Situación de aprendizaje para la enseñanza de la proporcionalidad a través del desarrollo de Prácticas Variacionales en estudiantes de quinto

Lizbeth Saudith Acuña Alvarado y Luisa Fernanda Peña Neira

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga
2025

Situación de aprendizaje para la enseñanza de la proporcionalidad a través del desarrollo de Prácticas Variacionales en estudiantes de quinto

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
Licenciadas en Matemáticas

Lizbeth Saudith Acuña Alvarado y Luisa Fernanda Peña Neira

Directora
Edith Johanna Mendoza Higuera
Doctora en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa

Codirectora
Haided Lised Arciniegas Rueda
Magíster en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga
2025

Resumen

Título: Situación de aprendizaje para la enseñanza de la proporcionalidad a través del desarrollo de Prácticas Variacionales en estudiantes de quinto

Autores: Luisa Fernanda Peña Neira y Lizbeth Saudith Acuña Alvarado

Palabras claves: Modelación Matemática, Pensamiento variacional, Proporcionalidad, Prácticas variacionales (PV), Situación de Aprendizaje (SA)

Descripción:

La presente investigación tiene como propósito diseñar y valorar una situación de aprendizaje orientada al desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de quinto grado, mediante la articulación de las prácticas variacionales y la modelación matemática en el estudio de la razón, proporción y proporcionalidad.

El **Capítulo I** plantea la problemática de investigación y la necesidad de trascender la enseñanza tradicional basada en algoritmos hacia una comprensión desde la variación y el cambio. El **Capítulo II** presenta una revisión de literatura que aborda los aportes teóricos y empíricos sobre proporcionalidad, modelación y pensamiento variacional, estableciendo los fundamentos que orientan la propuesta. En el **Capítulo III** se desarrolla el marco teórico, articulando la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) con las prácticas variacionales y la modelación. El **Capítulo IV** expone la metodología, de enfoque cualitativo, sustentada en los principios del experimento de enseñanza. En el **Capítulo V** se describen el proceso de diseño, la valoración por expertos y los ajustes realizados al rediseñar la situación de aprendizaje. Finalmente, el **Capítulo VI** presenta las conclusiones, destacando que la propuesta potencia la comprensión de las razones, proporciones y proporcionalidades desde el pensamiento variacional, fortaleciendo la conexión entre teoría, práctica y contexto significativo.

Abstract

Title: Learning situation for teaching proportionality through the development of Variational Practices in fifth grade students

Authors: Luisa Fernanda Peña Neira and Lizbeth Saudith Acuña Alvarado

Keywords: Mathematical Modeling, Variational Thinking. Proportionality, Variational Practices (VP), Learning Situation (LS)

Description:

This research aims to design and evaluate a learning situation oriented on the development of variational thinking of fifth-grade students through the articulation of variational practices and mathematical modeling in the study of ratio, proportion, and proportionality.

Chapter I proposes the research problem, highlighting the need to move beyond algorithmic teaching toward an understanding from variation and change. **Chapter II** presents a literature review that approaches the theoretical and empirical contributions related to proportionality, modeling, and variational thinking, establishing the foundations of the proposal. **Chapter III** develops the theoretical framework, articulating the Socioepistemological Theory of Mathematics Education (STME) with variational practices and modeling. **Chapter IV** describes the qualitative methodology based on the principles of the teaching experiment. **Chapter V** describes the design process, expert evaluation, and the adjustments made in the redesign phase. Finally, **Chapter VI** outlines the conclusions, emphasizing that the proposal enhances students' understanding of ratio, proportion, and proportionality through variational reasoning, thereby strengthening the connection between theory, practice, and meaningful contexts.

Contenido

Introducción **8**

1. Problemática de Investigación **13**

2. Antecedentes **15**

2.1. Enseñanza de la proporcionalidad 15

2.2. Modelación en la enseñanza de la matemática 19

2.3. Proporcionalidad y modelación matemática 29

3. Aspectos Teóricos **32**

3.1 El concepto de proporcionalidad 32

3.2. Modelación matemática 37

3.3. Las prácticas variacionales para abordar la proporcionalidad 39

3.4. La situación de aprendizaje (SA) 42

4. Metodología **45**

4.1. Fase I: Revisión Literaria 47

4.2 Fase II: Diseño de la SA 48

4.2.1. Contexto de la SA 48

4.2.2. Articulación de conceptos clave 50

4.2.3 Pilotaje de la SA 50

4.3 Fase III: Valoración del diseño 54

4.4 Fase IV: Ajustes al diseño 59

5. Análisis de información **60**

5.1. La proporcionalidad a través del desarrollo de práctica variacionales 60

5.1.1 Primer momento 61

5.1.2 Segundo momento 68

5.1.3 Tercer momento 74

5.1.4 Cuarto momento 77

5.2. Resultados obtenidos de la valoración por expertos 79

5.2.1 Valoración 79

5.3. Ajustes al diseño 85

5.3.1 Etapas de la SA 86

5.4. Orientaciones para la implementación 88

5.4.1 Momento 1 88

5.4.2 Momento 2 90
5.4.3 Momento 3 92
5.4.4 Momento 4 92
6. Conclusiones 93
Bibliografía 97
Anexos 103
Anexo 1. *Situación de aprendizaje versión estudiante.* 103

Lista de Figuras

Figura 1. *Esquema general para un experimento de enseñanza propuesto por Camargo (2021).* 45
Figura 2. *Plan general de la presente investigación.* 46
Figura 3. *Esquema general de la SA.* 50
Figura 4. *Sobre los aspectos generales - Rúbrica de valoración.* 55
Figura 5. *Sobre las etapas de la SA - Rúbrica de valoración.* 55
Figura 6. *Sobre las RPP- Rúbrica de valoración.* 57
Figura 7. *Sobre el desarrollo de las PV - Rúbrica de valoración.* 58
Figura 8. *Momentos de la SA.* 60
Figura 9. *Momento 1- Pregunta inicial para familiarizarse con el contexto.* 61
Figura 10. *Momento 1- Identificar metas y presupuesto.* 62
Figura 11. *Momento 1- registro tabular*. 65
Figura 12. *Momento 1- síntesis de la etapa factual.* 66
Figura 13. *Momento 2- Una nueva representación.* 68
Figura 14. *Momento 2- Formalización del concepto de razón.* 69
Figura 15. *Momento 2- Introducción a la proporción y la proporcionalidad.* 70
Figura 16. *Momento 2- Introducción a la proporción y la proporcionalidad.* 71
Figura 17. *Momento 2- Síntesis de la etapa procedimental.* 72
Figura 18. *Momento 3- Diferentes formas de representación.* 74
Figura 19. *Momento 3- Síntesis de la etapa simbólica.* 75
Figura 20. *Momento 4- Situación no proporcional.* 77
Figura 21. *Valoración-Aspectos generales* 79
Figura 22. *Valoración- Etapas de la SA.* 80
Figura 23. *Valoración- Sobre el objeto matemático.* 84
Figura 24. *Valoración- Desarrollo de la PV.* 84
Figura 25. *Razón a partir del registro tabular*. 87
Figura 26. *Momento 1- Primera definición.* 88
Figura 27. *Momento 1- Recomendaciones en el diseño.* 89

Lista de tablas

Tabla 1. *Sugerencias y ajustes del pilotaje.* 51

Introducción

La enseñanza de la proporcionalidad, un concepto fundamental en la educación matemática, ha sido objeto de múltiples investigaciones, y, por ende, de diversas interpretaciones, a lo largo de la historia. Desde la visión euclidiana hasta los enfoques contemporáneos, este concepto sigue evolucionando en su comprensión y aplicación didáctica.

La proporcionalidad no implica únicamente aspectos numéricos, sino también relaciones que involucran el cambio y la variación. La complejidad inherente a la enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos como los mencionados previamente, se evidencian en las investigaciones de Piaget sobre el desarrollo del pensamiento matemático, lo que ha llevado a la búsqueda de estrategias más efectivas para su enseñanza (Obando, 2015).

Diversos estudios, como los de Lobato et al. (2010) y Reyes-Gasperini (2013), han señalado la necesidad de superar el tratamiento tradicional de la proporcionalidad como un ejercicio aritmético para avanzar hacia una comprensión más estructural y dinámica. Esto implica abordar el concepto desde una perspectiva que permita a los estudiantes interpretar relaciones de cambio y variación.

De igual modo, resulta relevante mencionar que la modelación en el ámbito educativo no constituye un elemento aislado, sino que se enlaza directamente con la enseñanza de la proporcionalidad, en tanto ambas permiten abordar fenómenos de cambio y variación desde una perspectiva significativa. Autores como Blum y Leiss (2007) plantean que, a través de la compresión, simplificación, matematización, resolución, interpretación y validación, es posible traducir situaciones reales a modelos matemáticos, lo cual abre la posibilidad de resignificar los objetos matemáticos en contextos cercanos a los estudiantes. En esta misma línea, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática (TSME), sostiene que la modelación es un proceso que vincula el entorno o realidad escolar con la construcción del conocimiento matemático, favoreciendo la integración de experiencias y saberes previos.

En el contexto de la educación básica primaria, la articulación de la modelación con la enseñanza de la proporcionalidad y las prácticas variacionales adquiere una relevancia especial. A menudo, los currículos presentan la proporcionalidad de forma aislada, sin conectar adecuadamente con situaciones cotidianas o contextos relevantes para los estudiantes, lo que limita su comprensión, aplicación y significación (López y Flores, 2021). En contraste, el diseño de situaciones de aprendizaje se basa en tareas que propician la actividad del sujeto construyendo conocimientos a partir de contextos de significación y de la problematización del saber, lo que ofrece una vía prometedora para superar estas limitaciones, permitiendo que los estudiantes interactúen con problemas reales que fomenten el desarrollo del pensamiento proporcional.

Desde esta perspectiva, la presente investigación propone diseñar, y valorar una situación de aprendizaje que articule las prácticas variacionales y la modelación matemática como estrategias para enseñar proporcionalidad a estudiantes de quinto grado, con edades entre 9 y 11 años. Este trabajo no solo busca responder a la necesidad de mejorar la enseñanza de este concepto clave, sino también aportar un enfoque innovador que integre la teoría y la práctica educativa. La valoración de dicho diseño se llevó a cabo mediante una rúbrica diseñada para tal fin, la cual fue sometida a juicio de expertos en el área de la Educación Matemática. A partir de sus recomendaciones y observaciones, se realizaron los ajustes pertinentes que permitieron rediseñar la Situación de Aprendizaje (SA), garantizando así su pertinencia, coherencia y validez académica.

La importancia de este estudio radica en su capacidad para abordar el concepto de proporcionalidad desde una perspectiva amplia, que considera tanto su naturaleza como su conexión con fenómenos reales. De este modo, se pretende que la proporcionalidad deje de ser un tema abstracto y distante, para convertirse en una herramienta que permita a los estudiantes desarrollar el pensamiento variacional a través del desarrollo de prácticas variacionales (PV).

En coherencia con lo anterior, a continuación, se describen los capítulos que estructuran esta investigación. En el capítulo I se aborda la problemática de investigación, destacando la importancia de trascender la perspectiva aritmética hacia un enfoque que integre las prácticas variacionales y la modelación matemática con el fin de propiciar una comprensión y significación más profunda de la proporcionalidad en estudiantes de quinto grado a través de conexiones significativas entre el concepto matemático y situaciones de la vida real. Además, se presenta la pregunta general que guía esta investigación.

En el capítulo II se describe la revisión de literatura que permite un recorrido sistemático de las diversas perspectivas teóricas y prácticas relacionadas con la enseñanza de la proporcionalidad en el contexto de la educación matemática. Lo anterior, se logra gracias a un análisis detallado de investigaciones académicas, que incluyen trabajos de grado, artículos y libros, tanto a nivel local como internacional. Este capítulo se estructura en tres ejes fundamentales que abordan: la enseñanza de la proporcionalidad, la modelación en la enseñanza de la matemática, y la intersección entre ambos aspectos, proporcionando así una base sólida para comprender cómo estos elementos se integran en los procesos de enseñanza y aprendizaje que fundamentan la presente investigación.

El capítulo III establece los aspectos teóricos de esta investigación necesarios para el diseño de la situación de aprendizaje. Lo anterior, se realiza mediante la articulación de cuatro ejes conceptuales. Inicialmente, se explora la evolución del concepto de proporcionalidad desde la perspectiva euclidiana hasta las interpretaciones contemporáneas y con ello, las definiciones que se darán en el diseño. Luego, se abordará desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) la modelación, las Prácticas Variacionales (PV) propuestas por Caballero (2018) y la situación de aprendizaje. Y finalmente se explicita la articulación entre las PV y la razón, proporción y proporcionalidad.

A su vez, en el capítulo IV se establece la metodología que tendrá el planteamiento y desarrollo del diseño de la situación de aprendizaje, para ello se adopta un enfoque cualitativo que se estructura en tres fases fundamentales; siguiendo los principios del experimento de enseñanza propuesto por Camargo (2021), la investigación se desarrolla de manera cíclica y reflexiva, iniciando con una fase de diseño en donde se elabora una situación de aprendizaje fundamentada en los marcos teóricos previamente establecidos. Posteriormente, se lleva a cabo una fase de valoración del diseño mediante el juicio de expertos, para este fin se implementa una prueba piloto para identificar aspectos susceptibles de mejora. Con base en esta retroalimentación, se realiza un rediseño que culmina en la presentación del diseño final incorporando los ajustes pertinentes.

En el capítulo V, se presenta el análisis de los resultados obtenidos a partir del desarrollo y valoración de la SA. En primera instancia, se expone la manera en que la proporcionalidad fue abordada a través de las prácticas variacionales, mostrando cómo dichas prácticas se materializan en el diseño y orientan la construcción de actividades que promueven la comprensión del concepto en los estudiantes. Así mismo, se describe detalladamente el proceso del diseño de la SA, dando cuenta de las decisiones didácticas y metodológicas tomadas, así como de la coherencia entre el objetivo, las actividades y los marcos teóricos que fundamentan la investigación. En un segundo momento se presentan los resultados derivados de la valoración por expertos, incluyendo la rúbrica diligenciada que permite establecer criterios claros de pertinencia coherencia y aplicabilidad del diseño, junto con las observaciones y recomendaciones emitidas. Y, por último, se discute el ajuste del diseño de la SA, realizado a partir de la valoración de los expertos. En este espacio se analizan los cambios implementados, argumentando su conveniencia y relevancia frente al objetivo de la investigación. De esta forma, el capítulo V no solo sintetiza los hallazgos alcanzados, sino que también muestra cómo la retroalimentación crítica contribuyó a fortalecer la propuesta, consolidándola como un aporte innovador y fundamentado para la enseñanza de la proporcionalidad en estudiantes de quinto.

Finalmente, en el capítulo VI enmarca las conclusiones que constituyen una síntesis del proceso desarrollado y de los resultados obtenidos. Estas permiten evidenciar que el diseño de la SA cumplió el propósito de favorecer el tránsito de un enfoque centrado en la ejecución algorítmica hacia un tratamiento fundamentado en el pensamiento variacional. En particular, se resaltan que las PV posibilitan tareas enfocadas en la variación; lo que favorece la construcción de conceptos como razón, proporción y proporcionalidad.

1. Problemática de Investigación

La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica enfrenta diversos retos, esto se debe a que la enseñanza ha privilegiado una perspectiva numérica, centrada en la manipulación de razones y proporciones a través de cálculos algorítmicos que promueven la memorización sin garantizar una comprensión del concepto (Lobato et. al, 2010). Este enfoque, aunque útil, limita la comprensión profunda de la proporcionalidad como una relación dinámica entre magnitudes variables.

Autores como Reyes-Gasperini et al. (2014) y Guacaneme (2016) han señalado que el concepto de proporcionalidad debe entenderse más allá de los enfoques aritméticos y de algoritmos memorizables. En cambio, se debe adoptar una visión más amplia que promueva el pensamiento variacional, habilidades que permiten a los estudiantes analizar y entender cómo las magnitudes se relacionan y varían. En ese contexto, la Razón, Proporción y Proporcionalidad (RPP), entendidas desde una perspectiva no exclusivamente numérica, proporcionan una base teórica adecuada para explorar conceptos de cambio constante o variable entre magnitudes.

Por lo anterior, es fundamental abordar este concepto desde una perspectiva variacional que permita a los estudiantes explorar cómo y cuánto cambian dos magnitudes relacionadas entre sí, desarrollando así un pensamiento más profundo sobre la naturaleza del cambio.

En este contexto, Caballero (2018) introduce las PV definidas como formas de operar y razonar el cambio y la variación en tanto, constituyen una estrategia para incentivar el desarrollo del pensamiento variacional, desde la comparación, seriación, predicción y estimación. Estas prácticas no solo le permiten al estudiante observar el cambio, sino también razonar sobre él.

Además, Caballero y Moreno (2017) abordan la variación constante articulada a la función lineal, mientras que Arciniegas (2022) acoge las ideas de Caballero (2017, 2018) para la caracterización del pensamiento variacional. De este modo, al reconocer que la proporcionalidad constituye un presaber fundamental para la enseñanza de la función lineal, y considerando la ausencia la investigación es que articulen el desarrollo de las prácticas variacionales con la proporcionalidad, se resalta la importancia y trascendencia del presente trabajo de investigación.

Sumado a esto, en la educación básica primaria, los currículos frecuentemente presentan la proporcionalidad sin una relación clara con situaciones de la vida cotidiana, o solo toma como contextos las medidas en una receta, lo que dificulta el desarrollo de un pensamiento matemático integral desde edades tempranas (López y Flores, 2021). Es decir, no se reconocen otros contextos desde otras disciplinas o realidades que pudieran favorecer la comprensión de la proporcionalidad desde la variación en estudiantes de quinto grado. Así, la modelación y la situación de aprendizaje se constituyen como una estrategia que potencia la significación del objeto matemático en mención.

Por lo tanto, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo abordar la razón, proporción y proporcionalidad a través del desarrollo de prácticas variacionales y modelación en una situación de aprendizaje para estudiantes de quinto?

2. Antecedentes

En este apartado, se describen los hallazgos bibliográficos que posibilitaron conocer distintas perspectivas sobre el concepto de proporcionalidad, su aprendizaje, enseñanza y abordaje desde la investigación en educación matemática, para ello se realizó una revisión de artículos, trabajos de grado tanto de pregrado como de postgrado, en el ámbito local, nacional e internacional.

Desde una mirada de los referentes nacionales e internacionales, se destaca que, el estudio de las RPP ha sido objeto de numerosas investigaciones a lo largo del tiempo, al indagar sobre el proceso de aprendizaje y los elementos epistemológicos y cognitivos asociados a estos conceptos. En efecto, en los trabajos de Piaget, se manifiesta la complejidad de la enseñanza y el aprendizaje de estos temas y a pesar de los avances en la investigación en didáctica de las matemáticas, persisten desafíos significativos en los contextos educativos por lo cual, resulta relevante destacar la necesidad de seguir desarrollando investigaciones que discutan las dificultades presentes en las enseñanzas de las RPP (Obando, 2015).

Por lo anterior, este capítulo se subdivide en las siguientes secciones:

I. Enseñanza de la proporcionalidad.

II. Modelación en la enseñanza de la matemática.

III. Proporcionalidad y modelación matemática.

2.1. Enseñanza de la proporcionalidad

Block (2021) propone una secuencia didáctica de proporcionalidad orientada a fomentar el pensamiento proporcional en estudiantes de quinto grado mediante problemas de comparación de razones y cuarta proporcional. Su estrategia central consiste en introducir la noción de razón de forma implícita antes de formalizar las fracciones: mediante tareas que exigen establecer correspondencia entre pares de magnitudes o cantidades, los estudiantes son expuestos primero a la estructura relacional. En esta secuencia, las actividades de comparación de razones funcionan como herramientas didácticas que promueven la generalización de relaciones multiplicativas. Al privilegiar inicialmente la interpretación y comparación de relaciones en contextos concretos, la propuesta facilita que los alumnos construyan una intuición sobre la conservación de la razón y la proporcionalidad como relaciones estructurales, en tanto, el autor sienta las bases para el estudio posterior de los números racionales.

Esta orientación práctica se conecta orgánicamente con el marco teórico de Vergnaud (1983), quien sostiene que las estructuras multiplicativas deben aprenderse de manera integral y en una diversidad de contextos vinculados a la proporcionalidad. Desde esa perspectiva de trabajar la proporcionalidad sólo como cálculo numérico resulta insuficiente; en su lugar, este autor aboga por tareas que permitan a los estudiantes reconocer operaciones multiplicativas aun cuando los números no aparezcan de forma explícita, favoreciendo así una comprensión temprana y flexible de las relaciones proporcionales.

En términos metodológicos, Miyakawa y Winslow (2009) citado por Burgos y Godino (2019) realizan un comparativo entre dos enfoques en la enseñanza de proporcionalidad: el *estudio de elecciones* (origen japonés) y la *ingeniería didáctica* (escuela francesa). Los dos simultáneamente se centran en el aprendizaje a través de problemas, sin embargo, difieren en el papel del docente en el proceso de enseñanza. En el enfoque japonés, los estudiantes exploran problemas abiertos con múltiples soluciones mientras que en la ingeniería didáctica el profesor guía a los estudiantes hacia el propio descubrimiento de los conceptos a través de la interacción con el entorno, como propone Brousseau (1997) en la teoría de situaciones didácticas. Él destaca la importancia de diseñar situaciones para que los estudiantes puedan aplicar y construir nuevos conocimientos a partir de sus experiencias previas.

