El desarrollo del talento matemático: Una perspectiva desde la creatividad en una escuela rural

María Alejandra Solano Delgado

Trabajo de grado para optar por el título de Magíster en Educación Matemática

Directoras

Solange Roa Fuentes
Erika García Torres
Doctoras en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Maestría en Educación Matemática
Bucaramanga
2020

Agradecimientos

En esta ocasión quiero agradecer primero a Dios por brindarme la fortaleza para iniciar y culminar mis estudios de Maestría en Educación Matemática, por permitirme aprender y gozar este proceso de aprendizaje.

A mis padres, que lo dan todo por mí, por su apoyo incondicional, por ser esa fuerza motivadora que sin importar las adversidades siempre me han apoyado de una u otra forma. Solo con su presencia me basta para seguir adelante, gracias a ellos por darme alas y nunca cortármelas. Porque me dieron las herramientas que necesité y necesito para luchar por lo que anhela mi espíritu. A mi hermano, que de una u otra forma me ha apoyado y ha dado de sí para que yo no pare de soñar.

A mi fiel compañero, porque juntos hemos luchado de la mano para perseguir nuestros sueños, eres la persona que más me ha apoyado, que cuando pensé en desfallecer, siempre me brindó de sus fuerzas para seguir adelante. Siempre te agradeceré por darme fuerza cuando más las necesite.

A mis profesores de la maestría por todas sus enseñanzas, por esos seminarios en los que aprendí mucho y me han dado herramientas que me hacen una mejor investigadora. Especialmente quiero agradecer a mi directora de tesis la doctora Solange Roa por sus enseñanzas no solo en el ámbito académico sino en el personal, me ha mostrado lo valiosa que es la vida y lo que verdaderamente importa. Gracias por ser mi guía en este camino.

A la profesora Jenny Acevedo a quien recuerdo con mucho cariño por sus grandes enseñanzas, por su forma de ser y por mostrarme la importancia de ser una investigadora con ética. Mil gracias por todo, por las oportunidades brindadas y por su amistad.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Lista de apéndices

Resumen

Título: El desarrollo del talento matemático: Una perspectiva desde la creatividad en una escuela rural

Autor: María Alejandra Solano Delgado

Palabras clave: Talento Matemático, Creatividad, Escuela Rural, Escuela Nueva, Talento matemático en potencia

Descripción:

Este documento presenta los resultados de una investigación cualitativa, desarrollada por medio de un Estudio de Caso. Este estudio se realiza en una escuela rural con el fin de crear un entorno o espacio de enriquecimiento que promueva el desarrollo de las funciones cognitivas asociadas a la creatividad. Dada la estrecha relación que se ha evidenciado desde diferentes perspectivas teóricas entre la creatividad y el Talento Matemático.

La importancia de este estudio radica en dos puntos, primero desde la visión del Talento Matemático, dado que esta perspectiva analiza el talento desde una postura en potencia. Esto es, exponer al estudiante a un entorno adecuado que fomente el desarrollo del Talento Matemático, para que este deje de ser potencial y pase a ser actual. Además, por la necesidad que se tiene de trabajar el Talento Matemático en los sectores rurales, ya que como diferentes investigaciones han mostrado, la visión de las matemáticas de los estudiantes de estos sectores es limitada y no permite el desarrollo del Talento matemático.

Como resultado de esta investigación, se discute que un entorno adecuado para el desarrollo del Talento Matemático en potencia es fundamental exponer al estudiante a un trabajo bajo un enfoque de resolución de problemas. Dicho entorno, además debe promover tanto el trabajo individual como el trabajo en equipo, esto puede promoverse a través de una adaptación del método de aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión (ACODESA). Este método consiste a grandes rasgos en realizar un primer trabajo individual, en el cual el estudiante se acerca al problema y propone estrategias para solucionarlo, para luego pasar a un trabajo en equipo donde se estudian las estrategias planteadas de forma individual; este estudio se basa en un debate sobre la viabilidad o no de la estrategia y cuál es la mejor para dar solución a la situación planteada. Finalmente, se pasa a un trabajo individual de mayor nivel de dificultad con el fin de presentar un desafío extra a los estudiantes. Este método permite una mayor evolución de las funciones cognitivas (fluidez, flexibilidad y originalidad) asociadas a la Creatividad.

Trabajo de grado
Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Solange Roa Fuentes.

Abstract

Title: The development of mathematical talent: A perspective from creativity in a rural school

Author: María Alejandra Solano Delgado

Keywords: Mathematical Talent, Creativity, Rural School, Escuela Nueva, Potential Mathematical Talent

Description:

This document presents the results of a qualitative research, developed through a Case Study. This research is carried out in a rural school in order to create an environment or space of enrichment that promotes the development of the cognitive functions associated with creativity. Given the close relationship that has been shown from different theoretical perspectives between creativity and mathematical talent.

The importance of this study lies in two points, first from the viewpoint of Mathematical Talent, since this perspective analyzes talent from a potential position. That is, to expose the student to an adequate environment that promotes the development of Mathematical Talent, so that it ceases to be potential and becomes actual. Furthermore, because of the need to work on Mathematical Talent in rural sectors, as different researches have shown, the vision of mathematics of students in these sectors is limited and does not allow the development of Mathematical Talent.

As a result of this research, it is discussed that an adequate environment for the development of potential Mathematical Talent is fundamental to expose the student to work under a problem-solving approach. Such an environment should also promote both individual and teamwork. This can be promoted through an adaptation of the collaborative learning method, scientific debate and self-reflection (ACODESA). This method consists roughly of a first individual work, in which the student approaches the problem and proposes strategies to solve it, to then move on to a team work where the strategies proposed are studied individually; this study is based on a debate on the viability or not of the strategy and which is the best to give solution to the situation proposed. Finally, we move on to individual work with a higher level of difficulty in order to present an extra challenge to the students. This method allows a greater evolution of the cognitive functions (fluency, flexibility and originality) associated with Creativity.

Bachelor Thesis
Faculty of Science. School of Mathematics. Director: Solange Roa Fuentes.

Introducción

El Talento Matemático es una cuestión que ha preocupado no solo a investigadores en la Didáctica de las Matemáticas sino también a psicólogos, especialistas en medicina, investigadores en educación, entre otros. Esta preocupación ha llevado a que el Talento Matemático, sea estudiado desde diferentes perspectivas teóricas, pasando de lo biológico o innato (Terman, 1925; Feldhusen, 1992; Hernández, Hernández y Milán, 2007) hasta considerarse como una capacidad que se puede desarrollar (Canché y Farfán, 2017, Machado, 2004). Por ende, no se cuenta con una definición universal del Talento Matemático. En esta investigación se adopta la definición propuesta por Canché y Farfán (2017), quienes se apartan de la visión de dotación, superdotación y genio, proponiendo un trabajo desde el potencial de cada individuo. Para esto afirman que es importante la creación de entornos con la intencionalidad de construir conocimiento. Esta investigación parte desde la postura de Canché y Farfán (2017) sobre trabajar con el Talento Matemático en Potencia con el fin de exponer a los estudiantes a un entorno propicio para el desarrollo de este.

Este estudio toma como componente fundamental del Talento Matemático la Creatividad, con base en diferentes investigaciones que la han mostrado como un elemento común dentro de distintos modelos que permiten caracterizar el talento matemático (Krutetskii, 1976; Lupkowski-Shoplik y Assouline, 1994; Ficici y Siegle, 2008; Miserandino, Subotnik, Ou, 1995; Bicknell, 2009). Por tanto, se estudia en la Actividad matemática del estudiante el progreso de la Creatividad, a partir del desarrollo de las funciones cognitivas asociadas a ella: fluidez, flexibilidad y originalidad (Torrance, 1995).

Para el estudio del desarrollo de las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad, la autora de esta investigación crea un entorno de enriquecimiento que trabaja bajo el método ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) propuesto por Hitt y González-Martín

(2015). El entorno funciona bajo este método ya que permite realizar un trabajo colaborativo entre los estudiantes para desarrollar las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad, esto es importante porque apoya lo propuesto por el modelo de Escuela Nueva. El modelo de Escuela Nueva, es el modelo bajo el cual se trabaja en básica primaria en las escuelas rurales de Colombia, el cual se expone en el capítulo 1.

En este entorno los estudiantes son expuestos a unas Tareas que han sido previamente diseñadas y adaptadas en función de las habilidades matemáticas que debe desarrollar un estudiante con Talento Matemático (Torrance, 1995).

La investigación se realiza en una escuela rural colombiana que trabaja bajo el modelo de Escuela Nueva. La selección de una escuela rural se da porque este entorno está dotado de unas características específicas que según Royster (1994, citado en Howley, Howley y Huber 2005), permiten a los estudiantes aprender más con menos, pues existe un lazo fuerte entre todos los entes relacionados con el conocimiento, como lo son la comunidad, los maestros y los estudiantes. Aun así, es necesario realizar una intervención en este sector, porque investigadores como Cross y Stewart (1995), Lawrence (2009), Hall y Kelly (1995), Gentry, Rizza y Gable (2001), Abell y Lennex (1999), Hérbet y Beardsley (2001), Battle y Grant, (1995), Grant, Heggoy y Battle (1995), Grant et al., (1999) y Howley, Pendarvis y Gholson (2005), afirman que estas fortalezas no son suficientes para la atención adecuada de los estudiantes talentosos, ni las escuelas apoyan de manera oportuna el desarrollo del talento de sus estudiantes.

Por lo anteriormente expuesto, se crea este entorno de enriquecimiento, que está dotado de una serie de Tareas caracterizadas por ser de diferentes niveles, esto es, cada Tarea está acompañada de unas Tareas periférica de mayor nivel, que buscan desafiar a todos los estudiantes y motivar el desarrollo de las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad.

Con el fin de que esta investigación llegue a las aulas de clase, se muestra la metodología del entorno de enriquecimiento. Adicionalmente, se presentan las Tareas aplicadas en cada sesión. Cabe resaltar que estas Tareas están ligadas a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y a las habilidades matemáticas propuestas por Pitta-Pantazi, Christou, Kontoyianni y Kattou (2011), por ende pueden ser utilizadas en el aula de clase, sin temor a dejar un lado el currículo.

Este documento está dividido en 6 capítulos. En el capítulo 1, se presenta una revisión bibliográfica realizada a partir de cuatro ejes fundamentales, el primero es el Talento en general, el segundo es el Talento matemático y la Creatividad, el tercero es la escuela rural y el cuarto es la escuela rural y el Talento matemático. En el capítulo 2, se realiza una descripción detallada del problema de investigación, se presenta el objetivo y la pregunta de investigación. En el capítulo 3, se presenta el marco conceptual, comenzando con el Talento matemático potencial y se muestra el modelo teórico que guía la investigación. En el capítulo 4, se describe el proceso metodológico que dirige la investigación y se muestra la metodología del entorno de enriquecimiento. En el capítulo 5, se realiza el análisis de los datos, a la luz de las categorías de análisis. Finalmente, en el capítulo 6, se presentan las conclusiones y recomendaciones para futuras investigaciones.

1. Antecedentes

En este capítulo se realiza una descripción de algunos trabajos importantes que estudian puntos clave que rigen este trabajo de investigación. Estos apuntan hacía la descripción del talento en general, el talento matemático, la creatividad matemática, investigaciones que hacen converger al talento y la creatividad matemática; además, de trabajos de investigación realizados en escuelas rurales.

1.1 Talento general

El término talento ha sido debatido desde diferentes perspectivas, sin embargo, tal como mencionan Singer, Sheffield, Freiman y Brandl (2016) aún no se llega a un consenso sobre su definición, ni sobre los términos asociados al talento, como: "súper dotado" o "genio". Algunos investigadores (Terman, 1925; Feldhusen, 1992; Hernández, Hernández y Milán, 2007) argumentan que el talento es una característica biológica innata en cada persona. Tradicionalmente desde la sicología, el talento se ha medido a través del test de Coeficiente Intelectual propuesto por el psicólogo William Stern en 1912. Sin embargo, en la actualidad existen otras visiones que declaran que "esta concepción biológica de que el talento indica un desarrollo acelerado de funciones en el cerebro las cuales permiten su uso más eficiente o eficaz, ha sido un término arraigado (en la cultura)" (Clark, 1997, p. 8). Además, Clark (1997) complementa esta idea afirmando que el talento se caracteriza por un comportamiento creativo de liderazgo, invención y del desarrollo de habilidades matemáticas, en las cuales intervienen tanto el contexto familiar como el escolar y las condiciones sociales de los individuos.

Por otra parte, Bloom (1985a), analiza el desarrollo del talento como consecuencia de la influencia del contexto, de los padres de familia y los maestros. A través de entrevistas realizadas a padres y maestros de personas talentosas, Bloom encontró que el papel de los padres es fundamental. Ya que son ellos son quienes inicialmente inscriben a sus hijos en clases que son de su interés, los apoyan con tiempo, dedicación, motivación y dinero. Además, Bloom determinó que el papel de los maestros también influye en el desarrollo del talento, pues son ellos quienes hacen un campo específico más interesante y desafiante llevando a sus estudiantes al desarrollo de un dominio. La mayoría de los padres que participaron en la investigación de Bloom (1985a) afirmaron que tenían otro hijo con mayor habilidad "natural", pero lo que lo diferenciaba de su hijo talentoso, es que era perseverante, competitivo, tenía deseo de sobresalir y una mayor disposición para trabajar. La perspectiva señalada por Bloom muestra un acercamiento al talento desde una perspectiva diversa a la innata, revelando un camino para futuras investigaciones sobre el talento.

1.2 Talento matemático y creatividad

Particularmente el talento matemático se ha estudiado por investigadores como Krutetskii, (1976) Lupkowski-Shoplik y Assouline (1994), Ficici y Siegle (2008), Miserandino, Subotnik, Ou (1995), Bicknell, (2009) y Canché y Farfán (2017), entre otros. Krutetskii, por ejemplo, en su libro *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren* expone ideas fundamentales sobre la capacidad matemática, afirmando que las características genéticas juegan un papel importante en el desarrollo de estas. Sin embargo, estas características no son suficientes; es necesario, potenciar en los individuos habilidades que conlleven al desarrollo del talento matemático. El desarrollo de estas habilidades se propicia si el sujeto es expuesto a actividades que las potencien. Adicionalmente, Krutetskii (1976), afirma que las pruebas estandarizadas no son suficientes para identificar a un estudiante talentoso ya que no evalúan su potencial.

Por su parte Lupkowski-Shoplik y Assouline (1994) trabajan con cuatro casos de estudio, dos niños y dos niñas que cursan primaria, quienes han sido identificados como niños excepcionales por medio de test de rendimiento escolar y pruebas estandarizadas. Este estudio busca brindar una serie de estrategias para desafiar suficientemente a estos estudiantes, partiendo de la escuela en la que estudian. Los autores proponen que la escuela regular debe crear un programa especial que logre desafiar a estos niños. Además, proponen que el avance de los niños talentosos no debe generarse de formas extremadamente aceleradas; sino que debe promoverse el avance a un ritmo adecuado de acuerdo a las características individuales, ya que muchos de los estudiantes tenían altas capacidades en álgebra, pero serios vacíos en las habilidades computacionales.

También se encuentra dentro de la literatura estudiada la investigación de Ficici y Siegle (2008), en la que se realiza una encuesta por correo a maestros de secundaria: 900 de Corea del Sur, 408 de Turquía y 100 de Estados Unidos. La entrevista incluía la pregunta: ¿Qué caracteriza a un estudiante talentoso en matemáticas? Los profesores con mayor experiencia en el campo de la enseñanza valoraban la resolución de problemas de forma creativa. A diferencia de la cultura estadounidense donde se considera que el talento es innato o genético, los coreanos le dan un mayor nivel al esfuerzo que a la capacidad, por lo que plantean que el talento matemático está en desarrollo.

Por otra parte, Bicknell (2009), realiza una investigación con 15 estudiantes entre los 10 y los 13 años, quienes fueron identificados como estudiantes talentosos en matemáticas por medio de una prueba de muestreo intencional. En esta investigación se propone una caracterización de estos estudiantes desde sus particularidades individuales, de sus padres y sus docentes. Esto lleva al autor a generar un consenso de ciertas características comunes en todos, entre ellas: la persistencia, el pensamiento flexible, la creatividad, el compromiso con la tarea y habilidades en la construcción de patrones simétricos, ordenando objetos y completando rompecabezas.

En contraste con visiones más tradicionales, Canché y Farfán (2017) plantean que es necesario realizar un cambio en el paradigma; es decir, alejarse de las definiciones de superdotado y tomar una postura del desarrollo del talento. La principal idea de las autoras es proponer un trabajo de acuerdo con el potencial de cada individuo, teniendo en cuenta elementos del contexto. Para esto Canché y Farfán (2017) desarrollan un marco teórico basado en la construcción social del conocimiento, con fundamento en la socioepistemología. Desde esta perspectiva el aprendizaje parte de la resignificación y apropiación dentro de un contexto social. En este sentido, las autoras desarrollan su investigación con estudiantes de nivel básico, en un entorno mediado por sensores y calculadoras gráficas, las cuales modelan situaciones de movimiento de un punto A a un punto B, y de B a C por medio de curvaturas. A partir de las situaciones propuestas, los estudiantes pudieron discutir sobre la variación y analizar una curvatura como una cualidad de la variación. Con esto Canché y Farfán (2017) buscan evidenciar que la construcción de conceptos en entornos escolares y no escolares donde hay una intencionalidad y un uso compartido del conocimiento, es ideal para desarrollar marcos de conceptualización del talento matemático.

Para concluir, Canché y Farfán (2017) destacan que el conocimiento no es ajeno al ser humano porque cada individuo se relaciona con él de forma dinámica y continua, condicionado por los escenarios de construcción. Además, las autoras afirman que todas las personas son capaces de desarrollar su talento matemático, si son expuestos al entorno adecuado para esto. Esta mirada de la problemática se adecua a la perspectiva del talento que se propone trabajar en esta propuesta de investigación. Por tanto, cada vez que se habla de talento matemático, no se hace referencia a la superdotación o dotación sino a una construcción continua de habilidades especificas en un entorno que busca promover su desarrollo en todos los estudiantes.

Respecto a la creación y seguimiento de entornos interesados en desarrollar talento matemático, Pineda (2017), describe las relaciones de Recurrencia, Correspondencia y Covariación que desarrollan estudiantes del Grupo Talento Matemático de la Universidad Industrial de Santander (GTM-UIS). La autora diseña tareas que buscan potenciar el desarrollo del pensamiento funcional y analiza las características de la creación de un grupo extracurricular que busca fomentar el talento matemático potencial. El GTM-UIS trabaja bajo un marco institucional en el cual, el docente es un mediador, el estudiante es un participante activo y crítico tanto con sus propias producciones como con las de sus compañeros. Las tareas diseñadas para el GTM-UIS tienen dos objetivos: i. desarrollar el pensamiento funcional y ii. potenciar el Talento Matemático. El análisis de las tareas se realizó tomando como referente las relaciones funcionales planteadas por Smith (2008, citado por Pineda, 2017). En dicha investigación, el papel de la familia y la institución es fundamental ya que estos influyen en la construcción del contexto en el cual cada estudiante participante tiene la oportunidad de desarrollar su talento.

En las investigaciones mencionadas anteriormente se incluye de una u otra forma la creatividad como una característica del talento. A partir de esto, se hace necesario problematizar la creatividad matemática como un componente del talento matemático. Al respecto Leikin, Levav-Waynberg y Guberman (2011), realizan una investigación empírica, en la cual se emplean tareas con múltiple solución (MST, por sus siglas en inglés) que buscan fomentar el desarrollo de la creatividad matemática. Dicha investigación se realiza con dos poblaciones: una de 27 futuros profesores de matemáticas (PMT) en tercer y cuarto año de su licenciatura, en un curso de resolución de problemas; y otra con 303 estudiantes de secundaria en un curso de geometría. Para la comparación de las dos poblaciones se utilizó el esquema propuesto por Leikin (2009, citado por Leikin, Levav-Waynberg y Guberman, 2011). En dicho esquema se asignan puntajes a las funciones cognitivas asociadas a la creatividad, es decir, a la flexibilidad, la fluidez y la originalidad. Adicionalmente se utilizó T-tests (prueba que se utiliza cuando el modelo estadístico sigue una distribución normal) y ANOVA (análisis de varianza) para analizar las funciones cognitivas asociadas a la creatividad. En el análisis de los resultados se encontró que la correlación entre la originalidad y la creatividad es mayor que la que hay entre la creatividad y la fluidez, y la creatividad y la flexibilidad. Poniendo en evidencia que la originalidad es el componente de mayor incidencia en la creatividad.

Posteriormente, Levenson (2011) realiza un estudio en el que combina teorías de aprendizaje colectivo e individual para investigar la creatividad matemática colectiva. Para esto se plantea tres objetivos de investigación: el primero relacionado con la exploración del proceso y el producto de la creatividad matemática colectiva; el segundo, busca examinar si es posible usar la fluidez, la flexibilidad y la originalidad para describir la creatividad matemática colectiva; finalmente el tercer objetivo, consiste en explorar la relación entre la creatividad matemática individual y la colectiva. Esta investigación se realizó con estudiantes de quinto y sexto grado, entre los 10 y 12 años. Estos cursos son dirigidos por dos profesores con más de ocho años de experiencia en estos grados. Levenson (2011) desarrolla su investigación en clases regulares, es decir, no se implementó un programa particular para promover la creatividad. Las interacciones entre los estudiantes se analizaron a través de videos y notas de campo. En el análisis de resultados se estudian tres problemas que se caracterizan por tener diferentes soluciones correctas; por ejemplo, un problema pedía: Encontrar dos números que multiplicados dieran 0,18. En el análisis de los datos Levenson (2011), muestra que la fluidez y la flexibilidad se puede generar colectivamente, mientras que la originalidad se genera de forma individual. Por ejemplo, al solucionar uno de los problemas, un niño tiene una idea y uno de sus compañeros la complementa, es decir, se evidencia fluidez cuando surgen diferentes ideas para la solución de un problema de forma colectiva. En cuanto a la flexibilidad se encontró que una estudiante pudo desarrollarla gracias a la intervención de otro compañero, ya que encontró una solución de tipo diferente a la dada por sus compañeros, es decir, realizó un cambio de enfoque.

Siguiendo con la misma idea, Kattou, Christou y Pitta-Pantazi (2015) diseñan un modelo teórico que relaciona la creatividad y las habilidades matemáticas con el Talento Matemático; estudiando la creatividad como un proceso desde la perspectiva de Torrance (1995). Este último autor propone que los componentes de la creatividad son la fluidez, la flexibilidad y la originalidad. Para estudiar la creatividad se realizaron una serie de tareas, la cuales involucraban tareas: espaciales, cualitativas, cuantitativas, razonamiento deductivo e inductivo, causales y creativas. Para ejemplificar lo realizado por Kattou, Christou y Pitta-Pantazi se muestra el siguiente problema:

> Observa la siguiente pirámide numérica. Todas las celdas deben contener un solo número. Cada número en la pirámide se puede calcular realizando siempre la misma operación con los dos números que aparecen debajo de ella. Rellene la pirámide, manteniendo en la parte superior el número 35. Intente encontrar tantas soluciones como sea posible. (Kattou, Christou & Pitta-Pantazi, 2015, p. 46)

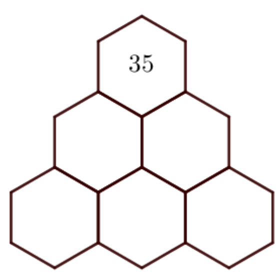


Figura 1. Problema del test de creatividad tomado de Kattou Christou y Pitta- Pantazi (2015)

Este tipo de tarea hace parte del cuestionario que relaciona la Creatividad Matemática y la Habilidad Matemática. El análisis de los datos proporcionados de este tipo de cuestionario arrojó como resultado que la Habilidad Matemática se puede definir en términos de cinco habilidades; espacial, cuantitativa cualitativa, causal y deductiva/ inductiva; asociadas a las habilidades sugeridas por Krutetskii (1976). Adicionalmente, se define la Creatividad Matemática en términos de la fluidez, flexibilidad y originalidad, tal como lo propone Torrance (1995). Además, los hallazgos de Kattou, Christou y Pitta-Pantazi (2015) confirmaron que la Creatividad Matemática y la Habilidad Matemática son factores importantes del Talento Matemático.

En esta misma línea Leikin (2011) y Lev y Leikin, (2013), estudian la relación existente entre la creatividad y el talento matemático; sobre la primera establecen dos posturas de la creatividad: en matemáticos profesionales y la creatividad para todos. A partir de la segunda postura, los autores toman el planteamiento y resolución de problemas como fundamento para potenciar la creatividad. En particular afirman que para el desarrollo de la creatividad es necesario el conocimiento y que para la construcción del conocimiento es necesaria la creatividad; por lo tanto, es contundente para esta investigación que para el desarrollo del talento matemático el estudiante desarrolle su creatividad. Que en este caso se propone alcanzar por medio de problemas desafiantes, como lo mencionan Oktaç, Roa-Fuentes y Rodríguez (2011).

De acuerdo con la revisión bibliográfica, es posible resumir en el siguiente párrafo las características que un estudiante creativo y, por consiguiente, talentoso debe tener y que por tanto deben ser potenciadas:

Los individuos talentosos se caracterizan por ser persistentes, tener un compromiso con la tarea, ser flexibles, tener un pensamiento fluido y original, muestran una predilección por los problemas, son capaces de formular problemas, son arriesgados en la fase exploratoria de los problemas y disfrutan abordar problemas desafiantes.

1.3 Escuela Rural (Escuela multigrado)

La nueva ruralidad en Colombia se define como la disminución de la brecha sectorial del desarrollo rural y la desagrarización del suelo rural pues la población activamente productiva en la agricultura ha disminuido, generando que esta población trabaje en actividades no agrícolas. Según Pérez y Farah (2006) se reconoce la heterogeneidad de la producción y el territorio, ampliando la definición de población rural más allá de campesinos, mineros, pescadores a trabajadores por servicios.

Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN) el acceso de los niños a la educación rural en Colombia ha sido impactado negativamente por algunos factores como el trabajo infantil, el aislamiento, el bajo nivel educativo de los padres y la violencia (MEN, 2001). Particularmente, en las zonas de conflicto armado la deserción escolar asciende a dos millones aproximadamente, esto es un 40% de la deserción escolar del país (Hernández, 2018). Adicionalmente, si los niños logran acceder al sistema educativo rural, este sistema no siempre ofrece todos los niveles de la educación básica y mediani existe una articulación con la educación superior. Lo que lleva a que la población de las zonas rurales del país se vea afectada por la baja escolaridad, impactando directamente en su calidad de vida, ya que esto se refleja en su nivel de pobreza (Procasur, 2012).

Las razones expuestas han llevado al gobierno nacional a proponerse que los niños entre los 5 y los 15 años en zonas rurales tengan acceso a una educación formal en los niveles de preescolar, primaria y secundaria. Para esto ha generado modelos y programas en el sistema educativo rural como: Escuela Nueva (EN) (primaria), aceleración del aprendizaje (primaria), postprimaria dirigido a estudiantes entre los 12 y 17 años, telesecundaria y el sistema de aprendizaje tutorial

(SAT) desarrollado por la organización no gubernamental FUNDAEC y avalado por el MEN (MEN, 2001).

Particularmente esta investigación se centra en el modelo de Escuela Nueva (EN), el cual, busca responder a las necesidades particulares del contexto en el que se desarrollan sus estudiantes y que a su vez estos puedan construir tanto los conocimientos como las habilidades de cualquier estudiante promedio que reciba una educación pública o privada en el país (MEN, 2010). Adicionalmente se espera que este espacio académico de EN esté dotado de elementos especiales para lograr una educación incluyente (Guzmán et al., 2018). Para alcanzar estos objetivos, el modelo de EN ha tenido que cambiar desde su inicio hasta hoy.

Inicialmente, en la década de los cincuenta surge la necesidad de generar políticas de educación pública dirigidas hacia el sector rural, ya que este sector contaba con una mínima cobertura y un acceso restringido por diferentes factores. Adicionalmente la educación no era la más adecuada de acuerdo con las necesidades y características de este sector, ya que no vinculaban su desarrollo productivo y social. En el año 1961 dentro del "proyecto piloto de la UNESCO para América Latina, se organizó el Instituto Superior de Educación Rural (ISER) de Pamplona (Norte de Santander, Colombia), donde nació la primera Escuela Unitaria (escuela con uno o dos docentes)" (MEN, 2010, p. 7) de carácter demostrativo que luego se expandió por Norte de Santander y finalmente en 1967 por todo el país bajo la dirección del MEN.

En el año 1976, después de diez años de la implementación de la Escuela Unitaria en el país, surge el programa de Escuela Nueva (Villar, 1995) gracias al estudio de los logros y las limitaciones de la Escuela unitaria y al avance de carácter educativo planteado por especialistas, transformándose eventualmente en el modelo de Escuela Nueva como se conoce hoy.

Este modelo trajo consigo cambios significativos, ya que se basó en una propuesta metodológica, didáctica y pedagógica (MEN, 2010), las cuales se describen de forma teórica a continuación:

En la propuesta didáctica se encuentra el diseño de cartillas organizadas en unidades que se dividen en cuatro guías y cada guía en tres partes: A, B y C. En la parte A de cada guía se busca que los estudiantes por medio de la resolución de problemas puedan afianzar sus conocimientos previos y adentrarse en nuevos, realizando constantemente un trabajo colaborativo (Botero, Guevara y Sierra, 2019). En la parte B, los estudiantes profundizan sus conocimientos, siempre desde el constante cuestionamiento consigo mismo y con sus compañeros (Botero, Guevara y Sierra, 2019). En la parte C, los estudiantes deben aplicar lo aprendido en un contexto real en colaboración con sus padres, esto con el fin de que el conocimiento adquirido sea más significativo y se apropien de elementos culturales (Botero, Guevara y Sierra, 2019).

La propuesta pedagógica, se basa en la pedagogía activa, que propone que cada niño sea el centro de la educación y por tanto se debe formar como individuo libre hasta convertirlo en una persona independiente. Esta pedagogía es de carácter evolutivo, en la cual se prepara a los niños para el triunfo, basándose en aprovechar la curiosidad y creatividad de cada estudiante (Ordoñez, 2004). Aspecto que es sumamente importante para esta investigación, ya que como se mencionó anteriormente, la creatividad es un componente fundamental del Talento Matemático.

Por otra parte, pedagogos como Decroly, Herbart, Montessori y Freinet, realizan aportes importantes en la caracterización de la pedagogía activa, mostrando resultados relacionados con la creatividad. Estos autores plantean, por ejemplo, que los niños desarrollan su creatividad cada vez que realizan sus actividades cotidianas, y por ende esto debe conducir naturalmente a la construcción de conocimiento. Según Ordoñez (2004) esto permite que el estudiante deje de ser un receptor y se transforme en un agente de conocimiento (Ordoñez, 2004). Todo esto lleva a que la pedagogía activa sea importante para el modelo de EN. Puesto que esta pedagogía prepara a los estudiantes para ser agentes de conocimiento y los lleva a sobrepasar los obstáculos propios del entorno, como la ausencia en la escuela en períodos de actividad altamente comercial o de siembra dependiendo de la actividad del núcleo familiar de cada estudiante. Sin embargo, el desarrollo de este documento permite problematizar concretamente la necesidad de replantear lo que inicialmente se concibe como escuela rural (ER), su metodología y alcances.

Por otra parte, la relación de la escuela y la comunidad conforma la propuesta metodológica de la Escuela Nueva, ya que es trascendental para el desarrollo del modelo, que los padres estén relacionados con las actividades que se realizan dentro de la escuela, y que los maestros se involucren con la comunidad. Por esto, se propone que se organicen eventos comunitarios como las cosechas, fichas familiares y monografías socio-culturales, para involucrar la cultura de la comunidad con el currículo (Colbert, Chiappe & Arboleda, 1993).

Las propuestas metodológica, pedagógica y didáctica que componen el modelo de Escuela Nueva lo hacen ser un modelo flexible, que funciona de acuerdo con las potencialidades y debilidades de cada estudiante; además, se caracteriza por una evaluación y promoción flexible, pues los niños muchas veces faltan a clase debido a las labores agrícolas que realizan con sus familias (MEN, 2010).

Como se mostró en párrafos anteriores, el modelo de Escuela Nueva está estructurado teórica y metodológicamente y parece coherente con un contexto rural. Sin embargo, otra cosa sucede en las aulas que trabajan actualmente bajo este modelo. En particular, los resultados en evaluaciones cuantitativas no han sido satisfactorios, ya que en las pruebas saber 3° y 5° en el área de matemáticas, más del 50% de los estudiantes se encuentra en un nivel de desempeño insuficiente (nivel más bajo) (ICFES, 2018).

Adicionalmente Rojas, Ramírez y Tobón (2013), muestran que la educación rural colombiana presenta serios problemas relacionados con su pertinencia, cobertura y calidad, debido a los altos índices de pobreza, analfabetismo y violencia ejercida por grupos al margen de la ley. En consecuencia, la educación rural se ve seriamente afectada teniendo un bajo nivel académico, además de no contar con elementos básicos para brindar una educación coherente con las necesidades de la población.

En consecuencia, se muestra que, aunque el modelo cada vez esté más estructurado, se necesita seguir trabajando para que los objetivos planteados por él sean alcanzados, entre ellos, lograr una educación incluyente en la cual se promueva un trabajo colaborativo en pro de la creatividad, pues este es un eje fundamental de la pedagogía activa.

1.4 Escuela Rural (Escuela multigrado) y Talento

En esta sección se describen, en primer lugar, investigaciones que se han realizado alrededor del Talento en el sector rural. Para esto, se realiza una revisión de la literatura, alrededor de la influencia de la cultura rural en los estudiantes con talento, la perspectiva de estos estudiantes con respecto a las matemáticas que aprenden en el aula y la identificación y entrenamiento de los estudiantes con talento dentro de las escuelas rurales.

Cross y Stewart (1995), realizan una investigación en Wyoming, Estados Unidos, en la cual analizan el efecto de la cultura rural en los estudiantes talentosos y elementos diferenciadores entre los talentosos urbanos y rurales. Para esto llevaron a cabo entrevistas con 24 estudiantes adolescentes del sector rural que asistían a un “competitive summer program”. En esta investigación se encontró que la escuela rural era una extensión de sus familias y que los estudiantes apreciaban el apoyo que recibían tanto de la escuela como de la comunidad para asistir al “competitive summer program”. Además, otro factor importante para los estudiantes talentosos es que ellos eran reconocidos en su comunidad a diferencia de los estudiantes del sector urbano, quienes preferían permanecer en el anonimato (Cross y Stewart, 1995). Un elemento que preocupaba a los talentosos era la falta de oportunidades intelectuales para desarrollar su talento al máximo con la educación que recibían en el sector rural.

En la misma línea de investigación Lawrence (2009) sugiere que la comunidad rural no es hostil con los estudiantes talentosos. Sin embargo, indica que estos estudiantes deben interesarse más por aprender de su comunidad, de sus talentos y su educación con el fin de revitalizar sus comunidades.

En el sector rural existen niños talentosos que a menudo no son atendidos de forma adecuada. Sus padres muchas veces no encuentran los suficientes servicios y opciones para ellos en los lugares rurales. Esto debido a múltiples factores como los bajos niveles de participación en actividades (visitas al museo, a bibliotecas, entre otras), el personal es poco y no está capacitado para trabajar con este tipo de población (Hérbert y Beardsley, 2001).

Con base en lo expuesto es posible plantearnos la pregunta: ¿Por qué es indispensable trabajar el desarrollo del talento en los sectores rurales? A continuación, algunos trabajos abordan esta problemática desde diversas perspectivas.

Hall y Kelly (1995) en particular realizan un estudio para demostrar la importancia de la asesoría de los estudiantes talentosos rurales, alrededor de su decisión profesional. Los autores encontraron que los estudiantes talentosos de los sectores rurales tienen menos expectativas profesionales que sus compañeros de clase; con base en esto afirman que los niños talentosos necesitan mayor atención y asesoramiento profesional del que reciben.

En esta misma dirección, Gentry, Rizza y Gable (2001), afirma que los estudiantes con talento se aburren en la escuela. Estos hallazgos refuerzan la idea de que los niños talentosos son vulnerables a desconectarse de la escuela y necesitan mucho más de lo que reciben.

Así como es indispensable atender a los estudiantes talentosos, también es importante identificarlos en la escuela rural. Por esto autores como Abell y Lennex (1999), Hérbet y Beardsley (2001), Battle y Grant, (1995), Grant, Heggoy y Battle (1995), Grant, Battle, Murphy y Heggoy (1999), se preocuparon por investigar sobre la identificación y atención de estudiantes talentosos en el sector rural.

En Estados Unidos, Abell y Lennex (1999) hablan sobre los estudiantes rurales y su ingreso a la educación secundaria. Estos autores encuentran que los estudiantes talentosos llegan a la escuela secundaria con muchas ganas de aprender, pero se encuentran en desventaja con respecto a sus pares. Pues la falta de actividades extracurriculares que sufren los estudiantes de sectores rurales los lleva a carecer de experiencias enriquecedoras llenas de aprendizaje. Además, estos estudiantes tienen menos probabilidad de explorar su talento, porque tienen menos posibilidades que los niños de familias con mejores condiciones económicas, de entrar a un programa diseñado para esto.

Los padres de los niños que asisten a las escuelas rurales en su gran mayoría solo alcanzan a realizar estudios de primaria, razón que dificulta la identificación de los niños talentosos por parte de los padres (Abell y Lennex, 1999). A su vez este motivo incide en la identificación por parte de algún modelo, porque muchos tienen como componente de identificación el criterio de los padres.

Hérbert y Beardsley (2001) llevan a cabo una investigación en una zona rural empobrecida de Alabama donde encuentran que la intervención de los maestros en la identificación y entrenamiento de estudiantes talentosos es importante. Esto lo afirman basados en el caso de Jermanie, un niño que a pesar de ser identificado como talentoso por medio de la prueba de logro de Stanford, no fue atendido de una forma propicia para desarrollar su talento, llevando a este a presentar comportamientos inadecuados en el aula de clase.

Sin embargo, en tercer grado Jermaine tuvo como maestra a Beardsley quien reconoció los signos de talento que él presentaba y le brindó la oportunidad de explotar ese talento, mostrando que un maestro puede hacer la diferencia. Con base en el caso de Jermaine los autores concluyen que es necesario que los maestros se eduquen en la identificación y tratamiento de los niños con talento.

En esta misma línea, Battle y Grant (1995), Grant, Heggoy y Battle (1995), Grant et al., (1999) afirman que, a raíz de su investigación realizada con siete mujeres afroamericanas, egresadas de escuelas rurales y estudiantes universitarias, que su éxito escolar y su autoimagen positiva estaba altamente relacionada con su identificación en la escuela primaria. Por lo que los autores aseveran, que las escuelas primarias y secundarias rurales y urbanas deben dar mayor atención a la identificación y tratamiento del talento. Las jóvenes afroamericanas en sus entrevistas decían que debe haber mayor oportunidad para resolver problemas, para la creatividad y una mayor profundidad en el contenido, para hacerlo desafiante e interesante.

Ahora bien, también es importante dentro de la atención al talento en las aulas de la escuela rural, cómo perciben los estudiantes talentosos lo que aprenden dentro de ella. En este caso específicamente cómo perciben las matemáticas los estudiantes con talento de las zonas rurales.

Howley, Pendarvis y Gholson (2005), realizan una investigación en Apalaches Estados Unidos, región caracterizada por tener hermosos paisajes, una extrema ruralidad y un entorno empobrecido. Dicha investigación se lleva a cabo con 16 estudiantes entre los 7 y los 14 años que han sido catalogados como dotados por cumplir uno de los siguientes criterios: Estar ubicados como mínimo en el percentil 95 de la prueba de Logros Stanford-9 (prueba que mide la inteligencia y capacidad intelectual) en el área de matemáticas o ubicarse en el percentil 95 como mínimo en la subprueba de matemáticas de la prueba de Woodcock-Johnson (prueba para medir la habilidad en áreas generales y específicas y el aprovechamiento académico).

Estos estudiantes reciben clases en diferentes escuelas rurales de Apalaches y participan en un programa de instrucción para estudiantes dotados de estas escuelas. Durante la investigación se hace una entrevista de forma individual a cada uno de los 16 estudiantes alrededor de tres temas centrales: el valor de las matemáticas, la calidad de la enseñanza tanto en el aula regular como en el aula para talentosos y el apoyo del aprendizaje de las matemáticas en los hogares.

Los resultados de la investigación muestran que la visión de las matemáticas estaba centrada en la realización de cálculos y la aplicación de reglas memorizadas. Esto de manera natural llevaba a los estudiantes a restringir su desarrollo creativo y crítico. Además, el valor de las matemáticas para su vida como futuros profesionales no tenía mayor influencia; esto se relaciona de manera directa en la investigación con el entorno empobrecido en el que vivían y por la ocupación de sus padres pues estos no se ganaban la vida cultivando sino llevando a cabo trabajos relacionados con ventas o campos técnicos. Por otra parte, la instrucción en los hogares básicamente estaba ligada a la educación que recibían en el aula regular, es decir, realizaban las tareas en las que repasaban lo visto en clase.

En conclusión, las anteriores investigaciones reafirman la idea de que las escuelas rurales no son lo suficientemente desafiantes, ni relevantes para trabajar con estudiantes talentosos y por ende fomentar el desarrollo de sus habilidades. Por lo que se sugiere que la instrucción debe ser más flexible y debe plantear resolución de problemas tanto prácticos como potenciales dentro del campo de las matemáticas.

2. Planteamiento del problema

Las escuelas rurales están dotadas de fortalezas como lo menciona Royster (1994, citado en Howley, Howley y Huber 2005). Estas fortalezas incluyen el lazo fuerte entre la comunidad y las escuelas, al ser escuelas pequeñas permiten una relación más estrecha entre los estudiantes y los maestros y los estudiantes aprenden más con menos.

Particularmente, el modelo de Escuela Nueva desarrollado en las escuelas rurales primarias del país cuenta con este tipo de fortalezas mencionados anteriormente, pues están dotadas de una propuesta metodológica, didáctica y pedagógica.

Sin embargo, estas fortalezas no son suficientes para la atención adecuada de los estudiantes talentosos, ni apoyan el desarrollo de sus talentos en las escuelas rurales (Cross & Stewart, 1995; Lawrence, 2009; Hall & Kelly, 1995; Gentry, Rizza & Gable, 2001; Abell & Lennex,1999; Hérbet & Beardsley, 2001; Battle & Grant, 1995; Grant, Heggoy & Battle, 1995; Grant et al., 1999 y Howley, Pendarvis & Gholson, 2005).

Otra dificultad a la que se enfrenta la escuela rural es el diseño del currículo, ya que muchos maestros cuando están en este proceso utilizan la palabra “teaching to the middle” para atender todos sus estudiantes como lo mencionan Ehlers y Montgomery (1999) en su investigación realizada con maestros de zonas rurales. Este tipo de enfoque como lo afirman los autores no sirve para estudiantes talentosos porque no los desafía. Por lo tanto, los investigadores proponen hacer una instrucción diferenciada basada en contenidos, procesos, productos y entorno de aprendizaje, el cual necesita ser más abstracto, complejo y variado.

En esta misma dirección, Davalo y Griffin (1999) proponen que las escuelas rurales deben hacer una individualización de los alumnos con talento, no con el fin de aislarlos sino de reajustar las propuestas de aprendizaje a sus características. Con el propósito de reajustar las propuestas, los autores proponen que el profesor debe estar motivado para la aplicación de la instrucción individualizada, viendo los beneficios que esta traerá; además debe facilitar el autocontrol del conocimiento en sus estudiantes. Para esto debe conocer de forma integral a sus estudiantes, es decir, sus necesidades, habilidades sociales, emocionales y académicas.

