

**RAMIFICACIÓN, BIFURCACIÓN Y LONGITUD DEL SISTEMA VASCULAR, VISTO  
DESDE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES**

**JEFFERSON SNEYDER MORENO TOLOZA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

**2026**

**RAMIFICACIÓN, BIFURCACIÓN Y LONGITUD DEL SISTEMA VASCULAR, VISTO  
DESDE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES**

**JEFFERSON SNEYDER MORENO TOLOZA**

Trabajo de grado para optar al título de Matemático

Director

**ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA**

Ph.D. en Matemáticas

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA DE MATEMÁTICAS**

**BUCARAMANGA**

**2026**

## **DEDICATORIA**

Dedico principalmente este trabajo a Dios y a la Virgencita de Guadalupe, por ser mi mayor compañía y guía en este camino.

A mi madre, Omaira Toloza Toloza; a mi padre, Gilberto Moreno Jerez; y a mi hermano, Anderson Kaleth Moreno Toloza, por su amor, apoyo incondicional y por ser mi mayor inspiración para seguir adelante.

## AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento, en primer lugar, a Dios y a la Virgencita de Guadalupe, por haberme permitido salir adelante, por acompañarme en cada momento de mi carrera, por ser mi guía en cada uno de mis pasos y por ayudarme siempre en los exámenes.

A mi madre, Omaira Toloza Toloza, le agradezco profundamente por ser mi apoyo incondicional, por cada palabra, cada consejo, por sus incontables sacrificios y por su amor incondicional. Gracias por estar siempre ahí para mí en cada momento, por cada llamada y cada mensaje, por motivarme constantemente a salir adelante, por confiar en mí, creer en mí y por su infinita paciencia. Gracias por ser mi fortaleza en los momentos difíciles, por nunca soltarme de la mano aun cuando el camino se hacía complicado, por su entrega, su esfuerzo diario y por luchar siempre para darme lo mejor. Todo lo que soy y todo lo que he logrado también es gracias a ti, por tu amor que no tiene límites y por ser el pilar más importante de mi vida.

A mi padre, Gilberto Moreno Jerez, le agradezco por ser una persona tan entregada y maravillosa con nosotros, por su amor y apoyo constante, por ser una persona infinitamente trabajadora, por sus incontables sacrificios y por sus palabras de apoyo y motivación. Gracias por estar presente en todo lo que he necesitado, por ser una pieza clave para la continuidad de mis estudios y un excelente guía a seguir. Su “perrenque”, sus ocurrencias y su forma de ser siempre han sido una fuente de motivación.

A mi hermano, Anderson Kaleth Moreno Toloza, por su apoyo, su cariño, por creer en mí y brindarme su ayuda cuando lo necesité.

A esa estrellita especial que, con su cariño, ternura, paciencia y dulzura, fue luz en este camino y lo hizo más ameno.

Al profesor Dr. Élder Jesús Villamizar Roa, por su paciencia ejemplar, su disposición,

interés y valiosas sugerencias y correcciones, y por ser un excelente guía en la realización de este trabajo.

Expreso también mis agradecimientos a cada una de las personas que aportaron su granito de arena en mi formación académica, así como a todos los profesores que tuve a lo largo de la carrera, quienes enriquecieron mi gusto por las matemáticas.

## CONTENIDO

	Pág
INTRODUCCIÓN .....	10
<b>1 PRELIMINARES .....</b>	<b>13</b>
1.1 FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS .....	13
1.2 ALGUNOS OPERADORES DIFERENCIALES .....	19
<b>2 HEMODINÁMICA Y GEOMETRÍA VASCULAR EN FLUIDOS NEWTONIA- NOS: UN ENFOQUE DESDE LAS ECUACIONES DE NAVIER–STOKES .....</b>	<b>30</b>
2.1 FORMULACIÓN GENERAL DE LAS ECUACIONES DE NAVIER–STOKES EN FLUIDOS NEWTONIANOS .....	31
2.2 FLUJO DE POISEUILLE EN FLUIDOS NEWTONIANOS .....	33
2.3 CAUDAL (O FLUJO VOLUMÉTRICO) Y DIFERENCIA DE PRESIÓN EN FLUI- DOS NEWTONIANOS .....	42
2.4 ANÁLISIS DEL ÁNGULO ÓPTIMO DE RAMIFICACIÓN Y BIFURCACIÓN EN FLUIDOS NEWTONIANOS .....	44
2.4.1 Análisis del ángulo óptimo de ramificación. ....	45
2.4.2 Análisis del ángulo óptimo de bifurcación. ....	60
<b>3 HEMODINÁMICA Y GEOMETRÍA VASCULAR EN FLUIDOS NO NEWTO- NIANOS .....</b>	<b>76</b>
3.1 FORMULACIÓN GENERAL DE LAS ECUACIONES DE NAVIER–STOKES EN FLUIDOS NO NEWTONIANOS .....	76
3.2 FLUJO DE POISEUILLE EN FLUIDOS NO NEWTONIANOS .....	79
3.3 CAUDAL (O FLUJO VOLUMÉTRICO) Y DIFERENCIA DE PRESIÓN EN FLUI- DOS NO NEWTONIANOS .....	87

3.4 ANÁLISIS DEL ÁNGULO ÓPTIMO DE RAMIFICACIÓN Y BIFURCACIÓN EN FLUIDOS NO NEWTONIANOS.....	90
3.4.1 Análisis del ángulo óptimo de ramificación. ....	91
3.4.2 Análisis del ángulo óptimo de bifurcación. ....	104
3.5 LONGITUD DEL SISTEMA VASCULAR Y AUMENTO DEL ÁREA TRANS- VERSAL.....	107
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>120</b>

## RESUMEN

**TÍTULO:** RAMIFICACIÓN, BIFURCACIÓN Y LONGITUD DEL SISTEMA VASCULAR, VISTO DESDE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES \*

**AUTOR:** JEFFERSON SNEYDER MORENO TOLOZA \*\*

**PALABRAS CLAVE:** ECUACIONES DE NAVIER-STOKES, FLUJO DE POISEUILLE, RAMIFICACIÓN, BIFURCACIÓN, FLUJO SANGUÍNEO.

**DESCRIPCIÓN:** El presente trabajo se inscribe en el marco de la teoría de ecuaciones diferenciales aplicadas a la mecánica de fluidos, en particular, dentro de las ecuaciones de Navier–Stokes. El sistema de Navier-Stokes permite abordar el análisis de la ramificación y bifurcación de los vasos sanguíneos desde una perspectiva matemática, así como estudiar la optimización de los ángulos de ramificación y bifurcación en el sistema vascular. El objetivo principal de este trabajo consiste en disertar sobre los resultados expuestos por **John A. Adam** en *Blood Vessel Branching Beyond the Standard Calculus Problem, Mathematics Magazine, Volume 84, number 3, (2011), 196 – 207*, con el fin de profundizar en su comprensión y brindar una base conceptual más clara y accesible a una audiencia amplia, favoreciendo así la difusión y el aprovechamiento del conocimiento en estudios más avanzados.

El primer capítulo desarrolla los fundamentos teóricos necesarios para el estudio, incluyendo algunos conceptos básicos de mecánica de fluidos, propiedades de los fluidos newtonianos y no newtonianos, así como herramientas analíticas y operadores diferenciales esenciales para la formulación del modelo matemático considerado.

En el segundo capítulo se presenta la formulación general de las ecuaciones de Navier–Stokes para fluidos newtonianos y se analiza el flujo de Poiseuille. A partir de este modelo se obtienen relaciones explícitas entre velocidad, caudal y diferencia de presión, las cuales permiten analizar los ángulos óptimos de ramificación y bifurcación desde una perspectiva energética y geométrica. En el tercer capítulo se extiende el análisis a fluidos no newtonianos, incorporando modelos reológicos más realistas para la sangre. Se formulan las ecuaciones correspondientes, se generaliza el flujo de Poiseuille y se examinan el caudal, la caída de presión y los ángulos óptimos de ramificación y bifurcación.

Finalmente, con base en los resultados obtenidos, se analiza la longitud total del sistema vascular en grandes mamíferos y en el ser humano, estimando el número de vasos y capilares, así como el aumento promedio del área de una sección transversal en bifurcaciones arteriales.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Matemáticas. **Director:** Élder Jesús Villamizar Roa. Ph.D. en Matemáticas.

## ABSTRACT

**TITLE:** BRANCHING, BIFURCATION, AND LENGTH OF THE VASCULAR SYSTEM, FROM THE PERSPECTIVE OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS \*

**AUTHOR:** JEFFERSON SNEYDER MORENO TOLOZA \*\*

**KEYWORDS:** NAVIER-STOKES EQUATIONS, POISEUILLE FLOW, BRANCHING, BIFURCATION, BLOOD FLOW.

**DESCRIPTION:** This work is framed within the theory of differential equations applied to fluid mechanics, specifically within the context of the Navier–Stokes equations. The Navier-Stokes system provides a mathematical framework for analyzing the branching and bifurcation of blood vessels, as well as for studying the optimization of branching and bifurcation angles in the vascular system. The primary objective of this study is to discuss the results presented by **John A. Adam** in *Blood Vessel Branching Beyond the Standard Calculus Problem, Mathematics Magazine, Volume 84, number 3*, (2011), 196–207, with the aim of deepening their understanding and providing a clearer and more accessible conceptual basis to a broad audience, thereby promoting the dissemination and application of this knowledge in more advanced studies.

The first chapter develops the theoretical foundations required for the study, including basic concepts of fluid mechanics, properties of Newtonian and non-Newtonian fluids, as well as analytical tools and differential operators essential for the formulation of the mathematical model under consideration.

The second chapter presents the general formulation of the Navier–Stokes equations for Newtonian fluids and analyzes Poiseuille flow. From this model, explicit relationships between velocity, flow rate, and pressure difference are derived, enabling the analysis of optimal branching and bifurcation angles from both energetic and geometric perspectives. The third chapter extends the analysis to non-Newtonian fluids, incorporating more realistic rheological models for blood. The corresponding equations are formulated, Poiseuille flow is generalized, and flow rate, pressure drop, and optimal branching and bifurcation angles are examined.

Finally, based on the results obtained, the total length of the vascular system in large mammals and in humans is analyzed, estimating the number of vessels and capillaries, as well as the average increase in cross-sectional area at arterial bifurcations.

---

\* Degree Work

\*\* Faculty of Science. School of Mathematics. Mathematics. **Advisor:** Élder Jesús Villamizar Roa. Ph.D. in Mathematics.

## INTRODUCCIÓN

El estudio del sistema vascular desde una perspectiva matemática ha suscitado un notable interés en diversas disciplinas, entre ellas la biomedicina, la física, la matemática aplicada y las ingenierías. Este sistema, compuesto por arterias, venas y capilares, desempeña un papel fundamental en el transporte de sangre desde el corazón hacia los tejidos y en su posterior retorno, garantizando así el adecuado funcionamiento del organismo.

La compleja estructura jerárquica de los vasos sanguíneos y sus patrones de ramificación cumplen una función esencial en la optimización del flujo sanguíneo. Este hecho ha motivado el desarrollo de modelos matemáticos orientados a comprender su organización y dinámica. La longitud total de esta red es extraordinaria. En 1967, el biólogo matemático **Robert Rosen**<sup>1</sup> estimó que la longitud combinada de los vasos sanguíneos en grandes mamíferos alcanza aproximadamente los 80.000 km, lo que equivale a recorrer casi dos veces la circunferencia de la Tierra.

El presente trabajo se inscribe en el estudio de las ecuaciones de Navier–Stokes, fundamentales para la descripción del comportamiento de los fluidos en conductos cilíndricos, denominado flujo de Poiseuille. Este enfoque ofrece un marco teórico robusto para el análisis del flujo sanguíneo en el sistema vascular. El propósito central consiste en examinar, derivar y disertar los resultados expuestos en<sup>2</sup>, con el fin de profundizar en su comprensión y brindar una base conceptual más clara y accesible a una audiencia amplia, favoreciendo así la difusión y el aprovechamiento del conocimiento en este ámbito.

El estudio original, desarrollado en el marco de fluidos newtonianos, examina los procesos de ramificación y bifurcación de los vasos sanguíneos con el fin de determinar los ángulos óptimos correspondientes mediante el uso de ecuaciones diferenciales y la optimización de funciones de costo. En particular, se consideran modelos que integran tanto la resistencia hidráulica del flujo sanguíneo como los costos asociados al mantenimiento estructural del sistema vascular, lo que permite evaluar la eficiencia del sistema desde una perspec-

---

<sup>1</sup> ROSEN, Robert. *Optimality principles in biology*. Springer, 2013.

<sup>2</sup> ADAM, John A. *Blood vessel branching: beyond the standard calculus problem*. En: *Mathematics Magazine*. 84.3 (2011), p. 196–207.

tiva matemática y biológica. Asimismo, se analiza la longitud total del sistema vascular y el aumento del área de la sección transversal en las bifurcaciones.

El presente trabajo monográfico pretende profundizar, sistematizar y clarificar estos resultados mediante una exposición más detallada, tomando como referencia el artículo de Adam <sup>3</sup>. Basados en el análisis de <sup>4</sup>, se extiende el estudio al caso de los fluidos no newtonianos. Para abordar esta problemática, en el primer capítulo se desarrolla los fundamentos teóricos que sustentan el trabajo. En él se presentan los conceptos y resultados esenciales que servirán de base para los capítulos posteriores. En particular, se introducen algunos conceptos fundamentales de la mecánica de fluidos, así como los operadores diferenciales y resultados analíticos indispensables para la formulación matemática del modelo de fluidos a ser analizado.

El segundo capítulo desarrolla el marco matemático y físico que permite modelar rigurosamente la hemodinámica y la geometría vascular a partir de las ecuaciones de Navier–Stokes. Se analiza cómo la estructura geométrica del sistema vascular, en particular, los ángulos de ramificación y bifurcación, influyen en la dinámica del flujo sanguíneo, considerando exclusivamente modelos newtonianos. El capítulo se organiza de manera progresiva. En primer lugar, se presenta la formulación general de las ecuaciones de Navier–Stokes para fluidos newtonianos y se estudia el flujo de Poiseuille. A partir de este modelo se obtienen relaciones explícitas entre velocidad, caudal y diferencia de presión, que permiten analizar los ángulos óptimos de ramificación y bifurcación desde una perspectiva energética y geométrica. Se inicia con el estudio de una ramificación simple: un vaso sanguíneo secundario que emerge de un vaso principal, modelado como un conducto recto. La Figura 9 muestra esta configuración básica: un vaso sanguíneo principal de radio  $r_1$ , del cual se desprende un vaso de radio  $r_2$ , con  $r_2 < r_1$ , formando un ángulo  $\theta$  respecto al eje del primero. Se definen los puntos  $A, B$  y  $C$  como referencias geométricas, con  $BC$  perpendicular a  $AC$ , y se consideran las distancias  $c = |AC|$  y  $b = |BC|$ . La elección del ángulo  $\theta$  determina la ubicación del punto  $O$  y las longitudes  $L_1 = |AO|$  y  $L_2 = |OB|$ . Esta formulación permite plantear y resolver el problema de optimización del ángulo de

---

<sup>3</sup> Ibid., p. 196–207.

<sup>4</sup> Ibid., p. 196–207.

ramificación. Posteriormente, el análisis se extiende a una bifurcación de tres ramas, como se ilustra en la Figura 13. En esta configuración, la posición del punto  $O$  en el plano determina los ángulos óptimos de ramificación  $\phi$  y  $\theta$ . Los radios y longitudes de los vasos  $AO$ ,  $OB$  y  $OC$  se denotan respectivamente como  $(r_0, L_0)$ ,  $(r_1, L_1)$  y  $(r_2, L_2)$ . Este modelo permite estudiar la optimización del ángulo de bifurcación  $\phi + \theta$ .

En el tercer capítulo, se extiende el análisis al caso de fluidos no newtonianos, incorporando modelos reológicos más adecuados para describir el comportamiento real de la sangre. Se formulan las ecuaciones correspondientes, se obtiene una versión generalizada del flujo de Poiseuille y se examinan nuevamente el caudal, la caída de presión y los ángulos óptimos de ramificación y bifurcación en una configuración análoga a la considerada en el caso newtoniano.

Finalmente, a partir de los resultados desarrollados en los capítulos anteriores, se estudia la longitud total del sistema vascular en grandes mamíferos y en el caso humano, estimando el número aproximado de vasos y capilares. Asimismo, se analiza el incremento promedio del área de la sección transversal en bifurcaciones arteriales simétricas y asimétricas.

## 1. PRELIMINARES

En este capítulo se presentan algunos conceptos y resultados fundamentales que servirán como base para el desarrollo de los capítulos posteriores. El objetivo es proporcionar al lector las herramientas teóricas necesarias para comprender, en los siguientes apartados, la formulación matemática y el análisis del flujo en el sistema vascular. Algunos de estos conceptos y resultados iniciales han sido tomados de <sup>5</sup>, <sup>6</sup>, <sup>7</sup>.

### 1.1. FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

El sistema vascular (Figura 1), también conocido como aparato circulatorio, es el conjunto de estructuras anatómicas responsables del transporte de sangre y linfa a lo largo del organismo. Está constituido por arterias, venas, vasos capilares y vasos linfáticos, los cuales conforman una red integrada que asegura la distribución de nutrientes y la eliminación de desechos metabólicos <sup>8</sup>.

Las arterias transportan sangre oxigenada desde el corazón hacia los tejidos; poseen paredes gruesas y elásticas para soportar la presión del bombeo cardíaco. En contraste, las venas llevan la sangre desoxigenada de regreso al corazón y presentan paredes más delgadas, además de válvulas internas que evitan el retroceso de la sangre. Los capilares, por su parte, son vasos microscópicos donde ocurre el intercambio de gases ( $O_2$  y  $CO_2$ ), nutrientes y desechos entre la sangre y los tejidos <sup>9</sup>.

Además, el sistema vascular también incluye los vasos linfáticos, que son los encargados de transportar linfa, un líquido que contiene glóbulos blancos y ayuda a eliminar toxinas y desechos. En su conjunto, el sistema vascular tiene como función distribuir oxígeno

---

<sup>5</sup> MARUŠIĆ-PALOKA, Eduard. *Steady flow of a non-Newtonian fluid in unbounded channels and pipes*. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 10.09 (2000), p. 1425–1445.

<sup>6</sup> MOTT, Robert L. *Mecánica de fluidos aplicada*. Pearson Educación, 1996.

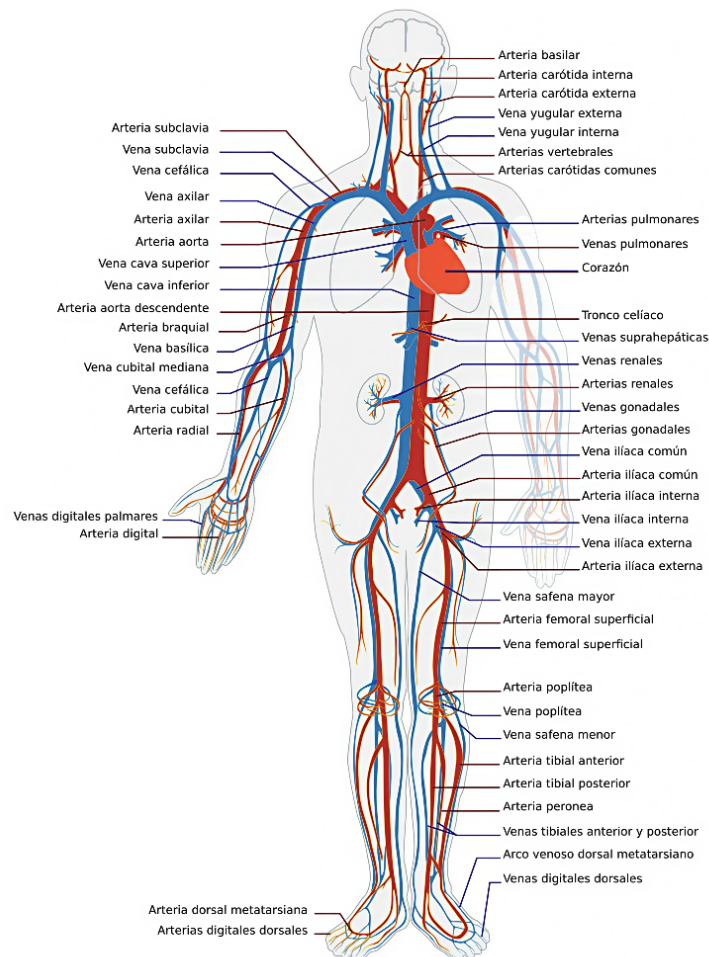
<sup>7</sup> WIGGERT, David C; RAMADAN, Bassem H y POTTER, Merle C. *Mecánica de fluidos*. Cengage Learning, 2015.

<sup>8</sup> AARONSON, Philip I; WARD, Jeremy P. T y CONNOLLY, Michelle J. *The cardiovascular system at a glance*. John Wiley & Sons, 2020.

<sup>9</sup> MUÑOZ, Eva. *Participación de los canales de calcio y las mitocondrias en la proliferación de las células de músculo liso y vascular*. CSIC-UVA-Instituto de Biología y Genética Molecular (IBGM), 2012.

y nutrientes a las células, retirar dióxido de carbono y productos de desecho, regular la temperatura corporal y el equilibrio ácido-base, y participar en la respuesta inmunológica mediante el sistema linfático.

**Figura 1:** Sistema vascular



**Fuente:** Dominio público

Desde un punto de vista técnico, el estudio del sistema vascular requiere comprender los principios fundamentales de la mecánica de fluidos, dado que, por su propia naturaleza, la sangre es un fluido con propiedades de viscosidad particulares. En este sentido, el primer concepto esencial, es el de **fluido**, entendido como un tipo de medio continuo formado por partículas que se mantienen unidas por fuerzas de cohesión, lo que les permite fluir, adaptarse a la forma del recipiente que los contiene, y que se deforma continuamente bajo la acción de una fuerza, por pequeña que sea. De igual manera, la cantidad de fluido que

circula a través de un conducto o espacio determinado recibe el nombre de **flujo**, y se mide comúnmente como caudal, que es el producto de la velocidad del fluido por el área de la sección transversal que el fluido atraviesa.

Los fluidos presentan propiedades físicas que permiten su clasificación, entre las cuales destacan la densidad y la viscosidad. La densidad se define como la relación entre la masa y el volumen de un fluido, y proporciona una medida de la cantidad de materia contenida en una unidad de volumen. Cuando la densidad de un fluido permanece constante frente a variaciones de presión, dicho fluido se denomina incompresible, como ocurre generalmente con los líquidos. En contraste, los fluidos compresibles presentan variaciones significativas de densidad bajo la acción de la presión, siendo los gases el ejemplo más representativo.

Otra propiedad física fundamental de los fluidos es la viscosidad, definida como la fuerza de fricción interna que se opone al movimiento relativo entre las capas adyacentes de un fluido, cuantificando su resistencia interna al flujo. Esta propiedad influye de manera directa en la cantidad de energía requerida para generar el desplazamiento de un fluido. Un fluido con alta viscosidad resiste el movimiento, mientras que uno con baja viscosidad fluye con facilidad. Por ejemplo, sustancias altamente viscosas como el jarabe o la miel tardan más en verterse que las menos viscosas, como el agua.

Es importante no confundir la viscosidad con la densidad: aunque la crema puede parecer más espesa que la leche, en realidad posee menor densidad, razón por la cual flota sobre ella. Además, la viscosidad provoca que el fluido se adhiera a la superficie con la que está en contacto, fenómeno conocido como condición de no deslizamiento. La viscosidad se puede clasificar en viscosidad dinámica y viscosidad cinemática.

- **Viscosidad dinámica** ( $\mu$ ): se expresa en unidades de  $N \cdot s/m^2$  y representa la resistencia del fluido al movimiento, es decir, la fuerza necesaria para desplazar una capa de fluido con respecto a otra. Aquí  $N$ ,  $s$  y  $m$  denotan las unidades de medida del Sistema Internacional: newtons, segundos y metros, respectivamente.
- **Viscosidad cinemática** ( $\nu$ ): se expresa en unidades de  $m^2/s$  y corresponde a la relación

entre la viscosidad dinámica y la densidad del fluido, y mide la capacidad de un fluido para fluir bajo la acción de la gravedad.

La viscosidad es una propiedad fundamental que permite clasificar los fluidos de acuerdo con su comportamiento frente al esfuerzo cortante o fuerza de cizalla, entendida como la fuerza tangencial que actúa sobre las partículas del fluido. Dicha clasificación se establece a partir de la relación entre el tensor de esfuerzos viscosos y la tasa de deformación. Para comprender este criterio de clasificación, es necesario introducir los conceptos de tensor general de esfuerzos, y de tensor de esfuerzos viscosos.

El esfuerzo que un fluido ejerce sobre un plano que pasa por un punto  $x$  y posee un vector normal unitario  $\vec{n}$  se describe mediante el vector de tracción o vector de esfuerzo, denotado por  $\mathbf{t}(x, t, \vec{n})$ . Gracias a los aportes de Claude-Louis Navier (1785–1836) y George Gabriel Stokes (1819–1903), dicho vector se define como

$$\mathbf{t}(x, t, \vec{n}) = T(x, t)\vec{n}, \quad (1.1)$$

donde  $T(x, t)$  es el tensor general de esfuerzos, que representa el conjunto de fuerzas de presión, tensión y contacto (o arrastre) que las partículas del fluido ejercen sobre las partículas vecinas. El tensor general de esfuerzos está dado por

$$T(x, t) = -p(x, t)I + \boldsymbol{\tau}(x, t). \quad (1.2)$$

El término  $-p(x, t)I$  describe el esfuerzo de presión isotrópico, donde  $p(x, t)$  es la presión del fluido, y  $I$  es la matriz identidad. Este esfuerzo se considera isotrópico porque la presión actúa de manera uniforme en todas las direcciones del flujo. Por su parte,  $\boldsymbol{\tau}(x, t)$  es denominado tensor extra de esfuerzos o tensor de esfuerzos viscosos. Este tensor es una matriz  $3 \times 3$  cuyos elementos diagonales corresponden a los esfuerzos normales, mientras que los elementos fuera de la diagonal representan los esfuerzos viscosos.

Cuando  $\boldsymbol{\tau}(x, t) = 0$ , se obtienen los denominados fluidos ideales, caracterizados por la ausencia de viscosidad. Tradicionalmente, si el fluido es viscoso e incompresible, el tensor

general de esfuerzos se expresa como

$$T(x, t) = -p(x, t)I + \tau(x, t), \quad \text{con} \quad \tau(x, t) = 2\eta(|e(u)|)e(u), \quad (1.3)$$

donde  $u$  es la velocidad del fluido y  $e(u)$  dada por

$$e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (1.4)$$

es la parte simétrica del gradiente de la velocidad, conocida como tensor de tasa de deformación <sup>10</sup>. El término  $|e(u)|$  se denomina tasa de deformación (también conocida como velocidad de deformación o velocidad de cizalla).

La viscosidad  $\eta(|e(u)|)$  depende de la tasa de deformación y, de acuerdo con el modelo de Ley de potencia (power-law) <sup>11</sup>, se define como

$$\eta(s) = \mu s^{q-2}, \quad \text{con} \quad s = |e(u)|, \quad (1.5)$$

donde  $\mu$  es el índice de consistencia del fluido, que mide su resistencia al flujo, y  $q$  es el índice de flujo, un parámetro que describe cómo varía la viscosidad con la tasa de deformación. Para garantizar un comportamiento físico admisible del fluido, se requiere que  $q > 1$ .

El modelo de Ley de potencia permite clasificar los fluidos en dos grandes grupos: fluidos newtonianos, cuya viscosidad es constante e independiente de la tasa de deformación, y fluidos no newtonianos, en los cuales la viscosidad depende de la tasa de deformación. A su vez, los fluidos no newtonianos se subdividen en pseudoplásticos y dilatantes.

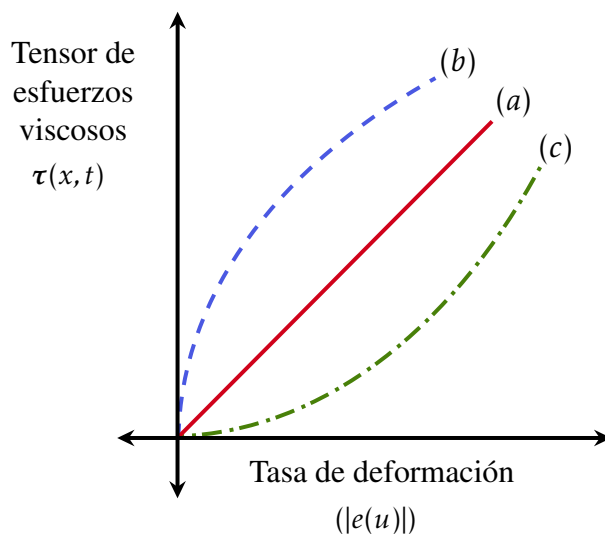
- **Fluidos newtonianos** ( $q = 2$ ): En este caso, la viscosidad es constante, lo que implica que  $\frac{d\eta}{ds} = 0$ . En consecuencia, el tensor de esfuerzos viscosos adopta la forma  $2\mu e(u)$ . Ejemplos de fluidos newtonianos incluyen el agua, el alcohol, el vino, el mercurio y la gasolina, entre otros.

<sup>10</sup> MARUŠIĆ-PALOKA, Eduard. *Op. cit.*, p. 1425–1445.

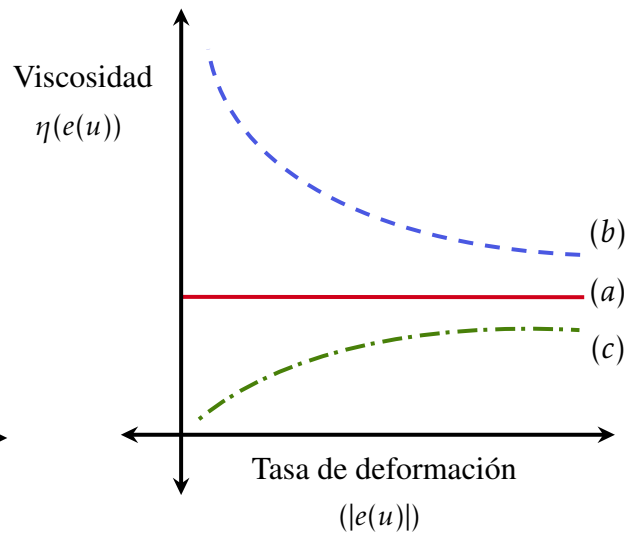
<sup>11</sup> *Ibid.*, p. 1425–1445.

- **Fluidos pseudoplásticos** ( $1 < q < 2$ ): Son aquellos cuya viscosidad disminuye a medida que aumenta la tasa de deformación, es decir,  $\frac{d\eta}{ds} < 0$ . Entre los ejemplos más representativos se encuentran la arcilla, la leche, la gelatina y diversas pinturas, así como fluidos biológicos esenciales como la sangre y el líquido sinovial (el lubricante natural de las articulaciones) <sup>12</sup>.
- **Fluidos dilatantes** ( $q > 2$ ): En estos fluidos, la viscosidad aumenta con la tasa de deformación, es decir,  $\frac{d\eta}{ds} > 0$ . Ejemplos representativos incluyen suspensiones de almidón de maíz en agua, la crema Chantilly <sup>13</sup>, tierra húmeda y barro.

**Figura 2:** Tensor de esfuerzos viscosos vs tasa de deformación



**Figura 3:** Viscosidad vs tasa de deformación



**Fuente:** Elaboración propia

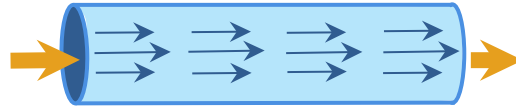
La Figura 2 muestra la relación entre el tensor de esfuerzos viscosos y la tasa de deformación para distintos tipos de fluidos: newtonianos y no newtonianos (pseudoplásticos y dilatantes). Por su parte, la Figura 3 ilustra la variación de la viscosidad en función de la tasa de deformación para las mismas categorías de fluidos. En ambas figuras se identifican: (a) Fluido newtoniano, (b) Fluido pseudoplástico y (c) Fluido dilatante.

<sup>12</sup> DI PAOLO, José. *Mecánica de los Fluidos: Aspectos teóricos introductorios para Ingeniería*. 2. ed. Santa Fe: José Di Paolo, 2024.

<sup>13</sup> *Ibid.*

**Definición 1.1 (Flujo laminar).** El flujo laminar es un tipo de movimiento de un fluido en el que sus partículas se desplazan ordenadamente en capas suaves y paralelas (**Figura 4**), sin que exista un mezclado significativo entre las partículas de capas adyacentes.

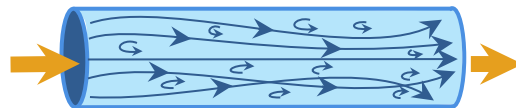
**Figura 4:** Flujo laminar



**Fuente:** Elaboración propia

**Definición 1.2 (Flujo turbulento).** Son flujos en los cuales el movimiento del fluido presenta fluctuaciones irregulares tanto en la velocidad como en la dirección, dando lugar a una mezcla intensa y caótica de las partículas del fluido (**Figura 5**). En este régimen, las trayectorias de las partículas son altamente variables e impredecibles, caracterizándose por la presencia de remolinos, vórtices y una transferencia significativa de cantidad de movimiento y energía.

**Figura 5:** Flujo turbulento



**Fuente:** Elaboración propia

**Definición 1.3 (Flujo estacionario y no estacionario).** Un flujo se denomina estacionario cuando las propiedades del fluido, tales como la velocidad, la presión y la densidad, son independientes del tiempo. En caso contrario, el flujo se considera no estacionario.

