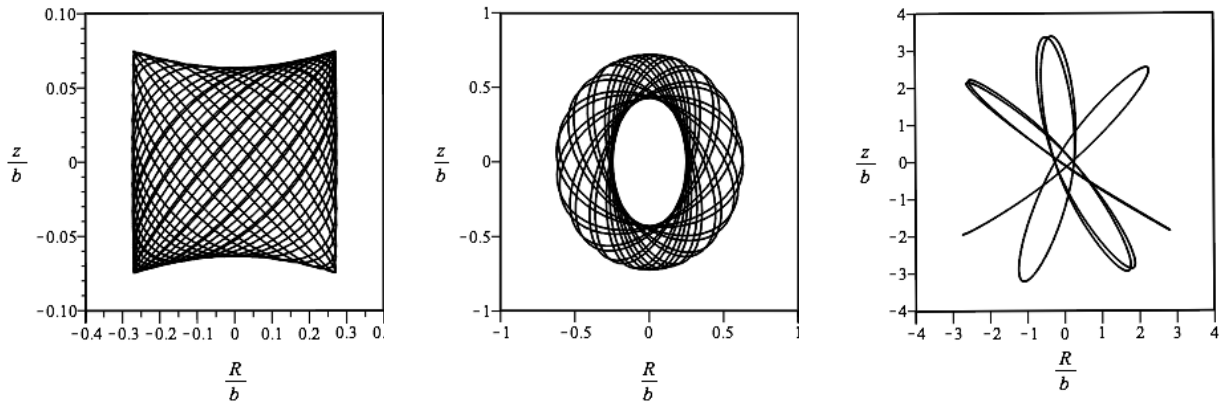
(b)

Figura 3.12: Solución del sistema para $n = 2$.

A continuación en la tabla 3.3 se muestran los tipos de órbitas y el conjunto de condiciones iniciales que describen las trayectorias para el modelo $n = 2$ del potencial Miyamoto y Nagai. La figura 3.13a muestra una órbita regular, donde las partículas circulan en trayectorias cerradas formando una caja deformada. El mismo comportamiento lo tienen las figuras 3.13d y 3.13e, pero estas solo cubren regiones positivas de la coordenada R . La figura 3.13b presenta un comportamiento de órbita de tubo, que actúa como un bucle que evita el centro de la galaxia, pero de vez en cuando invierte el sentido en que se da la vuelta al centro. En la figura 3.13 se observa una transición de trayectorias regulares a irregulares a medida que se aumenta el nivel de energía para un determinado conjunto de condiciones, tal y como se puede observar en las figuras 3.13c y 3.13f. Se concluye del análisis de las trayectorias anteriores, que para el modelo $n = 2$ del potencial estudiado, el sistema es sensible al cambio en las condiciones iniciales formando órbitas de diferentes clases que terminan en órbitas caóticas.

Figura	Órbita	\tilde{R}	$\dot{\tilde{R}}$	\tilde{z}	ε	h
3.3a	Caja	0.25	0.06	0.04	-1.10	0
3.3b	Tubo	0.25	0.06	0.44	-0.90	0
3.3c	Irregular	0.25	0.06	0.89	-0.30	0
3.3d	Caja	0.22	0.12	0.04	-0.90	0.02
3.3e	Caja	0.22	0.12	0.44	-0.70	0.02
3.3f	Irregular	0.22	0.12	0.77	-0.30	0.02

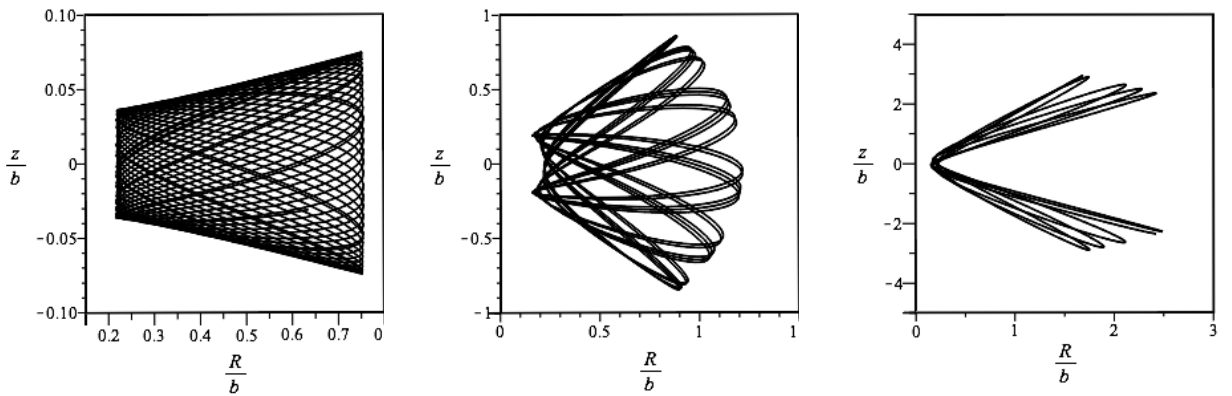
Cuadro 3.3: Condiciones iniciales para órbitas de la figura 3.13.



(a) Órbita de caja

(b) Órbita de tubo.

(c) Órbita irregular.



(d) Órbita de caja.

(e) Órbita de caja.

(f) Órbita irregular.

Figura 3.13: Trayectorias de órbitas para $n = 2$.

Con el fin de comparar los resultados de la dinámica obtenidos por las trayectorias se analizan las PSS para las condiciones y parámetros de la figura 3.13a y 3.13d. La configuración del espacio de fase (\tilde{R}, \tilde{R}) en el plano $z = 0$ para la figura 3.14 muestra la evolución del sistema. Al inicio se obtienen regiones regulares concéntricas (figura 3.14a), después se forman dos regiones de regularidad rodeadas por una mar de regiones de regularidad. Finalmente, en las regiones que antes presentaban regularidad ahora se observa un mayor dominio de regiones caóticas con presencia de islas de regularidad bien marcadas (figura 3.14c). Para el segundo conjunto de condiciones y parámetros dados por la figura 3.13d, se obtiene un comportamiento mucho más regular, donde las figuras 3.15a y 3.15b, presentan un mayor dominio de regiones regulares. La figura 3.15c muestra un comportamiento totalmente caótico, formando islas de regularidad entre las regiones $0.10 < \tilde{R} < 0.25$, formando órbitas de banano (figura 3.15d).