Esta propuesta de una instrucción individualizada va en la misma línea del trabajo propuesta por el prólogo del Informe de la UNESCO sobre niños con talento en Iberoamérica:

> Toda persona tiene derecho a recibir una educación que desarrolle al máximo sus capacidades y que le permita realizar un proyecto de vida. La implementación de este derecho implica garantizar el principio de igualdad de oportunidades, que es brindar a cada uno de ellos la ayuda y los recursos que requieren, en función de sus características y necesidades individuales. (Machado, 2004, p. 9)

Es fundamental atender a cada persona de acuerdo con sus capacidades y necesidades, entendiendo la equidad como la posibilidad de encontrar un contexto educativo que atiende las necesidades individuales (Benbow & Stanley, 1996) esto implica, que los estudiantes deben tener un acceso a una educación desafiante dependiendo de las habilidades de cada individuo. En este camino Oktaç, Roa-Fuentes y Rodríguez (2011), plantean la necesidad específica de crear un entorno rico para el desarrollo del talento matemático, a través del diseño de una serie de problemas desafiantes que pueden ser tratados en el aula regular.

Howley, Howley y Huber, (2005), realizan una serie de recomendaciones que se deben tener en cuenta en la instrucción en las escuelas rurales, con el fin de mejorar las prácticas que se desarrollan en las aulas. Estas recomendaciones se enmarcan en cuatro líneas: el fortalecimiento de los docentes y administradores, mediante el desarrollo profesional a largo plazo; el desarrollo de planes de estudio de matemáticas desafiantes; emplear las tecnologías de aprendizaje a distancia disponibles para igualar el acceso a la información, los recursos y los materiales; e involucrar el área local a través de la participación de la comunidad.

Particularmente, nos centramos en la segunda recomendación realizada por Howley, Howley y Huber (2005) ya que van en la misma línea de trabajo de esta investigación, relacionada con el diseño desafiante del plan de estudios de matemáticas. La necesidad de estructurar un plan de estudios desafiante en las escuelas rurales se evidencia en la poca incidencia de la matrícula de estos estudiantes en materias como álgebra avanzada, geometría analítica, trigonometría y cálculo comparados con sus pares de escuelas urbanas y suburbanas (Campbell y Silver, 1999). Esto muestra la importancia de replantear los planes de estudio para que estos sean más retadores y preparen a los estudiantes para su vida laboral y académica. En el contexto colombiano, la incidencia de un plan de estudios desafiante en matemáticas se evidencia no en la matrícula de asignaturas relacionadas con las matemáticas pues el currículo es igual para todos los estudiantes, sino en la carrera universitaria o vida laboral que escojan los estudiantes de las escuelas rurales del país.

Por otra parte, las escuelas rurales enfrentan desafíos especiales para enseñar a estudiantes talentosos (Howley, Howley y Pendarvis, 2003). Debido a que estas escuelas son más pequeñas, los maestros tienen mayor probabilidad de conocer los talentos de sus estudiantes que en las escuelas grandes. Sin embargo, en el sector rural existen valores fuertemente igualitarios (Howley, Howley y Perdarvis, 2003), motivos que pueden llevar a los maestros a ser reacios a distinguir los talentos intelectuales de sus alumnos. Además, ofrecer cursos avanzados en las escuelas rurales es difícil, porque este tipo de escuelas generalmente no cuenta con maestros con preparación especializada (Jimerson, 2003).

Con base en lo expuesto, esta investigación se propone crear un entorno propicio que potencie el Talento Matemático en una escuela rural, por tanto, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo potenciar el talento matemático por medio del desarrollo de las funciones cognitivas asociadas a la creatividad en un contexto de Escuela Nueva (Multigrado, más de un curso en un mismo salón con un único profesor) en básica primaria? A partir de esta pregunta se propone como objetivo general de investigación: Analizar el desarrollo del talento matemático a través del diseño e implementación de Tareas desafiantes que promuevan las funciones cognitivas asociadas a la creatividad dentro del modelo Escuela Nueva en el nivel de básica primaria y como objetivos específicos: Analizar el modelo de Escuela Nueva planteado teóricamente y el implementado en el aula, Identificar aspectos de la Escuela Nueva implementada en el aula que puedan potenciar el Talento Matemático y Promover el desarrollo de las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad bajo el modelo Escuela Nueva.

La importancia de esta investigación gira en torno a tres ejes fundamentales. Primero en que todo niño tiene derecho a ser exitoso en su vida, por ende, es necesario maximizar su potencial. En el contexto escolar esto puede ser posible a través del desarrollo de una serie de Tareas desafiantes en el área de matemáticas. Segundo, las comunidades rurales necesitan líderes que entiendan y amen su comunidad, que tengan la capacidad de crear nuevos negocios y productos, arte, música y formas responsables de desarrollar sus recursos. Estas capacidades se pueden potenciar a través de la atención al talento potencial de cada estudiante, en este caso específico, del talento potencial en matemáticas. Finalmente, para el campo de la Didáctica de las Matemáticas la importancia de esta investigación también influye en que el Talento ha sido trabajado desde la identificación, la caracterización y la atención (Castro, 2008); mientras que esta investigación busca trabajar desde el Talento en potencia de cada estudiante; una perspectiva que ha sido estudiada en la línea de la Didáctica de las Matemáticas desde hace aproximadamente quince años.

3. Marco Conceptual

En este capítulo se abordan aspectos teóricos que fundamentan esta propuesta de investigación. En el capítulo anterior se analizaron las diferentes perspectivas y conceptos que se han planteado alrededor del talento matemático; con base en lo expuesto en esta sección se sentará la postura de talento matemático que guía esta investigación y el modelo que sustenta el diseño de tareas y análisis de datos. Además, se define el talento potencial, ya que es este el que permite tener una perspectiva del talento en desarrollo y la resolución de problemas como contexto adecuado para ello.

3.1 Talento Matemático potencial

En este apartado se presenta el talento potencial desde la perspectiva señalada por la UNESCO y el concepto evolutivo de Canché y Farfán (2017). El talento potencial según la UNESCO (Machado, 2004) hace referencia al talento:

> que aún no se ha desarrollado o evidenciado, es decir que el sujeto está en potencia de desarrollar y demostrar su o sus talentos, pero a causa de uno o más factores no lo ha podido evidenciar en sus esquemas de acción. (p. 28)

En particular esta investigación centra su postura del talento matemático desde una perspectiva evolutiva, es decir, desde el desarrollo del talento, para esto se tiene en cuenta el potencial de cada estudiante (Canché y Farfán, 2017), y se crea un entorno que potencialice su talento matemático de acuerdo con la capacidad de cada individuo.

3.2 Modelo Talento matemático

Para analizar cómo se desarrolla el talento matemático se utiliza el modelo propuesto por Pitta-Pantazi, Christou, Kontoyianni y Kattou (2011):

Figura 2. Modelo Talento Matemático adaptado de Pitta-Pantazi et al., (2011).

El modelo que guía el diseño y desarrollo de la investigación toma en cuenta la creatividad y habilidades matemáticas (Ver figura 2). Este modelo muestra la relación existente entre el Talento Matemático y la creatividad.

3.2.1. Creatividad Matemática

La creatividad matemática se define como un proceso resultante de un *sistema* en el que interviene el ambiente, las características personales y funciones cognitivas (fluidez, flexibilidad y originalidad) (Torrance, 1995), que se evidencian cuando el individuo resuelve problemas (Amabile, Hennesse y Grossman, 1986).

En este trabajo se toma la fluidez desde la definición de Torrance, como la cantidad de ideas que un individuo puede proponer ante una Tarea. Un ejemplo particular de esta función cognitiva, puede evidenciarse al resolver el siguiente problema: "Los pollos y los conejos corren al aire libre. Juntos tienen 35 cabezas y 94 pies. ¿Cuántos pollos y cuántos conejos hay?" (Krutetskii, 1976, p.121), para resolver este problema los estudiantes pueden proponer diferentes caminos, por ejemplo: plantear un sistema de ecuaciones, utilizar el método de ensayo y error, realizar una suposición falsa para encontrar la solución, realizar pictogramas para identificar el número de patas de cada animal, entre otras. En estas respuestas se da cuenta de la fluidez como la exposición de las ideas de los estudiantes frente a los metodos de solución.

Por otra parte, la flexibilidad se evidencia cuando el estudiante es capaz de realizar un cambio de enfoque al resolver una Tarea o revertir procesos mentales. Además puede proporcionar diferentes soluciones del mismo problema desde diferentes perspectivas (Torrance, 1995). Siguiendo con el ejemplo anterior, Sonya una niña de primaria, con un alto rendimiento en matemáticas soluciona el problema de las gallinas y los conejos desde dos enfoque diferentes. En el primer enfoque dice: si suponemos que son 35 gallinas entonces en total serían 70 patas por lo que sobrarían 24 patas, de donde deduce que estas pertenecen a los conejos y por lo tanto hay 12 conejos y 23 gallinas (Krutetskii, 1976); en el segundo enfoque se centra en plantear y resolver una sistema de ecuaciones, como resultado obtiene que hay 12 conejos y 23 gallinas; estos dos enfoques evidencian flexibilidad en el pensamiento de Sonya.

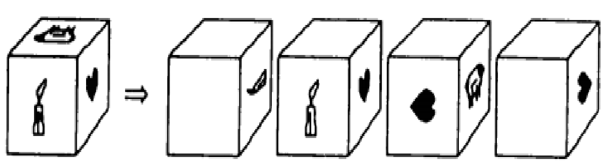
Finalmente, al suponer que los 35 animales son gallinas resulta ser una solución original, porque se evidencia cuando Sonya construye una solución a un problema matemático poco frecuente entre sus pares o una solución que resulta singular para su experiencia (Leikin, 2009a). En este caso, la estudiante desarrolla el problema de forma inusual pues el camino regular de solución entre sus pares es a partir de un sistema de ecuaciones o mediante ensayo y error.

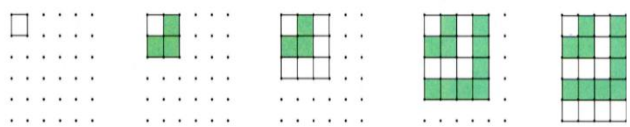
3.2.2 Habilidad Matemática

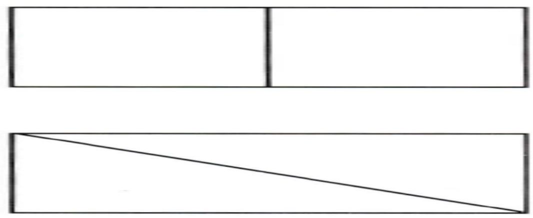
Por otra parte la habilidad matemática se divide en cinco tipos de habilidades, estas son: habilidades espaciales, cualitativas, cuantitativas, de razonamiento deductivo e inductivo y causales. Según Pitta-Pantazi et al., (2011) las habilidades espaciales se pueden evidenciar en la solución de problemas de rotaciones, de dependencia y hasta plegado de papel; las cualitativas están relacionadas con problemas que se centran en relaciones de diferencia y similitud; las cuantitativas se desarrollan mediante el cálculo numérico y el razonamiento algebraico y las causales tienen que ver con los problemas de causa y efecto. Para ejemplificar esto, se presenta una serie de Tareas que ponen en juego las habilidades matemáticas (Ver Tabla 1).

Tabla 1.

Ejemplos de problemas que desarrollan habilidades matemáticas.

Habilidades matemáticas	**Problema**	**Interpretación**
Espacial	 Dibuja la figura que falta en cada cara *Figura 3.* Problema de visualización 3D en Gutiérrez (1991, p. 53).	Las habilidades espaciales se ven en este problema cuando el estudiante puede realizar mentalmente las rotaciones y dibujar no sólo la figura sino identificar la posición.

Cualitativas	Veinte pasajeros viajan al aereopuerto Lanarca en bus. Doce de ellos llevan maleta de viaje, once llevan un bolso de computador y seis llevan los dos tipos de bolso. ¿Cuántos de ellos llevan sólo maleta de computador? (Problema tomado de Pitta-Pantazi et, al. 2011, p. 45)	Las habilidades cualitativas se evidencian cuando el estudiante puede relacionar la información de las personas que llevan los dos tipos de maletas con las que llevan un solo tipo para poder realizar la exclusión de los datos que no le están dando una información relevante para la solución del problema.
Cuantitativas	 Describa los patrones que ve en la figura 4 y representelos con expresiones matemáticas y prediga las siguientes 3 figuras. *Figura 4*. Problema de los cuadrados crecientes de Thales (2003).	Las habilidades cuantitativas se manifiestan cuando el estudiante puede identificar las regularidades del modelo y predecir las siguientes figuras. Además, puede llegar hasta encontrar la generalización del patrón, como por ejemplo podría llegar a que el patron para encontrar el área del cuadrado $n+1$ es $n*n+(2n+1)$.

De razonamiento inductivo/ deductivo	“Compara uno de los rectángulos pequeños con uno de los triángulos rectángulos. Tienen la misma área o la de uno es mayor que la del otro.”  *Figura 5.* Rectángulo dividido por la mitad de dos formas diferentes de Thales (2003, p. 194).	Se evidencian habilidades de razonamiento en el estudiante cuando puede relacionar que el triángulo rectángulo es la mitad del rectángulo inicial y a su vez el rectángulo pequeño también lo es, llevándolo a deducir que sin importar la forma, los dos tienen la misma área por ser la mitad del mismo rectángulo.
Causales	En una bolsa tengo 4 balotas, una roja, una verde, una azul y una amarilla. Si se extraen tres balotas, una por una, por ejemplo, una azul, una verde, una amarilla o una roja, una verde y una azul, estas son dos maneras posibles más, ¿existen más? (Problema tomado de Pitta-Pantazi et, al. 2011, p. 45)	Cuando el estudiante soluciona este problema se enfrenta a una relación de causa y efecto. Si el estudiante no comprende la condición dada inicialmente (extracción y posibles soluciones) puede cometer el error de tomar todas las posibles combinaciones sin atender a la exclusión de las dos ya mencionadas en el problema. De lo contrario, el estudiante al considerar la causa del experimento, evidencia el efecto en la respuesta, y se limita a las opciones restantes.

Para el desarrollo de esta investigación se propone diseñar y/o adaptar una serie de problemas desafiantes (problemas que involucran conceptos matemáticos complejos, que exigen estrategias sofisticadas para llegar a su solución) que involucren los diferentes componentes de las habilidades matemáticas, para evidenciar en la Actividad de los estudiantes los procesos subyacentes de la creatividad matemática.

4 Metodología

En este apartado, se describe la metodología que guía esta investigación. En primer lugar, se detalla el tipo de estudio que se realiza, con el fin de dar significado a la descripción de las cuatro fases del diseño metodológico. A continuación, se muestra un esquema que resume el proceso metodológico:

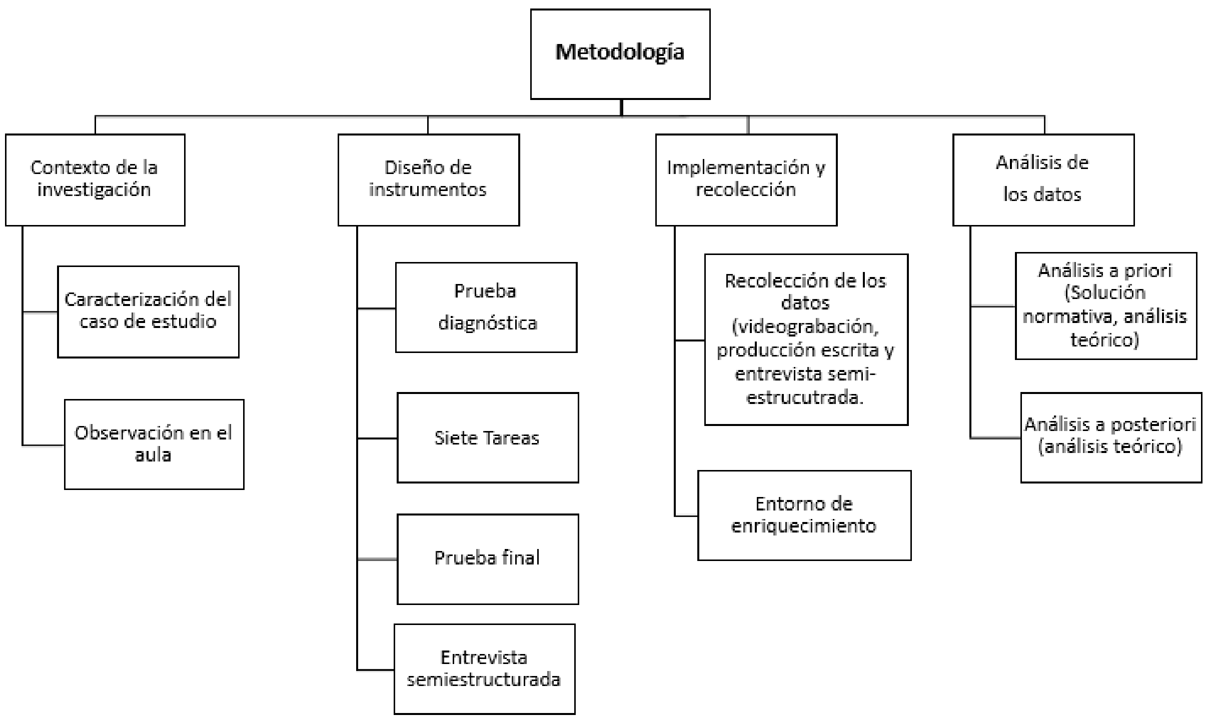


Figura 6. Metodología de investigación.

En la primera fase, se realizó una caracterización de la población objeto de estudio y del contexto en el cual se realiza la investigación; en la segunda Fase se planteó el diseño de los instrumentos, que incluye el diseño de entrevistas y diseño de Tareas que dan lugar a la Actividad del caso de estudio; en la tercera Fase, se implementaron los instrumentos diseñados en la fase anterior, y finalmente en la cuarta Fase, se realiza el análisis de los datos a la luz del marco conceptual.

4.1 Tipo de investigación.

Esta investigación es de orden cualitativo, pues como lo mencionan Denzin y Lincoln (1994), una investigación cualitativa se caracteriza por ser naturalista e interpretativa. Es decir, los investigadores deben entrar en el entorno real en el que se realiza la investigación, en el cual deben dar sentido e interpretar el objeto de estudio tal y como los participantes lo perciben. Particularmente en esta investigación, se analizan e interpretan las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad (Torrance, 1995) en la Actividad de los estudiantes de una institución rural, bajo el modelo Escuela Nueva. Otra característica que ubica a esta investigación en la investigación cualitativa es la forma como se recolectan los datos, ya que se realiza por medio de observaciones, entrevistas, videograbaciones, transcripciones y notas de campo, instrumentos propios de la Investigación Cualitativa (Salgado, 2007).

Específicamente, este trabajo se desarrolla a través de un Estudio de Caso (Gillham, 2000); ya que analiza la Actividad provocada por un conjunto de Tareas asociadas a Habilidades Matemáticas en el contexto natural en el que se desarrollan los estudiantes. Los elementos de investigación descritos se diseñan e implementan para el contexto específico de la Institución Educativa San José, concretamente el caso de los grados cuarto y quinto que se desarrollan bajo la metodología de Escuela Nueva (MEN, 2010). Para realizar la intervención en esta institución educativa y poder trabajar con los estudiantes, se realiza un consentimiento informado a los padres de familia para que autoricen la participación de sus hijos en esta investigación (ver Anexo A).

4.2 Primera fase: Contexto de la investigación

En esta fase, se realiza un reconocimiento del contexto en el que se lleva a cabo esta investigación. Para esto se implementa un proceso de observación en el aula, que permite estudiar el desarrollo de la clase, la dinámica de interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor, así como el papel que juega el conocimiento matemático dentro del aula. Además, se diseña y desarrolla una entrevista estructurada a los estudiantes; esto con el fin de conocer las características específicas del contexto y de los estudiantes. Esta fase se realiza con el fin de desarrollar la investigación de forma natural (característica fundamental de una investigación cualitativa (Salgado, 2007)), es decir, que los estudiantes se sientan cómodos durante la implementación del entorno de enriquecimiento.

4.2.1 Población objeto de estudio

4.2.1.1 Caracterización del caso de estudio

Esta investigación se realiza en la Institución Educativa San José, ubicada en el kilómetro 13 vía Pamplona (Santander, Colombia). Esta es una institución rural que trabaja bajo el modelo de Escuela Nueva, razones que llevaron a seleccionar esta población, además, de la buena disposición de las directivas para el desarrollo del proyecto. En esta institución se desarrollan dos cursos: cuarto y quinto grado en un mismo salón a cargo de un profesor. Estos cursos están conformados por 15 y 10 niños respectivamente, entre los 8 y los 10 años.

A partir del análisis de la entrevista estructurada realizada a los niños (Ver Anexo A) se obtuvo la siguiente información:

1. Ninguno de los padres de los estudiantes se dedica a la agricultura o a trabajos relacionados con el campo; la mayoría trabajan en construcción, son conductores, amas de casa, se

dedican a realizar oficios varios, son meseras o a trabajan en empresas industriales del sector urbano.

2. La mayoría no terminó primaria; y solo uno de los padres realizó estudios a nivel de tecnología.
3. En cuanto al acceso e infraestructura de la escuela, se encuentra que más del 50% de los estudiantes vive lejos de la institución, por lo que deben transportarse en carro o moto.
4. Todos los estudiantes resaltan que la huerta es su espacio favorito de la escuela, porque aprenden cómo sembrar y, además, cuidan el medio ambiente; pero también expresaron que las baterías de los baños no están en óptimas condiciones y que no pueden correr porque el patio de la escuela es muy pequeño.
5. Con relación al modelo de Escuela Nueva, la percepción de los niños estuvo dividida ya que aproximadamente el 50% piensa que la enseñanza multigrado no favorece el aprendizaje, puesto que debería haber un profesor para cada grado. Algunos niños manifiestan que cursan dos grados a la vez y esto no les gusta; mientras que el otro 50% piensa que en este tipo de escuela aprenden más que en una escuela "normal". Al respecto se puede mencionar que aplicar el modelo de Escuela Nueva no es una tarea sencilla, es necesaria una transición de un modelo tradicional a uno de escuela multigrado y esto es difícil de aceptar tanto para los niños como para los padres. Esto dado que los niños vienen de una sede de la escuela donde cursan desde preescolar hasta tercero bajo un modelo de escuela tradicional.
6. Con respecto a la percepción de las matemáticas, se evidenció que más del 90% de los estudiantes las perciben como aburridas y netamente procedimentales. Sus dibujos y respuestas están relacionadas con operaciones como: la división, la multiplicación, la resta

y la suma (ver figura 7). Además, los estudiantes resaltaron que podían usar esto para muchas cosas como ayudar a sus papás a hacer cuentas. Estos datos corroboran lo encontrado por Howley, Pendarvis y Gholson (2005), quienes muestran la percepción limitada y netamente operacional de las matemáticas de niños talentosos en matemáticas en una escuela rural en Estados Unidos.

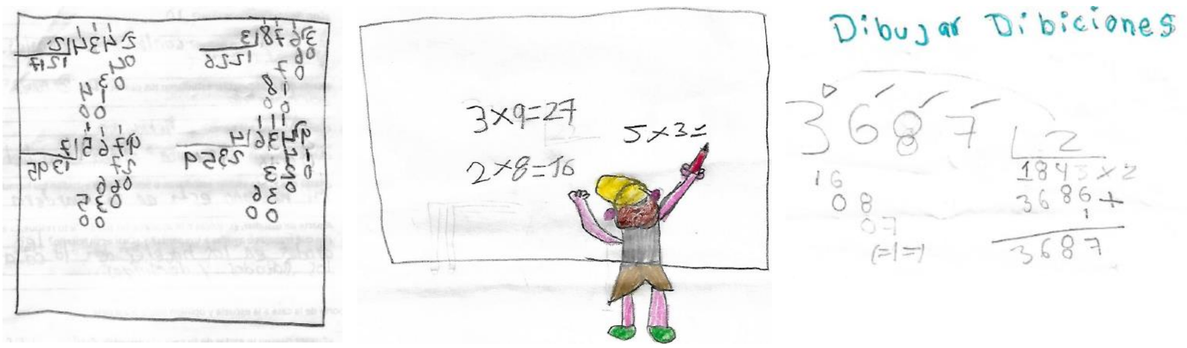


Figura 7. Visión de las matemáticas de los estudiantes.

4.2.1.2 Observación en el aula

La observación en el aula se realizó durante el mes de abril durante 4 sesiones, cada sesión de 4 horas, en la cual se realizó una observación estructurada (Campos y Lule, 2012), porque tiene un objetivo claro, de lo que se quiere observar. Durante la observación se llevó un diario de campo en el cual se analizaban las categorías propuestas por Sabuceo (2001). A continuación, se presenta el esquema que se utiliza para recoger y analizar los datos de la observación.

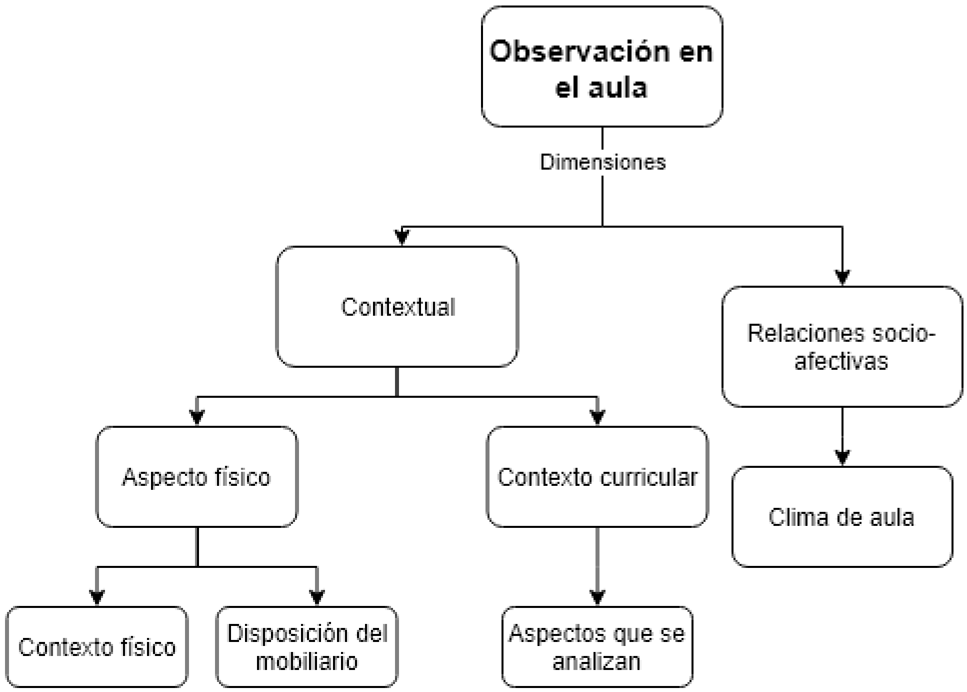


Figura 8. Modelo observación en el aula adaptado de Sabuceo (2001).

La observación en el aula se realiza a partir de dos dimensiones: contextual y socio-afectiva. A continuación, se presenta una descripción general de cada dimensión para luego ejecutarla a la luz de la escuela rural que se analiza en esta investigación.

En la *dimensión contextual* se observa el microcontexto, a partir de dos criterios: el aspecto físico y el contexto curricular. El *aspecto físico* se determina a partir del contexto físico, el cual hace referencia al tamaño del salón con respecto a la cantidad de estudiantes y la disposición del mobiliario. Esta disposición puede ser *clase tradicional*: en la cual los estudiantes están ubicados en filas dirigidos directamente hacia el profesor, a su vez el profesor tiene el control visual de todo lo que sucede en el aula; *Clase renovada*: en este tipo de clase los estudiantes están ubicados de forma que pueden interactuar entre sí, esto es, están orientados unos hacia otros, por ejemplo, en forma de mesa redonda; *Clase mixta:* en esta clase se combinan los dos tipos anteriores.

El *contexto curricular* hace referencia a los aspectos que se quieren analizar, estos dependen de la investigación que se esté realizando en el aula. En el caso particular de esta investigación se analiza el modelo de Escuela Nueva, esto es, la propuesta pedagógica, metodológica y didáctica (MEN, 2010). Particularmente, en la propuesta pedagógica se busca determinar si la clase se desarrolla o no bajo la pedagogía activa. En la propuesta metodológica se estudia la relación que existe entre la escuela y la comunidad. Finalmente, en la propuesta didáctica se realiza un análisis de las cartillas de Escuela Nueva de Matemáticas de los grados cuarto y quinto bajo el modelo de análisis exhaustivo de Monterrubio y Órtega (2009).

El modelo de Monterrubio y Órtega (2009) contiene una serie de análisis agrupados en los siguientes organizadores:

- Objetivos: ¿se adecuan al nivel?, ¿son claros?
- Contenidos: ¿existe una secuencia de los contenidos?, ¿se adecuan al nivel?, ¿van en la misma línea de los objetivos?, ¿la resolución de problemas es trabajada como un contenido?
- Actividades: ¿Existe una adecuación de las actividades a los objetivos, a los contenidos y al nivel educativo?, ¿hay una secuencia de las actividades en orden de dificultad?
- Metodología: ¿Se justifica la metodología a aspectos sociales y afectivos?, ¿propone la creación de materiales didácticos para fortalecer el aprendizaje?, ¿cómo es la metodología de la evaluación?, ¿estimula la creatividad?, ¿utiliza la resolución de problemas como metodología?
- Motivación: ¿Motiva al estudiante por medio de juegos, humor, resolución de problemas, lenguaje o representación motivacional, muestra conexiones con otras ciencias o con la misma matemática?

- Evaluación: ¿La evaluación está en función de los contenidos, los objetivos y la metodología?, ¿tiene en cuenta la autoevaluación?, ¿contempla aspectos sociales y afectivos?
- Enfatización: ¿Realiza afianzamiento de saberes por medio de resúmenes, gráficos o síntesis?

En la *dimensión relaciones socio-afectivas*, se analiza a partir del siguiente conjunto de contextos. Un *contexto interpersonal*: el cual hace referencia a las relaciones entre los estudiantes, y la relación entre los estudiantes y el profesor; *un contexto regulativo*: se refiere a cómo perciben los estudiantes las reglas de la clase y de la institución; *un contexto instruccional*: en el que se evidencia el interés que tiene el maestro por el aprendizaje de los estudiantes, y por último, un *contexto imaginativo y creativo*: que hace referencia a cómo el ambiente estimula la creación y experimentación de los estudiantes (Villa y Villar, 1992).

A continuación, se presenta una síntesis de cada dimensión a partir de la Fase de Observación desarrollada en la Escuela rural.

Dimensión contextual

Aspecto físico. La infraestructura de la institución está organizada de la siguiente manera: un salón donde se encuentran los recursos de deportes y matemáticas (logicubos, geoplanos, cartas, tangrams, cubo de soma, entre otros); una pequeña huerta hecha por los estudiantes, el profesor y los padres de familia; una batería de baños para niños y una para niñas la cual no se encuentra en las mejores condiciones ya que de forma recurrente no hay agua y se encuentran dañados; un pequeño patio de juegos de aproximadamente $55\ m^2$ en el cual los niños no pueden correr porque el espacio es muy reducido (ver figura 9). Finalmente hay dos salones, uno con una capacidad para

30 personas, que se encuentra la mayor parte del tiempo sin estudiantes, ya que solo se usa para realización de evaluaciones. Este salón está dotado con sillas y mesas adecuadas para la estatura de los estudiantes de cuarto y quinto grado, pero no cuenta con: ventilación, ni con medios audiovisuales, razones que llevan a que la clase sea impartida en el otro salón.

Figura 9. Patio de juegos y salones Institución Educativa Oriente Miraflores sede E San José.

El salón tiene una capacidad de 17 estudiantes, por tanto, en la actualidad se presenta hacinamiento, esto hace que los estudiantes queden próximos al tablero ya que el grupo está conformado por 25 niños (ver figura 10). En cuanto al mobiliario, su disposición es de clase renovada puesto que los niños se encuentran ubicados en pequeñas mesas redondas en grupos de dos y cinco integrantes, esto con el fin de favorecer el trabajo colaborativo. Otro aspecto importante son las mesas y sillas de estudio, pues estas son aptas para niños entre los 5 y 7 años, esto es, para estudiantes de preescolar y primero, no para estudiantes de cuarto y quinto grado, niños entre los 9 y 11 años. Las sillas y mesas adecuadas para los estudiantes de estos grados se encuentran en el otro salón, pero estas no caben en el salón de clase, pues como se mencionó anteriormente, la cantidad de estudiantes excede la capacidad del salón.

Figura 10. Salón de clases Institución Educativa Oriente Miraflores sede E San José.

La ubicación del profesor en el salón de clase es hacia el costado lateral derecho, que le permite tener una visión amplia de lo que sucede en el salón. Sin embargo, la movilidad del profesor dentro de este es reducida porque el espacio entre las mesas es mínimo. El tablero se encuentra en la parte frontal del salón muy próximo a los estudiantes, la distancia entre el tablero y los estudiantes no supera los dos metros, razones que llevan a que el profesor lo utilice pocas veces durante las clases. A continuación, se muestra un plano aproximado (Figura 11) de la ubicación de la posición del mobiliario del salón de clase.

Figura 11. Plano del salón de clase.

Contexto curricular. Durante la observación se evidenció que, aunque el trabajo de clase se realiza en pequeños grupos por grados, no presenta un trabajo colaborativo entre los estudiantes; dado que este se limita a transcribir las guías propuestas en el libro según la instrucción del profesor y a solucionarlas de manera individual. Solo dos grupos de los once realizan un trabajo colaborativo, en el cual todos los integrantes aportan para la solución de las guías. En cuanto al trabajo en clase partiendo de la curiosidad y la creatividad de los estudiantes, se muestra poca evidencia de esto particularmente en la clase de matemáticas ya que como se muestra en las entrevistas, las matemáticas son percibidas como aburridas y muy operacionales.

Cabe resaltar que el desarrollo de la clase se hace en dos momentos: primero el profesor da las instrucciones a los estudiantes de grado cuarto y luego pide silencio para dar las instrucciones a los estudiantes de grado quinto. Esta dinámica lleva a que los estudiantes fomenten indisciplina cuando el profesor da las instrucciones a cualquiera de los cursos, generando que el ambiente del aula no sea el óptimo, aspecto en el cual se profundiza más adelante en la dimensión de relaciones socio-afectivas.

La relación entre la comunidad y la escuela se encuentra en fortalecimiento, para esto, los padres participan en la construcción de la huerta estudiantil; en el consejo de padres; van al colegio a hablar de su profesión; a enseñar un arte a los niños o a hablar de valores. Adicionalmente todos los niños tienen la oportunidad de llevar a sus hogares el cuaderno viajero, el cual deben llenar con su familia. En este pueden hacer dibujos, contar historias, escribir poemas o canciones, hablar sobre su familia, pegar fotos o hasta ofrecer servicios a las otras familias. Para este modelo de Escuela Nueva es de suma importancia tener una buena relación con la comunidad, pues esta relación permite un mejor funcionamiento de la escuela, ya que esta escuela cuenta con un único adulto, el profesor.

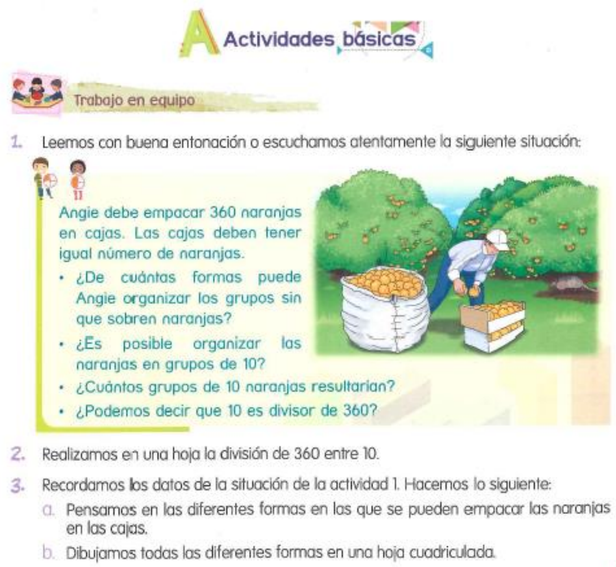
En cuanto a la propuesta didáctica, el modelo de Escuela Nueva cuenta con el diseño y aplicación de cartillas diseñadas y distribuidas por el MEN, las cuales guían el 90% de las clases. Es importante mencionar que su uso es colectivo, los niños no pueden trabajar sobre ella, además la Escuela cuenta con cartillas insuficientes para el trabajo en parejas. En este apartado se analizan las cartillas de Matemáticas de los grados cuarto y quinto.

- Objetivos: los objetivos se adecuan al nivel, ya que se basan en los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) formulados por el MEN, y muestran las evidencias de dichos documentos en cada una de las guías. Por ejemplo; en la guía 8 de la cartilla de cuarto grado el objetivo es "uso diversas estrategias de cálculo y estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas" (MEN, 2018, pág. 9), esto está acorde con el DBA 2. Ev.2.2 "utilizo los criterios de divisibilidad para dar solución a situaciones en mi contexto" (MEN, 2018, pág. 9).
- Contenidos: los contenidos se adecuan al nivel, y están acorde con los objetivos, que se reflejan en los DBA. Esto se evidencia en el desarrollo de la cartilla y en la Red de Alcances y Secuencias, donde se presenta la estructura de cada unidad. Siguiendo con el ejemplo anterior, en la guía 8 los contenidos a tratar son el máximo común múltiplo, múltiplos de un número, números primos y compuestos (MEN, 2018), dichos contenidos se encuentran contemplados para alcanzarse durante los grados cuarto y quinto según los Estándares Básico de Competencia en Matemáticas y lo Lineamientos Básicos en Matemáticas.
- Actividades: existe un hilo conductor entre los objetivos, los contenidos y las actividades. Las actividades están distribuidas en unidades y cada unidad en guías y

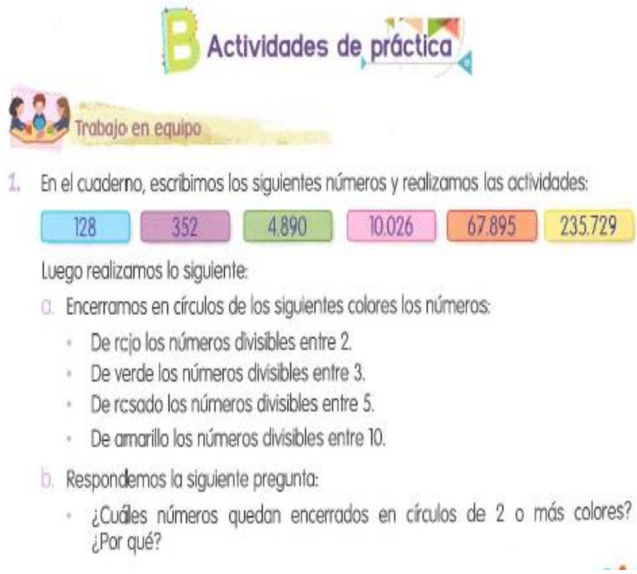
cada guía en tres partes: parte A de actividades básicas, parte B de actividades prácticas y parte C de actividades de aplicación.

Tabla 2.

Cartilla Escuela Nueva cuarto grado (MEN, 2018).

Cartilla	Ejemplo
En la parte A de actividades básicas se presenta el concepto a trabajar a partir de conocimiento previos, de solución de problemas para desarrollar un nuevo conocimiento. Sin embargo, en ocasiones se realiza de forma más tradicional, se presenta el concepto y se proponen ejercicios de ejercitación.	 A Actividades básicas Trabajo en equipo 1. Leemos con buena entonación o escuchamos atentamente la siguiente situación: Angie debe empacar 360 naranjas en cajas. Las cajas deben tener igual número de naranjas. • ¿De cuántas formas puede Angie organizar los grupos sin que sobren naranjas? • ¿Es posible organizar las naranjas en grupos de 10? • ¿Cuántos grupos de 10 naranjas resultarían? • ¿Podemos decir que 10 es divisor de 360? 2. Realizamos en una hoja la división de 360 entre 10. 3. Recordamos los datos de la situación de la actividad 1. Hacemos lo siguiente: a. Pensamos en las diferentes formas en las que se pueden empacar las naranjas en las cajas. b. Dibujamos todas las diferentes formas en una hoja cuadriculada. *Figura 12.* Ejemplo parte A de la cartilla de Escuela Nueva cuarto grado (MEN, 2018).

En la parte B, Actividades prácticas, se proponen Tareas de ejercitación como resolución de problemas en contextos matemáticos y en otros contextos. En la figura 13 se presenta un ejemplo sobre divisibilidad.


B Actividades de práctica

Trabajo en equipo

1. En el cuaderno, escribimos los siguientes números y realizamos las actividades:

128 | 352 | 4.890 | 10.026 | 67.895 | 235.729

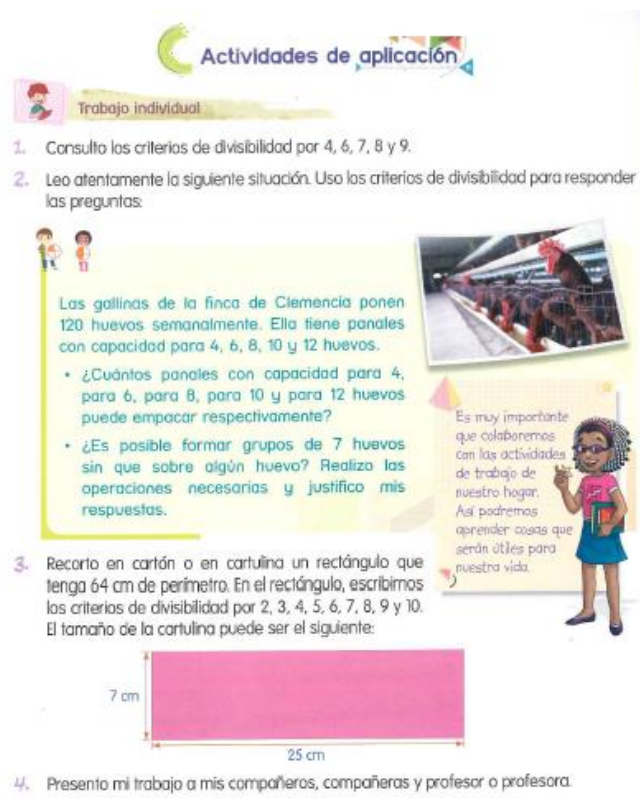
Luego realizamos lo siguiente:

a. Encerramos en círculos de los siguientes colores los números:
   - De rojo los números divisibles entre 2.
   - De verde los números divisibles entre 3.
   - De rosado los números divisibles entre 5.
   - De amarillo los números divisibles entre 10.

b. Respondemos la siguiente pregunta:
   - ¿Cuáles números quedan encerrados en círculos de 2 o más colores? ¿Por qué?

Figura 13. Ejemplo parte B de la cartilla de Escuela Nueva cuarto grado (MEN, 2018).

En la parte C, Actividades de aplicación, se proponen problemas para trabajo en casa con ayuda de la familia. Estas actividades están más enfocadas en la ejercitación e investigación, con el objetivo de poner en práctica el concepto matemático construido.


C Actividades de aplicación

Trabajo individual

1. Consulto los criterios de divisibilidad por 4, 6, 7, 8 y 9.
2. Leo atentamente la siguiente situación. Uso los criterios de divisibilidad para responder las preguntas:

Las gallinas de la finca de Clemencia ponen 120 huevos semanalmente. Ella tiene panales con capacidad para 4, 6, 8, 10 y 12 huevos.
- ¿Cuántos panales con capacidad para 4, para 6, para 8, para 10 y para 12 huevos puede empacar respectivamente?
- ¿Es posible formar grupos de 7 huevos sin que sobre algún huevo? Realizo las operaciones necesarias y justifico mis respuestas.

Es muy importante que colaboremos con las actividades de trabajo de nuestro hogar. Así podremos aprender cosas que serán útiles para nuestra vida.