## 1.2. ALGUNOS OPERADORES DIFERENCIALES

**Definición 1.4 (Funciones de clase  $C^k$ ).** Una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en un conjunto abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , se dice que es de clase  $C^k$ , donde  $k$  es un número entero no negativo, si las derivadas parciales de  $f$  hasta el  $k$ -ésimo orden, existen y son continuas en  $\Omega$ . Esta clase de tales funciones se denota por  $C^k(\Omega)$ .

**Definición 1.5 (Operador Gradiente).** El operador gradiente, denotado por  $\nabla$ , es un operador diferencial que puede aplicarse a funciones de clase  $C^1$ , tanto escalares como vectoriales.

**Caso escalar**

Sea  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , una función escalar de clase  $C^1$  definida en un conjunto abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . El gradiente de  $\phi$  en un punto  $x$  se define como el vector

$$\nabla\phi(x) = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

En particular, en coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^3$ , si se considera la base canónica  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ , se tiene que

$$\nabla\phi(x) = \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_1}\hat{i} + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_2}\hat{j} + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_3}\hat{k} \in \mathbb{R}^3.$$

Para expresar el gradiente en coordenadas cilíndricas, se considera la transformación de coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$  a coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  dada por

$$x_1 = r \cos(\theta), \quad x_2 = r \sen(\theta), \quad x_3 = z. \quad (1.6)$$

Para llevar a cabo este cambio de coordenadas, se introducen los vectores unitarios asociados al sistema cilíndrico:

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= (\cos \theta, \sen \theta, 0) = \cos \theta \hat{i} + \sen \theta \hat{j}, \\ \hat{e}_\theta &= (-\sen \theta, \cos \theta, 0) = -\sen \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}, \\ \hat{e}_z &= (0, 0, 1) = \hat{k}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Así, aplicando la regla de la cadena, las derivadas parciales  $\frac{\partial\phi}{\partial x_1}$  y  $\frac{\partial\phi}{\partial x_2}$  pueden expresarse en términos de  $\frac{\partial\phi}{\partial r}$  y  $\frac{\partial\phi}{\partial \theta}$  como

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \cos(\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \sen(\theta), \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_2} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \sen(\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \theta} \cos(\theta) \quad \text{y} \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_3} = \frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

En consecuencia, el gradiente de  $\phi$  en coordenadas cilíndricas se expresa como

$$\nabla\phi(r, \theta, z) = \frac{\partial\phi}{\partial r}(x)\hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \theta}(x)\hat{e}_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}(x)\hat{e}_z.$$

### **Caso vectorial**

Sea  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función vectorial de clase  $C^1$ , definida en un conjunto abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , y dada por  $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x))$ , donde cada componente  $\phi_i$  es de clase  $C^1$ . El gradiente de  $\phi$  se define como la matriz:

$$\nabla\phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\phi_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial\phi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

En  $\mathbb{R}^2$ , el gradiente en un punto es perpendicular a la curva de nivel que pasa por dicho punto. De manera análoga, en  $\mathbb{R}^3$ , el gradiente es perpendicular a la superficie de nivel en el punto considerado. El gradiente  $\nabla$  aplicado a una función señala la dirección de mayor crecimiento de la misma, mientras que  $-\nabla$  indica la dirección de decrecimiento más rápido.

**Definición 1.6 (Operador Divergencia).** Sea  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un conjunto abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , con  $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x))$ , donde cada  $\phi_i$  es de clase  $C^1$ , y  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un punto en  $\mathbb{R}^n$ . El operador divergencia, denotado por  $\operatorname{div}\phi$ , se define como:

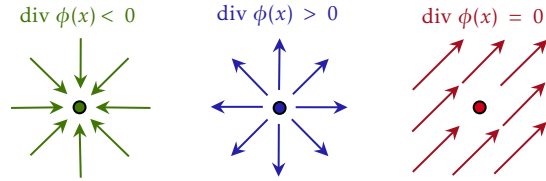
$$\operatorname{div}\phi(x) = \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}(x) + \cdots + \frac{\partial\phi_n}{\partial x_n}(x) \in \mathbb{R}.$$

Desde un punto de vista físico, cuando el campo  $\phi$  se interpreta como un campo de velocidades de un fluido, la divergencia describe el comportamiento local del fluido en torno a un punto  $x$ . En particular, indica si, en una vecindad de  $x$ , las partículas del fluido tienden a separarse, a concentrarse o a conservar su distribución. En este sentido, como se ilustra en la Figura 6, se tiene que:

- $\operatorname{div}\phi(x) < 0$ : el punto  $x$  actúa como un **sumidero**, ya que el fluido converge hacia él.
- $\operatorname{div}\phi(x) > 0$ : el punto  $x$  se comporta como una **fuentes**, pues el fluido se dispersa desde su entorno.

- $\operatorname{div} \phi(x) = 0$ : no hay expansión ni concentración local, por lo que el flujo es **localmente incompresible** en  $x$ .

**Figura 6:** Interpretación de la Divergencia



**Fuente:** Elaboración propia

La divergencia de un campo vectorial  $\phi(r, \theta, z) = (\phi_r(r, \theta, z), \phi_\theta(r, \theta, z), \phi_z(r, \theta, z))$ , en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , se expresa como:

$$\operatorname{div} \phi((r, \theta, z)) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\phi_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi_z}{\partial z}.$$

**Divergencia de un tensor de segundo orden.** Sea  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  un campo de clase  $C^1$ , con componentes  $\tau_{ij}(x)$ . Su divergencia es dada por el vector

$$\operatorname{div} \tau = ((\operatorname{div} \tau)_1, \dots, \operatorname{div} \tau)_n$$

cuyas componentes están dadas por

$$(\operatorname{div} \tau)_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

En coordenadas cartesianas, para el caso tridimensional ( $n = 3$ ), si

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\operatorname{div} \tau = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

En coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  el tensor  $\tau$  es dado por

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{pmatrix},$$

y su divergencia es dada por

$$\operatorname{div} \tau = \begin{cases} (\operatorname{div} \tau)_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}, \\ (\operatorname{div} \tau)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tau_{r\theta}}{r}, \\ (\operatorname{div} \tau)_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}. \end{cases}$$

**Definición 1.7 (Operador Laplaciano).** El operador laplaciano, denotado por  $\Delta$ , es un operador diferencial de segundo orden que se define como la divergencia del gradiente.

#### Caso escalar

En el caso general, si  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , es una función escalar de clase  $C^2$  definida en un conjunto abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces el laplaciano de  $\phi$  en el punto  $x$  se define como:

$$\Delta \phi(x) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2}(x) \in \mathbb{R}.$$

En coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , el laplaciano de una función escalar  $\phi(x)$  se escribe como

$$\Delta \phi(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r}(r, \theta, z) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}(r, \theta, z) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(r, \theta, z).$$

#### Caso vectorial

Cuando la función es vectorial,  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x))$ , con cada  $\phi_i$  de clase  $C^2$  definida en un conjunto abierto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces el laplaciano de  $\phi$  se define componente a componente como:

$$\Delta\phi(x) = (\Delta\phi_1(x), \Delta\phi_2(x), \dots, \Delta\phi_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

**Teorema 1.8 (Derivación bajo el signo integral <sup>14</sup>).** Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto, sea  $f : \Omega \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función con las siguientes propiedades:

- 1) Para todo  $x \in \Omega$ , la función  $t \mapsto f(x, t)$  es integrable en  $a \leq t \leq b$ .
- 2) La  $i$ -ésima derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$  existe para cada  $(x, t) \in \Omega \times [a, b]$  y la función

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \Omega \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

así definida, es continua.

Entonces la función  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x, t) dt,$$

posee  $i$ -ésima derivada parcial en cada punto  $x \in \Omega$ , siendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt.$$

**Lema 1.9.** <sup>15</sup>. Sea  $\Phi(x)$  una función continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Si para cada función continua  $\eta(x)$  definida en  $[a, b]$  se tiene que

$$\int_a^b \Phi(x)\eta(x)dx = 0, \tag{1.8}$$

entonces  $\Phi(x) = 0$  en  $[a, b]$ .

<sup>14</sup> LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. Vol. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

<sup>15</sup> PATHAK, Hemant Kumar. *An Introduction to Nonlinear Analysis and Fixed Point Theory*. Springer Nature Singapore, 2018.

**Demostración:** Supóngase, por contradicción, que  $\Phi(\tilde{x}) \neq 0$  en algún punto  $\tilde{x} \in [a, b]$ . Sin pérdida de generalidad, supóngase que  $\Phi(\tilde{x}) > 0$ . Dado que  $\Phi(\tilde{x})$  es continua en  $[a, b]$ , existe un intervalo pequeño  $[x_0, x_1]$  alrededor de  $\tilde{x}$ , tal que  $\Phi(\tilde{x}) > 0$  para todo  $\tilde{x} \in [x_0, x_1]$ .

Ahora bien, dado que  $\eta(x)$  es una función continua arbitraria, es posible elegir una función  $\eta(x)$  que sea positiva en  $[x_0, x_1]$  y se anule fuera de este intervalo.

Con esta elección de  $\eta(x)$ , se tiene que:

$$\int_a^b \Phi(x)\eta(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x) dx.$$

Dado que  $\Phi(x) > 0$  en  $[x_0, x_1]$  y  $\eta(x) > 0$  en ese mismo intervalo, el producto  $\Phi(x)\eta(x)$  es positivo en  $[x_0, x_1]$ . Por lo tanto,

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x)\eta(x) dx > 0.$$

Esto contradice la ecuación (1.8). En consecuencia, se concluye que  $\Phi(x) = 0$  en  $[a, b]$ .  $\square$

**Teorema 1.10 (Ecuaciones de Euler-Lagrange <sup>16, 17</sup>).** Sea  $F \in C^2([a, b] \times \mathbb{R}^2)$  y considérese el conjunto de funciones admisibles

$$S = \{Y \in C^1([a, b]) \mid Y(a) = Y_1, Y(b) = Y_2\}, \quad (1.9)$$

es decir, el conjunto de funciones continuamente diferenciables que satisfacen las condiciones de frontera y conectan los puntos  $(a, Y_1)$  y  $(b, Y_2)$ . Sea el funcional  $J : S \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$J[Y(t)] = \int_a^b F(t, Y(t), Y'(t)) dt. \quad (1.10)$$

Si  $J$  alcanza un máximo o un mínimo en  $y(t) \in S$ , entonces  $y(t)$  satisface la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(t, y(t), y'(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial Y'}(t, y(t), y'(t)) \right) = 0. \quad (1.11)$$

<sup>16</sup> *Ibíd.*

<sup>17</sup> GELFAND, Izrail Moiseevitch y SILVERMAN, Richard A. *Calculus of variations*. Courier Corporation, 2000.

**Demostración:** Sea  $y(t) \in S$  un punto de máximo o de mínimo de  $J$ . Se considera una variación de la función  $y(t)$  dada por

$$Y(t) = y(t) + \varepsilon\eta(t), \quad (1.12)$$

donde  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  es un parámetro real arbitrariamente pequeño, denominado parámetro de variación, y  $\eta(t)$  es una función de clase  $C^1([a, b])$  que satisface las condiciones de frontera

$$\eta(a) = \eta(b) = 0. \quad (1.13)$$

Derivando la expresión (1.12) respecto de  $t$ , se obtiene que

$$Y'(t) = y'(t) + \varepsilon\eta'(t). \quad (1.14)$$

Sustituyendo las expresiones (1.13) y (1.14) para  $Y(t)$  y  $Y'(t)$  en la integral (1.10), se llega a que

$$J(\varepsilon) = \int_a^b F(t, Y(t), Y'(t)) dt = \int_a^b F(t, y(t) + \varepsilon\eta(t), y'(t) + \varepsilon\eta'(t)) dt. \quad (1.15)$$

Dado que  $y(t)$  es un punto de máximo o de mínimo, el funcional  $J(\varepsilon)$  alcanza dicho valor en  $\varepsilon = 0$ . Por lo tanto, se debe cumplir la condición necesaria

$$\left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{para todo } \eta(t). \quad (1.16)$$

Derivando (1.15) con respecto a  $\varepsilon$ , y usando el Teorema 1.8, se llega a

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(t, Y(t), Y'(t)) dt = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} F(t, Y(t), Y'(t)) dt. \quad (1.17)$$

Evaluando en  $\varepsilon = 0$ , se deduce que

$$\left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left. \frac{d}{d\varepsilon} F(t, Y(t), Y'(t)) \right|_{\varepsilon=0} dt. \quad (1.18)$$

Aplicando la regla de la cadena para funciones de varias variables, se tiene que

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(t, Y(t), Y'(t)) = \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot \frac{dY(t)}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y'} \cdot \frac{dY'(t)}{d\varepsilon}. \quad (1.19)$$

Dado que

$$\frac{dY(t)}{d\varepsilon} = \eta(t), \quad \frac{dY'(t)}{d\varepsilon} = \eta'(t),$$

se deduce que

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(t, Y(t), Y'(t)) = \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot \eta(t) + \frac{\partial F}{\partial Y'} \cdot \eta'(t). \quad (1.20)$$

Sustituyendo la ecuación (1.20) en (1.18), y teniendo en cuenta que cuando  $\varepsilon = 0$  se cumple que  $Y(t) = y(t)$  y  $Y'(t) = y'(t)$ , se concluye que

$$\left. \frac{dJ}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot \eta(t) + \frac{\partial F}{\partial Y'} \cdot \eta'(t) \right]_{\varepsilon=0} dt = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot \eta(t) + \frac{\partial F}{\partial Y'} \cdot \eta'(t) \right] dt. \quad (1.21)$$

Dado que se cumple la condición (1.16), se deduce que

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot \eta(t) + \frac{\partial F}{\partial Y'} \cdot \eta'(t) \right] dt = 0. \quad (1.22)$$

Aplicando la regla de integración por partes sobre el segundo término y usando que  $\eta$  se anula en los extremos  $a$  y  $b$  se llega a que

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial Y'} \cdot \eta'(t) \right] dt &= \left[ \frac{\partial F}{\partial Y'} \cdot \eta(t) \right]_a^b - \int_a^b \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial Y'} \right) \cdot \eta(t) \right] dt \\ &= \left( \frac{\partial F}{\partial Y'} \cdot \eta(b) - \frac{\partial F}{\partial Y'} \cdot \eta(a) \right) - \int_a^b \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial Y'} \right) \cdot \eta(t) \right] dt \\ &= - \int_a^b \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial Y'} \right) \cdot \eta(t) \right] dt. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Sustituyendo (1.23) en la ecuación (1.22), se obtiene que

$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial Y'} \right) \right] \cdot \eta(t) dt = 0. \quad (1.24)$$

Dado que la igualdad (1.24) se cumple para toda función  $\eta(t)$ , y puesto que  $F$  es de clase  $C^2$  el integrando es continuo. Además,  $\eta(t)$  es una función continua. En consecuencia, por el Lema 1.9 se concluye que

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(t, y(t), y'(t)) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial Y'}(t, y(t), y'(t)) \right) = 0. \quad (1.25)$$

La ecuación (1.25) se denomina ecuación de Euler–Lagrange. □

**Observación 1.11.** Si en la ecuación de Euler–Lagrange (1.11) la función  $F$  no depende de  $Y'(t)$ , entonces es inmediato ver que dicha ecuación se reduce a

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(t, y(t), y'(t)) = 0.$$

**Observación 1.12.** Si  $F$  no depende explícitamente de  $Y(t)$ , la ecuación de Euler–Lagrange (1.11) implica que

$$\frac{\partial F}{\partial Y'}(t, y(t), y'(t)) = k, \quad \text{para alguna constante } k \in \mathbb{R}.$$

En efecto, si  $F$  no depende de  $Y(t)$ , entonces

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(t, y(t), y'(t)) = 0.$$

Sustituyendo la última expresión en la ecuación de Euler–Lagrange (1.11), se deduce que

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial Y'}(t, y(t), y'(t)) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial Y'}(t, y(t), y'(t)) \right) = 0,$$

lo que implica que

$$\frac{\partial F}{\partial Y'}(t, y(t), y'(t)) = k, \quad \text{para alguna constante } k \in \mathbb{R}.$$

**Observación 1.13.** Si  $F$  no depende explícitamente de  $t$ , entonces la ecuación de Euler–Lagrange (1.11) se reduce a

$$F - Y'(t) \frac{\partial F}{\partial Y'} = k, \quad \text{para alguna constante } k \in \mathbb{R}.$$

En efecto, al no depender  $F$  explícitamente de  $t$ , se tiene que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial Y} Y'(t) + \frac{\partial F}{\partial Y'} Y''(t).$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{dt} \left( F - Y'(t) \frac{\partial F}{\partial Y'} \right) = \frac{dF}{dt} - \left( Y''(t) \frac{\partial F}{\partial Y'} + Y'(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial Y'} \right) \right),$$

sustituyendo la expresión de  $\frac{dF}{dt}$  y simplificando, se llega a que

$$\frac{d}{dt} \left( F - Y'(t) \frac{\partial F}{\partial Y'} \right) = Y'(t) \left( \frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial Y'} \right) \right).$$

Por la ecuación de Euler–Lagrange (1.11), el término entre paréntesis es cero, de modo que

$$\frac{d}{dt} \left( F - Y'(t) \frac{\partial F}{\partial Y'} \right) = 0.$$

Por consiguiente,

$$F - Y'(t) \frac{\partial F}{\partial Y'} = k, \quad \text{para alguna constante } k \in \mathbb{R}.$$

## 2. HEMODINÁMICA Y GEOMETRÍA VASCULAR EN FLUIDOS NEWTONIANOS: UN ENFOQUE DESDE LAS ECUACIONES DE NAVIER–STOKES

La comprensión del ángulo óptimo de ramificación y bifurcación, junto con el análisis de la longitud del sistema vascular y del incremento en el área transversal en bifurcaciones arteriales, resulta fundamental en diversos campos del conocimiento. El ángulo óptimo se define como aquel que minimiza el gasto energético asociado al flujo sanguíneo dentro del sistema vascular. Por su parte, la ramificación consiste en la división de un conducto principal en ramas más pequeñas. Aunque puede presentarse en dos ramas, se caracteriza porque el vaso que se desprende posee un radio considerablemente menor que la continuación del conducto principal. En estos casos, las ramas son lo suficientemente estrechas como para no reducir de manera significativa el flujo en el vaso principal. Por otro lado, cuando esta división origina exactamente dos ramas, se denomina bifurcación. En esta situación, ambas ramas pueden tener radios similares o incluso iguales, lo que implica una distribución del flujo más equilibrada.

En biomedicina, estos conceptos se aplican, por ejemplo, en óptica médica y en la detección temprana de enfermedades, con el fin de evaluar y clasificar de manera objetiva los cambios vasculares asociados con la diabetes<sup>18</sup>. A nivel cerebral, el estudio de los ángulos óptimos de ramificación y bifurcación facilita la interpretación de imágenes de resonancia magnética funcional y contribuye a la determinación de propiedades funcionales del sistema vascular<sup>19</sup>.

Este concepto no se limita al ámbito biomédico. En ingeniería oceánica, los modelos de bifurcación dinámica permiten relacionar el ángulo crítico con el límite seguro de escora, es decir, el punto a partir del cual un buque puede perder estabilidad dinámica o transitar hacia una rama de solución inestable, entendida como un estado en el que incluso pequeñas perturbaciones alejan al sistema del equilibrio y lo conducen a otra configu-

---

<sup>18</sup> LE, David et al. *Fully automated geometric feature analysis in optical coherence tomography angiography for objective classification of diabetic retinopathy*. En: *Biomedical Optics Express*. 10. 5 (2019), p. 2493–2503.

<sup>19</sup> DIGERNES, Ingrid et al. *A theoretical framework for determining cerebral vascular function and heterogeneity from dynamic susceptibility contrast MRI*. En: *Journal of Cerebral Blood Flow & Metabolism*. 37.6 (2017), p. 2237–2248.

ración, como la pérdida definitiva de estabilidad del buque <sup>20</sup>. De manera análoga, en ingeniería hidráulica se ha empleado el análisis del ángulo de bifurcación para evaluar cómo su variación influye en la eficiencia de captación de agua y en la formación de zonas de estancamiento dentro de los canales <sup>21</sup>.

En este capítulo se aborda el estudio de la hemodinámica y de la geometría vascular desde una perspectiva matemática, tomando como marco teórico las ecuaciones de Navier–Stokes para fluidos newtonianos. La hemodinámica es la disciplina que estudia la dinámica de la sangre y su interacción con las paredes vasculares.

Bajo estas hipótesis, se introducen las ecuaciones de Navier–Stokes, las cuales constituyen la base matemática para relacionar las propiedades reológicas de la sangre con parámetros de interés, tales como la velocidad, el caudal y la diferencia de presión a lo largo de los segmentos vasculares. A partir de la solución obtenida para la velocidad, es posible determinar magnitudes derivadas relevantes, como la velocidad media del flujo y, en consecuencia, el número de Reynolds, el cual permite caracterizar el régimen del flujo.

Asimismo, se analizan los ángulos óptimos de ramificación y de bifurcación en este contexto, dada su relevancia en la eficiencia del flujo sanguíneo. El contenido de este capítulo se basa en la referencia <sup>22</sup>.

## 2.1. FORMULACIÓN GENERAL DE LAS ECUACIONES DE NAVIER–STOKES EN FLUIDOS NEWTONIANOS

Con el objetivo de desarrollar una formulación que describa el perfil de velocidad, el caudal y la diferencia de presión a lo largo de los segmentos vasculares en conductos cilíndricos tales como arterias, venas o capilares, se emplearán las ecuaciones de Navier–Stokes en el contexto newtoniano. En este estudio, la sangre se aproxima como un fluido newtoniano, una simplificación válida bajo las condiciones previamente establecidas, tal

---

<sup>20</sup> ZAMORA RODRÍGUEZ, Ricardo. *Bifurcaciones de la ecuación de balance no lineal del buque*. Tesis doctoral. Navales, 1992.

<sup>21</sup> PALOMINO, L. *Modelación numérica para determinar la orientación de una bifurcación en el Tramo B del Río Piura*. En: *Universidad de Piura*. 2019.

<sup>22</sup> ADAM, John A. *Op. cit.*, p. 196–207.

como se indica en <sup>23</sup>.

Las ecuaciones de Navier-Stokes están conformadas por un sistema de  $n + 1$  ecuaciones en derivadas parciales que describen el movimiento de un fluido viscoso e incompresible, donde  $n$  corresponde a la dimensión del dominio en el que ocurre la dinámica. Los casos físicamente relevantes son  $n = 2$  y  $n = 3$ . Estas ecuaciones reciben su nombre en honor a Louis M. H. Navier (1785–1836) y George Stokes (1819–1903).

En forma vectorial, el sistema de Navier–Stokes se expresa como

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{V} = f, & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{V}(x, t) = (v_1(x, t), \dots, v_n(x, t))$  y  $p = p(x, t)$  son las incógnitas que deben determinarse: el campo de velocidades y la presión mecánica del fluido, respectivamente, en el instante  $t > 0$  y en la posición  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 2$ . La función  $f$  denota un campo dado de fuerzas externas y  $\mu$  representa la viscosidad dinámica del fluido. Sin pérdida de generalidad, se asume que la densidad del fluido es constante e igual a 1. En el sistema (2.1), el término  $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$  se denomina término convectivo o de transporte y sus componentes se definen por

$$((\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V})_i = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \text{para } i \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.2)$$

El sistema (2.1) se complementa con condiciones iniciales en  $t = 0$  y condiciones de frontera. En particular, comúnmente se consideran condiciones de Dirichlet  $\mathbf{V} = 0$  sobre la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .

En dominios tridimensionales, considerando las definiciones en coordenadas cartesianas de los operadores gradiente (Definición 1.5), laplaciano (Definición 1.7) y divergencia (Definición 1.6), así como la descomposición de los componentes del término convectivo (Ecuación 2.2), el sistema (2.1) puede expresarse en su forma extendida en coordenadas cartesianas:

---

<sup>23</sup> *Ibid.*, p. 196–207.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial t} + \left( v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_1} - \mu \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right) &= f_1, \\
\frac{\partial v_2}{\partial t} + \left( v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_2} - \mu \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right) &= f_2, \\
\frac{\partial v_3}{\partial t} + \left( v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_3} - \mu \left( \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right) &= f_3, \\
\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

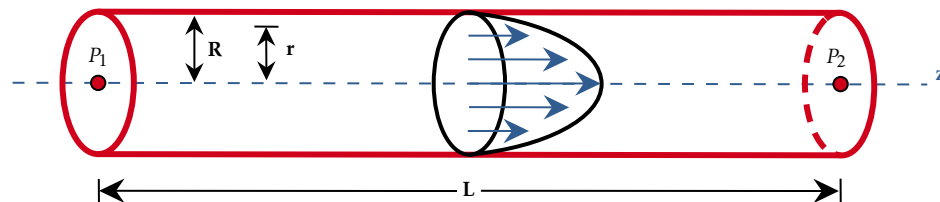
donde  $v_1, v_2, v_3$  denotan las componentes del campo de velocidad, en función de las coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ , mientras que  $(f_1, f_2, f_3)$  son las componentes del campo de fuerzas externas  $f$ .

Las ecuaciones de Navier–Stokes constituyen uno de los pilares fundamentales de la mecánica de fluidos, ya que permiten describir matemáticamente fenómenos de transporte de masa y energía, flujos en conductos, la dinámica atmosférica y la circulación sanguínea, entre muchos otros. Su importancia trasciende el ámbito aplicado: la existencia y suavidad de soluciones globales en el caso tridimensional forma parte de los **Problemas del Milenio** propuestos por el Clay Mathematics Institute, uno de los mayores desafíos abiertos en la matemática contemporánea (véase <sup>24</sup>).

## 2.2. FLUJO DE POISEUILLE EN FLUIDOS NEWTONIANOS

En esta sección comenzamos describiendo el flujo de un fluido, como la sangre, a través de un tubo cilíndrico circular uniforme de radio  $R$  y longitud  $L$ , análogo a un vaso sanguíneo de gran diámetro, tal como se ilustra en la Figura 7.

**Figura 7:** Flujo de un fluido en una tubería cilíndrica



**Fuente:** Elaboración propia

<sup>24</sup> CLAY MATHEMATICS INSTITUTE. *Navier–Stokes Equation (Millennium Prize Problem)*. Disponible en: <https://www.claymath.org/millennium/navier-stokes-equation/>. Accedido el 26 de agosto de 2025.

Se asume que el flujo es laminar (Definición 1.1), incompresible y estacionario (Definición 1.3). Asimismo, se considera que la presión depende únicamente de la coordenada axial  $z$ , es decir,  $p = p(z)$ , por lo que no presenta variaciones en las direcciones radial ni angular. En consecuencia, la presión disminuye a lo largo de la tubería en la dirección positiva del eje  $z$ , como se ilustra en la Figura 7; es decir, si se designa  $P_1$  como la presión en la entrada del tubo y  $P_2$  como la presión en la salida, se cumple que  $P_1 > P_2$ . Adicionalmente, se asume que la velocidad no depende de las coordenadas  $\theta$  ni  $z$ , sino únicamente de la coordenada radial  $r$ .

El sistema de ecuaciones presentado en (2.3) es general y aplicable a cualquier dominio tridimensional. Sin embargo, dado que el dominio considerado tiene una geometría cilíndrica, resulta adecuado emplear coordenadas cilíndricas para llevar a cabo un análisis cualitativo más apropiado del sistema. Para efectuar el cambio de coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2, x_3)$  a coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , dado por la ecuación (1.6), el campo de velocidad, inicialmente expresado en términos de sus componentes cartesianas  $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ , se representa en coordenadas cilíndricas como  $\mathbf{V} = (v_r, v_\theta, v_z)$ . Para ello, se utilizan los vectores unitarios asociados al sistema de coordenadas cilíndricas, definidos en la ecuación (1.7).

Las componentes del campo de velocidad en coordenadas cilíndricas están dadas por:

$$\begin{aligned} v_r &= \mathbf{V} \cdot \hat{e}_r = (v_1, v_2, v_3) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) = v_1 \cos(\theta) + v_2 \sin(\theta) \\ v_\theta &= \mathbf{V} \cdot \hat{e}_\theta = (v_1, v_2, v_3) \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) = -v_1 \sin(\theta) + v_2 \cos(\theta) \\ v_z &= \mathbf{V} \cdot \hat{e}_z = (v_1, v_2, v_3) \cdot (0, 0, 1) = v_3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Es importante notar que los vectores unitarios  $\hat{e}_r$  y  $\hat{e}_\theta$  dependen de la variable angular  $\theta$ , mientras que  $\hat{e}_z$  es constante. En consecuencia, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta, \quad \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{e}_r, \quad \frac{\partial \hat{e}_z}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial \hat{e}_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \hat{e}_z}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

La derivada parcial temporal del campo de velocidad en coordenadas cilíndricas se expresa como:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \left( \frac{\partial v_r}{\partial t}, \frac{\partial v_\theta}{\partial t}, \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_r}{\partial t} \hat{e}_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial t} \hat{e}_\theta + \frac{\partial v_z}{\partial t} \hat{e}_z. \quad (2.6)$$

Por otra parte, utilizando la (Definición 1.5) del operador gradiente en coordenadas cilíndricas para una función escalar, se tiene que

$$\nabla p = \left( \frac{\partial p}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial p}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{e}_z. \quad (2.7)$$

Para el término convectivo  $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ , se considera que el operador  $(\mathbf{V} \cdot \nabla)$  en coordenadas cilíndricas, dado por:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.8)$$

y así, recordando que  $\mathbf{V} = (v_r, v_\theta, v_z) = v_r \hat{e}_r + v_\theta \hat{e}_\theta + v_z \hat{e}_z$ , se tiene que

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = (\mathbf{V} \cdot \nabla)(v_r \hat{e}_r) + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(v_\theta \hat{e}_\theta) + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(v_z \hat{e}_z). \quad (2.9)$$

Aplicando (2.8), las relaciones dadas en la ecuación (2.5) y las reglas de derivación correspondientes, se llega a que

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} \cdot \nabla)(v_r \hat{e}_r) &= v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \hat{e}_r + \frac{v_\theta v_r}{r} \hat{e}_\theta + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \hat{e}_r. \\ (\mathbf{V} \cdot \nabla)(v_\theta \hat{e}_\theta) &= v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \hat{e}_\theta + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \hat{e}_\theta - \frac{v_\theta^2}{r} \hat{e}_r + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \hat{e}_\theta. \\ (\mathbf{V} \cdot \nabla)(v_z \hat{e}_z) &= v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \hat{e}_z + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \hat{e}_z + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \hat{e}_z. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Por otro lado, el laplaciano del campo vectorial puede expresarse como

$$\Delta \mathbf{V} = \Delta v_r \hat{e}_r + \Delta v_\theta \hat{e}_\theta + \Delta v_z \hat{e}_z. \quad (2.11)$$

Al emplear la definición del operador laplaciano para funciones escalares en coordenadas cilíndricas (Definición 1.7), junto con las relaciones establecidas en la ecuación (2.5) y las reglas de derivación correspondientes, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Delta v_r \hat{e}_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) \hat{e}_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \hat{e}_r + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \hat{e}_r, \\
\Delta v_\theta \hat{e}_\theta &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) \hat{e}_\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \hat{e}_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \hat{e}_r + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \hat{e}_\theta, \\
\Delta v_z \hat{e}_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \hat{e}_z + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} \hat{e}_z + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \hat{e}_z.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Finalmente, agrupando los términos según los vectores unitarios  $\hat{e}_r$ ,  $\hat{e}_\theta$  y  $\hat{e}_z$ , y utilizando la definición de divergencia para un campo vectorial en coordenadas cilíndricas (Definición 1.6), el sistema (2.3) se expresa en dichas coordenadas como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \mu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) &= f_r, \\
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \left( v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
- \mu \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) &= f_\theta, \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + \left( v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) &= f_z, \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

siendo  $(f_r, f_\theta, f_z)$  las componentes de las fuerzas externas.

Al asumir que el flujo es laminar, el campo de velocidades  $\mathbf{V}(r, \theta, z, t) = (v_r, v_\theta, v_z)$  satisface que  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = 0$ ,  $v_z = v_z(r)$ . Adicionalmente, se considera que el flujo es estacionario, que no actúan fuerzas externas sobre el sistema y que la presión depende únicamente de la coordenada axial  $z$ . Bajo estas condiciones, el sistema (2.13) se reduce a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2.14}$$

Dado que la presión depende únicamente de la coordenada axial  $z$  y la velocidad depende únicamente de la coordenada radial  $r$ , el miembro izquierdo de la igualdad (2.14) depende solo de  $r$ , mientras que el miembro derecho depende únicamente de  $z$ . Para que dicha igualdad se cumpla para todo  $r$  y  $z$ , ambos lados de la ecuación (2.14) deben ser iguales a una constante. En particular, se concluye que  $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz}$  es constante. Denotando

simplemente  $v_z(r) = v(r)$ , con  $0 \leq r \leq R$ , la ecuación (2.14) se expresa en la forma

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv(r)}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (2.15)$$

Multiplicando la ecuación (2.15) por  $r$ , integrando respecto a  $r$  y dividiendo posteriormente ambos lados entre  $r$ , se obtiene que

$$\frac{dv(r)}{dr} = \frac{r}{2\mu} \frac{dp}{dz} + \frac{C_1}{r}. \quad (2.16)$$

Integrando nuevamente con respecto a  $r$ , se llega a:

$$v(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} + C_1 \ln(r) + C_2, \quad (2.17)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración que se determinan a partir de las siguientes condiciones de frontera:

- Para evitar una singularidad en  $r = 0$ , se requiere que  $C_1 = 0$ .
- En la pared de la tubería ( $r = R$ ), la condición de no deslizamiento impone que la velocidad en este punto sea nula:  $v(R) = 0$ .