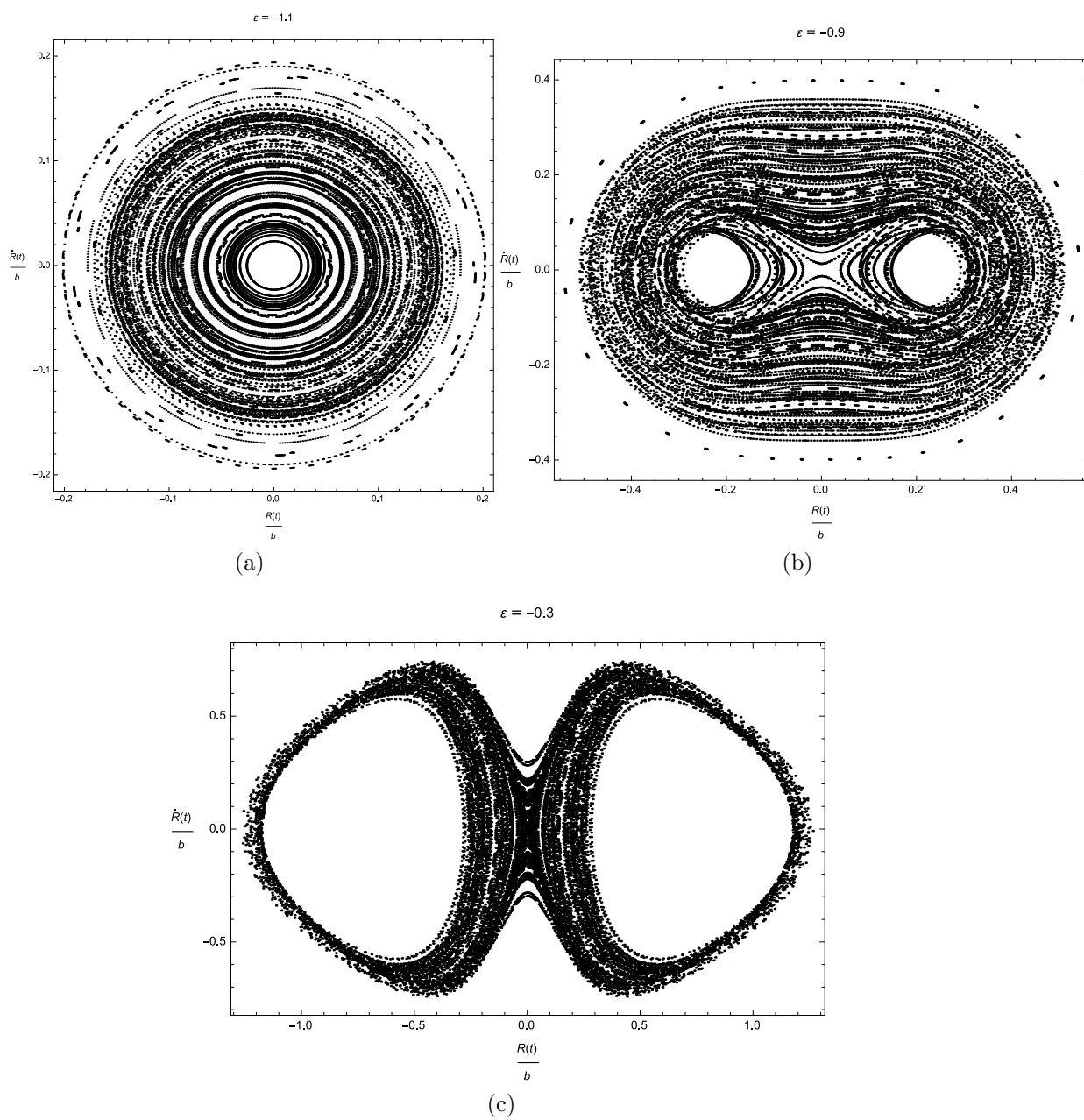


Figura 3.14: PSS de órbitas con $h = 0$ para $n = 2$.