Burgos y Godino (2019) presentan un enfoque mixto en el que tanto el profesor como el estudiante tienen roles activos en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este enfoque ha demostrado eficacia al ayudar a los estudiantes a enfrentarse por primera vez con problemas de proporcionalidad. El modelo parte de la enseñanza guiada por el profesor, seguida de un trabajo colaborativo entre el docente y los alumnos y culmina con las tareas autónomas al promover el desarrollo del pensamiento proporcional a través de actividades prácticas. Este modelo acepta la importancia de la intervención del profesor en momentos críticos del proceso de enseñanza. Esta mediación no implica una enseñanza directa tradicional, sino que el profesor actúa como facilitador que orienta, desafía y acompaña al estudiante en la construcción del conocimiento. En palabras de Radford (2012) citado por Burgos y Godino (2019), el aprendizaje y la enseñanza son procesos inseparables que deben ser conducidos en colaboración.

Complementando la perspectiva de Radford (2012), Mochón (2012) en su trabajo se enfocó en la problemática de la enseñanza superficial de la proporcionalidad en matemáticas, que se limita a la aplicación mecánica de la regla de tres sin fomentar un verdadero razonamiento proporcional. Además, presenta en su marco teórico cinco etapas de desarrollo de la proporcionalidad que van desde lo pre-proporcional hasta lo proporcional. De igual manera, Mochón alude a que existen dos nociones básicas para entender el concepto de proporcionalidad, la comparación y la variación. La comparación, puede ser aditiva cuando se mide la diferencia absoluta entre dos cantidades o multiplicativa cuando se establece una razón entre ellas. Esta última, permite entender la relación relativa entre magnitudes, pero no brinda información sobre sus valores absolutos, lo que puede llevar a interpretaciones erróneas si no se tienen en cuenta los contextos específicos. Por otra parte, la variación implica el análisis de cómo cambian dos cantidades simultáneamente, siendo la variación proporcional directa un caso particular en el que los cambios son constantes en términos relativos. Asimismo, en el estudio de dos preguntas realizadas en una escuela secundaria, se evidenció una falta de comprensión conceptual. Como resultado, el autor propone algunas situaciones de proporcionalidad para lograr desarrollar este concepto desde la escuela básica, ordenadas desde la más sencilla a la más compleja.

Por su parte Rey (2022), basado en los aspectos teóricos de Mochón realiza un diseño curricular para el estudio del razonamiento proporcional en educación primaria, esto desde un enfoque histórico-epistemológico para favorecer la inclusión. Él enfocó el estudio desde el pensamiento variacional y numérico, destacando ideas de comparación y variación. Estas actividades, fueron diseñadas para un aprendizaje progresivo, con el objetivo de desarrollar una comprensión más significativa de las nociones de proporcionalidad directa.

En síntesis, los hallazgos en la enseñanza de la proporcionalidad dan cuenta de la importancia de promover una comprensión temprana de las relaciones proporcionales mediante el uso de razones entre números naturales, enfatizando el desarrollo del pensamiento proporcional a través de situaciones contextualizadas y evitando la aplicación mecánica de fórmulas. Los diferentes enfoques metodológicos coinciden en la necesidad de una construcción progresiva del concepto, partiendo desde experiencias concretas hasta llegar a niveles más abstractos de comprensión.

2.2. Modelación en la enseñanza de la matemática

Villa-Ochoa et al. (2022) describen la modelación matemática como un proceso que puede tener diferentes significados según quien lo aborde. Para un matemático aplicado, la modelación es un proceso que parte de un problema real, y pasa por varias etapas como la observación, selección de variables, formulación de hipótesis, creación de modelo, análisis y validación, mientras que para los educadores matemáticos la modelación es un área de investigación diversa, con diferentes intenciones y objetivos teóricos.

De igual modo, Bassanezi (2007) argumenta que la modelación matemática fomenta un tipo de aprendizaje activo y significativo donde los estudiantes participan en la construcción de modelos que representan fenómenos del mundo real, superando así limitaciones en la enseñanza algorítmica y mecánica que puede llegar a desmotivarlos. El autor menciona que los estudiantes no solo memorizan fórmulas, sino que entienden por qué y cómo funcionan las situaciones reales.

Además, Cantoral et al. (2018), desde la visión de enseñanza de la matemática como una construcción social de conocimiento, proponen que la modelación matemática no debe verse únicamente como un puente entre la realidad y las matemáticas, sino como una práctica situada en la que los sujetos organizan y aplican conocimientos matemáticos para interpretar y actuar sobre fenómenos específicos de otras disciplinas. También debe tomarse como un proceso que promueve la construcción de nuevo conocimiento y significados sobre los objetos matemáticos.

En palabras de Arrieta y Diaz (2014) la modelación es una práctica social compleja que implica la construcción de relaciones entre situaciones del mundo real y estructuras matemáticas. Su naturaleza radica en la capacidad de conectar distintos elementos entre sí, el contexto real, el conocimiento matemático, las representaciones, las interpretaciones y las decisiones de manera coherente y significativa. Dado esto, la modelación no es un ejercicio abstracto ni neutral, implica una intención clara, una comprensión, explicación o transformación del fenómeno.

Todo lo anterior, da cuenta de las diferentes visiones sobre la modelación en la enseñanza. Villa-Ochoa et al. (2022) y Bassanezi (2007), afirman que la modelación matemática en la educación básica surge como una estrategia que trasciende la aplicación de fórmulas. Este enfoque permite conectar las matemáticas con situaciones reales y significativas para el estudiante, promoviendo un aprendizaje activo y contextualizado. Arrieta y Díaz (2014) y Cantoral et al. (2018) hacen énfasis en la modelación como una práctica que trasciende a la construcción y significación del conocimiento matemático desde otros contextos o disciplinas.

A manera de ejemplo, se presentan algunas investigaciones que abordan la modelación como estrategia y dan cuenta de lo alcanzado.

Villa-Ochoa et al. (2017) propone que las tareas en modelación matemática pueden clasificarse en cuatro categorías: (i) enunciados verbales, (ii) construcción de representaciones, (ii) modelación a través de proyectos, y (iv) uso y análisis de modelos. La primera tarea, parece ser más cercana a la forma de enseñanza de las matemáticas en la primaria. Así, indica que los enunciados verbales son textos en los que se describe una situación más o menos familiar y se plantea una pregunta ya sea cuantitativa o cualitativa que se puede resolver con la ayuda de las matemáticas.

Según Beswick (2011), citado por Villa-Ochoa (2017), en la literatura se emplean términos como *auténtico* o *vida real* para describir diferentes niveles de contextualización en la presentación de enunciados matemáticos. La autora sugiere que el término "vida real" puede referirse a enunciados verbales donde la información del contexto es mínima, lo que los hace poco auténticos. Por otro lado, términos como "auténtico" indican una mayor conexión con la experiencia del sujeto en un contexto específico.

Ahora bien, en el contexto de la educación primaria, este autor indica que la modelación matemática ha demostrado ser una estrategia eficaz para abordar situaciones. Por ende, es fundamental hacer uso de contextos auténticos y apropiados para la edad de los estudiantes, integrando temas que sean relevantes para su experiencia inmediata. Si bien se está de acuerdo con lo afirmado, estas tareas de modelación no dan cuenta los significados que pudieran emerger dado el contexto recreado y la relevancia de la inmersión en la situación para la apropiación de términos y formas de interpretación del conocimiento matemático (ya sea del diseñador de tareas o del estudiante).

Ocampo-Arenas y Parra-Zapata (2022), reportan cómo la modelación fue una herramienta útil para que estudiantes de primaria reflexionarán sobre un problema ambiental relevante. La investigación se desarrolló alrededor de una problemática ambiental con una conexión directa con el estudiantado y sus comunidades, la contaminación generada por el uso de pitillos y bolsas plásticas. El objetivo fue explorar cómo los estudiantes podrían usar la modelación matemática para reflexionar sobre un problema ambiental y de esta manera proponer posibles soluciones.

El estudio de Ocampo-Arenas y Parra-Zapata (2022) se desarrolló a través de una serie de diez sesiones diseñadas por los investigadores en seis momentos clave. En primer lugar, la observación de la problemática permitió a los estudiantes observar la cantidad de residuos generados en la escuela después del recreo, dimensionando la magnitud del problema, lo que generó preguntas respecto a sus causas y posibles soluciones. Posteriormente, se llevó a cabo un proceso de conteo sistemático de los pitillos y bolsas plásticas encontradas, diferenciándolos según su tipo. Con la información recolectada, los estudiantes elaboraron gráficos que facilitaron la representación visual de los datos y, a partir de ellos, identificaron patrones en la cantidad de residuos generados diariamente. Incluso, lograron realizar predicciones sobre la acumulación de desechos plásticos en un mes, en caso de mantenerse las mismas condiciones. Esta experiencia sitúa a la modelación como conector entre una realidad social y las matemáticas, promoviendo una perspectiva sociocrítica donde los estudiantes participan activamente en la comprensión y transformación de su entorno.

De esta manera, la experiencia investigativa presentada por Ocampo- Arenas y Parra-Zapata sitúa la modulación matemática como un puente entre la realidad social y el conocimiento escolar. Bajo esta perspectiva, se promueve un enfoque socio crítico de la educación matemática, en el cual los estudiantes no solo aprenden a manejar técnicas y procedimientos, sino que también asumen un rol protagónico en la comprensión de su entorno y en la reflexión sobre posibles transformaciones que contribuyan al bienestar colectivo.

La literatura destaca cómo la modelación puede implementarse desde edades tempranas a través de problemas relevantes para los estudiantes. De igual modo, enfatiza la importancia de desarrollar un pensamiento crítico y la capacidad de evaluar la pertinencia de los modelos matemáticos, superando así la creencia de que la modelación solo es apropiada para los niveles educativos avanzados.

Por su parte, Silva et al. (2021) toma la modelación matemática como un proceso bidireccional entre el mundo real y las representaciones matemáticas, lo que implica la necesidad de diseñar tareas que permitan a los estudiantes establecer conexiones significativas entre ambos ámbitos. Asimismo, afirma que los estudiantes pueden construir conocimiento matemático a través de la interacción con situaciones contextualizadas y herramientas tecnológicas. Para ello, se integran manipulativos virtuales, que facilitan la exploración de conceptos matemáticos mediante representaciones visuales dinámicas, brindando retroalimentación inmediata y promoviendo la autonomía en el aprendizaje. En este contexto, el rol del docente se redefine, pasando de ser una fuente de información a un mediador que guía el proceso de descubrimiento, equilibrando la intervención mínima para fomentar la independencia de los estudiantes.

En consecuencia, se observa que la combinación de modelación matemática y manipulativos virtuales genera condiciones favorables para la autorregulación y corregulación del aprendizaje. De hecho, a través de estudios con estudiantes de educación primaria, se ha observado que la metodología empleada favorece la comprensión conceptual de las operaciones aritméticas elementales, como la suma y la resta, mediante la resolución de problemas en entornos colaborativos (Silva et al., 2021).

En el trabajo de Greer et al. (2007) Se afirma que al abordar la modelación desde una perspectiva temprana y auténtica se pueden sentar las bases para una disposición matemática sólida. Se plantea que los problemas verbales en contextos del mundo real deben ser vistos como ejercicios de modelación en lugar de simples aplicaciones de operaciones aritméticas. Además, se enfatiza que la modelación permite a los estudiantes desarrollar un sentido de agencia al reconocer la matemática como una herramienta crítica para analizar problemas relevantes en sus vidas y comunidades. Este enfoque busca contrarrestar la idea de que la modelación solo es apropiada para niveles avanzados, destacando que el proceso de modelación puede comenzar en los primeros años de escolarización mediante actividades que promuevan tanto la aplicación como la construcción de modelos matemáticos.

El estudio identifica un fenómeno denominado “suspensión del sentido”, donde los estudiantes tienden a ignorar su conocimiento del mundo real al resolver problemas verbales, adoptando en su lugar una estrategia basada en la aplicación mecánica de operaciones implícitas, las cuales refuerzan la creencia de que cualquier problema planteado en el aula tiene una única solución numérica obtenida mediante cálculos aritméticos. Por ello, se sugiere que la enseñanza de la modelación debe enfocarse en fomentar el juicio crítico y la capacidad de evaluar la pertinencia de los modelos matemáticos en diferentes situaciones.

Del mismo modo, en niveles superiores, López y Flores (2021) exploran el impacto de la modelación matemática en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales, dentro del marco del modelo educativo “Aprender matemática, Haciendo matemática". Este modelo, fundamentado en la teoría de Vygotsky, busca desarrollar competencias matemáticas a través de actividades colaborativas. Se hace énfasis en que los estudiantes aprenden matemáticas resolviendo problemas reales y estableciendo relaciones entre conceptos, fomentando competencias como el pensamiento matemático, la resolución de problemas y el uso de tecnología. En ese sentido, la modelación matemática se presenta como un medio integrador del conocimiento con el contexto social que promueve el aprendizaje significativo.

En los anteriores trabajos, falta énfasis en que al abordar una tarea modelación la actividad matemática está ligada con el conocimiento o acercamiento del estudiante a los contextos abordados. Es decir, el estudiante requiere acercamiento al contexto puesto en juego de tal forma que establezca las relaciones matemáticas adecuadas según los principios, premisas o conceptos fuera de la matemática. Asimismo, desde la TSME se afirma que la modelación no solo conlleva la construcción de modelos para responder a un problema, es una práctica construye, significa y resignifica el conocimiento matemático; así, la atención no está solo en el modelo a construir sino en los significados que emergen en la situación en relación con el objeto matemático en cuestión. Por ello, es de nuestro interés enfatizar en estudios de modelación dentro de la TSME.

Por ejemplo, Arrieta y Diaz (2014) proponen que la modelación relaciona dos entidades (modelo y modelado) con el propósito de intervenir en una a partir de la otra. Por ello, desde el marco socioepistemológico los autores definen como modelado a la situación o fenómeno que se elige como objeto de análisis, una construcción social que no está dada de forma objetiva, sino que requiere de una interpretación que determine qué aspectos de la realidad se consideran relevantes para ser traducidos a términos matemáticos. Por ello la amplitud de lo modelado muestra que la modelación no es exclusiva de la matemática, sino que se puede ver como una práctica transversal a varias disciplinas.

De igual manera, el modelo no es simplemente una estructura matemática, sino que se concibe como una herramienta dinámica, que se basa en la construcción humana que sólo tiene significado y funcionalidad cuando es utilizado activamente para intervenir en otra entidad (fenómeno, situación o problema específico). Por ejemplo, los autores plantean una situación experimental en la que se propone el análisis de la elasticidad de un resorte colocando pesas y observando cómo cambia la posición del indicador en la regla a medida que se agrega más peso, este ejemplo se propone como estrategia para construir sentido matemático entorno a la función lineal. En este caso el comportamiento del resorte al estirarse o comprimirse proporcionalmente a la fuerza aplicada, permitió introducir el concepto de función lineal de manera contextualizada: la pendiente de la recta se interpreta como la razón de cambio, es decir cuánta longitud se estira por cada unidad de peso, mientras que el punto de corte con el eje vertical corresponde al estado inicial del sistema cuando no hay carga aplicada.

El propósito de este ejemplo no era únicamente ilustrativo sino que pretendía mostrar como una situación física puede ser modelada matemáticamente, para luego presentar el caso de llenado de un tanque como un segundo ejemplo que les permitía ampliar y profundizar lo significado anteriormente desde un contexto distinto, con un nuevo tipo de razonamiento (tiempo transcurrido y líquido ingresado) este cambio de contexto demuestra que una misma estructura matemática puede tener usos análogos según el fenómeno modelado, fortaleciendo la capacidad de generalización y abstracción del estudiante. Del mismo modo, evidencia que el significado matemático emerge del acto de modelar y no está dado de manera fija o preestablecida.

Según los autores, lo modelado no es una simple cosa preexistente esperando ser modelada, sino que se convierte en modelado cuando se articula con el modelo para intervenir sobre ello. A partir de su interpretación, se lleva a cabo el acto de modelar, entendido como el conjunto de acciones conscientes y recursivas mediante las cuales se construye el modelo, estableciendo un puente entre lo modelado y la intervención que se busca realizar. Esta perspectiva muestra que la modelación trasciende lo matemático, construyéndose en una práctica transversal a diversas disciplinas.

Por su parte, Cantoral et al. (2018) hace énfasis en que el pensamiento y lenguaje variacional juegan un papel central en la enseñanza, ya que permiten a los individuos analizar cambios sucesivos y tomar decisiones fundamentales en la evolución de las variables involucradas, menciona como uno de los aportes fundamentales de este enfoque es el concepto de sistema de referencia, que engloba elementos clave como las variables de estudio, la unidad de referencia, la unidad de medición, la causalidad y la temporización. Estos elementos facilitan la estructuración de la comprensión del cambio y la variación en distintas situaciones, tanto en el ámbito académico como en contextos profesionales. A través de estudios empíricos, como la interpretación de electrocardiogramas por parte de cardiólogos y la modelación del llenado de recipientes por estudiantes de secundaria, los autores evidencian cómo la variación de orden superior es utilizada para la predicción, diagnóstico y estimación en distintos campos del conocimiento.

En el ámbito educativo, la modelación matemática ha sido tradicionalmente abordada desde un enfoque algorítmico centrado en la aplicación de fórmulas y procedimientos. No obstante, investigaciones recientes destacan la importancia de rediseñar el discurso matemático escolar para incluir estrategias que promuevan la construcción activa de modelos, enfatizando la variación como un elemento esencial en la comprensión de fenómenos. En este sentido, Cantoral et al. (2018) subraya la necesidad de incorporar fenómenos no deterministas en la enseñanza de las matemáticas, pues estos reflejan con mayor fidelidad la complejidad del mundo real y favorecen el desarrollo de un pensamiento matemático más flexible y contextualizado.

Por otra parte, Suárez y Cordero (2010) definen la modelación como una construcción teórica que el individuo desarrolla al momento de enfrentarse a una tarea matemática, poniendo en juego sus conocimientos previos. Por ello, proponen un enfoque que integra el uso de gráficas como elemento central para la construcción de conocimiento matemático, especialmente en situaciones relacionadas con el cambio y la variación.

Las representaciones gráficas en la enseñanza de las matemáticas han sido objeto de estudio en múltiples investigaciones. No obstante, la mayoría de estos estudios han abordado las gráficas como elemento representacional, sin profundizar en su función epistémica. Suárez y Cordero (2010) basándose en el Tratado de Oresme sobre la figuración de las cualidades, establecen que las gráficas no solo son representaciones visuales, sino que adquieren un papel funcional al permitir explorar fenómenos de cambio y variación, resignificando estos conceptos más allá de las propiedades analíticas tradicionales de las funciones al generar una conexión entre la perspectiva visual y el comportamiento de las magnitudes de estudio.

Finalmente, en Mendoza et al. (2022) los autores dan cuenta de los usos de las ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace en escenarios escolares y disciplinares dentro de la ingeniería robótica y electrónica. Al adentrarse en estas comunidades reconocen la emergencia de categorías como la modelación y la reproducción de comportamientos en relación con el conocimiento puesto en uso y los significados propios de la matemática desde su contexto disciplinar. Así, al diseñar sistemas de control, los estudiantes de robótica y electrónica modelan el comportamiento de una señal de entrada según los requerimientos específicos para que la señal de salida del sistema sea la requerida. Para ello, parten de comprender cómo se comparte la señal de entrada en el sistema y de identificar la representación gráfica y analítica que lo modela, para después intervenir al sistema con algún controlador que afecte el comportamiento de la señal según lo deseado o dispuesto. Esto implica que la ecuación diferencial que lo modela se transforme para lograr el cometido y controlar la señal de salida a su conveniencia. Así, la situación de modelación a la que se enfrentan los estudiantes de robótica y electrónica conlleva un uso de la matemática de carácter funcional, donde las argumentaciones y los procedimientos surgen desde la situación disciplinar y no en sí de la matemática. Aquí se resalta que la modelación no implica solo pasar del mundo real al matemático, sino que se comprende la situación del mundo real a la par que se construye el conocimiento matemático. Entonces, se establecen relaciones en el mundo real que aportan a la construcción de ideas matemáticas y viceversa, es aquí donde surge la modelación y la reproducción de comportamientos.

2.3. Proporcionalidad y modelación matemática

La modelación matemática se considera una herramienta efectiva para enseñar conceptos abstractos como la proporcionalidad. Investigadores como Blum y Leiss (2007), Bassanezi (2007), Guerrero y Mena (2015) y Alsina (2007) coinciden en que esta metodología permite a los estudiantes construir modelos matemáticos a partir de situaciones reales, fomentando un aprendizaje activo y significativo. Al conectar las matemáticas con el entorno cotidiano del estudiante, le permite no sólo memorizar, sino comprender el funcionamiento, desarrollando competencias de razonamiento proporcional y superar el enfoque algorítmico tradicional que puede resultar desmotivador.

Blum y Leiss (2007) citado por Reina (2018) plantea un ciclo de modelación que incluye seis etapas: la comprensión, la simplificación, la matematización, la resolución, la interpretación y la validación. Menciona que este ciclo ayuda a los estudiantes a trasladar una situación real a un modelo matemático, logrando así que el estudiante afiance conceptos matemáticos y desarrolle competencias como el razonamiento proporcional mediante situaciones de su entorno como la comparación de tamaños entre objetos reales y sus versiones ampliadas en monumentos urbanos y, la estimación de medidas de estructuras a partir de escalas proporcionales.