Sustituyendo ( $r = R$ ) en la ecuación (2.17) con  $C_1 = 0$ , se obtiene que

$$C_2 = -\frac{dp}{dz} \frac{R^2}{4\mu}. \quad (2.18)$$

En consecuencia, la solución general para  $v(r)$  es

$$v(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} - \frac{R^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (2.19)$$

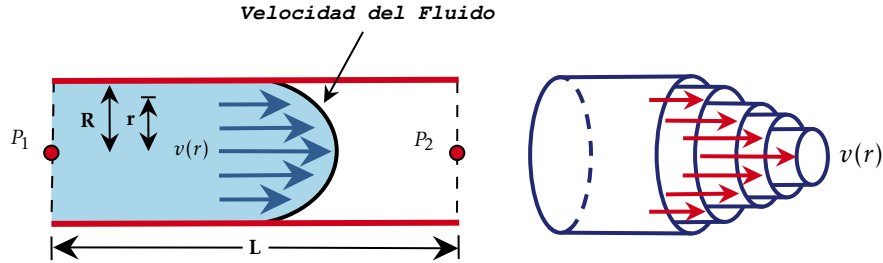
Al factorizar la expresión, el perfil parabólico de la velocidad se expresa como:

$$v(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2). \quad (2.20)$$

Como se estableció anteriormente, el gradiente de presión es constante. De este modo,

el perfil de velocidad resultante es parabólico, como se muestra en la Figura 8. Este perfil indica que la velocidad es máxima en el centro de la tubería y disminuye hacia las paredes debido a la fricción entre el fluido y la superficie sólida, moviéndose en dirección opuesta al gradiente de presión.

**Figura 8:** Perfil de Velocidad



**Fuente:** Elaboración propia

## NÚMERO DE REYNOLDS

El número de Reynolds  $Re$ , introducido a finales del siglo XIX por Osborne Reynolds, es un parámetro adimensional que relaciona las fuerzas inerciales con las fuerzas viscosas, permitiendo determinar las características del flujo al distinguir entre regímenes laminares y turbulentos. Este número se calcula teniendo en cuenta la velocidad media del fluido  $v_a$  (medida en  $[m/s]$ ), la densidad del fluido  $\rho$  (en  $[kg/m^3]$ ), la viscosidad dinámica  $\mu$  (en  $[N \cdot s/m^2]$ ) y el diámetro del conducto  $D = 2R$  por el que fluye el fluido. Este número se define como:

$$Re = \frac{2R\rho v_a}{\mu} \propto v_a. \quad (2.21)$$

En esta expresión, el símbolo  $\propto$  indica que el número de Reynolds es proporcional a la velocidad media. En el caso del flujo de Poiseuille en un tubo cilíndrico, dicha velocidad media  $v_a$  está relacionada con el gradiente de presión  $\frac{dp}{dz}$ . La velocidad media es el promedio de la velocidad  $v(r)$  en función de la distancia radial  $r$  a lo largo de una sección transversal del tubo. Se expresa como:

$$v_a(R) = \frac{1}{A} \int_0^R 2\pi r v(r) dr, \quad (2.22)$$

donde  $A = \pi R^2$  es el área de la sección transversal del tubo.

Sustituyendo la expresión (2.20) para  $v(r)$  en la integral (2.22), se tiene:

$$v_a(R) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi \left( -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2) \right) r dr. \quad (2.23)$$

Simplificando la integral y extrayendo las constantes fuera de ella, se obtiene la expresión:

$$v_a(R) = -\frac{1}{2\mu R^2} \frac{dp}{dz} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = -\frac{1}{2\mu R^2} \frac{dp}{dz} \left( R^2 \int_0^R r dr - \int_0^R r^3 dr \right). \quad (2.24)$$

Al resolver las integrales y simplificar, se obtiene la expresión para la velocidad media:

$$v_a(R) = -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (2.25)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación del número de Reynolds (2.21), se llega a:

$$Re = \frac{2R\rho}{\mu} \left( -\frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dz} \right) = -\frac{\rho R^3}{4\mu^2} \frac{dp}{dz}. \quad (2.26)$$

Dado que se asume que la densidad del fluido es constante e igual a 1, el número de Reynolds para un flujo de Poiseuille es:

$$Re = -\frac{R^3}{4\mu^2} \frac{dp}{dz}. \quad (2.27)$$

Es importante destacar que el signo negativo no afecta el valor del número de Reynolds, ya que simplemente indica la dirección del flujo, sin alterar la magnitud.

Como  $\frac{dp}{dz}$  es constante, se puede expresar  $\frac{dp}{dz}$  en términos de la diferencia de presión  $\Delta P$  a lo largo de la longitud  $L$  de la tubería, es decir,  $\frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta P}{L}$ . Así, el número de Reynolds para un flujo de Poiseuille, puede expresarse como:

$$Re = \frac{R^3}{4\mu^2} \frac{\Delta P}{L}. \quad (2.28)$$

En el flujo de Poiseuille, la transición entre flujo laminar y turbulento depende del valor del número de Reynolds. Para flujos en tubos cilíndricos, se establece la siguiente clasificación:

- Si  $Re < 2000$ , el **flujo es laminar**.
- Si  $2000 < Re < 4000$ , el flujo se encuentra en una **zona de transición**, donde puede ser inestable y experimentar cambios entre flujo laminar y turbulento.
- Si  $Re > 4000$ , el **flujo es turbulento**.

De acuerdo con la revisión presentada en el artículo <sup>25</sup>, el número de Reynolds ha trascendido su formulación clásica para convertirse en una herramienta central en aplicaciones contemporáneas que abarcan desde la ingeniería aeronáutica hasta la bioingeniería. En el ámbito biomédico, su importancia es particularmente notable debido a la naturaleza compleja y multiescala de los flujos biológicos.

En dispositivos microfluídicos, valores mayores de ( $Re$ ) favorecen una mejor mezcla y permiten reducir el ancho de los canales <sup>26</sup>. En hemodinámica cerebral, el incremento del número de Reynolds se asocia con mayores caídas de presión y mayores esfuerzos cortantes en la pared vascular <sup>27</sup>. Asimismo, ( $Re$ ) resulta esencial para reconciliar discrepancias entre mediciones Doppler y mediciones con catéter en casos de estenosis aórtica <sup>28, 29</sup>. En bombas centrífugas de sangre de pequeño tamaño, los flujos a bajo ( $Re$ ) se desvían de las leyes clásicas de afinidad, lo que exige considerar explícitamente este parámetro para un escalamiento adecuado <sup>30</sup>.

También se ha reportado que ( $Re$ ) influye en la adhesión celular durante procesos de bioincrustación, fenómeno que consiste en la acumulación y adhesión de microorganismos, células o esporas sobre superficies en contacto con un fluido. En este contexto, se observa

<sup>25</sup> SALDANA, J. et al. *The Reynolds Number: A Journey from Its Origin to Modern Applications*. En: *Fluids*. 9.299 (2024).

<sup>26</sup> ABDUL HAMID, I. S. L. *Reynolds Number Effects in Designing a Micromixer for Biomems Application*. Master's Thesis. Johor, Malaysia: Universiti Tun Hussein Onn Malaysia, 2008.

<sup>27</sup> YAN, S. R. et al. *Analysis and Management of Laminar Blood Flow inside a Cerebral Blood Vessel Using a Finite Volume Software Program for Biomedical Engineering*. En: *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 190 (2020), p. 105384.

<sup>28</sup> CAPE, E. G. et al. *Turbulent/Viscous Interactions Control Doppler/Catheter Pressure Discrepancies in Aortic Stenosis: The Role of the Reynolds Number*. En: *Circulation*. 94.11 (1996), p. 2975–2981.

<sup>29</sup> ADAMS, J. C. et al. *Potential Role of Reynolds Number in Resolving Doppler- and Catheter-Based Transvalvular Gradient Discrepancies in Aortic Stenosis*. En: *Journal of Heart Valve Disease*. 20.2 (2011), p. 159–164.

<sup>30</sup> DAY, S. W. et al. *Effect of Reynolds Number on Performance of a Small Centrifugal Pump*. En: *Proceedings of the ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference*. Honolulu, HI, USA: ASME, 2003, p. 1893–1899.

una correlación lineal negativa entre la densidad de adhesión y el producto del índice de rugosidad diseñado y  $(Re)$  <sup>31</sup>, lo que indica que al aumentar dicho producto la cantidad de células adheridas tiende a disminuir.

En modelos de arterias estenosadas, es decir, arterias que presentan un estrechamiento anormal de su sección interna o canal de flujo debido a la acumulación de placa u otras alteraciones, se ha observado que el efecto de la excentricidad de la lesión, entendida como la desviación de la obstrucción respecto al eje central de la arteria, sobre el comportamiento hemodinámico del flujo disminuye a medida que aumenta  $(Re)$  <sup>32</sup>. Por otro lado, en el estudio de aneurismas intracraneales, tanto el número de Reynolds como el número de Womersley ( $Wo$ ), desempeñan un papel importante en la propagación de anillos vorticosos dentro del aneurisma, encontrándose que la posición de estos anillos es aproximadamente proporcional a la relación  $Re/(Wo)^2$ , <sup>33</sup>. Cabe mencionar que el número de Womersley es un parámetro adimensional que relaciona las fuerzas inerciales no estacionarias con las fuerzas viscosas en flujos pulsátiles, es decir, flujos en los que la velocidad y el caudal varían periódicamente en el tiempo, y es definido como

$$Wo = R \sqrt{\frac{\omega \rho}{\mu}},$$

donde  $R$  es el radio característico del vaso,  $\omega$  la frecuencia angular del flujo pulsátil,  $\rho$  la densidad del fluido y  $\mu$  la viscosidad dinámica.

En conjunto, comprender la influencia del número de Reynolds resulta fundamental para el diseño y optimización de dispositivos biomédicos, así como para el análisis y la predicción del comportamiento de la dinámica de fluidos en sistemas biológicos <sup>34</sup>, <sup>35</sup>.

---

<sup>31</sup> MAGIN, C. M. et al. *Engineered Antifouling Microtopographies: The Role of Reynolds Number in a Model That Predicts Attachment of Zoospores of Ulva and Cells of Cobetia Marina*. En: *Biofouling*. 26.7 (2010), p. 719–727.

<sup>32</sup> JAVADZADEGAN, A. et al. *Correlation between Reynolds Number and Eccentricity Effect in Stenosed Artery Models*. En: *Technology and Health Care*. 21.4 (2013), p. 357–367.

<sup>33</sup> ASGHARZADEH, H. y BORAZJANI, I. *Effects of Reynolds and Womersley Numbers on the Hemodynamics of Intracranial Aneurysms*. En: *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. (2016), p. 7412926.

<sup>34</sup> SHINBROT, Troy. *Biomedical Fluid Dynamics*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2019.

<sup>35</sup> NACHTIGALL, Werner. *Some Aspects of Reynolds Number Effects in Animals*. En: *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 24 (2001), p. 1401–1408.

### 2.3. CAUDAL (O FLUJO VOLUMÉTRICO) Y DIFERENCIA DE PRESIÓN EN FLUIDOS NEWTONIANOS

El término caudal o flujo volumétrico corresponde al flujo por unidad de tiempo que atraviesa una sección transversal de un conducto (como se muestra en la Figura 7). Este flujo está dado por la siguiente integral <sup>36</sup>, <sup>37</sup>:

$$Q(R) = \int_0^R 2\pi r v(r) dr, \quad (2.29)$$

donde  $Q$  se expresa en unidades de volumen por unidad de tiempo. Al sustituir  $v(r)$  en la expresión anterior, se obtiene que:

$$Q(R) = \int_0^R 2\pi \left( -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2) \right) r dr. \quad (2.30)$$

Resolviendo la integral se deduce que:

$$Q(R) = -\frac{2\pi}{4\mu} \frac{dp}{dz} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = -\frac{2\pi}{4\mu} \frac{dp}{dz} \left( R^2 \int_0^R r dr - \int_0^R r^3 dr \right) = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (2.31)$$

Este resultado es conocido como la Ley de Poiseuille. Como se estableció previamente, el gradiente de presión  $\frac{dp}{dz}$  es constante y negativo a lo largo de la tubería. Por tanto, puede escribirse en función de la diferencia de presión  $\Delta P$  a lo largo de la longitud  $L$  de la tubería, es decir,  $\frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta P}{L}$ . En consecuencia, el caudal volumétrico o la cantidad de fluido que atraviesa una sección transversal por unidad de tiempo, puede expresarse como:

$$Q(R) = \frac{\pi \Delta P R^4}{8\mu L} \propto R^4 L^{-1}. \quad (2.32)$$

En esta expresión, el símbolo  $\propto$  indica que el caudal volumétrico es directamente proporcional a la cuarta potencia del radio de la tubería y de manera inversamente proporcional a la longitud de la tubería. Como se menciona en <sup>38</sup>, esta dependencia de  $R^4$  en la fórmu-

<sup>36</sup> ADAM, John A. *Op. cit.*, p. 196–207.

<sup>37</sup> CHORIN, Alexandre J. y MARSDEN, Jerrold E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. 3. ed. Vol. 4. New York: Springer-Verlag, 1993.

<sup>38</sup> ADAM, John A. *Op. cit.*, p. 196–207.

la tiene implicaciones importantes para enfermedades vasculares. Por ejemplo, reducir a la mitad el radio de un tubo resulta en un flujo volumétrico de un dieciséisavo del valor original. Incluso una reducción del 16% en el radio disminuirá a la mitad el caudal volumétrico.

El recíproco de  $Q$  tiene unidades de tiempo/volumen y puede tomarse como una medida de la resistencia a la fricción. Dada una caída de presión constante, la resistencia a la fricción es directamente proporcional a la longitud de la tubería.

Como se menciona en ADAM, John A: *Blood vessel branching: beyond the standard calculus problem*. En: *Mathematics Magazine* 84.3 (2011), págs. 196-207, la Ley de Poiseuille es análoga a la Ley de Ohm en circuitos eléctricos. En ese contexto, esta ley establece que el voltaje  $E$  en un circuito es igual al producto de la corriente  $I$  y la resistencia  $R$ , es decir,  $E = IR$ . En el caso del flujo de fluidos, la caída de presión  $\Delta P$  es análoga al voltaje, y el flujo volumétrico  $Q$  equivale a la corriente. De esta manera, la resistencia hidráulica  $R_h$  se puede expresar como  $R_h = \frac{\Delta P}{Q}$ . Al aplicar la Ley de Poiseuille (2.32), se puede despejar y obtener la siguiente relación:

$$R_h = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{8\mu L}{\pi R^4} \propto R^{-4}L. \quad (2.33)$$

En esta expresión, el símbolo  $\propto$  significa que la resistencia hidráulica es directamente proporcional a la longitud de la tubería, y de manera inversamente proporcional al radio de la tubería elevado a la cuarta potencia. Es decir, si se aumenta la longitud del sistema, la resistencia aumenta, y si se aumenta el radio de la tubería, la resistencia disminuye considerablemente.

La resistencia al flujo de un fluido a través de una tubería o un sistema de tuberías mide la cantidad de trabajo requerido para transportar el fluido a lo largo del sistema. Cuanto menor sea la resistencia hidráulica, mayor será la eficiencia del sistema.

## DIFERENCIA DE PRESIÓN

La diferencia de presión a lo largo de una tubería puede deducirse a partir de la Ley de Poiseuille (2.31). Al despejar el gradiente de presión  $\frac{dp}{dz}$  de dicha expresión, se tiene:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{8\mu Q}{\pi R^4}. \quad (2.34)$$

Dado que el gradiente de presión en la dirección axial se define como  $\frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta P}{L}$ , se obtiene que la diferencia de presión a lo largo de la tubería está dada por:

$$\Delta P = \frac{8L\mu Q}{\pi R^4}. \quad (2.35)$$

Para determinar la distribución de presión en cualquier punto a lo largo del eje axial  $z$ , se integra la expresión del gradiente de presión (2.34) con respecto a  $z$ , lo que conduce a:

$$p(z) = -\frac{8\mu Q}{\pi R^4}z + C, \quad (2.36)$$

donde  $C$  es la constante de integración. Esta constante se determina a partir de la condición de frontera de que, cuando  $z = 0$ , la presión es  $P_0$ . En consecuencia, se obtiene  $C = P_0$ . Finalmente, la ecuación para la presión en cualquier punto  $z$  queda expresada como:

$$p(z) = P_0 - \frac{8\mu Q}{\pi R^4}z. \quad (2.37)$$

La variación de la presión a lo largo de la tubería es lineal y puede representarse mediante una recta de pendiente negativa. Esta pendiente indica que la presión disminuye progresivamente en la dirección del flujo. En particular, la presión alcanza su valor máximo en  $z = 0$ , correspondiente a la entrada de la tubería, y su valor mínimo en  $z = L$ , que corresponde a la salida.

## 2.4. ANÁLISIS DEL ÁNGULO ÓPTIMO DE RAMIFICACIÓN Y BIFURCACIÓN EN FLUIDOS NEWTONIANOS

En esta sección se analizarán los ángulos óptimos de ramificación y bifurcación en sistemas de fluidos newtonianos, con un enfoque particular en el estudio del sistema vascular, específicamente en los vasos sanguíneos. Como se mencionó anteriormente, el ángulo óptimo se define como aquel que minimiza el gasto energético asociado al flujo sanguíneo dentro del sistema vascular. En este contexto, la ramificación y bifurcación de estos va-

Los vasos desempeñan un papel crucial en la fisiología, ya que son responsables de regular la distribución del flujo sanguíneo a lo largo de las distintas ramas del sistema vascular.

Tal como se expuso en la introducción de este capítulo, la ramificación consiste en la división de un conducto principal en ramas de menor tamaño. Aunque puede presentarse en dos ramas, se caracteriza porque el vaso que se desprende posee un radio considerablemente menor que la continuación del conducto principal. En estos casos, las ramas son lo suficientemente estrechas como para no reducir de manera significativa el flujo en el vaso principal. Por otro lado, cuando esta división origina exactamente dos ramas, se denomina bifurcación. En esta situación, ambas ramas pueden tener radios similares o incluso iguales, lo que implica una distribución del flujo más equilibrada. En primer lugar, se examinará el comportamiento de un vaso sanguíneo en términos de su ramificación, evaluando el ángulo óptimo en este proceso. Posteriormente, se profundizará en los factores que determinan el ángulo óptimo de bifurcación, proporcionando una visión integral sobre los aspectos que influyen en la eficiencia del flujo sanguíneo.

**2.4.1. Análisis del ángulo óptimo de ramificación.** Para llevar a cabo este análisis, se considera un sistema compuesto por un vaso sanguíneo principal, modelado como un conducto recto, del cual se ramifica un vaso sanguíneo más pequeño en comparación con el principal. La Figura 9 ilustra esta configuración básica: un vaso sanguíneo principal de radio  $r_1$ , del que emerge un vaso más estrecho de radio  $r_2$ , con  $r_2 < r_1$ , formando un ángulo  $\theta$  con respecto al eje del primero, denominado ángulo de ramificación. Como referencia, se establecen los puntos  $A, B$  y  $C$  fijos, con  $BC$  perpendicular a  $AC$ , y las distancias  $c = |AC|$  y  $b = |BC|$ . La elección del ángulo  $\theta$  determina la ubicación del punto  $O$  y las longitudes  $L_1 = |AO|$  y  $L_2 = |OB|$ .

Observando la Figura 9, la longitud  $L_1$  puede expresarse como  $L_1 = c - b \cot(\theta)$ , dado que la cotangente de un ángulo  $\theta$  se define como el cociente entre el cateto adyacente ( $|OC|$ ) y el cateto opuesto ( $b$ ). De esta forma, se establece la relación:

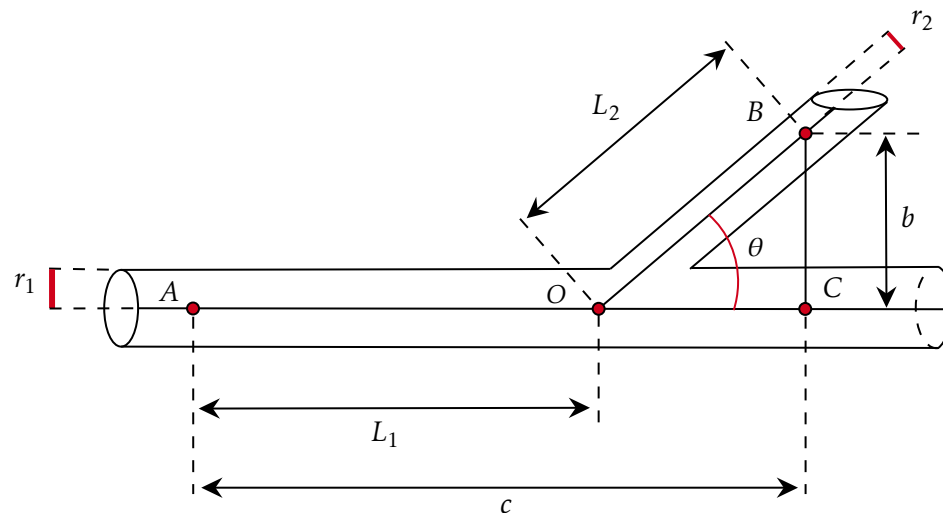
$$L_1 = c - b \left( \frac{|OC|}{b} \right) = c - |OC| = |AO|.$$

De manera similar, la longitud  $L_2$  se puede expresar mediante la relación  $L_2 = b \csc(\theta)$ ,

considerando que la cosecante de un ángulo  $\theta$  se define como el cociente entre la hipotenusa ( $|OB|$ ) y el cateto opuesto ( $b$ ). Por consiguiente, se obtiene la siguiente relación:

$$L_2 = b \left( \frac{|OB|}{b} \right) = |OB|.$$

**Figura 9:** Ramificación de un vaso sanguíneo desde una arteria



**Fuente:** Elaboración propia

Para analizar y determinar el ángulo óptimo de ramificación en el sistema representado en la Figura 9, el estudio se llevará a cabo a lo largo del trayecto de ramificación  $AOB$ , donde el efecto del ángulo  $\theta$  resulta más pronunciado sobre la configuración del flujo. Tal como se menciona en <sup>39</sup>, se asume que el efecto del ángulo  $\theta$  sobre la trayectoria  $AOC$  puede considerarse despreciable.

Además es fundamental considerar que, debido a que un organismo dispone de una cantidad limitada de energía metabólica, las estructuras que impliquen un menor gasto energético del sistema serán las más óptimas en condiciones similares. Según lo indicado en <sup>40</sup>, este gasto energético se descompone en dos componentes principales: el costo extrínseco y el costo intrínseco.

<sup>39</sup> Ibid., p. 196–207.

<sup>40</sup> ROSEN, Robert. *Op. cit.*

El costo extrínseco está relacionado con factores externos, como las condiciones ambientales que afectan la eficiencia del sistema, la viscosidad de la sangre, la presión sanguínea y la resistencia al flujo (por ejemplo, la presencia de obstrucciones o constricciones en los vasos). Estos factores externos aumentan el gasto energético de un organismo al exigirle respuestas adaptativas ante situaciones que no dependen de su estructura interna.

Por su parte, el costo intrínseco está relacionado con los gastos inherentes al sistema debido a sus características internas. Este tipo de costo se refiere a los inevitables gastos de construcción y mantenimiento de cualquier estructura anatómica específica del organismo.

El costo total de una estructura particular debe expresarse como la suma de los costos extrínsecos e intrínsecos, cada uno multiplicado por factores de conversión adecuados para llevarlos a una forma dimensional común.

A continuación, se procederá a analizar, en primer lugar, el costo extrínseco, seguido del costo intrínseco, y finalmente, el costo total de una estructura particular, con el fin de determinar el ángulo óptimo de ramificación.

## **MODELO DEL COSTO EXTRÍNSECO**

El primer enfoque que contribuirá a determinar el ángulo óptimo de ramificación, y por lo tanto la ubicación de un vaso más pequeño, consiste en minimizar la resistencia hidráulica a lo largo del trayecto de ramificación  $AOB$ . De este modo, el primer funcional de costo se basa en la resistencia total del sistema frente al flujo.

Para calcular la resistencia mínima total a lo largo de la trayectoria  $AOB$ , la función de costo de la resistencia total es la suma de las resistencias hidráulicas individuales: la resistencia del vaso principal y la del vaso más pequeño o rama.

Como se establece en la ecuación (2.33), la resistencia hidráulica, derivada de la Ley de Poiseuille, es proporcional a la longitud e inversamente proporcional a la cuarta potencia del radio para cada componente del sistema. Por lo tanto, podemos expresar la resistencia

total  $\mathcal{L}_1(\theta)$  como:

$$\mathcal{L}_1(\theta) = k \left[ \frac{L_1}{r_1^4} + \frac{L_2}{r_2^4} \right] = k \left[ \frac{c - b \cot(\theta)}{r_1^4} + \frac{b \csc(\theta)}{r_2^4} \right] = \frac{kc}{r_1^4} - \frac{kb}{r_1^4} \cot(\theta) + \frac{kb}{r_2^4} \csc(\theta). \quad (2.38)$$

La constante  $k$  es un factor de conversión positivo que se discutirá más adelante. Para minimizar la resistencia en función de  $\theta$  y encontrar su valor óptimo, se emplea un proceso común en optimización de sistemas para encontrar y verificar valores óptimos.

Como es sabido, una primera caracterización de puntos de mínimo se obtiene a través de la condición de optimalidad de primer orden, la cual establece que  $\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}_1(\theta) = 0$ , con lo cual,

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}_1(\theta) = 0 + \frac{kb}{r_1^4} \csc^2(\theta) - \frac{kb}{r_2^4} \csc(\theta) \cot(\theta) = \frac{kb}{r_2^4} \csc^2(\theta) \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4 - \frac{\cot(\theta)}{\csc(\theta)} \right] = 0. \quad (2.39)$$

La anterior expresión es equivalente a:

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}_1(\theta) = \frac{kb}{r_2^4} \csc^2(\theta) \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4 - \frac{\cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} \right] = \frac{kb}{r_2^4} \csc^2(\theta) \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4 - \cos(\theta) \right] = 0. \quad (2.40)$$

Para que se cumpla la condición de que  $\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}_1(\theta) = 0$  se analiza dos casos:

- Si  $\frac{kb}{r_2^4} \csc^2(\theta) = 0$ , entonces  $\csc^2(\theta) = 0$ , lo cual implica que  $\theta = \csc^{-1}(0)$ . Sin embargo  $\csc^{-1}(0)$  no está definida, por lo que este caso se excluye.
- Si  $\left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4 - \cos(\theta) = 0$ , entonces  $\cos(\theta) = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4$ , lo que lleva a la solución

$$\theta_m = \cos^{-1} \left( \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4 \right).$$

Para determinar si este valor es un minimizador válido, se debe analizar su rango y verificar que  $\cos^{-1} \left( \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4 \right)$  esté definido.

La función  $\cos^{-1} \left( \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4 \right)$  está definida solo si  $\left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4 \in [-1, 1]$ . Dado que  $r_2 < r_1$ , se cumple que  $\frac{r_2}{r_1} < 1$ , lo que implica que  $\left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4 < 1$ . Además, como  $r_1 > 0$  y  $r_2 > 0$ , se tiene que  $\left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4 \in (0, 1)$ . Por consiguiente, dado que  $(0, 1) \subseteq [-1, 1]$ , la función  $\cos^{-1} \left( \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^4 \right)$  se encuentra bien definida.

Se concluye que  $\theta_m$  es un posible minimizador. Además, dado que la función  $\cos^{-1}(x)$  es decreciente en el intervalo  $(0, 1)$  y se sabe que  $\cos^{-1}(1) = 0$  y  $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$ , se puede deducir que el rango de valores de  $\theta_m$  es  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

Para verificar que  $\theta_m$  es un punto de mínimo absoluto de  $\mathcal{L}_1(\theta)$  en  $(0, \frac{\pi}{2})$ , se emplea el criterio de la segunda derivada.

Definiendo  $I = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4$  y recordando la primera derivada de  $\mathcal{L}_1(\theta)$  dada en la ecuación (2.40), se sustituye  $I$  en dicha ecuación. Esto nos lleva a la siguiente expresión:

$$\frac{d}{d\theta}\mathcal{L}_1(\theta) = \frac{kb}{r_2^4}\csc^2(\theta)[I - \cos(\theta)]. \quad (2.41)$$

Ahora, derivando nuevamente respecto a  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2}\mathcal{L}_1(\theta) &= \frac{kb}{r_2^4}\frac{d}{d\theta}\left[\csc^2(\theta)(I - \cos(\theta))\right] \\ &= \frac{kb}{r_2^4}\left[\frac{d}{d\theta}(\csc^2(\theta))(I - \cos(\theta)) + (\csc^2(\theta))\frac{d}{d\theta}(I - \cos(\theta))\right] \\ &= \frac{kb}{r_2^4}\left[-2\csc^2(\theta)\cot(\theta)(I - \cos(\theta)) + \csc^2(\theta)\sen(\theta)\right]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Evaluando en el punto crítico  $\theta_m$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d^2}{d\theta_m^2}\mathcal{L}_1(\theta_m) = \frac{kb}{r_2^4}\left[-2\csc^2(\theta_m)\cot(\theta_m)(I - \cos(\theta_m)) + \csc^2(\theta_m)\sen(\theta_m)\right]. \quad (2.43)$$

Se sabe, por hipótesis  $\cos(\theta_m) = I$ , lo que implica que  $I - \cos(\theta_m) = 0$ . En consecuencia, la expresión (2.43) se reduce a:

$$\frac{d^2}{d\theta_m^2}\mathcal{L}_1(\theta_m) = \frac{kb}{r_2^4}\left[\csc^2(\theta_m)\sen(\theta_m)\right]. \quad (2.44)$$

Dado que  $k > 0$ ,  $b > 0$ ,  $r_2^4 > 0$ ,  $\csc^2(\theta_m) > 0$  y  $\sen(\theta_m) > 0$  para  $\theta_m \in (0, \frac{\pi}{2})$ , se concluye que:

$$\frac{d^2}{d\theta_m^2}\mathcal{L}_1(\theta_m) > 0.$$

En consecuencia, según el criterio de la segunda derivada, se puede afirmar que  $\theta_m$  representa un mínimo absoluto de la función  $\mathcal{L}_1(\theta)$  en  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

Para evaluar la validez del modelo propuesto, se sustituyen valores específicos para los radios relativos. En particular, se asume  $r_2 = \alpha r_1$ , con  $\alpha \in (0, 1)$ . Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 1.

**Tabla 1:** Ángulo óptimo de ramificación  $\theta_m$  en función del parámetro relativo  $\alpha$

$\alpha$	$r_2 = \alpha r_1$	$\theta_m$
0.3	$0.3r_1$	$89^\circ$
0.5	$0.5r_1$	$86^\circ$
0.7	$0.7r_1$	$76^\circ$
0.8	$0.8r_1$	$66^\circ$
0.9	$0.9r_1$	$48^\circ$

**Fuente:** Elaboración propia

Obsérvese que varios de los resultados obtenidos corresponden a ángulos cercanos a  $90^\circ$ , es decir, una ramificación casi perpendicular al vaso principal. Una predicción de este tipo resulta particularmente pronunciada para un sistema biológico.

Estos resultados sugieren que el modelo basado únicamente en el costo extrínseco, cuyo funcional de costo solo tiene en cuenta la resistencia al flujo sanguíneo a lo largo de la trayectoria  $AOB$ , puede resultar insuficiente para describir de manera realista el ángulo óptimo de ramificación.

En efecto, en un sistema biológico real el gasto energético no depende exclusivamente de la resistencia al flujo, sino también del costo asociado al mantenimiento de la estructura vascular, como se mencionó anteriormente.

Por esta razón, a continuación se introduce el modelo del costo intrínseco, el cual tiene en cuenta el costo de mantenimiento del sistema.

## MODELO DEL COSTO INTRÍNSECO

Además de minimizar la resistencia total del flujo, se presenta un segundo enfoque que

también contribuirá a determinar el ángulo óptimo de ramificación. Este enfoque consiste en minimizar el costo de mantenimiento de la estructura a lo largo del trayecto de ramificación  $AOB$ . Como se menciona en <sup>41</sup> y en <sup>42</sup>, el costo de mantenimiento debe ser proporcional al volumen del sistema. El volumen a lo largo del camino  $AOB$  se expresa como:

$$\mathcal{L}_2(\theta) = K(L_1 r_1^2 + L_2 r_2^2). \quad (2.45)$$

Como se observa en la Figura 9, esta expresión resulta de la suma de los volúmenes de los cilindros formados por los tramos de  $A$  a  $O$  y de  $O$  a  $B$ . El primer cilindro tiene altura  $L_1$  y radio  $r_1$ , mientras que el segundo cilindro tiene altura  $L_2$  y radio  $r_2$ . La constante  $K$  representa otro factor de conversión positivo.