3. Recorto en cartón o en cartulina un rectángulo que tenga 64 cm de perímetro. En el rectángulo, escribimos los criterios de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10. El tamaño de la cartulina puede ser el siguiente:

7 cm

25 cm

4. Presento mi trabajo a mis compañeros, compañeras y profesor o profesora.

Figura 14. Ejemplo parte C de la cartilla de Escuela Nueva cuarto grado (MEN, 2018).

Las actividades presentadas en las cartillas son secuenciales, van aumentando su nivel de dificultad. Sin embargo, se considera que este nivel de dificultad debería ser mayor, puesto que solo responden a lo mínimo que cualquier estudiante bebería alcanzar según los DBA.

- Metodología, motivación y énfasis: Las cartillas proponen la creación de material didáctico para la resolución de algunos problemas, dentro de este material el MEN ha diseñado un centro de recursos virtual para afianzar conocimientos, estos recursos se encuentran en la página web www.compus.escuelanueva.co. Por otra parte, las cartillas cuentan con una serie de recursos dentro del mismo libro ubicados en partes estratégicas, no solo para fortalecer conocimientos matemáticos sino también conocimientos relacionados con la educación para la paz, la formación ciudadana, cuidado del medioambiente, de la salud y el emprendimiento. A continuación, se presentan los recursos brindados dentro de las cartillas.

Tabla 3.

Recursos dentro de las cartillas de Escuela Nueva (MEN, 2018).

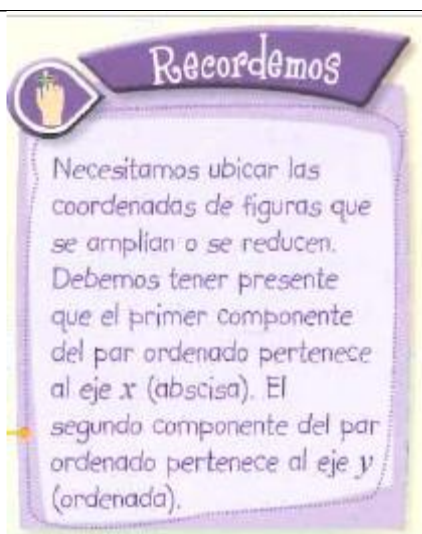
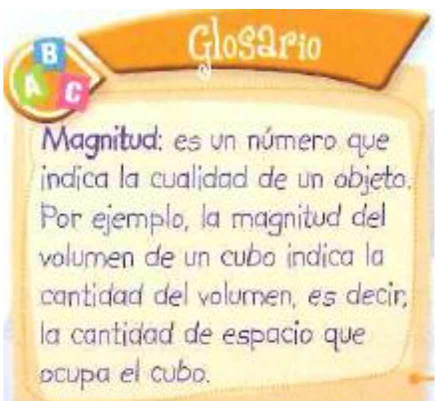
Recursos	Contenido del recurso
	En esta sección se recuerdan conceptos previos, y que se proponen como necesarios para abordar los nuevos problemas.

Figura 15. Recursos dentro de la cartilla de Escuela Nueva cuarto grado (MEN, 2018).

En esta sección se encuentran datos "curiosos" que buscan motivar un aprendizaje continuo.

Figura 16. Recursos dentro de la cartilla de Escuela Nueva cuarto grado (MEN, 2018).



Presenta las definiciones de conceptos nuevos que se utilizan en la guía.

Figura 17. Recursos dentro de la cartilla de Escuela Nueva cuarto grado (MEN, 2018).

Figura 18. Recursos dentro de la cartilla de Escuela Nueva cuarto grado (MEN, 2018).

En esta sección se encuentran juegos que llevan a reflexionar y desarrollar pensamiento lógico.

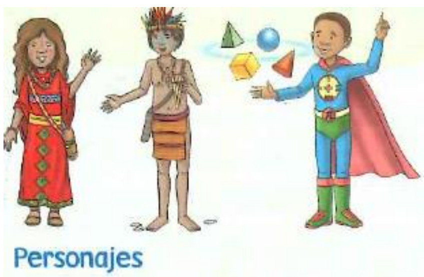


Figura 19. Recursos dentro de la cartilla de Escuela Nueva cuarto grado (MEN, 2018).

Estos personajes explican los procedimientos necesarios para resolver cada una de las guías propuestas en la cartilla de Escuela Nueva.

Figura 20. Recursos dentro de la cartilla de Escuela Nueva cuarto grado (MEN, 2018).

Este grupo de personajes presentan aspectos relacionados con el emprendimiento, el cuidado del medioambiente, el cuidado de la salud, y da consejos sobre la educación para la paz.

Figura 21. Recursos dentro de la cartilla de Escuela Nueva cuarto grado (MEN, 2018).

Promueve la formación de los estudiantes en función de una educación para la paz, a través de desarrollar conductas que puedan prevenir la violencia.

- Evaluación: La evaluación se realiza de forma individual. Al terminar cada unidad, aparece una sección llamada: ¿Cuánto he aprendido? Que cada niño debe transcribir en una hoja y resolver. La evaluación es de selección múltiple con única respuesta. Esta evaluación relacionada con los problemas. En la evaluación se enlazan todos los conceptos vistos en la unidad, mostrando relaciones dentro de las matemáticas. La evaluación se desarrolla de manera individual.

Aunque la cartilla hace énfasis en que la metodología de trabajo debe ser en equipo promoviendo el trabajo colaborativo, esto no se evidencia en el desarrollo de la clase. Dado que los estudiantes no pueden llevar las cartillas a la casa, deben transcribir cada una de las guías.

Después de la transcripción algunos estudiantes resuelven las guías de forma individual y otros socializan con sus compañeros temas ajenos a la guía, para posteriormente resolver esta en su casa. Esto es promovido por el método de evaluación, puesto que se basa en el llenado de una rejilla donde se escribe si el estudiante completó o no cada guía. En consecuencia, el profesor de Institución Educativa Oriente Miraflores sede E San José llena la rejilla de cumplimiento de las guías y es aquí donde termina el proceso de enseñanza y aprendizaje. Este método de evaluación aplicado en la Escuela Nueva fue criticado fuertemente por Psacharopolous, et al. (1992), por sus resultados posteriores en las pruebas de Estado.

Dimensión de las relaciones socio-afectivas

La relación entre los estudiantes es negativa pues no favorece el proceso de aprendizaje. Se evidencian actitudes agresivas y hostiles entre ellos, repercutiendo en el mínimo interés en el desarrollo de las clases. Cuando el profesor entrega las cartillas, algunos de los estudiantes se dedican a resolver las actividades; pero más del 50% de los niños hablan de temas ajenos a esta, comen durante la clase y salen del salón sin pedir permiso al profesor, lo que ocasiona que los estudiantes que están trabajando en la cartilla pierdan la concentración.

Esto ha llevado al profesor a comunicarse con sus estudiantes por medio de un megáfono, medida que muestra el dominio de clase del profesor y el no favorecimiento de un buen ambiente de desarrollo de pensamiento matemático. Este tipo de ambiente como lo mencionan Molina y Pérez (2006), debe ser transformado para que el proceso de enseñanza y aprendizaje sea efectivo.

Por esta razón, para contribuir a mejorar el ambiente de clase, el modelo de Escuela Nueva proporciona herramientas que son aplicadas por el profesor de forma esporádica, como el correo de la amistad, en el cual los niños se hacen cartas anónimas entre ellos diciendo sus cualidades, esto ayuda a fortalecer la autoestima de los estudiantes y a mejorar su actitud frente a la clase; concurso de ortografía, de crucigramas o escribir poemas, entre otras actividades, que hacen que los niños revelen talentos favoreciendo su autoestima.

Con el fin de promover un comportamiento más asertivo durante la clase el profesor realiza reflexiones con historias de personajes que han tenido grandes logros. Adicionalmente los padres de familia también hacen parte de estos esporádicos espacios de reflexión, lo cual ha contribuido a que el ambiente de clase cambie de forma paulatina, aunque el ambiente aún no es positivo se espera que con las estrategias del modelo de Escuela Nueva pueda llegar a serlo.

Por ende, desde la perspectiva de esta investigación es el profesor el invitado a ser un ente trasformador de las situaciones de manera tal que representen un desafío para sus estudiantes, y los lleve a desarrollar el potencial de cada uno.

4.3 Segunda fase: Diseño de instrumentos

Para describir el diseño de los instrumentos, es necesario plantear la distinción entre Tarea y Actividad. La primera hace referencia al trabajo realizado por el profesor investigador y la segunda al trabajo realizado por los estudiantes.

La Tarea son las preguntas, problemas, cuestionarios que son diseñados para que se inicie la Actividad en el entorno de enriquecimiento, mientras que la Actividad es un proceso que se da de forma conjunta, en constantes interacciones entre los mismos estudiantes con la Tarea y entre los estudiantes, el docente y la Tarea, por medio de la cual se generan saberes y subjetividades (Radford, 2014). La Actividad es social y es generada por la Tarea y las interacciones entre los individuos y el contexto de enriquecimiento.

En esta fase de la investigación se realiza el diseño y/o adaptación de un conjunto de Tareas, en que tienen como referente las habilidades matemáticas. El trabajo del investigador es diseñar una serie de Tareas que funcionen en pro del desarrollo de las habilidades matemáticas mencionadas por Pitta-Pantazi et al., (2011). Cada diseño está acompañado con un análisis normativo (análisis a la luz de la matemática) y un análisis a priori (a la luz del marco conceptual que nos compete).

Con el fin de analizar las funciones cognitivas que dan cuenta de la creatividad (fluidez, flexibilidad y originalidad) de los estudiantes, se diseña y se aplica una prueba diagnóstica escrita, la cual tiene una duración de 4 horas. Esta prueba diagnóstica, da pie al diseño y adaptación de cinco Tareas con el fin de motivar el desarrollo de la Creatividad Matemática y en efecto potenciar el Talento Matemático.

Las Tareas propuestas son de dos tipos: mal planteadas o con información incompleta y con múltiple solución. Estas tareas requieren que el estudiante resuelva el problema utilizando diferentes enfoques; esto es, si se basan en: diferentes representaciones de algunos conceptos matemáticos involucrados en la tarea, diferentes propiedades (definiciones o teoremas) de objetos matemáticos dentro de un campo en particular, diferentes propiedades de un objeto matemático en diferentes campos (Leikin, Levav-Waynberg & Guberman, 2011). Además, se caracterizan por tener en cuenta las potencialidades de cada estudiante, por esto, algunas de las Tareas se diseñan a partir de una Tarea central y unas Tareas periféricas, las cuales pueden ser respondidas total o parcialmente por la mayoría de los estudiantes (Oktaç, Roa-Fuentes & Rodríguez, 2011). El diseño de Tareas y su aplicación está condicionado por la Actividad que generen dentro del grupo de estudiantes. Aunque inicialmente se propone contar con un conjunto de tareas base, éstas se irán transformando según las potencialidades y debilidades del caso de estudio en cada sesión de trabajo.

Finalmente se diseña e implementa una prueba final, esta prueba se divide en dos momentos: primero una prueba escrita similar a la diagnóstica y una entrevista semi-estructurada. Esta entrevista semi-estructurada se realiza con base en el trabajo realizado en la prueba escrita y adicionalmente se le presenta una nueva Tarea al estudiante, con el fin de desafiar a los estudiantes, y así poder analizar lo que sucede con las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad.

La prueba final escrita, fue presentada por todos los estudiantes, pero luego del análisis de los datos recolectados en las hojas de trabajo, se realiza la entrevista a cuatro estudiantes que fueron seleccionados por su compromiso con la Tarea.

Se propone el diseño y desarrollo de una entrevista semi-estruturada porque esta permite planificar unas Tareas (preguntas) con anterioridad, pero también permiten que se realicen preguntas no planificadas que surgen de las respuestas de los entrevistados (Lucca y Berrios, 2003), con el fin de ahondar en la Actividad de los estudiantes, específicamente el desarrollo o no de las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad.

4.4 Tercera fase: Implementación de los instrumentos y recolección de la información

4.4.1 Recolección de los datos

La recolección de datos se realiza por medio de tres instrumentos. El primer instrumento es la videograbación de cada sesión y su transcripción. El segundo instrumento es la producción escrita de cada estudiante, es decir, los procesos realizados en la hoja de trabajo para dar solución a las Tareas propuestas en la segunda fase de esta investigación; finalmente el tercer instrumento está constituido por la entrevista semiestructurada, la cual se realiza despúés de la prueba final, ya que se considera que ni el aprendizaje ni el desarrollo de habilidades es automático. Todo esto con el fin de obtener la mayor información de las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad.

4.4.2 Implementación y entorno de enriquecimiento

Las dos primeras sesiones de intervención en el aula, se realiza la prueba diagnóstica con todos los estudiantes. Sin embargo, despúés de la observación en el aula y las dos primeras sesiones, por el clima de aula del Caso de estudio, se tomó la decisión de dividir el curso en dos grupos. Cada grupo conformado por doce estudiantes de cuarto y quinto grado. A su vez, cada grupo se divide en parejas (equipos), las cuales eran armadas por los mismos estudiantes, la única regla para la selección de la pareja es que cada uno fuera de un grado diferente. Los estudiantes de cuarto grado son nombrados como: E1, E2, E3,…, E15 y los estudiantes de quinto grado como: E16, E17, E18,…, E25.

La implementación en el aula se desarrolló como se presenta en la Tabla 4.

Tabla 4.

Implementación en el aula.

Tipo de implementación	*Sesiones*	*Tiempo (horas)*
Observación en el aula	4	16
Prueba diagnostica	2	4
Tareas	5	10
Prueba final	3	6

Metodología del entorno de enriquecimiento

1. Proceso de sensibilización: Este proceso es importante porque dispone al estudiante para aprender. Por eso es necesario que el primer paso metodológico del entorno de enriquecimiento sea la motivación (Torres, Reula y Torrego, 2011). La motivación se puede dar por medio de un juego, un acertijo, un jeroglífico u origami, entre otros. Esta motivación debe llamar la atención del estudiante y permitirle aprender algo. En esta investigación la motivación se relaciona con una figura modular realizada en origami llamada estrella ninja. Con el fin de estudiar las propiedades y características de los polígonos.
2. Presentación del problema a todo el curso, esta presentación se hace a través de la lectura en voz alta por medio de uno de los estudiantes.
3. Se usa una adaptación del método ACODESA de acuerdo con el objetivo de esta investigación.

   Esta adaptación modifica las dos últimas fases del método, porque se considera que esta investigación no busca institucionalizar un concepto como tal, sino que promueve el desarrollo de las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad. Por otra parte, se reinterpreta la segunda fase individual. Adaptación del método ACODESA (Hitt y González-Martín, 2015), para esta investigación, este método se divide en 4 etapas:

T*rabajo individual*: En esta etapa de la Actividad del estudiante, este se enfrenta a una Tarea no rutinaria y es donde surgen diferentes ideas para solucionarla. Durante esta etapa el estudiante construye y produce representaciones externas como la verbalización y los diagramas. Es en esta etapa donde principalmente se evidencia la fluidez.

Trabajo en equipo: Durante esta etapa los estudiantes trabajan en parejas sobre el mismo problema, adicionando preguntas extras de mayor nivel de complejidad que le permita a los estudiantes enriquecer las representaciones externas realizadas de forma individual. En esta etapa, los estudiantes muestran los caminos que pensaron para solucionar la Tarea y por ende se genera un espacio para desarrollar la fluidez; además, también permite el desarrollo de la flexibilidad.

Debate: Durante esta etapa, los estudiantes ponen en común las estrategias utilizadas para resolver la Tarea ante todo el grupo. Esto con el fin de seguir reestructurando las representaciones externas y propiciando espacios donde se fomente el razonamiento y la argumentación por parte de los estudiantes.

Segundo trabajo individual: En esta etapa, se encuentra una Tarea periférica asociada a la Tarea central, pero con un mayor nivel de complejidad. Con el fin de desafiar a los estudiantes.

4.5 Análisis de datos

Los datos proporcionados por la Actividad del estudiante ante las Tareas propuestas en la prueba diagnóstica se analizan de manera descriptiva con el fin de conocer la forma en que se enfrenta el caso de estudio a las Tareas para posteriormente realizar el diseño de las Tareas que conforman el entorno de enriquecimiento.

Los datos obtenidos ante las Tareas: secuencias de crecimiento, calendario, restaurante de Marcelo, fábrica de ventanas, hacer números, cubos aquí y allá, área y perímetro y prueba final se analizan bajo el planteamiento de Torrance (1995). Es decir, se analiza la fluidez a través de la cantidad de ideas que un estudiante puede proponer cuando se enfrenta a una Tarea, la flexibilidad por medio de la cantidad de respuestas a la Tarea desde diferentes enfoques y la originalidad mediante las respuestas inusuales tanto con sus pares como con él mismo (Leikin, 2009a).

Para este análisis primero se construye un análisis a priori de las posibles respuestas de los estudiantes. El análisis a priori de cada Tarea contempla una solución normativa, es decir, una solución que la comunidad matemática acepta como correcta. Además, dentro de la solución normativa se muestra por qué se selecciona cada una de las Tareas en función con las habilidades matemáticas y un análisis teórico desde la perspectiva de las funciones cognitivas asociadas a la creatividad. Definiendo así las categorías de análisis, fluidez, flexibilidad y originalidad.

El análisis de los datos requiere saber oír, ver, leer, para comprender lo que se aprende y darle un sentido a la experimentación (Glesne, 2011). Para el análisis de los datos, se utiliza una adaptación de los pasos de análisis propuesto por Moustakas (1994): Primero se realiza una transcripción de los vídeos y se leen dos o tres veces todas las transcripciones, en esta parte, todos los datos son tratados con la misma importancia. En el segundo paso se eliminan y se reducen datos, con el fin de seleccionar las evidencias más relevantes para la investigación. Por último, se define a cuál categoría de análisis pertenece cada dato seleccionado, esto es, si el dato pertenece a la función cognitiva fluidez, flexibilidad u originalidad.

5. Resultados

5.1 Análisis a priori

En la Tabla 5, se muestran cada una de las Tareas implementadas en el salón de clase, junto con su clasificación de acuerdo con el tipo de Tarea y las habilidades que pueden potenciar.

Tabla 5.

Tareas desarrolladas durante las sesiones.

Tarea	Tipo de Tarea	Habilidad para desarrollar
Prueba diagnóstica y prueba final (adaptado de Rivera 2013)	Tarea central y periférica con múltiples soluciones	Habilidad cuantitativa, espacial, razonamiento e inductivo deductivo
El restaurante de Marcelo (adaptado de Hitt, Saboyá y Cortés, 2017)	Tarea central y periférica	Habilidad cuantitativa, razonamiento inductivo/deductivo, espacial
Fábrica de ventanas (adaptado de Hitt, Saboyá y Cortés, 2017)	Tarea central y periférica	Habilidad cuantitativa, razonamiento inductivo/deductivo, espacial
Hacer números (adaptado de NRICH, 2017-2020)	Tarea mal planteada, múltiples soluciones	Habilidad cuantitativa, razonamiento inductivo/deductivo

Cubos aquí y allá (adaptado de NRICH, 2017-2020)	Tarea central y periférica	Habilidad espacial, causal
Área y perímetro (adaptado de NRICH, 2017-2020)	Tarea central y periférica, múltiples soluciones	Habilidad espacial, cuantitativa, cualitativa

5.1.1 Prueba diagnóstica y final parte escrita (Ver apéndice C)

5.1.1.1 Calendario

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Nombre: ____ Grado: ____________

A continuación, se plantea un problema matemático, resuélvelo utilizando todo lo que sabes. Por favor, realiza todos tus procedimientos y razonamientos en la hoja, no utilices el borrador, si crees que algo te quedo mal déjalo y sigue con tus ideas.

Calendario

Dado el calendario del mes de abril (ver la figura), responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué relaciones encuentra entre los números que están dentro de la cruz?
b) Si movemos la cruz hacia la derecha, ¿qué relaciones podemos encontrar?, ¿Cómo podemos comparar estas relaciones con las del punto anterior?
c) Si ubicamos el centro de la cruz en el día 19 ¿cuáles números que quedan en ella cruz? ¿Por qué?
d) Si tienes el calendario del mes de julio del mismo año ¿las relaciones que encontraste de siguen manteniendo? ¿Por qué?, y si tienes un calendario de otro mes en otro año, ¿sigue sucediendo lo mismo? ¿Por qué?
e) Si tuvieras que explicarle a un compañero el juego de la cruz y el calendario, pero sin contar con el calendario, ¿Cómo lo harías?

Solución Normativa: Esta Tarea se caracteriza por tener Múltiples Soluciones, dicha característica en particular hace de este problema una Tarea propicia para estudiar la fluidez, la flexibilidad y la originalidad. Adicionalmente en ella, se encuentran diversos patrones que pueden ser estudiados por niños de básica primaria, en un contexto conocido como el calendario (cuenta sistematizada por meses, semanas y días).

Para solucionar esta Tarea, es necesario centrar la atención en un número de referencia, y a partir de él, encontrar diferentes relaciones con los demás números que quedan dentro de la cruz. Para evitar confusiones, las posiciones de los números en la cruz se nombrarán de la siguiente manera A, B, C, D, E como se muestra en la figura 22.

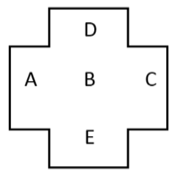


Figura 22. Posiciones de los números en la cruz.

A continuación, se describen algunas de las relaciones que se establecen entre los números contenidos en la cruz:

- Los números que quedan de manera horizontal son consecutivos.
- Los números que quedan en el arreglo de manera vertical definen una secuencia aritmética cuya diferencia es 7.
- La suma de los números A, B y C es la misma que la suma de los números D, B y E.
- Si B es par entonces los demás números en el arreglo son impares.
- Si B es impar entonces los demás números en el arreglo son pares.

Análisis teórico:

Esta Tarea en particular enfrenta al estudiante con un problema que puede considerarse en un contexto cotidiano: los días de la semana. Esta Tarea promueve el desarrollo de la habilidad cuantitativa y de ubicación espacial, frente a una situación cotidiana que se puede resolver a partir de una operación básica (adición), o identificando la relación entre los números que definen una forma de cruz. En esta Tarea se espera que los estudiantes puedan encontrar los números de la cruz en cualquier situación aún sin tener un calendario a la mano. De acuerdo con los Estándares Básicos en Competencia Matemática en este nivel los estudiantes deben:

> Resolver y formular problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación, reconocer significados del número en diferentes contextos, describir, comparar y cuantificar situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones, reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos y describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas (MEN, 2006, p. 80-81)

Funciones cognitivas

Fluidez: En esta Tarea se evidencia fluidez cuando no hay una fijación hacia un mismo tipo de patrón, es decir, cuando el estudiante pueda establecer diferentes relaciones entre los números involucrados.

La fluidez en particular puede generar que el estudiante entienda que puede estructurar diferentes patrones como los anteriormente mencionados u otros para solucionar las preguntas propuestos.

Flexibilidad: Se evidencia cuando el estudiante puede construir una relación en una pregunta y no necesariamente utilizar la misma relación para responder a los siguientes incisos. Adicionalmente el estudiante puede explicar lo que sucede con los números dentro de la cruz desde diferentes relaciones asociando sus resultados a la cantidad de días de la semana.

Originalidad: la originalidad se puede evidenciar en una relación poco común que el estudiante construya, para expresar una relación dada de manera diferente a la construida por sus pares. Por ejemplo, determinar que la suma de los números D, B, E es igual a la suma de A, B, C; o cuando el estudiante logra encontrar los números en la cruz, por ejemplo, si B es el día 30 del mes, es decir, da una solución en la cual la cruz no esté completa en el mes.

5.1.1.2 Secuencia de crecimiento (Ver Anexo C)

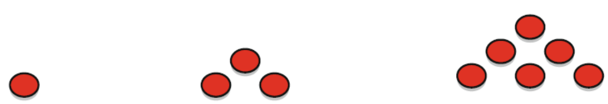
	Universidad Industrial de Santander **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Nombre: ____ Grado: ____________

A continuación, se plantea un problema matemático, resuélvelo utilizando todo lo que sabes. Por favor, realiza todos tus procedimientos y razonamientos en la hoja, no utilices el borrador, si crees que algo te quedo mal déjalo y sigue con tus ideas.

Secuencia de crecimiento

Patrón de círculos en crecimiento: A continuación, se muestran los términos de una secuencia formada por círculos.



Término 1 Término 2 Término 3

a) Dibuja cómo queda el término 4, el 5 y el 6.

b) Si nos saltamos los términos ¿puedes dibujar o describir en palabras cómo queda el término 10? Ahora ¿Cómo queda el término 21? Y ¿cómo queda el término 100?
¿Por qué estás tan seguro?

Solución Normativa: Esta Tarea permite que el estudiante la analice de acuerdo con la forma en la cual él percibe cadatérmino, es decir, un estudiante puede centrarse en las diagonales formadas por los círculos o en las horizontales, o puede tomar los círculos como el contorno de un triángulo en el cual el número de la etapa indica en número de la base del triángulo. Generalmente en matemáticas se intenta generalizar el patrón, por ejemplo, si el estudiante se fija en la diagonal o la horizontal formada por los círculos, la solución normativa para esto es:

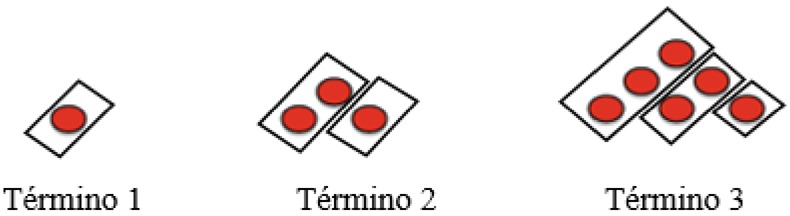


Figura 23. Buscando el patrón.

Tabla 6.

Análisis de la secuencia de crecimiento.

Término	Diagonal/ Horizontal 1	Diagonal/ Horizontal 2	Diagonal/ Horizontal 3	Diagonal/ Horizontal 4	Diagonal/ Horizontal 5
1	1				
2	2	1			
3	3	2	1		
4	4	3	2	1	
5	5	4	3	2	1

De donde, se tiene que la cantidad de círculos de cada figura de la secuencia depende del número del término (n), a partir de este número se suman los consecutivos anteriores hasta llegar a uno, luego, en la etapa n se tiene que la cantidad de círculos es:

$$n + n - 1 + n - 2 + n - 3 + \cdots + n - (n - 1) = círculos$$

$$n \, (1 + 1 + 1 + \cdots + 1)_{(n - veces)} - (1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1) = círculos$$

$$n^2 - ((n^2 + n))/2 = círculos$$

$$(n^2 + n)/2 = círculos$$

Análisis teórico: En esta Tarea los estudiantes deben encontrar un patrón que describa la cantidad de círculos que conforman las figuras de una secuencia geométrica con ayuda tabular (Rivera, 2013). Dado el nivel escolar de la población según los Estándares Básicos de Competencia en Matemática, los estudiantes deben "describir cualitativamente situaciones de cambio utilizando lenguaje natural, dibujos y gráficas y de construir secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas" (MEN, 2006, p. 80, 81).

Además, el MEN (2006) señala que es de suma importancia que el trabajo en el aula propicie la Resolución de problemas, como una práctica cotidiana para fomentar la actividad matemática de los estudiantes. La resolución de problemas promueve el uso de diferentes estrategias para encontrar una solución o formular nuevas preguntas que enriquezcan el problema (Bouvier, 1981). Especialmente los problemas relacionados con secuencias en donde los estudiantes deben buscar relaciones entre cada término para determinar el patrón que las genera promueve el uso de diferentes estrategias.

Funciones cognitivas

Fluidez: Para resolver esta tarea los estudiantes pueden proponer diferentes ideas como: probar posibles soluciones mediante ensayo y error; analizar el cambio de un término al siguiente, realizar pictogramas o utilizar objetos concretos para simular la secuencia, entre otros. En estas respuestas dan cuenta de la fluidez, como la exposición de las ideas de los estudiantes frente a diversos métodos de solución.

Flexibilidad: Se evidencia cuando un estudiante determina una regularidad de un término al siguiente, es decir, partiendo de un término y añadiendo al término siguiente una base de círculos de igual cantidad al término. Esto es, por ejemplo, para el término 5, parte del término 4 y le agrega una fila base de 5 círculos. Sin embargo, cuando el estudiante debe encontrar el término 100, este puede realizar un cambio de enfoque en su respuesta, ya que el primer enfoque no es muy eficiente. Por ejemplo, puede proponer que para encontrar el término 100 lo que debe hacer es dibujar 100 círculos en la fila base, luego una fila con 99 círculos, luego otra fila con 98 círculos, así sucesivamente hasta llegar a una fila con un círculo.

Originalidad: Una solución original se evidencia, por ejemplo, cuando el individuo utiliza sus habilidades espaciales para rotar el término 2 y completa un cuadrado de (2+1) *(2+1), es decir, un cuadrado de 3*3, donde 3 es el término que quiere encontrar. Luego de esto, al cuadrado de 3*3 le quita los círculos del término 2, para obtener finalmente el término 3, como se observa en la figura 24.

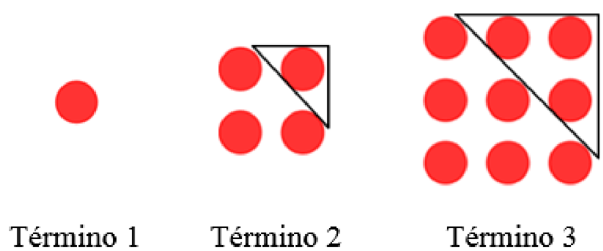


Figura 24. Respuesta original secuencia de crecimiento.

Esta solución representa una respuesta original, ya que es poco común que un individuo realice movimientos espaciales para encontrar el patrón que sigue una secuencia.

5.1.2 El restaurante de Marcelo (Ver apéndice D)

	Universidad Industrial de Santander **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

EL RESTAURANTE DE MARCELO

Nombre: ___________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

____

____

Fecha: _____________________________

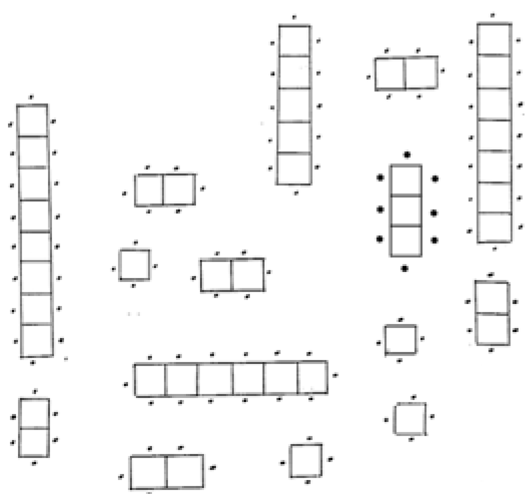
Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Trabajo individual.

Situación

Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante tiene 40 mesas que organiza de diferentes maneras, uniéndolas entre ellas. Actualmente Marcelo tiene organizadas las mesas como se muestra a continuación:



Marcelo está cansado de contar las sillas una a una todos los días. Por lo tanto requiere tu ayuda. Marcelo quiere encontrar una manera de calcular rápidamente el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa.

1. ¿Cuántas personas se pueden sentar alrededor de 3 mesas ?

2. Si buscamos el número de personas que se pueden sentar alrededor de 4 mesas, ¿necesitas hacer un dibujo para encontrar la respuesta o tienes una manera diferente de hacerlo ?

3. ¡Y para 15 mesas!, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de personas sin necesidad de dibujar?

Trabajo en equipo

4. En equipo, compartan las estrategias que usaron para calcular el número de personas que pueden sentarse alrededor de 15 mesas. ¿Todos usaron la misma estrategia? Encuentre y escriba o dibuje al menos 2 estrategias para hacer este cálculo.

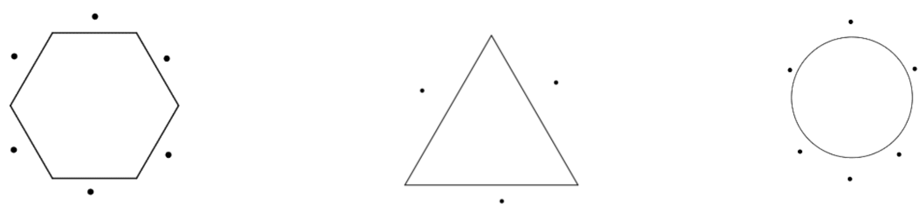
5. Una vez que escriba las estrategias, utilice alguna de ellas para calcular el número de personas que pueden comer en 21 mesas y después en 54 mesas.

6. Escribe un mensaje a Marcelo donde le explicas cómo podría calcular el número de personas para sentar alrededor de una mesa no importa qué tan grande sea.

7. Los mensajes son muy largos. Marcelo necesita mensajes que le indiquen las operaciones que debe realizar más fácilmente. Escribe el mismo mensaje, pero simplificado, indicando qué operaciones necesita realizar Marcelo.

Segundo trabajo individual

Marcelo quiere expandir su restaurante, entonces piensa abrir una nueva sucursal. Marcelo necesita que le ayudes a escoger el tipo de mesa que le permita ubicar la mayor cantidad de personas posibles. Para esto, su diseñador le realiza la siguiente propuesta de mesas con el propósito de que Marcelo seleccione el tipo de mesa más apropiado según sus intereses.



8. ¿Qué tipo de mesa debe escoger Marcelo para ubicar a la mayor cantidad de clientes?

9. Calcula el número de personas que puedes sentar alrededor de 3 mesas unidas (de la mesa escogida en el punto anterior). Explica la estrategia que utilizas y cómo ubicaste las tres mesas unidas.

10. Calcula el número de personas que pueden sentarse alrededor de 21 mesas unidas y después de 54 mesas unidas. Explica la estrategia que utilizaste.

11. Calcula el número de personas que puedes sentar alrededor de cualquier cantidad de mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

12. Si ahora Marcelo necesita que la mesa que escojas sea en la que puedes ubicar la mayor cantidad de personas, y además que ocupe el menor espacio posible, porque el nuevo local es pequeño. ¿Cuál mesa escogerías?, ¿Por qué?

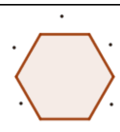
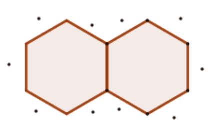
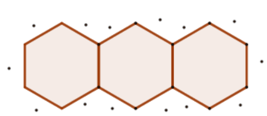
13. ¿La mesa que escogiste en el punto anterior es la misma que la del punto 1?, Si tu respuesta es no, ¿Por qué cambiaste el tipo de mesa?

Solución normativa: En la primera parte, se espera que los estudiantes encuentren el patrón que describe la secuencia, ya sea en forma algebraica, pictórica o en lenguaje natural. La solución normativa para esta secuencia es el patrón $2(n+1)=p$, donde n es el número de mesas y p es el número de personas que se pueden ubicar en esa cantidad de mesas.

En la segunda parte, hay una Tarea de mayor nivel, que exige al estudiante tomar una decisión con respecto a la mesa en la que mayor cantidad de personas pueda ubicar. Para esto, puede escoger la mesa hexagonal o circular, donde puede ubicar seis personas en cada una. Además, si ubica n mesas pegadas de cualquier tipo, puede ubicar $2(2n+1)=p$, donde n es el número de mesas y p es el número de personas que se pueden ubicar en esa cantidad de mesas como se observa en la tabla 7.

Tabla 7.

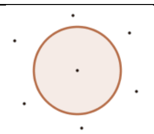
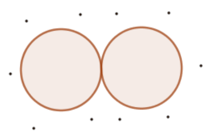
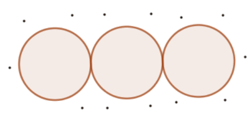
Mesa hexagonal

Pictograma	Cantidad de personas (p)	Cantidad de personas (p) en términos de la mesa
	6	$4(1)+2$
	10	$4(2)+2$
	14	$4(3)+2$
…	…	…
$n\ mesas$	p	$4(n)+2$

Cabe aclarar que este patrón se cumple para la mesa circular siempre y cuando las mesas se unan por la parte donde se sienta un cliente como se observa en la tabla 8.

Tabla 8.

Mesa circular

Pictograma	Cantidad de personas (p)	Cantidad de personas (p) en términos de la mesa
	6	$4(1) + 2$
	10	$4(2) + 2$
	14	$4(3) + 2$
…	…	…
$n\ mesas$	p	$4(n) + 2$

En este inciso la toma de decisiones es importante y se basa en el conocimiento matemático del estudiante. Cuando el estudiante ha tomado una decisión con respecto a la cantidad de personas, ahora debe enfrentar esta decisión con otra condición, que tener en cuenta la cantidad de espacio ocupado por las mesas. La solución normativa para este inciso, es que Marcelo debe escoger las mesas hexagonales, ya que el área ocupada por una mesa hexagonal es $(6\sqrt{3})/4\ l^\wedge 2$, donde l es la medida del lado de la mesa, y el área ocupada por una mesa circular es $\pi l^\wedge 2$, donde l es el radio que es equivalente al lado de una mesa hexagonal, de donde se tiene que $(6\sqrt{3})/4 < \pi$, por lo tanto la mesa hexagonal ocupa menos área que la mesa circular.

Análisis teórico: Esta Tarea involucra el estudio de patrones que determinan secuencias; por tanto, permite realizar diferentes acercamientos, de acuerdo con la preparación académica de cada estudiante. Esta Tarea se caracteriza por partir de una Tarea central hasta llegar al desarrollo de Tareas periféricas, permitiendo evidenciar la construcción de un patrón y la evolución en la construcción del proceso de generalización.

Esta Tarea tiene como objetivo el desarrollo de habilidades cuantitativas, de razonamiento y espaciales. Las habilidades cuantitativas se desarrollan cuando el individuo debe crear un modelo que le permita describir matemáticamente la situación problema (Rivera, 2013). Para esto, descontextualiza la situación problema, viendo esta como un problema de perímetro. Donde entran a jugar también las habilidades espaciales, como la conservación de la percepción de forma activa (Bishop, 1989), pues la construcción de las mesas no es accidental, sino que conservar una forma completamente similar (Rivera, 2013), es decir, conservan la forma, pero no el tamaño.

Las habilidades de razonamiento se ponen en juego cuando el estudiante analiza las regularidades que se presentan en la secuencia, para plantear un patrón que la describa. Además, en la toma de decisiones del segundo trabajo individual, el estudiante pone en juego el razonamiento inductivo, porque debe plantear una conjetura y justificar la validez de esta.

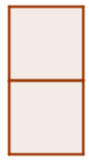
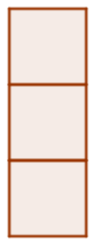
Funciones cognitivas

Fluidez: En este problema, se dice que un estudiante tiene un pensamiento fluido, cuando construye diferentes tipos de representaciones, para comprender el problema. Un estudiante puede realizar una representación pictórica en la cual cuenta la cantidad de personas que se pueden ubicar en esa mesa, además, representa de forma numérica lo estructurado en el pictograma. A continuación, se muestra un ejemplo de esta forma de abordar la Tarea.

Tabla 9.

Análisis a priori fluidez en el Restaurante de Marcelo.

Pictograma	Mesas	Cantidad de personas

	1	4
	2	6
	3	8

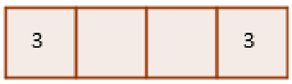
De igual forma los estudiantes deben decidir el tipo de mesa que van a elegir, por ejemplo, realizar un pictograma similar para analizar en cuál mesa se pueden ubicar la mayor cantidad de clientes.

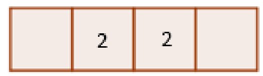
Flexibilidad: Se evidencia flexibilidad, si un estudiante, en un inicio necesita dibujar las mesas para saber la cantidad de personas que puede ubicar en estas y luego no necesita el dibujo para dar solución a la Tarea. Es decir, descontextualiza los datos, para trabajar solo con los símbolos, mostrando el desarrollo de habilidades cuantitativas (Rivera, 2013). Esto es un cambio de enfoque pasando del pictograma al análisis netamente numérico o puede que el estudiante construya un análisis algebraico o exprese en lenguaje natural su respuesta.

La flexibilidad también se puede evidenciar, cuando un estudiante utiliza más de una estrategia para encontrar la cantidad de personas que puede ubicar en n mesas. Se espera que la flexibilidad se potencie con el trabajo en equipo, pues permite que los estudiantes discutan entre sí sus estrategias y decidan cuáles son viables.

Por ejemplo, un estudiante puede plantear las siguientes estrategias:

- Contar mesa por mesa la cantidad de sillas que se pueden ubicar.
- Realizar el conteo de una forma estructurada, como contar la cantidad de sillas en los extremos de la mesa y luego la cantidad de sillas en las mesas del centro.





Sillas en las mesas de los extremos. Sillas en las mesas del centro.

Figura 25. Estrategia 2, restaurante de Marcelo.

- Asignar a cada mesa dos sillas y al final sumar dos sillas, esto para obtener el total de la cantidad de sillas dependiendo de la cantidad de mesas.

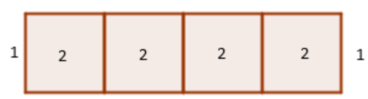


Figura 26. Estrategia 2, restaurante de Marcelo.

En el segundo trabajo individual, es posible que un estudiante evidencie flexibilidad cuando puede cambiar el tipo de mesa del primer inciso en el quinto inciso. Por ejemplo, en el primer inciso escoge la mesa circular, pues esta funciona por ser una de las mesas en la que más personas puede ubicar. Pero en el quinto inciso es capaz de cambiar de decisión al analizar que esta mesa no es la que menos espacio ocupa, así cumpla con la primera condición. Cuando un estudiante realiza este cambio de enfoque, muestra su habilidad de reestructurar su modelo de acuerdo con las necesidades y condiciones de la Tarea (Rivera, 2013).

También se puede evidenciar flexibilidad en un estudiante, cuando en el primer inciso del segundo trabajo individual decide que la mesa circular y la hexagonal son las que ofrecen mejores opciones según las condiciones de la tarea. En el inciso cinco, el estudiante puede decidirse por una de estas dos mesas.

Para comprender mejor cuando hay pensamiento fluido en esta Tarea, imagínese lo contrario, que el estudiante tiene una fijación. Esto es, por ejemplo, que en el inciso uno el estudiante escoge la mesa circular y en el inciso cinco vuelve y selecciona esta mesa, aunque esta no cumpla con la condición de ocupar el menor espacio. Utiliza la misma estrategia porque le funcionó en una primera instancia, sin considerar las nuevas condiciones.

Originalidad: Se evidencia originalidad cuando el estudiante expresa la cantidad de mesas que se necesitan para ubicar a p personas. Es decir, logra construir un patrón, esto puede hacerlo de forma verbal, en lenguaje natural o en lenguaje algebraico. También se evidencia esta función cognitiva asociada a la Creatividad, si un estudiante que ha resuelto todas las tareas de forma pictórica logra resolverla de forma numérica. Esto según Leikin (2009a), quien propone que la originalidad también puede medirse de acuerdo con la evolución del trabajo que un individuo ha realizado.

5.1.3 La fábrica de ventanas (Ver apéndice E)

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Fábrica de ventanas

Nombre: ___________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

____

____

Fecha: _____________________________

Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Fábrica de ventas

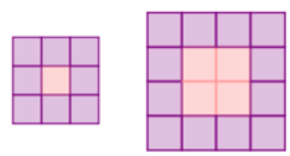
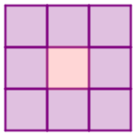


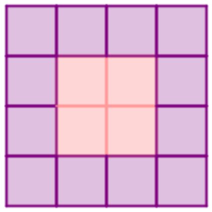
Figura 1 Figura 2

Trabajo individual

Situación

Tengo un amigo que tiene una pequeña fábrica de ventanas. Las ventanas que se fabrican tienen forma cuadrada y se componen de pequeños cuadrados rosados en el centro y cuadrados morados alrededor. A continuación, se muestran algunos ejemplos:





?

?