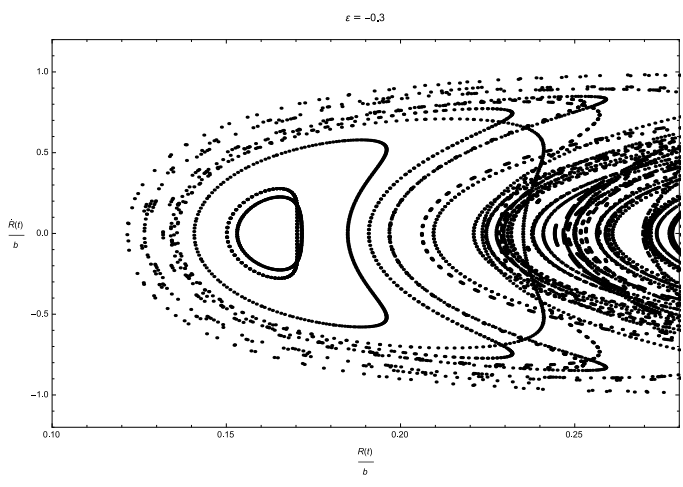
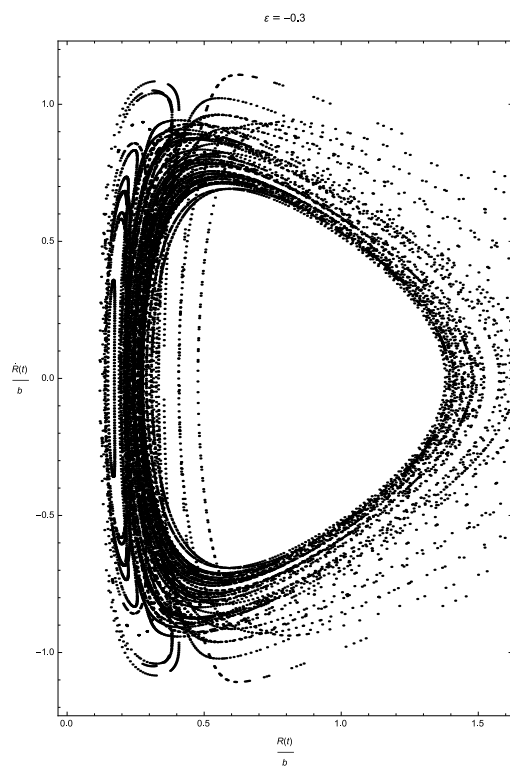
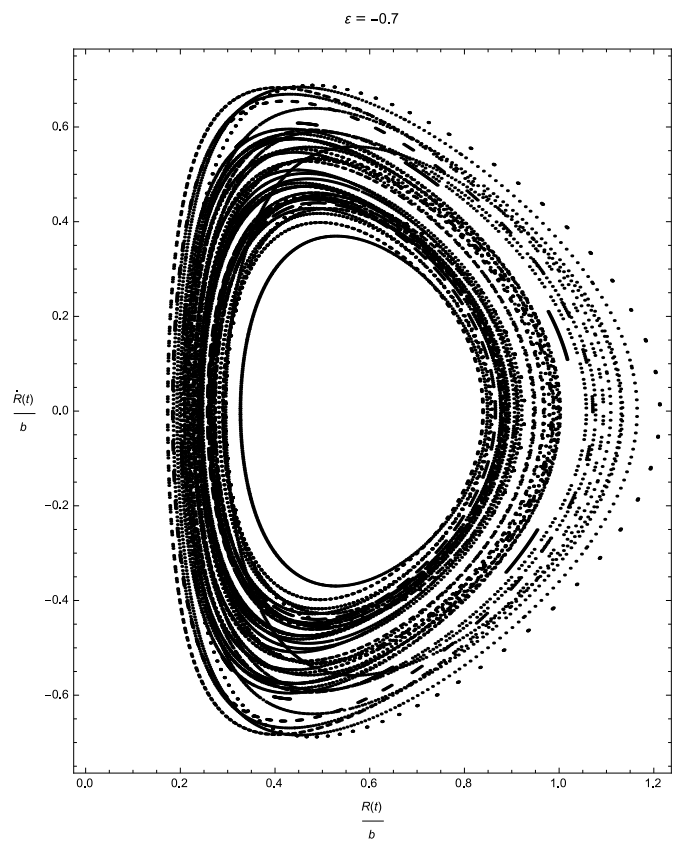
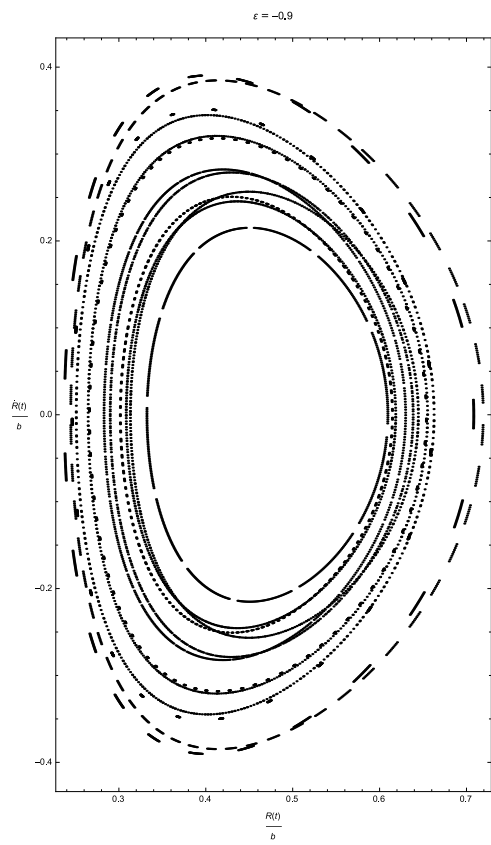


Figura 3.15: PSS de órbitas con $h = 0.02$ para $n = 2$.

3.5. ÓRBITAS EN EL MODELO $n = 3$

En esta sección se determinan las ecuaciones de energía 3.24 y potencial efectivo 3.25 para el tercer término del modelo de Miyamoto y Nagai A.4, las cuales se expresan como

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{1}{2k} \left(\dot{\tilde{R}}^2 + \dot{\tilde{z}}^2 \right) - \frac{1}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{1/2}} - \frac{\tilde{a}_1(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{3/2}} \\ & - \frac{\tilde{a}_2 \left(2(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 - \tilde{R}^2 \right)}{2 \left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{5/2}} - \frac{\tilde{a}_3 (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1}) \left(2(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 - 3\tilde{R}^2 \right)}{2 \left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{7/2}} \\ & + \frac{h}{2\tilde{R}^2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} = & - \frac{1}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{1/2}} - \frac{\tilde{a}_1(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{3/2}} \\ & - \frac{\tilde{a}_2 \left(2(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 - \tilde{R}^2 \right)}{2 \left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{5/2}} - \frac{\tilde{a}_3 (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1}) \left(2(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 - 3\tilde{R}^2 \right)}{2 \left[\tilde{R}^2 + (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \right]^{7/2}} \\ & + \frac{h}{2\tilde{R}^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Donde $\tilde{a}_3 = a_3/kb^6$, con el parámetro $\tilde{a}_3 = 1$ y con \tilde{a} , k , \tilde{a}_1 definidos igual que en secciones anteriores. Las gráficas de la figura 3.16 representan la líneas equipotenciales para el tercer término del modelo de Miyamoto y Nagai (A.4). En la figura 3.16a se obtienen elipses y comparando esta configuración con la presentada en modelos anteriores, se demuestra que cuando se estudian un mayor número de modelos la naturaleza del potencial cambia.