La ecuación (2.45) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_2(\theta) = K((c - b \cot(\theta))r_1^2 + b \csc(\theta)r_2^2) = Kcr_1^2 - Kbr_1^2 \cot(\theta) + Kb \csc(\theta)r_2^2. \quad (2.46)$$

Para minimizar el costo de mantenimiento en función de  $\theta$  y encontrar su valor óptimo, se emplea un proceso similar al caso anterior, determinando las condiciones de optimalidad. Partiendo de la condición de la primera derivada:

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}_2(\theta) = 0 + Kbr_1^2 \csc^2(\theta) - Kbr_2^2 \csc(\theta) \cot(\theta) = Kbr_2^2 \csc^2(\theta) \left[ \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \frac{\cot(\theta)}{\csc(\theta)} \right] = 0. \quad (2.47)$$

Es decir,

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}_2(\theta) = Kbr_2^2 \csc^2(\theta) \left[ \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \frac{\cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} \right] = Kbr_2^2 \csc^2(\theta) \left[ \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 - \cos(\theta) \right] = 0. \quad (2.48)$$

Para que se verifique la condición  $\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}_2(\theta) = 0$  se deben considerar dos posibles casos:

- Si  $Kbr_2^2 \csc^2(\theta) = 0$ , entonces  $\csc^2(\theta) = 0$ , lo cual implica que  $\theta = \csc^{-1}(0)$ . Sin embargo,  $\csc^{-1}(0)$  no está definida, por lo que este caso se excluye.

<sup>41</sup> ADAM, John A. *Op. cit.*, p. 196–207.

<sup>42</sup> ROSEN, Robert. *Op. cit.*

- Si  $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - \cos(\theta) = 0$ , entonces  $\cos(\theta) = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ , lo que lleva a:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right).$$

Para determinar si este valor es un minimizador válido se debe verificar que  $\cos^{-1}\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right)$  esté definido.

La función  $\cos^{-1}\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right)$  está definida solo si  $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \in [-1, 1]$ . Dado que  $r_2 < r_1$  y  $r_1, r_2 > 0$  se tiene que  $\frac{r_1}{r_2} > 1$ , lo que implica que  $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 > 1$ . Como resultado  $\cos^{-1}\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right)$  no está definida, lo que lleva a la exclusión de este caso.

En consecuencia, este modelo no admite de un minimizador que permita su optimización dentro del dominio considerado. Desde el punto de vista del modelo, esto sugiere que el costo intrínseco, considerado de manera aislada, no impone una configuración geométrica óptima para la ramificación vascular.

Este resultado refuerza la idea de que el comportamiento del sistema vascular debe modelarse considerando simultáneamente los distintos componentes del gasto energético. Por esta razón, a continuación se introduce un funcional de costo total que combina el costo extrínseco, asociado a la resistencia al flujo sanguíneo, con el costo intrínseco relacionado con el mantenimiento de la estructura vascular.

## COSTO TOTAL DE LA ESTRUCTURA AOB

Como se mencionó previamente, el costo total de una estructura debe expresarse como la suma de los costos extrínsecos e intrínsecos. En este sentido, considerando la función de costo (2.38) asociada al costo extrínseco y la función de costo (2.45) relacionada con el costo intrínseco, el costo total de la trayectoria AOB, puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta) &= \mathcal{L}_1(\theta) + \mathcal{L}_2(\theta) = k \left[ \frac{L_1}{r_1^4} + \frac{L_2}{r_2^4} \right] + K(L_1 r_1^2 + L_2 r_2^2) \\ &= L_1 \left( \frac{k}{r_1^4} + K r_1^2 \right) + L_2 \left( \frac{k}{r_2^4} + K r_2^2 \right).\end{aligned}\tag{2.49}$$

Se define ahora  $A_1 = \left(\frac{k}{r_1^4} + Kr_1^2\right)$  y  $A_2 = \left(\frac{k}{r_2^4} + Kr_2^2\right)$ . Así, la función de costo se expresa como:

$$\mathcal{L}(\theta) = L_1A_1 + L_2A_2 = A_1(c - b \cot(\theta)) + A_2b \csc(\theta) = A_1c - A_1b \cot(\theta) + A_2b \csc(\theta). \quad (2.50)$$

Siguiendo un enfoque similar al de los modelos anteriores, se comienza verificando las condiciones de optimalidad de primer orden, calculando la primera derivada de la función de costo, e igualando a cero:

$$\frac{d}{d\theta}\mathcal{L}(\theta) = 0 + bA_1 \csc^2(\theta) - bA_2 \csc(\theta) \cot(\theta) = bA_2 \csc^2(\theta) \left[ \frac{A_1}{A_2} - \frac{\cot(\theta)}{\csc(\theta)} \right] = 0. \quad (2.51)$$

Equivalentemente,

$$\frac{d}{d\theta}\mathcal{L}(\theta) = bA_2 \csc^2(\theta) \left[ \frac{A_1}{A_2} - \frac{\cos(\theta)\sen(\theta)}{\sen(\theta)} \right] = bA_2 \csc^2(\theta) \left[ \frac{A_1}{A_2} - \cos(\theta) \right] = 0. \quad (2.52)$$

Para que se cumpla la condición de que  $\frac{d}{d\theta}\mathcal{L}(\theta) = 0$ , se analizan dos casos:

- Si  $bA_2 \csc^2(\theta) = 0$ , entonces  $\csc^2(\theta) = 0$ , lo cual implica que  $\theta = \csc^{-1}(0)$ . Sin embargo  $\csc^{-1}(0)$  no está definida, por lo que este caso se excluye.
- Si  $\frac{A_1}{A_2} - \cos(\theta) = 0$ , entonces  $\cos(\theta) = \frac{A_1}{A_2}$ , lo que lleva a:

$$\theta_R = \cos^{-1}\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \cos^{-1}\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4 \left(\frac{k + Kr_1^6}{k + Kr_2^6}\right)\right].$$

Para determinar si este valor representa un minimizador válido, es necesario analizar su rango y verificar que  $\cos^{-1}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$  esté definido. La función  $\cos^{-1}\left(\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4 \left(\frac{k + Kr_1^6}{k + Kr_2^6}\right)\right)$  está definida únicamente si:  $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4 \left(\frac{k + Kr_1^6}{k + Kr_2^6}\right) \in [-1, 1]$ . Dado que  $r_2 < r_1$  y  $r_1 > 0, r_2 > 0$ , se cumple que  $\frac{r_2}{r_1} < 1$ , lo que implica que  $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4 < 1$ . Además, como  $r_1 > r_2$  y  $k > 0, K > 0$ , se tiene que  $\frac{k + Kr_1^6}{k + Kr_2^6} > 1$ . En consecuencia, el producto

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4 \left(\frac{k + Kr_1^6}{k + Kr_2^6}\right),$$

será un valor mayor que 0 pero menor que 1 para valores relativos de  $k$  y  $K$ . En términos

generales, esto implica que  $k$  y  $K$  deben ser tales que

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4 \left(\frac{k + Kr_1^6}{k + Kr_2^6}\right) \in (0, 1).$$

Dado que  $(0, 1) \subseteq [-1, 1]$ , la función  $\cos^{-1}\left(\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4 \left(\frac{k + Kr_1^6}{k + Kr_2^6}\right)\right)$  está definida para valores relativos de  $k$  y  $K$ . En consecuencia, se concluye que  $\theta_R$  es un posible minimizador. Además, dado que la función  $\cos^{-1}(x)$  es decreciente en el intervalo  $(0, 1)$  y se sabe que  $\cos^{-1}(1) = 0$  y  $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$ , se puede deducir que el rango de valores de  $\theta_R$  es  $\theta_R \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Para verificar que  $\theta_R$  es un mínimo absoluto de  $\mathcal{L}(\theta)$ , se emplea el criterio de la segunda derivada.

Definiendo  $I = \frac{A_1}{A_2}$  y recordando la primera derivada de  $\mathcal{L}(\theta)$  dada en la Ecuación (2.52), se puede sustituir  $I$  en dicha ecuación, y obtener la siguiente expresión:

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}(\theta) = bA_2 \csc^2(\theta) [I - \cos(\theta)]. \quad (2.53)$$

Ahora, se deriva nuevamente respecto a  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} \mathcal{L}(\theta) &= bA_2 \frac{d}{d\theta} \left[ \csc^2(\theta) (I - \cos(\theta)) \right] \\ &= bA_2 \left[ \frac{d}{d\theta} (\csc^2(\theta)) (I - \cos(\theta)) + (\csc^2(\theta)) \frac{d}{d\theta} (I - \cos(\theta)) \right] \\ &= bA_2 \left[ -2 \csc^2(\theta) \cot(\theta) (I - \cos(\theta)) + \csc^2(\theta) \sen(\theta) \right]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Evaluando en el punto crítico  $\theta_R$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d^2}{d\theta_R^2} \mathcal{L}(\theta_R) = bA_2 \left[ -2 \csc^2(\theta_R) \cot(\theta_R) (I - \cos(\theta_R)) + \csc^2(\theta_R) \sen(\theta_R) \right]. \quad (2.55)$$

Se sabe, por hipótesis, que  $\cos(\theta_R) = I$ , lo que implica que  $I - \cos(\theta_R) = 0$ . En consecuencia, la expresión se simplifica a:

$$\frac{d^2}{d\theta_R^2} \mathcal{L}(\theta_R) = bA_2 \left[ \csc^2(\theta_R) \sen(\theta_R) \right]. \quad (2.56)$$

Dado que  $b > 0$ ,  $k > 0$ ,  $K > 0$ ,  $r_2 > 0$  se tiene que:  $A_2 = \frac{k}{r_2^4} + Kr_2^2 > 0$ . Además, dado que  $\csc^2(\theta_R) > 0$  y  $\sen(\theta_R) > 0$  para  $\theta_R \in (0, \frac{\pi}{2})$ , se concluye que:

$$\frac{d^2}{d\theta_R^2}\mathcal{L}(\theta_R) > 0.$$

En consecuencia, según el criterio de la segunda derivada, se puede afirmar que  $\theta_R$  representa un mínimo absoluto de la función  $\mathcal{L}(\theta)$ . Por tanto,  $\theta_R$  es el ángulo óptimo de ramificación, el cual minimiza el gasto energético a lo largo del trayecto  $AOB$ .

Para cualquier valor positivo de las constantes, el minimizador obtenido a partir del modelo total coincide con el minimizador del modelo extrínseco  $\theta_m$ , únicamente en dos situaciones límite:

- Si  $r_2 \rightarrow r_1$  se tiene que  $\theta_m = \theta_R$ , lo que indica que a medida que el radio del vaso más pequeño  $r_2$  se aproxima al radio del vaso principal  $r_1$ , ambos minimizadores se vuelven idénticos.
- Si  $r_2 \rightarrow 0$  cuando el radio del vaso más pequeño  $r_2$  tiende a cero, se cumple que  $\theta_m = \theta_R$ .

## LEYES EMPÍRICAS DE ROUX

Para verificar que un funcional de costo es un modelo adecuado y realista, Wilhelm Roux <sup>43</sup> propuso una serie de leyes empíricas sobre la ramificación vascular, las cuales han sido citadas por separado por Thompson <sup>44</sup>, Rosen <sup>45</sup> y Adam <sup>46</sup>. De forma parafraseada, dichas leyes establecen lo siguiente:

- 1). Si una arteria se bifurca en dos ramas iguales, ambas se desvían en ángulos iguales respecto al tallo principal ( $\theta = \phi$ ).

---

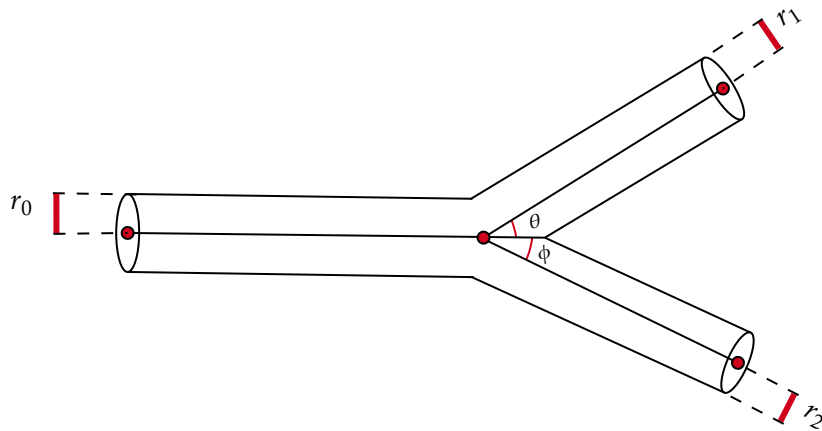
<sup>43</sup> ROUX, W. *Doctoral Thesis on the Bifurcation of Blood Vessels*. Tesis doctoral. Jena: University of Jena, 1878.

<sup>44</sup> THOMPSON, D'Arcy W. *On Growth and Form*. New York: Dover, 1992.

<sup>45</sup> ROSEN, Robert. *Op. cit.*

<sup>46</sup> ADAM, John A. *Op. cit.*, p. 196–207.

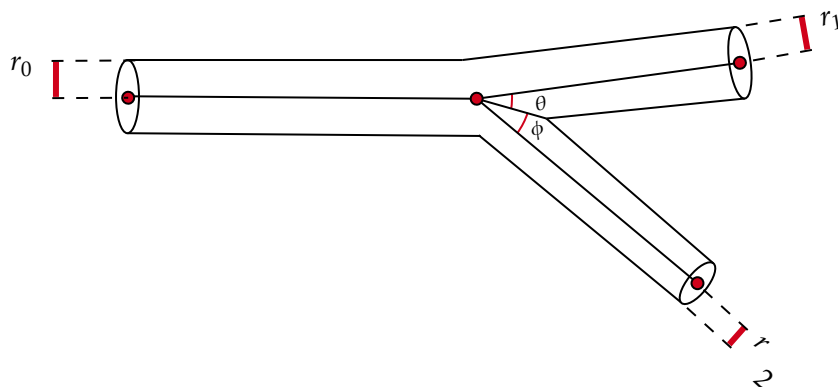
**Figura 10:** Primera Ley



**Fuente:** Elaboración propia

- 2). Si las ramas tienen radios diferentes, la rama más grande (es decir, la continuación de la arteria principal) forma un ángulo menor con la dirección original que la rama más pequeña ( $\theta < \phi$ ).

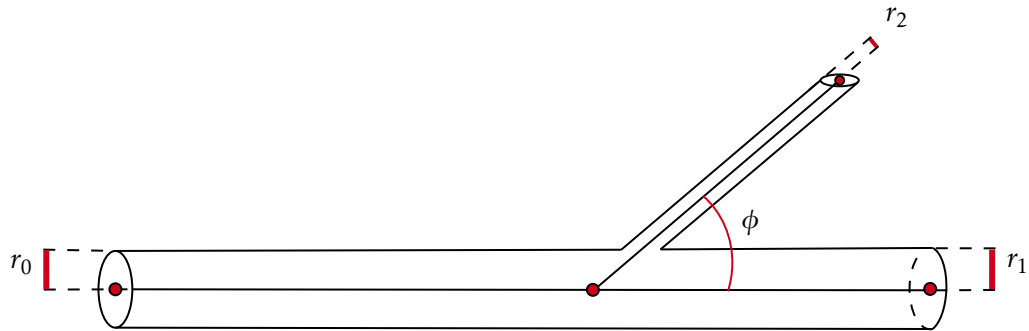
**Figura 11:** Segunda Ley



**Fuente:** Elaboración propia

- 3). Las ramas tan estrechas que no reducen significativamente el flujo en el tallo principal se ramifican en ángulos grandes (normalmente entre  $70^\circ$  y  $90^\circ$ ).

**Figura 12:** Tercera Ley



**Fuente:** Elaboración propia

Dado que el análisis realizado en la sección anterior se centra en la ramificación de los vasos, la única regla que se cumple estrictamente es la tercera. Esto se debe a que el ángulo óptimo de ramificación está dentro del rango  $(0, \frac{\pi}{2})$ , es decir, entre 0 y 90°.

Por otro lado, las dos primeras reglas se refieren específicamente a la bifurcación vascular. En este contexto, las derivaciones realizadas muestran coherencia con las observaciones empíricas dentro del alcance actual, lo que valida el modelo propuesto hasta cierto punto. Sin embargo, para abordar de manera adecuada el caso de bifurcación, es necesario extender el modelo. Este aspecto será estudiado y desarrollado en la Sección 2.4.2.

## ANÁLISIS DE UNIDADES

Como se menciona en <sup>47</sup>, una manera de interpretar la función combinada (2.49) es considerarla como una medida de la potencia disipada por el flujo. La potencia se define como el trabajo realizado por unidad de tiempo, que en este caso está asociado al flujo, y el trabajo tiene dimensiones de fuerza por distancia. Para mayor claridad, es necesario entender las unidades de los factores de conversión constantes  $k$  y  $K$ .

En el análisis dimensional, comúnmente se emplean las unidades fundamentales de masa, longitud y tiempo, denotadas respectivamente por  $[M]$ ,  $[L]$  y  $[T]$ . Estas unidades definen las dimensiones de las cantidades físicas y pueden considerarse análogas a los vectores

---

<sup>47</sup> *Ibíd.*, p. 196–207.

base de un espacio vectorial, como los vectores unitarios  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . De este modo, la dimensión de la fuerza, que es  $(masa) \times (longitud) \times (tiempo)^{-2}$ , se denota como  $[M][L][T]^{-2}$ . Por otro lado, la dimensión de la distancia, que corresponde a la  $(longitud)$ , se representa como  $[L]$ , mientras que la dimensión de la unidad de tiempo se representa como  $[T]^{-1}$ .

Al analizar la función del costo total (2.49), observamos que la primera expresión entre paréntesis tiene unidades  $[L]^{-3}$ . Sin embargo, según la definición previa, la potencia tiene unidades

$$([M][L][T]^{-2})[L][T]^{-1} = [M][L]^2[T]^{-3}.$$

Por lo tanto, para que el término en cuestión esté en unidades de potencia, el factor de conversión  $k$  debe tener unidades de:

$$[M][L]^5[T]^{-3}.$$

De manera similar, la segunda expresión entre paréntesis tiene unidades de  $[L]^3$ . Así que, para que esta expresión también sea coherente con las unidades de potencia, el factor de conversión  $K$  debe tener unidades de:

$$[M][L]^{-1}[T]^{-3}.$$

## ANÁLISIS DE UN VASO NO RAMIFICADO

A continuación, se analiza el costo total de un único vaso no ramificado de radio  $r$  y longitud  $L$  (similar al mostrado en la Figura 7) y, por lo tanto, la contribución de este vaso al costo total de un sistema. Tal como se mencionó previamente, el costo total de una estructura específica debe expresarse como la suma de los costos extrínsecos e intrínsecos. En consecuencia, el costo total del vaso se expresa como:

$$\mathcal{L}(r) = kLr^{-4} + KMr^2, \quad (2.57)$$

donde el primer sumando corresponde al costo extrínseco, que se puede interpretar como la potencia requerida para bombear sangre a través del vaso, y el segundo sumando corresponde al costo intrínseco, que se puede interpretar como la potencia necesaria para

mantener el volumen de sangre necesario para llenar el vaso. El primero es proporcional a la inversa de la cuarta potencia del radio y para optimizarlo, se requiere que el radio sea lo más grande posible. Por otro lado, el segundo es proporcional al cuadrado del radio y por lo tanto, el radio debe ser lo más pequeño posible.

Si se busca una configuración de ramificación o bifurcación óptima, se debe esperar que cada vaso individual sea también óptimo. Es decir, cada vaso debe minimizar su propio costo, dado por el funcional (2.57).

Para encontrar el radio que minimiza el funcional (2.57), aplicamos un proceso similar al utilizado en los modelos anteriores. Se parte de la condición de la primera derivada:

$$\frac{d}{dr}\mathcal{L}(r) = -4kLr^{-5} + 2KLr = 0. \quad (2.58)$$

Despejando  $r$ , se encuentra un posible minimizador:

$$r = \sqrt[6]{\frac{2k}{K}}. \quad (2.59)$$

Para verificar que  $r$  es un mínimo absoluto de  $\mathcal{L}(r)$ , se emplea el criterio de la segunda derivada. En este caso,

$$\frac{d^2}{dr^2}\mathcal{L}(r) = 20kLr^{-6} + 2KL, \quad (2.60)$$

y así, aplicando la igualdad (2.59), se deduce la siguiente expresión:

$$\frac{d^2}{dr^2}\mathcal{L}(r) = 20kL\left(\sqrt[6]{\frac{2k}{K}}\right)^{-6} + 2KL = \frac{20kKL}{2k} + 2KL = 12LK. \quad (2.61)$$

Dado que  $L > 0$  y  $K > 0$ , se concluye que  $\frac{d^2}{dr^2}\mathcal{L}(r) > 0$ , lo que implica que  $r$  es el único mínimo absoluto de la función  $\mathcal{L}(r)$ , y por ende, el radio óptimo del vaso.

A continuación, se analiza cómo se puede expresar el costo total de un vaso para el radio óptimo  $r$ . Dado que  $r$  está definido por la igualdad (2.59), despejando  $k$  se llega a:

$$k = \frac{Kr^6}{2}. \quad (2.62)$$

Sustituyendo  $k$  en la ecuación (2.57), se obtiene:

$$\mathcal{L}(r) = \frac{(Kr^6)r^{-4}L}{2} + KLr^2 = \frac{3Kr^2L}{2}. \quad (2.63)$$

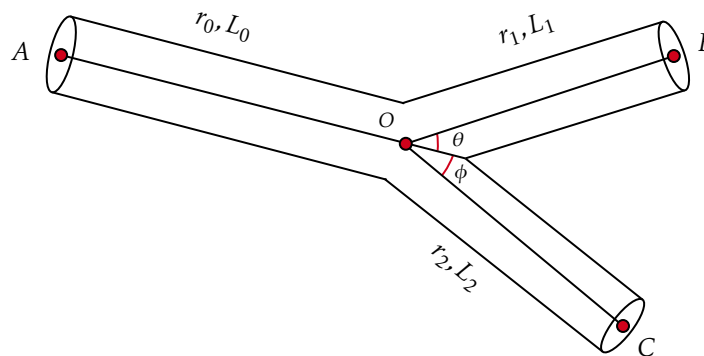
Finalmente, se define  $\beta = 3K$  como una constante, por lo que el costo total de un vaso para el valor óptimo  $r$  es:

$$\mathcal{L}(r) = \frac{\beta}{2}Lr^2. \quad (2.64)$$

**2.4.2. Análisis del ángulo óptimo de bifurcación.** Hasta ahora, las funciones de costo utilizadas han considerado únicamente un vaso más pequeño que se ramifica de uno más grande, y no una bifurcación propiamente dicha. A partir de ese modelo inicial, el análisis se extiende a una bifurcación de tres ramas, como se ilustra en la Figura 13. En este modelo, los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se consideran fijos, mientras que la ubicación del punto  $O$ , que se encuentra en el mismo plano, determina los ángulos óptimos de ramificación  $\phi$  y  $\theta$ .

Los radios y longitudes de los vasos  $AO$ ,  $OB$  y  $OC$  se denotan respectivamente por  $(r_0, L_0)$ ,  $(r_1, L_1)$  y  $(r_2, L_2)$ . Este planteamiento permite estudiar la optimización del ángulo de bifurcación, dado por  $\phi + \theta$ .

**Figura 13:** Bifurcación de un vaso sanguíneo: caso newtoniano



**Fuente:** Elaboración propia

Para determinar el ángulo óptimo de bifurcación, se analizan tres configuraciones distintas, representadas en las Figuras 14, 15 y 16. En cada una de ellas se considera un pequeño cambio en la ubicación del punto de bifurcación  $O$  a un nuevo punto  $O'$ . En cada caso,

la distancia de  $O$  a  $O'$  es  $\delta$ , la cual es pequeña en comparación con las distancias  $AO, OB$  y  $OC$ . Desde el punto de vista físico, el trabajo realizado por una fuerza constante  $F$  al desplazar un objeto una distancia  $d$  en su misma dirección se define como el producto  $W = Fd$ . Cuando  $F$  representa una fuerza variable continua que actúa sobre un intervalo  $[a, b]$ , el trabajo se da en términos de la integral definida

$$W = \int_a^b F(x)dx, \quad (2.65)$$

donde  $F(x)$  representa la fuerza en el punto  $x$ .

En este contexto, se interpreta que la fuerza asociada al desplazamiento del punto de bifurcación  $O$  puede considerarse como la suma de las fuerzas asociadas a cada vaso, donde la fuerza de cada vaso se interpreta como su costo total óptimo. En consecuencia, la fuerza total que actúa sobre el punto de bifurcación puede expresarse como

$$F(\tilde{\delta}, y(\tilde{\delta}), y'(\tilde{\delta})) = y(\tilde{\delta}) = \mathcal{L}_0(\tilde{\delta}) + \mathcal{L}_1(\tilde{\delta}) + \mathcal{L}_2(\tilde{\delta}). \quad (2.66)$$

Esta fuerza es variable y continua, ya que depende de la posición del punto  $O$ , descrita por una distancia  $\tilde{\delta} \in [0, \delta]$ . De acuerdo con la relación (2.64), los costos totales óptimos de cada vaso están dados por

$$\mathcal{L}_n(\tilde{\delta}) = \frac{\beta}{2} L_n(\tilde{\delta}) r_n^2, \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \quad (2.67)$$

donde  $L_n(\tilde{\delta})$  representa el cambio en la longitud del vaso  $n$  al modificar la posición del punto de bifurcación, y  $r_n$  su respectivo radio.

Dado que la distancia entre  $O$  y  $O'$  es  $\delta$ , y según la ecuación (2.65), el trabajo necesario para desplazar el punto de bifurcación en el intervalo  $[0, \delta]$ , se expresa como

$$W(y(\tilde{\delta})) = \int_0^\delta F(\tilde{\delta}, y(\tilde{\delta}), y'(\tilde{\delta})) d\tilde{\delta}. \quad (2.68)$$

Aplicando el Teorema 1.10 (Ecuaciones de Euler-Lagrange) junto con la Observación 1.11 (dado que  $F$  no depende de  $y'(\tilde{\delta})$ ), se concluye que, para que el cambio en la posición del

punto de bifurcación sea óptimo, la función  $y(\tilde{\delta})$  debe minimizar el funcional de trabajo  $W$ . En consecuencia, debe satisfacer que la derivada parcial de  $F(\cdot, \cdot, \cdot)$  con respecto a la segunda variable, evaluada en  $y(\tilde{\delta})$ , debe ser nula. En consecuencia, se deduce que

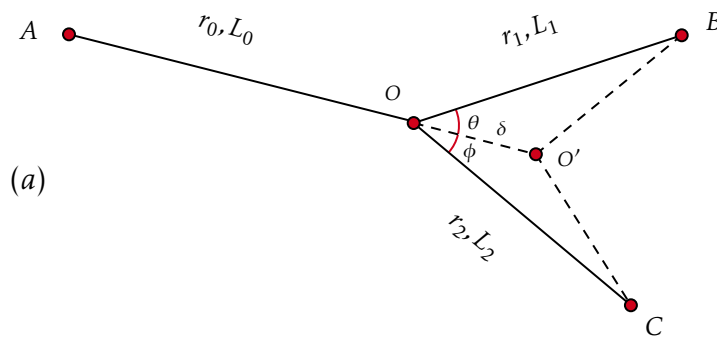
$$F(\tilde{\delta}, y(\tilde{\delta}), y'(\tilde{\delta})) = y(\tilde{\delta}) = k, \quad \text{para alguna constante } k \in \mathbb{R}, \quad (2.69)$$

es decir,  $y(\tilde{\delta})$  es constante. Además, como para  $\tilde{\delta} = 0$  no hay desplazamiento del punto de bifurcación, se tiene  $y(\tilde{\delta}) = 0$ , lo que implica que

$$F(\tilde{\delta}, y(\tilde{\delta}), y'(\tilde{\delta})) = y(\tilde{\delta}) = 0 \quad \text{para todo } \tilde{\delta}. \quad (2.70)$$

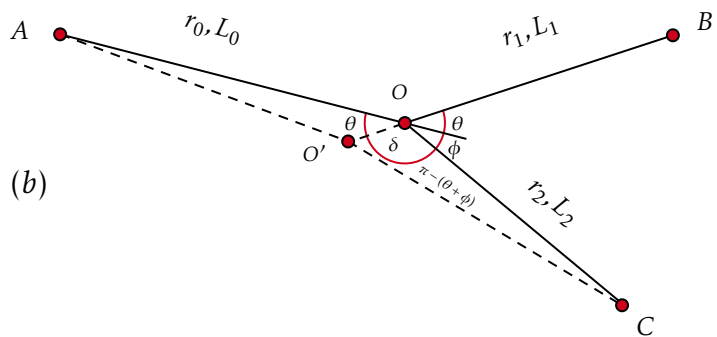
A continuación se analizarán las implicaciones de este resultado sobre cada configuración.

**Figura 14:** Configuración (a) y sus respectivos cambios



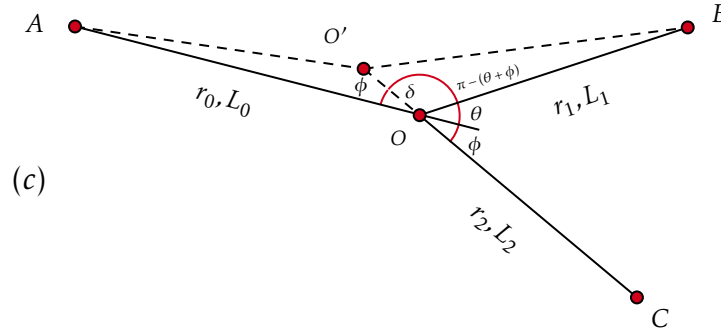
**Fuente:** Elaboración propia

**Figura 15:** Configuración (b) y sus respectivos cambios



**Fuente:** Elaboración propia

**Figura 16:** Configuración (c) y sus respectivos cambios



**Fuente:** Elaboración propia

### ANÁLISIS PARA LA PRIMERA CONFIGURACIÓN

Usando la ley de los cosenos para la Figura 14, con el ángulo  $\theta$ , se tiene:

$$(O'B)^2 = L_1^2 + \delta^2 - 2\delta L_1 \cos(\theta). \quad (2.71)$$

Dado que  $\delta$  es suficientemente pequeño como para despreciar el término  $\delta^2$ , se obtiene:

$$(O'B)^2 \approx L_1^2 - 2\delta L_1 \cos(\theta) = L_1^2 \left( 1 - \frac{2\delta}{L_1} \cos(\theta) \right). \quad (2.72)$$

Por lo tanto,

$$(O'B) \approx L_1 \sqrt{1 - \frac{2\delta}{L_1} \cos(\theta)}. \quad (2.73)$$

Definimos  $\varepsilon = \frac{2\delta}{L_1} \cos(\theta)$ . Debido al dominio de la función, se cumple que  $\varepsilon < 1$ , excluyendo el caso  $\varepsilon = 1$ , ya que en ese escenario  $(O'B) \approx 0$ , lo cual carece de sentido en el contexto de una bifurcación vascular. La condición  $\varepsilon < 1$  asegura que la aproximación tenga sentido físico y matemático. Sea  $f(\varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon}$ . Al expandir  $f(\varepsilon)$  mediante el polinomio de Taylor de grado  $n$ , alrededor de 0, obtenemos la siguiente expresión:

$$f(\varepsilon) = f(0) + f'(0)(\varepsilon) + \frac{f''(0)}{2!}(\varepsilon)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(\varepsilon)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi(\varepsilon))}{(n+1)!}(\varepsilon)^{n+1}. \quad (2.74)$$

Como  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = -\frac{1}{2}$  y  $f''(0) = -\frac{1}{4}$ , se concluye que:

$$f(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{2}(\varepsilon) - \frac{1}{8}(\varepsilon)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(\varepsilon)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi(\varepsilon))}{(n+1)!}(\varepsilon)^{n+1}. \quad (2.75)$$

Dado que  $\varepsilon < 1$ , el término de orden  $\varepsilon^2$  y superiores son despreciables. Así que,

$$f(\varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon} \approx 1 - \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (2.76)$$

Por lo tanto,

$$O'B \approx L_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\delta}{L_1} \cos(\theta) \right) \right) = L_1 \left( 1 - \frac{\delta}{L_1} \cos(\theta) \right), \quad (2.77)$$

es decir,

$$O'B \approx L_1 - \delta \cos(\theta), \quad (2.78)$$

con lo cual, la longitud del vaso  $OB$  se ha reducido aproximadamente en  $\delta \cos(\theta)$ .