Alsina (2007) critica las actividades que presentan realidades distantes del contexto de los estudiantes argumentando que los problemas matemáticos deben basarse en situaciones auténticas y cotidianas para que de esta manera el estudiante pueda conectar la matemática con su entorno y se facilite su comprensión. Esto resulta recurrente en el ámbito de la enseñanza de la proporcionalidad ya que se presentan situaciones abstractas para los estudiantes, sin embargo, es posible proponer actividades basadas en situaciones de su entorno para mejorar la comprensión y promover el interés del alumno. El autor sugiere el análisis de las relaciones con el cuerpo humano, como la proporción entre el perímetro de la cabeza y la altura, la longitud del zapato en relación con la estatura o el número de pies que conforman un paso. Estas relaciones permiten que los estudiantes exploren la proporcionalidad a partir de su propia experiencia, fomentando una comprensión más intuitiva de este concepto matemático.

Dooren et al. (2011), abordan la modelación matemática en la educación primaria a través de la clasificación de problemas verbales como una estrategia para contrarrestar la tendencia de los estudiantes a aplicar métodos de proporcionalidad de manera indiscriminada. Se enfatiza que la modelación no solo implica la ejecución de cálculos, sino una serie de pasos previos esenciales, como la comprensión del problema y la selección de relaciones matemáticas adecuadas. La investigación realizada con estudiantes de sexto grado demostró que involucrar al estudiante en tareas de clasificación antes de la resolución de problemas favorece un pensamiento más estructurado y reduce la aplicación errónea de modelos proporcionales en contextos inapropiados.

Los resultados del estudio mostraron que la tarea de clasificación tuvo un efecto positivo en la capacidad de los estudiantes para distinguir entre problemas proporcionales y no proporcionales. Aquellos que realizaron la clasificación antes de la resolución, cometieron menos errores al aplicar estrategias proporcionales en problemas donde no corresponde, en comparación con aquellos que resolvieron los problemas antes de clasificarlos. Además, se observó que los estudiantes que participaron en la clasificación desarrollaron una mayor sensibilidad a las estructuras matemáticas subyacentes, evidenciando un cambio cualitativo en su razonamiento matemático. Estos hallazgos sugieren que la modelación matemática, implementada a través de clasificación, puede ser una herramienta eficaz para mejorar las respuestas de los estudiantes y así reducir el uso indiscriminado del modelo proporcional.

La literatura sobre proporcionalidad y modelación matemática, revela hallazgos significativos que destacan su potencial como herramienta en la enseñanza de este concepto. Autores como Blum y Leiss (2007), Alsina (2007) y Dooren et al. (2011) han explorado cómo la modelación puede facilitar la comprensión de conceptos abstractos como la proporcionalidad a través de situaciones significativas para el estudiante. Sin embargo, dada la escasez de investigaciones que abordan específicamente la intersección entre modelación matemática y proporcionalidad se resalta la importancia de profundizar en este campo, destacando su potencial para superar limitaciones del enfoque algorítmico tradicional para así promover un aprendizaje más significativo.

3. Aspectos Teóricos

En este apartado se describen los elementos teóricos que sustentan el diseño de situación de aprendizaje. En primer lugar, se hace un recorrido por las diferentes concepciones de la proporcionalidad, explorando las distintas interpretaciones que han surgido desde la perspectiva de algunos autores. Por otra parte, se presenta tanto la definición de una situación de aprendizaje como las prácticas variacionales, que constituyen un marco crucial para el diseño de las actividades de aprendizaje, en miras a abordar el cambio y la variación en contextos matemáticos. Finalmente, se expone la modelación matemática, específicamente los tipos de tareas que se trabajarán a lo largo del diseño.

3.1 El concepto de proporcionalidad

Guacaneme (2016) propone una perspectiva del concepto de razón y proporción desde la visión de Euclides en su séptimo y quinto libro de *Elementos*. En este último, Euclides introduce el concepto de magnitud, que hace referencia a una característica medible de los objetos, como segmentos geométricos, áreas, volúmenes, entre otros. En términos generales, una magnitud es una propiedad común que permite comparar diferentes elementos de un conjunto de objetos medibles.

En este contexto, Euclides define dos conceptos fundamentales, el primero, *Razón matemática*, hace referencia a la relación de tamaño entre dos magnitudes homogéneas, es decir, entre magnitudes que son comparables entre sí. El segundo, *Proporción matemática*, el cual indica que las magnitudes son proporcionales cuando mantienen la misma razón, es decir, cuando una relación de razón es equivalente a otra (Guacaneme, 2016).

Por otra parte, el Libro VII de *Elementos* aborda la proporcionalidad desde una perspectiva aritmética, centrada en los números. Euclides no proporciona una definición explícita y precisa de "razón" o "proporción," pero sí las utiliza para describir la relación entre pares de números a través de tres tipos de relaciones.

- *Relación de parte*: Un número es parte de otro cuando el menor mide al mayor. (Guacaneme, 2016). En decir, si un número puede dividir exactamente a otro, entonces es una parte de él.
- *Relación de partes:* Un número es partes de otro cuando no lo mide completamente, pero existe una relación entre ellos. (Guacaneme, 2016). Esto significa que el número menor no divide exactamente al mayor, pero tiene una relación específica con él.
- *Relación de múltiplo:* Un número es múltiplo de otro cuando el mayor es medido por el menor. (Guacaneme, 2016). Esto es, si el mayor puede dividirse exactamente por el menor, es un múltiplo de él. Además, cuando dos números se relacionan de alguna de estas maneras, se dice que determinan una razón. Y los números son proporcionales cuando, por ejemplo, el primero es el mismo múltiplo o la misma parte del segundo que el tercero lo es del cuarto (Guacaneme,2016).

La razón, tanto en el contexto de las magnitudes en el Libro V como en el contexto numérico en el Libro VII, no se refiere a un número en sí mismo, sino a una relación comparativa entre dos elementos (magnitudes o números). La proporción, entonces, es la equivalencia entre dos razones, es decir, cuando dos razones son iguales, se dice que hay proporción.

Por otra parte, la proporcionalidad es vista como una propiedad caracterizada por una variación lineal, es decir, una relación entre dos magnitudes en la que, al aumentar o disminuir una, la otra lo hace en la misma proporción, una linealidad. Ejemplificando lo anterior, Obando et al. (2014) establece que la razón es la relación entre dos variables, mientras que la proporción es una relación de equivalencia entre dos razones. Para llegar a esto se desarrolla una revisión y un análisis exhaustivo de las investigaciones relacionadas con el razonamiento proporcional y lo clasifican en tres categorías: cognitiva, epistémica y semiótica-antropológica. Estas abordan distintos aspectos en el desarrollo del razonamiento proporcional desde lo que sucede en la mente del estudiante hasta cómo se estructura y se enseña el conocimiento matemático.

La categoría cognitiva recopila las investigaciones donde priman los procesos mentales de los estudiantes, como el desarrollo del pensamiento proporcional que incluye habilidades como la identificación de patrones de variación entre magnitudes.

En cuanto a la categoría epistémica, gira en torno a la estructura y organización del conocimiento matemático. En lugar de observar cómo los estudiantes aprenden en esta categoría se examina cómo está organizado el conocimiento sobre la proporcionalidad en los diferentes currículos escolares, integrando tanto el contenido como los procesos que deben enseñarse para mejorar la comprensión de los estudiantes.

Finalmente, la categoría semiótica-antropológica se centra en el análisis de la proporcionalidad desde una perspectiva más cultural y de representación, explorando cómo las representaciones simbólicas y los contextos culturales influyen en la enseñanza y el aprendizaje de este objeto matemático.

Por otra parte, Reyes-Gasperini (2013) expresa que hubo la necesidad de introducir la noción de razón, debido a que esta noción difiere de las fracciones así, la razón no es más que la relación entre dos magnitudes, su comparación. Mientras que, la proporción surge al trabajar con dos pares de relaciones numéricas que se corresponden. En otras palabras, dos magnitudes guardan relación de proporcionalidad si conservan la misma razón, es decir una relación constante.

Ahora, Freudenthal (1983) citado por Lajusticia y Puig (2002) establece la razón como una función de un par ordenado (antecedente y consecuente), luego no debe entenderse simplemente como el resultado de dividir dos números, sino como una relación significativa entre dos magnitudes o valores. Luego, esta relación se mantiene y es esencial independientemente del valor numérico que pueda resultar de su división. Así, Freudenthal señala que cuando reducimos una razón a un número, se pierde lo que la hace valiosa, que es la posibilidad de comparar razones en función de su relación estructural y no solo de su valor numérico.

Lajusticia y Puig (2002), mencionan la diferencia entre una relación parte-todo y una relación parte-parte, que pueden representarse con la misma fracción, pero tienen significados completamente diferentes. La razón, por tanto, debe entenderse en su capacidad para expresar relaciones comparativas entre magnitudes, más que en su capacidad para ser simplificada a un número.

Es posible evidenciar similitudes con lo propuesto por Euclides en que una razón no es un número en sí mismo, sino una relación comparativa entre dos magnitudes. Ambos subrayan la necesidad de entender las relaciones dentro de un contexto. Euclides, al describir diferentes tipos de relación se refiere a cómo los números o magnitudes se relacionan de una manera específica entre sí y Lajusticia y Puig (2002) enfatizan que la misma fracción puede representar diferentes tipos de relaciones dependiendo del contexto, lo que resalta que la razón no debe reducirse a un simple valor numérico.

En este orden de ideas, Reyes-Gasperini et al. (2014) establece el concepto de proporcionalidad desde una perspectiva crítica y socioepistemológica enfocándose en su enseñanza y en los desafíos que enfrenta el aprendizaje de este concepto tanto a nivel cognitivo como didáctico. La proporcionalidad se presenta como un concepto que atraviesa múltiples niveles educativos y áreas de conocimientos desde la educación básica hasta niveles más avanzados. Ellos argumentan que este concepto va más allá del uso en algoritmos como la regla de tres, y propone que su estudio debe trascender de las reglas mnemotécnicas como: *cuando una magnitud aumenta, la otra también aumenta*; ya que estas simplificaciones no permiten entender completamente el concepto.

Luego, es importante problematizar el saber, es decir, cuestionar y profundizar en cómo se construye y utiliza el conocimiento sobre la proporcionalidad en diferentes contextos. Esto implica analizar el concepto desde una perspectiva que no se limite a la aplicación automática de procedimientos, sino que permita a los estudiantes comprender el sentido y la utilidad de la proporcionalidad en situaciones reales. Según los autores, esta problematización es esencial porque ayuda a los estudiantes a superar la comprensión superficial y a desarrollar un pensamiento crítico que les permita analizar y resolver problemas variados y complejos.

En síntesis, se establece que la razón y la proporción, son conceptos clave para comprender las relaciones entre magnitudes variables y números, de tal modo que para efectos de esta investigación se define *la razón* como la comparación entre dos variables del mismo fenómeno, y *la proporción* como la equivalencia entre dos razones, luego, dos razones guardan relación de *proporcionalidad* si mantienen la misma razón. En ese sentido, se concibe la razón y la proporción desde sus relaciones comparativas, más allá de la simplificación de valores numéricos y memorización de fórmulas, para así, centrar la atención en la comprensión de las nociones de RPP como camino para la construcción del razonamiento proporcional. Sin embargo, *la proporcionalidad* guardará relación desde la comparación cualitativa y cuantitativa.

3.2. Modelación matemática

Los lineamientos curriculares de matemáticas y Estándares Básicos de Competencias establecen la modelación como un proceso fundamental en la enseñanza de las matemáticas. Enfatizan en el desarrollo de competencias esenciales destacando que los modelos permiten al estudiante abstraer y simplificar situaciones del mundo real e identificar variables relevantes, así como formular predicciones, con el fin de que desde las edades tempranas los estudiantes adquieran la capacidad de identificar patrones en problemas cotidianos, facilitando de este modo la toma de decisiones (López y Flores, 2021).

En este sentido, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa explicita que la modelación es una práctica generativa, que no se limita al uso y aplicación de modelos, sino que es un proceso creativo que promueve la construcción de conocimiento. Al modelar los estudiantes resignifican el conocimiento desde los diferentes contextos abordados favoreciendo su comprensión (Cantoral et al, 2018). Hacen uso de la matemática desde un carácter funcional (argumentaciones desde el contexto y no desde lo matemático) que aporta significados al objeto matemático (Mendoza et al, 2022). Entonces la modelación es más que traducir los problemas del mundo real al mundo matemático, conlleva una práctica situada en un contexto específico (disciplinar, escolar o de la vida real) que define situaciones donde el conocimiento matemático puesto en uso se resignifica y trasciende a la solución del problema.

Cantoral et al (2018) hace énfasis en que la modelación, en relación con el pensamiento variacional, no es solo una forma de aplicarlo, sino que se toma como un medio para desarrollarlo. Cuando el estudiante se enfrenta a una situación variacional debe identificar qué cambia y cómo cambia, determinar relaciones entre variables, anticipar comportamientos dinámicos y hacer uso de múltiples representaciones (gráficas, tabulares, simbólicas, textuales). En este sentido, este pensamiento y la modelación son inseparables, pues la mayoría de los fenómenos que permiten ser modelados implican relaciones de dependencia, cambio y variación.

Esta forma de abordar el pensamiento variacional, desde la modelación, es una fuente de situaciones que favorecen la construcción de conocimiento matemático en la primaria en tanto que el estudiante se va adentrando en la identificación de patrones sin la necesidad de definiciones formales, sino desde las ideas variacionales.

Entonces, la modelación en esta investigación se constituirá como una práctica situada en un contexto específico cercano al estudiante, donde se modelen fenómenos de variación que permitan significar la razón, la proporción y la proporcionalidad al desarrollar pensamiento variacional. Esto aportará un tratamiento dinámico de estos objetos matemáticos y no el tratamiento estático que se alcanza desde el pensamiento numérico.

Tomada la modelación de esta manera, desde la TSME se promueve un conjunto de prácticas variacionales como herramientas clave para operar cognitivamente en este proceso. Es decir, las prácticas son formas de pensamiento que emergen y se desarrollan en procesos de modelación, esto da cuenta de que, al promover la modelación como actividad central en la enseñanza, se potencia el pensamiento variacional como una forma natural de actuar y razonar matemáticamente.

Además, para promover la modelación y las prácticas, Cantoral et al (2018) proponen diseñar un escenario intencional, donde el estudiante se enfrente a una situación que involucre variación y cambio, se vea desafiado a modelar y participe en una tarea que tenga sentido desde su contexto social y no solamente escolar; que denominan situación de aprendizaje. De esta manera se menciona que una situación de aprendizaje orientada desde esta perspectiva no busca aplicar modelos preexistentes, sino generar condiciones para la emergencia de significados matemáticos a partir de la interacción con fenómenos o contextos que requieren modelación.

3.3. Las prácticas variacionales para abordar la proporcionalidad

Las Prácticas Variacionales son descritas por Caballero (2018) como acciones orientadas al desarrollo del pensamiento variacional, el cual es crucial para entender y operar el cambio y la variación en diferentes situaciones matemáticas. Estas prácticas incluyen formas particulares de razonar y actuar ante situaciones de cambio, como la comparación, la seriación, la predicción y la estimación. En este sentido, la *comparación* implica establecer diferencias entre dos estados, ya sea uno anterior y uno posterior, del mismo fenómeno o entre fenómenos relacionados. Luego, conlleva a identificar los elementos que se están comparando, respecto de qué se comparan y cómo se realiza la comparación (por diferencias o cocientes) por ende, es la base para pensar en la variación, pues permite identificar y cuantificar el cambio.

Desde esta perspectiva, Arciniegas (2022) establece que la comparación se refleja en los argumentos variacionales que construyen los estudiantes desde estrategias cuantitativas y cualitativas. La *seriación* en lugar de simplemente comparar dos estados consecutivos distintos de un fenómeno, se enfoca en reconocer la recurrencia en un conjunto total o parcial de estados. Esto permite identificar patrones, relaciones o propiedades que describen cómo varía una variable respecto a otra, es decir, caracterizar el carácter estable del cambio. Luego, la sucesión de comparaciones implica una caracterización cuantitativa y/o cualitativa del comportamiento. Por su parte, la *predicción*, se refiere a anticipar un estado futuro o anterior a los estados conocidos del fenómeno luego, esta práctica establece una estrategia para determinar el nuevo estado como: una formulación aritmética, algebraica o analítica o, a través de una apreciación del valor de una variable respecto a otra; que garantiza la variación del fenómeno. Finalmente, la *estimación* es la acción de anticipar un comportamiento o tendencia en la variación del fenómeno en un intervalo específico o de manera global, con el objetivo de describir o plantear un modelo predictivo. Esta práctica se evidencia a través de descripciones cuantitativas o cualitativas (descripciones verbales, dibujos, gráficas o indicaciones numéricas) con respecto al comportamiento de las variables en un intervalo.

De este modo, la proporcionalidad y el pensamiento variacional están intrínsecamente relacionados, debido a que ambos implican el análisis de cómo dos magnitudes cambian o varían entre sí. Euclides, en sus libros *Elementos*, definió la razón y la proporción como relaciones fundamentales entre magnitudes. Estas nociones permiten comparar diferentes elementos al establecer equivalencias entre dichas relaciones.

La proporcionalidad, tradicionalmente abordada desde un enfoque numérico, se centra en la relación constante entre dos magnitudes a través de razones o cocientes fijos. Sin embargo, al introducir el pensamiento variacional, esta relación se enriquece al considerar no solo la constancia del cociente, sino también el cuánto y cómo cambian las magnitudes involucradas.

El pensamiento variacional permite que los estudiantes exploren la proporcionalidad más allá del simple cálculo, al razonar sobre el cambio desde una perspectiva más amplia, que incluye la comparación de diferentes estados de un fenómeno, la predicción de magnitudes desconocidas y la estimación de comportamientos futuros. De esta manera, la proporcionalidad se transforma en una herramienta para entender la variación y el cambio en las matemáticas, proporcionando bases sólidas para la comprensión de temas complejos como lo es la función lineal.

Así, se considerará para esta investigación cada práctica variacional en relación con el estudio de fenómenos proporcionales de la siguiente forma:

- ***Comparación***: Identificar qué cambia y cómo cambia en tanto, distinguir las magnitudes relacionadas en un enunciado y describir cómo se relacionan estados de una misma magnitud o estados equivalentes de magnitudes diferentes.
- ***Seriación:*** Refiere al paso de las correspondencias cualitativas o cuantitativas entre dos estados de la misma magnitud a la igualdad entre dos correspondencias cualitativas o cuantitativas de magnitudes diferentes o, en su defecto, a establecer la igualdad entre correspondencias cualitativas o cuantitativas de magnitudes diferentes relacionadas.
- ***Predicción:*** Anticipar un nuevo estado, valor específico o comportamiento de una magnitud a partir de la interpretación de la proporción ya sea desde la apreciación del cambio de una magnitud respecto a otra o a través estructuras aritméticas que relacionan las estados conocidos y desconocidos de la misma magnitud o magnitudes diferentes.

- ***Estimación***: Generalizar y anticipar el comportamiento o tendencia futura de las razones a partir de estructuras aritméticas o descripciones verbales que precisan el cambio y la variación entre las magnitudes relacionadas.

3.4. La situación de aprendizaje (SA)

Una situación de aprendizaje, en el contexto de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), se define como una tarea o conjunto de tareas que propician la actividad del sujeto que construye conocimiento matemático (Reyes-Gasparini, 2016). Esta construcción se desarrolla en función del contexto de significación y del objetivo de problematizar el saber, analizando la interacción entre los sujetos y el conocimiento en uso. Además, Arciniegas (2022) enfatiza que la situación de aprendizaje no es una simple traducción de lo literal de un contexto, sino que debe fomentar la argumentación, justificación y reconstrucción del pensamiento matemático a través de procesos dialécticos que integran lo factual, procedimental y simbólico. Por lo anterior, la situación de aprendizaje se desarrolla a partir de tres etapas.

Inicialmente, el aprendizaje comienza con la etapa *Factual,* donde el estudiante se enfrenta por primera vez a la situación de aprendizaje. En esta, se destaca como tarea principal el reconocimiento de los elementos que componen el problema, identificar magnitudes y establecer relaciones básicas entre los datos.

En la etapa *Procedimental,* el estudiante desarrolla estrategias y métodos para analizar la información con mayor profundidad. Aquí, se fomenta la construcción de argumentos y la formulación de criterios que le ayuden a interpretar los datos de manera más estructurada.

Finalmente, la etapa *Simbólica* se caracteriza por la orientación de la actividad del estudiante hacia la adquisición de información sobre el comportamiento de las variables a partir de representaciones gráficas o algebraicas. En esta fase, se promueve la comparación de comportamientos y tendencias en el valor de las variables, así como el desarrollo de estrategias para comparar valores dentro de estas representaciones.

El diseño de situaciones de aprendizaje para abordar la proporcionalidad permite articular conceptos fundamentales con la realidad de los estudiantes mediante la modelación matemática; las nociones de razón y proporción, como relaciones comparativas entre magnitudes, constituye una base para el desarrollo del pensamiento proporcional, trascendiendo una comparación únicamente algorítmica. Por otra parte, la modelación matemática, a través de los enunciados verbales y tareas contextualizadas, facilita una conexión entre los conceptos abstractos y el entorno del estudiante, permitiendo así un aprendizaje significativo.

Por lo anterior, la integración de las PV con el estudio de la proporcionalidad ofrece un marco teórico que permite abordar la enseñanza matemática desde una perspectiva contextualizada. Partiendo de la pregunta de investigación sobre cómo abordar la razón, proporción y proporcionalidad a través del desarrollo de prácticas variacionales y modelación en una situación de aprendizaje para estudiantes de quinto se establece el objetivo de diseñar y valorar una situación de aprendizaje que promueve el desarrollo de prácticas variacionales y la modelación para abordar la razón, proporción y proporcionalidad en este nivel escolar, se fundamenta en los aspectos teóricos analizados: la comprensión de la razón y proporción más allá de algoritmos mecánicos, el desarrollo del pensamiento variacional y la modelación matemática, que permiten a los estudiantes explorar el cambio, establecer relaciones comparativas y conectar las matemáticas con situaciones cotidianas.

