Soluciones positivas racionales de la ecuación $x^y = y^{mx}$

Luisa Fernanda Martínez Rojas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga

2006

Soluciones positivas racionales de la ecuación $x^y = y^{mx}$

Luisa Fernanda Martínez Rojas

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de

Licenciada en Matemáticas

Director
Marlio Paredes G

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga
2006

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

- **Dios**, por darme la fortaleza y la sabiduría para lograr todos mis propósitos.
- **Mis padres Hernando y Maritza**, por brindarme apoyo incondicional, compresión, amor y porque sin ellos hoy este proyecto no sería una realidad.
- **Mi tesorito Manuel Hernado**, por ser fuente de inspiración de mi vida.
- **Mis hermanas Natalia y Liliana y mi Abuela Margarita**, por su apoyo moral, afectivo y ser quienes han compartido conmigo muy bellos momentos de mi vida.
- **Mi amor Francisco Niño**, quien por su apoyo, compañía, comprensión y amor incondicional, me impulso para lograr este proyecto.
- Al profesor **Marlio Paredes**, por su colaboración y por su acertada orientación para la realización de este trabajo.
- Los **profesores**, por sus aportes en mi formación académica.
- Mis **compañeros de carrera, en especial a Diana, Beatriz y Andrea**, que de una u otra manera me apoyaron y me brindaron amistad incondicional.

TITLE: Positive Rational Solutions to $x^y = y^{mx}$:[*]
AUTHOR: Luisa Fernanda Martínez Rojas[**]

KEY WORDS: Diophantine Equation, p-adic number, Generalization of Euler, Positive rational solutions, exponentiation, Fundamental theorem of arithmetic.

DESCRIPTION

The curiosity of knowing, why is not possible the commutativity in the power, is the reason for this work; questions as, when $x^y < y^x$? or generalizing a little when $x^y = y^{mx}$ with $x \neq y$? this equation is known as the Euler generalization. Some of these questions were interesting for Daniel Bernoulli 277 years ago, the relation between x^y y y^x attrated his attention. Subsequently, the 29th of June of 1728 Bernoulli sent a letter to Goldbach stating without proof that his equation has only one solution in positive integers and infinitive rational solutions.
In the first chapter some important concepts are reminded in order to make easier the reading of the present paper. An interesting subject; orden p-adicc is also introduced, showing some examples and properties.
In the second chapter, solution of the equation $x^y = y^x$ with $x \neq y$, is studied. It is first worked out in the reals, then in te rationals and finally in the integers, finding the solutions of these equations through the parametrization equations made by Goldbach.
Finally, in the third chapter, are the solutions of the equation $x^y = y^{mx}$ for the cases $m = 2$ and $m = 3$ without demonstration, showing some interesting result.
This present work titled "Soluciones racionales positivas de la ecuación $x^y = y^{mx}$ is the result of the implementation of the theoretical-practical knowledge of the mathematics Teaching Program. We hope that this monograph can be useful for the students who want to know more about the equation $x^y = y^{mx}$ and general, why is not possible the commutativity.

---

[*] Monograph.
[**] Faculty of sciences, School of Mathematics. Marlio Paredes G, Ph. D. in Mathematics.

TITULO: Soluciones positivas racionales de la ecuación $x^y = y^{mx}$[*]
AUTOR: Luisa Fernanda Martínez Rojas[**]

PALABRAS CLAVES: Ecuación diofántica, Números p-adicos, Soluciones racionales positivas, Generalización de Euler, Potenciación, Teorema fundamental de la aritmética.