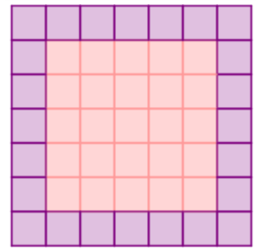


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

Los trabajadores necesitan contar el número de cuadrados color morados alrededor de los cuadrados rosados de la ventana y los cuentan uno por uno. ¿Podrías ayudar a los trabajadores a encontrar una manera de calcular rápidamente el número de cuadrados de color morado para cualquier tamaño de ventana? Para esto, responde las siguientes preguntas

1. Calcula el número total de cuadrados color morado si tenemos 2 cuadrados rosados de lado, ahora si tienes 3 cuadrados rosados de lado.

2. Si buscas el número de cuadrados color morado para una ventana que tiene 4 cuadrados rosados de lado. Y si los trabajadores necesitan hacer una ventana con 10 cuadrados morados de lado, ¿cuántos cuadrados rosados y cuántos morados necesitan para hacer la venta, ¿Cómo hiciste para saber cuántos cuadrados necesitan los trabajadores para hacer esa ventana?

3. Y la ventana de 15 cuadrados rosados de lado, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de cuadrados color morado en total?

Trabajo en equipo

4. En equipo, analicen las estrategias que utilizaron anteriormente para calcular el número de cuadrados color morado necesarios para una ventana que tenga 15 cuadrados rosados de lado. ¿Todos utilizaron la misma estrategia? Encuentren al menos 2 estrategias para calcular el número de cuadrados color morado para una ventana que tiene 15 cuadrados rosados de lado.

5. Una vez que han escrito diferentes estrategias y que han decidido que son correctas, utiliza alguna de estas estrategias para calcular el número de cuadrados color morado necesarios para una ventana de 23 cuadrados rosados de lado y otra ventana de 58 cuadrados rosados de lado.

6. Escribe un mensaje con palabras que permita calcular el número de cuadrados color verde necesarios para una ventana para cualquier número de cuadrados cafés de lado.

7. Los mensajes son largos a leer, escriban el mensaje simplificado utilizando solo operaciones.

Segundo trabajo individual

El dueño de la fábrica de ventanas decide que fabricará otro tipo de ventana, para ofrecer mayor variedad a sus clientes. A continuación, se muestran los tipos de ventanas que se piensan fabricar, estos dependen del tamaño y forma del espacio en el que se instalarán.

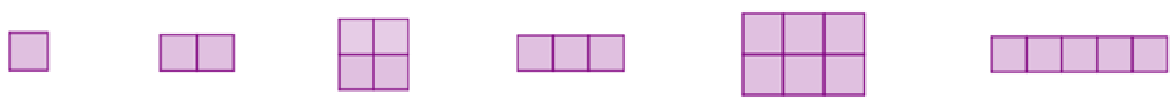


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6

Pero ahora, el dueño necesita que lo ayudes, para que sus trabajadores puedan calcular el número de cuadrados morados que tienen las ventanas y la forma de estas para poderlas fabricar. Para esto, el dueño solicita que respondas las siguientes preguntas:

8. ¿Cuántos cuadrados morados necesita para fabricar una ventana como la de la figura 2?, ¿cuál es la forma de la ventana de la figura 2?

9. ¿Cuántos cuadrados morados necesita para fabricar una ventana como la de la figura 3?, ¿cuál es la forma de la ventana de la figura 3?

10. Ahora, llega un nuevo cliente, que le pide hacer una ventana como la de la figura 6, ¿Cómo sería la forma de está ventana?, ¿cuántos cuadrados morados necesita para fabricarla?

11. Debes construir una ventana como la de la que construiste para la figura 11, ¿Cuántos cuadrados morados se necesitan para hacer la venta?, ¿cuál es la forma de esta ventana?

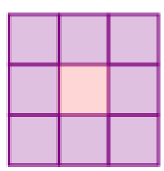
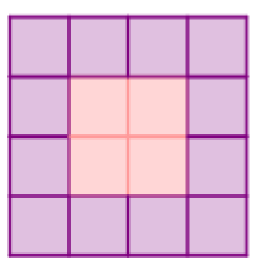
12. ¿Cómo le explicarías a un trabajador el tipo de ventana que debe hacer, si su cliente solo le dice el número de la figura?

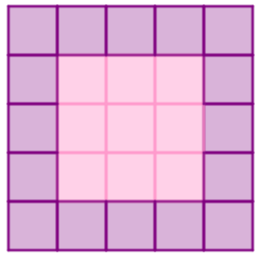
¿Cómo le explicarías la cantidad de cuadrados morados que necesita utilizar para fabricar una ventana, de acuerdo con el tipo de ventana?

Solución normativa: La solución normativa para el primer trabajo individual y el trabajo en equipo donde se pregunta sobre la construcción de la ventana, específicamente por los cuadrados rosados necesarios es $n^{\wedge}2 = r$, donde n es el número del término o figura y r es la cantidad de cuadrados rosados. Observe la tabla 10, donde se muestra el proceso para encontrar esta secuencia.

Tabla 10.

Solución normativa de la fábrica de ventanas para los cuadrados rosados.

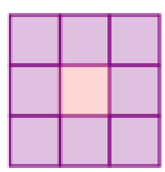
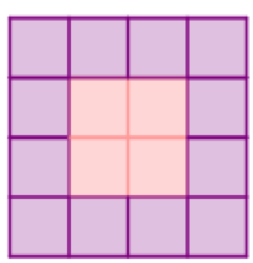
Figura (n)	Ventana	Cantidad de cuadrados rosados (r)
1		$1 = r$
2		$2 + 2 = r$ $2 * 2 = r$ $2^{\wedge}2 = r$

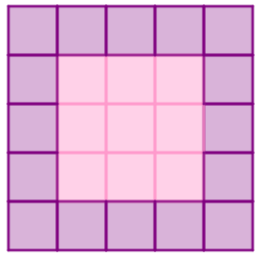
3		$3+3+3=r$ $3*3=r$ $3^\wedge 2=r$
…	…	…
n	n	$n+n+n+\cdots+n=r$ $n*n=r$ $n^\wedge 2=r$

Ahora bien, en esta misma tarea para la construcción de la ventana, también es necesario saber la cantidad de cuadrados morados para construirla, por tanto, los cuadrados morados se hallan por medio de la siguiente formula: $4(n+1)=m$, donde n es el número del término y m es la cantidad de cuadrados morados. Esta solución normativa se da después de un análisis término a término como se muestra en la tabla 11.

Tabla 11.

Solución normativa de la fábrica de ventanas para los cuadrados morados.

Figura (n)	Ventana	Cantidad de cuadrados morados (m)
1		$2+2+2+2=m$ $4(2)=m$ $4(1+1)=m$
2		$3+3+3+3=m$ $4(3)=m$ $4(2+1)=m$

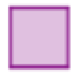
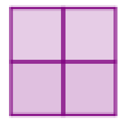
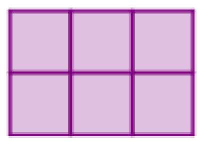
3		$4+4+4+4=m$ $4(4)=m$ $4(3+1)=m$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	n	$(n+1)+(n+1)+$ $(n+1)+(n+1)=m$ $4(n+1)=m$

En el nivel escolar en que se desarrolla esta investigación, la solución normativa puede estar dada en términos del lenguaje natural, es decir, los estudiantes pueden construir una generalización verbal del patrón que determina la secuencia de ventanas bajo las condiciones dadas. Por ejemplo, “la cantidad de cuadrados rosados es igual al número del término al cuadrado y la cantidad de cuadrados morados es igual al número del término más dos, más el término más uno, más el término”, o el estudiante puede encontrar el número de cuadrados de la ventana para cualquier término que se pida.

La solución normativa para el segundo trabajo individual en el cual se le propone una secuencia alternante es: para los términos impares la cantidad de cuadrados morados (m) es $m=n+1$, donde n es el número de la figura; y para los términos pares es $m=n-1$, donde n es el número de la figura. A manera de organización se propone que esta secuencia tiene dos primeras figuras: uno para las figuras impares (figura 1) y otro para las figuras pares (figura 2). Observe la tabla 12, donde se explica el proceso realizado para llegar a la solución normativa para el segundo trabajo individual para las figuras impares.

Tabla 12.

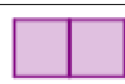
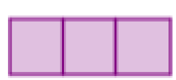
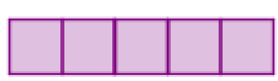
Solución normativa fábrica de ventanas figuras impares.

Figura (n)	Ventana	Cantidad de cuadrados morados (m)
1		$1 = m$
3		$2 + 2 = m$ $4 = m$ $3 + 1 = m$
5		$3 + 3 = m$ $6 = m$ $5 + 1 = m$
…	…	…
$n = 2k + 1, k \epsilon \mathbb{N}$	n	$n + 1 = m$

Adicionalmente, la forma de la ventana depende del término de la secuencia, es decir, si la figura es par la ventana tiene una fila de cuadrados morados y si la figura es impar la ventana tiene dos filas con igual cantidad de cuadrados morados. A continuación, observe el procedimiento realizado para encontrar el patrón que describe la secuencia de las figuras pares en la tabla 13.

Tabla 13.

Solución normativa fábrica de ventanas figuras pares.

Figura (n)	Ventana	Cantidad de cuadrados morados (m)
2		$2 = m$
4		$3 = m$ $4 - 1 = m$
6		$5 = m$ $6 - 1 = m$

$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$n = 2k, k \in \mathbb{N}$	n	$n - 1 = m$

Análisis teórico: Esta Tarea busca que el estudiante construya una generalización del patrón que describe los términos de la secuencia, a partir del análisis de los términos iniciales. Particularmente, en esta secuencia, el estudiante debe encontrar dos términos intermedios, pues cuenta con dos términos iniciales y el término cinco de la secuencia. Esto potencia la habilidad cualitativa, porque lleva al estudio de similitudes y diferencias entre dichos términos, para encontrar los términos intermedios faltantes y la generalización del patrón.

Además, esta Tarea permite el desarrollo de habilidades espaciales, como el reconocimiento de relaciones espaciales (Bishop, 1989), porque el estudiante debe reconocer la forma de la ventana y cómo varía esta, aún sin cambiar su forma. Es decir, es un patrón completamente similar (Rivera, 2013) ya que solo cambia el tamaño.

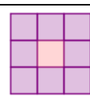
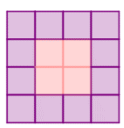
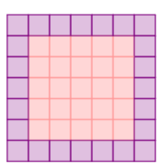
También las habilidades de razonamiento visual juegan un papel importante en esta Tarea, puesto que el estudiante debe establecer relaciones entre las formas bidimensionales de las ventanas y la posición del término dentro de la secuencia. Además, el estudiante debe proponer un modelo que represente la situación y justificar por qué este funciona, mostrando el desarrollo de habilidades de razonamiento inductivo/deductivo.

Por otra parte, en el segundo trabajo individual se exige al estudiante una Actividad de mayor complejidad, pues esta Tarea se caracteriza por ser una secuencia alternante. Es decir, los términos pares describen un patrón y los impares describen otro. La importancia de esta Tarea radica en que el estudiante pueda realizar un análisis de las regularidades, de tal manera que logre identificar cómo se determina cada ventana que conforma la secuencia, poniendo en juego habilidades espaciales de conservación de la forma y habilidades cuantitativas.

Fluidez: En este problema, se dice que un estudiante tiene un pensamiento fluido, cuando realiza diferentes tipos de representaciones, para lograr comprender y abordar el problema. Un estudiante puede realizar una representación pictórica teniendo en cuenta la cantidad de cuadrados rosados y la cantidad de cuadrados morados. Adicionalmente, puede construir una representación numérica de lo observado en el pictograma. A continuación, se muestra un ejemplo de esta forma de enfrentar la Tarea.

Tabla 14.

Análisis a priori fluidez en la fábrica de ventanas.

Pictograma	Cuadrados rosados	Cuadrados morados
	1	8
	4	12
	25	24

De la misma forma, el estudiante puede abordar el segundo trabajo individual, con el fin de comprender cómo cambian los términos de la secuencia. Las características de la secuencia pueden generar conflictos que den paso a evidenciar de manera más clara la fluidez.

Flexibilidad: Se evidencia flexibilidad si un estudiante, inicia dibujando las ventanas para determinar la cantidad de cuadrados rosados y morados dependiendo de la longitud del lado que se pida. El análisis que debe realizar para comprender los patrones que definen la formación de la secuencia, puede promover un cambio de enfoque. Partiendo del pictograma, puede surgir un análisis numérico o algebraico expresado en lenguaje natural.

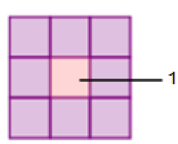
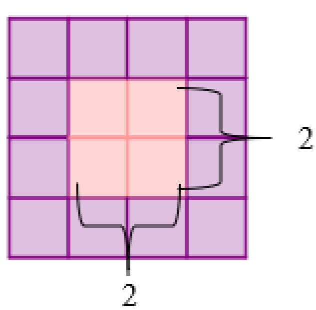
La flexibilidad también se puede evidenciar, cuando un estudiante utiliza más de una estrategia para encontrar la cantidad de personas que puede ubicar en un número determinado de mesas; se espera que la flexibilidad se potencie con el trabajo en equipo. A continuación, se muestran las estrategias que pueden surgir cuando el estudiante se enfrenta a esta Tarea.

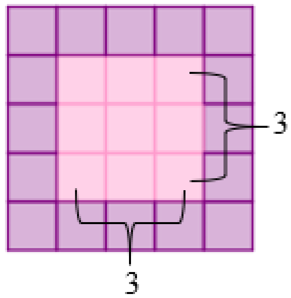
Estrategia 1: Dibujar la ventana que se le pide y luego contar uno a uno cada uno de los cuadrados rosados y morados.

Estrategia 2: En esta estrategia el estudiante utiliza la cantidad de cuadrados de cada lado del cuadrado para calcular la cantidad de cuadrados rosados (observe la tabla 15).

Tabla 15.

Estrategia 2, fábrica de ventanas.

Figura (n)	Ventana	Cantidad de cuadrados rosados (r)
1		$1 = r$
2		$2 * 2 = r$ $4 = r$

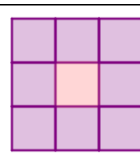
3		$3 * 3 = r$ $9 = r$
…	…	…
n	n	$n * n = r$ $n^\wedge 2 = r$

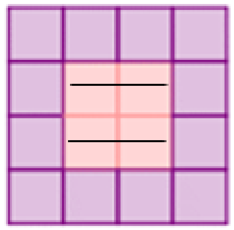
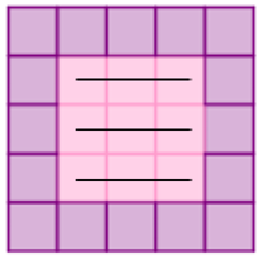
En esta estrategia, el estudiante parte de una estructura ya conocida por él, como lo es el área de un cuadrado, mostrando así el uso de sus habilidades cuantitativas (Rivera, 2013). Por esta razón, llega a que la cantidad de cuadrados rosados es igual al número de la figura de la ventana por el mismo.

Estrategia 3: En esta estrategia el estudiante utiliza el conteo de una forma ordenada para encontrar el patrón que describe la secuencia de cuadrados rosados necesarios para construir la ventana (observe la tabla 16).

Tabla 16.

Estrategia 3, la fábrica de ventanas.

Figura (n)	Ventana	Cantidad de cuadrados rosados (r)
1		$1 = r$

2		$2+2=r$ $4=r$
3		$3+3+3=r$ $9=r$
…	…	…
n	n	$n+n+n+\cdots+n=r$

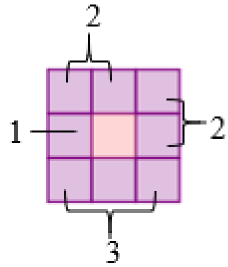
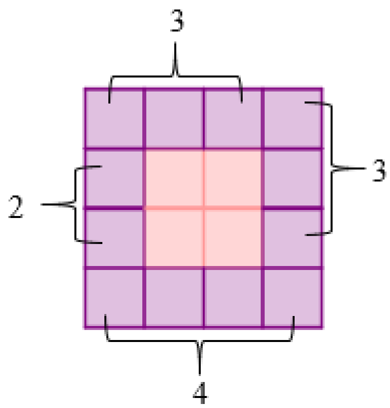
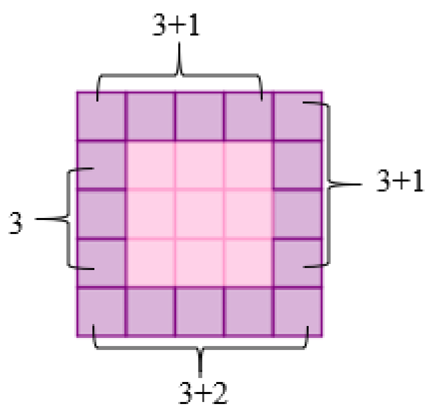
En esta estrategia es posible que el estudiante establezca la relación entre la suma y la multiplicación, es decir, puede generalizar la cantidad de cuadrados rosados a $n*n$. De ser así, muestra un pensamiento flexible y el uso de sus habilidades cuantitativas porque expresa regularidades en razonamientos repetitivos (Rivera, 2013).

Estrategia 4: Con esta estrategia el estudiante puede encontrar la cantidad de cuadrados morados, estableciendo una relación ascendente de la cantidad de cuadrados morados por cada lado de la ventana (observe la tabla 17).

Tabla 17.

Estrategia 4, la fábrica de ventanas.

Figura (n)	Ventana	Cantidad de cuadrados morados (m)

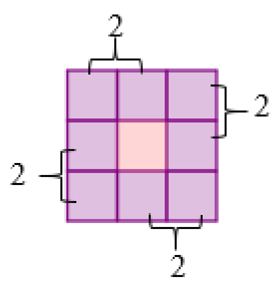
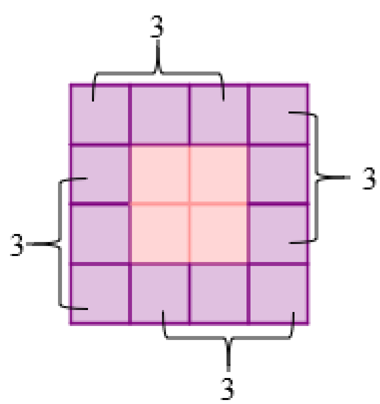
1		$1 + 2 + 2 + 3 = m$ $1 + (1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 2) = m$ $8 = m$
2		$2 + 3 + 3 + 4 = m$ $2 + (2 + 1) + (2 + 1) + (2 + 2) = m$ $12 = m$
3		$3 + (3 + 1) + (3 + 1) + (3 + 2) = m$ $16 = m$
…	…	…
n	n	$n + (n + 1) + (n + 1) + (n + 2) = m$

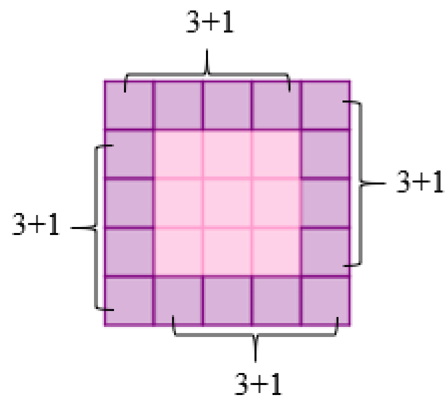
En esta estrategia los estudiantes pueden realizar generalizaciones, basándose en la estructura de la suma, mostrando el uso de sus habilidades cuantitativas. Esto es, aplicando la propiedad distributiva para llegar a las siguientes expresiones $4n + 4 = 4(n + 1) = m$.

Estrategia 5: En esta estrategia, el estudiante analiza la cantidad de cuadrados morados que comparte cada lado de la ventana, con el fin de organizarlos para obtener el mismo número de cuadrados morados cada vez que cuente (observe la tabla 18).

Tabla 18.

Estrategia 5, la fábrica de ventanas.

Figura (n)	Ventana	Cantidad de cuadrados morados (m)
1		$2 + 2 + 2 + 2 = m$ $(1 + 1) + (1 + 1) +$ $(1 + 1) + (1 + 1) = m$ $8 = m$
2		$3 + 3 + 3 + 3 = m$ $(2 + 1) + (2 + 1) +$ $(2 + 1) + (2 + 1) = m$ $12 = m$
3		$(3 + 1) + (3 + 1) +$ $(3 + 1) + (3 + 1) = m$ $16 = m$



…	…	…
n	n	$(n+1)+(n+1)+$ $(n+1)+(n+1)=m$

En esta estrategia los estudiantes pueden realizar generalizaciones, basándose en la estructura de la suma, mostrando el uso de sus habilidades cuantitativas. Esto es, aplicando la propiedad distributiva para llegar a la siguiente expresión $4(n+1)=m$.

Por otra parte, el segundo trabajo individual es una Tarea de mayor nivel, presenta una secuencia diferente a las estudiadas. Puede evidenciarse un pensamiento flexible, por ejemplo, cuando un estudiante logra encontrar la diferencia entre la secuencia presentada con las estudiadas en tareas anteriores, haciendo uso de sus habilidades cualitativas. Además, a partir de esa diferencia, puede proponer un patrón alternante entre los términos de la secuencia. Para encontrar la cantidad de cuadrados necesarios para armar la ventana, necesita determinar la forma, la cual también depende del tipo de término, mostrando el uso de sus habilidades espaciales, en la conservación de la percepción, de forma activa (Bishop, 1989) y a la discriminación visual, por la naturaleza de la secuencia.

En esta Tarea se puede decir que un estudiante no tiene un pensamiento flexible, cuando no logra encontrar la diferencia entre este tipo de secuencia y las anteriormente estudiadas. Es decir, propone un solo patrón para describir la secuencia, cuando esta necesariamente se describe con dos patrones, una para las figuras pares y otra para las impares. En este caso, se dice que el estudiante tiene una fijación.

5.1.4 Hacer números (Ver apéndice F)

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Hacer números

Nombre: ___________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

____

____

Fecha: _____________________________

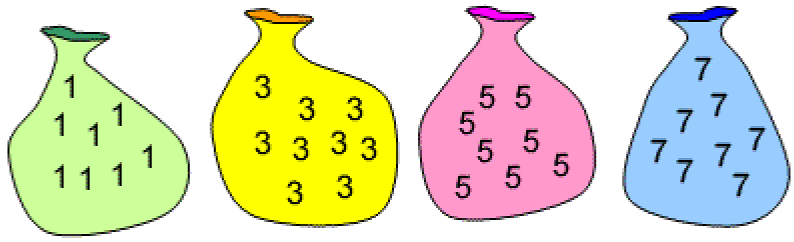
Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Trabajo individual

Situación

Un día en clase de matemáticas, el profesor lleva 4 bolsas con tarjetas. En cada bolsa hay tarjetas con los números unos, tres, cincos y sietes, como se ve a continuación.



El profesor plantea una serie de retos a sus estudiantes, ¿será qué puedes superar estos retos?

1. Arma el número 16 con cuatro números de las bolsas, ¿Hay una sola forma o puedes encontrar más?

2. Arma el número 28 con seis números de las bolsas, ¿Hay una sola forma o puedes encontrar más?

3. Arma cinco números cualesquiera utilizando ocho números de la bolsa. Escribe como armaste cada uno de los cinco números.

Trabajo en equipo

4. En equipo discutan como armaron los cinco números del inciso 3. Escriba tres números diferentes armados por tus compañeros.

5. ¿Qué características tienen en común los números armados?, ¿qué características tienen en común los números de las bolsas?

6. Ahora, en equipo armen el número 21 con seis números de las bolsas. Explica tu respuesta

7. ¿Cuáles números puedes armar con seis números de las bolsas?, ¿Qué tienen en común estos números?

8. Si te piden armar un número cualquiera con los números de las bolsas, ¿cómo garantizas que se puede armar?

Segundo trabajo individual

Ahora el profesor decide desafiar aún más a sus estudiantes, y les pide que armen conjuntos de tres números (los que ellos quieran) y luego seleccionen dos de tal forma que al sumarlos les dé un número par, así:

$$\boxed{2 \qquad 11 \qquad 21} \; 21 + 11 = 32$$

9. Inventa cinco conjuntos con tres números y luego selecciona dos de tal forma que su suma sea un número par.

10. Existe algún conjunto de tres números, de tal forma que no pueda sumar dos números de él y dé un número divisible entre dos. Justifique ampliamente su respuesta.

Solución normativa: La solución normativa de esta Tarea parte de las propiedades de los números pares e impares.

Por medio de la exploración se encuentra que al sumar números impares una cantidad par de veces el resultado es par. En los primeros incisos se les pide a los estudiantes escoger 4 números de las bolsas y que de estos se obtenga 16, y luego escoger 6 números y obtener 28, resultado que es posible que se dé. A partir de lo encontrado en los dos primeros incisos de la Tarea junto con las características obtenidas del inciso tres y cinco, se puede deducir que si se suman cinco veces números impares el resultado me da un número impar, y que si sumo una cantidad par números impares el resultado es un número par.

En el segundo trabajo individual, se propone una Tarea desafiante, relacionada con la primera parte del trabajo, la idea es que los estudiantes puedan relacionar las Tareas y puedan llegar a concluir que la suma de dos números impares es par y que la suma de dos números pares es par.

Análisis Teórico: Esta tarea se divide en dos partes, en la primera se trabaja con una Tarea con múltiples soluciones, que permiten que el estudiante explore diferentes caminos de solución. La segunda parte, se trata de una Tarea que no tiene solución si solo se piensa en la operación suma. Con este tipo de Tarea, se espera que los estudiantes analicen propiedades de los números pares e impares.

Con esta Tarea se busca que los estudiantes desarrollen habilidades cuantitativas y de razonamiento. Las habilidades cuantitativas, se ven reflejadas en el uso de una estructura establecida, en determinar y expresar regularidades repetidas, ya que esto le permite plantear conjeturas. El planteamiento de estas conjeturas también son resultados de una habilidad de razonamiento inductivo, sustentado con argumentos para convencerse no solo a sí mismo sino a sus compañeros.

En el primer trabajo individual y la primera parte del trabajo en equipo se espera que los estudiantes a partir de la exploración encuentren que todos los números encontrados son pares y que los números de las bolsas son impares. Además, que al sumar números impares una cantidad par, su resultado es un número par, mostrando el desarrollo de habilidades cuantitativas y de razonamiento.

Luego en la segunda parte del trabajo en equipo, viene una Tarea que no se puede solucionar solo con suma. Los estudiantes puedan llegar a concluir primero por medio de ensayo y error que el número 21 no se puede armar sumando 6 números de las bolsas. Pero luego, por medio de las preguntas y el análisis de la tarea entre compañeros, se espera que los estudiantes concluyan que dicha suma no se puede realizar, porque 21 es un número impar.

En esta actividad se ponen en juego habilidades de razonamiento inferencial (Samper, Leguizamón y Camargo, 2001), pues el estudiante debe establecer argumentos que sustenten la imposibilidad de realizar la Tarea, por el camino usual.

Funciones cognitivas

Fluidez: Se evidencia fluidez cuando un estudiante decide que puede solucionar la Tarea, por medio de ensayo y error o por un ensayo y error controlado. El ensayo y error controlado, se ve reflejado cuando se realizar operaciones como la división del número entre un número conveniente para luego armar el número que se pide. Por ejemplo, el estudiante toma el 16 y lo divide en 2, esto es 8 y luego armar el 8 con dos números de las bolsas, esta es una estrategia que permite hallar 4 números que sumados den 16, en este caso pueden ser 5, 3, 5, 3 o 7, 1, 5, 3.

Flexibilidad: Un estudiante muestra un pensamiento flexible, si puede encontrar diferentes formas para armar cada número que se solicita, evidenciando el desarrollo de habilidades cuantitativas. Para aclarar esta idea, observe el siguiente ejemplo en el cual no se evidencia flexibilidad. Un estudiante decide construir dos soluciones para armar el número 21 con diferentes números, pero las dos soluciones son armadas de la misma forma. Por ejemplo, para armar 21 construye una suma de un mismo número tres veces más el número que hace falta para completar el 21, así, $5 + 5 + 5 + 1 = 21, 3 + 3 + 3 + 7 = 21$. Mostrando que, aunque use números diferentes, las dos soluciones se comportan de la misma forma y por ende el estudiante presenta una fijación hacia una forma de solución.

También se evidencia flexibilidad, si el estudiante al abordar la Tarea que no es posible resolver de la misma forma como resolvió las anteriores, busca otro camino para la solución; esta actividad en algunos casos puede motivar a los estudiantes a proponer una generalización sobre la tarea. Dicha generalización puede estar en función de la suma de los números pares o impares.

En el segundo trabajo individual, la Tarea presenta un mayor desafío, porque, aunque la Tarea esté relacionada con conceptos que se espera aborden en clase (MEN, 2006), su enfoque permite la conexión de diferentes propiedades de los números naturales. Primero porque los estudiantes deben estar familiarizados con los conceptos de conjunto y cardinalidad de un conjunto. En esta Tarea un estudiante evidencia flexibilidad de acuerdo con la forma en la que arma los conjuntos, puesto que se espera pueda armar conjuntos no solo con diferentes números, sino que no se vea un patrón entre ellos. Para dar mayor claridad, un estudiante no evidencia un pensamiento flexible cuando propone diferentes conjuntos, pero todos estos se arman de la misma forma. Por ejemplo, $\{2,4,6\}, \{8,10,12\}, \{14,16,18\}$, mostrando una fijación del estudiante hacia el tipo de conjunto conformado por número pares consecutivos.

Originalidad: En esta Tarea, se evidencia originalidad si un estudiante construye el número que se le pide utilizando diferentes operaciones. Por ejemplo, una respuesta original es, $21 = 1 + 3^2 + 7 + 3 + 1$, como se ve en este tipo de respuesta, se utilizan dos operaciones diferentes: suma y potencia de números naturales. Esta respuesta es poco común, puesto que los términos unir, armar y juntar, se relacionan directamente con la suma. En este caso hay una predisposición por el lenguaje utilizado tanto en libros de texto como por el profesor, al momento de construir la operación suma entre números naturales.

5.1.5 Cubos aquí y allá (Ver apéndice G)

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Cubos aquí y allá

Nombre: ___________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

____

____

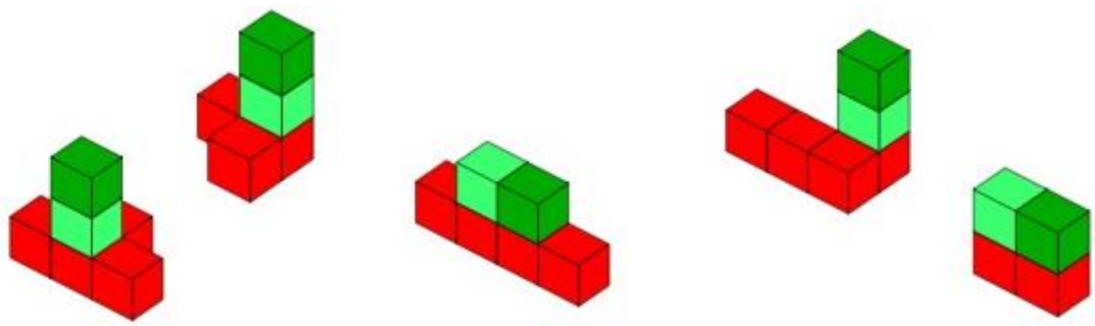
Fecha: _____________________________

Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Trabajo individual

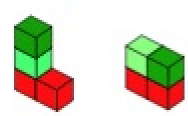
Situación



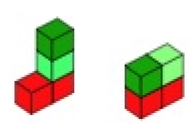
Este juego se trata de ubicar cubos verdes encima de cubos rojos. Para jugar, debes seguir las siguientes reglas:

1. Los cubos rojos deben tocar el piso o la mesa.
2. Los cubos verdes no deben tocar el piso.
3. Debes unir los cubos cara a cara.
4. Los cubos verdes deben estar seguidos, es decir, no pueden estar separados.
5. Los cubos verdes siempre deben ir encima de una cara de un cubo rojo.

Por ejemplo, si usamos dos cubos verdes y dos cubos rojos, debemos buscar todas las posibles formas de armar figuras siguiendo las reglas. Como se muestra a continuación.



Atención: Debes tener cuidado con no tener figuras repetidas, es decir, tener una figura y su rotación en el conteo en diferente posición. Por ejemplo, las siguientes figuras no serían una posibilidad porque son rotaciones de las figuras anteriores.



Entonces tu desafío es encontrar todas las posibilidades que tienes de armar figuras con tres cubos rojos y dos verdes. ¡No olvides seguir las reglas!

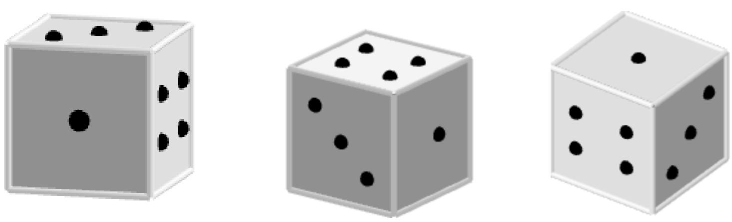
1) ¿Cómo sabes que tienes todas las posibilidades?
2) ¿Qué método o forma utilizaste para armar estas figuras?
3) ¿Todas tus formas son diferentes? O ¿algunas son rotaciones de las otras?

Trabajo en equipo

4) En equipo, compartan las estrategias que utilizaron para encontrar todas las posibles maneras de armar figuras con tres cubos rojos y dos verdes, siguiendo cada una de las reglas. ¿Todos utilizaron la misma estrategia? Expliquen al menos dos estrategias para armar las figuras con tres cubos rojos y dos verdes.
5) Una vez que han escrito diferentes estrategias y han decidido que son correctas, utilicen alguna para encontrar todas las posibilidades para armar figuras con cuatro cubos verdes y dos rojos.
6) Escribe un mensaje claro, en el que le expliques a un compañero la mejor estrategia para encontrar la cantidad de figuras que puede armar utilizando cubos rojos y verdes, siguiendo las reglas del juego.

Trabajo individual

Ahora, tengo un nuevo desafío para ti. A continuación, te presento una vista del dado, y tres rotaciones de estas.



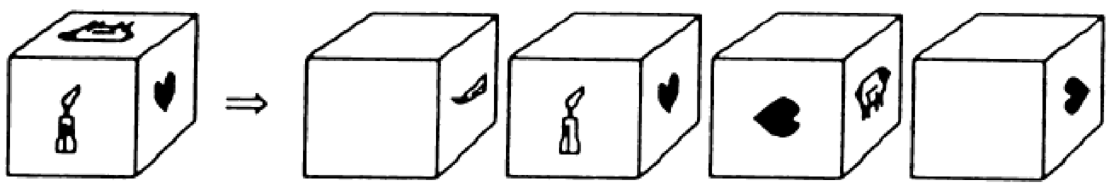
7) En la hoja isométrica dibuja tres rotaciones diferentes de cada una de las siguientes caras del dado.

8) En la hoja isométrica, dibuja el dado completo en una secuencia de tres vistas diferentes, es decir, con tres dibujos del dado, se deben encontrar sus seis caras.

9) En la hoja isométrica, dibuja el dado completo en una secuencia de cinco vistas diferentes, es decir, con tres dibujos del dado, se deben encontrar sus seis caras).

10) Las secuencias que hiciste en los ítems anteriores, ¿representan el mismo dado, o forman un dado diferente. ¿Justifica tu respuesta?

11) En la hoja isométrica, dada la siguiente figura de un cubo, completa las figuras que deben ir en las caras en blanco del cubo.

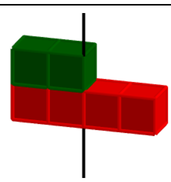
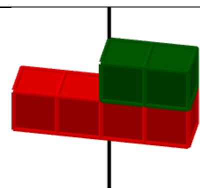
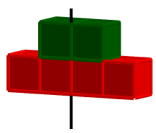
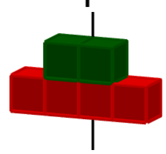
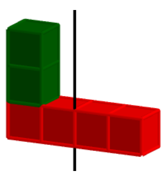
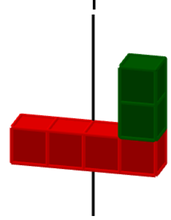
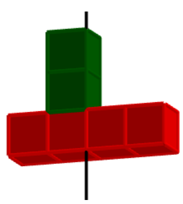
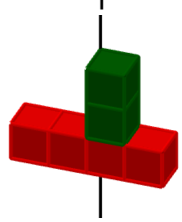


Solución normativa: La solución normativa para esta Tarea es establecer los tipos de base que se pueden hacer con cuatro cubos rojos, de tal forma que cumplan con las condiciones de la Tarea. Para este caso el número de bases diferentes que se pueden construir son siete. Se espera que los estudiantes lleguen a construir estas siete bases con la ayuda de la manipulación del material concreto con el que se cuenta para esta Tarea (cubos de igual tamaño rojos y verdes).

Luego de la construcción de cada base, se puede establecer una línea imaginaria de simetría que permita encontrar la cantidad de figuras que se pueden armar con los cuadrados verde antes de la línea de simetría. Esta Tarea se caracteriza por poner en juego un conteo sistemático, que permite tener control sobre las posibilidades que se van encontrando. Por ejemplo, para una base en forma de rectángulo con 4 cubos, la construcción de las figuras corresponde a la información presentada en la Tabla 19.

Tabla 19.

Línea de simetría, cubos aquí y allá.

<table>
<tr><th>Figura antes de la línea de simetría</th><th>Figura después de la línea de simetría</th><th>Igualdad de las dos figuras</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="4">Como se observa la figura realizada con los cubos verdes antes de la línea de simetría es exactamente la misma figura realizada después de la línea de simetría, esto por la definición de línea de simetría. Por ende, para la base en forma de rectángulo, existen 4 posibilidades.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Análisis teórico: Este tipo de Tarea en el primer trabajo individual y en equipo incluye el desarrollo de habilidades espaciales; en particular, el estudiante debe tener en cuenta que las figuras que formen deben ser diferentes. Las transformaciones como rotaciones y traslaciones corresponden a la misma figura. Además, esta Tarea puede potenciar el desarrollo de la habilidad causal, dado que los estudiantes deben determinar la cantidad de figuras diferentes de acuerdo con un conjunto de reglas.

Otra característica fundamental de esta Tarea es el trabajo sistemático, ya que se requiere del planteamiento del espacio muestral de una forma ordenada. De tal manera que los estudiantes puedan encontrar la cantidad exacta de figuras que cumplen con las reglas establecidas por la Tarea.

En el segundo trabajo individual, la Tarea tiene como objetivo desarrollar habilidades espaciales, por ejemplo, el reconocimiento de relaciones espaciales (Bishop, 1989). Este trabajo exige identificar características como rotaciones y reflexiones, para analizar si se está dibujando una figura diferente. Además, permite que el estudiante desarrolle la habilidad de conservación de la percepción (Bishop, 1989), dado que le exige mantener la forma de los puntos del dado, aunque lo esté moviendo. Esta conservación de la percepción es pasiva (Gutiérrez, 1992), el estudiante tiene el objeto concreto para manipularlo y encontrar las vistas del dado, mientras que es activa cuando el individuo debe manipular mentalmente el objeto para encontrar sus rotaciones.

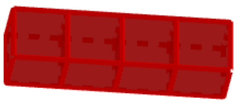
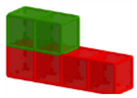
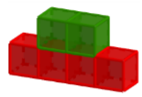
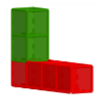
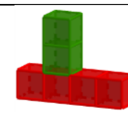
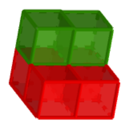
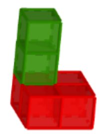
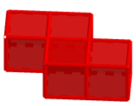
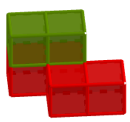
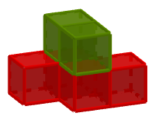
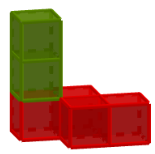
Funciones cognitivas

Fluidez: En esta Tarea, se evidencia fluidez cuando al estudiante plantea diferentes formas de abordar la Tarea. Por ejemplo, para el primer trabajo individual y en equipo, los estudiantes piensan en dibujar las figuras, o en realizar un trabajo en el cual dejen de lado la forma figural y comiencen a utilizar un símbolo para cada cubo. Es decir, los cubos rojos, lo simbolizan con la letra r, los verdes con v; con esta información pueden proponer quíntuplas como (v, v, v, r, r), en esta forma de abordar la Tarea los estudiantes ponen en juego nociones relacionadas con conteo y espacio muestral, conocimientos que según el MEN (2006) deben potenciarse en el nivel escolar de la población de estudio.

Flexibilidad: En el primer trabajo individual y grupal, se evidencia flexibilidad cuando un estudiante representa gráficamente las figuras siguiendo las reglas del juego, sin establecer una regla de construcción específica. Una búsqueda accidental de las figuras puede generar incertidumbre en los estudiantes. Esto dado que no tienen control de las figuras que van construyendo y por ende no pueden justificar si las han encontrado todas. A partir de esto, el estudiante concibe la idea de llevar un orden para hacer las figuras. Por ejemplo, realiza las figuras por base, haciendo para cada base la cantidad de figuras correspondientes (ver la tabla 20).

Tabla 20.

Construcción de pensamiento sistemático, cubos aquí y allá.

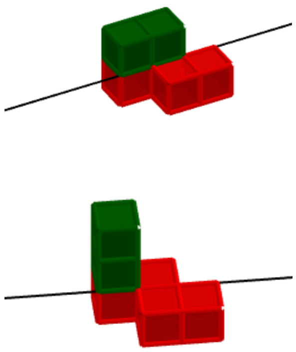
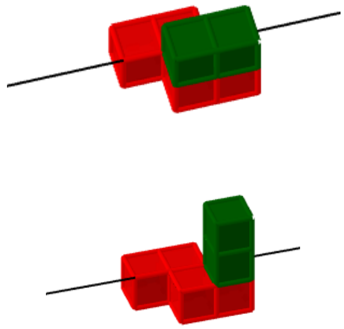
Tipo de base	Figuras			
				
				
				

En la tabla anterior se muestran las figuras que corresponden a tres bases diferentes. En total, el estudiante debe construir siete bases diferentes, para obtener la cantidad total de figuras que puede armar de acuerdo con las reglas del juego.

Además, el estudiante puede evidenciar flexibilidad si en un momento dado parte de las bases y pone los cubos verdes encima de los rojos de una forma aleatoria sin tener un orden. Y luego cambia de estrategia, utilizando las líneas de simetría que le permiten determinar que después de construir cierta cantidad de formas con la base y los cubos verdes, no tendrá que seguir porque las otras figuras son resultado de rotar las primeras. Observe la siguiente tabla, en la que se explica cómo funciona esta estrategia.

Tabla 21.

Flexibilidad en cubos aquí y allá.

Figura antes de la línea de simetría	Figura por debajo de la línea de simetría	Igualdad de las dos figuras
		Como se observa la figura realizada con los cubos verdes antes de la línea de simetría es exactamente la misma figura realizada por debajo de la línea de simetría.

Un estudiante que realice esta estrategia muestra evidencia de flexibilidad, ya que surge de una exploración previa y la sistematización para encontrar todas las figuras. Esto implica un cambio de enfoque que parte de una exploración accidental a una sistematización de la respuesta.

En el segundo trabajo individual, se evidencia flexibilidad cuando un estudiante realiza diversas rotaciones para encontrar las diferentes vistas de las caras del dado pedidas. Observe el siguiente ejemplo, en el cual el estudiante realiza primero un giro de la figura original de 90° con respecto a la horizontal de la cara trasera del dado y luego realiza un giro de 180° con respecto a la vertical de la cara delantera del dado. Luego para encontrar otra rotación lo hace girando el dado original 90° con respecto a la horizontal de la cara derecha.

Tabla 22.

Flexibilidad, cubos aquí y allá (dados).