4. Metodología

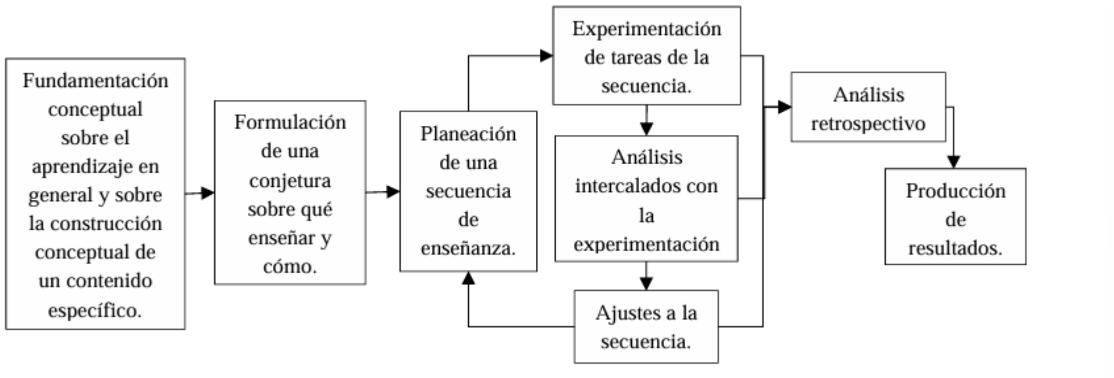
La presente investigación es de corte cualitativo. El enfoque cualitativo según Sampieri et al. (2014) se mueve de manera dinámica y circular entre hechos e interpretaciones, reconstruyendo la realidad tal como la perciben los actores en su contexto social. Se enfoca en comprender fenómenos, explorarlos desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural. Así, el proceso cualitativo se desarrolla de manera holística e interpretativa, considerando la riqueza y diversidad de realidades que se construyen y transforman en la interacción entre investigador y participantes.

En ese sentido, las estrategias investigativas de diseño dadas por Camargo (2021) exploran el "*¿qué pasaría si…?"* sobre fenómenos particulares, diseñados para probar hipótesis y observar efectos. En particular, el *experimento de enseñanza* se enfoca en secuencias didácticas diseñadas para evaluar el aprendizaje en contextos específicos, donde se observa cómo los estudiantes construyen significados y evolucionan en la comprensión. Este enfoque genera productos como secuencias mejoradas, modelos de actividad, evidencias sobre posibles logros y constructos interpretativos, que orientan a docentes e investigadores sobre el potencial de ciertas intervenciones sin esperar replicabilidad exacta, sino informativa y adaptable.

Camargo (2021), propone el siguiente esquema general para un experimento de enseñanza:

Figura 1

Esquema general para un experimento de enseñanza propuesto por Camargo (2021).



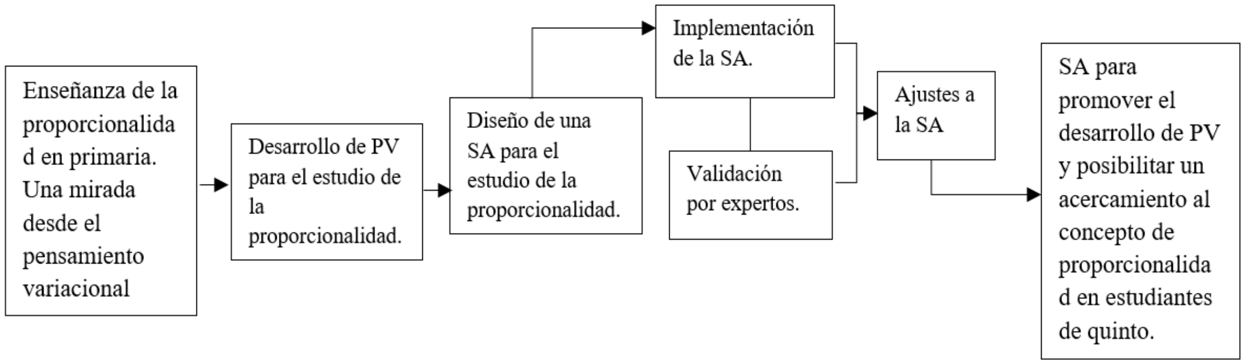
Nota. Adaptado de *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática* (Camargo, 2021)

En un experimento de enseñanza, el profesor gestiona interacciones espontáneas e intuitivas y también interacciones analíticas basadas en interpretaciones de las acciones de los estudiantes. El equipo de investigación elabora una conjetura inicial sobre cómo se podría enseñar un contenido, que guía el diseño y ajustes de la secuencia didáctica en función de las respuestas observadas en el aula. Este proceso es cíclico, permitiendo modificar la conjetura y las actividades de enseñanza según las necesidades emergentes y la retroalimentación. Al final, un análisis retrospectivo evalúa el impacto y refinamiento de la conjetura, aportando constructos teóricos y modelos para futuras prácticas educativas (Camargo, 2021).

Por lo anterior, se precisa para esta investigación el siguiente esquema:

Figura 2

Plan general de la presente investigación.



Siguiendo el esquema anterior que guiará la investigación, se definen las siguientes fases:

4.1. Fase I: Revisión Literaria

La primera fase de la metodología consistió en una revisión exhaustiva de la literatura especializada en torno a los tres ejes conceptuales que sustentan esta investigación: el pensamiento proporcional con énfasis en los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad; las prácticas variacionales como propuesta didáctica orientada al desarrollo del pensamiento matemático; y el diseño de una SA en tres fases: factual, procedimental y simbólica. Esta revisión permitió identificar los enfoques teóricos y metodológicos pertinentes, establecer referentes conceptuales sólidos y reconocer experiencias previas de diseño de situaciones de aprendizaje similares. Asimismo, la revisión bibliográfica brindó los fundamentos necesarios para la articulación coherente entre las prácticas variacionales y la modelación matemática, orientando el diseño de la SA. La búsqueda incluyó textos académicos, artículos de investigación y propuestas didácticas publicadas en bases de datos científicas, así como producciones relevantes del contexto latinoamericano.

4.2 Fase II: Diseño de la SA

En este apartado se presentan los elementos principales para la elaboración del diseño, teniendo en cuenta la discusión del contexto de la SA y la articulación teórica de los conceptos clave.

4.2.1. Contexto de la SA

Como la modelación en este trabajo no se limita al uso y aplicación de modelos donde los estudiantes resignifiquen el conocimiento matemático desde los diferentes contextos para favorecer su comprensión (Cantoral et al, 2018); se buscó un contexto para la SA donde los estudiantes puedan hacer uso de la matemática desde un carácter funcional, donde sus argumentaciones surjan desde el contexto y que éstas lleven a significar a la razón la proporción v la proporcionalidad.

En el contexto nacional, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2014) impulsa el proyecto de Educación Económica y Financiera (EEF), con el propósito de promover el desarrollo de competencias básicas ciudadanas, así como el pensamiento crítico y reflexivo de niños, niñas y jóvenes, con el fin de que puedan tomar decisiones informadas y responsables sobre temas económicos y financieros. Luego, en el marco de esta investigación, se toma específicamente el eje de Finanzas, pues el diseño de una SA centrada en el ahorro contribuye a fortalecer competencias relacionadas con la planificación, toma de decisiones y comprensión de relaciones proporcionales en un entorno financiero.

El contexto del ahorro responde a la necesidad de diseñar experiencias de aprendizaje vinculadas a contextos reales, comprensibles y funcionales para los estudiantes. Blum y Leiss

(2007) establecen que el uso de estas situaciones permite que el conocimiento matemático emerja de la necesidad de resolver problemas del mundo real, promoviendo un aprendizaje con sentido.

Este escenario permite conectar con los intereses y experiencias cotidianas de los estudiantes, quienes a temprana edad se enfrentan a decisiones relacionadas con el uso del dinero, la planificación y la consecución de metas personales. Esta cercanía emocional y cognitiva contribuye a generar un ambiente propicio para el aprendizaje, en tanto que favorece la motivación, el compromiso y el razonamiento matemático situado (Godino et al., 2007).

Además, el ahorro, entendido como un proceso acumulativo constante, ofrece un espacio amplio para movilizar el pensamiento proporcional. Las relaciones entre el monto ahorrado mensualmente, el número de semanas y la meta final, permiten al estudiante explorar de forma natural las nociones de razón, proporción y proporcionalidad al reconocer patrones desde las ideas variacionales.

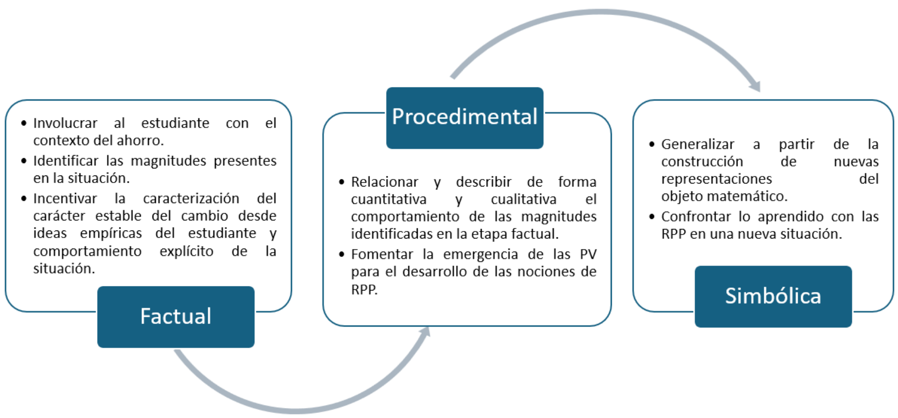
Las prácticas variacionales propuestas por Caballero (2018) encuentran en esta situación un campo de acción coherente y enriquecedor, ya que cada una de ella se activa de manera orgánica al abordar el contexto de la SA. Por ejemplo, al observar el comportamiento del ahorro semana tras semana, los estudiantes pueden comparar cantidades, además de establecer patrones de crecimiento, realizar predicciones y estimar valores intermedios. Esto, aporta un tratamiento dinámico de las RPP y no el tratamiento estático que se aborda desde el pensamiento numérico.

4.2.2. Articulación de conceptos clave

En el siguiente esquema se presenta la articulación de los tres aspectos relevantes para el diseño: las RPP, las prácticas variacionales y las etapas de la SA.

Figura 3

Esquema general de la SA.



4.2.3 Pilotaje de la SA

Se llevó a cabo un pilotaje en la Universidad Industrial de Santander con el fin de validar la pertinencia y claridad del instrumento diseñado. Este ejercicio se desarrolló con la participación de un grupo de docentes en ejercicio y docentes en formación que hacen parte de un Semillero de Investigación en Educación Económica y Financiera desde la Educación Matemática, quienes, en total, sumaron once participantes. El pilotaje permitió observar la aplicabilidad del instrumento en un contexto académico, identificar posibles dificultades en la redacción de los ítems y valorar la coherencia de las preguntas en relación con los objetivos de la investigación. Además, la retroalimentación brindada por los participantes constituyó un insumo fundamental para mejorar la claridad de las instrucciones, la contextualización de los ejemplos y la pertinencia de las competencias evaluadas. Para la realización de los ajustes, se tuvieron en cuenta las transcripciones de las intervenciones de los participantes y algunos registros de audio obtenidos durante el desarrollo del pilotaje, lo que permitió capturar de manera más precisa sus percepciones y sugerencias respecto al instrumento.

A continuación, se presenta una tabla con los ajustes realizados al diseño de acuerdo con el pilotaje, relacionando la pregunta, la sugerencia de cambio y el correspondiente ajuste.

Tabla 1

Sugerencias y ajustes del pilotaje.

Momento 1		
Pregunta	**Sugerencia de cambio**	**Ajuste realizado**
Luis quiere ahorrar para comprar una bicicleta. Cada semana, guarda una parte de sus ingresos en una alcancía. ● ¿Crees que es importante ahorrar? ¿Por qué? ● ¿Has hecho alguna vez un ahorro? ¿De qué manera?	La situación de Luis no tiene relación con el resto del diseño. Las preguntas es mejor abordarlas desde la discusión en clase orientada por el profesor.	Se realizó una historieta al inicio del diseño (Ver anexo 1) que se relaciona con el resto de contenido, además, se eliminaron las dos preguntas y se plantean en las orientaciones para los docentes.
¿Qué te gustaría comprar? ¿Por qué?	Delimitar el valor del objeto, pues, los estudiantes podrían escoger algo demasiado económico o muy costoso, lo que podría afectar el abordaje de las preguntas posteriores. Se sugiere establecer un rango que	Se incluyó una imagen aclaratoria anterior a la pregunta, donde se establece una delimitación conveniente para los estudiantes. Es posible detallarla en la primera página del anexo 1.

	permita implementarlo como una meta alcanzable.	
Completa la siguiente tabla hasta conseguir que tu ahorro acumulado te permita comprar el objeto deseado.	El número cero del inicio de la tabla genera confusión.	Se incorporó un cero en la casilla correspondiente al ahorro semanal con el fin de que el estudiante de manera intuitiva reconozco que en el registro del ahorro acumulado no habrá ahorro porque no hubo un aporte semanal.
¿Cuánto ahorrarías en la semana 15, semana 20 y en la semana 45?	Si un estudiante finaliza en un menor número de semanas, la pregunta pierde pertinencia.	Se ajustó la pregunta así: *Si continuas con el ahorro ¿Cuánto ahorrarías en la semana 15, semana 20 y en la semana 45?*
	Momento 2	
Establece las siguientes relaciones usando los datos anteriores (Razón)	En vez de dejar solo la línea que no indica nada, es recomendable disponer casillas que sugieran al estudiante la necesidad de completarlas.	Se anexaron casillas en todas las relaciones presentes del diseño
Sin concepto de proporción	El diseño cuenta con el concepto explícito de razón y proporcionalidad, pero no el de proporción.	Se incluyó el concepto de proporción: *¿Sabías que…? Si es posible obtener una razón a partir de otra, se dice que las razones forman una proporción.*
Con ayuda de las proporciones, identifica la semana en que tendrás el	La pregunta genera duda, no se logra identificar si es para el ahorro propio o la	Se ajustó la redacción de la pregunta así:

<table>
<tr><td>dinero suficiente para comprar lo que deseas.</td><td>situación planteada en la pregunta anterior.</td><td>Si el ahorro es de $10.000, identifica la semana en que tendrás el dinero suficiente para comprar lo que deseas (Intenta usar las proporciones).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Momento 3</td></tr>
<tr><td>¿Puedes ayudar a Camila a completar su gráfico de barras y descubrir en cuántas semanas logrará comprar su PlayStation?</td><td>No hay un espacio específico para responder la pregunta.</td><td>Se cambió la pregunta por una afirmación de la siguiente manera:

Ayuda a Camila a completar su gráfico de barras y descubrir en cuántas semanas logrará comprar su PlayStation.</td></tr>
<tr><td>El gráfico de barras</td><td>No cuenta con punto de origen y las barras estas desfasadas.</td><td>Se centraron las barras del gráfico acorde a la cuadrícula y se anexó el punto de inicio.</td></tr>
<tr><td>¿Cuánto aumenta el ahorro de la semana 11 con respecto a la semana 12?</td><td rowspan="2">El enunciado presenta de manera explícita que el ahorro aumenta, lo cual dificulta verificar si el estudiante está razonando de forma variacional; además, no se precisa a qué tipo de ahorro se hace referencia.</td><td>Se ajustó la pregunta así:

¿Cuánto cambia el ahorro acumulado de la semana 11 con respecto a la semana 12?</td></tr>
<tr><td>¿Cuánto aumenta el ahorro de la semana 16 con respecto a la semana 15?</td><td>Se ajustó la pregunta así:

¿Cuánto cambia el ahorro acumulado de la semana 16 con respecto a la semana 15?</td></tr>
</table>

¿Cuánto aumenta el ahorro acumulado cada vez que aumentan las semanas?	El enunciado presenta de manera explícita que el ahorro aumenta, lo cual dificulta verificar si el estudiante está razonando de forma variacional.	Se ajustó la pregunta así: *¿Cuánto cambia el ahorro acumulado cada vez que aumentan las semanas?*
No hay pregunta final	Al inicio del diseño se plantea la intensión de alcanzar una meta; sin embargo, en esta situación no se establece una conclusión al respecto.	Se incluyó la pregunta: *¿Lograste descubrir en qué semana Camila termina su ahorro? ¿Qué semana? ¿Cómo lo hiciste?*

4.3 Fase III: Valoración del diseño

El instrumento de valoración proporcionado a los expertos se organiza en dos niveles de análisis. En primer lugar, se abordan aspectos generales del diseño, tales como: la pertinencia del lenguaje frente al nivel escolar, la claridad de las instrucciones en relación con la actividad matemática esperada, la secuencialidad lógica de las tareas que promueve la construcción progresiva del conocimiento y la suficiencia de las actividades en términos de cantidad y calidad para responder al objeto matemático. Seguidamente, se valoran criterios específicos asociados a los ejes teóricos de la investigación: la coherencia de cada una de las etapas de la SA, la forma en que se aborda el objeto matemático y la articulación con las prácticas variacionales para el desarrollo del pensamiento variacional.

A continuación, se describe la rúbrica de valoración del diseño compartida a los expertos.

La sección de aspectos generales presentada en la Figura 4 tiene como fin garantizar que el diseño propuesto cumpla con criterios fundamentales de pertinencia pedagógica y coherencia interna. Su valoración busca garantizar la coherencia pedagógica y didáctica de la propuesta, de manera que las actividades planteadas resulten comprensibles, pertinentes y organizadas en una secuencia que favorezca una construcción progresiva del conocimiento, asegurando al mismo tiempo que la cantidad y calidad de las tareas respondan con solidez a los objetivos de la situación de aprendizaje.

Figura 4

Sobre los aspectos generales - Rúbrica de valoración.

	Criterio	Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
Aspectos generales	El lenguaje es apropiado para el nivel escolar.						
	Existe claridad entre la instrucción y la actividad matemática esperada.						
	Existe una organización lógica y secuencial de las tareas en pro de la construcción progresiva del conocimiento.						
	Las tareas y actividades son suficientes, en cantidad y calidad para responder al objetivo del diseño.						

En la siguiente sección (ver Figura 5) orientada a las etapas de la situación de aprendizaje (SA), la rúbrica se orienta a valorar la coherencia y profundidad del diseño en relación con los momentos que permiten al estudiante avanzar en la construcción del conocimiento. Esta valoración busca establecer si el diseño ofrece un recorrido coherente y progresivo, en el que los estudiantes puedan comprender el fenómeno desde un contexto cercano, avanzar en la construcción de estrategias y argumentaciones, y finalmente transitar hacia niveles de mayor abstracción, clave para consolidar relaciones proporcionales, comparar comportamientos, predecir y generalizar comportamientos en el fenómeno en estudio.

Figura 5

Sobre las etapas de la SA - Rúbrica de valoración.

	Criterio	Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
Etapas de la SA	Sobre el contexto: Verificar si la SA parte de un escenario cercano (el ahorro) que resulta significativo y comprensible para el estudiante.						
	Factual: Revisar si las preguntas iniciales permiten reconocer magnitudes involucradas (dinero recibido, dinero destinado al ahorro, tiempo) y establecer relaciones básicas, logrando que el estudiante se familiarice y se sitúe en la problemática.						
	Procedimental: Analizar si las actividades propuestas conducen a que el estudiante formule estrategias de cálculo y comparaciones, para identificar regularidades entre cantidades y con ello construir argumentos que explique los resultados obtenidos a lo largo del proceso.						
	Simbólica: Verificar si se promueve el cambio de representaciones, que ayudan a consolidar relaciones proporcionales, permitiendo comparar comportamientos y generalizar conclusiones sobre un fenómeno.						

En la sección sobre el objeto matemático (ver Figura 6) se establecen criterios orientados a valorar si el diseño de la SA propicia efectivamente la construcción de los conceptos centrales de razón, proporción y proporcionalidad. Se centra en establecer si el diseño de la situación de aprendizaje posibilita una comprensión integral y progresiva de las relaciones entre magnitudes, más allá de la simple ejecución de procedimientos numéricas. En este sentido, lo que se busca es que los estudiantes logren identificar, de manera gradual, las conexiones conceptuales que emergen de comparar cantidades, reconocer equivalencias entre diferentes razones y comprender el comportamiento constante de la variación en situaciones proporcionales. Este proceso implica no solo resolver cálculos, sino la capacidad de interpretar y justificar los fenómenos desde una perspectiva variacional en la cual se consolidan habilidades para comparar, abstraer y generalizar relaciones.

Figura 6

Sobre las RPP- Rúbrica de valoración.

	Criterio	Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
Sobre el objeto matemático	Razón: Identificar si el diseño presenta preguntas o actividades que permitan comparar dos magnitudes (parte-todo o parte-parte), favoreciendo que los estudiantes encuentren relaciones entre ellas más allá de lo numérico.						
	Proporción: Verificar si se promueven equivalencias entre razones, de forma que el estudiante reconozca que diferentes pares de valores pueden o no mantener una misma relación.						
	Proporcionalidad: Analizar si las tareas llevan a reconocer la existencia de una relación de cambio constante entre magnitudes, permitiendo trascender el cálculo algorítmico hacia una perspectiva variacional del concepto.						