Usando nuevamente la ley de los cosenos para la Figura 14 con el ángulo  $\phi$ , se llega a:

$$(O'C)^2 = L_2^2 + \delta^2 - 2\delta L_2 \cos(\phi). \quad (2.79)$$

De manera análoga a lo anterior, dado que  $\delta > 0$  es lo suficientemente pequeño, se puede despreciar el término  $\delta^2$ . Por lo tanto, se tiene que:

$$(O'C)^2 \approx L_2^2 - 2\delta L_2 \cos(\phi) = L_2^2 \left( 1 - \frac{2\delta}{L_2} \cos(\phi) \right), \quad (2.80)$$

de donde se encuentra que:

$$(O'C) \approx L_2 \sqrt{1 - \frac{2\delta}{L_2} \cos(\phi)}. \quad (2.81)$$

Se define ahora  $f(\varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon}$  con  $\varepsilon = \frac{2\delta}{L_2} \cos(\phi)$ . Usando la expansión de Taylor (2.76), se concluye que:

$$O'C \approx L_2 \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\delta}{L_2} \cos(\phi) \right) \right) = L_2 \left( 1 - \frac{\delta}{L_2} \cos(\phi) \right), \quad (2.82)$$

es decir,

$$O'C \approx L_2 - \delta \cos(\phi). \quad (2.83)$$

Así, la longitud del vaso  $OC$  se ha acortado en aproximadamente  $\delta \cos(\phi)$ . Además, la

longitud del vaso  $AO$  se ha incrementado en  $\delta$ . De este modo, al pasar de las longitudes iniciales de las ramas  $AO$ ,  $OB$ , y  $OC$  a las nuevas longitudes tras modificar la posición del punto de bifurcación, los cambios en la longitud de cada vaso son:

$$L_0(\delta) = \delta, \quad L_1(\delta) = -\delta \cos(\theta) \quad \text{y} \quad L_2(\delta) = -\delta \cos(\phi). \quad (2.84)$$

Aplicando (2.67), el costo total óptimo respectivo para cada vaso es :

$$\mathcal{L}_0(\delta) = \frac{\beta}{2} \delta r_0^2, \quad \mathcal{L}_1(\delta) = -\frac{\beta}{2} \delta \cos(\theta) r_1^2 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2(\delta) = -\frac{\beta}{2} \delta \cos(\phi) r_2^2. \quad (2.85)$$

En consecuencia, la fuerza total que actúa sobre el punto de bifurcación puede expresarse como

$$F(\delta, y(\delta), y'(\delta)) = \frac{\beta}{2} \delta r_0^2 - \frac{\beta}{2} \delta \cos(\theta) r_1^2 - \frac{\beta}{2} \delta \cos(\phi) r_2^2. \quad (2.86)$$

De acuerdo con la condición (2.70), se cumple que:

$$\delta \beta r_0^2 - \delta \beta \cos(\theta) r_1^2 - \delta \beta \cos(\phi) r_2^2 = 0, \quad (2.87)$$

que al simplificar se reduce a:

$$r_0^2 = r_1^2 \cos(\theta) + r_2^2 \cos(\phi). \quad (2.88)$$

## ANÁLISIS PARA LA SEGUNDA CONFIGURACIÓN

Ahora, analizando la Figura 15, usando la ley de los cosenos, con el ángulo  $\theta$ , se concluye que:

$$(AO')^2 = L_0^2 + \delta^2 - 2\delta L_0 \cos(\theta). \quad (2.89)$$

Si  $\delta > 0$  es suficientemente pequeño, se puede despreciar el término  $\delta^2$ . Por lo tanto, se tiene que:

$$(AO')^2 \approx L_0^2 - 2\delta L_0 \cos(\theta) = L_0^2 \left( 1 - \frac{2\delta}{L_0} \cos(\theta) \right), \quad (2.90)$$

de donde se obtiene:

$$(AO') \approx L_0 \sqrt{1 - \frac{2\delta}{L_0} \cos(\theta)}. \quad (2.91)$$

Definimos nuevamente  $f(\varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon}$  con  $\varepsilon = \frac{2\delta}{L_0} \cos(\theta)$ . Usando la expansión de Taylor (2.76), se deduce que:

$$AO' \approx L_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\delta}{L_0} \cos(\theta) \right) \right) = L_0 \left( 1 - \frac{\delta}{L_0} \cos(\theta) \right), \quad (2.92)$$

es decir,

$$AO' \approx L_0 - \delta \cos(\theta). \quad (2.93)$$

Así, la longitud del vaso  $AO$  se ha acortado en aproximadamente  $\delta \cos(\theta)$ . Usando nuevamente la ley de los cosenos para la Figura 15 con el ángulo  $\pi - (\theta + \phi)$ , se llega a:

$$(O'C)^2 = L_2^2 + \delta^2 - 2\delta L_2 \cos(\pi - (\theta + \phi)) \quad (2.94)$$

De forma similar a lo anterior, dado que  $\delta$  es lo suficientemente pequeño, se puede despreciar el término  $\delta^2$ . De este modo, se tiene que:

$$(O'C)^2 \approx L_2^2 - 2\delta L_2 \cos(\pi - (\theta + \phi)) = L_2^2 \left( 1 - \frac{2\delta}{L_2} \cos(\pi - (\theta + \phi)) \right), \quad (2.95)$$

y como

$$\begin{aligned} \cos(\pi - (\theta + \phi)) &= \cos(\pi) \cos(\theta + \phi) + \text{sen}(\pi) \text{sen}(\theta + \phi) \\ &= -1 \cdot \cos(\theta + \phi) + 0 \cdot \text{sen}(\theta + \phi) \\ &= -\cos(\theta + \phi), \end{aligned} \quad (2.96)$$

se obtiene:

$$(O'C) \approx L_2 \sqrt{1 - \left( -\frac{2\delta}{L_2} \cos(\theta + \phi) \right)}. \quad (2.97)$$

Se define nuevamente  $f(\varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon}$  con  $\varepsilon = -\frac{2\delta}{L_2} \cos(\theta + \phi)$ . Usando la expansión de Taylor (2.76), se llega a:

$$O'C \approx L_2 \left( 1 - \frac{1}{2} \left( -\frac{2\delta}{L_2} \cos(\theta + \phi) \right) \right) = L_2 \left( 1 + \frac{\delta}{L_2} \cos(\theta + \phi) \right), \quad (2.98)$$

es decir,

$$O'C \approx L_2 + \delta \cos(\theta + \phi). \quad (2.99)$$

Así, la longitud del vaso  $OC$  se ha incrementado en aproximadamente  $\delta \cos(\theta + \phi)$ . Además, la longitud del vaso  $OB$  se ha incrementado en  $\delta$ . De este modo, al pasar de las longitudes iniciales de las ramas  $AO$ ,  $OB$ , y  $OC$  a las nuevas longitudes tras modificar la posición del punto de bifurcación, los cambios en la longitud de cada vaso son:

$$L_0(\delta) = -\delta \cos(\theta), \quad L_1(\delta) = \delta \quad \text{y} \quad L_2(\delta) = \delta \cos(\theta + \phi). \quad (2.100)$$

Luego, aplicando el resultado (2.67) y teniendo en cuenta estos cambios, el costo total óptimo respectivo para cada vaso es:

$$\mathcal{L}_0(\delta) = -\frac{\beta}{2} \delta \cos(\theta) r_0^2, \quad \mathcal{L}_1(\delta) = \frac{\beta}{2} \delta r_1^2 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2(\delta) = \frac{\beta}{2} \delta \cos(\theta + \phi) r_2^2. \quad (2.101)$$

En consecuencia, la fuerza total que actúa sobre el punto de bifurcación puede expresarse como

$$F(\delta, y(\delta), y'(\delta)) = -\frac{\beta}{2} \delta \cos(\theta) r_0^2 + \frac{\beta}{2} \delta r_1^2 + \frac{\beta}{2} \delta \cos(\theta + \phi) r_2^2. \quad (2.102)$$

De acuerdo con la condición (2.70), se cumple que:

$$-\delta \beta \cos(\theta) r_0^2 + \delta \beta r_1^2 + \delta \beta \cos(\theta + \phi) r_2^2 = 0, \quad (2.103)$$

la cual, al simplificar, se reduce a:

$$r_1^2 = r_0^2 \cos(\theta) - r_2^2 \cos(\theta + \phi). \quad (2.104)$$

## ANÁLISIS PARA LA TERCERA CONFIGURACIÓN

Al analizar la Figura 16, y aplicando la ley de los cosenos con el ángulo  $\phi$ , se deduce que:

$$(AO')^2 = L_0^2 + \delta^2 - 2\delta L_0 \cos(\phi). \quad (2.105)$$

De manera análoga a lo anterior, dado que  $\delta$  es lo suficientemente pequeño, se puede despreciar el término  $\delta^2$ . Por lo tanto, se tiene que

$$(AO')^2 \approx L_0^2 - 2\delta L_0 \cos(\phi) = L_0^2 \left( 1 - \frac{2\delta}{L_0} \cos(\phi) \right), \quad (2.106)$$

de donde se concluye que:

$$(AO') \approx L_0 \sqrt{1 - \frac{2\delta}{L_0} \cos(\phi)}. \quad (2.107)$$

A continuación, se define  $f(\varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon}$  con  $\varepsilon = \frac{2\delta}{L_0} \cos(\phi)$ . Usando la expansión de Taylor (2.76), se llega a

$$AO' \approx L_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2\delta}{L_0} \cos(\phi) \right) \right) = L_0 \left( 1 - \frac{\delta}{L_0} \cos(\phi) \right), \quad (2.108)$$

es decir,

$$AO' \approx L_0 - \delta \cos(\phi). \quad (2.109)$$

Por lo tanto, la longitud del vaso  $AO$  se ha acortado en aproximadamente  $\delta \cos(\phi)$ .

Usando nuevamente la ley de los cosenos para la Figura 16 con el ángulo  $\pi - (\theta + \phi)$ , se obtiene:

$$(O'B)^2 = L_1^2 + \delta^2 - 2\delta L_1 \cos(\pi - (\theta + \phi)). \quad (2.110)$$

Siguiendo el mismo razonamiento anterior, dado que  $\delta$  es lo suficientemente pequeño, se puede despreciar el término  $\delta^2$ . Por lo tanto, se deduce que

$$(O'B)^2 \approx L_1^2 - 2\delta L_1 \cos(\pi - (\theta + \phi)) = L_1^2 \left( 1 - \frac{2\delta}{L_1} \cos(\pi - (\theta + \phi)) \right), \quad (2.111)$$

y dado que  $\cos(\pi - (\theta + \phi)) = -\cos(\theta + \phi)$ , se obtiene:

$$(O'B) \approx L_1 \sqrt{1 - \left( -\frac{2\delta}{L_1} \cos(\theta + \phi) \right)}. \quad (2.112)$$

Se define nuevamente  $f(\varepsilon) = \sqrt{1 - \varepsilon}$  con  $\varepsilon = -\frac{2\delta}{L_1} \cos(\theta + \phi)$ . Usando la expansión de Taylor (2.76), se llega a que

$$O'B \approx L_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \left( -\frac{2\delta}{L_1} \cos(\theta + \phi) \right) \right) = L_1 \left( 1 + \frac{\delta}{L_1} \cos(\theta + \phi) \right). \quad (2.113)$$

es decir:

$$O'B \approx L_1 + \delta \cos(\theta + \phi). \quad (2.114)$$

Así, la longitud del vaso  $OB$  se ha incrementado en aproximadamente  $\delta \cos(\theta + \phi)$ . Además, la longitud del vaso  $OC$  se ha incrementado en  $\delta$ .

De este modo, al pasar de las longitudes iniciales de las ramas  $AO$ ,  $OB$ , y  $OC$  a las nuevas longitudes tras modificar la posición del punto de bifurcación, los cambios en la longitud de cada vaso son:

$$L_0(\delta) = -\delta \cos(\phi), \quad L_1(\delta) = \delta \cos(\theta + \phi) \quad \text{y} \quad L_2(\delta) = \delta. \quad (2.115)$$

Luego, aplicando el resultado (2.67) y teniendo en cuenta estos cambios, el costo total óptimo respectivo para cada vaso es:

$$\mathcal{L}_0(\delta) = -\frac{\beta}{2} \delta \cos(\phi) r_0^2, \quad \mathcal{L}_1(\delta) = \frac{\beta}{2} \delta \cos(\theta + \phi) r_1^2 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_2(\delta) = \frac{\beta}{2} \delta r_2^2. \quad (2.116)$$

En consecuencia, la fuerza total que actúa sobre el punto de bifurcación puede expresarse como:

$$F(\delta, y(\delta), y'(\delta)) = -\frac{\beta}{2} \delta \cos(\phi) r_0^2 + \frac{\beta}{2} \delta \cos(\theta + \phi) r_1^2 + \frac{\beta}{2} \delta r_2^2. \quad (2.117)$$

De acuerdo con la condición (2.70), se cumple que

$$-\delta \beta \cos(\phi) r_0^2 + \delta \beta \cos(\theta + \phi) r_1^2 + \delta \beta r_2^2 = 0, \quad (2.118)$$

es decir,

$$r_2^2 = r_0^2 \cos(\phi) - r_1^2 \cos(\theta + \phi). \quad (2.119)$$

A partir de las ecuaciones (2.88), (2.104) y (2.119), es posible obtener expresiones explícitas para los términos  $\cos(\theta)$ ,  $\cos(\phi)$  y  $\cos(\theta + \phi)$ . En primer lugar, despejando  $\cos(\theta)$  de la ecuación (2.88), se obtiene:

$$\cos(\theta) = \frac{r_0^2 - r_2^2 \cos(\phi)}{r_1^2}. \quad (2.120)$$

A continuación, al despejar  $\cos(\theta + \phi)$  de la ecuación (2.104), se deduce que:

$$\cos(\theta + \phi) = \frac{r_0^2 \cos(\theta) - r_1^2}{r_2^2}. \quad (2.121)$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de  $\cos(\theta)$  obtenido en (2.120), se llega a:

$$\cos(\theta + \phi) = \frac{1}{r_2^2} \left[ r_0^2 \left( \frac{r_0^2 - r_2^2 \cos(\phi)}{r_1^2} \right) - r_1^2 \right] = \frac{r_0^4 - r_0^2 r_2^2 \cos(\phi) - r_1^4}{r_1^2 r_2^2}. \quad (2.122)$$

Posteriormente, sustituyendo la ecuación (2.122) en (2.119), se obtiene:

$$\begin{aligned} r_2^2 &= r_0^2 \cos(\phi) - r_1^2 \left( \frac{r_0^4 - r_0^2 r_2^2 \cos(\phi) - r_1^4}{r_1^2 r_2^2} \right) \\ &= r_0^2 \cos(\phi) - \frac{r_0^4}{r_2^2} + r_0^2 \cos(\phi) + \frac{r_1^4}{r_2^2} = 2r_0^2 \cos(\phi) - \frac{r_0^4}{r_2^2} + \frac{r_1^4}{r_2^2}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

De esta última expresión, despejando  $\cos(\phi)$ , se concluye que:

$$\cos(\phi) = \frac{r_0^4 + r_2^4 - r_1^4}{2r_0^2 r_2^2}. \quad (2.124)$$

Sustituyendo ahora  $\cos(\phi)$  en (2.120), se tiene:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{r_1^2} \left[ r_0^2 - r_2^2 \left( \frac{r_2^4 + r_0^4 - r_1^4}{2r_0^2 r_2^2} \right) \right] = \frac{1}{r_1^2} \left( \frac{2r_0^4}{2r_0^2} - \frac{r_2^4}{2r_0^2} - \frac{r_0^4}{2r_0^2} + \frac{r_1^4}{2r_0^2} \right). \quad (2.125)$$

Simplificando, se deduce finalmente que

$$\cos(\theta) = \frac{r_0^4 + r_1^4 - r_2^4}{2r_0^2 r_1^2}. \quad (2.126)$$

Por último, sustituyendo  $\cos(\phi)$  en la ecuación (2.122), se llega a

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \phi) &= \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \left[ r_0^4 - r_0^2 r_2^2 \left( \frac{r_2^4 + r_0^4 - r_1^4}{2r_0^2 r_2^2} \right) - r_1^4 \right] \\ &= \frac{1}{r_1^2 r_2^2} \left( \frac{2r_0^4 - r_2^4 - r_0^4 + r_1^4 - 2r_1^4}{2} \right) = \frac{r_0^4 - r_1^4 - r_2^4}{2r_1^2 r_2^2}. \end{aligned} \quad (2.127)$$

De esta manera, se deducen las expresiones finales para los cosenos de los ángulos involucrados:  $\cos(\phi)$ ,  $\cos(\theta)$  y  $\cos(\theta + \phi)$ , dadas respectivamente por las ecuaciones (2.124), (2.126) y (2.127).

Estos resultados pueden ser llevados más lejos. Como se menciona en <sup>48</sup>, para un flujo óptimo en un solo vaso, el flujo  $f$  (para un valor dado de  $L$ ) es proporcional al cubo del

---

<sup>48</sup> Ibid., p. 196–207.

radio. Cuando los vasos se bifurcan, el caudal se divide en dos partes, lo que implica que  $f_0 = f_1 + f_2$ , y

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3. \quad (2.128)$$

Esta ecuación se denomina Ley de Murray y podría parecer contradecir la Ley de Poiseuille (2.31), que sugiere que  $r_0^4 = r_1^4 + r_2^4$ . Sin embargo, aplicar la Ley de Poiseuille en este contexto requeriría gradientes de presión idénticos  $\left(\frac{dp}{dz}\right)$  en las tres ramas, lo cual no se da generalmente.

Eliminando el radio que no contribuye de manera significativa en cada caso, se obtiene lo siguiente: Para  $\cos(\phi)$ , dado en la ecuación (2.124), el radio que no contribuye de manera significativa es  $r_1$ . Despejando  $r_1$  de la Ley de Murray ecuación (2.128), se tiene que  $r_1 = (r_0^3 - r_2^3)^{1/3}$ . Sustituyendo esta expresión en (2.124), se obtiene:

$$\cos(\phi) = \frac{r_0^4 + r_2^4 - (r_0^3 - r_2^3)^{4/3}}{2r_0^2 r_2^2}. \quad (2.129)$$

Para  $\cos(\theta)$ , dado en la ecuación (2.126), el radio que no contribuye de manera significativa es  $r_2$ . Despejando  $r_2$  de la Ley de Murray ecuación (2.128), se obtiene que  $r_2 = (r_0^3 - r_1^3)^{1/3}$ . Al sustituir en (2.126) se deduce que:

$$\cos(\theta) = \frac{r_0^4 + r_1^4 - (r_0^3 - r_1^3)^{4/3}}{2r_0^2 r_1^2}. \quad (2.130)$$

Para  $\cos(\theta + \phi)$ , dado en la ecuación (2.127), el radio que no contribuye de manera significativa es  $r_0$ . Despejando  $r_0$  de la Ley de Murray ecuación (2.128), se obtiene que  $r_0 = (r_1^3 + r_2^3)^{1/3}$ . Sustituyendo esto en (2.127), se llega a la siguiente expresión:

$$\cos(\theta + \phi) = \frac{(r_1^3 + r_2^3)^{4/3} - r_1^4 - r_2^4}{2r_1^2 r_2^2}. \quad (2.131)$$

Por lo tanto, se puede concluir que el ángulo óptimo de bifurcación es:

$$(\theta + \phi) = \cos^{-1} \left( \frac{(r_1^3 + r_2^3)^{4/3} - r_1^4 - r_2^4}{2r_1^2 r_2^2} \right), \quad (2.132)$$

el cual minimiza el gasto energético total del sistema.

## COMPROBACIÓN DE LAS LEYES EMPÍRICAS DE ROUX

Para verificar que el modelo desarrollado constituye una representación adecuada del fenómeno de ramificación vascular, se procederá a comprobar las leyes empíricas de Roux mencionadas previamente.

- 1). Si una arteria se bifurca en dos ramas iguales, ambas se desvían en ángulos iguales respecto al tallo principal.**

Sea  $r_1 = r_2$ , lo que corresponde a una bifurcación simétrica desde el vaso principal.

A partir de las ecuaciones de  $\cos(\phi)$  (2.129) y de  $\cos(\theta)$  (2.130), y considerando que  $r_1 = r_2$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$\cos(\phi) = \frac{r_0^4 + r_1^4 - (r_0^3 - r_1^3)^{4/3}}{2r_0^2 r_1^2} = \cos(\theta). \quad (2.133)$$

Dado que  $\cos(\phi) = \cos(\theta)$  y que  $\theta, \phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , al aplicar la función inversa del coseno se concluye que  $\phi = \theta$ , es decir que, cuando los radios de las ramas son iguales, éstas se ramifican formando ángulos iguales con respecto al tallo principal, en concordancia con la primera ley empírica de Roux.

- 2). Si las ramas tienen radios diferentes, la rama más grande (es decir, la continuación de la arteria principal) forma un ángulo menor con la dirección original que la rama más pequeña.**

Sea  $r_2 = \alpha r_1$ , donde  $0 < \alpha < 1$ . A partir de las expresiones para  $\cos(\phi)$  en (2.124) y para  $\cos(\theta)$  en (2.126), se obtiene lo siguiente:

$$\cos(\phi) = \frac{r_0^4 - r_1^4(1 - \alpha^4)}{2\alpha^2 r_0^2 r_1^2}; \quad \cos(\theta) = \frac{r_0^4 + r_1^4(1 - \alpha^4)}{2r_0^2 r_1^2}. \quad (2.134)$$

El objetivo es comparar  $\cos(\phi)$  y  $\cos(\theta)$ , es decir, determinar si  $\cos(\theta) > \cos(\phi)$  o  $\cos(\theta) < \cos(\phi)$ . Para ello, se analiza si  $\cos(\theta) - \cos(\phi)$  es positivo o negativo. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) - \cos(\phi) &= \frac{r_0^4 + r_1^4(1 - \alpha^4)}{2r_0^2r_1^2} - \frac{r_0^4 - r_1^4(1 - \alpha^4)}{2\alpha^2r_0^2r_1^2} \\
&= \frac{1}{2r_0^2r_1^2} \left[ r_0^4 + r_1^4(1 - \alpha^4) - \frac{r_0^4}{\alpha^2} + \frac{r_1^4(1 - \alpha^4)}{\alpha^2} \right] \\
&= \frac{1}{2r_0^2r_1^2} \left[ r_0^4 \left( 1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) + r_1^4(1 - \alpha^4) \left( 1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right]. \tag{2.135}
\end{aligned}$$

Dado que  $(1 - \alpha^4) = (1 - \alpha^2)(1 + \alpha^2)$ ,  $1 - \frac{1}{\alpha^2} = -\frac{(1 - \alpha^2)}{\alpha^2}$  y  $1 + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2}$ , sustituyendo en la expresión (2.135) se llega a:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) - \cos(\phi) &= \frac{1}{2r_0^2r_1^2} \left[ -r_0^4 \frac{(1 - \alpha^2)}{\alpha^2} + r_1^4(1 - \alpha^2)(1 + \alpha^2) \frac{(1 + \alpha^2)}{\alpha^2} \right] \\
&= \frac{(1 - \alpha^2)}{2\alpha^2r_0^2r_1^2} \left[ -r_0^4 + r_1^4(1 + \alpha^2)(1 + \alpha^2) \right] \\
&= \frac{(1 - \alpha^2)}{2\alpha^2r_0^2r_1^2} \left[ r_1^4(1 + \alpha^2)^2 - r_0^4 \right]. \tag{2.136}
\end{aligned}$$

Dado que  $0 < \alpha < 1$ , se cumple que  $\alpha^2 > 0$ ,  $(1 - \alpha^2) > 0$  y  $(1 + \alpha^2) > 0$ . Además, como  $r_0 > 0$  y  $r_1 > 0$ , se concluye que el término

$$\frac{(1 - \alpha^2)}{2\alpha^2r_0^2r_1^2} > 0.$$

De este modo, el signo de  $\cos(\theta) - \cos(\phi)$  depende del factor  $r_1^4(1 + \alpha^2)^2 - r_0^4$ .

Para analizar este factor, se recuerda que según la Ley de Murray, ecuación (2.128),  $r_0^3 = r_1^3 + r_2^3$  y que  $r_2 = \alpha r_1$ , lo cual conduce a:

$$r_0^4 = (r_1^3 + r_2^3)^{\frac{4}{3}} = (r_1^3 + \alpha^3 r_1^3)^{\frac{4}{3}} = (1 + \alpha^3)^{\frac{4}{3}} r_1^4. \tag{2.137}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$r_1^4(1 + \alpha^2)^2 - r_0^4 = r_1^4(1 + \alpha^2)^2 - (1 + \alpha^3)^{\frac{4}{3}} r_1^4 = r_1^4 \left( (1 + \alpha^2)^2 - (1 + \alpha^3)^{\frac{4}{3}} \right). \tag{2.138}$$

Es importante notar que:

$$(1 + \alpha^2)^2 > (1 + \alpha^3)^{\frac{4}{3}}. \tag{2.139}$$

Esto se puede verificar al elevar ambos lados de la desigualdad al cubo, obteniendo:

$$(1 + \alpha^2)^6 > (1 + \alpha^3)^4. \quad (2.140)$$

Al tomar la raíz cuadrada de ambos lados, se obtiene:

$$(1 + \alpha^2)^3 > (1 + \alpha^3)^2. \quad (2.141)$$

Dado que

$$(1 + \alpha^2)^3 = 1 + 3\alpha^2 + 3\alpha^4 + \alpha^6 \quad \text{y} \quad (1 + \alpha^3)^2 = 1 + 2\alpha^3 + \alpha^6,$$

restando estas dos últimas expresiones se llega a:

$$(1 + \alpha^2)^3 - (1 + \alpha^3)^2 = (1 + 3\alpha^2 + 3\alpha^4 + \alpha^6) - (1 + 2\alpha^3 + \alpha^6) = \alpha^2(3(1 + \alpha^2) - 2\alpha). \quad (2.142)$$

Dado que  $\alpha^2 > 0$ ,  $(1 + \alpha^2) > 0$  y  $\alpha < 1$ , se concluye que  $\alpha^2(3(1 + \alpha^2) - 2\alpha) > 0$ , y por lo tanto,  $(1 + \alpha^2)^2 - (1 + \alpha^3)^{\frac{4}{3}} > 0$ . Luego, dado  $r_1^4 > 0$ , se concluye que  $r_1^4(1 + \alpha^2)^2 - r_0^4 > 0$ .

En consecuencia,  $\cos(\theta) - \cos(\phi) > 0$ , lo que implica que:

$$\cos(\theta) > \cos(\phi). \quad (2.143)$$

Dado que  $\theta$  y  $\phi$  son ángulos óptimos de ramificación, su rango es  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Como la función coseno es estrictamente decreciente en este intervalo y se cumple la desigualdad (2.143), se concluye que  $\theta < \phi$ . Por lo tanto, el vaso más grande se ramifica en un ángulo menor que el vaso más estrecho, lo que cumple con la segunda ley empírica de Roux.

### 3). Las ramas tan estrechas que no reducen significativamente el flujo en el tallo principal se ramifican en ángulos grandes (normalmente entre 70° y 90°).

Se supone que  $r_2 \ll r_1$  ( de modo que  $\alpha \ll 1$ ), donde  $r_2 = \alpha r_1$ . Esto también implica que  $r_1 \lesssim r_0$ . A partir de los resultados obtenidos previamente, dados por

$$\cos(\phi) = \frac{r_0^4 - r_1^4(1 - \alpha^4)}{2\alpha^2 r_0^2 r_1^2}; \quad r_0^4 = (1 + \alpha^3)^{\frac{4}{3}} r_1^4, \quad (2.144)$$

correspondientes a las ecuaciones (2.134) y (2.137), respectivamente, y considerando que al tomar la raíz cuadrada de la segunda expresión se obtiene  $r_0^2 = (1 + \alpha^3)^{\frac{2}{3}} r_1^2$ , la expresión

de  $\cos(\phi)$  puede escribirse como

$$\cos(\phi) = \frac{(1 + \alpha^3)^{\frac{4}{3}} r_1^4 - r_1^4 (1 - \alpha^4)}{2\alpha^2 (1 + \alpha^3)^{\frac{2}{3}} r_1^2 r_1^2} = \frac{(1 + \alpha^3)^{\frac{4}{3}} - 1 + \alpha^4}{2\alpha^2 (1 + \alpha^3)^{\frac{2}{3}}}. \quad (2.145)$$

Al tomar el límite cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , se tiene:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\cos(\phi)) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{(1 + \alpha^3)^{\frac{4}{3}} - 1 + \alpha^4}{2\alpha^2 (1 + \alpha^3)^{\frac{2}{3}}} \right). \quad (2.146)$$

Al calcular este límite, se obtiene una forma indeterminada  $\left(\frac{0}{0}\right)$ , lo que permite aplicar la regla de L'Hôpital. Para ello, se calcula la derivada del numerador y del denominador respecto a  $\alpha$ . La derivada del numerador, definido como  $f(\alpha) = (1 + \alpha^3)^{\frac{4}{3}} - 1 + \alpha^4$ , es:

$$f'(\alpha) = 4\alpha^2 (1 + \alpha^3)^{\frac{1}{3}} + 4\alpha^3.$$

Por otro lado, la derivada del denominador, donde  $g(\alpha) = 2\alpha^2 (1 + \alpha^3)^{\frac{2}{3}}$ , es:

$$g'(\alpha) = 4\alpha (1 + \alpha^3)^{\frac{2}{3}} + 4\alpha^4 (1 + \alpha^3)^{-\frac{1}{3}}.$$

Sustituyendo estas derivadas en la expresión (2.146) y factorizando un  $\alpha$  se tiene:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\cos(\phi)) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{4\alpha^2 (1 + \alpha^3)^{\frac{1}{3}} + 4\alpha^3}{4\alpha (1 + \alpha^3)^{\frac{2}{3}} + 4\alpha^4 (1 + \alpha^3)^{-\frac{1}{3}}} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{4\alpha (1 + \alpha^3)^{\frac{1}{3}} + 4\alpha^2}{4(1 + \alpha^3)^{\frac{2}{3}} + 4\alpha^3 (1 + \alpha^3)^{-\frac{1}{3}}} \right). \quad (2.147)$$

Al calcular este límite, se obtiene:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\cos(\phi)) = 0. \quad (2.148)$$

Por lo tanto,  $\cos(\phi) \rightarrow 0$  cuando  $\alpha \rightarrow 0$ , lo que implica que  $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$  a medida que  $\alpha \rightarrow 0$ . En otras palabras, el ángulo de ramificación tiende a  $90^\circ$  conforme el radio del vaso se aproxima a cero. Estas observaciones corresponden a la tercera ley empírica de Roux.

Así, mediante el uso del funcional de costo (2.49) se han verificado las tres leyes empíricas de Roux, lo que conlleva a concluir como se menciona en <sup>49</sup> que el modelo puede ser bastante realista para muchas vasculaturas animales, particularmente para los vasos más pequeños.

---

<sup>49</sup> *Ibid.*, p. 196–207.

### 3. HEMODINÁMICA Y GEOMETRÍA VASCULAR EN FLUIDOS NO NEWTONIANOS

Si bien el modelo newtoniano proporciona una primera aproximación útil para el estudio de la hemodinámica, la sangre presenta un comportamiento reológico más complejo que no puede describirse adecuadamente mediante una viscosidad constante. En particular, su viscosidad depende de la tasa de deformación, lo que hace necesario el uso de modelos no newtonianos para lograr una descripción más realista del flujo sanguíneo. Como se señala en <sup>50</sup>, la sangre es un fluido biológico complejo compuesto por diversos elementos, entre ellos los eritrocitos, que hacen que se comporte de manera no newtoniana; sin embargo, este aspecto suele pasarse por alto en el estudio del flujo sanguíneo carotídeo.

En este contexto, se introducen las ecuaciones de Navier–Stokes generalizadas al contexto no newtoniano y se analizan las principales magnitudes de interés, tales como la velocidad, el caudal y la diferencia de presión a lo largo de los segmentos vasculares. Asimismo, se examinan los ángulos óptimos de ramificación y bifurcación, en relación con la eficiencia del flujo.

Finalmente, se analizan dos propiedades geométricas fundamentales del sistema vascular: su longitud total y el aumento promedio del área de la sección transversal a lo largo de las bifurcaciones arteriales, evaluando su comportamiento a través de la red vascular y contrastando los resultados con estimaciones fisiológicas reportadas en la literatura.

#### 3.1. FORMULACIÓN GENERAL DE LAS ECUACIONES DE NAVIER–STOKES EN FLUIDOS NO NEWTONIANOS

En numerosos problemas de interés físico, biológico e ingenieril, la hipótesis de comportamiento newtoniano resulta insuficiente para describir adecuadamente la dinámica del fluido. Tal es el caso de fluidos complejos como suspensiones, polímeros, emulsiones y, en particular, la sangre bajo ciertas condiciones hemodinámicas, donde la relación entre los

---

<sup>50</sup> ABHILASH, H. N. et al. *Evaluation of Hemodynamics Parameters in Carotid Bifurcation System using Numerical Simulation*. En: *Applications of Computation in Mechanical Engineering: Select Proceedings of 3rd International Conference on Computing in Mechanical Engineering (ICCM 2021)*. Springer, 2022, p. 149–161.

esfuerzos internos y el gradiente de velocidad no es lineal. En estos escenarios, el fluido se clasifica como **no newtoniano**, y su modelación requiere, como se mencionó en la introducción, una generalización de las ecuaciones clásicas de Navier–Stokes. En particular, dada la naturaleza no newtoniana de la sangre, con el objetivo de desarrollar una formulación que describa el perfil de velocidad, el caudal y la diferencia de presión a lo largo de los segmentos vasculares en conductos cilíndricos como arterias, venas o capilares, es natural usar las ecuaciones de **Navier-Stokes** en ese contexto.

Desde el punto de vista de la mecánica del continuo, las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento conservan su estructura fundamental. Sin embargo, la diferencia esencial radica en la forma constitutiva del tensor de esfuerzos viscosos. En particular, para un fluido incompresible no newtoniano, el sistema puede escribirse en forma vectorial como

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p = f, & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \end{cases} \quad (3.1)$$

donde, al igual que en el caso newtoniano,  $\mathbf{V}(x, t) = (v_1(x, t), \dots, v_n(x, t))$  y  $p = p(x, t)$  son las incógnitas del problema, que representan respectivamente el campo de velocidad y la presión mecánica del fluido en el instante  $t > 0$  y en la posición  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 2$ . El término  $f$  denota un campo dado de fuerzas externas, mientras que  $\boldsymbol{\tau}(x, t)$  representa el tensor de esfuerzos viscosos del fluido. Por simplicidad se asume, además, que la densidad es constante e igual a 1. El sistema (3.1) se complementa con condiciones iniciales y condiciones de frontera de tipo Dirichlet, esto es,  $\mathbf{V} = 0$  sobre la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .

En el caso de dominios tridimensionales, considerando las definiciones en coordenadas cartesianas del operador gradiente (Definición 1.5), divergencia (Definición 1.6), así como la descomposición de los componentes del término convectivo (Ecuación 2.2), el sistema (3.1) puede expresarse en su forma extendida en coordenadas cartesianas como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial t} + \left( v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_1} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x_j} &= f_1, \\
\frac{\partial v_2}{\partial t} + \left( v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial x_j} &= f_2, \\
\frac{\partial v_3}{\partial t} + \left( v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_3} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{3j}}{\partial x_j} &= f_3, \\
\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

donde  $v_1, v_2, v_3$  representan las componentes del campo de velocidad, las cuales dependen de las coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ , mientras que  $(f_1, f_2, f_3)$  son las componentes del campo de fuerzas externas  $f$ . Teniendo en cuenta la definición del tensor de esfuerzos viscosos  $\tau(x, t)$  dada en la ecuación (1.3), sus componentes se definen como

$$\tau_{ij}(x, t) = 2\eta(|e(\mathbf{V})|) e_{ij}(\mathbf{V}) = \eta(|e(\mathbf{V})|) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{3.3}$$

y, en forma matricial, se expresa como

$$\boldsymbol{\tau}(x, t) = \begin{pmatrix} \tau_{11}(x, t) & \tau_{12}(x, t) & \tau_{13}(x, t) \\ \tau_{21}(x, t) & \tau_{22}(x, t) & \tau_{23}(x, t) \\ \tau_{31}(x, t) & \tau_{32}(x, t) & \tau_{33}(x, t) \end{pmatrix}.$$

El tensor de tasa de deformación  $e(\mathbf{V}) = (e_{ij}(\mathbf{V}))$ , definido según la ecuación (1.4), puede expresarse en notación indicial como

$$e_{ij}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{V})_{ij} + (\nabla \mathbf{V})_{ij}^T \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{3.4}$$

Esta definición es simétrica por construcción, es decir,

$$e_{ij}(\mathbf{V}) = e_{ji}(\mathbf{V}), \quad \text{y en consecuencia,} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3. \tag{3.5}$$

En notación matricial, el tensor de tasa de deformación se escribe como

$$e(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{V}) & e_{12}(\mathbf{V}) & e_{13}(\mathbf{V}) \\ e_{21}(\mathbf{V}) & e_{22}(\mathbf{V}) & e_{23}(\mathbf{V}) \\ e_{31}(\mathbf{V}) & e_{32}(\mathbf{V}) & e_{33}(\mathbf{V}) \end{pmatrix}.$$

La norma del tensor de tasa de deformación, comúnmente denominada tasa de deformación, viene dada por

$$|e(\mathbf{V})| = \left( \sum_{i,j=1}^3 |e_{ij}(\mathbf{V})|^2 \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

$$= \left( |e_{11}(\mathbf{V})|^2 + |e_{22}(\mathbf{V})|^2 + |e_{33}(\mathbf{V})|^2 + 2|e_{12}(\mathbf{V})|^2 + 2|e_{13}(\mathbf{V})|^2 + 2|e_{23}(\mathbf{V})|^2 \right)^{1/2}.$$

Finalmente, la función  $\eta(|e(\mathbf{V})|)$  representa la viscosidad del fluido, la cual depende de la tasa de deformación. De acuerdo con el modelo de Ley de Potencia, descrito en los preliminares, la viscosidad se define como

$$\eta(|e(\mathbf{V})|) = \mu |e(\mathbf{V})|^{q-2}, \quad (3.7)$$

donde  $\mu > 0$  es el coeficiente de viscosidad del fluido y  $q > 1$  es el índice de flujo.

### 3.2. FLUJO DE POISEUILLE EN FLUIDOS NO NEWTONIANOS

En esta sección, de manera análoga al caso newtoniano, se describe el flujo de un fluido, como la sangre, a través de un tubo cilíndrico circular uniforme de radio  $R$  y longitud  $L$ , simulando un vaso sanguíneo, tal como se ilustra en la Figura 7. Se asume que el flujo es completamente laminar (Definición 1.1), incompresible y estacionario (Definición 1.3). Asimismo, se considera que la presión depende únicamente de la coordenada axial  $z$ , es decir,  $p = p(z)$ , por lo que no presenta variaciones en las direcciones radial ni angular. En consecuencia, la presión disminuye a lo largo de la tubería en la dirección positiva del eje  $z$ , como se ilustra en la Figura 7. Adicionalmente, se asume que la velocidad no depende de las coordenadas  $\theta$  ni  $z$ , sino únicamente de la coordenada radial  $r$ . A continuación, se deducirá el perfil de velocidad del fluido para el caso no newtoniano, el cual varía en función de la posición dentro de la tubería.

El sistema de ecuaciones presentado en (3.2) es general y aplicable a cualquier dominio tridimensional. No obstante, dado que el análisis se realiza en una geometría cilíndrica, resulta natural emplear la formulación de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos no newtonianos en coordenadas cilíndricas.

Teniendo en cuenta las expresiones presentadas en el caso newtoniano para la derivada temporal del campo de velocidades en coordenadas cilíndricas (ecuación 2.6), el operador gradiente de la presión (ecuación 2.7), los componentes del término convectivo (ecuación 2.10), así como la definición de la divergencia tanto para campos vectoriales como para tensores de segundo orden (Definición 1.6), el sistema (2.3) puede expresarse en dichas coordenadas como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right) &= f_r, \\
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \left( v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right) &= f_\theta, \\
\frac{\partial v_z}{\partial t} + \left( v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) &= f_z, \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

donde  $v_r, v_\theta, v_z$  representan las componentes del campo de velocidad, las cuales dependen de las coordenadas  $(r, \theta, z)$ , mientras que  $(f_r, f_\theta, f_z)$  son las componentes del campo de fuerzas externas. El tensor de tasa de deformación  $e(\mathbf{V})$  se expresa como

$$e(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} e_{rr}(\mathbf{V}) & e_{r\theta}(\mathbf{V}) & e_{rz}(\mathbf{V}) \\ e_{\theta r}(\mathbf{V}) & e_{\theta\theta}(\mathbf{V}) & e_{\theta z}(\mathbf{V}) \\ e_{zr}(\mathbf{V}) & e_{z\theta}(\mathbf{V}) & e_{zz}(\mathbf{V}) \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad e_{ij}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{V})_{ij} + (\nabla \mathbf{V})_{ij}^T \right),$$

donde

- $e_{rr}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{V})_{rr} + (\nabla \mathbf{V})_{rr}^T \right) = \frac{\partial v_r}{\partial r}$ .
- $e_{r\theta}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{V})_{r\theta} + (\nabla \mathbf{V})_{r\theta}^T \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right)$ .

- $e_{rz}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{V})_{rz} + (\nabla \mathbf{V})_{rz}^T \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right).$
- $e_{\theta r}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{V})_{\theta r} + (\nabla \mathbf{V})_{\theta r}^T \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right).$
- $e_{\theta\theta}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{V})_{\theta\theta} + (\nabla \mathbf{V})_{\theta\theta}^T \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}.$
- $e_{\theta z}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{V})_{\theta z} + (\nabla \mathbf{V})_{\theta z}^T \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right).$
- $e_{z\theta}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{V})_{z\theta} + (\nabla \mathbf{V})_{z\theta}^T \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right).$
- $e_{zr}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{V})_{zr} + (\nabla \mathbf{V})_{zr}^T \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right).$
- $e_{zz} = \frac{1}{2} \left( (\nabla \mathbf{V})_{zz} + (\nabla \mathbf{V})_{zz}^T \right) = \frac{\partial v_z}{\partial z}.$

Como se observa, el tensor  $e(\mathbf{V})$  es simétrico por construcción en coordenadas cilíndricas, es decir,

$$e_{ij}(\mathbf{V}) = e_{ji}(\mathbf{V}), \quad \text{y en consecuencia,} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad \forall i, j \in \{r, \theta, z\}. \quad (3.9)$$

La norma del tensor de tasa de deformación está dada por

$$|e(\mathbf{V})| = \left( |e_{rr}(\mathbf{V})|^2 + |e_{\theta\theta}(\mathbf{V})|^2 + |e_{zz}(\mathbf{V})|^2 + 2|e_{r\theta}(\mathbf{V})|^2 + 2|e_{rz}(\mathbf{V})|^2 + 2|e_{\theta z}(\mathbf{V})|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.10)$$

y la viscosidad  $\eta(|e(\mathbf{V})|)$  se describe mediante el modelo de Ley de potencia presentado en la Ecuación (3.7).

Al asumir que el flujo es laminar, el campo de velocidades  $\mathbf{V}(r, \theta, z, t) = (v_r, v_\theta, v_z)$  satisface que  $v_r = 0$ ,  $v_\theta = 0$ ,  $v_z = v_z(r)$ . Adicionalmente, se considera que el flujo es estacionario, que no actúan fuerzas externas sobre el sistema y que la presión depende únicamente de la coordenada axial  $z$ . Bajo estas condiciones, el sistema (3.8) se reduce a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Considerando las condiciones anteriores, el tensor de tasa de deformación se reduce considerablemente, resultando

$$\begin{aligned}
e_{rr}(\mathbf{V}) = 0, \quad e_{\theta\theta}(\mathbf{V}) = 0, \quad e_{zz}(\mathbf{V}) = 0, \quad e_{r\theta}(\mathbf{V}) = e_{\theta r}(\mathbf{V}) = 0, \quad e_{\theta z}(\mathbf{V}) = e_{z\theta}(\mathbf{V}) = 0, \\
e_{rz}(\mathbf{V}) = e_{zr}(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

es decir, solo una componente del tensor de tasa de deformación es no nula. En consecuencia,

$$\tau_{rr} = 0, \quad \tau_{\theta\theta} = 0, \quad \tau_{zz} = 0, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = 0, \quad \tau_{rz} = \tau_{zr} = \eta(|e(\mathbf{V})|) \frac{\partial v_z}{\partial r}. \tag{3.13}$$

A partir de las condiciones establecidas en (3.10) y (3.12), la norma del tensor de tasa de deformación se reduce a

$$|e(\mathbf{V})| = \left( 2|e_{rz}(\mathbf{V})|^2 \right)^{1/2} = \left( 2 \left| \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|. \tag{3.14}$$

Elevando la norma del tensor de tasa de deformación (3.14) a la potencia  $q - 2$ , se obtiene

$$|e(\mathbf{V})|^{q-2} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{q-2} \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{q-2}. \tag{3.15}$$

Finalmente, al sustituir esta expresión en la definición de la viscosidad para el modelo de Ley de potencia (3.7), se concluye que

$$\eta(|e(\mathbf{V})|) = \mu |e(\mathbf{V})|^{q-2} = \mu \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{q-2} \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{q-2}. \tag{3.16}$$

Por lo tanto, al reemplazar (3.16) en la componente  $\tau_{rz}$  (3.13), se llega a

$$\tau_{rz} = \eta(|e(\mathbf{V})|) \frac{\partial v_z}{\partial r} = \mu |e(\mathbf{V})|^{q-2} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \mu \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{q-2} \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{q-2} \frac{\partial v_z}{\partial r}. \tag{3.17}$$

Reescribiendo esta expresión, se obtiene finalmente:

$$\tau_{rz} = \mu 2^{-\frac{q-2}{2}} \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{q-2} \frac{\partial v_z}{\partial r}. \quad (3.18)$$

Cabe destacar que el parámetro  $q$  caracteriza el comportamiento reológico del fluido: si  $q < 2$ , el fluido es pseudoplástico; si  $q = 2$ , se recupera el caso newtoniano; y si  $q > 2$ , el fluido es dilatante. Bajo las condiciones (3.12) y (3.13), el sistema (3.11) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aplicando la condición (3.18), el sistema (3.19) se simplifica a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|^{q-2} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{2^{\frac{q-2}{2}}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.20)$$

Dado que la presión depende únicamente de la coordenada axial  $z$ , mientras que la velocidad axial  $v_z$  varía exclusivamente en función del radio  $r$ , se observa en la ecuación (3.20) que el lado izquierdo depende solo de  $r$ , mientras que el lado derecho depende únicamente de  $z$ . Para que dicha igualdad se cumpla para todo  $r$  y  $z$ , ambos lados de la ecuación (3.20) deben ser iguales a una constante. En particular, se concluye que  $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dz}$  es constante. Además, dado que la velocidad presenta únicamente componente en la dirección axial  $z$  y depende exclusivamente del radio  $r$ , puede expresarse como  $v_z(r)$ . Sin pérdida de generalidad, se denota como  $v(r)$ , con  $0 \leq r \leq R$ .

Bajo estas consideraciones, la ecuación (3.20) puede escribirse de forma equivalente como

$$\frac{d}{dr} \left( r \left| \frac{dv(r)}{dr} \right|^{q-2} \frac{dv(r)}{dr} \right) = -\frac{2^{\frac{q-2}{2}}}{\mu} Gr, \quad \text{donde,} \quad G = -\frac{dp}{dz} > 0. \quad (3.21)$$

Integrando la ecuación (3.21) con respecto a  $r$ , se obtiene

$$r \left| \frac{dv(r)}{dr} \right|^{q-2} \frac{dv(r)}{dr} = -\frac{2^{\frac{q-2}{2}}}{2\mu} Gr^2 + C_1. \quad (3.22)$$

Por simetría física, se cumple que

$$\frac{dv(0)}{dr} = 0, \quad (3.23)$$

lo que implica que el lado izquierdo de la ecuación (3.22) es 0 en  $r = 0$ ; por lo tanto,  $C_1 = 0$ .

En consecuencia, la ecuación (3.22) queda expresada como

$$r \left| \frac{dv(r)}{dr} \right|^{q-2} \frac{dv(r)}{dr} = -\frac{2^{\frac{q-2}{2}}}{2\mu} Gr^2. \quad (3.24)$$

Dividiendo la ecuación (3.24) entre  $r$ , se tiene

$$\left| \frac{dv(r)}{dr} \right|^{q-2} \frac{dv(r)}{dr} = -\frac{2^{\frac{q-2}{2}}}{2\mu} Gr. \quad (3.25)$$

Dado que  $r$  aumenta desde el centro del conducto ( $r = 0$ ) hasta la pared ( $r = R$ ), la velocidad satisface  $v(0) = \text{Máxima}$  y  $v(R) = 0$ , debido a la condición de no deslizamiento en la pared del conducto. Por lo tanto, al aumentar  $r$ , la velocidad disminuye, es decir,  $v(0) > v(R)$  con  $0 < R$ . Esto implica que  $v(r)$  es una función decreciente y, en consecuencia,  $\frac{dv(r)}{dr} < 0$ . Por lo tanto, usando la definición de valor absoluto, se tiene que

$$\left| \frac{dv(r)}{dr} \right| = -\frac{dv(r)}{dr}. \quad (3.26)$$

Así, el término del lado izquierdo de la ecuación (3.25) puede expresarse como

$$\left| \frac{dv(r)}{dr} \right|^{q-2} \frac{dv(r)}{dr} = \left( -\frac{dv(r)}{dr} \right)^{q-2} \left( -\left( -\frac{dv(r)}{dr} \right) \right) = -\left( -\frac{dv(r)}{dr} \right)^{q-1}. \quad (3.27)$$

Al sustituir la expresión (3.27) en la ecuación (3.25), se obtiene

$$-\left( -\frac{dv(r)}{dr} \right)^{q-1} = -\frac{2^{\frac{q-2}{2}}}{2\mu} Gr. \quad (3.28)$$

Multiplicando por  $-1$  y elevando la ecuación (3.28) a la potencia  $1/(q-1)$ , se llega a

$$-\frac{dv(r)}{dr} = \left( \frac{2^{\frac{q-2}{2}}}{2\mu} Gr \right)^{\frac{1}{q-1}}. \quad (3.29)$$

Definiendo ahora la constante

$$C = \left( \frac{2^{\frac{q-2}{2}} G}{2\mu} \right)^{\frac{1}{q-1}} = \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}} G}{\mu} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad (3.30)$$

y sustituyendo en (3.29), se obtiene

$$\frac{dv(r)}{dr} = -Cr^{\frac{1}{q-1}}. \quad (3.31)$$

Integrando la ecuación (3.31) con respecto a  $r$ , para obtener el perfil de velocidad  $v(r)$ , se llega a

$$v(r) = -C \int r^{\frac{1}{q-1}} dr = -C \frac{q-1}{q} r^{\frac{q}{q-1}} + C_2. \quad (3.32)$$

Para determinar la constante  $C_2$ , se aplica la condición de no deslizamiento en la pared del conducto, esto es,  $v(R) = 0$ . De este modo,

$$C_2 = C \frac{q-1}{q} R^{\frac{q}{q-1}}. \quad (3.33)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (3.32), se obtiene finalmente

$$v(r) = C \frac{q-1}{q} \left( R^{\frac{q}{q-1}} - r^{\frac{q}{q-1}} \right). \quad (3.34)$$

Teniendo en cuenta la definición de  $C$  en (3.30) y de  $G$  en (3.21), la ecuación (3.34) puede reescribirse como

$$v(r) = \frac{q-1}{q} \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{q-1}} \left( R^{\frac{q}{q-1}} - r^{\frac{q}{q-1}} \right). \quad (3.35)$$

En consecuencia, esta expresión describe el perfil de velocidad de un fluido no newtoniano. En el caso particular  $q = 2$ , se recupera el caso newtoniano, obteniéndose el perfil parabólico de velocidad característico del flujo de Poiseuille, previamente presentado en la ecuación (2.20).

## NÚMERO DE REYNOLDS

En el caso de un fluido no newtoniano descrito mediante un modelo de ley de potencia, la viscosidad no es constante, sino que depende de la tasa de deformación del fluido. En

particular, para el flujo en un tubo cilíndrico bajo las condiciones previamente establecidas, la viscosidad está dada por la expresión (3.16), la cual depende de la derivada parcial de la velocidad axial  $v_z$  respecto al radio. En este caso, el número de Reynolds está dado por

$$Re = \frac{2R\rho v_a}{\eta(R)}. \quad (3.36)$$

Para determinar la velocidad media, se emplea la misma definición utilizada en el caso newtoniano (Ecuación 2.22), junto con el perfil de velocidad correspondiente al fluido no newtoniano (Ecuación 3.35). De este modo, se obtiene:

$$v_a(R) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi \left( \frac{q-1}{q} \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{q-1}} \left( R^{\frac{q}{q-1}} - r^{\frac{q}{q-1}} \right) \right) r dr. \quad (3.37)$$

Extrayendo las constantes fuera de la integral y reorganizando términos, se llega a:

$$\begin{aligned} v_a(R) &= \frac{2(q-1)}{qR^2} \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{q-1}} \int_0^R (R^{\frac{q}{q-1}} - r^{\frac{q}{q-1}}) r dr \\ &= \frac{2(q-1)}{qR^2} \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{q-1}} \left( R^{\frac{q}{q-1}} \int_0^R r dr - \int_0^R r^{\frac{2q-1}{q-1}} dr \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Tras resolver las integrales y simplificar, se obtiene la siguiente expresión para la velocidad media del fluido no newtoniano:

$$v_a(R) = \frac{q-1}{3q-2} \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{q-1}} R^{\frac{q}{q-1}}, \quad (3.39)$$

Teniendo en cuenta la definición de la viscosidad dada en la (Ecuación 3.16), y a partir del perfil de velocidad (Ecuación 3.35), se obtiene:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} = - \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{q-1}} r^{\frac{1}{q-1}} \quad (3.40)$$

y, en consecuencia,

$$\left| \frac{\partial v_z}{\partial r} \right| = \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{q-1}} r^{\frac{1}{q-1}}. \quad (3.41)$$

Sustituyendo la expresión (3.41) en la definición de la viscosidad (3.16) y evaluando en la pared del tubo ( $r = R$ ), se concluye que

$$\eta(R) = \mu \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{q-2} \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{q-2}{q-1}} R^{\frac{q-2}{q-1}}. \quad (3.42)$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones (3.39) y (3.42) en la definición del número de Reynolds (3.36) y simplificando, se llega a:

$$Re = \frac{2\rho(q-1)}{(3q-2)\mu} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2-q} \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{3-q}{q-1}} R^{\frac{q+1}{q-1}}. \quad (3.43)$$

Dado que se asume que la densidad del fluido es constante e igual a 1, el número de Reynolds es:

$$Re = \frac{2(q-1)}{(3q-2)\mu} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2-q} \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{3-q}{q-1}} R^{\frac{q+1}{q-1}}. \quad (3.44)$$

Como en el caso newtoniano, el gradiente de presión puede expresarse en términos de la diferencia de presión  $\Delta P$  a lo largo de la longitud  $L$  del tubo, es decir,  $\frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta P}{L}$ . De este modo, el número de Reynolds se puede escribir como:

$$Re = \frac{2(q-1)}{(3q-2)\mu} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2-q} \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}} \Delta P}{\mu L} \right)^{\frac{3-q}{q-1}} R^{\frac{q+1}{q-1}}. \quad (3.45)$$

En el caso particular  $q = 2$ , se recupera el resultado correspondiente al fluido newtoniano, previamente presentado en la ecuación (2.28).

### 3.3. CAUDAL (O FLUJO VOLUMÉTRICO) Y DIFERENCIA DE PRESIÓN EN FLUIDOS NO NEWTONIANOS

El caudal, o flujo volumétrico, de un fluido no newtoniano al igual que en el caso de un fluido newtoniano, se define mediante la integral indicada en la ecuación (2.29). Al sustituir la expresión de la velocidad  $v(r)$  dada en (3.35) dentro de la integral (2.29), se obtiene:

$$Q(R) = \int_0^R 2\pi \left[ \frac{q-1}{q} \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{q-1}} \left( R^{\frac{q}{q-1}} - r^{\frac{q}{q-1}} \right) \right] r dr. \quad (3.46)$$

Extrayendo las constantes fuera de la integral y evaluando esta, se llega a:

$$\begin{aligned} Q(R) &= 2\pi \frac{q-1}{q} \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{q-1}} \int_0^R \left( R^{\frac{q}{q-1}} - r^{\frac{q}{q-1}} \right) r dr \\ &= 2\pi \frac{q-1}{q} \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{q-1}} \left( R^{\frac{3q-2}{q-1}} \left( \frac{q}{2(3q-2)} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Simplificando la expresión anterior, se obtiene finalmente:

$$Q(R) = \left( \frac{\pi(q-1)}{3q-2} \right) \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( -\frac{dp}{dz} \right) \right)^{\frac{1}{q-1}} R^{\frac{3q-2}{q-1}}. \quad (3.48)$$

Esta expresión corresponde a la Ley de Poiseuille generalizada para fluidos no newtonianos. En el caso particular  $q = 2$ , se recupera el caso newtoniano, obteniéndose así la Ley de Poiseuille clásica, previamente presentada en la ecuación (2.31).

De manera análoga al caso newtoniano, el gradiente de presión a lo largo de la tubería es constante y negativo. Por ello, puede expresarse en función de la diferencia de presión  $\Delta P$  a lo largo de la tubería de longitud  $L$  como:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta P}{L}. \quad (3.49)$$

En consecuencia, el caudal volumétrico, definido como la cantidad de fluido que atraviesa una sección transversal por unidad de tiempo, queda dado por:

$$Q(R) = \left( \frac{\pi(q-1)}{3q-2} \right) \left( \frac{2^{\frac{q-4}{2}}}{\mu} \left( \frac{\Delta P}{L} \right) \right)^{\frac{1}{q-1}} R^{\frac{3q-2}{q-1}} \propto R^{\frac{3q-2}{q-1}} L^{-\frac{1}{q-1}}, \quad (3.50)$$

donde el símbolo  $\propto$  indica que el caudal volumétrico es directamente proporcional a una potencia del radio de la tubería, dada por  $\frac{3q-2}{q-1}$ , e inversamente proporcional a la longitud elevada a la potencia  $\frac{1}{q-1}$ . A diferencia del caso newtoniano, la sensibilidad del caudal

ante variaciones en el radio depende explícitamente del índice de flujo  $q$ .

Para fluidos no newtonianos, el recíproco del caudal volumétrico también posee unidades de tiempo/volumen y puede interpretarse como una medida generalizada de la resistencia al flujo. De manera análoga al caso newtoniano y en correspondencia con la Ley de Ohm, se define la resistencia hidráulica como:

$$R_h = \frac{\Delta P}{Q}. \quad (3.51)$$

Dado que el caudal está expresado por la ecuación (3.50), se deduce que:

$$\Delta P = \frac{\mu}{2^{\frac{q-4}{2}}} L \left( \frac{Q}{\left( \frac{\pi(q-1)}{3q-2} \right) R^{\frac{3q-2}{q-1}}} \right)^{q-1}. \quad (3.52)$$

Al multiplicar ambos lados por  $\frac{1}{Q}$ , se obtiene:

$$\frac{\Delta P}{Q} = \frac{\mu}{2^{\frac{q-4}{2}}} L \frac{1}{Q} \left( \frac{Q}{\left( \frac{\pi(q-1)}{3q-2} \right) R^{\frac{3q-2}{q-1}}} \right)^{q-1}. \quad (3.53)$$

Tras simplificar, la resistencia hidráulica queda expresada como:

$$R_h = L\mu 2^{-\frac{q-4}{2}} \left( \frac{3q-2}{\pi(q-1)} \right)^{q-1} R^{-(3q-2)} Q^{q-2} \propto LR^{-(3q-2)} Q^{q-2}. \quad (3.54)$$

Esta relación indica que la resistencia hidráulica es directamente proporcional a la longitud del conducto e inversamente proporcional al radio elevado a la potencia  $3q - 2$ . Además, la resistencia hidráulica depende del caudal según el factor  $Q^{q-2}$ : es directamente proporcional al caudal si  $q > 2$ , inversamente proporcional si  $q < 2$ , y resulta independiente del caudal en el caso particular  $q = 2$ , correspondiente a un fluido newtoniano. En este caso, se recupera la expresión de la resistencia hidráulica obtenida en la ecuación (2.33).

## DIFERENCIA DE PRESIÓN

La diferencia de presión a lo largo de una tubería puede deducirse a partir de la Ley de Poiseuille para fluidos no newtonianos (3.48). Al despejar el gradiente de presión  $\frac{dp}{dz}$  de dicha expresión se obtiene:

$$\frac{dp}{dz} = -\mu 2^{-\frac{q-4}{2}} \left( \frac{Q}{R^{\frac{3q-2}{q-1}}} \left( \frac{3q-2}{\pi(q-1)} \right) \right)^{q-1}. \quad (3.55)$$

Dado que el gradiente de presión en la dirección axial se define como en la ecuación (3.49), se obtiene que la diferencia de presión a lo largo de la tubería está dada por:

$$\Delta P = \mu 2^{-\frac{q-4}{2}} L \left( \frac{Q}{R^{\frac{3q-2}{q-1}}} \left( \frac{3q-2}{\pi(q-1)} \right) \right)^{q-1}. \quad (3.56)$$

Para determinar la distribución de presión en cualquier punto a lo largo del eje axial  $z$ , se integra la expresión del gradiente de presión (3.55) con respecto a  $z$ , lo que conduce a:

$$p(z) = -\mu 2^{-\frac{q-4}{2}} \left( \frac{Q}{R^{\frac{3q-2}{q-1}}} \left( \frac{3q-2}{\pi(q-1)} \right) \right)^{q-1} z + C, \quad (3.57)$$

donde  $C$  es la constante de integración. Esta constante se determina a partir de la condición de frontera  $p(0) = P_0$ , lo que conduce a  $C = P_0$ . Por lo tanto, la expresión final para la presión en cualquier punto  $z$  de la tubería es:

$$p(z) = P_0 - \mu 2^{-\frac{q-4}{2}} \left( \frac{Q}{R^{\frac{3q-2}{q-1}}} \left( \frac{3q-2}{\pi(q-1)} \right) \right)^{q-1} z. \quad (3.58)$$

La variación de la presión a lo largo de la tubería es lineal, describiendo una recta de pendiente negativa. Dicha pendiente depende del exponente  $q$ , lo que refleja la influencia del comportamiento reológico no newtoniano en la caída de presión. Al igual que en el caso newtoniano, la presión alcanza su valor máximo en  $z = 0$ , correspondiente a la entrada de la tubería, y su valor mínimo en  $z = L$ , correspondiente a la salida. Para  $q = 2$ , se recupera el caso newtoniano obtenido en la ecuación (2.37).

### 3.4. ANÁLISIS DEL ÁNGULO ÓPTIMO DE RAMIFICACIÓN Y BIFURCACIÓN EN FLUIDOS NO NEWTONIANOS

En esta sección se analizarán los ángulos óptimos de ramificación y bifurcación en sistemas de fluidos no newtonianos, nuevamente con un enfoque particular en el estudio del sistema vascular, específicamente en los vasos sanguíneos. En primer lugar, se examinará

el comportamiento de un vaso sanguíneo en términos de su ramificación, con el objetivo de determinar el ángulo óptimo bajo condiciones de flujo no newtoniano. Posteriormente, se profundizará en los factores que determinan el ángulo óptimo de bifurcación.

**3.4.1. Análisis del ángulo óptimo de ramificación.** Para llevar a cabo este análisis, se considera el mismo sistema geométrico empleado en el caso newtoniano, el cual consiste en un vaso sanguíneo principal, modelado como un conducto recto de radio  $r_1$ , del cual se ramifica un vaso secundario de radio  $r_2$ , con  $r_2 < r_1$ , formando un ángulo  $\theta$  con respecto al eje del vaso principal. A diferencia del caso anterior, el vaso principal presenta un caudal  $Q_1$ , mientras que el vaso secundario tiene un caudal  $Q_2$ , con  $Q_2 < Q_1$ . La configuración geométrica del sistema, ilustrada en la Figura 9, se mantiene inalterada, de modo que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  permanecen fijos, con  $BC$  perpendicular a  $AC$  y con distancias  $c = |AC|$  y  $b = |BC|$ .

La elección del ángulo de ramificación  $\theta$  determina la posición del punto  $O$  y, por ende, las longitudes  $L_1 = |AO|$  y  $L_2 = |OB|$ , las cuales continúan estando dadas por las relaciones geométricas

$$L_1 = c - b \cot(\theta), \quad L_2 = b \csc(\theta). \quad (3.59)$$

Estas expresiones dependen únicamente de la geometría del sistema y, por tanto, son válidas tanto para fluidos newtonianos como no newtonianos.

Para determinar el ángulo óptimo de ramificación en el caso de fluidos no newtonianos, el análisis se centrará nuevamente en el trayecto de ramificación  $AOB$ , donde la influencia del ángulo  $\theta$  sobre el comportamiento del flujo es más significativa. Se asume que el efecto del ángulo sobre la trayectoria  $AOC$  es despreciable.

Al igual que en el análisis del caso newtoniano, se parte del principio de optimización energética del organismo. Dado que la energía metabólica disponible es limitada, las configuraciones geométricas que minimizan el gasto energético total del sistema resultan óptimas. En el caso de fluidos no newtonianos, este gasto energético sigue descomponiéndose en un costo extrínseco y un costo intrínseco.

Por otro lado, el costo extrínseco continúa representando factores externos que afectan

la eficiencia del sistema y el costo intrínseco continúa representando el gasto energético asociado a la construcción y mantenimiento de cualquier estructura anatómica específica del organismo. El costo total de la estructura se expresa nuevamente como la suma del costo extrínseco y el costo intrínseco, cada uno multiplicado por los factores de conversión correspondientes para asegurar consistencia dimensional.

En las subsecciones siguientes se desarrollará detalladamente la expresión del costo extrínseco para fluidos no newtonianos, seguida del análisis del costo intrínseco y, finalmente, de la determinación del ángulo óptimo de ramificación bajo este marco teórico.

## MODELO DEL COSTO EXTRÍNSECO

Siguiendo el mismo enfoque presentado en el caso newtoniano, el ángulo de ramificación óptimo se determina minimizando la resistencia hidráulica total a lo largo de la trayectoria  $AOB$ . En este caso, sin embargo, la expresión de la resistencia hidráulica se modifica para incorporar el comportamiento no newtoniano del fluido. De acuerdo con la ecuación (3.54), la resistencia hidráulica, derivada de la Ley de Poiseuille para fluidos no newtonianos, es directamente proporcional a la longitud del conducto e inversamente proporcional al radio elevado a la potencia  $3q - 2$ . Además, la resistencia hidráulica depende del caudal según el factor  $Q^{q-2}$ .

En consecuencia, la resistencia total  $\mathcal{L}_1(\theta)$  puede expresarse como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(\theta) &= k \left[ \frac{L_1 Q_1^{q-2}}{r_1^{3q-2}} + \frac{L_2 Q_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \right] = k \left[ \frac{(c - b \cot(\theta)) Q_1^{q-2}}{r_1^{3q-2}} + \frac{b \csc(\theta) Q_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \right] \\ &= \frac{kc Q_1^{q-2}}{r_1^{3q-2}} - \frac{kb Q_1^{q-2}}{r_1^{3q-2}} \cot(\theta) + \frac{kb Q_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \csc(\theta).\end{aligned}\quad (3.60)$$

Aplicando la condición de optimalidad de primer orden,  $\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}_1(\theta) = 0$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}_1(\theta) &= 0 + \frac{kb Q_1^{q-2}}{r_1^{3q-2}} \csc^2(\theta) - \frac{kb Q_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \csc(\theta) \cot(\theta) = 0 \\ &= \frac{kb Q_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \csc^2(\theta) \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{3q-2} \left( \frac{Q_1}{Q_2} \right)^{q-2} - \frac{\cot(\theta)}{\csc(\theta)} \right] = 0.\end{aligned}\quad (3.61)$$

De manera equivalente,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\mathcal{L}_1(\theta) &= \frac{kbQ_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \csc^2(\theta) \left[ \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3q-2} \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^{q-2} - \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sin(\theta)} \right] = 0 \\ &= \frac{kbQ_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \csc^2(\theta) \left[ \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3q-2} \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^{q-2} - \cos(\theta) \right] = 0.\end{aligned}\quad (3.62)$$

Para que se satisfaga la condición  $\frac{d}{d\theta}\mathcal{L}_1(\theta) = 0$ , se analizan los siguientes casos:

- Si  $\frac{kbQ_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \csc^2(\theta) = 0$ , entonces  $\csc^2(\theta) = 0$ , lo cual implica que  $\theta = \csc^{-1}(0)$ . Sin embargo  $\csc^{-1}(0)$  no está definida, por lo que este caso se excluye.
- Si  $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3q-2} \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^{q-2} - \cos(\theta) = 0$ , entonces  $\cos(\theta) = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3q-2} \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^{q-2}$ , lo que conduce a

$$\theta_m = \cos^{-1} \left( \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3q-2} \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^{q-2} \right).$$

Para determinar si este valor corresponde a un minimizador válido, se analiza el rango de la expresión anterior y se verifica que la función  $\cos^{-1}(I)$  esté bien definida. Definiendo

$$I = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3q-2} \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^{q-2}, \quad (3.63)$$

se observa que la función  $\cos^{-1}(I)$  está definida únicamente si  $I \in [-1, 1]$ .