		
Figura original	Giro de 180°	Giro de 90°

El ítem 11 exige a los estudiantes un trabajo más desafiante, porque debe decidir que figura hace falta en la cara blanca y su posición, ya que, de acuerdo con el giro, el objeto dibujado en la cara también gira. Esto potencia el desarrollo de la habilidad de conservación de la percepción de forma activa, pues los estudiantes deben manipular mentalmente el cubo para poder realizar la Tarea, pues en este punto se espera que con la ayuda del trabajo individual y en equipo ya el estudiante no necesite del material concreto. En esta Tarea se evidencia flexibilidad, cuando el estudiante realiza diferentes transformaciones mentales para encontrar la figura faltante y determinar su posición. Esto se pone en evidencia en el momento de la socialización, donde los estudiantes tienen la oportunidad de explicar a sus compañeros cómo dieron solución a la tarea.

5.1.6 Área y perímetro (Ver apéndice H)

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Área y perímetro

Nombre: ___________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.

____

____

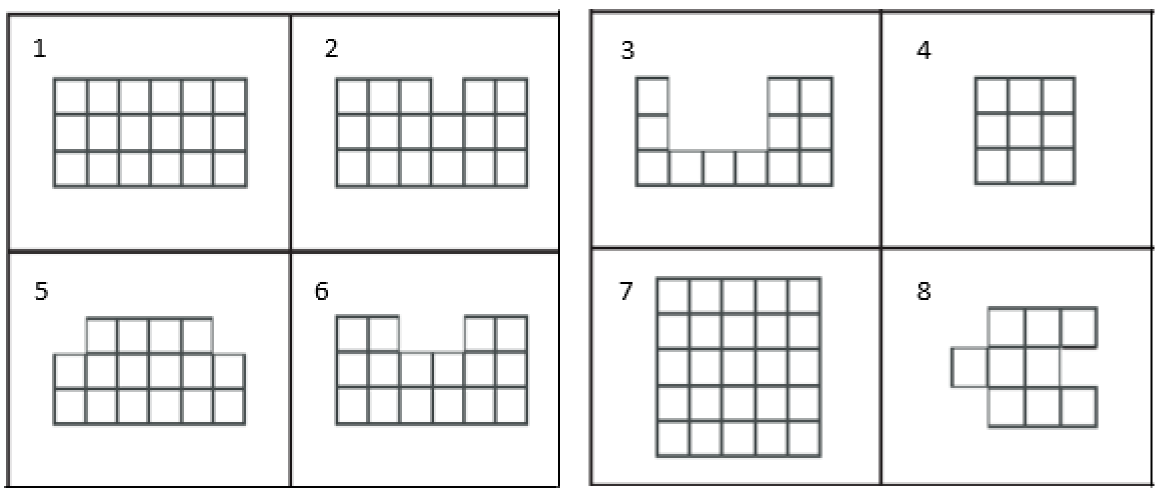
Fecha: ___________________________

- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Trabajo individual

Situación

Un grupo de estudiantes están jugando a armar las siguientes figuras con cuadrados de 1 cm de lado.



Después de terminar de armar las figuras, ellos deciden que el ganador del juego es quién haya construido la figura con más área y más perímetro de todas.

1) ¿Cuál es la figura ganadora? Explica ampliamente tu respuesta.

2) ¿Puedes dibujar una figura con cuadrados de 1 cm de lado, en la que el área sea numéricamente igual a su perímetro? ¿Existen más figuras?

3) ¿Puedes dibujar una figura (con cuadrados de 1 cm de lado) en la que el perímetro sea numéricamente el doble del área? ¿Existen más figuras?

Trabajo en equipo

4) En equipo, analicen las estrategias utilizadas para dar respuesta al ítem 2. Utilice dos estrategias para encontrar como mínimo cinco figuras que cumplan con la condición de que el área sea numéricamente igual a su perímetro.

5) En equipo, analicen las estrategias utilizadas para dar respuesta al ítem 3. Utilice dos estrategias para encontrar como mínimo cinco figuras que cumplan con la condición de que el perímetro sea numéricamente el doble del área.

6) En equipo, escriban un mensaje a un amigo, en el cual le expliquen cómo realizar figuras con cuadrados de 1 cm que cumplan con que el perímetro y el área numéricamente sean iguales.

7) En equipo, escriban un mensaje a un amigo, en el cual le expliquen cómo realizar figuras con cuadrados de 1 cm de lado que cumplan con que el perímetro sea igual al doble del área numéricamente.

Segundo trabajo individual

8) Dibuja figuras que tengan la misma área, pero diferentes perímetros.

9) Explica la estrategia utilizada para realizar las figuras anteriores.

10) Ahora, ¿puedes dibujar algunas figuras que tengan el mismo perímetro, pero diferentes áreas?

11) Explica detalladamente la o las estrategias utilizadas para realizar las figuras anteriores.

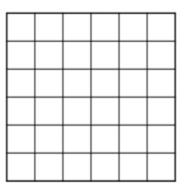
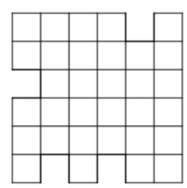
12) Dibuja una figura y luego modifícala para que esta tenga menos área. ¿Existe una única forma de modificarla o puedes hacer varias modificaciones? Explica ampliamente tu respuesta.

Solución normativa: La solución normativa para esta Tarea, en el primer trabajo individual y en el trabajo en equipo depende de la cantidad de cuadrados. Por ejemplo, para que numéricamente una figura tenga la misma área y perímetro, se puede aplicar la siguiente ecuación $x^2 = 4x$, luego $x = 4$, entonces un cuadrado formado por cuatro cuadrados de lado tiene numéricamente el mismo perímetro y área.

Si se construye un cuadrado de lado $6\ cm$, su área es $36\ cm^2$ y su perímetro es $24\ cm$, luego es posible calcular el máximo común divisor (Mcd) entre 36 y 24, y se borran del cuadrado la cantidad de $Mcd\ (36, 24)$, es decir, 4 cuadrados, puesto que al quitar 4 cuadrados el área disminuye pero el perímetro aumenta, exactamente por cada cuadrado quitado aumenta dos cm el perímetro. Observe como se utiliza esta estrategia en la siguiente tabla.

Tabla 23.

Estrategias área y perímetro.

Estrategia	Figura con un perímetro igual numéricamente al área
 $Área = 36cm^2$ $Perímetro = 24\ cm$ $Mcd(36{,}24) = 4$ Entonces le quitamos 4 cuadrados no consecutivos de los extremos del cuadrado	 $Área = 32\ cm^2$ $Perímetro = 32\ cm$

Esta estrategia, también funciona para un cuadrado de $7\ cm$ de lado. Sin embargo, cuando la diferencia entre el área y el perímetro es mayor a 2*Mcd esta estrategia no funciona porque al quitarle los cuadrados indicados por el Mcd el área va a seguir siendo mayor que el perímetro.

Esta Tarea motiva la construcción de diferentes formas de solución para determinar la mayor cantidad de figuras con un perímetro y área iguales. A sí mismo, esta Tarea permite el uso de diferentes estrategias para encontrar una figura en la cual el perímetro sea el doble del área.

Para el segundo trabajo individual, la solución normativa en el inciso 8 consiste en dibujar la misma cantidad de cuadrados de un centímetro, unidos de diferentes formas. Dado que al tener la misma cantidad de cuadrados no superpuestos el área se conserva, pero es posible que el perímetro cambie.

El último inciso de esta Tarea exige al estudiante plantear conjeturas que surgen durante toda la actividad generada por la Tarea. Por ejemplo, si se tiene un cuadrado y se le quita una línea a uno de los cuadrados de 1 cm el área disminuye, pero el perímetro aumenta. El área de un cuadrado de lado 5 cm o más, es mayor que su perímetro.

Análisis teórico: Esta Tarea tiene como objetivo consolidar la comprensión de área y perímetro de figuras planas, trabajando de forma conjunta los dos conceptos. Baltar (1996) afirma que trabajar los dos conceptos al tiempo permite disminuir las dificultades conceptuales observadas en la investigación (Bellemain y Bittar, 2000; Kouba, 1988; Moyer 2001) alrededor del área y el perímetro, especialmente cuando se trabaja desde lo geométrico y numérico. Por esta razón, en esta Tarea se trabaja desde esos dos enfoques.

En esta Tarea se ponen en juego tres tipos de habilidades. Las habilidades espaciales, cuando se estudian las características que debe tener una figura para, por ejemplo, tener la misma área y perímetro. Las habilidades cuantitativas, se ponen en juego cuando el estudiante busca relaciones numéricas para encontrar relaciones entre la forma de la figura, el área y el perímetro. Las habilidades cualitativas, se desarrollan cuando el estudiante encuentra similitudes y diferencias entre, por ejemplo, entre las figuras que numéricamente tienen la misma área y el mismo perímetro.

Funciones cognitivas

Fluidez: En esta Tarea se evidencia fluidez cuando un estudiante tiene diferentes ideas para abordar la Tarea. Pues las características de esta Tarea permiten el uso de diferentes estrategias para encontrar la mayor cantidad de soluciones posibles. Para esta Tarea específicamente, el estudiante puede iniciar con una estrategia de ensayo y error para encontrar diferentes formas que cumplan con la condición de que se le pide. También puede abordar la Tarea numéricamente, esto es, partir de las condiciones sobre el área y perímetro para luego construir la figura.

Flexibilidad: La flexibilidad se evidencia cuando un estudiante materializa las diferentes estrategias para resolver la Tarea. Esta Tarea se caracteriza precisamente por exigir diferentes estrategias para lograr encontrar las figuras que cumplen las condiciones exigidas en cada ítem. Permitiendo el desarrollo de habilidades cuantitativas, espaciales y cualitativas como se mencionó en el análisis normativo.

Las estrategias que pueden aplicar los estudiantes para resolver el ítem en el que se le pide realizar figuras que tienen un área igual numéricamente al perímetro.

- Por medio de ensayo y error, encontrar que el cuadrado de lado $4cm$, cumple con la condición.
- Utilizando ensayo y error en figuras diferentes a cuadrados o rectángulos que cumplan la condición. Como se observa en la figura 26.

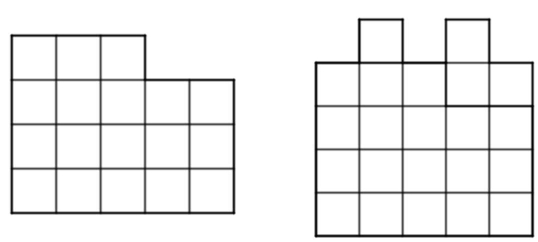


Figura 27. Estrategia ensayo y error, para figuras con un perímetro igual numéricamente al área.

- Utilizando máximo común divisor entre el número del área y el número del perímetro, de un cuadrado para hallar la forma de extraer cuadrados o segmentos para que el área sea igual numéricamente al perímetro. Esta estrategia se hizo explícita en el análisis normativo de esta Tarea.

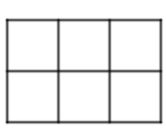
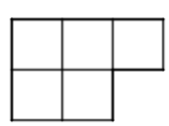
Si un estudiante utiliza más de una estrategia de las anteriormente escritas, u otras que no se hayan contemplado anteriormente se dice que un estudiante tiene un pensamiento flexible. Porque es capaz de cambiar de estrategia cuando una no le sigue funcionando.

En el ítem 4, el estudiante debe encontrar figuras en las cuales el perímetro sea igual al doble de su área. Se espera que los estudiantes utilicen diferentes estrategias para encontrar diferentes figuras que cumplan con esa condición. Algunas de las estrategias que pueden utilizar los estudiantes son:

- Ensayo y error, sin ningún criterio para encontrar figuras que cumplen la condición.
- Ensayo y error con cuadrados, encontrando que el único cuadrado que cumple con la condición en el cuadrado de lado 2 cm.
- Partir de una figura y a partir de ella encuentra la forma de que el área y el perímetro sean igual numéricamente.

Tabla 24.

Estrategia área y perímetro.

Figura original		Figura transformada para cumplir la condición	
	$Área = 6cm^2$ $Perímetro = 10\ cm$		$Área = 5cm^2$ $Perímetro = 10\ cm$

Si un estudiante utiliza más de una estrategia de las anteriormente mencionadas u otras diferentes a estas, entonces el estudiante muestra evidencias de flexibilidad.

También se evidencia flexibilidad en esta Tarea, cuando un estudiante puede pasar de lo geométrico a lo numérico con el fin de encontrar las figuras exigidas para que cumplan cada una de las condiciones. Además, es capaz de encontrar generalizaciones en cuanto a la forma de la figura, su área y su perímetro, mostrando habilidades espaciales y cuantitativas.

Por otra parte, si el estudiante muestra las similitudes y diferencias entre las figuras que cumplen las condiciones, pone en juego habilidades cualitativas. Por ejemplo, cuando el estudiante encuentra que las estrategias utilizadas para los cuadrados deben ser diferentes a las utilizadas para los rectángulos y a su vez diferentes para otro tipo de polígonos.

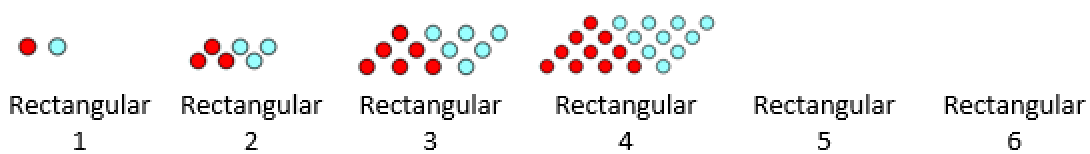
5.1.7 Prueba final, entrevista (Ver apéndice I)

UIS Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Nombre: ____ Grado: ___________

Entrevista (rectangular)

Los números rectangulares, son números que se pueden representar geométricamente en forma de romboide como se muestra en la figura. Los primeros cuatros números rectangulares son el 2, 6, 12 y 20, es decir, el rectangular 1 representa el número 2, el rectangular 2 representa el número 6, el rectangular 3 representa el número 12, así sucesivamente.



a) Tú primera tarea es encontrar el número rectangular 5 y 6, ¿qué número representan cada uno de estos rectangulares?

b) Si nos saltamos los números rectangulares ¿Puedes encontrar el rectangular 10 y qué número que representa? Y ¿Cómo queda el triangular 21 y qué número representa?

c) Puedes explicarnos de forma clara la estrategia que utilizas para encontrar cada uno de los rectangulares.

d) ¿Tu estrategia funciona para encontrar el rectangular 100?, ¿Por qué?, ¿Qué número representa el rectangular 100?

Solución normativa: Esta Tarea permite que el estudiante la analice la secuencia de acuerdo con la forma en la cual él perciba cada etapa. Es decir, un estudiante puede centrarse en que el patrón rectangular se puede dividir en dos triángulos y que cada triángulo representa un número triangular, como el trabajado tanto en la prueba diagnóstica como en la final. O puede centrarse en la cantidad de círculos de las filas y las columnas. Generalmente en matemáticas se intenta generalizar el patrón, por ejemplo, si el estudiante se fija en la diagonal o la horizontal formada por los círculos, la solución normativa para esto es:

Si se centra en la relación con la secuencia estudiada durante la prueba inicial y final, el patrón que describe la secuencia es $2T_n = R_n$, donde T_n es el término triangular n y R_n es el término rectangular n.

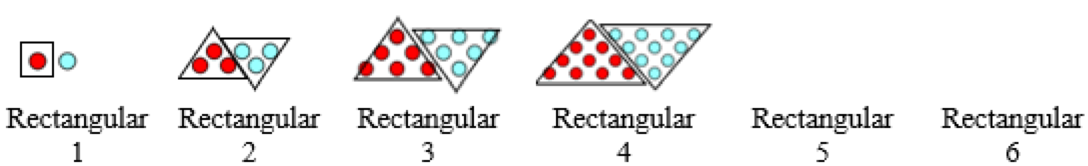
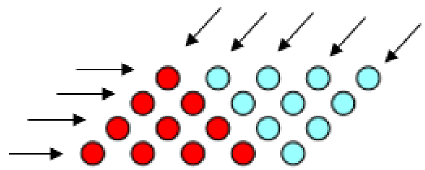


Figura 28. Buscando el patrón.

Si se centra en la cantidad de círculos que hay en las filas y las columnas, la solución normativa es $R_n = n * n + 1$, donde n es el número del término rectangular que se quiere encontrar.



4 filar y 5 columnas

Entonces la cantidad de círculos es $5 * 4 = 20$

Rectangular 4

Figura 29. Buscando el patrón con filas y columnas.

Análisis teórico

Funciones cognitivas

Fluidez: Para resolver esta tarea los estudiantes pueden proponer diferentes ideas como: probar posibles soluciones mediante ensayo y error; analizar el cambio de un término al siguiente, realizar pictogramas o utilizar objetos concretos para simular la secuencia, entre otros. En estas respuestas dan cuenta de la fluidez, como la exposición de las ideas de los estudiantes frente a diversos métodos de solución.

Flexibilidad: Se evidencia cuando un estudiante inicia con una regularidad de un término al siguiente, primero dividiendo cada termino en dos triángulos, y calculando la cantidad de círculos de cada triángulo. Es decir, parte de un término y añade al término siguiente una base de círculos de igual cantidad al término, esto es, en el término 5, parte del término 4 y le agrega una fila base de 5 círculos, esto para el primer triángulo del término y realiza lo mismo para el otro triángulo rotado del término.

Sin embargo, cuando el estudiante debe encontrar el término 100, este puede realizar un cambio de enfoque en su respuesta, ya que el primer enfoque no es muy eficiente, por ejemplo, puede proponer que para encontrar el término 100 lo que debe hacer es dibujar 100 círculos en la fila base, luego una fila con 99 círculos, luego otra fila con 98 círculos, así sucesivamente hasta llegar a una fila con un círculo, para el primer triángulo del término y luego hace lo mismo para el otro triángulo rotado del término. De esto puede concluir, que esta secuencia describe un patrón que es igual al doble de los términos de la secuencia de círculos crecientes o del número triangular.

También puede utilizar un enfoque diferente al utilizado en la secuencia de números triangulares, y basarse en la forma de los términos de la secuencia, para encontrar que la cantidad de círculos que hay en cada término es igual a la multiplicación de los círculos de un lado por la cantidad de los círculos del otro lado.

5.2 Análisis a posteriori

5.2.1 Prueba diagnóstica y final escrita (Ver apéndices C, I)

5.2.1.1 Calendario

	Universidad Industrial de Santander **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Nombre: ____ Grado: ____________

A continuación, se plantea un problema matemático, resuélvelo utilizando todo lo que sabes. Por favor, realiza todos tus procedimientos y razonamientos en la hoja, no utilices el borrador, si crees que algo te quedo mal déjalo y sigue con tus ideas.

Calendario

Dado el calendario del mes de abril (ver la figura), responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué relaciones encuentra entre los números que están dentro de la cruz?
b) Si movemos la cruz hacia la derecha, ¿qué relaciones podemos encontrar?, ¿Cómo podemos comparar estas relaciones con las del punto anterior?
c) Si ubicamos el centro de la cruz en el día 19 ¿cuáles números que quedan en ella cruz? ¿Por qué?
d) Si tienes el calendario del mes de julio del mismo año ¿las relaciones que encontraste de siguen manteniendo? ¿Por qué?, y si tienes un calendario de otro mes en otro año, ¿sigue sucediendo lo mismo? ¿Por qué?
e) Si tuvieras que explicarle a un compañero el juego de la cruz y el calendario, pero sin contar con el calendario, ¿Cómo lo harías?

En esta Tarea los estudiantes encontraron dos formas disyuntas de abordarla (cada grupo solucionó la Tarea de una única forma). El primer grupo encontró la relación par impar entre los números dentro de la cruz y el segundo grupo una relación entre los números en la línea horizontal de la cruz y una relación para encontrar al número ubicado en la posición de la cruz.

A continuación, se muestran evidencias de lo encontrado en cada grupo.

Grupo 1.

Tabla 25.

Actividad grupo 1, calendario.

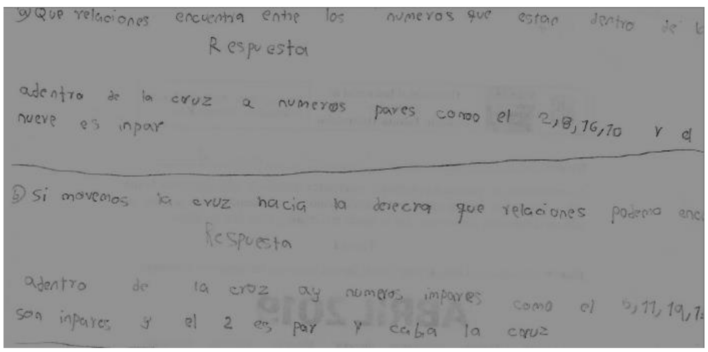


Figura 30. Respuesta estudiante E3.

Transcripción:

a. Dentro de la cruz hay números pares como el 2, 8, 16, 10 y el 9 es impar
b. Dentro de la cruz hay números impares como el 5, 11, 19, 13 y el 2 es par y cabía en la cruz

Los estudiantes pertenecientes a este grupo como el E3 lograron encontrar una de las relaciones expuestas en el análisis apiori, es decir, la relación par e impar. Aunque no se muestra contundentemente de que forma están ubicados estos números pares e impares dentro de la cruz, si evidencia la identificación de una característica de los números naturales, dicha identificación muestra que estos estudiantes reconocen propiedades de los números naturales en diferentes contextos (MEN, 2006).

Sin embargo, esta relación encontrada por los estudiante, no les permitió encontrar los números ubicados dentro de la cruz, puesto que esta característica es muy general y no da cuenta de que característica adicional deben tener los números dentro de la cruz para poder estar allí.

Grupo 2.

Tabla 26.

Actividad grupo 2, calendario.

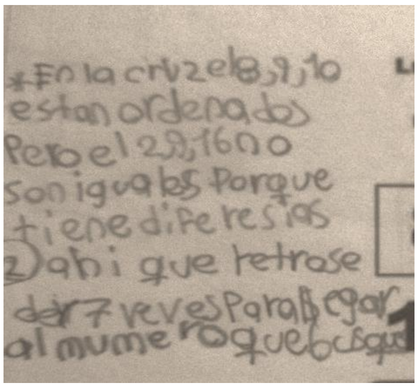


Figura 31. Respuesta estudiante E2.

Transcripción:

a. En la cruz el 8, 9, 10 están ordenados. Pero el 2, 9, 16 no son iguales porque tienen diferencias.
b. Hay que retrocede 7 veces para llegar al numéro que buscas

El estudiante E2 encuentra que los números de la línea horizontal son consecutivos, pero no argumenta porque lo son. De la misma forma, en su segundo razonamiento E2 determina que debe retroceder o restar siete para encontrar el número que está en la parte de arriba de la cruz, sin embargo, no proporciona una relación para hallar el número inferior de la cruz. Los estudiantes ubicados en este grupo no logran relacionar los números ubicados en la cruz con el contexto en el cual se está trabajando y por esta razón se les dificulta situar los números allí.

Aunque estos estudiantes logran encontrar relaciones más fuertes que las del primer grupo, no definen el comportamiento de los números ubicados en la cruz, ni llegan a construir una sin ayuda del calendario.

Cabe resaltar que en los dos grupos faltó relacionar los datos de la secuencia al contexto en el cual esta se desarrolla, dificultando así encontrar el patrón que la describía. Sin embargo, es importante la identificación de las relaciones encontradas, ya que muestran que los estudiantes identifican relaciones comunes y diferenciadoras entre los números de la cruz poniendo en juego las habilidades cualitativas, lo que puede convertirse con ayuda de futuras Tareas en la identificación de regularidades más significativas para encontrar un patrón.

En esta Tarea no se encontró evidencia de las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad, ya que ningún estudiante llegó a encontrar los números de la cruz sin tener el calendario. Además, todos los estudiantes tuvieron una fijación hacia la regularidad que habían encontrado, lo cual no los dejó buscar otras regularidades que le permitieran resolver la Tarea planteada.

5.2.1.2 Secuencia de crecimiento (Ver apéndice C)

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Nombre: ____ Grado: ___________

A continuación, se plantea un problema matemático, resuélvelo utilizando todo lo que sabes. Por favor, realiza todos tus procedimientos y razonamientos en la hoja, no utilices el borrador, si crees que algo te quedo mal déjalo y sigue con tus ideas.

Secuencia de crecimiento

Patrón de círculos en crecimiento: A continuación, se muestran los términos de una secuencia formada por círculos.

Término 1 Término 2 Término 3

a) Dibuja cómo queda el término 4, el 5 y el 6.

b) Si nos saltamos los términos ¿puedes dibujar o describir en palabras cómo queda el término 10? Ahora ¿Cómo queda el término 21? Y ¿cómo queda el término 100? ¿Por qué estás tan seguro?

La actividad matemática que busca generar esta Tarea depende del razonamiento matemático de cada estudiante, ya que unos estudiantes pueden analizar la secuencia centrados en la figura que se forma en cada término o en la cantidad de círculos que determina la figura en cada término.

Particularmente, en esta aplicación se encontraron tres grupos de estudiantes: 1. los que se fijaron solo en la forma de los términos de la secuencia sin tener en cuenta la cantidad de círculos que los conforman; 2. los estudiantes que tuvieron en cuenta la cantidad de círculos, pero no la forma; y 3. quienes analizaron tanto la forma como la cantidad de círculos en cada término.

A continuación, se presentan evidencias de cada grupo descrito para dar cuenta de la actividad matemática generada por la Tarea.

Grupo 1.

Actividad grupo 1, secuencia de crecimiento.

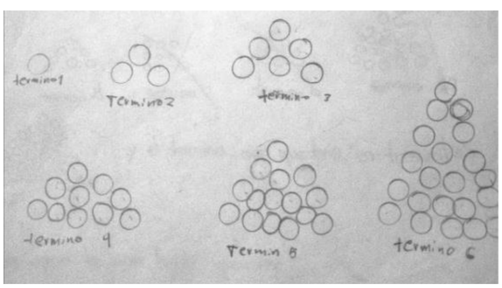


Figura 32. Respuesta estudiante E1.

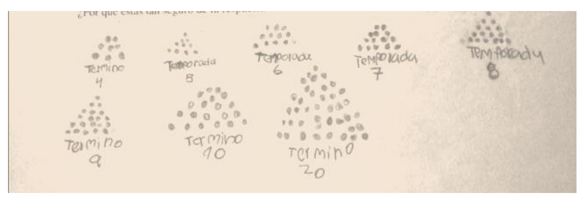


Figura 33. Respuesta estudiante E2.

Como se observa en la figura 32 y 33 el estudiante E1 y E2 intenta conservar la forma que se repite en cada término, sin tener en cuenta la cantidad de círculos. Estos estudiantes no determinan un patrón que defina la regularidad de construcción entre los términos de la secuencia. Como se observa en las figuras 32 y 33, los estudiantes determinan un aumento en la cantidad de círculos, sin definir de qué manera crecen.

Este tipo de interpretación del patrón también fue encontrada por Rivera (2013), en un estudiante entre los 6 y los 10 años, quien realizó la secuencia a partir del tercer término. Dicho estudiante solo construyó el contorno del triángulo, dejando fijo un círculo en la base. Característica que determina para el término 3, pero que según el patrón que define la secuencia no se conserva para los demás. El análisis realizado por Rivera muestra que, aunque el estudiante encuentra una regularidad, ésta no se conserva en otros términos de la secuencia.

Grupo 2.

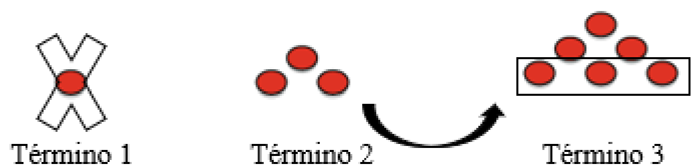


Figura 34. Análisis de la secuencia del E3.

E3 analiza el cambio entre el término 2 y el término 3, esto es, al término 2 le adiciona tres círculos, por ende, al término 3 le suma tres círculos y obtiene el término 4 y así sucesivamente. Es interesante ver como E3 ignora el cambio entre el término 1 y el término 2 para encontrar el patrón que describe la secuencia, corroborando nuevamente lo encontrado por Rivera (2013). A partir de esto, E3 realiza la siguiente abstracción de la representación figural:

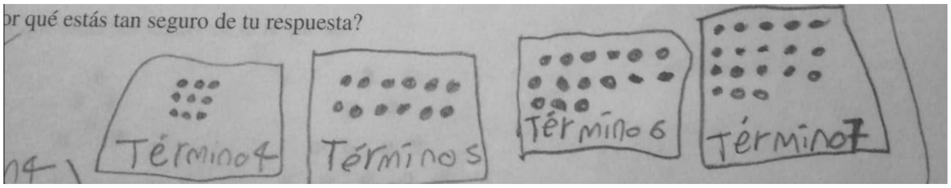


Figura 35. Respuesta estudiante E3.

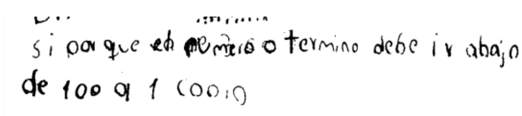
E3 se centra en el cambio de la cantidad de círculos que hay en cada término de la secuencia. Como puede verse en la figura 35, este estudiante reestructura la forma de los términos para determinar el patrón que los genera además excluye el primer término.

Aunque el patrón no describe la secuencia, los estudiantes ubicados en este grupo comprenden que es necesario determinar una regularidad que define una característica de los términos de la secuencia.

Grupo 3.

Tabla 27.

Actividad grupo 3, secuencia de crecimiento.

	Transcripción:
 *Figura 36.* Respuesta estudiante E4.	Si, porque el término debe ir abajo de 100 a 1

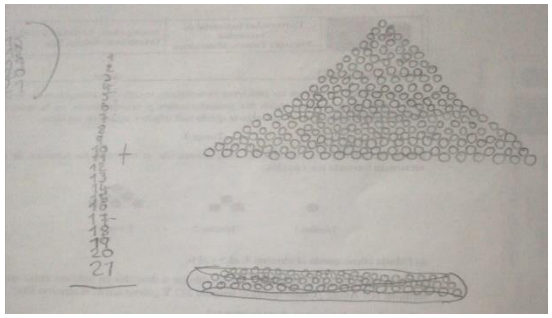
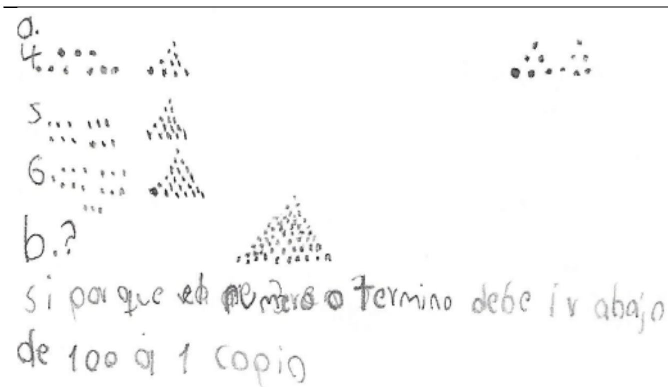


Figura 37. Respuesta estudiante E5.

En este grupo se ubican los estudiantes que lograron encontrar el patrón, describiéndolo de forma verbal o realizando los términos que se pedían. En este grupo es interesante ver, que estudiantes como E4 se apartaron de la figura y se centraron en la cantidad de círculos para describir el patrón (ver figura 36); mientras que algunos estudiantes como E5, partieron de la cantidad de círculos de la base y de la forma de los términos de la secuencia, como se ve en la figura 37 y luego indica la cantidad de elementos que debe tener cada término de la secuencia, mostrando su interés no solo por lo figural sino también por lo numérico.

Tabla 28.

Actividad grupo 3, secuencia de crecimiento.

	Transcripción:
Figura 38. Respuesta estudiante E4.	Si porque el número o término debe ir debajo de 100 a 1.

En esta Tarea se encontró evidencia de flexibilidad como se puede ver en la figura 38, Tabla 28, E4 analiza en un primer momento el patrón adicionando tres círculos al término anterior, es decir, el término 4 tiene la cantidad del término tres más tres círculos, el término 5 tiene la misma cantidad de círculos del término 4 más tres círculos y así sucesivamente. Luego en un segundo momento, E4 nota que esa regularidad no define el patrón y lo reinterpreta mostrando el patrón de una forma triangular como se ve en la figura 38. Además, E4 deja a un lado la forma de la figura, haciendo una abstracción de la representación figural enlazándola con la cantidad de elementos de cada término.

En el trabajo grupal la estudiante E7 analiza el primer patrón encontrado por E4 y le dice que "ese patrón no sirve para pasar del término 1 al término 2 porque solo aumenta dos círculos y no tres como él dice". A partir de esto, E4 reflexiona de una forma global la secuencia y encuentra el patrón y logra generalizarlo al punto de no necesitar la figura sino solo el número del término que necesita encontrar. Este tipo de interacción entre E4 y E7 promueve la flexibilidad, como lo evidencia Levenson (2011), quien afirma que la flexibilidad se puede dar en un proceso colectivo, es decir, cambiar de enfoque o producir soluciones diferentes por medio de la interacción entre los individuos.

A partir de lo anterior, se piensa que en esta aula multigrado existen diferentes formas de pensar y solucionar una Tarea, punto que se utiliza para potenciar el desarrollo del Talento Matemático. Cabe aclarar que, el nivel académico de esta aula es bajo de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas, porque en estos grados los estudiantes deberían reconocer regularidades figúrales y numéricas y sólo el 20% de los estudiantes lograron encontrar el patrón.

5.2.2 Aplicación el restaurante de Marcelo (Ver apéndice D)

EL RESTAURANTE DE MARCELO

Nombre: ________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

____

____

Fecha: __________________________

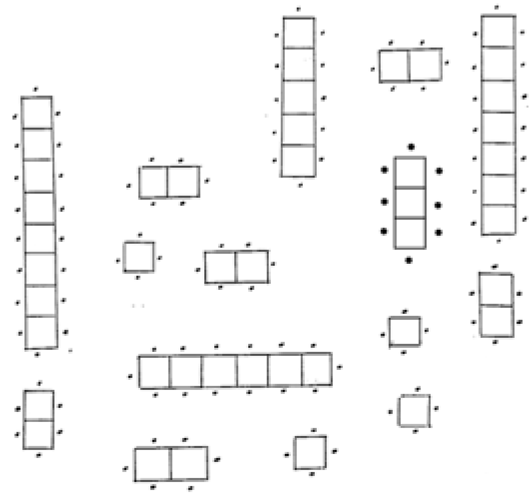
Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Trabajo individual.

Situación

Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante tiene 40 mesas que organiza de diferentes maneras, uniéndolas entre ellas. Actualmente Marcelo tiene organizadas las mesas como se muestra a continuación:



Marcelo está cansado de contar las sillas una a una todos los días. Por lo tanto requiere tu ayuda. Marcelo quiere encontrar una manera de calcular rápidamente el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa.

1. ¿Cuántas personas se pueden sentar alrededor de 3 mesas ?

2. Si buscamos el número de personas que se pueden sentar alrededor de 4 mesas, ¿necesitas hacer un dibujo para encontrar la respuesta o tienes una manera diferente de hacerlo ?

3. iY para 15 mesas!, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de personas sin necesidad de dibujar?

Trabajo en equipo

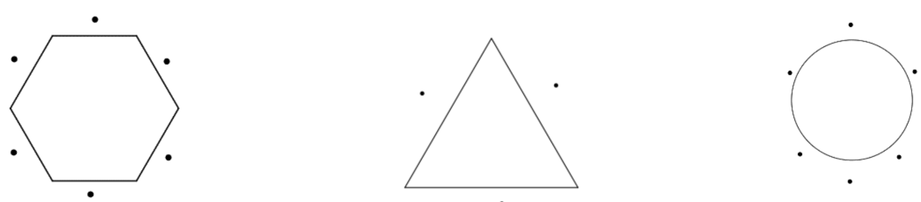
4. En equipo, compartan las estrategias que usaron para calcular el número de personas que pueden sentarse alrededor de 15 mesas. ¿Todos usaron la misma estrategia? Encuentre y escriba o dibuje al menos 2 estrategias para hacer este cálculo.
5. Una vez que escriba las estrategias, utilice alguna de ellas para calcular el número de personas que pueden comer en 21 mesas y después en 54 mesas.

6. Escribe un mensaje a Marcelo donde le explicas cómo podría calcular el número de personas para sentar alrededor de una mesa no importa qué tan grande sea.

7. Los mensajes son muy largos. Marcelo necesita mensajes que le indiquen las operaciones que debe realizar más fácilmente. Escribe el mismo mensaje, pero simplificado, indicando qué operaciones necesita realizar Marcelo.

Segundo trabajo individual

Marcelo quiere expandir su restaurante, entonces piensa abrir una nueva sucursal. Marcelo necesita que le ayudes a escoger el tipo de mesa que le permita ubicar la mayor cantidad de personas posibles. Para esto, su diseñador le realiza la siguiente propuesta de mesas con el propósito de que Marcelo seleccione el tipo de mesa más apropiado según sus intereses.



8. ¿Qué tipo de mesa debe escoger Marcelo para ubicar a la mayor cantidad de clientes?

9. Calcula el número de personas que puedes sentar alrededor de 3 mesas unidas (de la mesa escogida en el punto anterior). Explica la estrategia que utilizas y cómo ubicaste las tres mesas unidas.

10. Calcula el número de personas que pueden sentarse alrededor de 21 mesas unidas y después de 54 mesas unidas. Explica la estrategia que utilizaste.

11. Calcula el número de personas que puedes sentar alrededor de cualquier cantidad de mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

12. Si ahora Marcelo necesita que la mesa que escojas sea en la que puedes ubicar la mayor cantidad de personas, y además que ocupe el menor espacio posible, porque el nuevo local

es pequeño. ¿Cuál mesa escogerías?, ¿Por qué?

13. ¿La mesa que escogiste en el punto anterior es la misma que la del punto 1?, Si tu respuesta es no, ¿Por qué cambiaste el tipo de mesa?

Esta Tarea es del tipo Tarea central y Tareas periféricas, relacionada con el estudio de patrones. A continuación, se muestran las evidencias de la fluidez, la flexibilidad y la originalidad, que surgieron durante el trabajo realizado bajo la adaptación del modelo ACODESA.

Fluidez: los estudiantes E7 y E20, mostraron un pensamiento fluido. Al resolver la Tarea estructuraron diferentes abstracciones figurales para representar y analizar la secuencia dada por la ubicación de las mesas y las sillas del restaurante de Marcelo, como se observa en la figura 39 y el episodio 1.

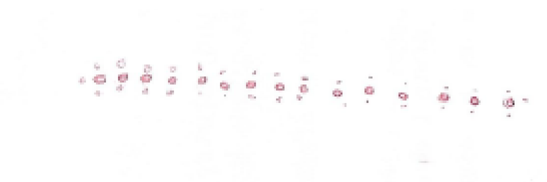


Figura 39. Abstracción figural del patrón en forma de puntos.

Tabla 29.

Evidencia de fluidez, restaurante de Marcelo.

	Transcripción:
	a. 10 personas porque lo vi en el pupitre.

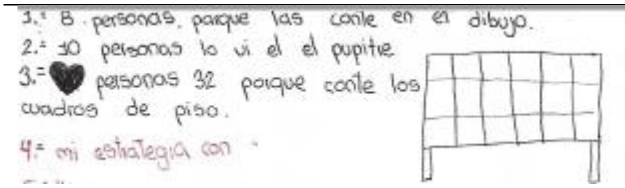


Figura 40. Abstracciones figurales del patrón con objetos del entorno.

b. Personas, 32 personas porque conté los cuadros del piso

Tabla 30.

Episodio 1, evidencia fluidez, restaurante de Marcelo.

Episodio 1. (Vídeo 150, 18:05-22:00)	
I :	¿Cómo sabes que en 9 mesas puedes ubicar 20 personas?
E20:	Como mi pupitre está formado por rectángulos, yo dibujo en mi mente en el pupitre las nueve mesas y luego cuento la cantidad de personas.

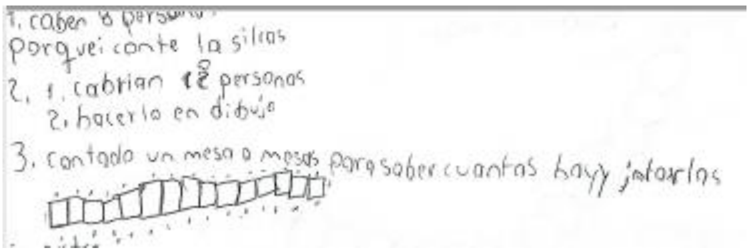
Aunque en el análisis a priori se esperaba que los estudiantes realizaran una tabla, esto no sucedió de forma explícita. Sin embargo, dibujaban y escribían los valores correspondientes, esto es, tenían en cuenta, de acuerdo con la cantidad de mesas de su dibujo, cuántas personas podían ubicar. Por ende, la fluidez se evidencia de dos formas: por la realización de diferentes representaciones conservando las condiciones del problema y por la relación establecida entre el número especifico de mesas y las personas que podían sentarse en ellas.

Flexibilidad: Los estudiantes E23 y E11 muestran un pensamiento flexible. Para ejemplificar este pensamiento, a continuación, aparecen evidencias de E23 ya que su razonamiento es semejante al de E11.

En un primer momento para saber la cantidad de personas que se pueden ubicar en cierta cantidad de mesas, E23 realiza un conteo de silla por silla (ver tabla 31).

Tabla 31.

Evidencia de flexibilidad, restaurante de Marcelo.

	Transcripción:
 *Figura 41*. Evidencia Flexibilidad.	1. Caben 8 personas porque conté las sillas. 2.1 Cabrían 12 personas 2.2 Haciendo el dibujo 3. Contando mesa a mesa para saber cuántas hay y juntarlas.

Luego de repetir este procedimiento y de realizar los dibujos de las mesas, E23 encuentra otra forma de contar las sillas, como se muestra en el Episodio 2.

Tabla 32.

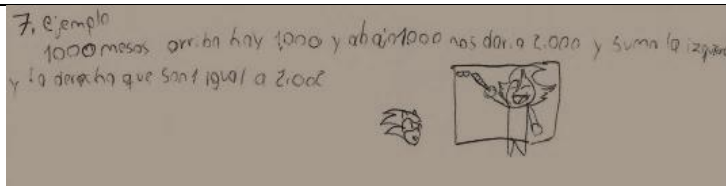
Evidencia flexibilidad, restaurante de Marcelo.

Episodio 2. (Vídeo 151, 26:12-29:30)	
E23:	Conté de derecha a izquierda y luego las esquinas.
I :	Me puedes dar un ejemplo.
E23:	Si tengo 15 mesas unidas, son 15 sillas arriba y 15 abajo, son 30 sillas y la de la derecha y la de la izquierda, serían 32 sillas, 32 personas.

A partir de esto, con el fin de generalizar su idea E23, realiza un ejemplo con un número de mesas mayor que los pedidos en la Tarea, planteándose la unión de 1000 mesas.

Tabla 33.

Generalización lejana de E23.

	Transcripción:
 *Figura 42.* Evidencia generalización lejana.	7. Ejemplo, 1000 mesas, arriba hay 1000 y abajo 1000, nos da 2000 y sumo la izquierda y la derecha que son igual a 2002.

El tipo de generalización realizada por E23, es una generalización lejana definida por Stacey (1989) como la comprensión del patrón a partir de la regla general, en este caso la regla general se define por medio de cualquier ejemplo particular. Es decir, E23 puede encontrar la relación existente entre cualquier cantidad de mesas y la cantidad de sillas, a partir de un número de mesas dado.

Con base en lo descrito E23 evidencia un cambio de enfoque ya que no necesita dibujar la cantidad de mesas para saber cuántas personas puede ubicar; esto es evidencia de un pensamiento flexible a partir de la construcción de una abstracción numérica de la situación dada.

Originalidad: La originalidad en esta Tarea se evidencia cuando E11 y E23, realizan una generalización lejana del patrón de construcción de la secuencia. Como se mostró anteriormente.

A continuación, se muestra otra evidencia de un pensamiento original reflejado por estudiante E11.