En la sección que se presenta en la Figura 7, desarrollo de las prácticas variacionales, la rúbrica se centra en valorar si la situación de aprendizaje fomenta el despliegue de acciones cognitivas que favorecen la comprensión de los fenómenos de cambio y variación a través de diferentes estrategias. Esta valoración busca establecer si las actividades propuestas orientan a los estudiantes a reconocer la variación a partir de la comparación de estados distintos de una misma magnitud o de magnitudes diferentes, identificando con claridad que cambia y en qué medida ocurre dicho cambio. Del mismo modo, se examina si el diseño promueve la organización y el análisis de secuencias de datos que permitan evidenciar regularidades y patrones, como sucede con el ahorro acumulado semana tras semana, favoreciendo así la construcción de una visión ordenada y estructurada del fenómeno. También se considera fundamental que las tareas y preguntas incentiven la capacidad de anticipar valores futuros o pasados mediante la predicción, lo cual supone la aplicación de razonamientos proporcionales que habilitan al estudiante para proyectar comportamientos y generar conjeturas fundamentadas. Finalmente, se destaca la importancia de que las actividades impulsen procesos de estimación, en los que los estudiantes, sin necesidad de recurrir a cálculos exactos, puedan aproximarse a tendencias globales.

Figura 7

Sobre el desarrollo de las PV - Rúbrica de valoración.

	Criterio	Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
Desarrollo de las PV	Comparación: Revisar si las actividades orientan a los estudiantes a comparar estados distintos de una magnitud (ej. dinero ahorrado en distintos momentos) o entre magnitudes diferentes, distinguiendo claramente qué cambia y cómo cambia.						
	Seriación: Determinar si se fomenta la organización y análisis de secuencias de datos (ej. ahorro semana a semana), lo cual permite reconocer regularidades en el comportamiento de cantidades.						
	Predicción: Identificar si se incentiva a los estudiantes a anticipar valores futuros o pasados en función de la relación proporcional (ej. cuánto se ahorrará en cierto número de semanas), aplicando estrategias de cálculo o de razonamientos.						
	Estimación: Constatar si se promueve la anticipación de tendencias globales o comportamientos aproximados de la variación (ej. cuánto podría acumularse en varios meses), aun sin cálculos exactos, con el fin de consolidar el fenómeno en cuestión						

4.4 Fase IV: Ajustes al diseño

Con base en los resultados y observaciones aportadas por los expertos, se realizaron las modificaciones necesarias al diseño posterior a los ajustes realizados con base en el pilotaje. Dichos ajustes serán detallados en el apartado 5.2 de manera que se evidencie el proceso de retroalimentación y mejora continua del diseño. Cabe aclarar que la valoración se solicitó a dos expertos en el área, pero solo uno de ellos la envió en los tiempos requeridos para la finalización del documento.

5. Análisis de información

Este capítulo describe el diseño de la situación de aprendizaje orientada a abordar la razón, proporción y proporcionalidad a través del desarrollo de prácticas variacionales, integradas en tres etapas que estructuran el diseño. Para ello, se establecen cuatro momentos articuladores que conectan las RPP con las prácticas variacionales de comparación, seriación, predicción y estimación. En cada momento se detallan las tareas preguntas y justificaciones que guían la construcción progresiva del concepto de proporcionalidad a partir del contexto del ahorro, permitiendo al estudiante transitar desde la identificación de magnitudes y relaciones iniciales hasta la comprensión de situaciones proporcionales y no proporcionales.

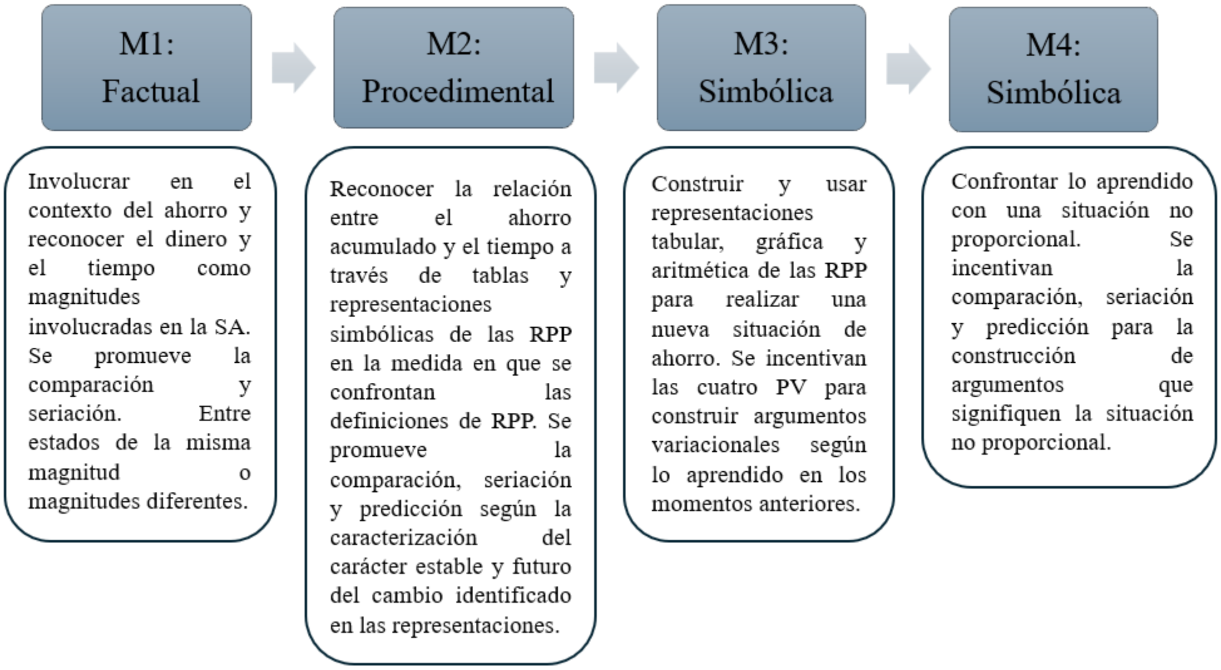
Posteriormente, se presentan los resultados de la valoración por expertos y los ajustes al diseño que surgen de dicho proceso, además, las orientaciones para la implementación, garantizando la pertinencia, coherencia y solidez de la propuesta.

5.1. La proporcionalidad a través del desarrollo de práctica variacionales

Para abordar la RPP a través del desarrollo de prácticas variacionales a lo largo de las tres etapas de la SA, se establecen 4 momentos que articulan las RPP y las prácticas variacionales, como se muestra en la Figura 8.

Figura 8

Momentos de la SA.



A continuación, se describe en detalle cada uno de los momentos y la justificación en el diseño de las tareas.

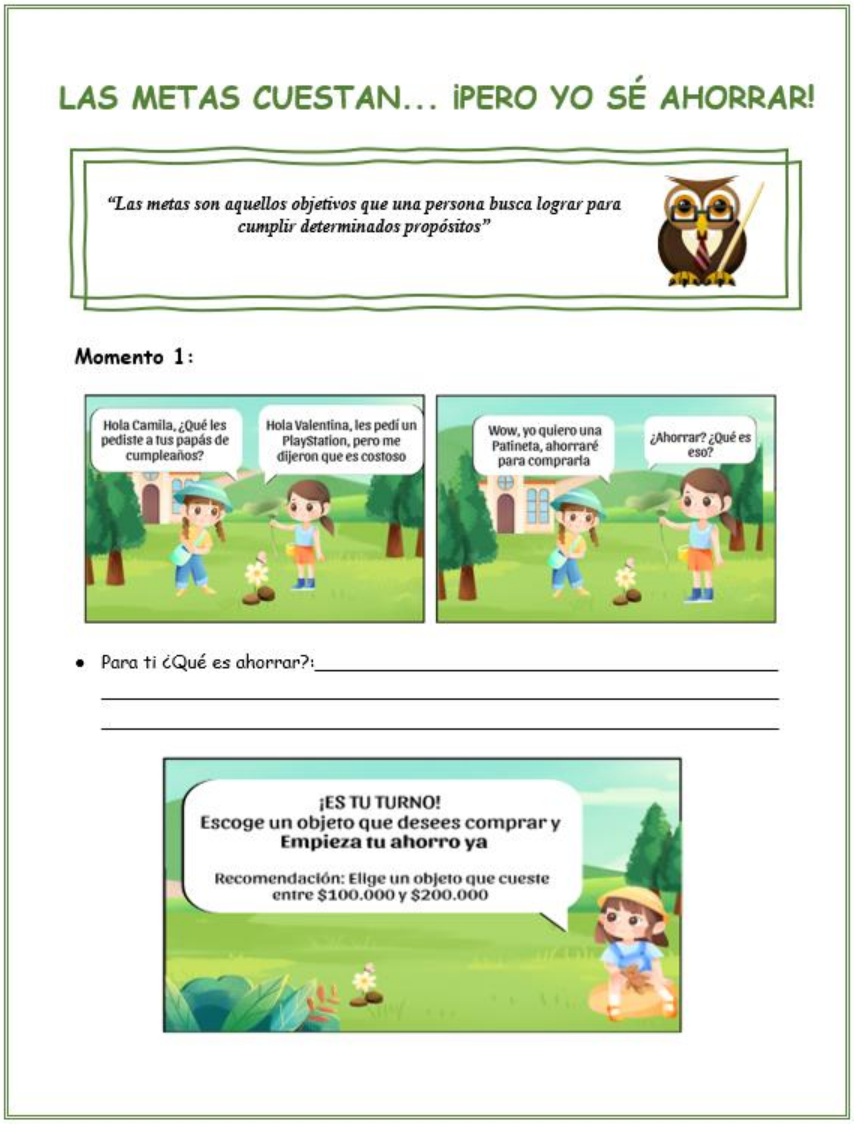
5.1.1 Primer momento

Este primer momento tiene como propósito familiarizar al estudiante con el contexto del ahorro y con las magnitudes que intervienen en el desarrollo de las tareas.

En primer lugar, se presenta una historieta breve cuyo propósito es familiarizar al estudiante con el contexto del diseño (el ahorro). Posteriormente, la pregunta consignada en la Figura 9 no solo introduce en dicho contexto, sino que también permite identificar qué ideas tienen ellos sobre el concepto.

Figura 9

Momento 1- Pregunta inicial para familiarizarse con el contexto.



Luego, se busca que los estudiantes reconozcan el dinero recibido semanalmente como el todo y distinga la parte destinada al ahorro, introduciendo de manera implícita la noción de razón. Asimismo, se pretende que los estudiantes establezcan metas, relacionen el tiempo con el dinero ahorrado y observen el comportamiento creciente del ahorro acumulado.

Figura 10

Momento 1- Identificar metas y presupuesto.

1. ¿Qué te gustaría comprar? ¿Por qué?

2. ¿Cuánto cuesta lo que deseas comprar? (Puedes investigar con ayuda de un adulto o imaginar el precio)

3. ¿Cuánto dinero recibes diariamente o te gustaría recibir?

4. ¿Qué parte de ese dinero estaría destinado al ahorro?

5. ¿Cuánto dinero ahorrarías semanalmente?

6. Completa la siguiente ficha para definir tu objetivo:

Quiero comprar: ______________________

Su precio es: ______________________

Mi ahorro semanal será: ______________________

En la Figura 10, las preguntas 1 y 2, buscan que el estudiante establezca un objetivo o meta y con ello, sumergirlo en el problema para que tome protagonismo dentro de la SA. En cuanto a las preguntas 3 y 4, el objetivo es que el estudiante distinga las magnitudes que están relacionadas con el problema, teniendo en cuenta la cantidad diaria de dinero (tiempo) y qué parte de esto será el ahorro (dinero por día).

Asimismo, se introduce la razón como parte de un todo, pues la pregunta 5, *¿Cuánto dinero recibes diariamente?,* invita al estudiante a identificar una cantidad que se convierte en un "todo" como punto de partida para describir su uso y distribución con respecto al dinero recibido. Mientras que con la pregunta 4, *¿Qué parte de lo que recibes diariamente estaría destinado al ahorro?,* se espera que el estudiante piense en proporciones, fracciones o porcentajes, lo que implica razonar sobre cómo una parte (dinero destinado al ahorro) se relaciona con el total (dinero recibido diariamente).

La quinta pregunta incentiva las prácticas de comparación y seriación. En primer lugar, promueve la comparación al incentivar que el estudiante identifique una relación directa entre el dinero ahorrado y el tiempo (dos magnitudes de distinto tipo). Luego, al distinguir que el ahorro semanal resulta de una variación constante diaria, se da otra forma de comparación, esta vez entre magnitudes del mismo tipo, días y semana. Ahora, al reconocer que el cambio diario es constante, el estudiante puede establecer que con la suma de los días se obtiene lo semanal, lo que da paso a que emerja la seriación pues, se reconoce un cambio constante que permanece día a día.

Finalmente, la tarea 6 busca que el estudiante sintetice lo que se ha preguntado anteriormente.

Ahora, las preguntas 7, 8 y 9 contempladas en la Figura 11, se articulan en torno al análisis del ahorro semanal y acumulado, a través de la comparación y la seriación, se busca que los estudiantes reconozcan cómo el ahorro crece de manera constante semana tras semana, establezcan relaciones entre valores consecutivos y proyecten patrones hacia estados futuros. De este modo, al organizar la información en tablas y secuencias, los estudiantes no solo identifican regularidades en el comportamiento del ahorro, sino que también desarrollan la capacidad de reconocer progresiones crecientes y anticipar resultados en diferentes instantes.

Figura 11

Momento 1- registro tabular.

7. Completa la siguiente tabla hasta conseguir que tu ahorro acumulado te permita comprar el objeto deseado.

Semana	Ahorro semanal	Ahorro acumulado
0	0	
1		
2		
3		
...		

8. Si continuas con el ahorro ¿Cuánto ahorrarías en la semana 15, semana 20 y en la semana 45?

Semana 15: ______________________

Semana 20: ______________________

Semana 45: ______________________

9. Cuánto aumenta o disminuye el ahorro acumulado entre:

Semana 3 y semana 4: ____________________

Semana 7 y semana 8: ____________________

Semana 10 y semana 11: __________________

La pregunta 7 busca promover la comparación ya que, para completar la tabla, el estudiante debe observar y establecer relaciones entre los valores del ahorro semanal y el ahorro acumulado semana tras semana. Para hacerlo, necesita comparar cómo varía el ahorro acumulado con respecto a la semana anterior y cuánto falta para alcanzar el valor total necesario para comprar el objeto deseado. Ahora bien, con el registro tabular se propone una secuencia ordenada de semanas, lo que invita al estudiante a reconocer un patrón de crecimiento constante en el ahorro, estableciendo un orden creciente en el ahorro acumulado.

La pregunta 8 incentiva la seriación, se orienta a que el estudiante identifique el patrón del ahorro, es decir, el ahorro fijo semanal como constante; y ello, obtener el ahorro acumulado para semanas consecutivas no tan lejanas (15 y 20), estableciendo una secuencia con base en el análisis tabular de datos consecutivos. Al hacerlo, organiza mentalmente la progresión de los valores según el tiempo, infiriendo cómo varía el ahorro acumulado conforme avanzan las semanas. Al indagar por la semana 45, se busca que, el comportamiento repetitivo y tedioso en los datos, incite la necesidad de establecer un patrón para hallar información en estados aislados, promoviendo así la práctica de predicción.

En la pregunta 9 se espera promover la comparación, al identificar el cambio entre dos estados de una misma magnitud (ahorro acumulado) en tanto, realizar comparaciones para reconocer cómo varían las cantidades a lo largo del tiempo, notando que el incremento es constante.

Para sintetizar el momento 1, se plantean las preguntas 10, 11 y 12, orientadas a consolidar las reflexiones previas y a movilizar las prácticas variacionales de predicción y estimación, ver Figura 12.

Figura 12

Momento 1- síntesis de la etapa factual.

10. ¿En qué semana reunirías el dinero necesario para comprar tu objeto?

11. ¿Cómo hallarías el ahorro acumulado para cualquier semana?

12. ¿Qué pasaría si ahorras el doble por semana?

La pregunta 10, *¿En qué semana reunirías el dinero necesario para comprar tu objeto?* Incita a realizar procedimientos de cálculo mental o plantear una conjetura cualitativa sobre cómo llegar a la semana deseada partiendo de un patrón ya identificado y de este modo, fomentar la predicción a partir de la apreciación de valor de una variable respecto a otra.

En la pregunta 11, *¿Cómo hallarías el ahorro acumulado para cualquier semana?* se busca que el estudiante trascienda de datos puntuales y construya una estrategia general que le permita determinar el valor del ahorro en cualquier momento, ya sea mediante una expresión aritmética o la identificación de regularidades en la secuencia. Con ello, se pretende fomentar la práctica de predicción.

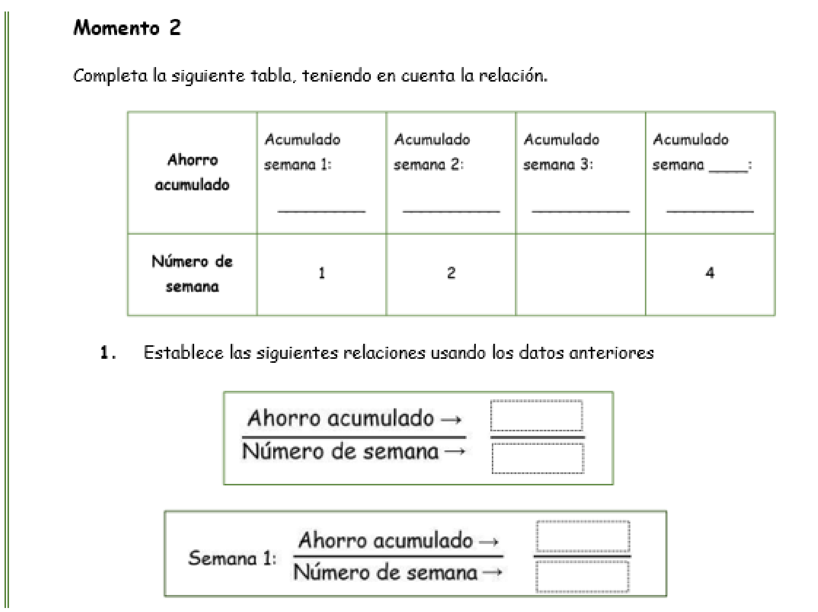
Con la pregunta 12, *¿Qué pasaría si ahorras el doble por semana?* Se orienta a que el estudiante realice una estimación del comportamiento del ahorro bajo una nueva condición, y de este modo, analice la relación entre el ahorro semanal y el tiempo necesario para cumplir la meta. Además, de manera informal, distinguir la proporción entre las magnitudes tratadas, desde la noción de razón.

5.1.2 Segundo momento

El segundo momento tiene como objetivo avanzar hacia una representación más formal de la relación entre magnitudes, promoviendo en los estudiantes la comprensión de la razón como vínculo explícito entre el ahorro acumulado y el tiempo. En este espacio se espera incentivar principalmente las prácticas de comparación al establecer relaciones entre distintos estados de las magnitudes y de seriación, al validar la constancia del cambio a través de diferentes registros. De manera complementaria, se propicia la predicción al proyectar dicho comportamiento hacia valores no inmediatos en términos de las RPP, este momento introduce de manera progresiva la noción de razón y abre camino a la formalización de la proporcionalidad, permitiendo que los estudiantes transiten de una observación empírica de los datos a un tratamiento simbólico y más estructurado de las relaciones proporcionales.

Figura 13

Momento 2- Una nueva representación.



Momento 2

Completa la siguiente tabla, teniendo en cuenta la relación.

Ahorro acumulado	Acumulado semana 1: ________	Acumulado semana 2: ________	Acumulado semana 3: ________	Acumulado semana _____: ________
Número de semana	1	2		4

1. Establece las siguientes relaciones usando los datos anteriores

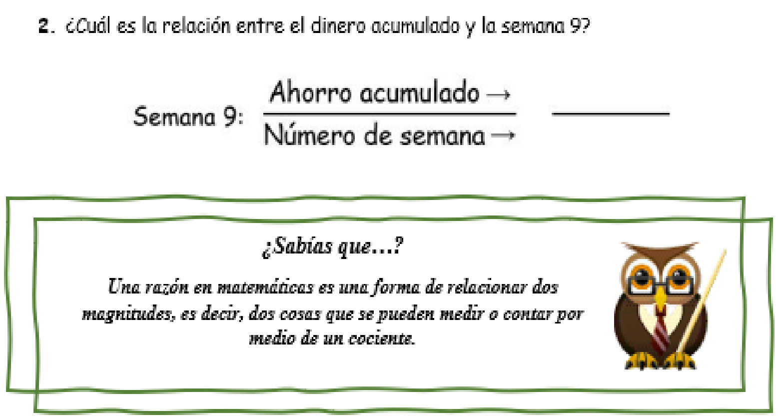
$$\frac{\text{Ahorro acumulado} \rightarrow}{\text{Número de semana} \rightarrow} \quad \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$\text{Semana 1:} \quad \frac{\text{Ahorro acumulado} \rightarrow}{\text{Número de semana} \rightarrow} \quad \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

La representación que se muestra en la Figura 13 pretende que los estudiantes visualicen la relación entre dos magnitudes diferentes (semanas y ahorro). En tanto, la tabla busca generar familiaridad con la estructura de la razón a partir de una nueva representación. Se espera que completen el registro, utilizando la información obtenida en el momento 1, el ahorro acumulado en ciertas semanas y además que identifique la relación entre el ahorro acumulado y el número de semanas, permitiéndole notar que el acumulado en la semana 3 corresponde a 3 semanas trascurridas. A su vez, se incentiva la práctica de seriación al validar el cambio constante desde procedimientos reiterados. Por otro lado, la pregunta 1 presenta directamente la razón como un registro simbólico.

Figura 14

Momento 2- Formalización del concepto de razón.