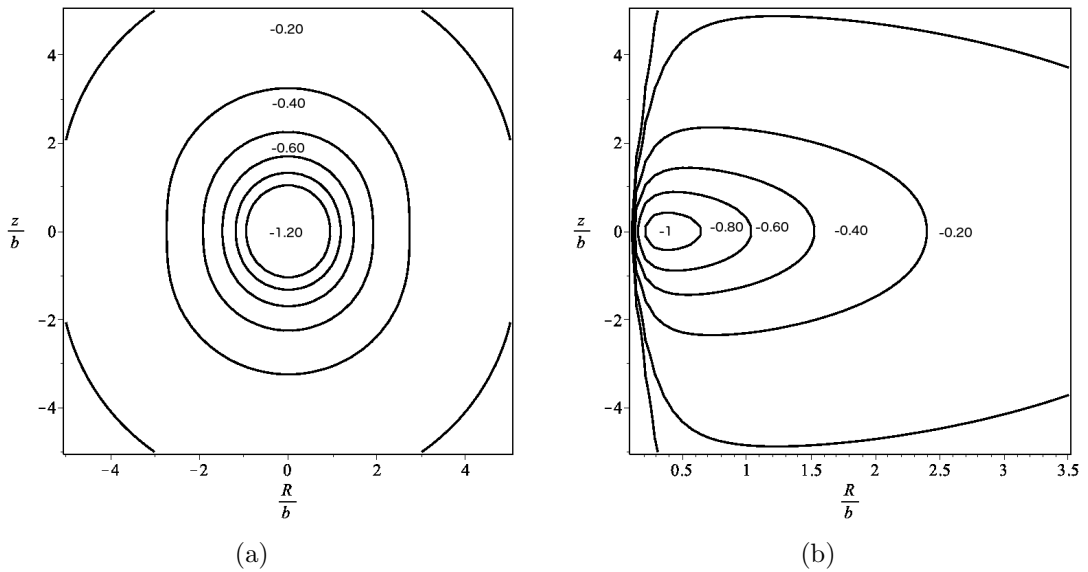
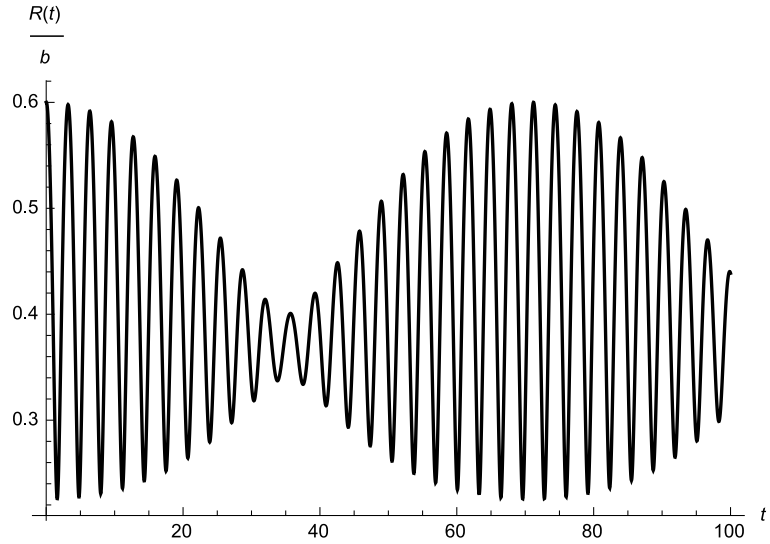
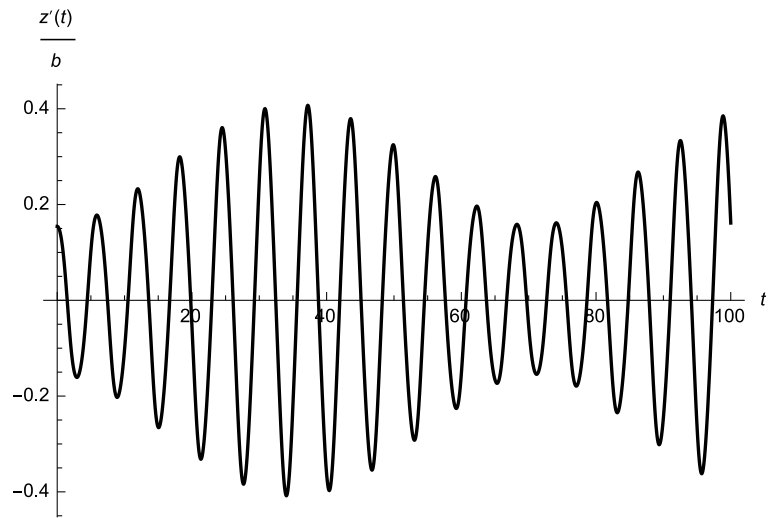


Figura 3.16: Líneas equipotenciales para el modelo $n = 2$

En la figura 3.16 se presentan las soluciones de las ecuaciones de movimiento (B.7 y B.8), para el conjunto de condiciones iniciales: $\tilde{R} = 0.60$, $\tilde{z} = 0$, $\dot{\tilde{R}} = 0.01$ y los parámetros: $\varepsilon = -1$ y $h = 0.02$. Las figuras (3.16a y 3.16b) muestran que estas soluciones presentan oscilaciones modulas, este comportamiento se presenta por la superposición de modelos del potencial que conforman el modelo $n = 3$.



(a)



(b)

Figura 3.17: Solución al sistema para $n = 3$.

En la tabla 3.4 se muestran los tipos de órbitas y el conjunto de condiciones iniciales que describen las trayectorias para el modelo $n = 3$ del potencial Miyamoto y Nagai. La trayectoria de la figura 3.18a se describe como órbita de bucle o tubo y presenta un cambio de dirección en su trayectoria, provocando que no se forme un toroide uniforme, como una especie de dona, por el contrario forma un bucle distorsionado. En este caso no es posible afirmar si se presenta trayectoria regular o no, debido a la complejidad de la figura. Por tanto, con las PSS se determinará mejor esta situación. Las figura 3.18b se comporta como una órbita de tubo que presenta, cerca del plano $z = 0$, una superposición de trayectorias. Mientras que las figuras 3.18c y 3.18d muestran trayectorias casi regulares denominadas como órbitas tipo banano. Por último, las figuras 3.18e y 3.18f describen trayectorias irregulares que no pueden ser clasificadas como ninguna de las órbitas conocidas para los modelos estudiados en este trabajo.