DESCRIPCIÓN

La curiosidad de saber el por qué la conmutatividad en la potenciación no es posible, motivó este trabajo, de preguntas como, ¿Cuándo $x^y < y^x$? ó viceversa, ¿Cuándo $x^y = y^x$? ó generalizando un poco, ¿Cuándo $x^y = y^{mx}$ con $x \neq y$?, esta ecuación es conocida como la generalización de Euler. Algunas de estas preguntas 277 años atrás le interesaron a Daniel Bernoulli; le llamó la atención la relación entre x^y y y^x. Posteriormente, el 29 de junio de 1728 Bernoulli le envió una carta a Goldbach afirmando las incontables soluciones racionales a $x^y = y^x$ con $x \neq y$ y una única solución entera positiva.
En el primer capítulo, recordamos algunos conceptos importantes para la lectura del presente trabajo y se introduce un tema interesante que es el Orden p-ádico, mostrando algunos ejemplos y propiedades.
En el segundo capítulo se estudia la solución de la ecuación $x^y = y^x$ con $x \neq y$, buscando estas, primero en los reales, luego en los racionales y finalmente en los enteros, encontrando la solución de estás ecuaciones a través de las ecuaciones paramétricas, hechas por Goldbach.
Finalmente, en el tercer capítulo, se muestran las soluciones de la ecuación $x^y = y^{mx}$ para los casos $m = 2$ y $m = 3$ sin demostración, presentando algunos resultados interesantes.
El presente trabajo titulado *Soluciones Racionales Positivas de la Ecuación* $x^y = y^{mx}$, es el resultado de la implementación de los conocimientos teórico prácticos del programa de Licenciatura en Matemáticas. Esperamos que esta monografía pueda ser de utilidad para los estudiantes que quieran saber más sobre la ecuación $x^y = y^{mx}$ y el por qué en general la conmutatividad no es posible.

[*]Monografía
[**] Facultad de ciencias, Escuela de Matemáticas. Ph.D Marlio Paredes G

Contenido

Introducción

La curiosidad de saber el por qué la conmutatividad en la potenciación no es posible, motivó este trabajo, de preguntas como, ¿Cuándo $x^y < y^x$? ó viceversa, ¿Cuándo $x^y = y^x$? ó generalizando un poco, ¿Cuándo $x^y = y^{mx}$ con $x \neq y$?, esta ecuación es conocida como la generalización de Euler. Algunas de estas preguntas 277 años atrás le interesaron a Daniel Bernoulli [5], le llamó la atención la relación entre x^y y y^x. Posteriormente, el 29 de junio de 1728 Bernoulli le envió una carta a Goldbach afirmando las incontables soluciones racionales a $x^y = y^x$ con $x \neq y$ y una única solución entera positiva [6].

En el primer capítulo, recordamos algunos conceptos importantes para la lectura del presente trabajo y se introduce un tema interesante que es el Orden p-ádico, mostrando algunos ejemplos y propiedades.

En el segundo capítulo se estudia la solución de la ecuación $x^y = y^x$ con $x \neq y$, buscando éstas primero en los reales, luego en los racionales y finalmente en los enteros, encontrando la solución de estas ecuaciones a través de las ecuaciones paramétricas, hechas por Goldbach.

Finalmente, en el tercer capítulo, se muestran las soluciones de la ecuación $x^y = y^{mx}$ para los casos $m = 2$ y $m = 3$ sin demostración, presentando algunos resultados interesantes.

El presente trabajo titulado *Soluciones Racionales Positivas de la Ecuación* $x^y = y^{mx}$, está basado en el artículo *Positive Rational Solutions to* $x^y = y^{mx}$: *A Number-Theoretic Excursion*, este es el resultado de la implementación de los conocimientos teórico prácticos del programa de Licenciatura en Matemáticas. Esperamos que esta monografía pueda ser de utilidad para los estudiantes que quieran saber más sobre la ecuación $x^y = y^{mx}$ y el por qué en general la conmutatividad no es posible.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se estudian y desarrollan conceptos y resultados básicos (algunos sin demostración) sobre máximos y mínimos, puntos críticos, números algebraicos, divisibilidad, orden p-adico; necesarios para el estudio de las soluciones positivas racionales de la ecuación $x^y = y^{mx}$.

1.1. Valores máximo y mínimo

Definición 1.1.

*i) Una función f tiene un **máximo absoluto** (ó máximo global) en c, $c \in D$, si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en D, dónde D es el dominio de f. El número $f(c)$ se llama **valor máximo** de f en D.*

*ii) f tiene un **mínimo absoluto** en c, si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en D;*

el número $f(c)$ se denomina ***valor mínimo*** *de f en D.*

Definición 1.2.

i) Una función f posee un ***máximo local*** *(o máximo relativo) en c si $f(c) \geq f(x)$ cuando x está cercano a c (Esto significa que $f(c) \geq f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c.)*

ii) f tiene un ***mínimo local*** *en c si $f(c) \leq f(x)$ cuando x está cerca de c. (Esto significa que $f(c) \leq f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c.)*

Teorema 1.3. *Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.*

Si la función es derivable, en los puntos máximo y mínimo no extremos la recta tangente es horizontal y por consiguiente, tiene pendiente 0 además, si la función no es derivable no tiene recta tangente. Se sabe que la derivada es la pendiente de la recta tangente, de modo que $f'(c) = 0$ y $f'(d) = 0$. En el siguiente teorema llamado Teorema de Fermat, se afirma que esto siempre se cumple para las funciones diferenciables.