La pregunta 2 (ver Figura 14), conduce al estudiante a vincular dos magnitudes cuyos estados es posible verlos de manera explícita en el registro tabular anterior. Se espera, además, que logre identificar intuitivamente el concepto de razón, situándose así en un primer acercamiento al tratamiento específico del objeto matemático. De igual manera, se introduce de manera formal la definición de razón, con el propósito de otorgar un nombre matemático a lo que previamente había sido reconocido de manera intuitiva.

Ahora, las preguntas 3 a 7 en las Figuras 15 y 16 están orientadas a consolidar la construcción de la razón y a dar los primeros pasos hacia el concepto de proporcionalidad, al transitar de un razonamiento intuitivo hacia una contextualización más formal.

En la pregunta 3, el estudiante asigna un nombre formal a la relación identificada en las preguntas anteriores, al comparar dos estados de diferentes magnitudes. De este modo, construye y reconoce explícitamente la razón como una relación entre el ahorro acumulado y las semanas. Asimismo, con la pregunta 4 se pretende que el estudiante identifique las características o patrones presentes en la pregunta 3, como lo es el factor 3 existente entre la semana 5 y la semana 15, lo que también responde a la práctica de comparación desde la caracterización cualitativa o cuantitativa del cambio constante.

Con el quinto enunciado se busca formalizar la razón al encontrar la constante de crecimiento del ahorro acumulado, de igual manera, se incita a desarrollar la práctica de seriación y predicción, pues al ser datos no tan cercanos se puede inferir que cada razón que se desee construir tendrá la misma constante, en este contexto la cuota semanal del ahorro.

Figura 15

Momento 2- Introducción a la proporción y la proporcionalidad.

3. Halle la razón del ahorro acumulado de la semana 5, la razón del ahorro acumulado de la semana 8 y la razón del ahorro acumulado de la semana 15.

Razón semana 5	Razón semana 8	Razón semana 15
______	______	______

4. ¿Qué característica observas entre las razones?

____

____

¿Sabías que…?

Si es posible obtener una razón a partir de otra, se dice que las razones forman una proporción.

5. Calcula el cociente de las tres razones anteriores

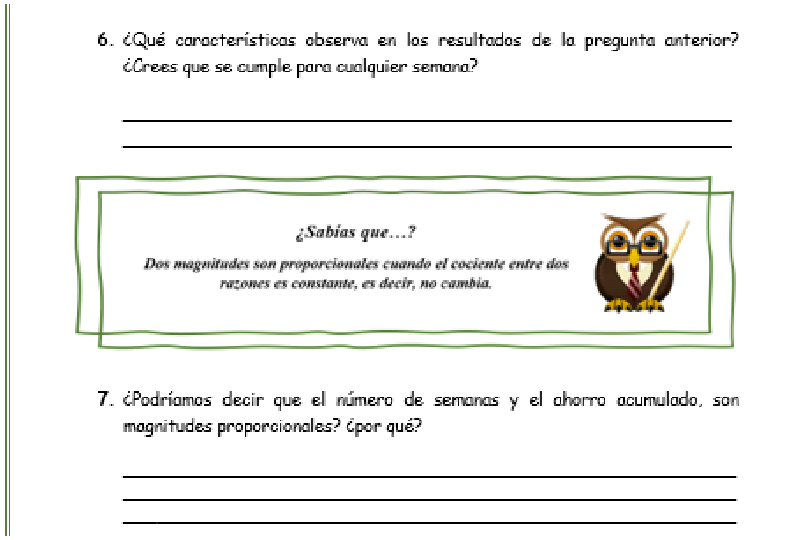
Cociente semana 5	Cociente semana 8	Cociente semana 15

En la pregunta 6 (ver Figura 16), se solicita justificar de manera cualitativa lo que se observa al realizar el cociente, dejando claro que este comportamiento se mantiene a lo largo de las semanas, dando cabida a la práctica de seriación. A su vez, la pregunta *¿Crees que se cumple para cualquier semana?* promueve la práctica de predicción pues, no hay algún cambio sustancial en los datos presentados, luego se puede garantizar que en cualquier dato alejado se obtenga la misma constante.

Ahora, con la pregunta 7 se pretende que el estudiante use lo que hasta el momento conoce (tablas, relaciones, procedimientos previos, entre otros.) junto con la definición formal de proporcionalidad para encontrar similitudes que le permitan justificar si las magnitudes son proporcionales o no.

Figura 16

Momento 2- Introducción a la proporción y la proporcionalidad.



6. ¿Qué características observa en los resultados de la pregunta anterior? ¿Crees que se cumple para cualquier semana?

____

____

¿Sabías que…?

Dos magnitudes son proporcionales cuando el cociente entre dos razones es constante, es decir, no cambia.

7. ¿Podríamos decir que el número de semanas y el ahorro acumulado, son magnitudes proporcionales? ¿por qué?

____

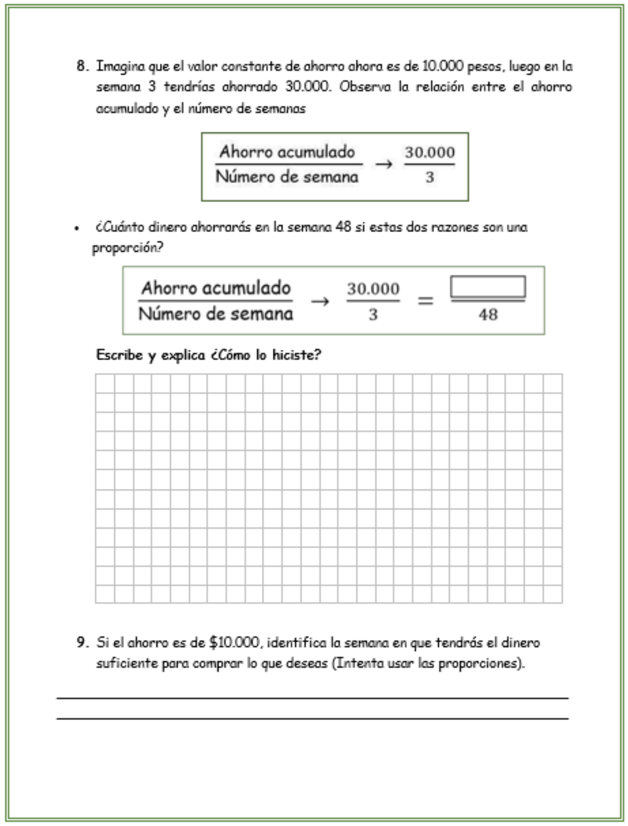
____

____

Ahora, en la Figura 17, las tareas 8 y 9 tienen como propósito profundizar en el uso formal de la proporción y en la aplicación de las relaciones proporcionales a situaciones concretas. En esas actividades, se espera que el estudiante movilice lo trabajado en las representaciones previas (tablas, razones y cocientes) para resolver problemas que implican proyectar valores en semanas alejadas o determinar el tiempo necesario para alcanzar una meta de ahorro. Con ello, se busca incentivar especialmente las prácticas de predicción y estimación, ya que el estudiante debe anticipar resultados a partir de patrones previamente identificados y al mismo tiempo contrastarlos con un modelo proporcional formal. De esta manera, estas preguntas permiten afianzar el concepto de proporcionalidad como una relación constante y coherente, a la vez que acercan al estudiante al uso más riguroso de la noción de proporción en el marco de las RPP.

Figura 17

Momento 2- Síntesis de la etapa procedimental.



8. Imagina que el valor constante de ahorro ahora es de 10.000 pesos, luego en la semana 3 tendrías ahorrado 30.000. Observa la relación entre el ahorro acumulado y el número de semanas

$$\frac{\text{Ahorro acumulado}}{\text{Número de semana}} \rightarrow \frac{30.000}{3}$$

- ¿Cuánto dinero ahorrarás en la semana 48 si estas dos razones son una proporción?

$$\frac{\text{Ahorro acumulado}}{\text{Número de semana}} \rightarrow \frac{30.000}{3} = \frac{\boxed{}}{48}$$

Escribe y explica ¿Cómo lo hiciste?

9. Si el ahorro es de $10.000, identifica la semana en que tendrás el dinero suficiente para comprar lo que deseas (Intenta usar las proporciones).

La tarea 8 tiene como propósito presentar una situación alterna donde el ahorro semanal está definido y a partir de ese dato y la relación con el monto acumulado y la noción de proporción, se espera que el estudiante encuentre el valor del ahorro en una semana aislada (48), desarrollando así, la práctica de la predicción, incluyendo la descripción y explicación de procedimientos para hacerlo según el comportamiento identificado en las preguntas iniciales.

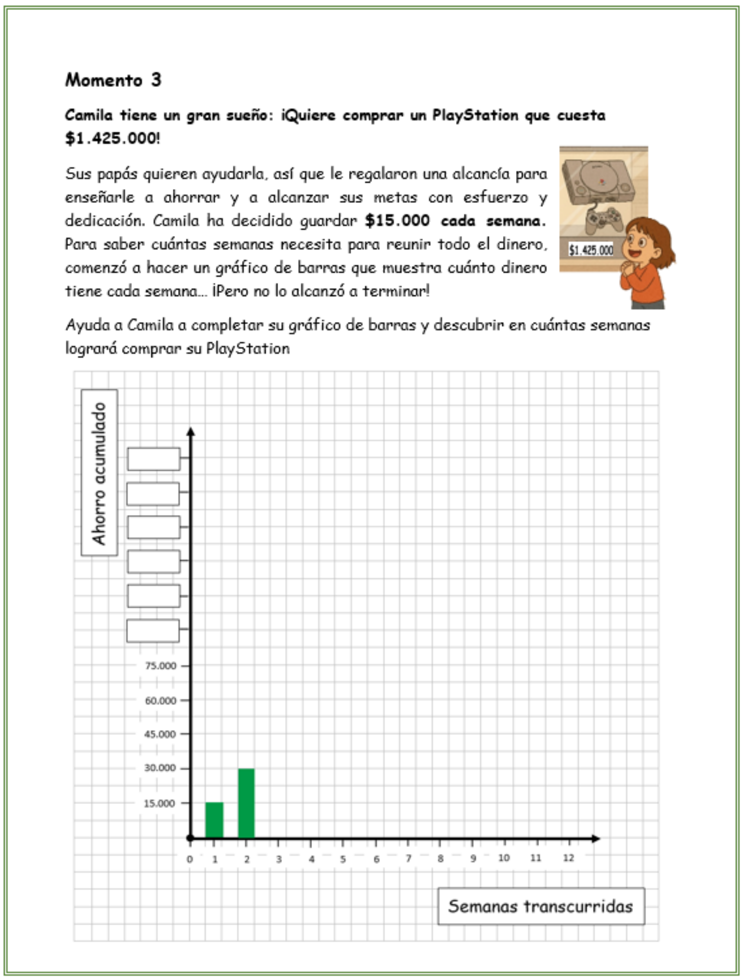
Con respecto a la pregunta 9, el objetivo es incentivar al estudiante a hacer uso de la representación formal de una proporción para hallar la semana en la cual se alcanzará el valor deseado, en tal caso el estudiante debe realizar una comparación entre el modelo o estrategia establecida según la relación de las variables y cómo se comporta respecto a un dato externo (meta), incentivando así la práctica de estimación.

5.1.3 Tercer momento

El tercer momento, incita a construir una nueva representación en la cual los estudiantes pueden visualizar la información que ya han trabajado con la tabla inicial, el cociente y la representación simbólica de la razón, por medio de la comparación de las barras en el gráfico, ver Figura 18.

Figura 18

Momento 3- Diferentes formas de representación.



En la Figura 19, la primera pregunta busca que los estudiantes usando la nueva representación (ver Figura 18) comparen la altura de las barras y describan de manera cualitativa lo observado, entonces la práctica que se promueve es la comparación. La pregunta 2, pretende encontrar el valor de la semana 13, con base en la caracterización de las barras construidas en los estados anteriores de forma consecutiva, incentivando así la práctica de seriación.

En cuanto a la tercera pregunta, se pretende que los estudiantes describan de manera cualitativa el comportamiento de la altura de las barras del gráfico, teniendo en cuenta la apreciación de cómo cambia una variable respecto a otra; de esta manera, el estudiante identifica el patrón creciente, dando lugar a la práctica de predicción.

Figura 19

Momento 3- Síntesis de la etapa simbólica.

1. Compara la altura de la barra de la semana 5 y la semana 6 ¿cómo son estas alturas?

2. ¿Cuál será la altura de la barra en la semana 13? Explica

3. ¿Cómo cambia la altura de las barras semana tras semana?

4. ¿Cuánto cambia el ahorro acumulado de la semana 11 con respecto a la semana 12?

5. ¿Cuánto cambia el ahorro acumulado de la semana 16 con respecto a la semana 15?

6. ¿Cuánto cambia el ahorro acumulado cada vez que aumentan las semanas?

7. Si pudieras dibujar la barra de la semana 30 ¿Hasta qué altura llegaría?

8. ¿Cuántas semanas han transcurrido para que el ahorro acumulado sea de $720.000?

9. ¿Lograste descubrir en qué semana Camila termina su ahorro? ¿Qué semana? ¿Cómo lo hiciste?

Las preguntas 4 y 5 pretenden que los estudiantes visualicen en el gráfico, barra tras barra y definan de manera cuantitativa el valor aumentado, incentivando la práctica de comparación. Ahora, en el sexto y séptimo enunciado, el objetivo es que los estudiantes perciban la relación y conexión entre las dos magnitudes involucradas en la situación y luego de haber identificado el aumento constante puedan inferir un dato aislado, promoviendo así la práctica de la predicción.

La pregunta 8 busca que los estudiantes realicen procedimientos inversos a lo que se ha trabajado anteriormente, cambiando el parámetro dado (tiempo) por el ahorro acumulado. Esta inversión en el planteamiento permite realizar cálculos aritméticos con los saberes previos y usarlos para identificar la variable independiente (tiempo) con relación a la variable dependiente (ahorro acumulado), con ello se moviliza la práctica de estimación.

Finalmente, la pregunta nueve busca que el estudiante integre y sintetice los procedimientos desarrollados en las preguntas anteriores, poniendo en juego tanto la observación cualitativa como la caracterización cuantitativa del incremento semanal y la identificación del patrón de crecimiento. Más que obtener un resultado numérico, la idea es explicar cómo se dedujo, evidenciando transferencia del aprendizaje y comprensión global del fenómeno de variación representado en el gráfico.

5.1.4 Cuarto momento

El momento 4 tiene como objetivo presentarle a los estudiantes una situación no proporcional con el fin usar lo aprendido acerca del comportamiento proporcional para argumentar y significar la nueva situación, ver Figura 20.

Figura 20

Momento 4- Situación no proporcional.

AYUDEMOS A VALENTINA CON SU AHORRO

Valentina quiere comprar una patineta que cuesta $250.000. Para lograrlo, sus abuelos le regalaron $40.000 como motivación para comenzar a ahorrar. Además, ella decidió guardar $15.000 cada semana en una alcancía.

1. ¿Cómo aumenta el ahorro a medida que pasan las semanas?

____

____

2. ¿Cuánto dinero se ha ahorrado en la semana 4, 10?

____

____

3. ¿Se podría decir que el número de semanas y el ahorro acumulado son magnitudes proporcionales? ¿Por qué?

____

____

____

4. ¿A qué se debe lo anterior?

____

____

____

5. ¿Es posible determinar la semana en la que se ahorra la meta? ¿Cómo lo harías?

____

____

La primera pregunta requiere que el estudiante realice una tabla o cálculos mentales para percibir el comportamiento de las variables y con ello, describir de manera cualitativa el cambio, así incentiva las prácticas de comparación y seriación. Luego, en la segunda pregunta se pretende que el estudiante dé una respuesta cuantitativa de dos semanas no tan lejanas (4 y 10) a partir de eventos previos, por tanto, se incentiva la práctica de seriación.

La pregunta 3 y 4, buscan confrontar los conocimientos construidos sobre las RPP con la nueva situación, en donde los estudiantes deberán justificar con sus palabras, si las magnitudes son proporcionales o no, significando magnitudes no proporcionales. Así, en la última pregunta al fomentar la predicción, se busca que el estudiante relacione el valor inicial para construir alguna estrategia general relacionando los datos que conoce con el procedimiento y lo aprendido para llegar a la meta.

5.2. Resultados obtenidos de la valoración por expertos

En este apartado se presenta la rúbrica diligenciada por el experto y sus observaciones.

5.2.1 Valoración

Figura 21

Valoración-Aspectos generales

	Criterio	**Valoración**					**Observaciones**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	
Aspectos generales	El lenguaje es apropiado para el nivel escolar.				x		Sugiero tener mayor cuidado con el lenguaje que se usa en función de la población objetivo. Los niños a esa edad probablemente no tengan algunas nociones que en el diseño se dan por sentadas.
	Existe claridad entre la instrucción y la actividad matemática esperada.					x	
	Existe una organización lógica y secuencial de las tareas en pro de la construcción progresiva del conocimiento.					x	
	Las tareas y actividades son suficientes, en cantidad y calidad para responder al objetivo del diseño.			x			Considero que falta más creatividad en proponer situaciones, para que no se saturen de preguntas las situaciones que plantean.

En el análisis del primer criterio de la rúbrica, el experto menciona la importancia de prestar especial atención al lenguaje empleado en el diseño, dado que algunos términos o nociones podrían resultar poco accesibles para los estudiantes, considerando su edad y nivel de desarrollo escolar.

Con el propósito de anticipar y mitigar este posible inconveniente, se dispuso el apartado 5.4 del presente documento, en el cual se presentan orientaciones, sugerencias, conceptos y ejemplos que constituyen una guía para el docente en una eventual implementación. Este apartado se concibe como una herramienta que facilita la mediación pedagógica, al brindar pautas que permiten ajustar el lenguaje, unificar conceptos, contextualizar las actividades y clarificar las consignas, garantizando así que la SA pueda ser desarrollada de manera adecuada y efectiva por los estudiantes, en coherencia con los objetivos propuestos en el diseño.

En relación con el último criterio de los aspectos generales, el experto sugiere que sería pertinente incorporar mayor creatividad en la formulación de situaciones, evitando la saturación de preguntas que podrían parecer similares para los estudiantes. Ante ello, es importante señalar que el diseño busca incentivar el desarrollo de las PV a través de preguntas tanto de carácter cualitativo como cuantitativo, pues no es posible identificar cómo piensa el estudiante únicamente a partir de una representación estática. Por esta razón, se incluyen diversas preguntas abiertas en las que, a partir de una ligera variación en la formulación como, por ejemplo, *¿cuánto cambia?* o *¿cómo cambia?* se pueden obtener respuestas distintas que permiten al docente interpretar con mayor precisión los razonamientos empleados por los estudiantes. En este sentido, la reiteración no constituye una redundancia innecesaria, sino una estrategia intencional para explorar la diversidad de formas de pensamiento y garantizar que las actividades respondan al objetivo del diseño que es promover el desarrollo de las PV para abordar las RPP desde la perspectiva variacional.

Figura 22

Valoración- Etapas de la SA.

	Criterio	Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
Etapas de la SA	<u>Sobre el contexto:</u> Verificar si la SA parte de un escenario cercano (el ahorro) que resulta significativo y comprensible para el estudiante.						Si bien, el ahorro es algo en lo que se debe exhortar a los niños, considero debe hacerse con más tacto, en función de la idea no elaborada que ellos tienen del dinero. Los niños tienen cierto límite de dinero, que ya no conciben, y todo lo que pase de allí lo consideran como "mucho dinero".
	<u>Factual:</u> Revisar si las preguntas iniciales permiten reconocer magnitudes involucradas (dinero recibido, dinero destinado al ahorro, tiempo) y establecer relaciones básicas, logrando que el estudiante se familiarice y se sitúe en la problemática.					x	
	<u>Procedimental:</u> Analizar si las actividades propuestas conducen a que el estudiante formule estrategias de cálculo y comparaciones, para identificar regularidades entre cantidades y con ello construir argumentos que explique los resultados obtenidos a lo largo del proceso.			x			En este aspecto se deben idear distintas formas de cálculo (leer Mochón (2012)), para no caer en la algoritmia tradicional, que es lo se espera superar.
	<u>Simbólica:</u> Verificar si se promueve el cambio de representaciones, que ayudan a consolidar relaciones proporcionales, permitiendo comparar comportamientos y generalizar conclusiones sobre un fenómeno.				x		Considero que el uso de tablas es más conveniente para que el estudiante transite entre representaciones, que los gráficos de barras.

En relación con la observación que sugiere la necesidad de idear distintas formas de cálculo para evitar caer en la algoritmia tradicional, es importante precisar que el diseño de la SA no se limita a la aplicación mecánica de procedimientos, sino que orienta al estudiante hacia un razonamiento variacional mediante la utilización de preguntas abiertas, representaciones tabulares, registros simbólicos y gráficas que enriquecen el abordaje de las RPP. Para determinar las constantes, la SA favorece implícitamente diversas estrategias de calculo que van más allá del algoritmo convencional, el estudiante puede restar valores del ahorro acumulado de semanas consecutivas, hallar el cociente de la razón entre el ahorro acumulado de cierta semana y el número de semanas transcurridas o bien recurrir a comparaciones visuales en el gráfico para estimar el crecimiento constante. Estas posibilidades permiten que los estudiantes no solo calculen, sino que reconozcan patrones, comparen magnitudes, organicen secuencias y realicen predicciones fundamentadas en los comportamientos observados.