Tabla 34.

Episodio 3, evidencia de originalidad.

Episodio 3. (Vídeo 153, 3:01-5:23)

E11: Profe, también puedo saber la cantidad de mesas que necesito para que se sienten 10 personas.

I : ¿Cómo lo harías?

E11: Quito las dos personas de las esquinas, quedarían 8 personas, entonces divido 8 entre dos… Profe necesito 4 mesas.

Es interesante como E11 plantea un nuevo problema, en el cual debe encontrar una relación inversa (Rivera, 2013). Este razonamiento demostrado por E11 fue único entre sus pares, pues sólo él se cuestiona sobre la posibilidad de encontrar el número de mesas dado el número de personas. Esto le permite ampliar el problema de forma eficaz, mostrando una característica de una persona talentosa en matemáticas desde la perspectiva de Krutteski, (1976).

5.2.3 Aplicación la fábrica de ventanas (Ver apéndice E)

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Fábrica de ventanas

Nombre: ___________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

____

Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Fábrica de ventas

____

Fecha: ______________________________

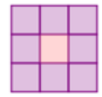


Figura 1

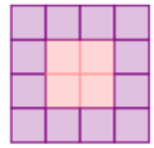


Figura 2

Trabajo individual

Situación

Tengo un amigo que tiene una pequeña fábrica de ventanas. Las ventanas que se fabrican tienen forma cuadrada y se componen de pequeños cuadrados rosados en el centro y cuadrados morados alrededor. A continuación, se muestran algunos ejemplos:

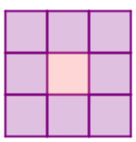


Figura 1

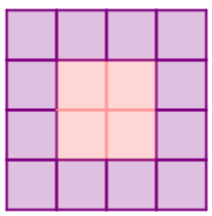


Figura 2

?

Figura 3

?

Figura 4

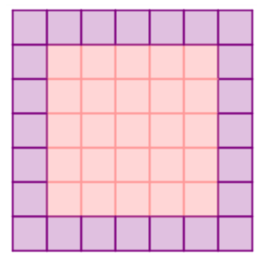


Figura 5

Los trabajadores necesitan contar el número de cuadrados color morados alrededor de los cuadrados rosados de la ventana y los cuentan uno por uno. ¿Podrías ayudar a los trabajadores a encontrar una manera de calcular rápidamente el número de cuadrados de color morado para cualquier tamaño de ventana? Para esto, responde las siguientes preguntas

1. Calcula el número total de cuadrados color morado si tenemos 2 cuadrados rosados de lado, ahora si tienes 3 cuadrados rosados de lado.

2. Si buscas el número de cuadrados color morado para una ventana que tiene 4 cuadrados rosados de lado. Y si los trabajadores necesitan hacer una ventana con 10 cuadrados

morados de lado, ¿cuántos cuadrados rosados y cuántos morados necesitan para hacer la venta, ¿Cómo hiciste para saber cuántos cuadrados necesitan los trabajadores para hacer esa ventana?

3. Y la ventana de 15 cuadrados rosados de lado, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de cuadrados color morado en total?

Trabajo en equipo

4. En equipo, analicen las estrategias que utilizaron anteriormente para calcular el número de cuadrados color morado necesarios para una ventana que tenga 15 cuadrados rosados de lado. ¿Todos utilizaron la misma estrategia? Encuentren al menos 2 estrategias para calcular el número de cuadrados color morado para una ventana que tiene 15 cuadrados rosados de lado.

5. Una vez que han escrito diferentes estrategias y que han decidido que son correctas, utiliza alguna de estas estrategias para calcular el número de cuadrados color morado necesarios para una ventana de 23 cuadrados rosados de lado y otra ventana de 58 cuadrados rosados de lado.

6. Escribe un mensaje con palabras que permita calcular el número de cuadrados color verde necesarios para una ventana para cualquier número de cuadrados cafés de lado.

7. Los mensajes son largos a leer, escriban el mensaje simplificado utilizando solo operaciones.

Segundo trabajo individual

El dueño de la fábrica de ventanas decide que fabricará otro tipo de ventana, para ofrecer mayor variedad a sus clientes. A continuación, se muestran los tipos de ventanas que se piensan fabricar, estos dependen del tamaño y forma del espacio en el que se instalarán.

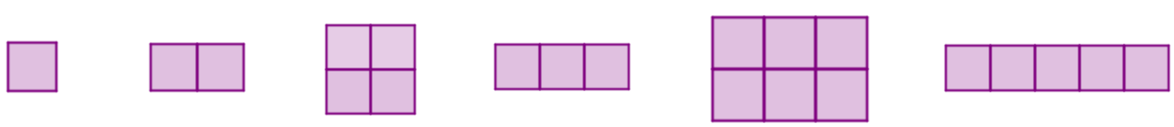


Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6

Pero ahora, el dueño necesita que lo ayudes, para que sus trabajadores puedan calcular el número de cuadrados morados que tienen las ventanas y la forma de estas para poderlas fabricar. Para esto, el dueño solicita que respondas las siguientes preguntas:

8. ¿Cuántos cuadrados morados necesita para fabricar una ventana como la de la figura 2?, ¿cuál es la forma de la ventana de la figura 2?

9. ¿Cuántos cuadrados morados necesita para fabricar una ventana como la de la figura 3?, ¿cuál es la forma de la ventana de la figura 3?

10. Ahora, llega un nuevo cliente, que le pide hacer una ventana como la de la figura 6, ¿Cómo sería la forma de está ventana?, ¿cuántos cuadrados morados necesita para fabricarla?

11. Debes construir una ventana como la de la figura 11, ¿Cuántos cuadrados morados se necesitan para hacer la venta?, ¿cuál es la forma de esta ventana?

12. ¿Cómo le explicarías a un trabajador el tipo de ventana que debe hacer, si su cliente solo le dice el número de la figura?

13. ¿Cómo le explicarías la cantidad de cuadrados morados que necesita utilizar para fabricar una ventana, de acuerdo con el tipo de ventana?

Esta tarea presenta un mayor nivel de dificultad para los estudiantes, porque, aunque identificaban lo que un cuadrado es una: “figura de cuatro lados iguales”, no lograban representar su construcción y por ende no sabían cómo aplicarla en el contexto de la Tarea, evidenciando dificultades en la habilidad espacial (Gonzato, Fernández y Díaz, 2011).

Por otra parte, la investigación en Educación Matemática ha mostrado que la habilidad espacial es una de las habilidades más desvaloradas dentro del aula de clase, pues la habilidad cuantitativa recibe un mayor peso según diferentes autores como Clements y Battista (1992) y Ban Dormolen (1996).

Para el desarrollo de la Tarea, fue necesario realizar un análisis grupal de la situación problema, para clarificar entre todos la definición de cuadrado de tal forma que lograran abordar la Tarea.

Las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad evidenciadas en esta Tarea fueron la flexibilidad y la fluidez. La originalidad no se evidenció porque los estudiantes no tenían una buena gama de presaberes que les ayudará a comprender la Tarea.

Fluidez: Los E11, E23, E20, E7, abordaron la Tarea realizando primero el dibujo de la ventana y luego contaron uno a uno los cuadrados morados y los rosados. Es decir, utilizaron dos interpretaciones para solucionar la Tarea, la interpretación pictórica y la numérica como se ve en la figura 41.

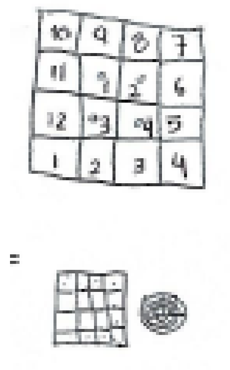


Figura 43. Evidencia fluidez Tarea 2 estudiante E23.

A partir de las representaciones realizadas por los estudiantes, algunos encontraron dos formas diferentes para contar la cantidad de cuadrados rosados y morados, es decir, presentaron un pensamiento flexible.

Flexibilidad: Durante el trabajo en equipo se presenta la siguiente situación que evidencia flexibilidad.

Tabla 35.

Episodio 4, evidencia de flexibilidad.

Episodio 4. (Vídeo 156; 21:49-30:00)	
E23:	Yo encontré que para saber cuántos cuadrados morados necesito para hacer la ventana, si por ejemplo tengo tres cuadrados morados de lado, entonces sumo tres, más tres, más tres, o sea, 9 cuadrados morados.
E11:	Ah claro, pero también se puede si multiplico tres por tres.
I :	¿Por qué crees que funciona si multiplicas tres por tres?
E11:	Hmm, porque en cada una de estas (haciendo referencia a las filas) hay tres cuadrados morados y hay tres de estas (filas), entonces son tres veces tres.

En el episodio 4 (tabla 35) se muestra que el estudiante E11, realiza un cambio de enfoque de la respuesta de E23. Partiendo de ella, utiliza la multiplicación para obtener una forma más ágil de resolver la Tarea; ya que E23 y E11 en un principio solo aplicaban la suma para encontrar la cantidad de cuadrados morados. Este tipo de pensamiento flexible se desarrolla a partir del trabajo en grupo. Estos datos apoyan lo afirmado por Levenson (2011), quien dice que la flexibilidad se puede dar por medio de una interacción entre individuos y no es solo individual.

Otra evidencia de flexibilidad se presenta en el estudiante E7 cuando utiliza dos estrategias diferentes (Figura 43, Episodio 5) para calcular la cantidad de cuadrados rosados.

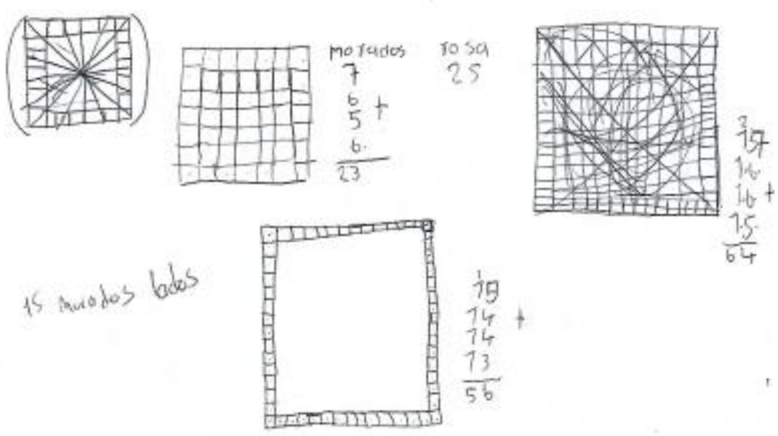


Figura 44. Evidencia flexibilidad Tarea 2, estudiante E7.

Tabla 36.

Episodio 5, evidencia de flexibilidad.

Episodio 5. (Vídeo 157; 12:56- 21:45)	
E7:	Creo que encontré otra estrategia.
I :	¿Cuál?

E7: En una ventana de 7 cuadrados rosados, sumamos 7 cuadrados de abajo y 7 de arriba, y sumamos 5 cuadrados del lado derecho y 5 cuadrados del lado izquierdo, serían 24 cuadrados rosados.

I : ¿Por qué cinco cuadrados del lado derecho y cinco cuadrados del lado izquierdo?

E7: Porque como arriba y abajo hay siete cuadrados, le quito dos cuadrados a cada lado derecho e izquierdo porque cada uno lleva un cuadrado de arriba y abajo.

En los episodios anteriores, E7 muestra un pensamiento flexible al utilizar dos formas diferentes de solucionar la Tarea. En la primera, encuentra una estrategia con los lados consecutivos y en la segunda, estrategia utiliza los lados opuestos y sus características para encontrar la cantidad de cuadrados rosados.

En la Actividad de E7 se evidencia la habilidad de identificación visual (Gutiérrez, 2001) porque al realizar la operación para calcular los cuadrados rosados, tiene en cuenta los cuadrados que pertenecen a dos lados. Es decir, no cuenta los cuadrados de los vértices dos veces.

5.2.4 Hacer números (Ver apéndice F)

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Hacer números

Nombre: ____________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.

____

____

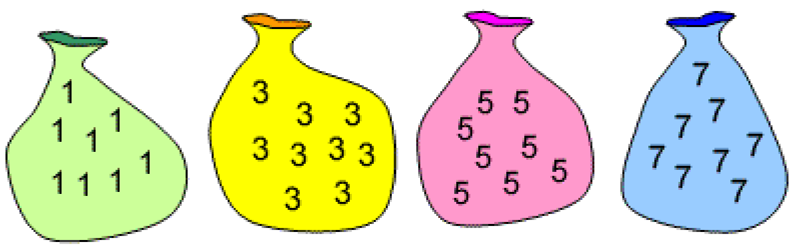
Fecha: ____________________________

- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Trabajo individual

Situación

Un día en clase de matemáticas, el profesor lleva 4 bolsas con tarjetas. En cada bolsa hay tarjetas con los números unos, tres, cincos y sietes, como se ve a continuación.



El profesor plantea una serie de retos a sus estudiantes, ¿será qué puedes superar estos retos?

1. Arma el número 16 con cuatro números de las bolsas, ¿Hay una sola forma o puedes encontrar más?

2. Arma el número 28 con seis números de las bolsas, ¿Hay una sola forma o puedes encontrar más?

3. Arma cinco números cualesquiera utilizando ocho números de la bolsa. Escribe como armaste cada uno de los cinco números.

Trabajo en equipo

4. En equipo discutan como armaron los cinco números del inciso 3. Escriba tres números diferentes armados por tus compañeros.

5. ¿Qué características tienen en común los números armados?, ¿qué características tienen en común los números de las bolsas?

6. Ahora, en equipo armen el número 21 con seis números de las bolsas. Explica tu respuesta

7. ¿Cuáles números puedes armar con seis números de las bolsas?, ¿Qué tienen en común estos números?

8. Si te piden armar un número cualquiera con los números de las bolsas, ¿cómo garantizas que se puede armar?

Segundo trabajo individual

Ahora el profesor decide desafiar aún más a sus estudiantes, y les pide que armen conjuntos de tres números (los que ellos quieran) y luego seleccionen dos de tal forma que al sumarlos les dé un número par, así:

$$\boxed{2 \qquad 11 \qquad 21} \quad 21 + 11 = 32$$

9. Inventa cinco conjuntos con tres números y luego selecciona dos de tal forma que su suma sea un número par.

10. Existe algún conjunto de tres números, de tal forma que no pueda sumar dos números de él y dé un número divisible entre dos. Justifique ampliamente su respuesta.

Fluidez: La fluidez se evidencia en medio de la discusión sobre cómo habían abordado la Tarea. Se encontraron dos formas de actuar ante la solución de la Tarea, como se muestra en el episodio 6 (tabla 37).

Tabla 37.

Episodio 6, evidencia de fluidez.

Episodio 6. (Vídeo 160; 15:52-20:11)	
E20:	Yo encontré los números de dos formas.
I :	¿Cuáles?
E20:	Primero escribía dos números y los sumaba y luego miraba cuanto me faltaba para llegar a 16 y luego le sumaba los otros dos números, y también lo hice escogiendo tres números iguales y los sumé y le sumé lo que le hacía falta para llegar a 16.

En este episodio se evidencian dos formas para solucionar la Tarea, una por ensayo y error y la otra un ensayo y error controlado, evidenciando como se dijo en el análisis a priori un pensamiento flexible.

Flexibilidad: Los estudiantes E23 y E11, en medio del trabajo en equipo discutían sobre la imposibilidad de encontrar el número 21 con seis números de la bolsa, como se muestra a continuación.

Tabla 38.

Episodio 7, evidencia de flexibilidad.

Episodio 7. (Vídeo 161: 25:23-28:15)

E23:	No soy capaz de encontrar el 21.
E11:	Ni yo, siempre me da 22 o 20.
E23:	A mí también…

Después de esto, en una interacción con la investigadora, con el fin de que los estudiantes reflexionarán sobre la naturaleza de los números de las bolsas y los números que estaban armando con seis números de ellas. Se encontró una evidencia de flexibilidad (episodio 8, tabla 39), porque los estudiantes abandonaron la idea de armar el número, al ver la imposibilidad de hacerlo con la operación suma, buscaron una conjetura para argumentar por qué no se podía armar el número 21 con los seis números de las bolsas, mostrando además habilidades del razonamiento inductivo.

Tabla 39.

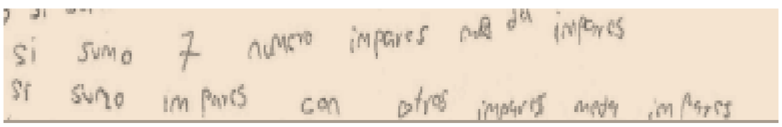
Episodio 8, evidencia de flexibilidad.

Episodio 8. (Vídeo 162: 8:29-20:03)	
I :	Bueno chicos, y ¿qué dice la pregunta 5?
E23:	¿Cómo son los números de la bolsa y los números que armamos?
E11:	Profe, estos son impares (los de la bolsa) y estos son pares (los armados).
I :	¿Y eso tendrá algo que ver con la imposibilidad de armar el 21?
E11:	De pronto, pero no sabemos.
I :	Bueno, vamos a intentarlo con menos números, ¿qué sucede si sumo dos números de la bolsa, qué número me da?
E23:	Un número par profe.
I :	Bueno, quiero que piensen ¿qué sucede entonces si sumo 6 números de la bolsa?

Después de pensar en esto, E11 y E23 lograron proponer una conjetura, aunque no es general si puede llegar a serlo, a continuación, se muestra la evidencia de la conjetura propuesta por E11 y E23.

Tabla 40.

Evidencia de flexibilidad en hacer números.

	Transcripción:
 *Figura 45.* Evidencia Flexibilidad Tarea 4, E23.	Si sumo 7 números impares me da impares. Si sumo impares con otros impares me da impares.

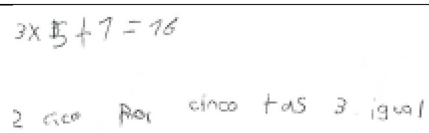
Esta Tarea permitió fortalecer la habilidad de razonamiento inductivo, dado que brindo la posibilidad a los estudiantes de generar conjeturas que comprobaron con ejemplos. Aunque ellos estaban familiarizados con los números pares e impares, el entorno de clase no les había permitido reflexionar sobre propiedades de estos números. En particular esta Tarea además de ayudar a fortalecer la habilidad de razonamiento inductivo, también permite abordar contenido curricular.

Originalidad: En esta Tarea E11 como se dijo en el análisis a priori propuso una respuesta original, dado que utilizó la operación multiplicación para encontrar los números pedidos. A continuación, se muestra una sección de la hoja de trabajo de E11.

Tabla 41.

Evidencia de originalidad, hacer números.

	Transcripción:



$$3 * 5 + 1 = 16$$

Cinco por cinco más 3 igual a 16

Figura 46. Evidencia originalidad Tarea 4, E11.

Aunque E11 no consideró la cantidad de números que debía utilizar para armar el número 16 y el 28, E11 muestra originalidad en su respuesta, porque a diferencia de sus compañeros utilizó una estrategia poco común para encontrar estos números, ya que los demás estudiantes utilizaron solo la suma para buscar las respuestas a cada ítem.

5.2.5 Aplicación cubos aquí y allá (Ver apéndice G)

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Cubos aquí y allá

Nombre: ________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

____

____

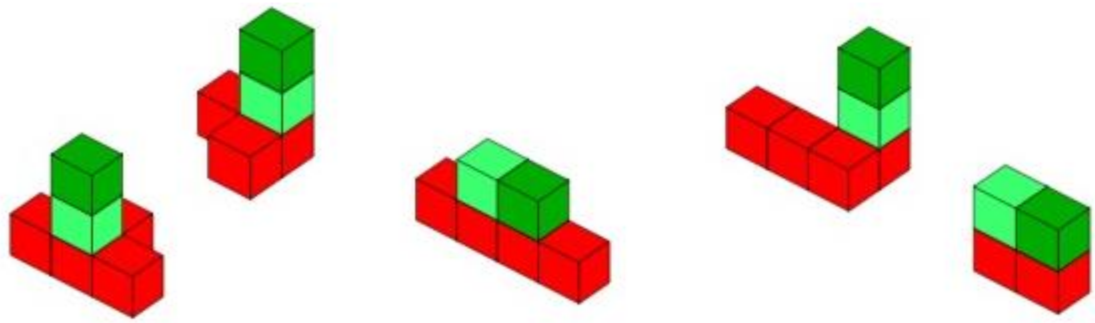
Fecha: __________________________

Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Trabajo individual

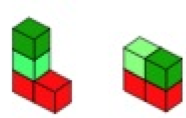
Situación



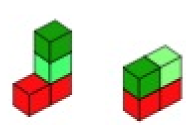
Este juego se trata de ubicar cubos verdes encima de cubos rojos. Para jugar, debes seguir las siguientes reglas:

1. Los cubos rojos deben tocar el piso o la mesa.
2. Los cubos verdes no deben tocar el piso.
3. Debes unir los cubos cara a cara.
4. Los cubos verdes deben estar seguidos, es decir, no pueden estar separados.
5. Los cubos verdes siempre deben ir encima de una cara de un cubo rojo.

Por ejemplo, si usamos dos cubos verdes y dos cubos rojos, debemos buscar todas las posibles formas de armar figuras siguiendo las reglas. Como se muestra a continuación.



Atención: Debes tener cuidado con no tener figuras repetidas, es decir, tener una figura y su rotación en el conteo en diferente posición. Por ejemplo, las siguientes figuras no serían una posibilidad porque son rotaciones de las figuras anteriores.



Entonces tu desafío es encontrar todas las posibilidades que tienes de armar figuras con tres cubos rojos y dos verdes. ¡No olvides seguir las reglas!

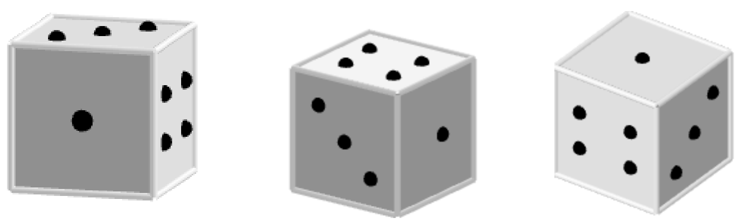
6. ¿Cómo sabes que tienes todas las posibilidades?
7. ¿Qué método o forma utilizaste para armar estas figuras?
8. ¿Todas tus formas son diferentes? O ¿algunas son rotaciones de las otras?

Trabajo en equipo

9. En equipo, compartan las estrategias que utilizaron para encontrar todas las posibles maneras de armar figuras con tres cubos rojos y dos verdes, siguiendo cada una de las reglas. ¿Todos utilizaron la misma estrategia? Expliquen al menos dos estrategias para armar las figuras con tres cubos rojos y dos verdes.
10. Una vez que han escrito diferentes estrategias y han decidido que son correctas, utilicen alguna para encontrar todas las posibilidades para armar figuras con cuatro cubos verdes y dos rojos.
11. Escribe un mensaje claro, en el que le expliques a un compañero la mejor estrategia para encontrar la cantidad de figuras que puede armar utilizando cubos rojos y verdes, siguiendo las reglas del juego.

Trabajo individual

Ahora, tengo un nuevo desafío para ti. A continuación, te presento una vista del dado, y tres rotaciones de estas.



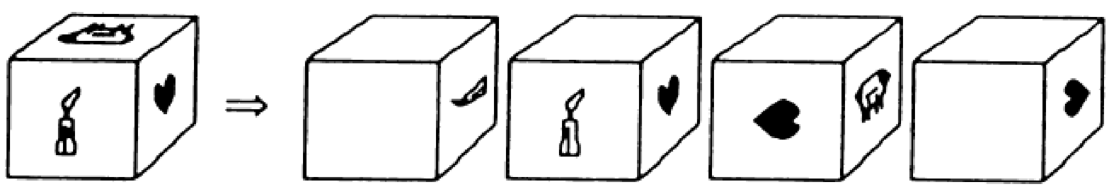
12. En la hoja isométrica dibuja tres rotaciones diferentes de cada una de las siguientes caras del dado.

13. En la hoja isométrica, dibuja el dado completo en una secuencia de tres vistas diferentes, es decir, con tres dibujos del dado, se deben encontrar sus seis caras.

14. En la hoja isométrica, dibuja el dado completo en una secuencia de cinco vistas diferentes, es decir, con tres dibujos del dado, se deben encontrar sus seis caras).

15. Las secuencias que hiciste en los ítems anteriores, ¿representan el mismo dado, o forman un dado diferente. ¿Justifica tu respuesta?

16. En la hoja isométrica, dada la siguiente figura de un cubo, completa las figuras que deben ir en las caras en blanco del cubo.



Esta Tarea suscita un mayor nivel de dificultad para los estudiantes, puesto que como se mencionó en la Tarea anterior, la habilidad espacial, es la habilidad que menos se trabaja en el aula de clases de matemáticas (Clements y Battista, 1992; Ban Dormolen, 1996).

En esta misma línea, Dickson, Brown y Gibson (1991), realizan la siguiente afirmación alrededor de cómo se enseña el pensamiento espacial, diciendo que se parte de objetos bidimensionales para enseñar objetos tridimensionales, utilizando libros bidimensionales con imágenes bidimensionales de objetos tridimensionales, que llevan al estudiante a enfrentarse a un mundo bidimensional, suponiendo una dificultad de antemano para desarrollar la habilidad espacial.

En esta investigación se encuentran evidencias que apoyan lo afirmado por Dickson, Brown y Gibson (1991), puesto que a pensar que a los estudiantes se les brindó el material concreto para trabajar con los cubos y armar las figuras de acuerdo con unas reglas, y se les proporcionó una hoja isométrica para dibujar todas las posibilidades, sus dibujos eran en dos dimensiones. A continuación, se muestran evidencias de esto.

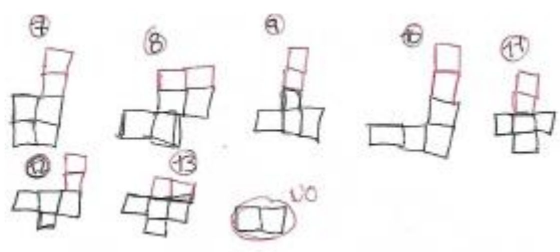


Figura 47. Dibujos bidimensionales E10.

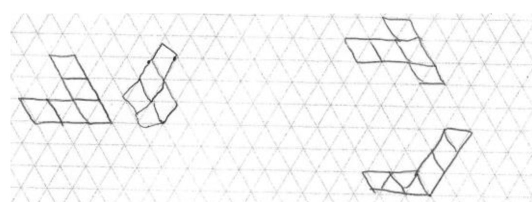


Figura 48. Dibujos bidimensionales E2.

Como se observa en la figura 47 y en la figura 48, los estudiantes E10 y E2, realizan representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales, esto puede ser debido al énfasis que se hace en la clase de matemáticas a los objetos bidimensionales y como se extrapolan sus características a los objetos tridimensionales.

Por lo anteriormente expuesto, esta Tarea represento un reto para los estudiantes, puesto que no tienen las herramientas necesarias para abordar la Tarea. Lo que repercutió directamente en que ningún estudiante desarrollara el segundo trabajo individual.

En esta Tarea no se encuentran evidencias de fluidez, porque todos los estudiantes abordaron la Tarea de una única forma, dibujando las figuras. Por ende, se encontraron evidencias de flexibilidad y originalidad.

Flexibilidad: un pensamiento flexible se evidencia cuando E23 inicia realizando cada una de las posibilidades para la Tarea de tres cubos rojos y dos cubos verdes de forma aleatoria, es decir, sin tener un orden para armar cada figura. Pero luego en la Tarea en la que debe encontrar el total de posibilidades para cuatro cubos rojos y dos cubos verdes, lo realiza de forma sistemática, partiendo de una base y jugando con los cubos rojos encima de cada base, de acuerdo con las reglas de la Tarea. A continuación, se muestran las evidencias encontradas de flexibilidad.

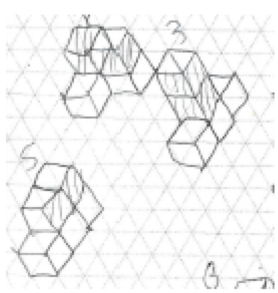


Figura 49. Trabajo no sistemático de E23.

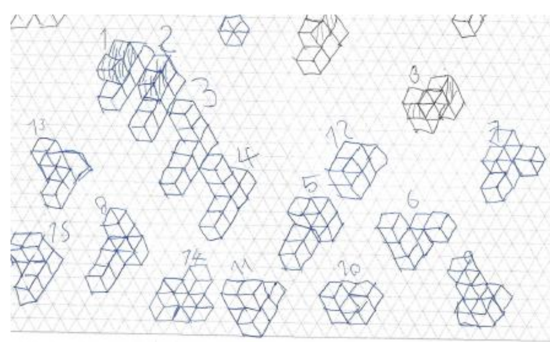


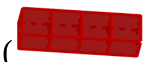
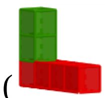
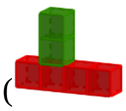
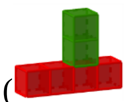
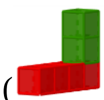
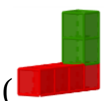
Figura 50. Trabajo sistemático de E23.

Como se observa en la figura 49, la secuencia realizada por E23 no lleva un orden, es decir, no es sistemático, mientras que en la figura 50, E23 realiza un trabajo sistemático para encontrar la mayor cantidad de figuras que cumplieran con las reglas de la Tarea, para señalar su orden además numera cada una de las figuras que va haciendo.

A continuación, se muestra una evidencia de flexibilidad en el episodio 9.

Tabla 42.

Episodio 9, evidencia flexibilidad.

Episodio 9 (Vídeo 167, 7:00-9:15)	
I :	¿Me puedes explicar tu estrategia?
E11:	Con esta base (), tenemos así (), así (), así () y así ()
E23:	E11, esta () y esta (), ¿no son la misma?
E11:	Si, solo se puede una, o sea que con esa base y con los cubos verdes así solo salen dos figuras.

En el episodio 9 (Tabla 42) se puede observar nuevamente cómo la flexibilidad se da en forma colectiva (Levenson, 2011), porque cuando E11 estaba mostrando su estrategia para encontrar todas las posibles figuras que se pueden armar con cuatro cubos rojos y dos cubos verdes de acuerdo con las reglas de la Tarea. E11 tiene en cuenta las rotaciones de las figuras, pero estas debían ser excluidas conforme a las condiciones de la Tarea. En ese momento con la intervención de E23, E11 cambia de enfoque al percatarse de su error y no tiene en cuenta las rotaciones, por lo que concluye que con esa base y con los cubos verdes ubicados de esa forma solo puede encontrar dos figuras distintas.

Originalidad: En esta Tarea, la originalidad se evidencia, en la forma como E23, plasma en la hoja isométrica las figuras encontradas con los cubos verdes y rojos conforme a las reglas de la Tarea. Se considera que esta es una evidencia original, porque E23 fue el único estudiante que realizó las figuras en la hoja isométrica de forma correcta (ver figura 49 hoja isométrica). Es decir, E23 realizó un procedimiento diferente al de sus pares y esto es considerado original según Leikin (2009a).

5.2.6 Aplicación área y perímetro (Ver apéndice H)

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Área y perímetro

Nombre: ____________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

____

____

Fecha: ______________________________

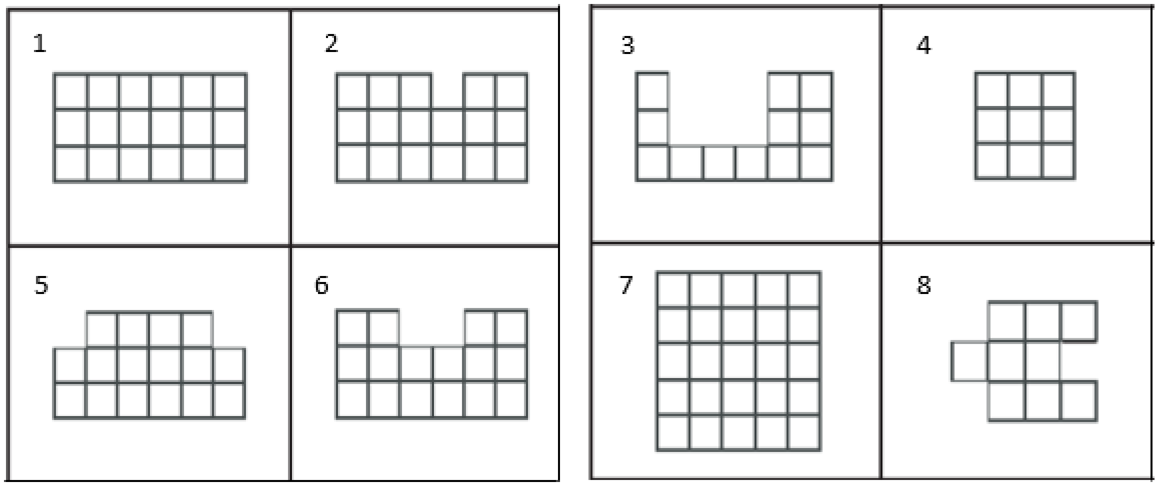
Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Trabajo individual

Situación

Un grupo de estudiantes están jugando a armar las siguientes figuras con cuadrados de 1 cm de lado.



Después de terminar de armar las figuras, ellos deciden que el ganador del juego es quién haya construido la figura con más área y más perímetro de todas.

1. ¿Cuál es la figura ganadora? Explica ampliamente tu respuesta.
2. ¿Puedes dibujar una figura con cuadrados de $1\,cm$ de lado, en la que el área sea numéricamente igual a su perímetro? ¿Existen más figuras?
3. ¿Puedes dibujar una figura (con cuadrados de $1\,cm$ de lado) en la que el perímetro sea numéricamente el doble del área? ¿Existen más figuras?

Trabajo en equipo

4. En equipo, analicen las estrategias utilizadas para dar respuesta al ítem 2. Utilice dos estrategias para encontrar como mínimo cinco figuras que cumplan con la condición de que el área sea numéricamente igual a su perímetro.
5. En equipo, analicen las estrategias utilizadas para dar respuesta al ítem 3. Utilice dos estrategias para encontrar como mínimo cinco figuras que cumplan con la condición de que el perímetro sea numéricamente el doble del área.
6. En equipo, escriban un mensaje a un amigo, en el cual le expliquen cómo realizar figuras con cuadrados de 1 cm que cumplan con que el perímetro y el área numéricamente sean iguales.
7. En equipo, escriban un mensaje a un amigo, en el cual le expliquen cómo realizar figuras con cuadrados de 1 cm de lado que cumplan con que el perímetro sea igual al doble del área numéricamente.

Segundo trabajo individual

8. Dibuja figuras que tengan la misma área, pero diferentes perímetros.
9. Explica la estrategia utilizada para realizar las figuras anteriores.
10. Ahora, ¿puedes dibujar algunas figuras que tengan el mismo perímetro, pero diferentes áreas?
11. Explica detalladamente la o las estrategias utilizadas para realizar las figuras anteriores.
12. Dibuja una figura y luego modifícala para que esta tenga menos área. ¿Existe una única forma de modificarla o puedes hacer varias modificaciones? Explica ampliamente tu respuesta.

Como se ha mencionado con anterioridad en este análisis, las Tareas que están relacionadas de una u otra forma con la habilidad espacial, presentaron una mayor dificultad para los estudiantes. En este caso en particular, como lo mencionan Outhred & Mitchelmore (1992), una de las concepciones de los docentes alrededor del área es que, si un estudiante puede calcular el área de un rectángulo, este está capacitado para calcular el área de cualquier figura geométrica. Pero esto es una simple ilusión, porque calcular el área de una figura geométrica por medio del área de rectángulos, necesita una comprensión en un nivel mayor del área. De forma explícita el estudiante necesita conocer y comprender la propiedad aditiva, cómo funciona en el cálculo de áreas y en la comparación de áreas para realizar ciertas conclusiones como las requeridas en esta Tarea.

Adicionalmente, aunque no existe una relación directa entre las medidas del área y el perímetro, los docentes en el aula quieren forzar relaciones inexistentes según Outhred & Mitchelmore (1992). Por ejemplo, si el área aumenta entonces el perímetro aumenta, por esta razón, la Tarea parte de una exploración individual y grupal con el fin de generar en los estudiantes la realización de conjeturas que le permitan solucionar cada una de las Tareas periféricas asociadas a la central.

Por lo anteriormente expuesto, en esta Tarea se encontraron escazas evidencias de Fluidez y de Flexibilidad, y no se encontraron evidencias de originalidad. A continuación, se muestran la

Actividad a partir de las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad durante el desarrollo de la Tarea en el aula.

Fluidez: La fluidez se evidencia cuando E3 intenta encontrar una figura que numéricamente sea igual tanto en área como en perímetro. Para esto, mientras el busca la forma para dar solución a la Tarea, se le ocurren dos ideas por donde abordarla. Como se muestra en el siguiente episodio:

Tabla 43.

Episodio 10, evidencia fluidez en área y perímetro.

Episodio 10. (Vídeo 171, 15:02-20:05)	
I :	¿Cómo has pensado en encontrar una figura que tenga el mismo perímetro y la misma área numéricamente?
E3:	Profe, primero lo pensé a la loca, dibujando una figura y mirando si el perímetro y el área eran la misma.
I :	¿Y fue lo único que pensaste?
E3:	No profe, también lo pensé con un cuadrado
I :	¿Por qué con un cuadrado?
E3:	Porque es más fácil
I :	¿Por qué es más fácil?
E3:	Porque el área es este (lado) por este (lado) y el perímetro es este (lado) más este (lado), más este lado, más este (lado).

En el Episodio 10 (tabla 43), se puede ver cómo el estudiante utiliza lo que sabe sobre el cálculo de áreas y perímetros para encontrar una figura en la cual el área y el perímetro sean iguales numéricamente. Esto muestra la importancia del uso de conocimientos previos para resolver una

Tarea nueva como lo mencionan Solaz–Portolés y López (2008). Además, el no solo pensar en una estrategia sino en dos para resolver la Tarea propuesta, pone en manifiesto que este estudiante ya no solo busca una única estrategia para encontrar la solución a un Tarea que se le presenta.

Flexibilidad: La flexibilidad se pone en evidencia tanto de forma grupal como individual (Levenson, 2011), por esto las evidencias encontradas en la Actividad de los estudiantes se da por medio de la interacción entre ellos y sus compañeros, entre ellos y la investigadora, o entre ellos y sus propios cuestionamientos. A continuación, se muestran cuatro evidencias de flexibilidad:

En esta Tarea hay una pregunta relacionada con encontrar figuras con la misma área, a partir de la Actividad de los estudiantes en esta pregunta, se pone en manifiesto la flexibilidad, como se muestra en el Episodio 11.

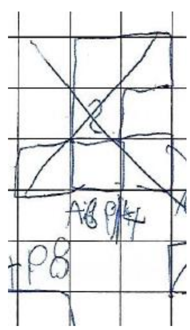


Figura 51. ¿Áreas iguales?

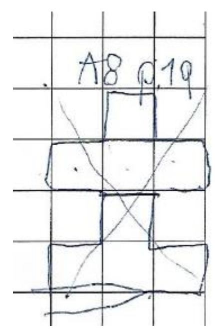


Figura 52. ¿Áreas iguales?

Tabla 44.

Episodio 11, evidencia fluidez en área y perímetro.

Episodio 11. (Vídeo 172, 13:10-18:43)	
E23:	Estas dos figuras tienen la misma área (haciendo alusión a la Figura 49 y a la figura 50)

E11:	No, esas dos figuras no tienen la misma área. Si le quito la mitad a esta (figura 50) entonces si tienen la misma área. (Cabe recalcar que en un principio E23 había realizado la figura x como una L y cuando E11 lo corrigió, le hizo los dos cuadrados en la parte de abajo)
E23:	Entonces así sí?
E11:	No, se debe cortar a la mitad esta (figura 50)
E11:	Ah ya, ahora si tienen la misma área.

En el Episodio 11 (tabla 44), se puede observar una evidencia de cómo a partir de un error de E23, E11 logra concebir una idea que le ayuda a encontrar dos figuras con áreas iguales, y de ese modo también hace que E23 desista de esa idea errónea que tenía, al convencerlo de su error y mostrándole una solución a la Tarea.

A partir del razonamiento de E11, E20 y E7 realiza un razonamiento para encontrar figuras con la misma área. Como se observa en el Episodio 12.

Tabla 45.

Episodio 12, evidencia fluidez en área y perímetro.

Episodio 12. (Vídeo 172, 19:00-29:16)	
I:	E20 ¿puedes repetir lo que dijiste?
E20:	Yo cuento los cuadraditos para saber el área.
I:	¿Cómo así?
E7:	Nosotras tenemos una con 6 cuadraditos, entonces hacemos varias figuras con 6 cuadraditos y ya.

I:	¿Y eso garantiza que todas esas figuras tengan la misma área?
E7:	Si, porque el área de cada figura es la suma de los cuadraditos que están en ella.
I:	¿Por qué de los cuadrados?
E20:	Profe, de los cuadrados no, del área de cada cuadradito.
I:	¿Puedes repetir la conjetura que hicieron entre las dos?
E20:	Que, si tenemos 6 cuadraditos, para hacer figuras con la misma área, hacemos figuras con 6 cuadraditos de área uno.

En el Episodio 12 (tabla 45), se muestra que E20 y E7 retoman la idea de E11 y la configuran para realizar una conjetura, que les ayuda a encontrar diferentes figuras con la misma área, utilizando la propiedad aditiva asociada al cálculo de áreas. Razonamiento que surgió durante esa interacción entre los estudiantes y logró hacer que cambiaran sus enfoques de ensayo y error a llegar a conjeturas basadas en el concepto matemático.

5.2.7 Prueba final y entrevista (Ver apéndice I)

La prueba final y la entrevista se realizan con el fin de ahondar en las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad. Por esta razón, es una adaptación de la prueba diagnóstica. Con el objetivo de confrontar la Actividad de los estudiantes en la prueba diagnóstica y la prueba final y la entrevista, alrededor de las funciones cognitivas evidenciadas.

A continuación, se muestran las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad encontradas en la Actividad de los estudiantes. Cabe resaltar que, en la prueba final y la entrevista a diferencia de la prueba diagnóstica, se encuentran datos que reflejan un pensamiento fluido y original.

5.2.7.1 El calendario

	Universidad Industrial de Santander Proyecto Talento Matemático	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Nombre: ____ Grado: ___________

A continuación, se plantea un problema matemático, resuélvelo utilizando todo lo que sabes. Por favor, realiza todos tus procedimientos y razonamientos en la hoja, no utilices el borrador, si crees que algo te quedo mal déjalo y sigue con tus ideas.

Tarea 1.

Dado el calendario del mes de abril (ver la figura), responda las siguientes preguntas:

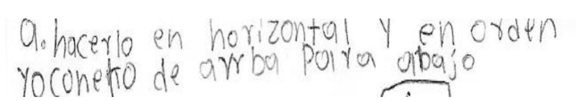
a) ¿Qué relaciones encuentra entre los números que están dentro de la cruz?
b) Si movemos la cruz hacia la derecha, ¿qué relaciones podemos encontrar?, ¿Cómo podemos comparar estas relaciones con las del punto anterior?

c) Si ubicamos el centro de la cruz en el día 19 ¿cuáles números que quedan en ella cruz? ¿Por qué?
d) Si tienes el calendario del mes de julio del mismo año ¿las relaciones que encontraste de siguen manteniendo? ¿Por qué?, y si tienes un calendario de otro mes en otro año, ¿sigue sucediendo lo mismo? ¿Por qué?
e) Si tuvieras que explicarle a un compañero el juego de la cruz y el calendario, pero sin contar con el calendario, ¿Cómo lo harías?

Fluidez: En esta Tarea los estudiantes encontraron diferentes formas de abordarla, en un principio como lo hicieron en la diagnostica, encontraron que los números de la cruz variaban, porque unos eran pares y otros impares. Otra relación encontrada fue la del orden que siguen los números que están en la horizontal y que los números de la vertical son diferentes. A continuación, se muestra en la tabla 46, lo hecho por E7, que es un ejemplo de lo que hizo la mayoría de los estudiantes.