Figura	Órbita	\tilde{R}	$\dot{\tilde{R}}$	$\dot{\tilde{z}}$	ε	h
3.18a	Tubo	0.26	0.03	0.098	-1.20	0
3.18b	Tubo	0.26	0.03	0.46	-1	0
3.18c	Irregular	0.26	0.03	0.89	-0.40	0
3.18d	Banano	0.60	0.01	0.15	-1	0.02
3.18e	Banano	0.60	0.01	0.47	-0.80	0.02
3.18f	Irregular	0.60	0.01	0.79	-0.40	0.02

Cuadro 3.4: Condiciones iniciales para órbitas de la figura 3.18.

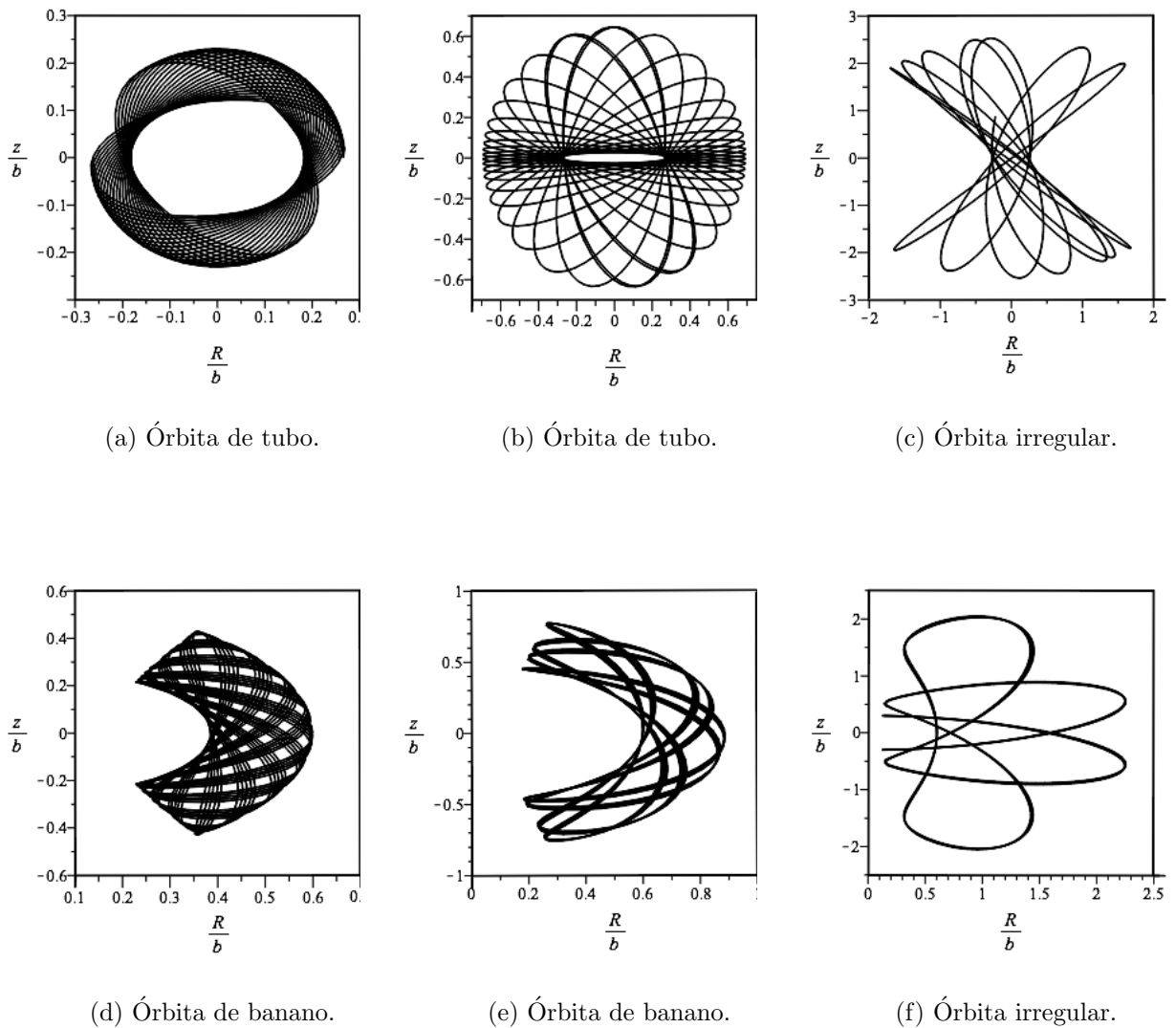


Figura 3.18: Trayectorias de órbitas para $n = 3$.

Finalmente, para el parámetro $h = 0$ y las condiciones de la figura 3.18a se encuentra que en las PSS mostradas por las figuras 3.19a y 3.19c, predominan las regiones de regularidad; sin embargo, se observa que alrededor de estas regiones de regularidad se forman dos protuberancias, o mejor llamadas islas de regularidad, causando que no se formen contornos simétricos, tal y como se encontro para la figura 3.19c. En el caso del parámetro $h = 0.02$, se observa en las figuras 3.20a y figura 3.20b la transición de la regularidad al caos que contribuye a la formación de islas de regularidad. La figura 3.20c presenta las islas de regularidad formadas entre las regiones $0.15 < \tilde{R} < 0.40$ para las PSS con energía $\varepsilon = 0.80$. Esta figura permite apreciar órbitas regulares concéntricas.