Teorema 1.4. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $c \in (a, b)$; si f tiene un máximo o un mínimo locales en c y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.*

Demostración. Supongamos, que f tiene un máximo local en c. Entonces $f(c) \geq f(x)$ cuando x está suficientemente cerca a c. Esto implica que si h

está suficientemente cerca a 0, con h positiva o negativa, entonces

$$f(c) \geq f(c+h) \tag{1.1}$$

y por lo tanto

$$f(c+h) - f(c) \leq 0.$$

Dividimos a ambos lados de la desigualdad por un número positivo. Entonces, si $h > 0$ y suficientemente pequeña, se tiene

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0. \tag{1.2}$$

Tomando el límite a derecha en ambos lados de la desigualdad, se obtiene

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} 0 = 0.$$

Pero como por hipótesis $f'(c)$ existe, se tiene

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Así, se ha demostrado que $f'(c) \leq 0$. Si $h < 0$, entonces la dirección de la desigualdad (1.2) se invierte cuando se divide entre h

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0, \;\; h < 0,$$

luego, tomando el límite por la izquierda, se tiene

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Se ha demostrado que $f'(c) \geq 0$ y también que $f'(c) \leq 0$. Como ambas desigualdades deben ser verdaderas, la única posibilidad es que $f'(c) = 0$. Entonces hemos probado el teorema de Fermat para el caso de un máximo local. El caso de un mínimo local es análogo. ■

Debemos tener presente que cuando $f'(c) = 0$, f no tiene necesariamente un máximo o un mínimo en c; en otras palabras, el inverso del teorema de Fermat es falso.

Definición 1.5. *Un* ***punto crítico de una función*** f *es un número* c *en el dominio de* f *tal que* $f'(c) = 0$ *o* $f'(c)$ *no existe.*

Definición 1.6. *Se dice que una función es* ***creciente*** *en un intervalo* I, *si*

$$f(x_1) < f(x_2), \qquad \textit{siempre que} \qquad x_1 < x_2 \quad \textit{en} \quad I.$$

Se dice que es ***decreciente*** *en* I, *si*

$$f(x_1) > f(x_2), \qquad \textit{siempre que} \qquad x_1 < x_2 \quad \textit{en} \quad I.$$

En cálculo, si f' existe, esta nos da información que nos permite deducir hechos acerca de f, especialmente f' indica dónde crece o decrece una función, en general se tiene

- Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.
- Si $f'(x) < 0$ en un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

Prueba de la primera derivada. Supongamos que c es un punto crítico de una función continua f.

a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

b) Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

c) Si f' no cambia de signo en c (es decir, f' es positiva en ambos lados de c, o negativa en ambos lados), entonces f no tiene máximo ni mínimo local en c.

1.2. Números algebraicos

Definición 1.7. *Un número real α se llama número algebraico, o simplemente algebraico, si α es raíz de un polinomio $p(x)$ con coeficientes racionales. Es decir, α es algebraico si es solución de una ecuación polinómica con coeficientes racionales de la forma*

$$a_n x^n + a_{(n-1)} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0.$$

Ejemplo 1.8.
$\sqrt{5}$ *es algebraico, ya que es una raíz de los polinomios* x^2-5, x^4-25, $2x^2-10$.

1.3. Divisibilidad

Definición 1.9. *Sean a, b números enteros con a diferente de cero. Se dice que a divide a b si existe un entero c tal que $b = ac$. En tal caso se escribe $a \mid b$. Se dice también que a es un* divisor *de b ó que b es un* múltiplo *de a.*

Definición 1.10. *Un entero positivo d se llama* máximo común divisor *de dos enteros dados a y b si*

1. *d es un divisor de a y b*

2. *Todo divisor común de a y b es un divisor de d.*

El máximo común divisor de a y b se representa como $d = m.c.d.(a, b)$ y también como $d = (a, b)$.