Lo anterior se articula con lo definido desde las PV. En esta línea, se coincide con autores como Mochón (2012), quien resalta la importancia de la comparación y variación en el desarrollo del razonamiento proporcional; sin embargo, este autor no explicita cómo abordar la variación. En el caso de esta investigación, al promover la comparación, seriación, predicción y estimación se incorporan formas dinámicas para establecer la proporcionalidad como una relación de variación constante. De este modo, se generan oportunidades para que los estudiantes justifiquen sus respuestas y contrasten diferentes estrategias, lo cual amplía las posibilidades de análisis y comprensión más allá de la ejecución algorítmica.

En el análisis del criterio correspondiente a la etapa simbólica, es necesario resaltar que el diseño de la SA fue concebido de manera progresiva: hasta el momento 2, se orienta al estudiante a trabajar con tablas, realizar cálculos y relacionar magnitudes a través de representaciones tabulares y aritméticas; mientras que en el momento 3, propio de la etapa simbólica, se busca que el estudiante establezca nuevas formas de representación que consoliden el pensamiento proporcional y, a partir de ello, pueda facilitar la generalización. En este sentido, la propuesta invita a construir y emplear representaciones tabulares, gráficas y aritméticas de las RPP en el marco de una nueva situación de ahorro, de tal forma que se incentiven las cuatro prácticas variacionales como base para la construcción de argumentos variacionales más sólidos.

Ahora bien, frente a lo planteado por el experto, quien reconoce que las tablas son un recurso fundamental para que el estudiante transite entre representaciones, es pertinente precisar que el propósito central de esta etapa no es insistir en un registro ya trabajado, sino proponer una nueva forma de representación: el gráfico de barras. Este recurso gráfico se incorpora con el fin de ampliar la mirada del estudiante sobre la proporcionalidad, promover la comparación visual de magnitudes y favorecer el reconocimiento de patrones en el crecimiento del ahorro. En el pilotaje realizado se logró identificar cómo algunos participantes, al observar las barras, expresaban frases como “ah, pues solo es la barra anterior y dos cuadritos más” lo cual evidencia un acercamiento intuitivo a la noción de variación constante. De manera implícita, con estos argumentos, reconocieron que “dos cuadritos más” correspondían al ahorro constante o ahorro semanal, mostrando que el grafico facilita la construcción de significados más allá de lo numérico y potencia la compresión visual de la proporcionalidad. De este modo, el diseño no se limita al uso reiterado de tablas, sino que potencia la transición hacia una representación distinta que, articulada con lo aprendido en los momentos anteriores, fortalece la capacidad de generalización y afianza el desarrollo del pensamiento variacional.

Ahora, con el propósito de reforzar lo hasta ahora trabajado con situaciones proporcionales, se consideró pertinente adicionar una tarea que permitiera a los estudiantes deducir el ahorro semanal a partir de registros tabulares, pues en la valoración realizada se identificó la necesidad de fortalecer el tránsito entre los cálculos aritméticos y la interpretación conceptual de la proporcionalidad. La relevancia de esta pregunta se potencia porque los datos presentados en la tabla corresponden a semanas no consecutivas ni múltiplos entre sí (por ejemplo, 3, 5, 8, 11), lo cual evita que los estudiantes recurran a procedimientos mecánicos basados únicamente en patrones simples. Esto exige que identifiquen la regularidad de la variación y razonen sobre la relación estable entre el ahorro acumulado y el tiempo, integrando diferentes estrategias de resolución. Así, este reajuste responde a la necesidad de consolidar la conexión entre los procedimientos aritméticos, las representaciones tabulares y la comprensión formal de las RPP, aspecto que se detalla en el apartado 5.3.

Figura 23

Valoración- Sobre el objeto matemático.

	Criterio	Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
Sobre el objeto matemático	Razón: Identificar si el diseño presenta preguntas o actividades que permitan comparar dos magnitudes (parte-todo o parte-parte), favoreciendo que los estudiantes encuentren relaciones entre ellas más allá de lo numérico.						No estoy seguro, si, cuando se trabaja la razón unido a la proporción, se debe enfocar en estas nociones de parte-parte, o parte-todo. No deben dar por sentado, la diferencia entre razón y fracción.
	Proporción: Verificar si se promueven equivalencias entre razones, de forma que el estudiante reconozca que diferentes pares de valores pueden o no mantener una misma relación.					x	
	Proporcionalidad: Analizar si las tareas llevan a reconocer la existencia de una relación de cambio constante entre magnitudes, permitiendo trascender el cálculo algorítmico hacia una perspectiva variacional del concepto.					x	

Figura 24

Valoración- Desarrollo de la PV.

	Criterio	Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
Desarrollo de las PV	<u>Comparación:</u> Revisar si las actividades orientan a los estudiantes a comparar estados distintos de una magnitud (ej. dinero ahorrado en distintos momentos) o entre magnitudes diferentes, distinguiendo claramente qué cambia y cómo cambia.					x	
	<u>Seriación:</u> Determinar si se fomenta la organización y análisis de secuencias de datos (ej. ahorro semana a semana), lo cual permite reconocer regularidades en el comportamiento de cantidades.					x	
	<u>Predicción:</u> Identificar si se incentiva a los estudiantes a anticipar valores futuros o pasados en función de la relación proporcional (ej. cuánto se ahorrará en cierto número de semanas), aplicando estrategias de cálculo o de razonamientos.					x	Aunque sí se funge bien el objeto matemático, tener cuidado con las situaciones hipotéticas que se le plantean a los niños.
	<u>Estimación:</u> Constatar si se promueve la anticipación de tendencias globales o comportamientos aproximados de la variación (ej. cuánto podría acumularse en varios meses), aun sin cálculos exactos, con el fin de consolidar el fenómeno en cuestión						

5.3. Ajustes al diseño

En este apartado se describen los ajustes realizados en concordancia con la valoración dada por expertos.

5.3.1 Etapas de la SA

La observación realizada por el experto en el criterio de contexto acerca de la dificultad que enfrentan los estudiantes de quinto grado al trabajar con cantidades grandes encuentra sustento en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional. Dicho documento señala que, en la actualidad, el uso de calculadoras y computadores permite representar números hasta un límite entre ocho y doce dígitos, dependiendo del aparato, lo cual implica que los niños deben tener la oportunidad de comprender estas magnitudes a partir de experiencias significativas que les permitan construir sus propios significados (MEN, 1998, p. 28). En este sentido, abordar el tema del ahorro con cifras elevadas no constituye un desajuste frente al nivel escolar, sino una oportunidad pedagógica para fortalecer la noción de valor posicional y brindar a los estudiantes experiencias que los lleven a trascender el manejo de cantidades pequeñas hacia una comprensión más amplia y abstracta del número y sus aplicaciones en contextos cercanos. Sin embargo, dado que no se está exento de que puedan surgir dificultades en la interpretación de números de millones, se ha incluido en el apartado 5.4.3 una sugerencia dirigida al docente que funciona como refuerzo a los saberes previos, en particular al valor posicional.

Ahora, en el rediseño se incorporó una nueva tarea para el tercer momento de la SA (ver Figura 25), orientada a que los estudiantes identifiquen el ahorro semanal de los padres de Camila a partir de la información consignada en una tabla. El objetivo es que reconozcan la relación constante entre el ahorro acumulado y el número de semanas, lo que permite afianzar la comprensión de la proporcionalidad directa. Un aspecto relevante es que los datos consignados en la tabla corresponden a semanas aisladas (3, 5, 8, 11, entre otras) y no a múltiplos consecutivos, lo que incrementa el nivel de exigencia cognitiva, pues obliga al estudiante a razonar sobre la regularidad del cambio y no únicamente a operar sobre valores inmediatos. Desde las PV, esta actividad promueve la comparación, al analizar qué cambia y cómo cambia entre el dinero ahorrado y el tiempo y la seriación, al establecer la igualdad entre correspondencias de distintos estados en la tabla y observar la regularidad de la variación En términos de RPP la pregunta refuerza la identificación de la razón constante, la construcción de proporciones y la validación de la proporcionalidad como un modelo de cambio estable entre magnitudes, superando el simple cálculo para dar lugar a la argumentación variacional.

Figura 25

Razón a partir del registro tabular.

10. Los papás de Camila, motivados por su idea de ahorrar, también decidieron iniciar un ahorro propio. Sin embargo, no recuerdan cuánto fue el monto que destinaron semanalmente, por lo que registraron lo que recordaban en la siguiente tabla:

Ahorro acumulado	75.000	125.000	200.000	275.000	325.000	500.000
Número de semanas	3	5	8	11	13	20

Ayuda a los papás de Camila a recordar cuánto ahorraron cada semana.

Escribe y explica ¿Cómo lo hiciste?

- El ahorro semanal de los papás de Camila fue: ____________________

5.4. Orientaciones para la implementación

En este apartado se presentan algunas orientaciones para los docentes al momento de implementar la SA en el aula. No se establece estrictamente necesario seguirlas al pie de la letra ni usar exactamente los ejemplos propuestos, a razón de que la práctica de instrucción puede ser modificada según las necesidades y características de su grupo. Las sugerencias se plantean como apoyo para enriquecer la práctica pedagógica.

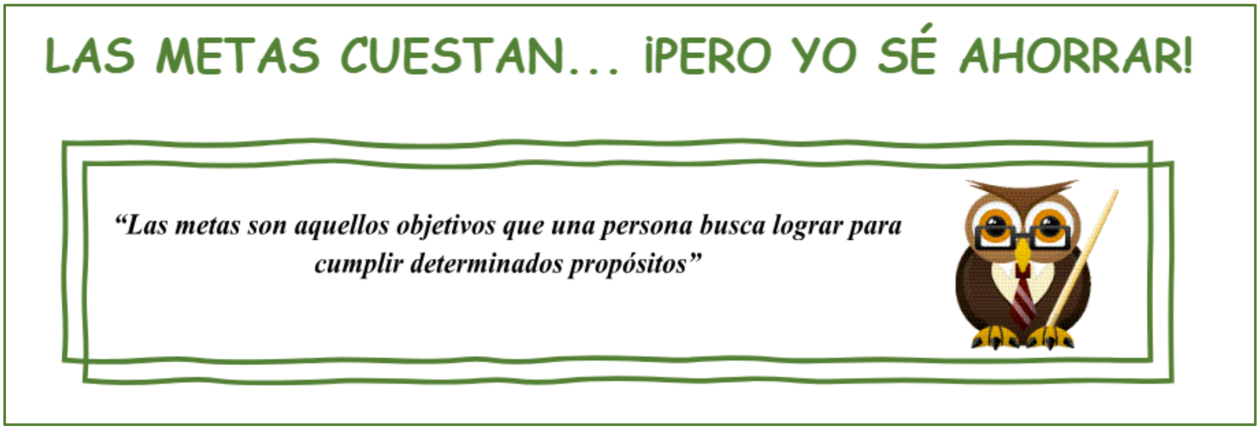
5.4.1 Momento 1

Para este momento es fundamental la interacción con los estudiantes, para la interpretación conjunta de los nuevos conceptos inmersos en el contexto de la SA.

Por ejemplo, en la consigna inicial (ver Figura 26) se sugiere indagar sobre las concepciones que los estudiantes tengan respecto a qué es una meta. Para ello, tener en cuenta que, “tener metas” significa proponerse cosas que se quieren lograr, como: aprender algo nuevo, comprar un juguete o salir de paseo. Para cumplir esas metas es necesario planificar y en algunas ocasiones ahorrar dinero u organizar lo que se tiene. Y así, se entiende que cada persona puede tener distintas metas.

Figura 26

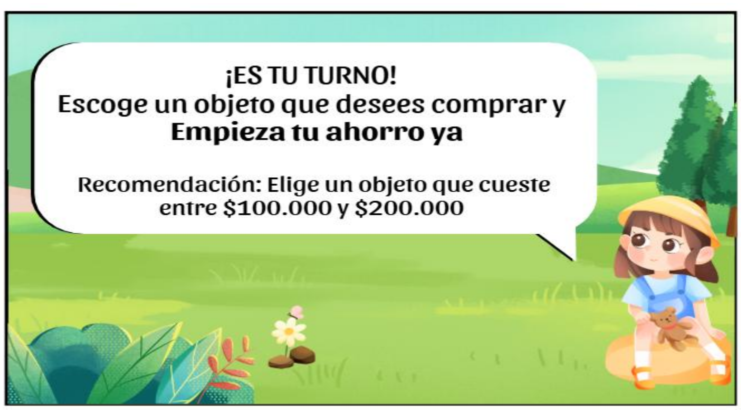
Momento 1- Primera definición.



Luego, con la ayuda de la historieta, se sugiere incentivar la discusión sobre lo que se entiende por "ahorro" y a compartir ejemplos de su vida. Después de escuchar sus ideas, lo ideal es sintetizar entre todos un concepto sencillo de "ahorro", escrito con sus propias palabras. Una vez se socialice y se llegue a un acuerdo sobre qué significa ahorrar, se presenta la siguiente imagen para continuar con la actividad, ver Figura 27.

Figura 27

Momento 1- Recomendaciones en el diseño.



Allí, se sugiere conversar sobre: imagina que quieres comprar algo que te gusta mucho, ya sea un juguete, un libro, un videojuego, una bicicleta, un dispositivo electrónico… En fin, tú eliges; pero, no tienes el dinero suficiente para adquirirlo y tus papás no te lo darán. Entonces, vamos a elegir dos o más objetos que estén dentro del rango del valor.

En la pregunta 7, se sugiere incentivar a los estudiantes a completar la tabla en sus cuadernos o en una hoja aparte hasta terminar su ahorro y explicar que, el ahorro semanal es el valor que ya calcularon en las preguntas anteriores, y que el ahorro acumulado se obtiene sumando el ahorro de esa semana con el acumulado de la semana anterior. Por ejemplo: Si la semana pasada tenía $20.000 y esta semana ahorran $5.000 más, el ahorro acumulado será $25.000.

Luego, en preguntas como la 9, se deben dejar claros los conceptos de aumento y disminución sobre la relación entre magnitudes. En ese sentido, el aumento ocurre cuando algo crece o se suma, como cuando se le agrega a un vaso con agua más agua o cuando cada semana agregamos más dinero al ahorro. La disminución sucede cuando algo se reduce o se resta, por ejemplo, si sacamos agua de un tanque o si usamos parte de nuestro ahorro para comprar algo. Estos conceptos pueden explicarse con ejemplos cotidianos y representarse en la tabla o en dibujos para una mejor comprensión.

5.4.2 Momento 2

En este momento es fundamental dar explicaciones claras sobre los objetos matemáticos involucrados y algunas palabras técnicas que puedan generar duda. Antes de ello, es importante permitir que los estudiantes exploren y lean la SA por sí mismos, de modo que puedan formular preguntas y conectar sus ideas previas con las explicaciones posteriores.

Se sugiere usar palabras sencillas y accesibles para una mejor comprensión por parte de los estudiantes. Tener en cuenta los siguientes conceptos y ejemplos

- **Magnitud:** Una magnitud es cualquier propiedad o característica de un objeto que se puede medir y expresar numéricamente (Santillana, 2014).
    - **Ejemplo 1:** La altura de una persona es una magnitud porque se puede medir en centímetros o metros.
    - **Ejemplo 2:** La cantidad de caramelos en un frasco también es una magnitud porque se puede contar.
- **Razón:** Se encuentra en la SA. Sin embargo, es posible complementar indicando que una razón se puede escribir de dos formas $\frac{1}{4}$ y 1:4.
    - **Ejemplo:** Si en un salón de clases hay 24 niñas y 18 niños, entonces lo representamos como: $\frac{24}{18}$, esta expresión la podemos simplificar y obtener $\frac{4}{3}$ y de esta forma se lee que existe una razón de 4 a 3 o de 4 por cada 3, es decir, una relación de 4 niñas por 3 niños.
- **Cociente:** Un cociente es el resultado de una división (Santillana, 2014).
    - **Ejemplo 1:** Si se tiene $\frac{12}{3}$, el cociente es 4.
    - **Ejemplo 2:** Si se tienen $\frac{2550}{5}$, el cociente es 510.
- **Proporción:** Se encuentra en la SA
    - **Ejemplo:** Para preparar jugo se necesitan 2 vasos de agua por 1 vaso de jugo concentrado

      -Si usas 2 vasos de agua – 1 vasos de jugo

      - Si usas 4 vasos de agua – 2 vasos de jugo

      La proporción es 2:1=4:2

- **Proporcionalidad:** Se encuentra en la SA
  - **Ejemplo 1:** Si caminas al mismo paso, en una hora recorres *3 km*, en 2 horas recorres *6 km* y en 3 horas *9 km*. La distancia es proporcional al tiempo.
  - **Ejemplo 2:** Si cada cuaderno cuesta $2.000, entonces 1 cuaderno vale $2.000, 2 cuadernos $4.000 y 5 cuadernos $10.000 ¿Cuánto valen 6 cuadernos?

5.4.3 Momento 3

En este momento, es necesario que los estudiantes cuenten con conocimientos previos sobre el plano cartesiano y los gráficos de barras para poder llevar a cabo la actividad. Se espera que apliquen herramientas ya trabajadas, como representaciones o cálculos, de manera que logren razonar a partir de lo aprendido y fortalezcan la conexión entre sus saberes previos y la nueva situación. Asimismo, resulta fundamental que el docente recalque la importancia del valor posicional, ya que en esta situación se trabajan números que alcanzan valores de millones y, como lo señaló el experto, esto puede generar confusión en los estudiantes al no estar familiarizados con magnitudes tan grandes. Destacar el valor de cada cifra según su posición permitirá que los estudiantes comprendan mejor la magnitud de los números y les otorguen un sentido más preciso dentro del contexto del ahorro, evitando interpretaciones erróneas y consolidando una base sólida para el análisis de la información representada.

5.4.4 Momento 4

En este momento es fundamental que los estudiantes razonen y apliquen lo aprendido en los momentos anteriores. Para apoyarlos, es importante recordar algunas palabras técnicas explicadas anteriormente, como magnitudes, aumentar y proporcionalidad.

6. Conclusiones

En el marco de esta investigación, cuyo objetivo fue diseñar y valorar una situación de aprendizaje que promueve el desarrollo de prácticas variacionales y la modelación para abordar las RPP en estudiantes de quinto grado, y cuya pregunta central se formuló en torno a cómo hacerlo posible, las conclusiones que se presentan a continuación constituyen una síntesis del proceso llevado a cabo y de los resultados obtenidos. Estas conclusiones recogen los aportes más relevantes derivados del diseño elaborado y de su valoración por parte del experto mediante una rúbrica, lo que permitió contrastar lo esperado a priori con los criterios de calidad y pertinencia establecidos para una SA. De esta manera, se ofrece un balance que evidencia el potencial de la SA para favorecer el tránsito desde un enfoque algorítmico hacia un pensamiento variacional, así como las proyecciones que este trabajo deja abiertas para futuras investigaciones en educación matemática.

El proceso de diseño y valoración de la situación de aprendizaje permitió comprobar que las RPP pueden ser abordadas desde el pensamiento variacional, más allá de un tratamiento meramente algorítmico y numérico. En efecto, la inclusión progresiva de prácticas como la comparación, la seriación, la predicción y la estimación, sustentadas en los planteamientos de Caballero (2018) y Arciniegas (2022), posibilitó que la SA se orientara hacia la identificación de regularidades y el análisis del cambio en distintos estados de un mismo fenómeno. Esto se reflejó en la secuencia de actividades que partió de preguntas iniciales vinculadas al contexto del ahorro, avanzó hacia la construcción de tablas y cálculos proporcionales, y culminó en representaciones gráficas y simbólicas que demandaban generalizaciones. Dicho tránsito evidenció, que el diseño no se limitó a la aplicación de algoritmos, sino que abrió la puerta a un razonamiento más amplio y variacional, tal como se proponía en el objetivo de investigación.

De manera complementaria, los resultados de la valoración permiten afirmar que el diseño contribuye a favorecer la comprensión de las RPP, gracias a la integración de diversos registros de representación y al uso de preguntas abiertas de carácter cualitativo y cuantitativo. La SA propuso que los estudiantes trabajaran inicialmente con tablas que mostraban el crecimiento del ahorro, para luego interpretar gráficas de barras y finalmente razonar mediante expresiones aritméticas y simbólicas. Este tránsito por distintos registros, facilitó la posibilidad de que los estudiantes construyan conexiones entre lo cotidiano (el ahorro) y lo matemático, otorgando sentido a los procedimientos y fortaleciendo la capacidad de generalización. Así, se confirma que el diseño responde a lo planteado en la pregunta de investigación, al promover un abordaje de las RPP mediante PV y modelación que trascienden el tratamiento tradicional de las mismas.

Asimismo, la investigación mostró ventajas significativas de incorporar el pensamiento variacional como eje estructurante del diseño, en contraste con enfoques exclusivamente numéricos. Una de las principales ventajas radica en que se ofrecieron oportunidades para que el estudiante construyera argumentos matemáticos fundamentados en la identificación de patrones y en la explicación del cambio, más que en la mera aplicación mecánica de algoritmos. El experto valoró positivamente el énfasis en actividades que promovían la organización de secuencias, la comparación de magnitudes y la anticipación de estados futuros, lo que evidencia que el diseño propició la construcción de significados más duraderos y la formación de bases conceptuales para abordar posteriormente objetos matemáticos de mayor complejidad, como las funciones o el cálculo. De este modo, se valida que el pensamiento variacional no solo favorece la comprensión de las RPP, sino que también contribuye al desarrollo progresivo del razonamiento matemático en su sentido más amplio.