Tabla 46.

Evidencia fluidez en calendario.

	Transcripción:
 *Figura 53.*Evidencia fluidez E7.	Los números son pares e impares.
 *Figura 54.* Evidencia fluidez E7.	a. Hacerlo en horizontal y en orden, yo cuento de arriba para abajo

Flexibilidad: Esta función cognitiva se evidencia cuando el estudiante realiza un cambio de enfoque de uno que no le funciona a otro que posiblemente si le funcione. Como ellos ya había trabajado esta Tarea en la prueba diagnóstica, no se quedaron estancados en la idea de par e impar, porque esta no les ayuda para encontrar los números dentro de la cruz. Por esto, comenzaron a buscar relaciones entre los números dentro de la cruz.

La estudiante E20, aunque aún no relacionaba de forma directa lo que sucedía con los números dentro de la cruz y lo que representaban en el contexto de la tarea, utilizó una estrategia para encontrar los números dentro de la cruz, vea la estrategia usada por E20 en la figura 55 y el episodio 11.

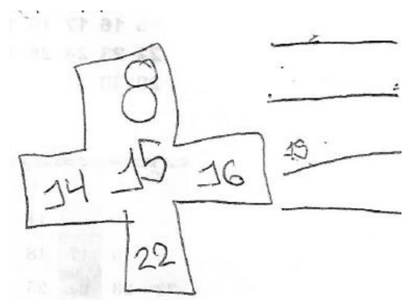


Figura 55. Estrategia utilizada por E20 para resolver la Tarea.

Tabla 47.

Episodio 13, evidencia flexibilidad en calendario.

Episodio 13. (Vídeo 177, 0:00-3:08)	
I :	¿Me puedes explicar la estrategia que utilizaste para encontrar los números dentro de la cruz?
E20:	Cuento.
I :	¿Cómo cuentas?
E20:	Yo hago esto (Figura 53), en cada línea hay 7, entonces ubico el número del centro que me den.
I :	Por ejemplo, hazlo con el 15.

E20:	La primera (línea) va hasta el 7, la segunda (línea) hasta el 14, el 15 va acá (haciendo alusión a que el 15 va en la tercera línea, de primero), entonces arriba va el 8, porque inicia la segunda línea y abajo va el 22. Y en los lados como van en orden, van el 14 a la izquierda y a la derecha el 16.

Como se puede ver, en el episodio 13 (tabla 47) y la figura 55, E20 utiliza una estrategia diferente a la utilizada en la prueba diagnóstica, mostrando un pensamiento flexible, al buscar una estrategia que le funciona para encontrar los números dentro de la cruz, aunque durante la discusión E20 no muestra razones enlazadas con el contexto de la Tarea para el hecho de que cada línea tiene siete números. Cabe recalcar que E20 se encuentra en el grupo 1 de los tipos de soluciones de la prueba diagnóstica para esta Tarea.

E11 también implementa una solución diferente a la descrita en la prueba diagnóstica. E11 está ubicado en el grupo 2 de los tipos de solución de dicha prueba. E11 para encontrar los números dentro de la cruz, logra ver el enlace entre los números de la cruz y el contexto en el que estos se ubican. Es decir, comprende la temporalidad existente entre los números, lo que le permite encontrar los números de la cruz sin necesidad de tener el calendario. A continuación, en el episodio 14 (tabla 48), se muestra el razonamiento utilizado por E11 para esta Tarea.

Tabla 48.

Episodio 14, evidencia flexibilidad en calendario.

Episodio 14. (Vídeo 177, 4:12-8:33)	
I :	¿Me puedes explicar la estrategia que utilizaste para encontrar los números dentro de la cruz?

E11:	Digamos que estoy acá en el 13, para encontrar el de arriba cuento 7 días atrás, para abajo sumo 7 días hacia adelante y los del horizontal resto 1 y sumo 1
I :	¿Puedes dar un ejemplo?
E11:	Yo hago esto (Figura 54).
I :	¿Por qué le restas 7?
E11:	Porque es una semana antes.

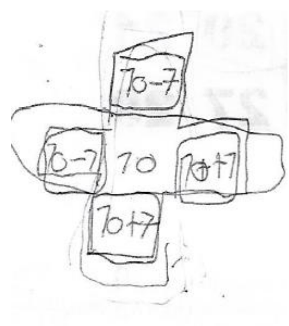


Figura 56. Estrategia utilizada por E11 en la Tarea del calendario.

Como se observa, en el episodio 13 (tabla 47) y la figura 56, E11 reconoce el factor de la temporalidad y le da sentido a las operaciones que está realizando para encontrar los números dentro de la cruz. Mostrando un razonamiento flexible al cambiar la estrategia utilizada en la prueba diagnóstica. Además, este tipo de razonamiento lo lleva a encontrar una relación original entre los números dentro de la cruz.

Originalidad: E11 a partir de lo que realiza en la figura 54, encuentra que al sumar los números de la línea horizontal y por otra parte sumar los números de la línea vertical, el resultado de dichas sumas es igual (ver la figura 57).

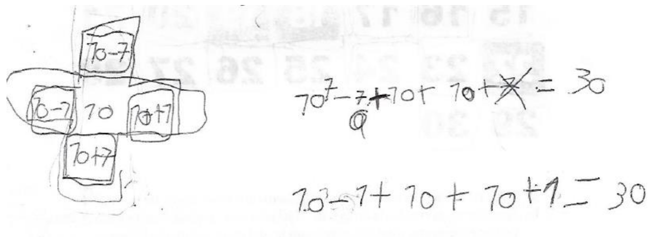


Figura 57. Respuesta original de E11 a la Tarea del calendario.

Tabla 49.

Episodio 15, evidencia flexibilidad en calendario.

Episodio 15. (Vídeo 177, 19:15-30:00)	
E11:	Como en la vertical tengo $10 - 7 + 10 + 10 + 7$, y en la horizontal tengo $10 - 1 + 10 + 10 + 1$, en las dos tengo tres diez
I :	¿Qué haces con los sietes y los unos?
E11:	Pongo el último 7 adelante, y me queda 7-7 es cero, queda 10+10+10+0 pero como el 0 no es nada., queda tres veces 10 que es 30
I :	Y ¿los unos?
E11:	Hago lo mismo, 1-1 es cero y quedan tres veces 10 que es 30, las dos me dan el mismo resultado

Este tipo de respuesta es original, porque es inusual y poco evidente, mostrando un nivel profundo de generalización como lo menciona Rivera (2013). Con esta respuesta E11 muestra una visión amplia de la Tarea y un desarrollo de habilidades cuantitativas.

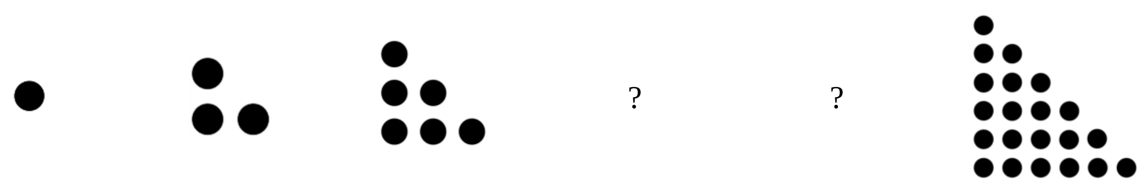
5.2.7.2 Patrón de crecimiento

Nombre: ____ Grado: ____________

A continuación, se plantea un problema matemático, resuélvelo utilizando todo lo que sabes. Por favor, realiza todos tus procedimientos y razonamientos en la hoja, no utilices el borrador, si crees que algo te quedo mal déjalo y sigue con tus ideas.

Secuencia de crecimiento

Hace mucho tiempo (en el año 520 antes de Cristo), un matemático llamado Pitágoras y sus alumnos estaban fascinados por los números y la geometría. Uno de sus descubrimientos consistía en representar los números por medio de figuras geométricas. Por ejemplo, ellos se dieron cuenta que ciertos números podían ser representados en forma de triángulo. Por ejemplo, el 1, 3, 6, 10, ?, ?, son los primeros números triangulares, ya que se pueden representar por puntos colocados en forma de triángulos, como se muestra enseguida.



Triangular 1 | Triangular 2 | Triangular 3 | Triangular 4 | Triangular 5 | Triangular 6

a) Dibuja cómo queda el triangular 4 y el 5.

b) Si nos saltamos los triangulares ¿puedes dibujar o describir en palabras cómo queda el triangular 10? Ahora ¿Cómo queda el triangular 21? Y ¿cómo queda el triangular 100? ¿Por qué estás tan seguro de tu respuesta?

c) Escribe un mensaje a un amigo en el que le describas la forma para calcular el triangular 200. Ahora, amplia tu mensaje escribiendo la forma de calcular y dibujar cualquier número triangular.

Fluidez: El estudiante E11 muestra un pensamiento fluido, ya que cuando realiza cada término de la secuencia, que en este caso se llama triangular, lo define no solo de forma figural, sino que le asigna un número que representa la cantidad de círculos. Evidenciando, dos ideas para encontrar la solución a la Tarea (ver figura 58).

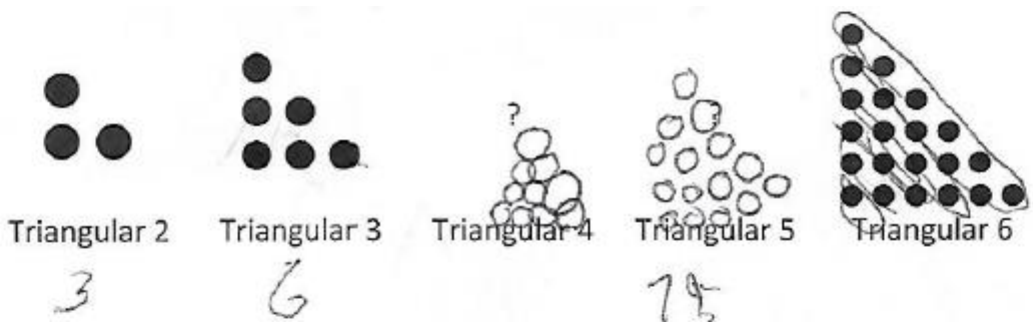


Figura 58. Evidencia de fluidez de E11.

Como se observa en la figura 58, E11 como se esperaba en el análisis a priori, relaciona la figura de cada triangular con un número natural. Permitiendo desarrollar un pensamiento flexible a la hora de encontrar una estrategia eficaz para encontrar el número triangular que representa cada término.

Flexibilidad: En esta Tarea se encuentran diferentes datos que respaldan la idea del desarrollo de la flexibilidad en los estudiantes. Por ejemplo, E20 en un primer momento recae en lo hecho en la prueba diagnóstica, es decir, conserva la figura, pero no hay un control sobre como crece el patrón (ver figura 59).

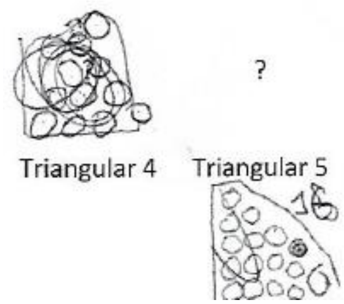


Figura 59. Se conserva la forma, pero no la regularidad.

E20 realiza esta representación de los triangulares 4 y 5, luego de su interacción (tabla 49) con E11, E20 cambia de enfoque sobre como es el comportamiento de la secuencia.

Tabla 50.

Episodio 16, evidencia flexibilidad en secuencia de crecimiento.

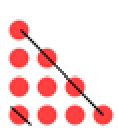
Episodio 16. (Vídeo 178, 12:10-29:31)	
E20:	Para encontrar este (triangula 4), yo le sumé al triangular 3, el 2 y el 1, por eso el triangular 4 tiene 10 círculos, el 5, lo hice similar con el triangular 5, le sume 6, y luego al triangular 6, le sumo 7 y así, uno le suma o 6 o 7 o 8 al triangular que va a encontrar.
E11:	¿Y para encontrar el triangular 2 y el 3?
E20:	(Se queda pensando), hmm, no sé.
E11:	¿Y si lo miramos por cada diagonal?
E20:	… E11, en cada diagonal se va retrocediendo
E11:	Si, en el triangular 6 hay 6, luego 5, luego 4, 3, 2, 1

En el episodio 16 (tabla 50), se puede ver como por medio de una pregunta desequilibrante como lo menciona Piaget de E11 a E20, logra sacar a E20 de su zona de confort y la pone a pensar en su forma de analizar la secuencia. Además, E11 no hace solo la pregunta, sino que realiza una sugerencia valiosa para E20, porque la lleva a cambiar de enfoque y encontrar una solución a la Tarea. Corroborando una vez más lo que dice Levenson (2011), sobre como la flexibilidad se puede dar por medio de la interacción entre los estudiantes.

Por otra parte, cuando los estudiantes estaban pensando sobre la forma de calcular el número que representaba cada triangular E11 encontró una manera extensa si el triangular era un número mayor. Pero luego, de que la investigadora le hizo ver que su método era extenso, este encontró una forma más eficaz de resolver esta cuestión (tabla 51).

Tabla 51.

Episodio 17, evidencia flexibilidad en secuencia de crecimiento.

Episodio 17. (Vídeo 174, 12:10-29:31)	
I :	¿Cómo sabes qué número representa cada triangular?
E11:	En el triangular 7, sumo: $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$.
I :	Y si ahora te pido que halles el número que representa el triangular 21.
E11:	Pues sumo 21 más 20 más 19 hasta 1.
I :	Bueno y ahora el triangular 100.
E11:	Igual, 100 más 99 hasta 1.
I :	¿Me puedes decir que número representa el triangular 100?
E11:	Profe es muy largo.
I ;	¿Será que existe una forma más sencilla de calcular el número del triangular?
E11:	Creo que encontré algo, sí tengo el triangular 5, entonces voy cogiendo así:  $4 + 1 = 5$,  $3+2 = 5$, hay $5 + 5 = 10$

I :	Y con el triangular 8 ¿funciona?
E11:	Si, pero ahora sumo $8 + 1 = 9, 7 + 2 = 9, 6 + 3 = 9$ y $5 + 4 = 9$, serían $9 + 9 + 9 + 9 = 36$

Como se observa, esta estrategia es diferente a la anteriormente utilizada por E11, porque él inicia haciendo un cálculo regresivo y ahora realiza un cálculo encontrando una regularidad.

A diferencia de la prueba diagnóstica los estudiantes en la prueba final y en la entrevista mostraron un pensamiento luido y flexible al resolver esta Tarea, pues mostraron por lo menos dos formas de abordar la Tarea y, adicionalmente, lograron llegar a una generalización lejana (Stacey,1989) de la construcción del patrón. En esta misma línea, E11 logra generalizar verbalmente la forma para calcular el número que representa el triangular n, de acuerdo con la naturaleza de este, es decir, si n es par o impar.

Originalidad: En esta Tarea, se encontraron dos evidencias de originalidad, una de E23 y otra de E11.

E23 logra realizar una generalización lejana de la forma como encuentra el número que representa un triangular. En el análisis a priori, este tipo de solución se había contemplado y es la de hacer una abstracción figural, transformando la figura del triangular en un cuadrado, como se muestra en la figura 60.

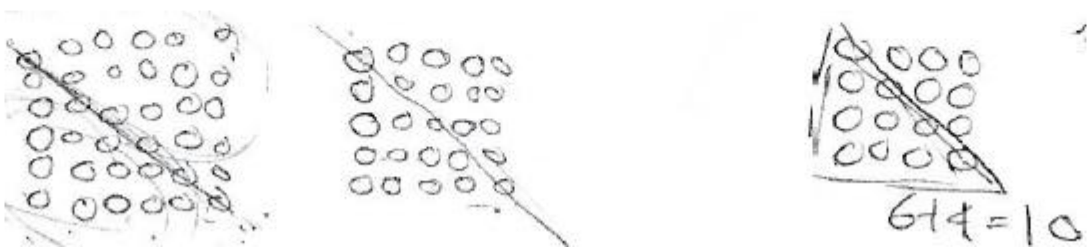


Figura 60. Respuesta original de E23.

A partir de la abstracción figural realizada por E23, él pudo realizar una generalización cercana (Stacy, 2011), pues necesitaba del término anterior para encontrar la cantidad de círculos que necesitaba para calcular el número que representaba el triangular.

Tabla 52.

Episodio 18, evidencia de originalidad en secuencia de crecimiento.

Episodio 18. (Vídeo 175, 09:02-15:13)	
I :	¿Cómo calculas el triangular a partir de esa representación?
E23:	Yo me di cuenta de que, si hago un cuadrado, y lo parto por la mitad (traza la diagonal del cuadrado), en la parte de arriba me queda el triangular anterior, y luego a eso le sumo la línea de la mitad.
I :	¿Puedes dar un ejemplo?
E23:	En el triangular 5 (ver figura 58), completo el cuadrado, lo parto por la mitad y me queda el triangular 3, que tiene 6 círculo y luego le sumo la diagonal que es 4 y ya.

Esta respuesta es original porque el estudiante utiliza una estructura más compleja y diferente a la proporcionada para dar solución a la Tarea. Rivera (2013), menciona que este tipo de estructura brindada por este estudiante le permite justificar la generalización del patrón que describe la secuencia. Esta respuesta fue única entre sus pares.

Por otra parte, E11, sigue con el razonamiento del Episodio 16 (tabla 50), en el cual busca realizar una generalización para encontrar en número que representa cada triangular. A continuación, se presenta la respuesta original brindada por E11.

Tabla 53.

Episodio 19, evidencia de originalidad en secuencia de crecimiento.

Episodio 19. (Vídeo 175, 0:00-8:23)

I : Si no tienes el dibujo, ¿Cómo lo haces?

E11: En el triangular 6 sumaba sietes y en el 8 sumaba nueves, entonces, cuando tengo el triangular le sumo 1.

I : Y ¿Cuántas veces sumas los sietes, los nueves?

E11: Como armo grupitos de dos, creo que la mitad

I : ¿Cómo así?

E11: En el triangular 6, sumo $7 + 7 + 7$ y en el 8 sumo $9 + 9 + 9 + 9$

I : Ahora, utiliza tu estrategia para encontrar el número que representa el triangular 5

E11: El triangular 5, sumo $5 + 1 = 6, 4 + 2 = 6$, $4 +$, (pensando), solo $+4$, es $6 + 6 + 4 = 16$.

I : ¿Funcionó tu estrategia, siempre te da el mismo número?

E11: No.

I : ¿Qué pasará, por qué no funciona?

E11: Porque no puedo armar los grupos completos

I : ¿Qué tienen en común los triangulares anteriores? ¿Cómo son esos números (el triangular 6 y el triangular 8)?

E11: Ah, son pares, por eso los puedo partir a la mitad

I ; ¿Y entonces cómo se hace para los números impares?

E11:	…. (Después de hacer varios ejemplos con triangulares impares) Profe, el número que debo sumar, el que queda solo en la mitad, es este (el número del triangular) más 1 y lo divido en 2.
I :	Y ¿cuántas veces sumas este número? (señalando el número del triangular más 1)
E11:	Si es el 7, le quito el de la mitad y lo divido en 2.
I :	¿Puedes calcular el triangular 7?
E11:	Sería 6 divido en 2, 3, entonces sumo tres veces 8 más 4, entonces tiene 28.

En el episodio 19 (tabla 53), E11 logra realizar una generalización verbal del patrón que describe la secuencia, dividiendo la secuencia entre triangulares pares e impares. Este tipo de razonamiento mostrado por E11 fue único en el salón y adicionalmente muestra un avance en las habilidades de razonamiento cualitativo y cuantitativo del estudiante. Este tipo de originalidad es con respecto a sus pares y con respecto a él mismo, pues hasta el momento no había realizado una generalización a este nivel.

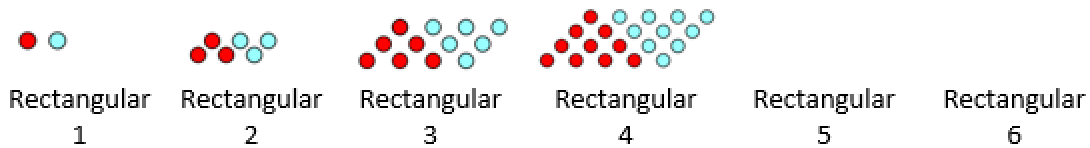
5.2.7.3 Rectangular

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Nombre: ____ Grado: ___________

Entrevista (rectangular)

Los números rectangulares, son números que se pueden representar geométricamente en forma de romboide como se muestra en la figura. Los primeros cuatros números rectangulares son el 2, 6, 12 y 20, es decir, el rectangular 1 representa el número 2, el rectangular 2 representa el número 6, el rectangular 3 representa el número 12, así sucesivamente.



e) Tú primera tarea es encontrar el número rectangular 5 y 6, ¿qué número representan cada uno de estos rectangulares?

f) Si nos saltamos los números rectangulares ¿Puedes encontrar el rectangular 10 y qué número que representa? Y ¿Cómo queda el triangular 21 y qué número representa?

g) Puedes explicarnos de forma clara la estrategia que utilizas para encontrar cada uno de los rectangulares.

h) ¿Tu estrategia funciona para encontrar el rectangular 100?, ¿Por qué?, ¿Qué número representa el rectangular 100?

Fluidez: El estudiante E7 muestra un pensamiento fluido, ya que cuando realiza cada término de la secuencia, que en este caso se llama rectangular, lo define no solo de forma figural, sino que le asigna un número que representa la cantidad de círculos. Evidenciando, dos ideas para encontrar la solución a la Tarea (ver figura 60).

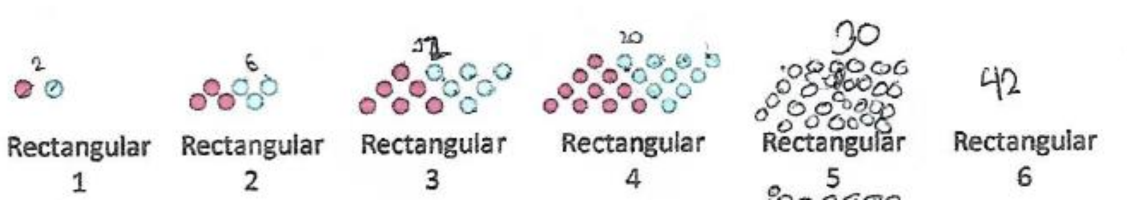


Figura 61. Evidencia de fluidez de E11.

Flexibilidad: E11 muestra un pensamiento flexible, puesto que cuando aborda la Tarea inicia con una estrategia que no le funcionaba para encontrar el patrón que describe la secuencia. Luego de la interacción con la investigadora, él desarrolla una nueva estrategia basado en la idea que llevó a cabo en la prueba final. Este cambio de enfoque se muestra en el episodio 19 (tabla 53), cuando E11 busca el patrón.

Tabla 54.

Episodio 20, evidencia de flexibilidad en rectangular.

Episodio 20. (Vídeo 175, 0:00-8:23)	
E11:	Una montañita va hacia arriba y otra montañita va hacia abajo, en el rectangular 3, hay dos acá (haciendo referencia a los círculos del lado del triángulo rojo sin contar el círculo que comparten dos lados del triángulo rojo) y dos acá (haciendo referencia a los círculos de otro lado del triángulo rojo sin contar el círculo que comparten dos lados del triángulo rojo), y luego el círculo de la punta. Y luego relleno con círculos.
I :	¿Cómo lo rellenas?
E11:	Hasta que esté lleno
I :	Entonces ¿Cuál es la regularidad?
E11:	No sé, profe, no sé
I :	Claro que puedes, sólo debes seguir tu propio consejo, mira la secuencia de otra forma.

Después de seguirlo intentando con la misma estrategia, al ver que no le funcionaba E11 decide mirar la secuencia de una forma diferente y es cuando encuentra que precisamente esta secuencia es el doble de la secuencia de los números triangulares.

Tabla 55.

Episodio 21, evidencia de flexibilidad en rectangular.

Episodio 21. (Vídeo 175, -20:35-28:16)	
E11:	Profe ya, este es igual que este (haciendo referencia a la secuencia de los números triangulares), pero ahora no es una montañita sino dos.
I :	¿Me puedes explicar más detalladamente lo que me estás diciendo?
E11:	Profe, la montañita roja va disminuyendo de a uno hasta el uno, igual que antes y la montañita azul también va disminuyendo de a uno hasta llegar al uno.

Como se puede observar en la tabla 54 y 55, E11 aunque ya había trabajado con el patrón triangular no analizó de entrada que la secuencia de números rectangulares era el doble de los números triangulares, pero luego de la sugerencia de mirar el patrón de otra forma, realiza un análisis diferente para encontrar la solución.

Originalidad: La originalidad en esta Tarea se da cuando el estudiante E23 encuentra un patrón que no está relacionado con la secuencia de números triangulares. Pues él analiza el cambio que hay de un término a otro y la cantidad de círculos que hay, para finalmente aplicar la propiedad distributiva de los números naturales. Este estudiante, encontró esta solución de forma rápida, en el cual realiza una generalización lejana con el rectangular 100 y no necesita hacer una representación figural para encontrar el número que representa este rectangular (ver figura 62).

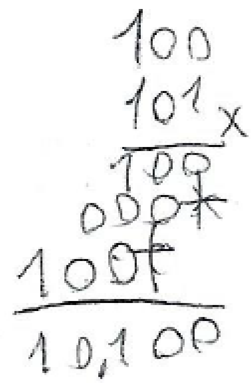


Figura 62. Evidencia de originalidad de E23 en la Tarea de números rectangulares.

Esta respuesta de E23 es original, porque se esperaba que los estudiantes relacionaran esta secuencia con la secuencia de los números triangulares y E23 la resolvió de una forma diferente a todos los demás estudiantes.

6. Conclusiones

En el presente capítulo se muestran las principales conclusiones que surgen del desarrollo de la investigación, con el fin de dar cuenta al objetivo y pregunta de investigación. Para esto, se realiza un contraste entre lo reportado en la literatura y en el caso de estudio, se habla del entorno y sus potencialidades para desarrollar las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad. Además, se presenta un análisis del diagnóstico inicial, así como del desarrollo de las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad después de la participación de los estudiantes en el entorno de enriquecimiento. Finalmente se plantea un análisis de las limitaciones del entorno y del mismo contexto del caso de estudio, así como recomendaciones para futuras investigaciones.

6.1 Escuela rural colombiana

El Ministerio de Educación Nacional Colombiano se ha encargado de reglamentar la educación rural con el fin de brindar mejores oportunidades a los estudiantes de este sector. Para esto, después de diferentes cambios realizados a los métodos utilizados en las zonas rurales, el MEN desarrolló un modelo educativo llamado Escuela Nueva. Este modelo se caracteriza por tres propuestas: una pedagógica, una metodológica y una didáctica.

En el presente documento, se realizó un análisis teórico del modelo Escuela Nueva, con el fin de comprender desde la literatura cómo funciona este modelo y que características aporta a los lineamientos de la investigación. Entre las características encontradas desde el componente teórico se evidencia que el trabajo colaborativo es fundamental para la construcción de conocimiento y que la creatividad debe ser un eje constante en el aula de clase. Ya que es una característica fundamental de la pedagogía activa, pedagogía bajo la cual se sustenta el modelo de Escuela Nueva.

En contraste, durante la observación realizada al caso de estudio se encuentra que esta escuela está en un período de transición, de tener un profesor por curso al modelo de Escuela Nueva. Aspecto que llevan a que el modelo no se evidencie en el aula de una forma fiel al descrito Teóricamente. Como se menciona en la metodología, no se evidencia un trabajo colaborativo en el aula, ni la creatividad como eje fundamental de la clase de matemáticas.

Adicionalmente, la visión del caso de estudio de las matemáticas es limitada porque no le permite ir más allá de lo procedimental hacia una matemática abstracta y compleja, componente fundamental para el desarrollo del talento matemático en los sectores rurales como lo mencionan Ehlers y Montgomery (1999).

En este estudio identificamos como una oportunidad la visión limitada de las matemáticas, dado que nos permite ampliar el espectro de cómo los estudiantes la perciben.

Actualmente en Colombia la educación rural enfrenta constantes desafíos que debe asumir, entre ellas, implementar asertivamente el modelo de Escuela Nueva. Para esto es necesario que el MEN realice constantes capacitaciones a los docentes y directivos de las escuelas rurales con el fin de que conozcan el modelo y puedan implementarlo de la forma más adecuada. Además, las universidades del país deben dar a conocer el modelo y la forma de implementarlo a sus estudiantes de licenciatura, con el objetivo de que este modelo forme parte del perfil del egresado de los licenciados del país haciendo que la implementación de este sea más factible.

Una oportunidad para realizar un engranaje entre el modelo de Escuela Nueva y escuela rural es el desarrollo del Talento Matemático desde la perspectiva de esta investigación porque se plantea un entorno donde el trabajo individual y el colaborativo son un medio para el desarrollo del Talento Matemático a partir de las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad y las habilidades matemáticas.

6.2 El entorno de enriquecimiento

Con el fin de responder a la pregunta de investigación, se crea un entorno de enriquecimiento en el que se trabaja bajo un enfoque de Resolución de problemas (Tareas). El diseño metodológico de este entorno propicia el desarrollo de las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad y por ende el desarrollo del Talento Matemático.

En un primer momento, la investigadora realiza una adaptación de unas Tareas que por sus características propias permiten el desarrollo de habilidades espaciales, un razonamiento inductivo/deductivo, causales, cuantitativas y cualitativas. Estas Tareas se caracterizan por tener múltiples soluciones porque esto permite que el estudiante interprete y reinterprete la Tarea para encontrar diferentes soluciones, esto hace que desarrolle un pensamiento flexible y fluido. Tareas incompletas o sin solución, este tipo de Tarea enfrenta al caso de estudio a una situación que lo desequilibra al no poder encontrar una solución, pero a su vez, le permite replantear la Tarea para que esta tenga solución, o busca las razones dentro de la matemática para que esta no tenga solución, favoreciendo así la originalidad y la flexibilidad. Adicionalmente cada Tarea está conformada por una Tarea central y una periférica, lo que busca desafiar a cada estudiante de acuerdo con sus capacidades.

Cabe resaltar que la Tarea periférica por cuestiones de tiempo, no logró ser abordada en la mayoría de los casos. Esto debido al tiempo que se requería para analizar cada Tarea por parte del caso de estudio, pues la dinámica cotidiana en el aula de clase no había favorecido una lectura comprensiva y ni la generación de una actividad matemática creativa.

La metodología del entorno de enriquecimiento se desarrolla en cinco momentos. En un primer momento se quiere captar la atención del estudiante y motivarlo para tener una buena actitud frente a la Tarea Matemática que se inicia, aunque la motivación no es un factor determinante, si es importante para desarrollar el Talento Matemático (Calero, García, Gómez, 2007). En este primer momento se hace un origami modular, llamado estrella ninja, con el fin de estudiar las propiedades de los polígonos y aportar al desarrollo de la habilidad espacial de los estudiantes, que como se muestra en el análisis de los datos y como lo afirma Gonzato, Fernández y Díaz, (2011) es la habilidad que menos se trabaja en clase de matemáticas.

A partir del segundo momento, el entorno de enriquecimiento funciona bajo una adaptación del método ACODESA. El cual es un aporte importante para apoyar la metodología de Escuela Nueva, porque fomenta el trabajo colaborativo entre los estudiantes, partiendo del trabajo individual en donde se hace un acercamiento a la Tarea y se resuelven unas cuestiones desde la perspectiva de cada estudiante que pertenece al caso de estudio. Esta segunda fase es la encargada de desarrollar un pensamiento fluido en los estudiantes, pues las preguntas permiten que el estudiante genere ideas para solucionar las Tareas.

Y luego pasa a realizar un trabajo en equipo, en esta tercera fase, los estudiantes comparten sus ideas desarrolladas en el trabajo individual, con el fin de explicarlas y poder afianzarlas o cambiar de enfoque si es necesario. En esta fase se promueve el desarrollo de un pensamiento flexible tanto de forma individual como grupal. Cabe recalcar que la flexibilidad se puede dar por un autocuestionamiento del razonamiento para solucionar la tarea o de un cuestionamiento externo que lo hace replantearse las estrategias utilizadas para resolver las tareas, apoyando la idea de Levenson (2011) quien afirma que la flexibilidad se puede dar de forma grupal.

En la cuarta fase se realiza un debate, en el cual los estudiantes ponen en común sus estrategias utilizadas para resolver las Tareas. Esta fase es fundamental para el desarrollo del pensamiento flexible porque permite nuevamente el autocuestionamiento y el cuestionamiento externo de las formas de solucionar la Tarea. Además, permite desarrollar habilidades comunicativas las cuales se vieron favorecidas en el caso de estudio, porque en un inicio los estudiantes no participaban de forma activa ni se autoestionaban, ni cuestionaban los razonamientos de otros. Pero luego se dio de forma más natural el cuestionarse cada estrategia. Promoviendo así, el cambio de enfoques en las respuestas.

Finalmente, en la quinta fase, se realiza un segundo trabajo individual en el que se presenta una Tarea periférica que está relacionada con la Tarea central que es la que los estudiantes resuelven en el primer trabajo individual y en el trabajo en equipo. Esta Tarea es de mayor nivel y requiere un nivel más avanzado de las habilidades matemáticas. Como se mencionó esta Tarea no fue abordada en la mayoría de los casos por falta de tiempo, por lo que se recomienda que se dedique por lo menos una hora más a la solución de cada Tarea.

6.3 Las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad

En el inicio de este estudio se detectó que la actividad matemática que evidenciaban los estudiantes no incluía la conocimiento inusual, novedoso o sofisticado. Como mencionan Barraza, Romo y Roa-Fuentes (2020) su actividad matemática referente a la creatividad era 'elemental'.

Después de la implementación del entorno de enriquecimiento se pudo evidenciar una creatividad que ya no resulta elemental, sino que es el resultado de una Actividad matemática que se ha generado a partir de las Tareas implementadas que permiten el desarrollo de las funciones cognitivas.

Dicho desarrollo se evidencia en el contraste de la Actividad realizada por los estudiantes en la prueba diagnóstica y la prueba final. En la prueba diagnóstica los estudiantes tuvieron un acercamiento de exploración hacia las secuencias, unos llegaron a tener ideas que les permitieron reconocer regularidades (ver figura 31) pero que no eran suficientes para solucionar la Tarea del Calendario. En otros, aparte de reconocer esas regularidades iniciales como números pares e impares también reconocen otra relación (ver figura 32), pero esto no les permitió llegar a la solución de la Tarea, dada la fijación que tenían hacía cada regularidad hallada. Por ende, estos estudiantes no buscaron una relación que fuera más eficiente para encontrar los números dentro de la cruz. En la Tarea del calendario no se evidencian funciones cognitivas asociadas a la Creatividad en la prueba diagnóstica.

Mientras que, en la prueba final, los estudiantes muestran evidencias de las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad. Ya que, a la hora de abordar el problema, buscan las relaciones existentes entre los números de la cruz (fluidez). En esta búsqueda encuentran la relación par e impar, relación de orden y de diferencia (ver tabla 46).

En cuanto a la flexibilidad, el cambio de enfoque realizado en la prueba final con respecto a la diagnóstica es evidente, puesto que ya no se quedan estancados en la relación de par e impar, sino que buscan otra regularidad que les sirva para encontrar los números que están dentro de la cruz sin importar si tienen el calendario o no. Para esto, es fundamental la relación existente entre el contexto de la Tarea y los números de la cruz.

La búsqueda de una relación más eficiente lleva a formular una regularidad original, puesto que, a partir de la relación existente entre el contexto de la Tarea y los números, el estudiante E11 desarrolla una nueva regularidad, encontrando que la suma de la horizontal y la suma de la vertical son exactamente iguales. Que como se había planteado en el análisis a priori era una respuesta original puesto que ninguno de sus pares la encontró. Además, esta respuesta requiere un mayor nivel de razonamiento como lo menciona Rivera (2013) por no ser una relación evidente, sino que requiere de unas operaciones externas para llegar a ella.

En la Tarea de la secuencia de crecimiento, el avance del caso de estudio en el desarrollo de las funciones cognitivas asociadas a la Creatividad es evidente. Puesto que, en la prueba diagnóstica, los estudiantes realizan un primer acercamiento a las secuencias, y a lo que significa una regularidad. Por ende, algunos estudiantes estructuran representaciones figurales sin seguir la secuencia, siguiendo solo la forma y sin tener en cuenta la cantidad de círculos. Otros estudiantes, tienen en cuenta la cantidad de círculos y la forma de la figura, mostrando una evidencia de fluidez, que se reitera con mayor conciencia en la prueba final (Ver figura 61).

En cuanto a la flexibilidad, en la prueba diagnóstica se evidencia en el cambio de una estrategia que no describía el patrón de crecimiento a otra que sí. Mientras que en la prueba final el pensamiento flexible se hace presente cuando el estudiante perfecciona su estrategia para contabilizar el número triangular que representa cada término. Ya que en un primer momento el estudiante E11 encuentra una estrategia que le funciona, pero es muy tediosa para encontrar números triangulares grandes. Después de la interacción con la investigadora E11 decide realizar una estrategia más eficaz para encontrar el número triangular (ver tabla 51). Este tipo de generalización realizada por E11 es una generalización lejana que le permite encontrar un cualquier número triangular.

Adicionalmente, este tipo de respuesta brindada por E11 es original porque el estudiante logra encontrar unas regularidades dentro de la estrategia que está buscando y esto le permite construir un patrón para encontrar el número triangular que representa cada término. Cabe resaltar que en la prueba diagnóstica no se encontraron evidencias de originalidad.

6.4 Limitaciones del contexto del caso de estudio y recomendaciones para futuras investigaciones

Una de las limitaciones del contexto del caso de estudio, es el clima de aula, porque el clima de este no era favorable para el desarrollo del Talento Matemático. Esto lleva a que exista poco interés por parte de los estudiantes hacia la clase y hacia aprender (Molina y Pérez, 2006). Por estas razones se decidió dividir el grupo en dos subgrupos, donde el único requisito es que cada grupo estuviese conformado por estudiantes de cuarto y de quinto grado.

Esto favoreció el clima de aula, permitió un ambiente saludable para motivar de forma adecuada a los estudiantes e hizo que ellos desarrollaran un mayor nivel de compromiso hacia el desarrollo de las Tareas. Es importante aclarar que, aunque el clima de aula no es un determinante para el desarrollo del Talento si es importante tener un clima de aula positivo que fomente la construcción de conocimiento.

Por otra parte, una limitación que se presentó durante la implementación de las Tareas fueron los saberes previos que debían tener los estudiantes, de acuerdo con el nivel educativo en el que estaban. Esta limitación fue más evidente cuando el caso de estudio se enfrentó a las Tareas que estaban directamente relacionadas con la habilidad espacial porque como lo mencionan diferentes autores (Clements y Battista, 1992; Ban Dormolen, 1996) la habilidad espacial es la menos valorada en las aulas de clase.

Para futuras investigaciones se recomienda que el entorno de enriquecimiento este dotado de Tareas que desarrollen habilidades espaciales, puesto que estas habilidades casi siempre no se desarrollan en la clase de matemáticas (Gonzato, Fernández y Díaz, 2011). Como se muestra en el análisis de los datos, es allí donde los estudiantes presentan mayores dificultades y por ende las funciones cognitivas asociadas a la creatividad no se ven muy favorecidas.

Además, se invita a la comunidad a desarrollar investigaciones en la escuela rural dirigidas hacia la construcción del pensamiento matemático, científico, formación de profesores, entro otros enfoques. Con el objetivo de ir más allá del análisis de condiciones de infraestructura, acceso a estudiantes o brechas entre las escuelas rurales, urbanas o privadas del país. Esto sin duda puede contribuir en el desarrollo de espacios más inclusivos donde cada estudiante tenga la oportunidad de desarrollar su potencial.

Referencias Bibliográficas

Abell, D. J., & Lennex, L. (1999, November). *Gifted education: Don't overlook the disadvantaged*. Journal for the Education of the Gifted meeting of the Mid-South Educational Research Association, Point Clear, AL.

Amabile, T. Hennessey, B. y Grossman, B. (1986). Social Influences on Creativity: The Effects of Contracted-for Reward. *Journal of Personality and Social Psychology*, 50 (1), 14-23.

Baltar, P. (1996) Enseignement et apprentissage de la nation d'aire de surfaces planes:une etude de l'dissociation aire/perimetre pour dês rectangles. Petit x, (34), 5-29.

Barraza, Z., Romo, A. & Roa-Fuentes, S. (2020). A Theoretical Model for the Development of Mathematical Talent through Mathematical Creativity. Education Sciences, (10), 1-21.

Battle, D., & Grant, D. (1995). Decision making of rural gifted females: Case studies of precollege influences. *Roeper Review*, 18, 33–39.

Belemain, M. y Bittar, M. (2000). O ensino da geometria e a teoria dos campos conceituais. UFPE.

Benbow, C. & Stanley, J. (1996). Inequity in equity: How "equity" can lead to inequity for high-potential students. Psychology, Public Policy, and Law, 2(2), 249–292

Bicknell, B. (2009). Who are the mathematically gifted? Student, parent, and teacher perspectives. Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D, 13 (1), 63-73. Recuperado de http://www.koreascience.or.kr/article/JAKO200916263469682.page

Bloom, B. S. (1985a). Generalizations about talent development. In B. S. Bloom (Ed.), Developing talent in young people (pp. 507–549). New York: Ballantine Books.

Bouvier, A. (1981). *La mystification mathématique*. Hernan. París.

Botero, M., Guevara, C., y Sierra, P. (2019). *Matemáticas 4*. Bogotá, Colombia: Fundación Escuela Nueva volvamos a la gente.

Calero, M., García, B., y Gómez, T. (2007). *El alumno con sobredotación intelectual. Conceptualización, evaluación y respuesta educativa.* Sevilla, Junta de Andalucía, Consejería de Educación

Campbell, P., & Silver, E. (1999). *Teaching and learning mathematics in poor communities* (working conference). A report to the Board of Directors of the National Council of Teachers of Mathematics submitted by the Task Force on Mathematics Teaching and Learning in Poor Communities, Chicago, IL.

Campos, G, y Lule, N. (2012). La observación, un método de estudio de la realidad. *Revista Xihmai*, VII (13), 45-60.

Canché, E. & Farfán, R. (2017). El Talento en matemáticas desde una perspectiva sociocultural: un eje para el logro de la equidad educativa. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 97-118.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo R., Gómez B., Camacho M. & Blanco, L. (Eds.). *En Investigación en educación matemática*, 12, p. 113-140. España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Clark, B. (1997). No child is just born gifted: Creating and developing unlimited potential. Parenting for high potential, ss. 8-11.

Colbert, V., Chiappe, C. & Arboleda, J. (1993). The New School Program: More and Better Primary Education for Children in Rural Areas in Colombia. In Levin, H. & Lockheed,

M. (eds). 1993. *Effective Schools in Developing Countries*. The Palmer Press. London. Washington, D.C.

Cross, T., & Stewart, R. (1995). A phenomenological investigation of the ‘Lebenswelt’ of gifted students in rural high schools. *Journal of Secondary Gifted Education*, 6, 273–280.

Davalos, R., & Griffin, G. (1999). The impact of teachers’ individualized practices on gifted students in rural, heterogeneous classrooms. *Roeper Review*, 21, 308–314.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1991). El Aprendizaje de las Matemáticas. Editorial: Labor. ISBN8433551485 .

Ehlers, K., & Montgomery, D. (1999). Teachers’ perceptions of curriculum modification for students who are gifted. In D. Montgomery (Ed.), *Rural special education for the new millennium, conference proceedings of the American Council on Rural Special Education* (ACRES; pp. 95–106). Albuquerque: University of New Mexico, American Council on Rural Special Education.

Feldhusen, J. F. (1992). *Talent Identification and Development in Education (TIDE).* Proceedings of The Second Asian Conference on Giftedness: Growing Up Gifted & Talented, Taipei, Taiwán.

Ficici, A., & Siegle, D. (2008). International teachers' judgment of gifted mathematics student characteristics. *Gifted and Talented International*, 23(1), 23-38.