Teorema 1.11. *Sean a y b números enteros no ambos iguales a cero. El $m.c.d(a, b)$ es el menor entero positivo que puede escribirse en la forma $ax+by$ con x, y enteros.*

Definición 1.12. *Un entero positivo m se llama* mínimo común múltiplo *de los enteros no nulos a y b si*

1. *m es múltiplo de ambos a y b*

2. *Cualquier múltiplo de a y b es un múltiplo de m.*

Usamos la notación $m.c.m.(a, b)$ o bien $[a, b]$ para el mínimo común múltiplo de a y b.

Definición 1.13. *Un entero positivo $p > 1$ se denomina un número* primo *si tiene exactamente dos divisores positivos a saber,* 1 *y* p. *Un entero positivo mayor que* 1 *que no es primo se denomina* compuesto.

Teorema 1.14. *Todo entero mayor o igual que* 2*, ó es primo, ó es producto de números primos.*

Demostración. Sea S el conjunto de todos los números naturales que son primos o que pueden escribirse como producto de primos. Claramente

$$S \subseteq \{k \in \mathbb{N} | k \geq 2\}$$

y además tenemos:

i) $2 \in S$ porque 2 es un número primo

ii) Supongamos que $n > 2$ y que $k \in S$ para todo k tal que $2 \leq k < n$. Véase que $n \in S$. Si n es primo entonces $n \in S$. Si n no es primo existen r y t tales que $n = rt$ con $2 \leq r < n$ y $2 \leq t < n$ y por hipótesis, ellos o son primos, o productos de primos. En consecuencia n es producto de primos y así $n \in S$. El principio de inducción matemática nos afirma entonces que $S = \{k \in \mathbb{N} | k \geq 2\}$. ■

Definición 1.15. *Si a y b son enteros distintos de cero tales que $(a, b) = 1$, se dice que a y b son **primos relativos**. Más generalmente si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros no nulos tales que para todo i y para todo j con $i \neq j$, $1 \leq i,\ j \leq n$ se tiene $(a_i, a_j) = 1$, decimos que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son* primos relativos dos a dos.

Teorema 1.16. *Si $a \mid bc$ y $(a, b) = 1$ entonces $a \mid c$.*

Demostración. Como $a \mid bc$ existe k tal que $bc = ak$. Como $(a, b) = 1$ existen enteros x, y tales que $ax + by = 1$. Por lo tanto,

$$c = c(ax + by) = acx + bcy = acx + aky = a(cx + ky)$$

es decir, $a \mid c$. ■

Corolario 1.17. *Si p es primo y $p \mid ab$ entonces $p \mid a$ ó $p \mid b$.*

Demostración. Si $p \nmid a$ entonces $(a, p) = 1$, y por el teorema $p \mid b$. ■

Corolario 1.18. *Si p es primo y $p \mid a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces $p \mid a_i$ para algún i, $1 \leq i \leq n$.*

Demostración.

La prueba se hace por inducción.

i) Por el corolario anterior se tiene

$$\text{Si } p|a_1 \cdot a_2 \implies p|a_1 \text{ ó } p|a_2$$

es decir que la proposición se cumple

ii) Supongamos que el resultado se cumple para k, es decir

$$\text{Si } p|a_1 \cdot a_2, \ldots, a_k \implies p|a_i \text{ para algún } i,\ 1 \leq i \leq k.$$

y se debe probar que se cumple para $k+1$, debemos probar que

$$\text{Si } p|a_1 \cdot a_2, \ldots, a_k \cdot a_{k+1} \implies p|a_i \text{ para algún } i,\ 1 \leq i \leq k+1.$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } p|a_1 \cdot a_2, \ldots, a_k &\implies p|a_i \text{ para algún } i \\
&\implies a_1 \cdot a_2, \ldots, a_k = p \cdot q \text{ donde } q \in \mathbb{Z} \\
&\implies (a_1 \cdot a_2, \ldots, a_k) \cdot a_{k+1} = p(q \cdot a_{k+1}) \\
&\implies p|(a_1 \cdot a_2, \ldots, a_k)(a_{k+1}) \\
&\implies p|(a_1 \cdot a_2, \ldots, a_k) \text{ ó } p|(a_{k+1}) \\
&\implies \text{ Si } p|(a_1 \cdot a_2, \ldots, a_k) \\
&\implies p|a_i \text{ para algún } i
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.19 (Teorema Fundamental de la Aritmética). *Todo entero $n > 1$, ó es primo, ó se puede factorizar como producto de primos. Este producto es único salvo por el orden de los factores.*

Demostración. En el Teorema 1.14 ya se probó la primera parte. Basta ahora probar la unicidad de la factorización salvo el orden. Se utilizará inducción sobre n.