Dado que  $Q_2 < Q_1$  y ambos son positivos ( $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 > 0$ ), se deduce que  $\frac{Q_1}{Q_2} > 1$ . Por otra parte, debido al comportamiento pseudoplástico de la sangre, se tiene que  $1 < q < 2$ , lo que implica que  $q - 2 < 0$ . En consecuencia, al elevar un número mayor que uno a un exponente negativo, se obtiene un valor estrictamente comprendido entre cero y uno. Por tanto,

$$\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^{q-2} \in (0, 1).$$

De manera análoga, como  $r_2 < r_1$  y ambos son positivos ( $r_1 > 0$ ,  $r_2 > 0$ ), se cumple que  $\frac{r_2}{r_1} < 1$ . Además, dado que  $q > 1$ , se tiene que  $3q - 2 > 0$ . En consecuencia al elevar un número menor que uno a un exponente positivo, se obtiene nuevamente un valor entre cero y uno. Por lo tanto,

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3q-2} \in (0,1).$$

Así, al ser ambos factores estrictamente positivos y menores que uno, se concluye que

$$I = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3q-2} \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^{q-2} \in (0,1).$$

En particular, como  $(0,1) \subseteq [-1,1]$ , la función  $\cos^{-1}(I)$  se encuentra bien definida.

Por consiguiente, se concluye que  $\theta_m$  es un posible minimizador. Además, dado que la función  $\cos^{-1}(x)$  es decreciente en el intervalo  $(0,1)$ , y teniendo en cuenta que  $\cos^{-1}(1) = 0$  y  $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$ , se deduce que el rango de valores admisibles para  $\theta_m$  es el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

Con el fin de verificar que  $\theta_m$  corresponde a un mínimo absoluto de la función  $\mathcal{L}_1(\theta)$  en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ , se emplea el criterio de la segunda derivada. Recordando la primera derivada de  $\mathcal{L}_1(\theta)$  dada en la ecuación (3.62) y la definición de  $I$  (3.63), se tiene

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}_1(\theta) = \frac{kbQ_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \csc^2(\theta) [I - \cos(\theta)]. \quad (3.64)$$

Derivando nuevamente con respecto a  $\theta$ , se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} \mathcal{L}_1(\theta) &= \frac{kbQ_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \frac{d}{d\theta} [\csc^2(\theta)(I - \cos(\theta))] \\ &= \frac{kbQ_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \left[ \frac{d}{d\theta} (\csc^2(\theta))(I - \cos(\theta)) + (\csc^2(\theta)) \frac{d}{d\theta} (I - \cos(\theta)) \right] \\ &= \frac{kbQ_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \left[ -2 \csc^2(\theta) \cot(\theta) (I - \cos(\theta)) + \csc^2(\theta) \sin(\theta) \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Al evaluar la segunda derivada en el punto crítico  $\theta_m$ , se deduce que:

$$\frac{d^2}{d\theta_m^2} \mathcal{L}_1(\theta_m) = \frac{kbQ_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \left[ -2 \csc^2(\theta_m) \cot(\theta_m) (I - \cos(\theta_m)) + \csc^2(\theta_m) \sin(\theta_m) \right]. \quad (3.66)$$

Dado que, por hipótesis,  $\cos(\theta_m) = I$ , se tiene que  $I - \cos(\theta_m) = 0$ , por lo que la expresión anterior se simplifica a:

$$\frac{d^2}{d\theta_m^2} \mathcal{L}_1(\theta_m) = \frac{kbQ_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} [\csc^2(\theta_m) \sen(\theta_m)]. \quad (3.67)$$

Como  $k > 0$ ,  $b > 0$ ,  $Q_2^{q-2} > 0$ ,  $r_2^{3q-2} > 0$ ,  $\csc^2(\theta_m) > 0$  y  $\sen(\theta_m) > 0$  para  $\theta_m \in (0, \frac{\pi}{2})$ , se concluye que:

$$\frac{d^2}{d\theta_m^2} \mathcal{L}_1(\theta_m) > 0.$$

En consecuencia, de acuerdo con el criterio de la segunda derivada,  $\theta_m$  corresponde a un mínimo absoluto de la función  $\mathcal{L}_1(\theta)$ .

Para evaluar la validez del modelo propuesto, se sustituyen valores específicos para los radios y caudales relativos. En particular, se considera  $r_2 = \alpha r_1$  y  $Q_2 = \lambda Q_1$ , con  $\alpha \in (0, 1)$  y  $\lambda \in (0, 1)$ . Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 2.

**Tabla 2:** Ángulo óptimo de ramificación  $\theta_m$  para distintos valores de  $\alpha$ ,  $\lambda$  y  $q$ .

$\alpha$	$\lambda$	$r_2 = \alpha r_1$	$Q_2 = \lambda Q_1$	$q$	$\theta_m$
0.3	0.3	$0.3 r_1$	$0.3 Q_1$	1.1	$86^\circ$
0.3	0.3	$0.3 r_1$	$0.3 Q_1$	1.7	$89^\circ$
0.5	0.5	$0.5 r_1$	$0.5 Q_1$	1.5	$82^\circ$
0.7	0.7	$0.7 r_1$	$0.7 Q_1$	1.5	$70^\circ$
0.5	0.3	$0.5 r_1$	$0.3 Q_1$	1.2	$83^\circ$
0.5	0.7	$0.5 r_1$	$0.7 Q_1$	1.2	$75^\circ$
0.7	0.5	$0.7 r_1$	$0.5 Q_1$	1.9	$76^\circ$
0.7	0.9	$0.7 r_1$	$0.9 Q_1$	1.2	$58^\circ$
0.9	0.7	$0.9 r_1$	$0.7 Q_1$	1.5	$50^\circ$
0.9	0.5	$0.9 r_1$	$0.5 Q_1$	1.5	$57^\circ$

**Fuente:** Elaboración propia.

Obsérvese que varios de los resultados obtenidos corresponden a ángulos cercanos a  $90^\circ$ , es decir, a configuraciones en las que la ramificación es casi perpendicular al vaso principal. Aunque en este caso el modelo incorpora la dependencia del flujo con el caudal y el comportamiento reológico del fluido mediante el parámetro  $q$ , el funcional de costo considerado sigue teniendo en cuenta únicamente la resistencia al flujo sanguíneo a lo largo

de la trayectoria  $AOB$ .

En consecuencia, estos resultados sugieren que el modelo basado exclusivamente en el costo extrínseco puede resultar insuficiente para describir de manera realista la geometría de la ramificación vascular. En efecto, en un sistema biológico real el gasto energético no depende únicamente de la resistencia al flujo, sino también del costo asociado al mantenimiento de la estructura vascular. Por esta razón, a continuación se introduce el modelo del costo intrínseco, el cual incorpora el costo de mantenimiento del sistema.

### MODELO DEL COSTO INTRÍNSECO

De manera análoga al caso newtoniano, se considera el costo de mantenimiento de la estructura vascular a lo largo de la trayectoria  $AOB$ , el cual es proporcional al volumen del sistema.

En el caso de fluidos no newtonianos, este modelo permanece inalterado, ya que el volumen geométrico no depende de la reología del fluido, sino únicamente de la configuración geométrica de los conductos. En consecuencia, el volumen a lo largo de  $AOB$  está dado por:

$$\mathcal{L}_2(\theta) = K(L_1 r_1^2 + L_2 r_2^2). \quad (3.68)$$

El procedimiento de optimización es idéntico al desarrollado en el caso newtoniano, obteniéndose el mismo candidato a minimizador:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right). \quad (3.69)$$

Sin embargo, como se mostró previamente, este valor no es un minimizador válido, puesto que no pertenece al dominio de la función  $\cos^{-1}(x)$ , al cumplirse que  $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 > 1$ . En consecuencia, la expresión  $\cos^{-1}\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right)$  no está definida, lo que conduce a la exclusión de este caso. Por tanto, al igual que en el caso newtoniano, se concluye que el costo intrínseco considerado de manera aislada no permite determinar un ángulo óptimo de ramificación.

Este resultado muestra que dicha limitación no depende de la naturaleza reológica del

fluido, sino de la propia formulación del modelo, que considera únicamente un componente del gasto energético. En consecuencia, se hace necesario combinar este término con el costo extrínseco para obtener una descripción más realista del sistema vascular.

### COSTO TOTAL DE LA ESTRUCTURA AOB

Siguiendo el mismo enfoque que en el caso newtoniano, el costo total de la trayectoria AOB se define como la suma de los costos extrínseco e intrínseco. En consecuencia, a partir de las expresiones (3.60) asociada al costo extrínseco y (3.68) relacionada con el costo intrínseco, dicho costo puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta) &= \mathcal{L}_1(\theta) + \mathcal{L}_2(\theta) \\ &= k \left[ \frac{L_1 Q_1^{q-2}}{r_1^{3q-2}} + \frac{L_2 Q_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} \right] + K(L_1 r_1^2 + L_2 r_2^2) \\ &= L_1 \left( \frac{k Q_1^{q-2}}{r_1^{3q-2}} + K r_1^2 \right) + L_2 \left( \frac{k Q_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} + K r_2^2 \right).\end{aligned}\quad (3.70)$$

Definiendo  $A_1 = \left( \frac{k Q_1^{q-2}}{r_1^{3q-2}} + K r_1^2 \right)$  y  $A_2 = \left( \frac{k Q_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} + K r_2^2 \right)$ , la función de costo se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}(\theta) = L_1 A_1 + L_2 A_2 = A_1(c - b \cot(\theta)) + A_2 b \csc(\theta) = A_1 c - A_1 b \cot(\theta) + A_2 b \csc(\theta).\quad (3.71)$$

Se calcula la primera derivada de la función de costo (3.71) y se iguala a cero, obteniéndose

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}(\theta) = 0 + b A_1 \csc^2(\theta) - b A_2 \csc(\theta) \cot(\theta) = b A_2 \csc^2(\theta) \left[ \frac{A_1}{A_2} - \frac{\cot(\theta)}{\csc(\theta)} \right] = 0,\quad (3.72)$$

que equivale a

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}(\theta) = b A_2 \csc^2(\theta) \left[ \frac{A_1}{A_2} - \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{\sin(\theta)} \right] = b A_2 \csc^2(\theta) \left[ \frac{A_1}{A_2} - \cos(\theta) \right] = 0.\quad (3.73)$$

Se analizan dos casos:

- Si  $b A_2 \csc^2(\theta) = 0$ , entonces  $\csc^2(\theta) = 0$ , lo cual implica que  $\theta = \csc^{-1}(0)$ . Sin embargo  $\csc^{-1}(0)$  no está definida, por lo que este caso se excluye.

- Si  $\frac{A_1}{A_2} - \cos(\theta) = 0$ , entonces  $\cos(\theta) = \frac{A_1}{A_2}$ , lo que lleva a

$$\theta_R = \cos^{-1}\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \cos^{-1}\left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3q-2} \left(\frac{kQ_1^{q-2} + Kr_1^{3q}}{kQ_2^{q-2} + Kr_2^{3q}}\right)\right].$$

Para determinar si este valor representa un minimizador válido, es necesario analizar su rango y verificar que  $\cos^{-1}\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$  esté definida. Esto ocurre únicamente cuando  $\frac{A_1}{A_2} \in [-1, 1]$ . Con el fin de estudiar este rango, se consideran distintos casos. Para ello, se define  $A = kQ_1^{q-2} + Kr_1^{3q}$  y  $B = kQ_2^{q-2} + Kr_2^{3q}$ :

- Caso  $A < B$ . Esto ocurre cuando los términos del caudal dominan sobre los del radio. Dado que  $A < B$ , se cumple que  $\frac{A}{B} < 1$ . Además, como se indicó previamente,  $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3q-2} < 1$ . Por lo tanto,

$$0 < X = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3q-2} \frac{A}{B} < 1,$$

ya que ambos factores son positivos y menores que uno. Como  $X \in (0, 1)$  y la función  $\cos^{-1}(X)$  es decreciente en este intervalo y teniendo en cuenta que  $\cos^{-1}(1) = 0$  y  $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$ , se deduce que el rango de valores admisibles para  $\theta_R$  es el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

- Caso  $A > B$ . Esta situación corresponde al caso en que los términos asociados al radio dominan sobre los del caudal. En tal situación, se cumple que  $\frac{A}{B} > 1$ , mientras que, como se indicó anteriormente,

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3q-2} < 1.$$

En consecuencia, el producto

$$X = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3q-2} \frac{A}{B},$$

puede ser mayor o menor que uno. No obstante, el caso  $X > 1$  se descarta, dado que la función  $\cos^{-1}(X)$  solo está definida para  $X \in [-1, 1]$ . Por lo tanto, se restringe el análisis al caso  $X < 1$  y, puesto que todos los términos involucrados son positivos, se concluye que  $X \in (0, 1)$ .

De manera análoga al caso anterior, como  $X \in (0, 1)$  y  $\cos^{-1}(X)$  es una función decreciente en dicho intervalo con  $\cos^{-1}(1) = 0$  y  $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$ , se deduce que el rango de valores

admisibles para  $\theta_R$  es el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

En consecuencia, tanto en el primer como en el segundo caso se cumple que  $X \in (0, 1) \subseteq [-1, 1]$ , lo que garantiza que la función  $\cos^{-1}(X)$  está definida para valores relativos de  $k$  y  $K$ . Además, dado que en ambos casos se obtiene  $\theta_R \in (0, \frac{\pi}{2})$ , se concluye que el rango de  $\theta_R$  es el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ .

Finalmente, para verificar que  $\theta_R$  corresponde a un mínimo absoluto de la función  $\mathcal{L}(\theta)$  en el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ , se emplea el criterio de la segunda derivada.

Definiendo  $I = \frac{A_1}{A_2}$  y recordando la primera derivada de  $\mathcal{L}(\theta)$  dada en la ecuación (3.72), se sustituye  $I$  en dicha ecuación. Esto lleva a la siguiente expresión:

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{L}(\theta) = bA_2 \csc^2(\theta) [I - \cos(\theta)]. \quad (3.74)$$

Ahora, se deriva nuevamente respecto a  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} \mathcal{L}(\theta) &= bA_2 \frac{d}{d\theta} [\csc^2(\theta) (I - \cos(\theta))] \\ &= bA_2 \left[ \frac{d}{d\theta} (\csc^2(\theta)) (I - \cos(\theta)) + (\csc^2(\theta)) \frac{d}{d\theta} (I - \cos(\theta)) \right] \\ &= bA_2 [-2 \csc^2(\theta) \cot(\theta) (I - \cos(\theta)) + \csc^2(\theta) \sen(\theta)]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Evaluando en el punto crítico  $\theta_R$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d^2}{d\theta_R^2} \mathcal{L}(\theta_R) = bA_2 [-2 \csc^2(\theta_R) \cot(\theta_R) (I - \cos(\theta_R)) + \csc^2(\theta_R) \sen(\theta_R)]. \quad (3.76)$$

Se sabe, por hipótesis, que  $\cos(\theta_R) = I$ , lo que implica que  $I - \cos(\theta_R) = 0$ . En consecuencia, la expresión se simplifica a:

$$\frac{d^2}{d\theta_R^2} \mathcal{L}(\theta_R) = bA_2 [\csc^2(\theta_R) \sen(\theta_R)]. \quad (3.77)$$

Dado que  $b > 0$ ,  $k > 0$ ,  $K > 0$ ,  $Q_2^{q-2} > 0$ ,  $r_2^2 > 0$  y  $r_2^{3q-2} > 0$ , se tiene que

$$A_2 = \frac{kQ_2^{q-2}}{r_2^{3q-2}} + Kr_2^2 > 0.$$

Además, como  $\csc^2(\theta_R) > 0$  y  $\sin(\theta_R) > 0$  para  $\theta_R \in (0, \frac{\pi}{2})$ , se concluye que

$$\frac{d^2}{d\theta_R^2} \mathcal{L}(\theta_R) > 0.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el criterio de la segunda derivada, se puede afirmar que  $\theta_R$  corresponde a un mínimo absoluto de la función  $\mathcal{L}(\theta)$ . En consecuencia,  $\theta_R$  representa el ángulo óptimo de ramificación, el cual minimiza el gasto energético a lo largo del trayecto  $AOB$ .

Este resultado coincide con el minimizador del modelo extrínseco  $\theta_m$  únicamente en casos particulares:

- Si  $r_2 \rightarrow 0$ , con  $k > 0$  y  $K > 0$ , es decir, cuando el radio del vaso secundario tiende a cero, los aportes asociados a dicho vaso desaparecen y se obtiene  $\theta_m = \theta_R$ , lo que corresponde a una situación límite del sistema.
- Si  $K = 0$  y  $k > 0$ , el funcional de costo total se reduce al costo extrínseco, por lo que se recupera el minimizador  $\theta_m = \theta_R$ .

Para evaluar la validez del modelo, se consideran las leyes empíricas de Roux. Al igual que en el caso newtoniano, el modelo satisface únicamente la tercera regla, ya que el ángulo óptimo de ramificación obtenido se encuentra dentro del rango  $(0, \frac{\pi}{2})$ , es decir, entre 0 y 90°.

Las dos primeras reglas están asociadas específicamente a configuraciones de bifurcación, las cuales no son consideradas en el presente análisis. En consecuencia, y de manera consistente con el caso newtoniano, se concluye que el modelo reproduce parcialmente las observaciones empíricas. Esto indica que, aunque el modelo es adecuado dentro de su alcance, resulta necesario extender el análisis al caso de bifurcación para lograr una descripción más completa, lo cual se abordará en la Sección 3.4.2.

## ANÁLISIS DE UNIDADES

Una forma de interpretar la función combinada (3.70) es considerarla como una medida de la potencia disipada por el flujo. La potencia se define como el trabajo realizado por unidad de tiempo, el cual, en este contexto, está relacionado con el flujo. El trabajo, por su parte, tiene dimensiones de fuerza por distancia. Para mayor claridad, es necesario entender las unidades de los factores de conversión constantes  $k$  y  $K$ .

En el análisis dimensional, comúnmente se emplean las unidades fundamentales de masa, longitud y tiempo, denotadas respectivamente por  $[M]$ ,  $[L]$  y  $[T]$ . La dimensión de la fuerza, que es  $(masa) \times (longitud) \times (tiempo)^{-2}$ , se denota como  $[M][L][T]^{-2}$ .

Al analizar la función del costo total (3.70), se observa que la primera expresión entre paréntesis tiene las siguientes unidades: las longitudes  $L_1$  y  $L_2$  tienen unidades de  $[L]$ , los caudales  $Q_1^{q-2}$  y  $Q_2^{q-2}$  tienen unidades de  $([L^3][T^{-1}])^{q-2} = [L^{3(q-2)}][T^{-(q-2)}]$ , y los radios  $r_1^{3q-2}$  y  $r_2^{3q-2}$  tienen unidades de  $[L]^{3q-2}$ .

De este modo, las unidades correspondientes a la primera expresión de la función combinada (3.70) son:

$$\frac{[L][L^{3(q-2)}][T^{-(q-2)}]}{[L]^{3q-2}} = [L^{1+3(q-2)-(3q-2)}][T^{-(q-2)}].$$

Simplificando el exponente de  $[L]$ :

$$1 + 3(q - 2) - (3q - 2) = 1 + 3q - 6 - 3q + 2 = -3.$$

Así, las unidades resultantes son:

$$[L^{-3}][T^{-(q-2)}].$$

Por otro lado, de acuerdo con la definición anterior, la potencia tiene unidades de:

$$([M][L][T]^{-2})[L][T]^{-1} = [M][L]^2[T]^{-3}.$$

Por lo tanto, para que el término en cuestión esté en unidades de potencia, el factor de conversión  $k$  debe tener unidades de:

$$[M][L]^5[T]^{-3+(q-2)}.$$

De manera similar, la segunda expresión entre paréntesis de la función combinada (3.70) tiene unidades de  $[L]^3$ . Análogamente, para que esta expresión también sea coherente con las unidades de potencia, el factor de conversión  $K$  debe tener unidades de:

$$[M][L]^{-1}[T]^{-3}.$$

## ANÁLISIS DE UN VASO NO RAMIFICADO

Ahora se analiza el costo total de un único vaso no ramificado de radio  $r$  y longitud  $L$  (similar al mostrado en la Figura 7), así como su contribución al costo total del sistema en el régimen no newtoniano. Como se mencionó previamente, el costo total de una estructura dada se expresa como la suma del costo extrínseco y del costo intrínseco. En consecuencia, el costo total del vaso se modela mediante el siguiente funcional:

$$\mathcal{L}(r) = kLr^{-(3q-2)}Q^{q-2} + KLr^2. \quad (3.78)$$

El primer término corresponde al costo extrínseco, el cual se puede interpretar como la potencia requerida para bombear sangre a través del vaso. El segundo término corresponde al costo intrínseco, que se interpreta como la potencia necesaria para mantener el volumen de sangre adecuado para llenar el vaso. En el caso no newtoniano, el primer término es proporcional a la potencia inversa  $(3q - 2)$  del radio y para optimizarlo, se requiere que el radio sea lo más grande posible. Por otro lado, el segundo es proporcional al cuadrado del radio y, por lo tanto, el radio debe ser lo más pequeño posible.

Si se busca una configuración óptima de ramificación o bifurcación, se debe esperar que cada vaso individual sea también óptimo. Es decir, cada vaso debe minimizar su propio costo, el cual está dado por el funcional (3.78). Para encontrar el radio que minimiza el funcional (3.78), se aplica un proceso similar al utilizado en los modelos anteriores. Partiendo de la condición de la primera derivada:

$$\frac{d}{dr}\mathcal{L}(r) = -kL(3q - 2)Q^{q-2}r^{-(3q-1)} + 2KLr, \quad (3.79)$$

y aplicando la condición de que  $\frac{d}{dr}\mathcal{L}(r) = 0$ , se dividen ambos lados entre  $L$  y, posterior-

mente, se multiplican por  $r^{3q-1}$ , obteniéndose la siguiente expresión:

$$2Kr^{3q} = k(3q-2)Q^{q-2}. \quad (3.80)$$

Despejando  $r$ , se encuentra un posible minimizador:

$$r = \left( \frac{k(3q-2)Q^{q-2}}{2K} \right)^{1/3q}, \quad (3.81)$$

para verificar que  $r$  corresponde al mínimo absoluto de  $\mathcal{L}(r)$ , se emplea el criterio de la segunda derivada. Derivando nuevamente respecto a  $r$ , se obtiene:

$$\frac{d^2}{dr^2} \mathcal{L}(r) = kL(3q-1)(3q-2)Q^{q-2}r^{-3q} + 2KL. \quad (3.82)$$

Sustituyendo  $r$  de la ecuación (3.81), se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \mathcal{L}(r) &= kL(3q-1)(3q-2)Q^{q-2} \left( \left( \frac{k(3q-2)Q^{q-2}}{2K} \right)^{1/3q} \right)^{-3q} + 2KL \\ &= 2KL(3q-1) + 2KL \\ &= 6KLq. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Dado que  $L > 0$ ,  $K > 0$  y  $q > 0$ , se tiene que  $\frac{d^2}{dr^2} \mathcal{L}(r) > 0$ , lo que implica que  $r$  es el único mínimo absoluto de la función  $\mathcal{L}(r)$ , y por lo tanto, el radio óptimo del vaso.

A continuación, se analiza cómo se puede expresar el costo total de un vaso para el radio óptimo  $r$ . Dado que  $r$  está definido por la igualdad (3.81), despejando  $k$  se obtiene:

$$k = \frac{2Kr^{3q}}{(3q-2)Q^{q-2}}. \quad (3.84)$$

Sustituyendo esta expresión de  $k$  en la ecuación (3.78), se obtiene:

$$\mathcal{L}(r) = \left( \frac{2KLr^{3q}r^{-(3q-2)}Q^{q-2}}{(3q-2)Q^{q-2}} \right) + KLr^2 = KLr^2 \left( \frac{3q}{3q-2} \right) = \frac{KLr^2}{2} \left( \frac{6q}{3q-2} \right). \quad (3.85)$$

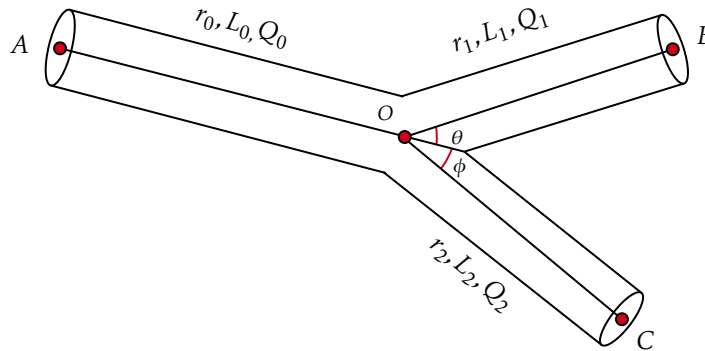
Finalmente, se define  $\beta = K \left( \frac{6q}{3q-2} \right)$  como una constante, por lo que el costo total de un vaso para el valor óptimo  $r$  es:

$$\mathcal{L}(r) = \frac{\beta}{2} L r^2. \quad (3.86)$$

**3.4.2. Análisis del ángulo óptimo de bifurcación.** De manera análoga al caso newtoniano, se aborda ahora el análisis del ángulo óptimo de bifurcación para un fluido no newtoniano. A partir del modelo inicial, el estudio se extiende a una bifurcación compuesta por tres ramas, tal como se ilustra en la Figura 17. En este esquema, los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se consideran fijos, mientras que la posición del punto de bifurcación  $O$ , situado en el mismo plano, determina los ángulos óptimos de ramificación  $\phi$  y  $\theta$ .

Para el caso no newtoniano, los radios, longitudes y caudales de los vasos  $AO$ ,  $OB$  y  $OC$  se denotan, respectivamente, por  $(r_0, L_0, Q_0)$ ,  $(r_1, L_1, Q_1)$  y  $(r_2, L_2, Q_2)$ . Este planteamiento permite estudiar la optimización del ángulo total de bifurcación, definido como  $\phi + \theta$ .

**Figura 17:** Bifurcación de un vaso sanguíneo: caso no newtoniano



**Fuente:** Elaboración propia

Con el fin de determinar dicho ángulo óptimo, se analizan tres configuraciones distintas, representadas en las Figuras 18, 19 y 20. En cada una de ellas, se considera un pequeño cambio en la ubicación del punto de bifurcación  $O$  hacia un nuevo punto  $O'$ . En cada caso, la distancia de  $O$  a  $O'$  es de  $\delta$ , la cual es pequeña en comparación con las distancias  $AO$ ,  $OB$  y  $OC$ . Al igual que en el caso newtoniano, la fuerza que induce el desplazamiento del punto de bifurcación  $O$  puede considerarse como la suma de las fuerzas asociadas a cada vaso, donde la fuerza de cada vaso se interpreta como su costo total óptimo. Por lo tanto, la fuerza total que actúa sobre el punto de bifurcación está dada por

$$F(\tilde{\delta}, y(\tilde{\delta}), y'(\tilde{\delta})) = y(\tilde{\delta}) = \mathcal{L}_0(\tilde{\delta}) + \mathcal{L}_1(\tilde{\delta}) + \mathcal{L}_2(\tilde{\delta}). \quad (3.87)$$

De acuerdo con la relación (3.86), los costos totales óptimos de cada vaso se pueden expresar como:

$$\mathcal{L}_n(\tilde{\delta}) = \frac{\beta}{2} L_n(\tilde{\delta}) r_n^2, \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \quad (3.88)$$

donde  $L_n(\tilde{\delta})$  representa el cambio en la longitud del vaso  $n$  al modificar la posición del punto de bifurcación, y  $r_n$  su respectivo radio. Dado que la distancia entre  $O$  y  $O'$  es  $\delta$ , y de acuerdo con la ecuación (2.65) presentada en el caso newtoniano, el trabajo necesario para desplazar el punto de bifurcación en el intervalo  $[0, \delta]$  se expresa como

$$W(y(\tilde{\delta})) = \int_0^\delta F(\tilde{\delta}, y(\tilde{\delta}), y'(\tilde{\delta})) d\tilde{\delta}. \quad (3.89)$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en el caso newtoniano, al aplicar el Teorema 1.10 (ecuaciones de Euler-Lagrange) junto con la Observación 1.11 (dado que  $F$  no depende de  $y'(\tilde{\delta})$ ), se concluye que la derivada parcial de  $F(\cdot, \cdot, \cdot)$  con respecto a su segunda variable, evaluada en  $y(\tilde{\delta})$ , es nula. De este modo, se obtiene que

$$F(\tilde{\delta}, y(\tilde{\delta}), y'(\tilde{\delta})) = y(\tilde{\delta}) = k, \quad \text{para alguna constante } k \in \mathbb{R}, \quad (3.90)$$

es decir,  $y(\tilde{\delta})$  es constante.

Además, dado que  $y(0) = 0$ , se tiene que

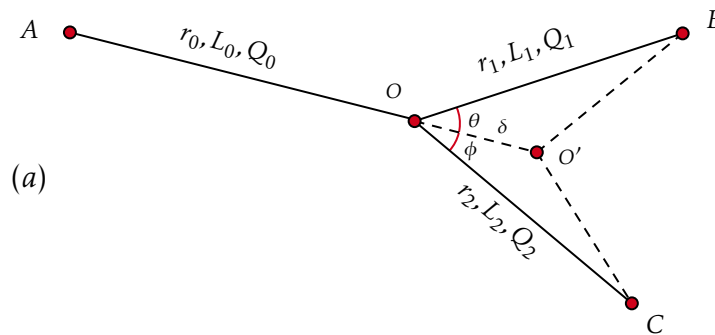
$$F(\tilde{\delta}, y(\tilde{\delta}), y'(\tilde{\delta})) = y(\tilde{\delta}) = 0, \quad \text{para todo } \tilde{\delta}. \quad (3.91)$$

A partir de este resultado, y de manera análoga al caso newtoniano, se analizan sus implicaciones en cada una de las configuraciones representadas en las Figuras 18, 19 y 20. Las deducciones obtenidas coinciden con las del caso newtoniano, lo que permite concluir que el ángulo óptimo de bifurcación en el caso no newtoniano es el mismo. Esto se debe a que el resultado depende únicamente de la configuración geométrica del sistema y no del caudal. Es decir, el ángulo óptimo está dado por

$$(\theta + \phi) = \cos^{-1} \left( \frac{(r_1^3 + r_2^3)^{4/3} - r_1^4 - r_2^4}{2r_1^2 r_2^2} \right). \quad (3.92)$$

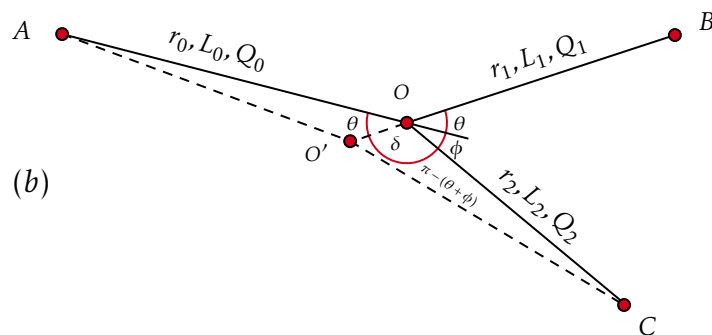
En cuanto a la comprobación de las leyes empíricas de Roux para el caso no newtoniano, con el fin de verificar que el modelo desarrollado constituye una representación adecuada del fenómeno de ramificación vascular, se sigue el mismo procedimiento descrito para el caso newtoniano en la sección (2.4.2). Dado que se obtiene el mismo resultado, se concluye que el modelo puede considerarse una aproximación bastante realista.

**Figura 18:** Configuración (a) y sus respectivos cambios



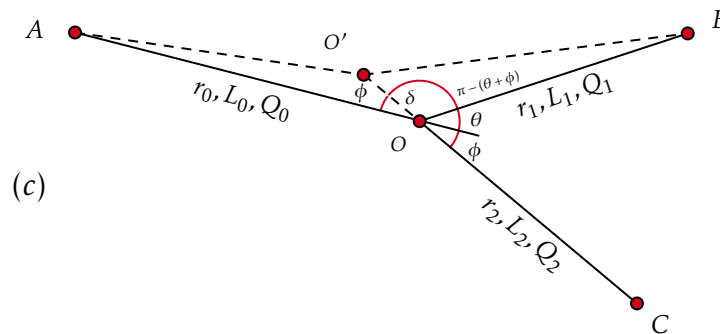
**Fuente:** Elaboración propia

**Figura 19:** Configuración (b) y sus respectivos cambios



**Fuente:** Elaboración propia

**Figura 20:** Configuración (c) y sus respectivos cambios



**Fuente:** Elaboración propia

### 3.5. LONGITUD DEL SISTEMA VASCULAR Y AUMENTO DEL ÁREA TRANSVERSAL

En esta sección se estudian dos propiedades geométricas fundamentales del sistema vascular: su longitud total y el aumento promedio del área de la sección transversal a lo largo de las bifurcaciones arteriales. A partir de los conceptos desarrollados en el Capítulo 2, en particular, la Ley de Poiseuille y la minimización de costos energéticos intrínsecos y extrínsecos, se modela el sistema como una red óptima con ángulos de ramificación y bifurcación determinados por dicho proceso de optimización.