De manera particular, el uso del contexto financiero del ahorro como base para la modelación resultó fundamental en el estudio de la variación y el cambio. A través de los diferentes momentos del diseño se buscó que los estudiantes significaran la constante de proporcionalidad como el monto fijo de ahorro semanal o mensual, comprendiendo que este permanecía estable en cada periodo y que, en interacción con el tiempo, daba lugar a una variación de carácter lineal. En el primer momento, se buscó que los estudiantes se aproximaran al fenómeno identificando comparaciones iniciales entre el dinero ahorrado y el tiempo, estableciendo conexiones entre magnitudes y reconociendo de manera intuitiva la existencia de un cambio constante. En el segundo momento, se profundizó en el uso de tablas y cálculos que permitían visualizar con mayor claridad la relación entre el ahorro acumulado y las semanas transcurridas, favoreciendo la seriación y la predicción de valores futuros. Finalmente, en el tercer momento, se promovió la consolidación del pensamiento proporcional a través de nuevas representaciones, como los gráficos de barras con el fin de generalizar el comportamiento observado en las magnitudes.

De este modo, la modelación de situaciones cercanas y significativas permitió articular las prácticas variacionales en las distintas preguntas del diseño, favoreciendo la construcción de argumentos sobre el comportamiento del ahorro y potenciando el razonamiento proporcional desde la perspectiva de la variación. Además, incorporar este tipo de contextos en la enseñanza de las matemáticas aporta a la formación integral de los estudiantes, en la medida en que les brinda herramientas para interpretar fenómenos financieros cotidianos y tomar decisiones informadas en relación con el manejo de sus propios recursos,

Finalmente, los hallazgos alcanzados abren perspectivas para futuras investigaciones, en tanto el presente trabajo se centró en el diseño y valoración de la situación de aprendizaje, pero no en su implementación directa con estudiantes. Será necesario llevar a cabo estudios empíricos que permitan observar cómo los niños de quinto grado movilizan las PV propuestas en la SA y qué dificultades emergen en la transición entre diferentes registros de representación. Además, se recomienda indagar cómo el uso de contextos significativos, como el ahorro, puede articularse con otros recursos pedagógicos, tales como tecnologías digitales o materiales manipulativos, que potencien el desarrollo de la proporcionalidad desde una perspectiva inclusiva. En este sentido, el diseño constituye un punto de partida valioso, pues valida la pertinencia de las prácticas variacionales y la modelación en el abordaje de las RPP, pero también invita a continuar explorando nuevas estrategias que consoliden una enseñanza de las matemáticas más significativa, contextualizada y profunda.

Bibliografía

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? *Revista Iberoamericana de Educación, 43,* 85-101

Arciniegas, H. (2022). *Aula inclusiva de matemáticas. Un estudio de situaciones de variación y cambio* [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio institucional UIS. https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/12622

Arrieta, J., y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18*(1), 19-48.

Bassanezi, R. C. (2007). *Enseñanza y aprendizaje con modelación matemática* (J. Acevedo, trad.). Brasil: R. C. Bassanezi.

Block Sevilla, D. (2021). "Los saltos de las ranas". Estudio de una secuencia didáctica de proporcionalidad, con problemas de comparación de razones, en quinto grado de primaria. *Educación Matemática, 33*(2), 115-134.

Blum, W., y Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? The example "Sugarloaf". In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Woodhead Publishing.

Burgos, M., y Godino, J. D. (2019). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. *Bolema, 33*(63), 389-410.

Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del IPN].

Caballero, M., y Moreno, G. (2017). *Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.* En Serna, L. (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 1066-1074.

Camargo, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y análisis.* Editorial Universidad de Antioquia y Universidad Pedagógica Nacional.

Cantoral, R., Caballero-Pérez, M. A. y Moreno, G.A. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM: The international journal on Mathematics Education, 50*(1), 203-215. https://www.researchgate.net/publication/323544955

Dooren, W.V., Bock, D., Vleugels, K., & Verschaffel, L. (2011). Word Problem Classification: A Promising Modelling Task at the Elementary Level. *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, Springer, 1* (ICTMA 14), 47-56. DOI 10.1007/978-94-007-0910-2_6

Grande, X. (2014). Los caminos del saber. Santillana

Greer, B., Verschaffel, L., & Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: Mathematics and children's experience. *Modelling and Applications in Mathematics Education, Springer*, *10* (14° ICMI study), 89-98. Archivo de Materiales Extras.

Guacaneme, E. A. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas* (Tesis doctoral, Universidad del Valle).

Guerrero, C., y Mena, J. (2015). Aprendizaje de la modelación matemática en secundaria: ¿qué tan lejos hemos llegado? *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática*, *14*(2), 100-123.

Lajusticia, A.F. y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la RSME, 5*(2), 397-416.

León, R. M., Alexander, R. y Alberto, E. (2017, junio). *Perspectivas teóricas de la razón, la proporción y la proporcionalidad como relaciones de comparación*. En II Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe.

Lobato, J., Ellis, A., y Zbiek, R. M. (2010). *Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions, and Proportional Reasoning for Teaching mathematics: Grades 6-8*. National Council of Teachers of Mathematics.

López, J. y Flores, A. (2021). Modelación matemática en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa,25, 653-660.*

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares del área de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Mendoza, E. J., Morales-Reyes, J., Giacoleti-Castillo, C., y Cordero, F. (2022). Categories of Modelling and Reproduction of Behaviors in Other Disciplines: Teaching Mathematics in Engineering. *Mathematical Modelling Programs in Latin America: A collaborative context for social construction of knowledge for educational change, Springer,* 291-317. https://doi.org/10.1007/978-3-031-04271-3

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática, 24*(1), 133-157. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525850006

Obando, G. (2015). *Sistemas de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica* [Tesis de Doctorado interinstitucional en Educación, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle].

Obando, G., vasco, C. y Arboleda, L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 17*(1), 59-81.

Ocampo-Arenas, M. C., y Parra-Zapata, M. M. (2022). Una experiencia de modelación matemática en educación primaria en un contexto de Educación Ambiental. *Uni-Pluriversidad, 22(1), 1-16. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri. 348824*

Reina, A. L. (2018). *Diseño de actividades con el uso de la modelación matemática para apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje de razón y proporción en quinto de primaria*. Universidad Antonio Nariño.

Rey, J. (2022). *Estudio del razonamiento proporcional en educación primaria: un acercamiento histórico-epistemológico para favorecer la inclusión* [Trabajo de grado, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio institucional UIS. https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/12111

Reyes-Gasperini, D. (2013). *La transversalidad de la proporcionalidad.* Subsecretaría de Educación Media Superior. Secretaría de Educación Pública.

Reyes-Gasperini, D., Montiel-Espinosa, G., y Cantoral, R. (2014). "Cuando una crece, la otra decrece": ¿Proporcionalidad inversa o directa? *Premisa, 16*(62), 13-15.

Sampieri, R.H., Collado, C. F., y Lucio, P. B. (2014). *Metodología de la investigación.* (6ta edición). McGraw-Hill

Silva, R., Costa, C., & Martins, F. (2021). Using mathematical modelling and virtual manipulatives to teach elementary mathematics. *Technology and innovation in learning, teaching and education,* Springer, second international conference (December 2-4, 2020), 75-89. https://doi.org/10.1007/978-3-030-73988-1

Suárez, L., & Cordero, F. (2010). Modelación–graficación, una categoría para la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4-II), 319-333.

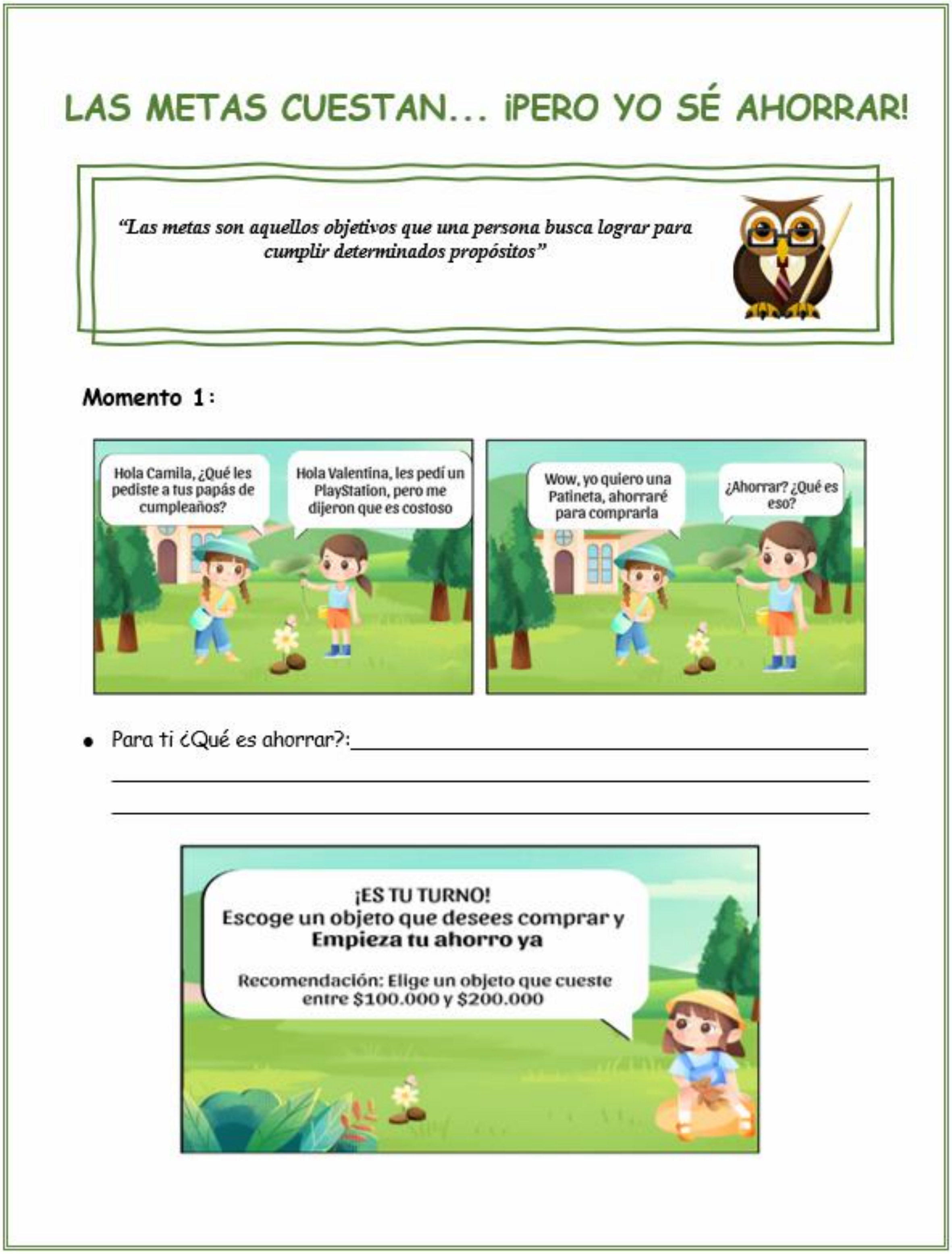
Vergnaud, G. (1983). *Multiplicative structures.* In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes (pp. 127-174). Academic Press.

Villa-Ochoa, J. A., Castrillón-Yepes, A., y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. *Espaço Plural*, *18*(36), 219-251

Villa-Ochoa, J., Sánchez-Cardona, J. y Parra-Zapata, M. (2022). Modelación matemática en la perspectiva de la educación matemática. *Educación matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 67-89). Universidad Nacional de General Sarmiento.

Anexos

Anexo 1. *Situación de aprendizaje versión estudiante.*



LAS METAS CUESTAN... ¡PERO YO SÉ AHORRAR!

"Las metas son aquellos objetivos que una persona busca lograr para cumplir determinados propósitos"

Momento 1:

- Para ti ¿Qué es ahorrar?:____

____

____

1. ¿Qué te gustaría comprar? ¿Por qué?

____
____
____

2. ¿Cuánto cuesta lo que deseas comprar? (Puedes investigar con ayuda de un adulto o imaginar el precio)

____

3. ¿Cuánto dinero recibes diariamente o te gustaría recibir?

____
____

4. ¿Qué parte de ese dinero estaría destinado al ahorro?

____
____

5. ¿Cuánto dinero ahorrarías semanalmente?

____
____

6. Completa la siguiente ficha para definir tu objetivo:

Quiero comprar: ______________________________

Su precio es: ______________________________

Mi ahorro semanal será: ______________________________

7. Completa la siguiente tabla hasta conseguir que tu ahorro acumulado te permita comprar el objeto deseado.

Semana	Ahorro semanal	Ahorro acumulado
0	0	
1		
2		
3		
…		

8. Si continuas con el ahorro ¿Cuánto ahorrarías en la semana 15, semana 20 y en la semana 45?

Semana 15: ______________________

Semana 20: ______________________

Semana 45: ______________________

9. Cuánto aumenta o disminuye el ahorro acumulado entre:

Semana 3 y semana 4: ____________________

Semana 7 y semana 8: ____________________

Semana 10 y semana 11: __________________

10. ¿En qué semana reunirías el dinero necesario para comprar tu objeto?

____

____

11. ¿Cómo hallarías el ahorro acumulado para cualquier semana?

____

____

12. ¿Qué pasaría si ahorras el doble por semana?

____

____

Momento 2

Completa la siguiente tabla, teniendo en cuenta la relación.

Ahorro acumulado	Acumulado semana 1: ________	Acumulado semana 2: ________	Acumulado semana 3: ________	Acumulado semana _____: ________
Número de semana	1	2		4

1. Establece las siguientes relaciones usando los datos anteriores

$$\frac{\text{Ahorro acumulado} \rightarrow}{\text{Número de semana} \rightarrow} \quad \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$\text{Semana 1:} \quad \frac{\text{Ahorro acumulado} \rightarrow}{\text{Número de semana} \rightarrow} \quad \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$\text{Semana 2:} \quad \frac{\text{Ahorro acumulado} \rightarrow}{\text{Número de semana} \rightarrow} \quad \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

Semana 3: $\dfrac{\text{Ahorro acumulado} \rightarrow}{\text{Número de semana} \rightarrow}$ $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

Semana 4: $\dfrac{\text{Ahorro acumulado} \rightarrow}{\text{Número de semana} \rightarrow}$ $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

2. ¿Cuál es la relación entre el dinero acumulado y la semana 9?

Semana 9: $\dfrac{\text{Ahorro acumulado} \rightarrow}{\text{Número de semana} \rightarrow}$ $\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

¿Sabías que…?

Una razón en matemáticas es una forma de relacionar dos magnitudes, es decir, dos cosas que se pueden medir o contar por medio de un cociente.

3. Halle la razón del ahorro acumulado de la semana 5, la razón del ahorro acumulado de la semana 8 y la razón del ahorro acumulado de la semana 15.

Razón semana 5	Razón semana 8	Razón semana 15
________	________	________

4. ¿Qué característica observas entre las razones?

____

____

¿Sabías que…?

Si es posible obtener una razón a partir de otra, se dice que las razones forman una proporción.

5. Calcula el cociente de las tres razones anteriores

Cociente semana 5	Cociente semana 8	Cociente semana 15

6. ¿Qué características observa en los resultados de la pregunta anterior? ¿Crees que se cumple para cualquier semana?

____

____

¿Sabías que…?

Dos magnitudes son proporcionales cuando el cociente entre dos razones es constante, es decir, no cambia.

7. ¿Podríamos decir que el número de semanas y el ahorro acumulado, son magnitudes proporcionales? ¿por qué?

____

____

____

8. Imagina que el valor constante de ahorro ahora es de 10.000 pesos, luego en la semana 3 tendrías ahorrado 30.000. Observa la relación entre el ahorro acumulado y el número de semanas

$$\frac{\text{Ahorro acumulado}}{\text{Número de semana}} \rightarrow \frac{30.000}{3}$$

- ¿Cuánto dinero ahorrarás en la semana 48 si estas dos razones son una proporción?

$$\frac{\text{Ahorro acumulado}}{\text{Número de semana}} \rightarrow \frac{30.000}{3} = \frac{\boxed{}}{48}$$

Escribe y explica ¿Cómo lo hiciste?

9. Si el ahorro es de $10.000, identifica la semana en que tendrás el dinero suficiente para comprar lo que deseas (Intenta usar las proporciones).

____

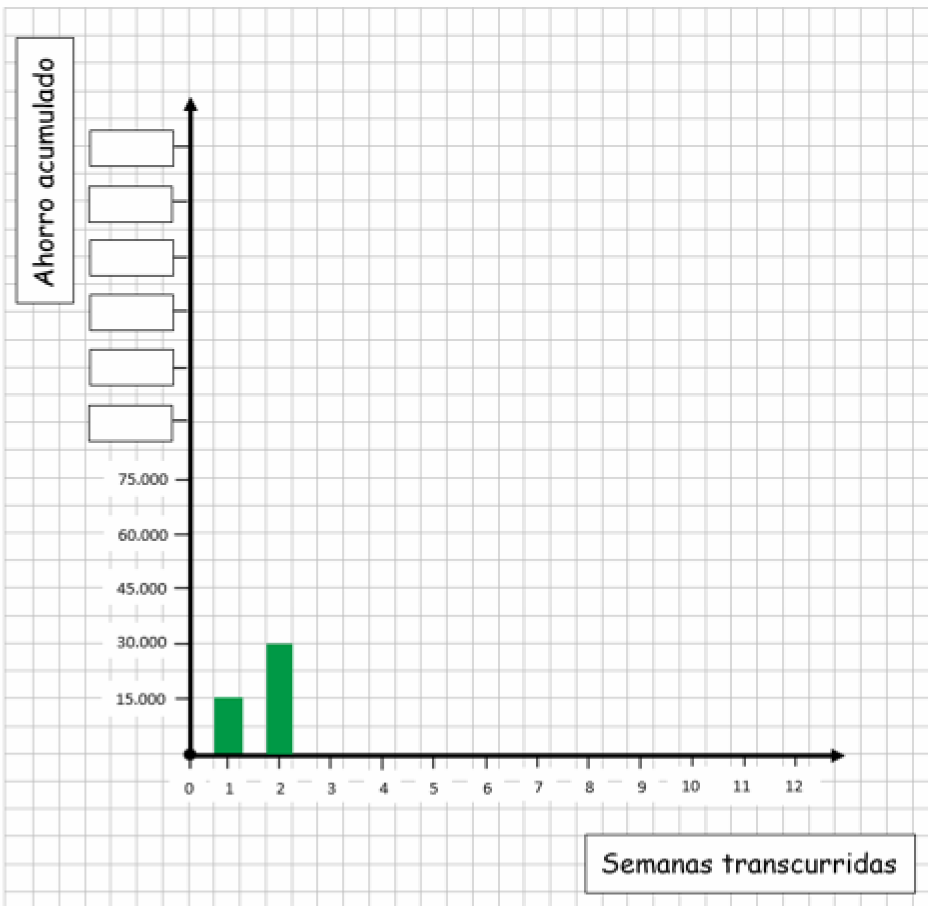
____

Momento 3

Camila tiene un gran sueño: ¡Quiere comprar un PlayStation que cuesta $1.425.000!

Sus papás quieren ayudarla, así que le regalaron una alcancía para enseñarle a ahorrar y a alcanzar sus metas con esfuerzo y dedicación. Camila ha decidido guardar **$15.000 cada semana.** Para saber cuántas semanas necesita para reunir todo el dinero, comenzó a hacer un gráfico de barras que muestra cuánto dinero tiene cada semana… ¡Pero no lo alcanzó a terminar!

Ayuda a Camila a completar su gráfico de barras y descubrir en cuántas semanas logrará comprar su PlayStation



1. Compara la altura de la barra de la semana 5 y la semana 6 ¿cómo son estas alturas?

____

____

____

2. ¿Cuál será la altura de la barra en la semana 13? Explica

____

____

____

3. ¿Cómo cambia la altura de las barras semana tras semana?

____

____

____

4. ¿Cuánto cambia el ahorro acumulado de la semana 11 con respecto a la semana 12?

____

____

5. ¿Cuánto cambia el ahorro acumulado de la semana 16 con respecto a la semana 15?

____

____

6. ¿Cuánto cambia el ahorro acumulado cada vez que aumentan las semanas?

____

____

7. Si pudieras dibujar la barra de la semana 30 ¿Hasta qué altura llegaría?

____

____

8. ¿Cuántas semanas han transcurrido para que el ahorro acumulado sea de $720.000?

____

____

9. ¿Lograste descubrir en qué semana Camila termina su ahorro? ¿Qué semana? ¿Cómo lo hiciste?

____

____

____

10. Los papás de Camila, motivados por su idea de ahorrar, también decidieron iniciar un ahorro propio. Sin embargo, no recuerdan cuánto fue el monto que destinaron semanalmente, por lo que registraron lo que recordaban en la siguiente tabla:

Ahorro acumulado	75.000	125.000	200.000	275.000	325.000	500.000
Número de semanas	3	5	8	11	13	20

Ayuda a los papás de Camila a recordar cuánto ahorraron cada semana.

Escribe y explica ¿Cómo lo hiciste?

- El ahorro semanal de los papás de Camila fue: ____________________

Momento 4

AYUDEMOS A VALENTINA CON SU AHORRO

Valentina quiere comprar una patineta que cuesta $250.000. Para lograrlo, sus abuelos le regalaron $40.000 como motivación para comenzar a ahorrar. Además, ella decidió guardar $15.000 cada semana en una alcancía.

1. ¿Cómo aumenta el ahorro a medida que pasan las semanas?

____

____

2. ¿Cuánto dinero se ha ahorrado en la semana 4, 10?

____

____

3. ¿Se podría decir que el número de semanas y el ahorro acumulado son magnitudes proporcionales? ¿Por qué?

____

____

____

4. ¿A qué se debe lo anterior?

____

____

____

5. ¿Es posible determinar la semana en la que se ahorra la meta? ¿Cómo lo harías?

____

____