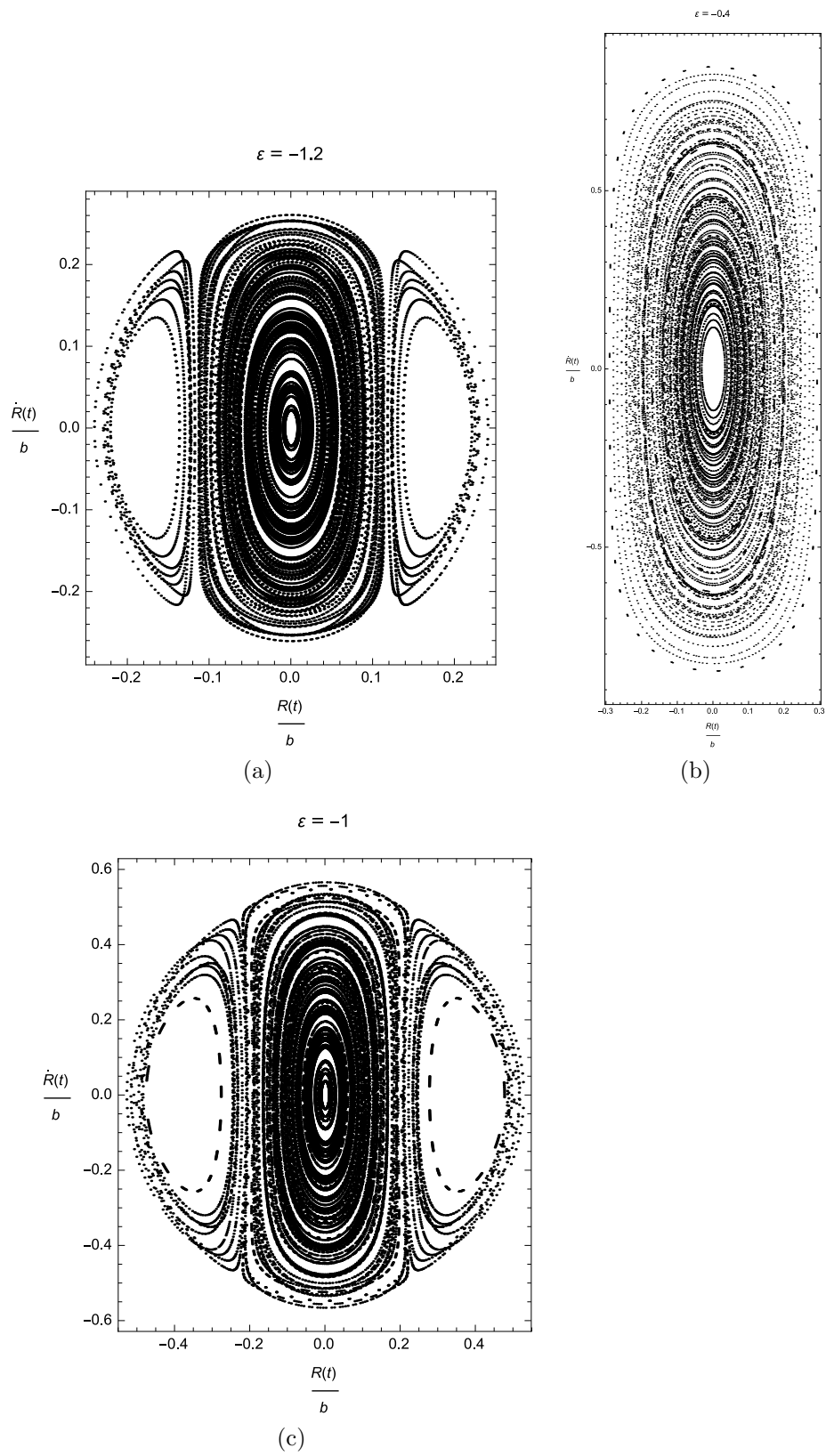


Figura 3.19: PSS con $h = 0$ para $n = 3$.

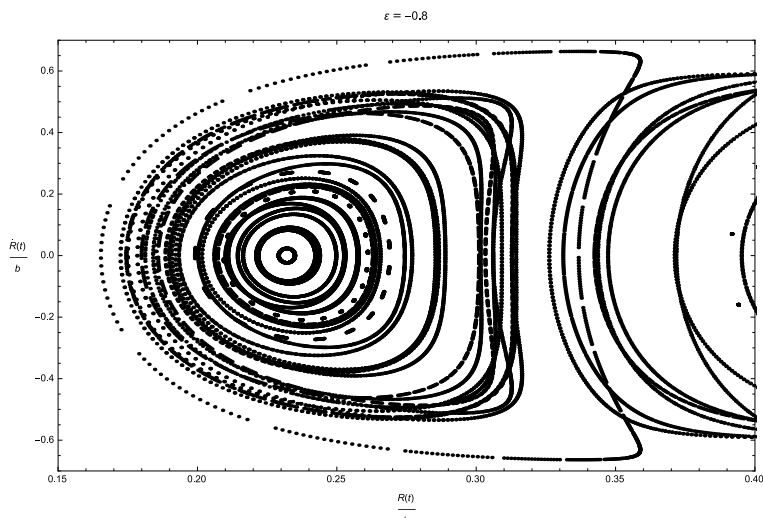
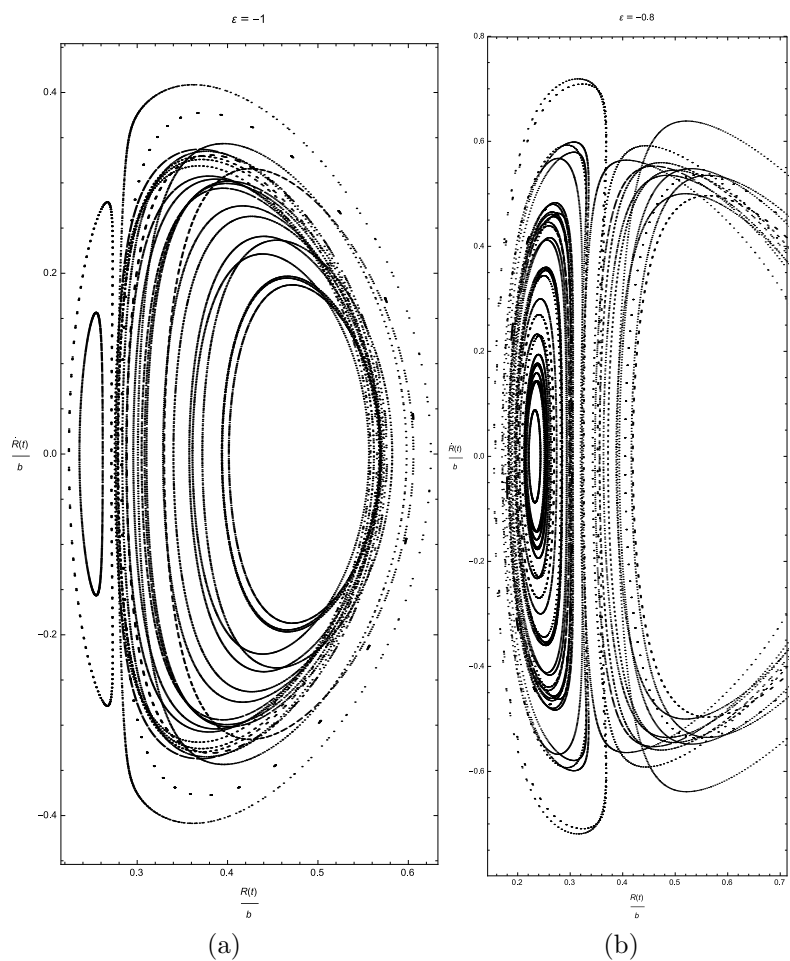