De este marco se derivan relaciones fundamentales, como la Ley de Murray y la conservación del flujo (Ecuación 2.128), que permiten representar el sistema vascular como un árbol ramificado. A partir de esta representación, es posible estudiar tanto la longitud total como el aumento del área de la sección transversal a lo largo de las bifurcaciones arteriales. Siguiendo este enfoque, y con base en las ideas propuestas por <sup>51</sup>, se analiza cómo estas magnitudes escalan desde los grandes vasos hasta los capilares.

#### LONGITUD DEL SISTEMA VASCULAR

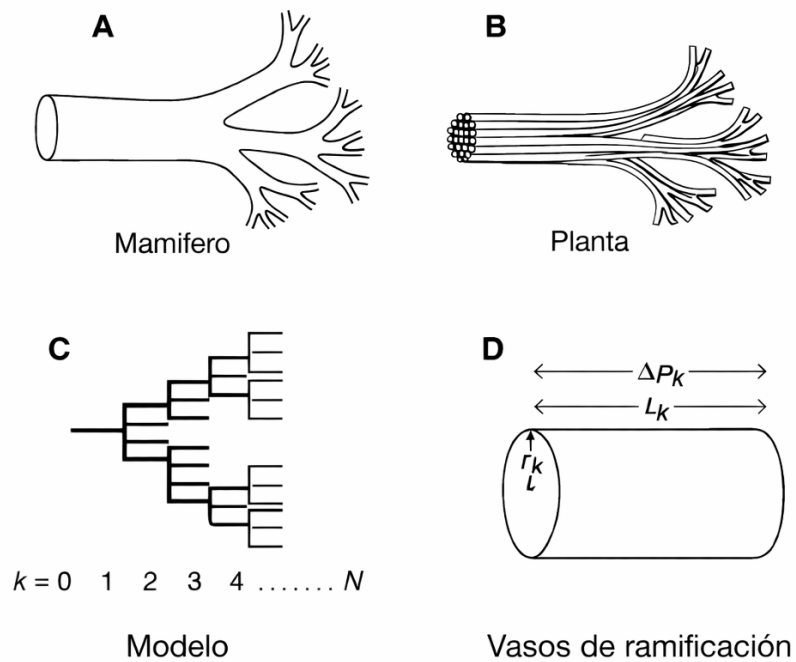
En esta sección se aplican las ideas desarrolladas previamente, junto con el modelo propuesto por <sup>52</sup>, con el objetivo de estimar la longitud total del sistema vascular en mamíferos, incluyendo el caso humano.

<sup>51</sup> WEST, Geoffrey B.; BROWN, James H y ENQUIST, Brian J. *A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology*. En: *Science*. 276. 5309 (1997), p. 122–126.

<sup>52</sup> *Ibid.*, p. 122–126.

Los seres vivos dependen del transporte de materiales a través de redes ramificadas que permiten abastecer de nutrientes todas sus partes. En este contexto, diversos sistemas biológicos de distribución como el sistema cardiovascular y respiratorio de los vertebrados, pueden describirse mediante una red ramificada en la que los tamaños de los tubos disminuyen regularmente<sup>53</sup>. La Figura 21 ilustra ejemplos representativos de estas redes: en (A) se muestran los sistemas circulatorio y respiratorio de mamíferos, mientras que en (B) se presenta el sistema vascular de las plantas.

**Figura 21:** Representación esquemática de segmentos de redes de distribución biológica



**Fuente:** Adaptado de<sup>54</sup>

El modelo desarrollado por<sup>55</sup> proporciona un marco teórico unificado para describir estas redes y se fundamenta en tres principios esenciales. En primer lugar, la red debe presentar un patrón de ramificación fractal que permita llenar el espacio y abastecer todo

<sup>53</sup> Ibid., p. 122–126.

<sup>55</sup> Ibid., p. 122–126.

el volumen del organismo. En segundo lugar, las unidades terminales de la red (como los capilares en el sistema vascular) se consideran invariantes en tamaño, independientemente de la escala del organismo. Por último, se asume que el sistema está optimizado para minimizar el gasto energético asociado al transporte de recursos.

Cabe señalar que como se menciona en <sup>56</sup>, este modelo constituye una representación idealizada, ya que no considera ciertos efectos como el estrechamiento de los vasos, o la posible turbulencia del flujo. Para el desarrollo del modelo, se utilizará la terminología propia del sistema vascular aorta, venas, arterias, arteriolas y capilares.

En el caso general, la red está compuesta por  $N$  niveles de ramificación, que van desde la aorta (nivel 0) hasta los capilares (nivel  $N$ ). Como se muestra en la Figura 21 (C), esta estructura puede representarse de manera topológica, donde  $k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$  indica el nivel de ramificación. Un vaso típico en el nivel  $k$  se caracteriza por una longitud  $L_k$ , un radio  $r_k$  y una diferencia de presión  $\Delta p_k$ , tal como se ilustra en la Figura 21 (D).

Cada vaso se ramifica en  $n_k$  vasos de menor tamaño, de modo que el número total de vasos en el nivel  $k$  es  $N_k = n_0 n_1 \dots n_k$ . Para caracterizar la ramificación, se introducen los factores de escala, también denominados factores de reducción, definidos como  $\beta_k = \frac{r_{k+1}}{r_k}$ ,  $\gamma_k = \frac{L_{k+1}}{L_k}$ , correspondientes al radio y la longitud, respectivamente.

Como se menciona en <sup>57</sup>, la minimización de la energía disipada en la red, de acuerdo con el tercer principio, conduce a una estructura fractal autosimilar. En este contexto, la autosimilitud implica que los factores de reducción del radio y la longitud, así como el número de vasos generados en cada ramificación, son constantes a lo largo de la red. Es decir,

$$\beta_k = \beta, \quad \gamma_k = \gamma, \quad n_k = n, \quad (3.93)$$

para todo nivel  $k$ . De este modo, el número de vasos en el nivel  $k$  queda determinado por  $N_k = n^k$ , el cual coincide con el número de ramificaciones en dicho nivel.

---

<sup>56</sup> *Ibíd.*, p. 122–126.

<sup>57</sup> *Ibíd.*, p. 122–126.

- **Nivel 0** (inicio):  $n^0$  vasos.
- **Nivel 1**:  $n^1$  vasos.
- **Nivel 2**:  $n^2$  vasos.
- $\vdots$
- **Nivel N**:  $n^N$  vasos.

En consecuencia, el número total de vasos desde la aorta (nivel 0) hasta el nivel  $N$  (capilares) está dado por la suma geométrica

$$\sum_{k=0}^N n^k = \frac{n^{N+1} - 1}{n - 1}. \quad (3.94)$$

Esta expresión corresponde también al número de ramificaciones de la red. Para determinar el factor de reducción de la longitud  $\gamma$ , se considera que  $r_k$  es considerablemente menor que  $L_k$  y que el número total de niveles de ramificación  $N$  es grande. Bajo estas condiciones, el volumen asociado a la red en el nivel  $k$  puede aproximarse como la suma de esferas, cuyo diámetro es comparable con la longitud característica de los vasos en dicho nivel, es decir,

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{L_k}{2}\right)^3 N_k.$$

La condición según la cual el fractal conserva el volumen de un nivel al siguiente puede expresarse como

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{L_k}{2}\right)^3 N_k \approx \frac{4}{3}\pi\left(\frac{L_{k+1}}{2}\right)^3 N_{k+1}. \quad (3.95)$$

De esta relación se obtiene

$$\gamma_k^3 = \left(\frac{L_{k+1}}{L_k}\right)^3 \approx \frac{N_k}{N_{k+1}} = \frac{1}{n}, \quad (3.96)$$

de donde se sigue que

$$\gamma_k \approx n^{-1/3} \approx \gamma. \quad (3.97)$$

Por otra parte, para determinar el factor de reducción del radio  $\beta$ , se asume la conservación del área transversal en cada ramificación es decir, la suma de las áreas transversales

de las ramas hijas es igual al área de la rama madre. Esto se expresa como

$$\pi r_k^2 = n\pi r_{k+1}^2. \quad (3.98)$$

De aquí se sigue que

$$\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^2 = \frac{1}{n}, \quad (3.99)$$

y, en consecuencia,

$$\beta = \frac{r_{k+1}}{r_k} = n^{-1/2}. \quad (3.100)$$

Este resultado es característico de los vasos de mayor calibre, como la aorta y las arterias principales. En vasos de menor calibre, es habitual considerar la generalización de la Ley de Murray para ramificaciones simétricas<sup>58</sup>, la cual satisface

$$r_k^3 = nr_{k+1}^3, \quad (3.101)$$

de donde se obtiene

$$\beta = n^{-1/3}. \quad (3.102)$$

A partir de este punto, el análisis se restringe al caso de bifurcaciones simétricas. En este tipo de ramificación, cada vaso se divide en dos ramas, por lo que inicialmente se tiene  $n = 2$ . Para simplificar el modelo, se supone que la rama primaria (la aorta) se bifurca de forma simétrica en vasos de igual radio. Si ( $r_1 = r_2$ ), la Ley de Murray, ecuación (2.128) puede reescribirse como

$$r_1 = 2^{-1/3}r_0 \approx 0.794r_0. \quad (3.103)$$

Se asume además que cada vaso del sistema vascular se origina a partir de una bifurcación equivalente a la anterior y del vaso más grande inmediatamente anterior.

Bajo estas hipótesis, la red arterial puede describirse en términos de niveles de bifurcación. Considerando  $n = 2$ , en cada nivel  $k$  de bifurcación hay  $2^k$  vasos, lo cual coincide con el número de bifurcaciones en dicho nivel. De acuerdo con la ecuación (3.94), para  $n = 2$ ,

---

<sup>58</sup> Ibid., p. 122–126.

el número total de vasos desde la aorta hasta el nivel  $N$  está dado por

$$2^{N+1} - 1. \quad (3.104)$$

Esta expresión corresponde también con el total de bifurcaciones desde la aorta hasta el nivel  $N$ .

De acuerdo con la ecuación (3.103), el radio de cada vaso después de un nivel de bifurcación es del 79.4% del radio del vaso anterior. Esto puede expresarse de forma general como

$$r_{k+1} = 0.794 r_k. \quad (3.105)$$

En particular, tras el nivel  $k = 0$  de bifurcación se obtiene

$$r_1 = 0.794 r_0, \quad (3.106)$$

y después del nivel  $k = 1$  de bifurcación,

$$r_2 = 0.794 r_1 = (0.794)^2 r_0, \quad (3.107)$$

Por lo tanto, el radio en el nivel  $k$  puede expresarse como

$$r_k = (0.794)^k r_0. \quad (3.108)$$

Aquí,  $r_k$  representa el radio de los vasos en el  $k$ -ésimo nivel de bifurcación, donde  $k \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$ , mientras que  $r_0$  hace referencia al radio del vaso primario, es decir, la aorta.

En mamíferos, el radio típico de un capilar es aproximadamente  $5 \mu\text{m} = 5 \times 10^{-6} \text{ m}$ ,<sup>59</sup>. Dado que el capilar es el vaso sanguíneo más pequeño del sistema vascular, el número  $k$  de niveles de bifurcación necesarios para pasar desde una aorta de radio  $r_0$  hasta los capilares debe satisfacer la ecuación

$$(2^{-1/3})^k r_0 = 5 \times 10^{-6} \text{ m}. \quad (3.109)$$

---

<sup>59</sup> ADAM, John A. *Op. cit.*, p. 196–207.

Tomando como referencia el caso de un mamífero como un perro de tamaño medio, cuyo radio aórtico típico es  $r_0 \approx 0.5\text{cm} = 5 \times 10^{-3}\text{m}$ ,<sup>60</sup> se concluye que

$$(2^{-1/3})^k = 10^{-3} \text{ y } k = N = \frac{-3}{\log_{10}(2^{-1/3})} \approx 30. \quad (3.110)$$

Por lo tanto, se requieren aproximadamente  $N \approx 30$  niveles de bifurcación para pasar de la aorta hasta los capilares en el sistema vascular de un perro de tamaño medio. El número de vasos en el nivel de bifurcación  $k$  está dado por  $2^k$ , por lo que en el nivel  $k = 30$ , correspondiente al último nivel de bifurcación, se tienen

$$2^{30} \approx 1.07 \times 10^9 \text{ vasos.} \quad (3.111)$$

Este número de vasos corresponde al número aproximado de capilares presentes en el sistema vascular de un perro de tamaño medio.

Como se menciona en<sup>61</sup>, este resultado es cercano a la estimación de  $1.2 \times 10^9$  propuesta por Rashevsky<sup>62</sup> y Zamir<sup>63</sup>. Asimismo, por la ecuación (3.104), el número total de vasos en el sistema vascular de un perro de tamaño medio, para  $N \approx 30$  niveles de bifurcación, está dado por

$$2^{31} - 1 = 2147483647 \text{ vasos.} \quad (3.112)$$

Para estimar la longitud total del sistema vascular, se supone que el vaso primario tiene longitud  $L_0$  y que la longitud de los vasos en cada nivel se reduce por un factor constante  $\gamma$ ,<sup>64</sup>:

$$L_k = \gamma L_{k-1}. \quad (3.113)$$

Dado que en el nivel de bifurcación  $k$  existen  $2^k$  vasos, todos de longitud  $L_k$ , la longitud total correspondiente a dicho nivel está dada por

$$Lt_k \text{ (Longitud total en el nivel de bif. } k) = 2^k L_k = 2^k \gamma L_{k-1}. \quad (3.114)$$

<sup>60</sup> Ibid., p. 196–207.

<sup>61</sup> Ibid., p. 196–207.

<sup>62</sup> RASHEVSKY, N. *Mathematical Biophysics, Vol. 2, Chapter XXVII*. New York: Dover, 1960.

<sup>63</sup> ZAMIR, M. *The branching structure of arterial trees*. En: *Comments Theoretical Biology*. 1 (1988), p. 15–37.

<sup>64</sup> ADAM, John A. *Op. cit.*, p. 196–207.

Por consiguiente, la longitud total del sistema vascular tras  $N$  niveles de bifurcación ( $Lt_N$ ) puede expresarse como:

$$\begin{array}{cccccc}
 Lt_N = & L_0 & + & 2\gamma L_0 & + & 2^2\gamma L_1 & + & 2^3\gamma L_2 & + \dots + & 2^N\gamma L_{N-1}. \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \text{Longitud} & & \text{Longitud} & & \text{Longitud} & & \text{Longitud} & & \text{Longitud} \\
 & \text{Inicial (nivel 0)} & & \text{Nivel 1} & & \text{Nivel 2} & & \text{Nivel 3} & & \text{Nivel } N
 \end{array} \quad (3.115)$$

Dado que la longitud de un vaso en el nivel de bifurcación  $k$  está determinada por la ecuación (3.113), se tiene

$$L_1 = \gamma L_0, L_2 = \gamma L_1 = \gamma^2 L_0, \dots, L_{N-2} = \gamma L_{N-3} = \gamma^{N-2} L_0, L_{N-1} = \gamma L_{N-2} = \gamma^{N-1} L_0. \quad (3.116)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (3.115), se obtiene

$$\begin{aligned}
 Lt_N &= L_0 + 2\gamma L_0 + 2^2\gamma(\gamma L_0) + 2^3\gamma(\gamma^2 L_0) + \dots + 2^N\gamma(\gamma^{N-1} L_0) \\
 &= L_0 + 2\gamma L_0 + (2\gamma)^2 L_0 + (2\gamma)^3 L_0 + \dots + (2\gamma)^N L_0 \\
 &= L_0 \left( 1 + 2\gamma + (2\gamma)^2 + (2\gamma)^3 + \dots + (2\gamma)^N \right). \quad (3.117)
 \end{aligned}$$

Si  $\gamma = \frac{1}{2}$ , la suma se simplifica y la longitud total del sistema vascular está dada por

$$Lt_N = L_0(N + 1). \quad (3.118)$$

Si  $\gamma \neq \frac{1}{2}$ , la expresión entre paréntesis corresponde a una suma geométrica finita, y así, la longitud total del sistema vascular es

$$Lt_N = L_0 \left( \sum_{k=0}^N (2\gamma)^k \right) = L_0 \frac{[(2\gamma)^{N+1} - 1]}{2\gamma - 1}. \quad (3.119)$$

Para hacer una estimación, se puede suponer que en mamíferos de tamaño medio, el sistema vascular está dominado principalmente por vasos de pequeño calibre. En este régimen, resulta apropiado utilizar el factor de reducción del radio mediante la Ley general de Murray, lo que conduce a un factor de reducción de la forma  $\beta = n_e^{-1/3}$ . Al comparar este

resultado con la expresión obtenida previamente para bifurcaciones simétricas (3.103), se tiene

$$n_e^{-1/3} = 2^{-1/3}, \quad (3.120)$$

de donde se deduce directamente que  $n_e = 2$ . Por otra parte, como se estableció anteriormente, el factor de reducción de la longitud satisface  $\gamma = n_e^{-1/3}$ . Por lo tanto, al considerar  $n_e = 2$ , se obtiene

$$\gamma = 2^{-1/3}. \quad (3.121)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que para el caso de un perro de tamaño medio se requieren aproximadamente  $N \approx 30$  niveles de bifurcación, y que la longitud de su aorta es aproximadamente  $L_0 \approx 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m}$ ,<sup>65</sup> se obtiene una estimación de la longitud total de su sistema vascular dada por:

$$Lt_{30} = (0.4) \frac{[(2^{2/3})^{31} - 1]}{2^{2/3} - 1} = 1133474.065 \text{ m} \approx 1133.474 \text{ km}. \quad (3.122)$$

A partir de estas ideas, el modelo puede extenderse al caso humano. Considerando un radio aórtico típico de  $r_0 \approx 1.25 \text{ cm} = 1.25 \times 10^{-2} \text{ m}$ , y utilizando la ecuación (3.108) se obtiene:

$$(0.794)^k (1.25 \times 10^{-2} \text{ m}) = 5 \times 10^{-6} \text{ m}. \quad (3.123)$$

De la ecuación (3.123) se sigue que

$$(0.794)^k = 4 \times 10^{-4} \quad \text{y} \quad k = N = \frac{\log_{10}(4 \times 10^{-4})}{\log_{10}(0.794)} \approx 34. \quad (3.124)$$

En consecuencia, se obtiene un número aproximado de  $N \approx 34$  niveles de bifurcación necesarios para pasar desde la aorta hasta los capilares en el ser humano. Esto implica que en el nivel  $k = 34$ , correspondiente al último nivel de bifurcación, se tienen aproximadamente

$$2^{34} \approx 1.72 \times 10^{10} \quad \text{vasos}. \quad (3.125)$$

Este número de vasos corresponde al número aproximado de capilares presentes en el

---

<sup>65</sup> *Ibíd.*, p. 196–207.

sistema vascular humano.

Asimismo, para  $N \approx 34$  niveles de bifurcación, el sistema vascular del ser humano contendría en total

$$2^{35} - 1 \approx 3.435 \times 10^{10} \text{ vasos.} \quad (3.126)$$

Finalmente, sin pérdida de generalidad, dado que el ser humano es un mamífero de tamaño medio-grande, la dinámica global del sistema vascular está más influenciada por los vasos de mayor calibre. En este régimen, la configuración de las bifurcaciones tiende a aproximarse a un comportamiento dominado por la conservación del área transversal. En este contexto, el factor de reducción del radio puede modelarse como  $\beta = n_e^{-1/2}$ .

Al comparar este comportamiento con el factor obtenido a partir de la Ley de Murray en el régimen de bifurcaciones simétricas (3.103),  $\beta = 2^{-1/3}$ , se obtiene la relación

$$n_e^{-1/2} = 2^{-1/3}, \quad (3.127)$$

de donde se obtiene

$$n_e = 2^{2/3}. \quad (3.128)$$

En consecuencia, el factor de reducción de la longitud viene dado por

$$\gamma = n_e^{-1/3} = (2^{2/3})^{-1/3} = 2^{-2/9}. \quad (3.129)$$

Ahora bien, considerando que la aorta humana tiene una longitud aproximada de  $L_0 \approx 30 \text{ cm} = 0.3 \text{ m}$  y que se requieren  $N = 34$  niveles de bifurcación para pasar desde la aorta hasta los capilares, se obtiene que un estimado de la longitud total del sistema vascular en el ser humano es:

$$Lt_{34} = (0.3) \frac{[(2^{7/9})^{35} - 1]}{2^{7/9} - 1} = 65740313.56 \text{ m} \approx 65740 \text{ km.} \quad (3.130)$$

## AUMENTO PROMEDIO DEL ÁREA DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL EN BIFURCACIONES ARTERIALES

Con el fin de analizar el aumento promedio del área de la sección transversal en bifurca-

ciones arteriales, se parte de la definición geométrica del área de un conducto de sección circular. El área de la sección transversal de un conducto circular, como una arteria, de radio  $r$ , está dada por

$$A = \pi r^2. \quad (3.131)$$

Antes de la bifurcación existe una única arteria, denominada arteria madre, con radio  $r_0$ . En este caso, el área de su sección transversal es

$$A_0 = \pi r_0^2 \quad (\text{arteria madre}). \quad (3.132)$$

Después de la bifurcación aparecen dos arterias hijas con radios  $r_1$  y  $r_2$ . Por tanto, el área total de la sección transversal viene dada por

$$A_1 + A_2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1^2 + r_2^2) \quad (\text{ramas hijas}). \quad (3.133)$$

El aumento promedio del área de la sección transversal se define como el cociente entre el área total después de la bifurcación y el área antes de la misma, es decir,

$$A_p = \frac{A_1 + A_2}{A_0} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_0^2}. \quad (3.134)$$

El parámetro  $A_p$  cuantifica el cambio en el área disponible para el flujo sanguíneo tras una bifurcación arterial. Como se mencionó en la Sección (2.4.2) para un flujo óptimo en un solo vaso, el flujo es proporcional al cubo del radio. Cuando un vaso se bifurca, el flujo total se reparte entre las ramas hijas. Al aplicar la Ley de Murray, ecuación (2.128), junto con la afirmación adicional de que  $r_2 = \alpha r_1$  con  $\alpha \in (0, 1]$ , se deduce que

$$r_0^3 = r_1^3 + (\alpha r_1)^3 \Rightarrow r_0 = r_1(1 + \alpha^3)^{1/3}. \quad (3.135)$$

Sustituyendo la expresión (3.135) en la ecuación (3.134), se concluye que

$$A_p(\alpha) = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_0^2} = \frac{r_1^2 + (\alpha r_1)^2}{[r_1(1 + \alpha^3)^{1/3}]^2} = \frac{r_1^2(1 + \alpha^2)}{r_1^2(1 + \alpha^3)^{2/3}} = \frac{1 + \alpha^2}{(1 + \alpha^3)^{2/3}}. \quad (3.136)$$

A continuación, se analiza el comportamiento de  $A_p(\alpha)$  para bifurcaciones simétricas y

asimétricas. En el caso de bifurcaciones simétricas se tiene  $\alpha = 1$ , lo que implica  $r_2 = r_1$ . A partir de la ecuación (3.136) se obtiene

$$A_p(1) = \frac{1 + 1^2}{(1 + 1^3)^{2/3}} = \frac{2}{2^{2/3}} = 2^{1/3} \approx 1.26. \quad (3.137)$$

Para bifurcaciones asimétricas, donde  $r_2 \neq r_1$  (es decir,  $\alpha \neq 1$ ), se consideran distintos valores de  $\alpha$ . En particular, para  $\alpha = 0.7$  se tiene

$$A_p(0.7) = \frac{1 + (0.7)^2}{(1 + (0.7)^3)^{2/3}} = \frac{1.49}{(1.343)^{2/3}} \approx 1.22, \quad (3.138)$$

mientras que para  $\alpha = 0.5$  se llega a

$$A_p(0.5) = \frac{1 + (0.5)^2}{(1 + (0.5)^3)^{2/3}} = \frac{1.25}{(1.125)^{2/3}} \approx 1.16. \quad (3.139)$$

Estos resultados muestran que el aumento promedio del área de la sección transversal es mayor en bifurcaciones simétricas, con un valor aproximado de 1.26, y disminuye conforme la bifurcación se vuelve más asimétrica.

Por otra parte, al analizar la función  $A_p(\alpha)$  se observa que posee un único máximo en el punto  $(1, 2^{1/3})$  en cualquier intervalo  $[0, b]$  donde  $b > 1$ . Para determinar este resultado, se emplea la condición de optimalidad de primer orden,  $A'_p(\alpha) = 0$ . Por lo tanto,

$$A'_p(\alpha) = \frac{2\alpha(1 + \alpha^3)^{2/3} - 2/3(1 + \alpha^2)(1 + \alpha^3)^{-1/3}3\alpha^2}{(1 + \alpha^3)^{4/3}} = 0. \quad (3.140)$$

Simplificando y factorizando términos comunes, se obtiene

$$A'_p(\alpha) = \frac{2\alpha(1 + \alpha^3)^{-1/3}[(1 + \alpha^3) - \alpha(1 + \alpha^2)]}{(1 + \alpha^3)^{4/3}} = 0. \quad (3.141)$$

El término entre corchetes se reduce a

$$(1 + \alpha^3) - \alpha(1 + \alpha^2) = 1 - \alpha. \quad (3.142)$$

Por tanto, la primera derivada queda expresada como

$$A'_p(\alpha) = \frac{2\alpha(1-\alpha)}{(1+\alpha^3)^{5/3}} = 0. \quad (3.143)$$

De esta expresión se concluye que  $A'_p(\alpha) = 0$  si  $\alpha = 0$  o  $\alpha = 1$ . Sin embargo, dado que  $\alpha \in (0, 1]$ , el único valor admisible es  $\alpha = 1$ .

Con el fin de determinar la naturaleza de este punto crítico, se emplea el criterio de la segunda derivada. En este sentido, se obtiene

$$A''_p(\alpha) = (1 + \alpha^3)^{-8/3} \left[ (2 - 4\alpha)(1 + \alpha^3) - 5\alpha^2(2\alpha - 2\alpha^2) \right]. \quad (3.144)$$

Simplificando el término entre corchetes, se obtiene

$$(2 - 4\alpha)(1 + \alpha^3) - 5\alpha^2(2\alpha - 2\alpha^2) = 2 - 4\alpha - 8\alpha^3 + 6\alpha^4, \quad (3.145)$$

y, por tanto,

$$A''_p(\alpha) = \frac{2 - 4\alpha - 8\alpha^3 + 6\alpha^4}{(1 + \alpha^3)^{8/3}}. \quad (3.146)$$

Al evaluar esta expresión en el punto crítico, se deduce

$$A''_p(1) = -0.62 < 0, \quad (3.147)$$

lo cual indica que  $\alpha = 1$  corresponde a un máximo local. Finalmente, al evaluar la función  $A_p(\alpha)$  en dicho punto se tiene

$$A_p(1) = 2^{1/3}. \quad (3.148)$$

En consecuencia, la función  $A_p(\alpha)$  presenta un único máximo en el punto  $(1, 2^{1/3})$ .

## BIBLIOGRAFÍA

AARONSON, Philip I y WARD, Jeremy PT y CONNOLLY, Michelle J: *The cardiovascular system at a glance*. John Wiley & Sons, 2020.

ABDUL HAMID, I. S. L. «Reynolds Number Effects in Designing a Micromixer for Biomems Application». Master's Thesis. Johor, Malaysia: Universiti Tun Hussein Onn Malaysia, 2008.

ABHILASH, HN et al. «Evaluation of Hemodynamics Parameters in Carotid Bifurcation System using Numerical Simulation». En: *Applications of Computation in Mechanical Engineering: Select Proceedings of 3rd International Conference on Computing in Mechanical Engineering (ICCME 2021)*. Springer. 2022, págs. 149-161.

ADAM, John A: *Blood vessel branching: beyond the standard calculus problem*. En: *Mathematics Magazine* 84.3 (2011), págs. 196-207.

ADAMS, J. C. et al. *Potential Role of Reynolds Number in Resolving Doppler- and Catheter-Based Transvalvular Gradient Discrepancies in Aortic Stenosis*. En: *Journal of Heart Valve Disease* 20.2 (2011), págs. 159-164.

ASGHARZADEH, H. y BORAZJANI, I. *Effects of Reynolds and Womersley Numbers on the Hemodynamics of Intracranial Aneurysms*. En: *Computational and Mathematical Methods in Medicine* 2016 (2016), pág. 7412926. DOI: 10.1155/2016/7412926.

BURTON, A. C. *Physiology and Biophysics of the Circulation*. Year Book Medical Publishers, Inc., 1965.

CAPE, E. G. et al. *Turbulent/Viscous Interactions Control Doppler/Catheter Pressure Discrepancies in Aortic Stenosis: The Role of the Reynolds Number*. En: *Circulation* 94.11 (1996), págs. 2975-2981. DOI: 10.1161/01.CIR.94.11.2975.

CHORIN, Alexandre J. y MARSDEN, Jerrold E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. 3.<sup>a</sup> ed. Vol. 4. Texts in Applied Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1993.

CLAY MATHEMATICS INSTITUTE, *Navier–Stokes Equation (Millennium Prize Problem)*. <https://www.claymath.org/millennium/navier-stokes-equation/>. Accedido el 26 de agosto de 2025.

DAY, S. W. et al. «Effect of Reynolds Number on Performance of a Small Centrifugal Pump». En: *Proceedings of the ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference*. Honolulu, HI, USA: ASME, 2003, págs. 1893-1899. DOI: 10.1115/FEDSM2003-45183.

DI PAOLO, José: *Mecánica de los Fluidos: Aspectos teóricos introductorios para Ingeniería*. 2.ª ed. Santa Fe: José Di Paolo, 2024.

DIGERNES, Ingrid et al. *A theoretical framework for determining cerebral vascular function and heterogeneity from dynamic susceptibility contrast MRI*. En: *Journal of Cerebral Blood Flow & Metabolism* 37.6 (2017), págs. 2237-2248.

GELFAND, Izrail Moiseevitch y SILVERMAN, Richard A: *Calculus of variations*. Courier Corporation, 2000.

JAVADZADEGAN, A. et al. *Correlation between Reynolds Number and Eccentricity Effect in Stenosed Artery Models*. En: *Technology and Health Care* 21.4 (2013), págs. 357-367. DOI: 10.3233/THC-130741.

LE, David et al. *Fully automated geometric feature analysis in optical coherence tomography angiography for objective classification of diabetic retinopathy*. En: *Biomedical optics express* 10.5 (2019), págs. 2493-2503.

LIMA, Elon Lages: *Curso de Análise*. Vol. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

MAGIN, C. M. et al. *Engineered Antifouling Microtopographies: The Role of Reynolds Number in a Model That Predicts Attachment of Zoospores of *Ulva* and Cells of *Cobetia Marina**. En: *Biofouling* 26.7 (2010), págs. 719-727. DOI: 10.1080/08927014.2010.511197.

MARUŠIĆ-PALOKA, Eduard: *Steady flow of a non-Newtonian fluid in unbounded channels and pipes*. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 10.09 (2000), págs. 1425-1445.

- MOTT, Robert L: *Mecánica de fluidos aplicada*. Pearson Educación, 1996.
- MUÑOZ, Eva: «Participación de los canales de calcio y las mitocondrias en la proliferación de las células de músculo liso y vascular». Tesis doct. 2012.
- NACHTIGALL, Werner: *Some Aspects of Reynolds Number Effects in Animals*. En: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 24 (2001), págs. 1401-1408. DOI: 10.1002/mma.277.
- PALOMINO, L: *Modelación numérica para determinar la orientación de una bifurcación en el Tramo B del Río Piura*. En: *Universidad de Piura* (2019).
- PATHAK, Hemant Kumar: *An Introduction to Nonlinear Analysis and Fixed Point Theory*. Springer Nature Singapore, 2018. DOI: 10.1007/978-981-10-8866-7.
- RASHEVSKY, N: *Mathematical Biophysics, Vol. 2, Chapter XXVII*. 1960.
- ROSEN, Robert: *Optimality principles in biology*. Springer, 2013.
- ROUX, W. «Doctoral Thesis on the Bifurcation of Blood Vessels». Tesis doct. University of Jena, 1878.
- SALDANA, J. *The Reynolds Number: A Journey from Its Origin to Modern Applications*. En: *Fluids* 9.299 (2024). DOI: 10.3390/fluids9090299.
- SHINBROT, Troy: *Biomedical Fluid Dynamics*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2019. ISBN: 9780198812586.
- THOMPSON, D'Arcy W. *On Growth and Form*. New York: Dover, 1992.
- WEST, Geoffrey B. y BROWN, James H. y ENQUIST, Brian J. *A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology*. En: *Science* 276.5309 (1997), págs. 122-126. DOI: 10.1126/science.276.5309.122.
- WIGGERT, David C y RAMADAN, Bassem H y POTTER, Merle C: *Mecánica de fluidos*. Cengage Learning, 2015.
- YAN, S. R. et al. *Analysis and Management of Laminar Blood Flow inside a Cerebral Blood Vessel Using a Finite Volume Software Program for Biomedical Engineering*. En: *Computer*

*Methods and Programs in Biomedicine* 190 (2020), pág. 105384. DOI: 10.1016/j.cmpb.2020.105384.

ZAMIR, M: *The branching structure of arterial trees*. En: *Comments Theor Biol* 1 (1988), págs. 15-37.

ZAMORA RODRIGUEZ, Ricardo: «Bifurcaciones de la ecuación de balance no lineal del buque». Tesis doct. Navales, 1992.