Gardner, H. (1995). *Estructuras de la Mente: la teoría de las Inteligencias Múltiples*. 2a ed. México FCE.

Gentry, M., Rizza, M., & Gable, R. (2001). Gifted students' perceptions of their class activities: Differences among rural, urban, and southern student attitudes. *Gifted Child Quarterly*, 45, 115–129.

Gillham, Bill. (2000). Case Study Research Methods. London, New York: Continuum.

Glesne, C. (2011). Becoming qualitative researchers: An introduction (4th ed.). Boston: Pearson.

Gonzato, M., Fernández, T. y Díaz, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. Números, 77, 99-117.

Grant, D., Heggoy, S., & Battle, D. (1995). *Cases of rural gifted college females' socialization barriers and career choices.* Paper presented at the National Career Development Association Conference, San Francisco, CA.

Grant, D., Battle, D., Murphy, S., & Heggoy, S. (1999). Black female secondary honor graduates: Influences on achievement motivation. *Journal of Secondary Gifted Education*, 10, 103–117.

Guzmán, A., López, A., Manco, A., Piñeros, J., Roa, C., Roa, J., Zambrano, I. & Cangrejo, D. (2018). Política pública: avances y retos en la educación rural en Colombia. En Zapata, M. (eds). *Prácticas, saberes y mediaciones de la educación rural en Colombia* (pp. 11-67). Bogotá: Unisalle.

Hall, A., & Kelly, K. (1995). Effects of academic achievement, sex, and community of residence on four types of career indecision. *Journal of Secondary Gifted Education*, 7, 293–302.

Hébert, T., & Beardsley, T. (2001). Jermaine: A critical case study of a gifted Black child living in rural poverty. *Gifted Child Quarterly*, 45, 85–103.

Hernández, J. (2018). La difícil situación de las escuelas rurales en Colombia. *El Espectador*, mayo 19. Colombia.

Hernández, J., Hernández, J., Milán, M. A. (2007). La creatividad asociada al talento musical en alumnos superdotados. *Respuestas educativas*. Ensayos. (22), 83-97.

Hitt, F., & González-Martín, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educ Stud Math*, 88, 201–219.

Hitt, F., Saboyá, M., & Cortés, C. (2017). Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Mathematics and International Journal*, 94(1), 97–116

Howley, A., Howley, C., & Pendarvis, E. (2003). The possible Good gifted programs in rural schools and communities might do. In J. Borland (Ed.), *Rethinking gifted education: Contemporary approaches to understanding giftedness* (pp. 80–104). New York: Teachers College Press.

Howley, A., Pendarvis, E. & Gholson, M. (2005). How talented students in a rural school district experience school mathematics. *Journal for the Education of the Gifted*, 29(2), 123–160.

Howley, C., Howley, A., & Huber, D. (2005). Prescriptions for rural mathematics instructional: Analysis of the rethorical literature. *Journal of Research inRural Education*, 20(7), 1-16.

Icfes. (2018). *Informe resultados nacionales 2012-2017*. Bogotá: Colombia. Icfes.

Jimerson, L. (2003). *The competitive disadvantage: Teacher compensation in rural* America (Policy Brief). Washington, DC: Rural School and Community Trust.

Kattou, M., Christou, C., Pitta-Pantazi, D. (2015). *Mathematical creativity or general creativity*. In K. Krainer, N. Vondrová (Eds.). Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education. Prague, Czech Republic: Charles University.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. (Trad. Teller J.). Chicago, EEUU: The University of Chicago Press (Original in Russian, 1968).

Kouba, V. y Brown, C. (1988) Results of the Fourth NAEP Assessment of Mathematics: Measurement, geometry, data interpretation, attitudes, and other tpics. Arithmetic Teacher, 35, 10-16.

Lawrence, B. (2009). Rural Gifted Education: A Comprehensive Literature Review. *Journal for the Education of the Gifted*, 32 (4), 461-494.

Leikin, R (2009a). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds.). *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 383-409). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R., Levav-Waynberg, A., Guberman, R. (2011). *Employing multiple solution tasks for the development of mathematical creativity: Two comparative studies.* In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the 7th Congress of European Research in Mathematics Education. Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Lupkowski-Shoplik, A., & Assouline, S. (1994). Evidence of extreme mathematical precocity: Case studies of talented youths. *Roeper Review*, 16(3), 144-151.

Lev, M., Leikin, R. (2013). *The connection between mathematical creativity and high ability in mathematics*. In B. Ubuz, Ç. Haser, M. A. Mariotti (Eds.), Proceedings of the 8th Congress of European Research in Mathematics Education. Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Levenson, E. (2011). Mathematical creativity in elementary school: Is it individual or collective? In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), Proceedings of the 7th Congress of European Research in Mathematics Education (pp. 1104-1114). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Lucca., N. & Berríos, R. (2003) *Investigación cualitativa en educación y ciencias sociales*. Puerto Rico: Publicaciones Puertorriqueñas.

Machado, A. (2004). Presentación. In M. Benavides, A. Maz, E. Castro, & A. Blanco (Eds.). *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 9–13). Santiago: UNESCO.

MEN. (2001). *Más campo para la educación rural*. Colombia. Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-87159.html.

MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Autor.

MEN. (2010). *Manual de implementación Escuela Nueva Generalidades y Orientaciones Pedagógicas para Transición y Primer Grado*. Tomo I. Bogotá.

MEN (2018). Matemáticas 4. Colombia: Fundación Escuela Nueva, volvamos a la gente.

Miserandino, D., Subotnik, R., y Ou, K. (1995). Identifying and nurturing mathematical talent in urban school setting. *The Journal of Secondary Gifted Education*, 6, 245-257.

Molina, N., y Pérez, I. (2006). El clima de relaciones interpersonales en el aula un caso de estudio. Revista Paradigma, 27 (2). Extraída en Abril de 2011 de: http://www.scielo.org.ve/scielo.php?pid=S1011- 22512006000200010&script=sci arttext

Monterrubio, M., Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander: SEIEM.

Moustakas, C. (1994). Phenomenological research methods. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Moyer, P. (2001). Using Representations to Explore Perimeter and area. Teaching Children Mathematics, (7), 52-62.

NRICH. (2017-2020). *Activities in the Millennium Mathematics Project*. United Kingdom: University of Cambridge. https://nrich.maths.org/

Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Rodríguez, M. (2011). Equity Issues Concerning Gifted Children in Mathematics: A perspective from Mexico. Atweh, B.,Graven, M., Secada, W., Valero, P.(Eds). *Mapping Equity and Quality in Mathematics Education.* (pp.351-364). New York.

Ordoñez, C., (2004). Pensar pedagógicamente desde el constructivismo: de las concepciones a las prácticas pedagógicas. *Revista de Estudios Sociales*, 19, 7-12.

Parra, R., Castañeda, E., Panesso, J., Parra, F. y Vera, C. (1991). La Escuela Instrumental, n.d.

Pérez, E. y Farah, M. (2006). *La nueva ruralidad en Colombia*. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., Kontoyianni, K. & Kattou M. (2011) A Model of Mathematical Giftedness: Integrating Natural, Creative, and Mathematical Abilities. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 11 (1), 39-54, DOI: 10.1080/14926156.2011.548900

Pineda, M. (2017). *Desarrollo de Pensamiento Funcional: Una Experiencia en un Programa de Enriquecimiento Extracurricular*. (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander. Colombia.

Procrasur. (2012). *Jóvenes rurales: mapa de actores institucionales y oportunidades Colombia*. Bogotá: Ministerio de Agricultura y Desarrollo Rural

Psacharopoulus, G., Rojas, C. & Vélez, E. (1992). Achievement Evaluation of Colombia's Escuela Nueva. It’s Multigrade the Answer? Working Paper 896. The World Bank.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132- 150.

Rivera, F. (2013). *Teching and learning Patterns in School Mathematics, Psychological and Pedagogical Considerations*. New York, USA: Springer.

Rojas, Y., Ramírez, J. y Tobón, F. (2013). Evaluación de la práctica pedagógica en comunidades rurales y suburbanas. *Revista Educación y Educadores*, 16 (2), 267-282.

Singer, F., Sheffield, L., Freiman, V. y Brandl, M. (2016). *Research On and Activities For Mathematically Gifted Students*. En ICME-13 Topical Surveys. Nueva York: Springer Open.

Solaz–Portolés, J., y López, V. (2008). Conocimiento previo, modelos mentales y resolución de problemas. Un estudio con alumnos de bachillerato. Revista electronica de investigación educative, 10 (1).

Sriraman, B., & Steinthorsdottir, O. B. (2007). Excellence and equity in education and talent development: Components of a Hegelian dialectic. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 6(1–2), 91–102.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147-164

Terman, L. M. (Ed.) (1925). Mental and physical traits of thousand gifted children. Genetic Studies of Genius, vol. 1, Stanford University Press, Stanford

Thales (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla, SAEM Thales.

Torrance, E. P. (1995). *The beyonders' in why fly? A philosophy of creativity*. Norwood, NJ: Ablex.

Torres, P., Reula, M., y Torrego, J. (2011). Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. En Torrego, J. (Coord), *La evaluación del grupo clase: procedimientos y recursos* (pp. 125-165). Madrid: Fundación SM.

Villa, A. y Villar, L.M. (coodrs.) (1992). Clima organizativo y de aula. *Teorías, modelos e instrumentos de medida.* Vitoria/Gasteiz: Gobierno Vasco, Servicio Central de Publicaciones.

Villar, R. (1995). El Programa Escuela Nueva en Colombia. *Revista Educación y Pedagogía* (14 y 15), 357-381.

Apéndice A. Entrevista

Te pedimos que respondas la encuesta de la forma más sincera posible

I. Datos personales

1. Nombre:
2. Edad: 3. Grado:
4. ¿Cuántos años llevas estudiando en esta escuela?

II. Datos familiares

1. ¿Con cuántas personas vives?
2. ¿A qué se dedican tus padres?
3. ¿Hasta qué grado escolar estudiaron tus padres?
4. ¿Cuántos hermanos tienes?
5. ¿A qué se dedican tus hermanos?
6. ¿Hasta qué grado escolar estudiaron o actualmente estudian tus hermanos?
7. A parte de estudiar, ¿trabajas o le ayudas a tus papás? Si tu respuesta es sí, ¿En qué trabajas o ayudas a tus papás? Y ¿Cuál es tu horario?

III. Transporte de la casa a la escuela y opinión sobre la escuela

1. ¿Cuánto tiempo te gastas de tu casa a la escuela?
2. ¿Cómo te transportas?
3. ¿Con quién vienes a la escuela y con quién te devuelves para tu casa?
4. ¿Qué es lo que más te gusta de esta escuela?, ¿Por qué?
5. ¿Qué es lo que menos te gusta de esta escuela?, ¿Por qué?
6. ¿Por qué te gustaría seguir estudiando en esta escuela? o ¿Por qué te gustaría cambiarte de escuela?

IV. Sobre el tiempo libre

1. Cuando no tienes clase, ¿qué haces?

2. ¿Qué haces en las tardes después de la escuela?
3. ¿Cuál es tu actividad favorita (deporte, juego, cocina, moda, estudiar, escribir, resolver los pasatiempos de las revistas, etc.)? ¿Por qué?

V. Técnicas de estudio y preferencias intelectuales

1. ¿En tu casa con qué materiales cuentas para hacer las tareas? (Libros, computador, internet, la ayuda de alguien, solo con mis conocimientos, etc.)
2. ¿Con quién haces tareas?
3. ¿Cuánto tiempo dedicas para hacer tareas?
4. ¿Puedes llevar los libros que usas en la escuela a la casa?
5. ¿Cuál es tu materia favorita?, ¿Por qué?
6. ¿Cuál actividad de la que haces en tu materia favorita te gusta más?, ¿Por qué?
7. ¿Qué es lo que más le gusta de la clase de matemáticas?
8. ¿Qué es lo que menos le gusta de la clase de matemáticas?
9. ¿Qué le gustaría que se hiciera en la clase de matemáticas?

VI. Realiza un dibujo en el cual representes una actividad que realices en la clase de matemáticas.

Apéndice B. Consentimiento Informado para Participantes de Investigación

El propósito de este documento de consentimiento es proveer a los participantes de esta investigación de una clara explicación de la naturaleza de esta, así como de su rol en ella.

La presente investigación es conducida por María Alejandra Solano Delgado, estudiante de Maestría en Educación Matemática de la Escuela de Matemáticas, bajo la asesoría de la profesora Solange Roa Fuentes de la Universidad Industrial de Santander. La meta de este estudio es: Analizar el desarrollo del talento matemático a través del diseño de Tareas desafiantes que promuevan el desarrollo de las funciones cognitivas asociadas a la creatividad dentro del programa Escuela Nueva en el nivel de básica primaria.

Si usted accede a que su hijo o hija participe en este estudio, se le pedirá que responda las preguntas de diferentes instrumentos como: entrevistas o encuestas, además del trabajo de intervención en el aula. La investigación se desarrollará aproximadamente 10 sesiones de clase que se llevarán a cabo dentro de la institución educativa. Lo que conversemos durante estas sesiones se grabará, de modo que la investigadora pueda transcribir después las ideas que los estudiantes manifiesten.

La participación es este estudio es estrictamente voluntaria. La información que se recoja será confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los descritos en esta investigación. Las respuestas de los estudiantes a los cuestionarios, entrevistas y demás momentos de la clase, serán codificadas usando un número de identificación y por lo tanto, serán anónimas guardando su identidad. Una vez trascritos los instrumentos de toma de información, las grabaciones de audio y video se destruirán.

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento durante la participación de su hijo en él. Igualmente, puede retirarse del proyecto en cualquier momento sin que eso lo perjudique en ninguna forma. Si alguna de las preguntas durante la entrevista le parece incómodas, tiene usted el derecho de hacérselo saber a las investigadoras.

Desde ya agradecemos su participación y el interés de promover la participación de su hijo o hija.

Acepto que mi hijo o hija participe voluntariamente en esta investigación, conducida por María Alejandra Solano Delgado y Solange Roa Fuentes. He sido informado (a) que el objetivo principal es: Analizar el desarrollo del talento matemático a través del diseño de Tareas desafiantes que promuevan el desarrollo de las funciones cognitivas asociadas a la creatividad dentro del programa Escuela Nueva en el nivel de básica primaria.

Me han indicado también que mi hijo o hija participará de manera activa en las diferentes actividades que contempla el proyecto dentro de la institución educativa.

Reconozco que la información que mi hijo o hija provea en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro propósito fuera de los planteados. He sido informado que puedo hacer preguntas sobre el proyecto en cualquier momento y que puedo retirar a mi hijo o hija de este cuando así lo decida, sin que esto acarree perjuicio alguno para mi persona o para mi hijo o hija. De tener preguntas sobre la participación de mi hijo o hija en este estudio, puedo contactar a María Alejandra Solano Delgado al correo alejasode08@hotmail.com

Entiendo que una copia de esta ficha de consentimiento me será entregada, y que puedo pedir información sobre los resultados de este estudio cuando éste haya concluido. Para esto, puedo contactar a María Alejandra Solano Delgado al correo anteriormente mencionado.

Nombre del padre o acudiente:	Número de cédula:	Firma:	Fecha:

Apéndice C. Prueba diagnóstica

	Universidad Industrial de Santander Proyecto Talento Matemático	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Nombre: ____ Grado: ____________

A continuación, se plantea un problema matemático, resuélvelo utilizando todo lo que sabes. Por favor, realiza todos tus procedimientos y razonamientos en la hoja, no utilices el borrador, si crees que algo te quedo mal déjalo y sigue con tus ideas.

Calendario

Dado el calendario del mes de abril (ver la figura), responda las siguientes preguntas:

f) ¿Qué relaciones encuentra entre los números que están dentro de la cruz?

g) Si movemos la cruz hacia la derecha, ¿qué relaciones podemos encontrar?, ¿Cómo podemos comparar estas relaciones con las del punto anterior?

h) Si ubicamos el centro de la cruz en el día 19 ¿cuáles números que quedan en ella cruz? ¿Por qué?

i) Si tienes el calendario del mes de julio del mismo año ¿las relaciones que encontraste de siguen manteniendo? ¿Por qué?, y si tienes un calendario de otro mes en otro año, ¿sigue sucediendo lo mismo? ¿Por qué?

j) Si tuvieras que explicarle a un compañero el juego de la cruz y el calendario, pero sin contar con el calendario, ¿Cómo lo harías?

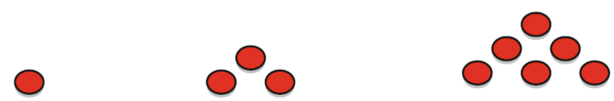
	Universidad Industrial de Santander **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Nombre: ____ Grado: ____________

A continuación, se plantea un problema matemático, resuélvelo utilizando todo lo que sabes. Por favor, realiza todos tus procedimientos y razonamientos en la hoja, no utilices el borrador, si crees que algo te quedo mal déjalo y sigue con tus ideas.

Secuencia de crecimiento

Patrón de círculos en crecimiento: A continuación, se muestran los términos de una secuencia formada por círculos.



Término 1 Término 2 Término 3

a) Dibuja cómo queda el término 4, el 5 y el 6.

b) Si nos saltamos los términos ¿puedes dibujar o describir en palabras cómo queda el término 10? Ahora ¿Cómo queda el término 21? Y ¿cómo queda el término 100?

¿Por qué estás tan seguro?

Apéndice D. El restaurante de Marcelo

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

EL RESTAURANTE DE MARCELO

Nombre: ___________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

____

____

Fecha: _____________________________

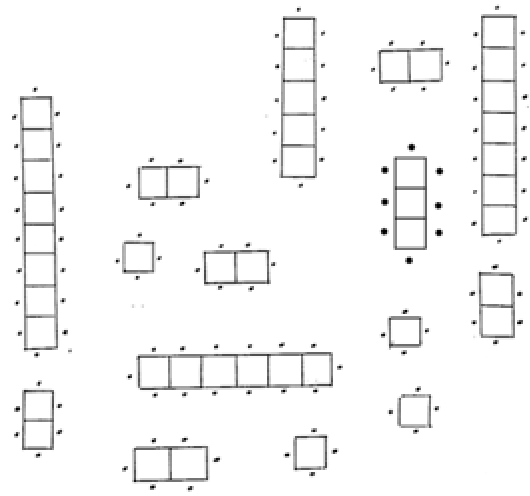
Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Trabajo individual.

Situación

Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante tiene 40 mesas que organiza de diferentes maneras, uniéndolas entre ellas. Actualmente Marcelo tiene organizadas las mesas como se muestra a continuación:



Marcelo está cansado de contar las sillas una a una todos los días. Por lo tanto requiere tu ayuda. Marcelo quiere encontrar una manera de calcular rápidamente el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa.

1. ¿Cuántas personas se pueden sentar alrededor de 3 mesas ?

2. Si buscamos el número de personas que se pueden sentar alrededor de 4 mesas, ¿necesitas hacer un dibujo para encontrar la respuesta o tienes una manera diferente de hacerlo ?

3. ¡Y para 15 mesas!, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de personas sin necesidad de dibujar?

Trabajo en equipo

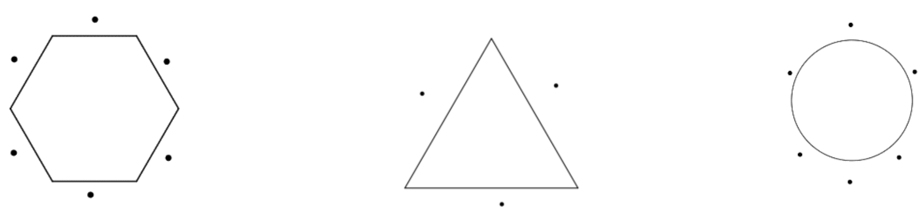
4. En equipo, compartan las estrategias que usaron para calcular el número de personas que pueden sentarse alrededor de 15 mesas. ¿Todos usaron la misma estrategia? Encuentre y escriba o dibuje al menos 2 estrategias para hacer este cálculo.
5. Una vez que escriba las estrategias, utilice alguna de ellas para calcular el número de personas que pueden comer en 21 mesas y después en 54 mesas.

6. Escribe un mensaje a Marcelo donde le explicas cómo podría calcular el número de personas para sentar alrededor de una mesa no importa qué tan grande sea.

7. Los mensajes son muy largos. Marcelo necesita mensajes que le indiquen las operaciones que debe realizar más fácilmente. Escribe el mismo mensaje, pero simplificado, indicando qué operaciones necesita realizar Marcelo.

Segundo trabajo individual

Marcelo quiere expandir su restaurante, entonces piensa abrir una nueva sucursal. Marcelo necesita que le ayudes a escoger el tipo de mesa que le permita ubicar la mayor cantidad de personas posibles. Para esto, su diseñador le realiza la siguiente propuesta de mesas con el propósito de que Marcelo seleccione el tipo de mesa más apropiado según sus intereses.



8. ¿Qué tipo de mesa debe escoger Marcelo para ubicar a la mayor cantidad de clientes?

9. Calcula el número de personas que puedes sentar alrededor de 3 mesas unidas (de la mesa escogida en el punto anterior). Explica la estrategia que utilizas y cómo ubicaste las tres mesas unidas.

10. Calcula el número de personas que pueden sentarse alrededor de 21 mesas unidas y después de 54 mesas unidas. Explica la estrategia que utilizaste.

11. Calcula el número de personas que puedes sentar alrededor de cualquier cantidad de mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

12. Si ahora Marcelo necesita que la mesa que escojas sea en la que puedes ubicar la mayor cantidad de personas, y además que ocupe el menor espacio posible, porque el nuevo local

es pequeño. ¿Cuál mesa escogerías?, ¿Por qué?

13. ¿La mesa que escogiste en el punto anterior es la misma que la del punto 1?, Si tu respuesta es no, ¿Por qué cambiaste el tipo de mesa?

Apéndice E. Fábrica de ventanas

	Universidad Industrial de Santander **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Fábrica de ventanas

Nombre: ________________________

Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Nombre de los miembros del grupo:

____

____

____

Fábrica de ventas

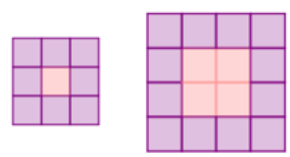


Figura 1 Figura 2

Fecha: __________________________

Trabajo individual

Situación

Tengo un amigo que tiene una pequeña fábrica de ventanas. Las ventanas que se fabrican tienen forma cuadrada y se componen de pequeños cuadrados rosados en el centro y cuadrados morados alrededor. A continuación, se muestran algunos ejemplos:

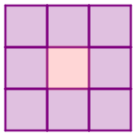


Figura 1

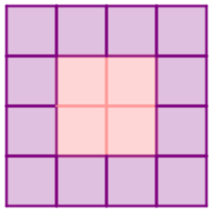


Figura 2

?

Figura 3

?

Figura 4

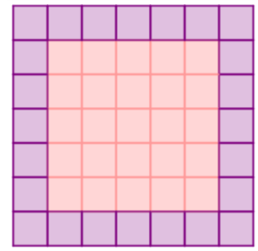


Figura 5

Los trabajadores necesitan contar el número de cuadrados color morados alrededor de los cuadrados rosados de la ventana y los cuentan uno por uno. ¿Podrías ayudar a los trabajadores a encontrar una manera de calcular rápidamente el número de cuadrados de color morado para cualquier tamaño de ventana? Para esto, responde las siguientes preguntas

1. Calcula el número total de cuadrados color morado si tenemos 2 cuadrados rosados de lado, ahora si tienes 3 cuadrados rosados de lado.

2. Si buscas el número de cuadrados color morado para una ventana que tiene 4 cuadrados rosados de lado. Y si los trabajadores necesitan hacer una ventana con 10 cuadrados morados de lado, ¿cuántos cuadrados rosados y cuántos morados necesitan para hacer la venta, ¿Cómo hiciste para saber cuántos cuadrados necesitan los trabajadores para hacer esa ventana?

3. Y la ventana de 15 cuadrados rosados de lado, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de cuadrados color morado en total?

Trabajo en equipo

4. En equipo, analicen las estrategias que utilizaron anteriormente para calcular el número de cuadrados color morado necesarios para una ventana que tenga 15 cuadrados rosados de lado. ¿Todos utilizaron la misma estrategia? Encuentren al menos 2 estrategias para calcular el número de cuadrados color morado para una ventana que tiene 15 cuadrados rosados de lado.

5. Una vez que han escrito diferentes estrategias y que han decidido que son correctas, utiliza alguna de estas estrategias para calcular el número de cuadrados color morado necesarios para una ventana de 23 cuadrados rosados de lado y otra ventana de 58 cuadrados rosados de lado.

6. Escribe un mensaje con palabras que permita calcular el número de cuadrados color verde necesarios para una ventana para cualquier número de cuadrados cafés de lado.

7. Los mensajes son largos a leer, escriban el mensaje simplificado utilizando solo operaciones.

Segundo trabajo individual

El dueño de la fábrica de ventanas decide que fabricará otro tipo de ventana, para ofrecer mayor variedad a sus clientes. A continuación, se muestran los tipos de ventanas que se piensan fabricar, estos dependen del tamaño y forma del espacio en el que se instalarán.

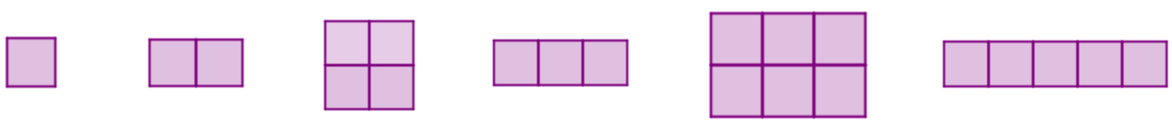


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5 Figura 6

Pero ahora, el dueño necesita que lo ayudes, para que sus trabajadores puedan calcular el número de cuadrados morados que tienen las ventanas y la forma de estas para poderlas fabricar. Para esto, el dueño solicita que respondas las siguientes preguntas:

8. ¿Cuántos cuadrados morados necesita para fabricar una ventana como la de la figura 2?, ¿cuál es la forma de la ventana de la figura 2?

9. ¿Cuántos cuadrados morados necesita para fabricar una ventana como la de la figura 3?, ¿cuál es la forma de la ventana de la figura 3?

10. Ahora, llega un nuevo cliente, que le pide hacer una ventana como la de la figura 6, ¿Cómo sería la forma de está ventana?, ¿cuántos cuadrados morados necesita para fabricarla?

11. Debes construir una ventana como la de la figura 11, ¿Cuántos cuadrados morados se necesitan para hacer la venta?, ¿cuál es la forma de esta ventana?

12. ¿Cómo le explicarías a un trabajador el tipo de ventana que debe hacer, si su cliente solo le dice el número de la figura?

13. ¿Cómo le explicarías la cantidad de cuadrados morados que necesita utilizar para fabricar una ventana, de acuerdo con el tipo de ventana?

Apéndice F. Hacer numeros

Universidad Industrial de Santander	**Universidad Industrial de Santander** **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Hacer números

Nombre: ___________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

____

____

Fecha: _____________________________

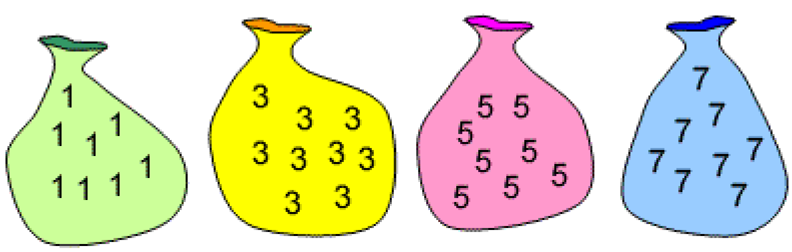
Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Trabajo individual

Situación

Un día en clase de matemáticas, el profesor lleva 4 bolsas con tarjetas. En cada bolsa hay tarjetas con los números unos, tres, cincos y sietes, como se ve a continuación.



El profesor plantea una serie de retos a sus estudiantes, ¿será qué puedes superar estos retos?

1. Arma el número 16 con cuatro números de las bolsas, ¿Hay una sola forma o puedes encontrar más?

2. Arma el número 28 con seis números de las bolsas, ¿Hay una sola forma o puedes encontrar más?

3. Arma cinco números cualesquiera utilizando ocho números de la bolsa. Escribe como armaste cada uno de los cinco números.

Trabajo en equipo

4. En equipo discutan como armaron los cinco números del inciso 3. Escriba tres números diferentes armados por tus compañeros.

5. ¿Qué características tienen en común los números armados?, ¿qué características tienen en común los números de las bolsas?

6. Ahora, en equipo armen el número 21 con seis números de las bolsas. Explica tu respuesta

7. ¿Cuáles números puedes armar con seis números de las bolsas?, ¿Qué tienen en común estos números?

8. Si te piden armar un número cualquiera con los números de las bolsas, ¿cómo garantizas que se puede armar?

Segundo trabajo individual

Ahora el profesor decide desafiar aún más a sus estudiantes, y les pide que armen conjuntos de tres números (los que ellos quieran) y luego seleccionen dos de tal forma que al sumarlos les dé un número par, así:

$$\boxed{2 \qquad 11 \qquad 21} \quad 21 + 11 = 32$$

9. Inventa cinco conjuntos con tres números y luego selecciona dos de tal forma que su suma sea un número par.

10. Existe algún conjunto de tres números, de tal forma que no pueda sumar dos números de él y dé un número divisible entre dos. Justifique ampliamente su respuesta.

Apéndice G. Cubos aquí y allá

	Universidad Industrial de Santander **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Cubos aquí y allá

Nombre: _________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

____

____

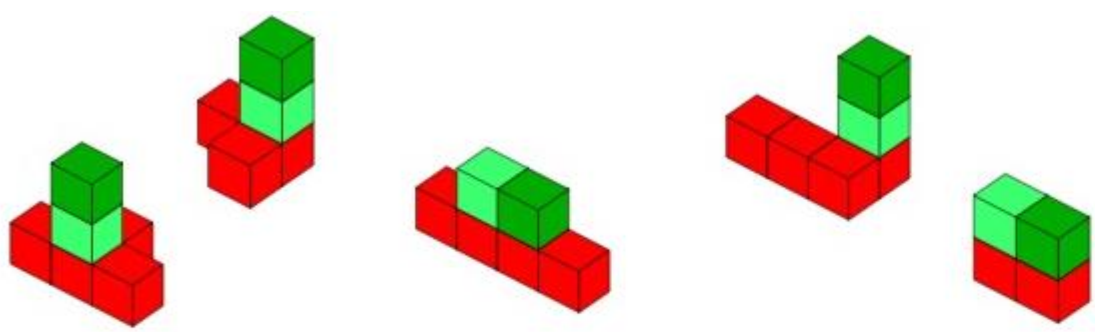
Fecha: ___________________________

Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Trabajo individual

Situación

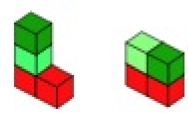


Este juego se trata de ubicar cubos verdes encima de cubos rojos. Para jugar, debes seguir las siguientes reglas:

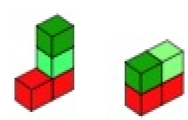
1. Los cubos rojos deben tocar el piso o la mesa.
2. Los cubos verdes no deben tocar el piso.

3. Debes unir los cubos cara a cara.
4. Los cubos verdes deben estar seguidos, es decir, no pueden estar separados.
5. Los cubos verdes siempre deben ir encima de una cara de un cubo rojo.

Por ejemplo, si usamos dos cubos verdes y dos cubos rojos, debemos buscar todas las posibles formas de armar figuras siguiendo las reglas. Como se muestra a continuación.



Atención: Debes tener cuidado con no tener figuras repetidas, es decir, tener una figura y su rotación en el conteo en diferente posición. Por ejemplo, las siguientes figuras no serían una posibilidad porque son rotaciones de las figuras anteriores.



Entonces tu desafío es encontrar todas las posibilidades que tienes de armar figuras con tres cubos rojos y dos verdes. ¡No olvides seguir las reglas!

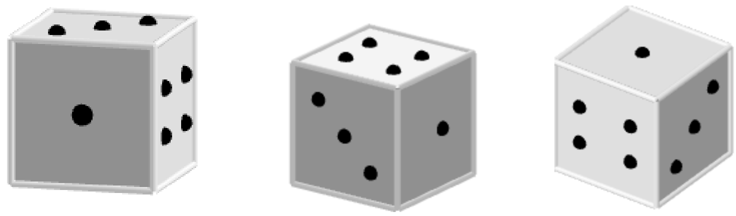
6. ¿Cómo sabes que tienes todas las posibilidades?
7. ¿Qué método o forma utilizaste para armar estas figuras?
8. ¿Todas tus formas son diferentes? O ¿algunas son rotaciones de las otras?

Trabajo en equipo

9. En equipo, compartan las estrategias que utilizaron para encontrar todas las posibles maneras de armar figuras con tres cubos rojos y dos verdes, siguiendo cada una de las reglas. ¿Todos utilizaron la misma estrategia? Expliquen al menos dos estrategias para armar las figuras con tres cubos rojos y dos verdes.
10. Una vez que han escrito diferentes estrategias y han decidido que son correctas, utilicen alguna para encontrar todas las posibilidades para armar figuras con cuatro cubos verdes y dos rojos.
11. Escribe un mensaje claro, en el que le expliques a un compañero la mejor estrategia para encontrar la cantidad de figuras que puede armar utilizando cubos rojos y verdes, siguiendo las reglas del juego.

Trabajo individual

Ahora, tengo un nuevo desafío para ti. A continuación, te presento una vista del dado, y tres rotaciones de estas.



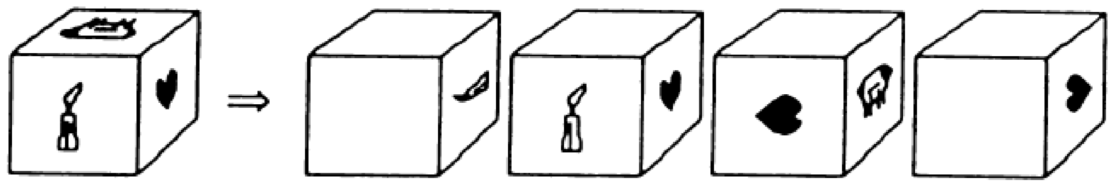
12. En la hoja isométrica dibuja tres rotaciones diferentes de cada una de las siguientes caras del dado.

13. En la hoja isométrica, dibuja el dado completo en una secuencia de tres vistas diferentes, es decir, con tres dibujos del dado, se deben encontrar sus seis caras.

14. En la hoja isométrica, dibuja el dado completo en una secuencia de cinco vistas diferentes, es decir, con tres dibujos del dado, se deben encontrar sus seis caras).

15. Las secuencias que hiciste en los ítems anteriores, ¿representan el mismo dado, o forman un dado diferente. ¿Justifica tu respuesta?

16. En la hoja isométrica, dada la siguiente figura de un cubo, completa las figuras que deben ir en las caras en blanco del cubo.



Apéndice H. Área y perímetro

	Universidad Industrial de Santander **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Área y perímetro

Nombre: ___________________________

Nombre de los miembros del grupo:

____

____

____

Fecha: _____________________________

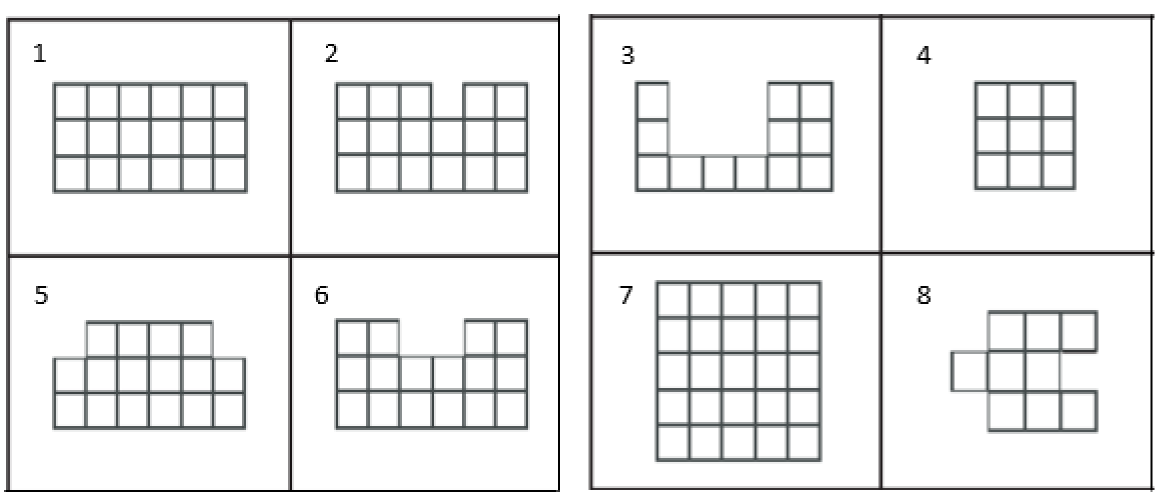
Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza un lapicero negro.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza un lapicero rojo.
- Después de discutir con el grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza un lapicero azul.

Trabajo individual

Situación

Un grupo de estudiantes están jugando a armar las siguientes figuras con cuadrados de 1 cm de lado.



Después de terminar de armar las figuras, ellos deciden que el ganador del juego es quién haya construido la figura con más área y más perímetro de todas.

1. ¿Cuál es la figura ganadora? Explica ampliamente tu respuesta.
2. ¿Puedes dibujar una figura con cuadrados de $1\,cm$ de lado, en la que el área sea numéricamente igual a su perímetro? ¿Existen más figuras?
3. ¿Puedes dibujar una figura (con cuadrados de $1\,cm$ de lado) en la que el perímetro sea numéricamente el doble del área? ¿Existen más figuras?

Trabajo en equipo

4. En equipo, analicen las estrategias utilizadas para dar respuesta al ítem 2. Utilice dos estrategias para encontrar como mínimo cinco figuras que cumplan con la condición de que el área sea numéricamente igual a su perímetro.
5. En equipo, analicen las estrategias utilizadas para dar respuesta al ítem 3. Utilice dos estrategias para encontrar como mínimo cinco figuras que cumplan con la condición de que el perímetro sea numéricamente el doble del área.
6. En equipo, escriban un mensaje a un amigo, en el cual le expliquen cómo realizar figuras con cuadrados de 1 cm que cumplan con que el perímetro y el área numéricamente sean iguales.
7. En equipo, escriban un mensaje a un amigo, en el cual le expliquen cómo realizar figuras con cuadrados de 1 cm de lado que cumplan con que el perímetro sea igual al doble del área numéricamente.

Segundo trabajo individual

8. Dibuja figuras que tengan la misma área, pero diferentes perímetros.
9. Explica la estrategia utilizada para realizar las figuras anteriores.
10. Ahora, ¿puedes dibujar algunas figuras que tengan el mismo perímetro, pero diferentes áreas?
11. Explica detalladamente la o las estrategias utilizadas para realizar las figuras anteriores.
12. Dibuja una figura y luego modifícala para que esta tenga menos área. ¿Existe una única forma de modificarla o puedes hacer varias modificaciones? Explica ampliamente tu respuesta.

Apéndice I. Prueba final

	Universidad Industrial de Santander **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Nombre: ____ Grado: ____________

A continuación, se plantea un problema matemático, resuélvelo utilizando todo lo que sabes. Por favor, realiza todos tus procedimientos y razonamientos en la hoja, no utilices el borrador, si crees que algo te quedo mal déjalo y sigue con tus ideas.

Tarea 1.

Dado el calendario del mes de abril (ver la figura), responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué relaciones encuentra entre los números que están dentro de la cruz?
b) Si movemos la cruz hacia la derecha, ¿qué relaciones podemos encontrar?, ¿Cómo podemos comparar estas relaciones con las del punto anterior?

c) Si ubicamos el centro de la cruz en el día 19 ¿cuáles números que quedan en ella cruz? ¿Por qué?
d) Si tienes el calendario del mes de julio del mismo año ¿las relaciones que encontraste de siguen manteniendo? ¿Por qué?, y si tienes un calendario de otro mes en otro año, ¿sigue sucediendo lo mismo? ¿Por qué?
e) Si tuvieras que explicarle a un compañero el juego de la cruz y el calendario, pero sin contar con el calendario, ¿Cómo lo harías?

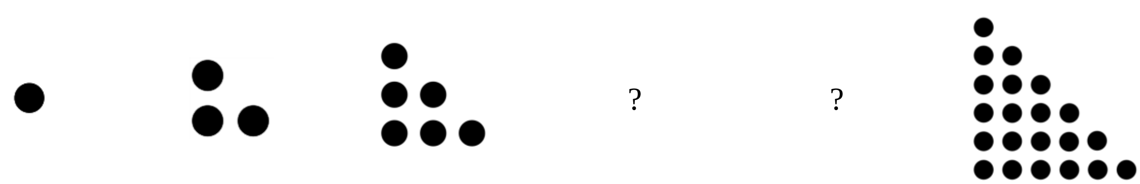
	Universidad Industrial de Santander **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Nombre: ____ Grado: ____________

A continuación, se plantea un problema matemático, resuélvelo utilizando todo lo que sabes. Por favor, realiza todos tus procedimientos y razonamientos en la hoja, no utilices el borrador, si crees que algo te quedo mal déjalo y sigue con tus ideas.

Secuencia de crecimiento

Hace mucho tiempo (en el año 520 antes de Cristo), un matemático llamado Pitágoras y sus alumnos estaban fascinados por los números y la geometría. Uno de sus descubrimientos consistía en representar los números por medio de figuras geométricas. Por ejemplo, ellos se dieron cuenta que ciertos números podían ser representados en forma de triángulo. Por ejemplo, el 1, 3, 6, 10, ?, ?, son los primeros números triangulares, ya que se pueden representar por puntos colocados en forma de triángulos, como se muestra enseguida.



Triangular 1	Triangular 2	Triangular 3	Triangular 4	Triangular 5	Triangular 6

a) Dibuja cómo queda el triangular 4 y el 5.

b) Si nos saltamos los triangulares ¿puedes dibujar o describir en palabras cómo queda el triangular 10? Ahora ¿Cómo queda el triangular 21? Y ¿cómo queda el triangular 100? ¿Por qué estás tan seguro de tu respuesta?

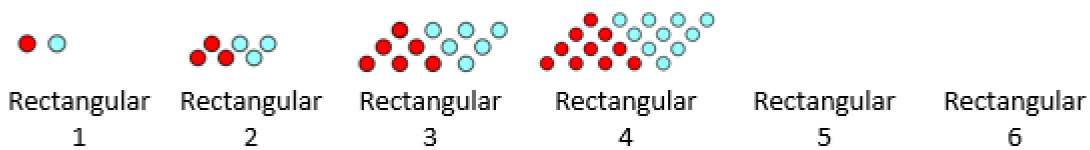
c) Escribe un mensaje a un amigo en el que le describas la forma para calcular el triangular 200. Ahora, amplia tu mensaje escribiendo la forma de calcular y dibujar cualquier número triangular.

	Universidad Industrial de Santander **Proyecto Talento Matemático**	Investigadora: Alejandra Solano Orientadora: Solange Roa

Nombre: ____ Grado: ___________

Entrevista (rectangular)

Los números rectangulares, son números que se pueden representar geométricamente en forma de romboide como se muestra en la figura. Los primeros cuatros números rectangulares son el 2, 6, 12 y 20, es decir, el rectangular 1 representa el número 2, el rectangular 2 representa el número 6, el rectangular 3 representa el número 12, así sucesivamente.



a) Tú primera tarea es encontrar el número rectangular 5 y 6, ¿qué número representan cada uno de estos rectangulares?

b) Si nos saltamos los números rectangulares ¿Puedes encontrar el rectangular 10 y qué número que representa? Y ¿Cómo queda el triangular 21 y qué número representa?

c) Puedes explicarnos de forma clara la estrategia que utilizas para encontrar cada uno de los rectangulares.

d) ¿Tu estrategia funciona para encontrar el rectangular 100?, ¿Por qué?, ¿Qué número representa el rectangular 100?