Figura 3.20: PSS con $h = 0.02$ para $n = 3$.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha planteado el estudio de órbitas tridimensionales en campos gravitacionales axialmente simétricos bajo los fundamentos de la formulación Hamiltoniana. El modelo de potencial elegido cumple con la condición de configuración de materia axial y además presenta simetría respecto al plano $z = 0$. Los modelos elegidos para este estudio fueron los cuatro primeros términos de la familia del potencial de Miyamoto y Nagai que fueron generados a partir de un potencial generalizado de infinitos términos Ec. (3.1). Para cada modelo del potencial se analizó la dinámica de órbitas. Primero se determinaron las expresiones de energía y potencial efectivo que permitieron encontrar mediante las curvas de velocidad cero los niveles de energía donde el movimiento de la partícula está permitido. A continuación, para un determinado conjunto de condiciones iniciales y parámetros se encontró la solución de las ecuaciones de movimiento mediante integración numérica. Finalmente, con los resultados obtenidos anteriormente se analizó la dinámica de órbitas en el espacio de fase (R, \dot{R}) mediante las Superficies de Sección de Poincaré.

Los modelos estudiados se solucionaron a partir del método numérico Runge Kutta de cuarto orden para las variables R y z . Para los dos primeros modelos ($n = 0$ y $n = 1$) presentan oscilaciones armónicas para ambas variables. Mientras que para el tercer ($n = 2$) y cuarto modelo ($n = 3$) sus soluciones representan oscilaciones moduladas. Demostrando que a medida que se hace una superposición de términos en cada modelo afecta su evolución temporal. A partir de la caracterización de órbitas se determinó que para el modelo $n = 0$ predominan las órbitas tipo caja, mientras para el modelo $n = 1$ se observa una transición desde órbitas de caja perfectamente formadas a trayectorias de tubo en forma de toroides casi perfectos. Seguidamente, en el modelo $n = 2$ también se formaron órbitas tipo caja perfectamente formada a órbitas de tubo. Y finalmente para el modelo $n = 3$ sus trayectorias presentaron configuraciones complejas de bucles dando lugar a la formación de órbitas tipo banana.

Por último se determinaron que las Superficies de Sección de Poincaré en el espacio de fase (R, \dot{R}) . Cuando el momento angular era cero, las PSS de los tres primeros modelos muestran una topología de órbitas concéntricas regulares y a medida que se aumentaba su energía se formaron de islas de regularidad rodeadas por un mar de órbitas regulares, donde predominaron las regiones de regularidad (figuras 3.4, 3.9). Mientras que para el modelo $n = 3$ las islas de regularidad se formaron alrededor de regiones de regularidad bien definidas (figura 3.14). Ahora al tener en cuenta la contribución del momento angular, las PSS para los modelos $n = 0$ y $n = 1$ se

observa la transición de la regularidad al caos a medida que la energía toma valores mayores (figuras 3.5, 3.10). Sin embargo, para el modelo $n = 2$ y $n = 3$ en las PSS se forman islas de regularidad que examinadas con mayor detalle forman órbitas tipo banano (figuras 3.15b, 3.20b). Encontrando finalmente, que los cuatro primeros términos de la familia del potencial representan satisfactoriamente modelos de potenciales axialmente simétricos para el estudio de la naturaleza regular de sistemas dinámicos.

TÉRMINOS DEL POTENCIAL DE MIYAMOTO Y NAGAI

A continuación se presentan las expresiones para los términos $n = 0$ hasta $n = 3$ de la expansión del potencial de Miyamoto y Nagai.

1. Modelo $n = 0$

$$\Phi_0(R, z) = -\frac{a_0}{\left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2\right]^{1/2}}. \quad (\text{A.1})$$

2. Modelo $n = 1$

$$\Phi_1(R, z) = -\frac{a_0}{\left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2\right]^{1/2}} - \frac{a_1(a + \sqrt{z^2 + b^2})}{\left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2\right]^{3/2}}. \quad (\text{A.2})$$

3. Modelo $n = 2$

$$\begin{aligned} \Phi_2(R, z) = & -\frac{a_0}{\left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2\right]^{1/2}} - \frac{a_1(a + \sqrt{z^2 + b^2})}{\left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2\right]^{3/2}} \\ & - \frac{a_2 \left(2(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2 - R^2\right)}{2 \left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2\right]^{5/2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

4. Modelo $n = 3$

$$\begin{aligned} \Phi_3(R, z) = & -\frac{a_0}{\left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2\right]^{1/2}} \\ & - \frac{a_1(a + \sqrt{z^2 + b^2})}{\left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2\right]^{3/2}} \\ & - \frac{a_2 \left(2(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2 - R^2\right)}{2 \left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2\right]^{5/2}} \\ & - \frac{a_3(a + \sqrt{z^2 + b^2})(2(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2 - 3R^2)}{2 \left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2\right]^{7/2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

A continuación se presentan las ecuaciones de movimiento (2.7), y (2.8), para los cuatro primeros términos del potencial de Miyamoto y Nagai normalizado por los parámetros b y k .

1. Ecuaciones para el modelo $n = 0$

$$\ddot{\tilde{R}} = \frac{h}{\tilde{R}^3} - \frac{\tilde{R}}{\left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{3/2}}, \quad (\text{B.1})$$

$$\ddot{\tilde{z}} = -\frac{\tilde{z} (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{3/2}}. \quad (\text{B.2})$$

2. Ecuaciones para el modelo $n = 1$

$$\ddot{\tilde{R}} = -\frac{\tilde{R}}{\left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{3/2}} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} & -\frac{3\tilde{R} (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{5/2}} + \frac{h}{\tilde{R}^3}, \\ \ddot{\tilde{z}} = & -\frac{3\tilde{z} (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{5/2}} \quad (\text{B.4}) \\ & -\frac{\tilde{z} (\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{3/2}} \\ & + \frac{\tilde{z}}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{3/2}}. \end{aligned}$$

3. Ecuaciones para el modelo $n = 2$

$$\ddot{\tilde{R}} = -\frac{\tilde{R}}{\left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{3/2}} - \frac{\tilde{R}}{\left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{5/2}} \quad (\text{B.5})$$

$$-\frac{3\tilde{R}(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{5/2}} - \frac{5\tilde{R} \left(2(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 - \tilde{R}^2 \right)}{2 \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{7/2}} + \frac{h}{\tilde{R}^3},$$

$$\ddot{\tilde{z}} = -\frac{3z(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{5/2}} \quad (\text{B.6})$$

$$-\frac{\tilde{z}(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{3/2}}$$

$$+\frac{2\tilde{z}(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{5/2}}$$

$$-\frac{5\tilde{z}(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2}) \left(2(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2})^2 - \tilde{R}^2 \right)}{2\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{7/2}}$$

$$+\frac{\tilde{z}}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{3/2}}.$$

4. Ecuaciones para el modelo $n = 3$

$$\ddot{\tilde{R}} = -\frac{\tilde{R}}{\left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{3/2}} - \frac{\tilde{R}}{\left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{5/2}} \quad (\text{B.7})$$

$$-\frac{3\tilde{R}(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{5/2}} - \frac{3\tilde{R}(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{7/2}}$$

$$-\frac{5\tilde{R} \left(2(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 - \tilde{R}^2 \right)}{2 \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{7/2}}$$

$$-\frac{7\tilde{R}(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1}) \left(2(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 - 3\tilde{R}^2 \right)}{2 \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{9/2}} + \frac{h}{\tilde{R}^3},$$

$$\begin{aligned}
\tilde{z} &= -\frac{3\tilde{z}(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{5/2}} \\
&+ \frac{2\tilde{z}(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{7/2}} \\
&- \frac{7\tilde{z}(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 \left(2(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 - 3\tilde{R}^2 \right)}{2\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{9/2}} \\
&- \frac{\tilde{z}(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{3/2}} \\
&+ \frac{2\tilde{z}(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{5/2}} \\
&- \frac{5\tilde{z}(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1}) \left(2(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 - \tilde{R}^2 \right)}{2\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{7/2}} \\
&+ \frac{\tilde{z} \left(2(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 - 3\tilde{R}^2 \right)}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{7/2}} \\
&+ \frac{2\tilde{z}}{\sqrt{\tilde{z}^2 + 1} \left[(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1})^2 + \tilde{R}^2 \right]^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] G. Bertin. *Dynamics of Galaxies*. Cambridge University Press, 2000.
- [2] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, second edition, 1987.
- [3] C. Boccaletti C. Belmonte and G. Pucacco. Stability of axial orbits in galactic potentials. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 95:101–116, 2006.
- [4] T.C. Bountis Ch. Skokos and Ch. Antonopoulos. Geometrical properties of local dynamics in Hamiltonian systems: The Generalized Alignment Index (GALI) method. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 231:30 – 54, 2007.
- [5] G. Contopoulos. *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*. Springer, second edition, 2002.
- [6] G. Contopoulos and P.A. Patsis. *Chaos in Astronomy: Conference 2007*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [7] G. A. González and J. I. Reina. An infinite family of generalized kalnajs discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 371:1873–1876, 2006.
- [8] M. Hénon and C. Heiles. The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments. *The Astronomical Journal*, 69:73, 1964.
- [9] S. Manabe. Applicability of approximate third integral of motion for stellar orbits in the galaxy. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 31:369–394, 1979.
- [10] T. Manos and E. Athanassoula. Regular and chaotic orbits in barred galaxies – I. Applying the SALI/GALI method to explore their distribution in several models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 415:629–642, 2011.
- [11] M. Miyamoto and R. Nagai. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 27:533–543, 1975.
- [12] R. Nagai and M. Miyamoto. A family of self-gravitating stellar systems with axial symmetry. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 28:1–17, 1976.
- [13] S. Ninković and B. Jovanović. On Orbits for a Particular Case of Axial Symmetry. *Serbian Astronomical Journal*, 178:29–37, 2009.

- [14] H. Poincaré and R. Magini. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. *Il Nuovo Cimento*, 10:128–130, 1892.
- [15] J. Ramos-Caro, F. López-Suspes, and G. A. González. Chaotic and regular motion around generalized kalnajs discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 386:440–446, 2008.
- [16] Y. Revaz and D. Pfenniger. Periodic orbits in warped disk. *Astronomy & Astrophysics*, 372:784–792, 2001.
- [17] K. V. Salazar. *Modelos tridimensionales axialmente simétricos para la distribución de masa en la componente discoidal de galaxias espirales*. Universidad Industrial de Santander, Trabajo de Grado en Física, 2001.
- [18] Ch. Skokos. Alignment indices: a new, simple method for determining the ordered or chaotic nature of orbits. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 34:10029–10043, 2001.
- [19] R.V. Solé and S.C. Manrubia. *Orden y caos en sistemas complejos*. Number v. 1. Editions UPC, 2001.
- [20] L. Sparke and J. Gallagher. *Galaxies in the Universe: An Introduction*. Second edition, 2007.
- [21] D. Vogt and P. S. Letelier. On Multipolar Analytical Potentials for Galaxies. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 57:871–875, 2005.
- [22] E. Zotos and D. Carpintero. Orbit classification in the meridional plane of a disk galaxy model with a spherical nucleus. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 116:417–438, 2013.