Para $n = 2$ claramente la representación es única. Supongamos ahora que para todo entero k con $2 \leq k < n$ la representación no es única y que,

$$n = p_1 p_2 \dots p_s = q_1 q_2 \dots q_t,$$

dónde p_i y q_i son primos con $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_s$ y $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_t$. Así, $p_1 | q_1 q_2 \dots q_t$ y entonces $p_1 = q_j$ para algún j por lo tanto $q_1 \leq p_1$. Análogamente $q_1 | p_1 p_2 \dots p_s$ y entonces $q_1 = p_i$ para algún i y por lo tanto $p_1 \leq q_1$. Lo anterior demuestra que $p_1 = q_1$ y cancelando tenemos

$$\frac{n}{p_1} = p_2 p_3 \dots p_s = q_2 q_3 \dots q_t.$$

Como $\frac{n}{p_1} < n$ la hipótesis de inducción garantiza que estas dos representaciones de $\frac{n}{p_1}$ son idénticas (hemos escogido un orden) y en consecuencia $s = t$ y para cada $i, p_i = q_i$. Por el principio de inducción matemática la prueba queda completa. ∎

Proposición 1.20. $2^k > 2k$, *para todo entero* $k > 2$.

Demostración.

La prueba se hace por inducción sobre k.

i) Claramente

$$2 \cdot 3 < 2^3,$$

es decir que la proposición se cumple para $k = 3$.

ii) Supongamos que el resultado se cumple para k, es decir

$$2 \cdot k < 2^k.$$

Y se debe probar que se cumplen para $k+1$, esto es debemos demostrar que

$$2 \cdot (k+1) < 2^{k+1}.$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot k < 2^k \text{multiplicando por } 2 &\Longrightarrow 4k < 2^{(k+1)}, \text{como } k > 2 \\
&\Longrightarrow 4k - 2k > 2, \\
&\Longrightarrow 4k > 2 + 2k, \\
&\Longrightarrow 4k > 2(k+1), \\
&\Longrightarrow 2(k+1) < 4k < 2^{k+1}, \\
&\Longrightarrow 2(k+1) < 2^{(k+1)},
\end{aligned}$$

luego $2n < 2^n$, para $n > 2$. ∎

1.4. Orden p-ádico

Definición 1.21. *Sea p un número primo y n un entero positivo, entonces $\nu_p(n)$ es la máxima potencia de p que divide a n.*

$$\nu_p(n) = \text{máx}\{k \in \mathbb{N} : p^k \mid n\}$$

$\nu_p(m)$ se denomina el **orden p-ádico** de m respecto de p. Se define también $\nu_p(0) = \infty$.

Ejemplo 1.22.

- $\nu_2(12) = 2$, *porque* $2^2 = 4$ *y* $4 \mid 12$.
- $\nu_3(12) = 1$, *porque* $3^1 = 3$ *y* $3 \mid 12$.
- $\nu_5(12) = 0$, *porque* $5^0 = 1$ *y* $1 \mid 12$.

Con la noción de orden se puede enunciar la condición de divisibilidad

$$m \mid n \qquad \text{si y sólo si} \quad \nu_p(m) \leq \nu_p(n), \text{para todo } p \text{ primo.}$$

Además, si $m \neq 0$ entonces

$$\nu_p(m) = 0, \quad \text{para casi todo primo} \ \ p.$$

Por el Teorema Fundamental de la Aritmética (Única descomposición en factores primos) se tiene que todo entero positivo n se puede expresar

$$n = \prod_{p:primo} p^{\nu_p(n)}.$$

Donde p recorre todos los primos positivos.

Ejemplo 1.23.

$10 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \ldots = 2 \cdot 5$

$12 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \ldots = 2^2 \cdot 3$

$15 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \ldots = 3 \cdot 5$

Es fácil ahora expresar el $m.c.d.$ y el $m.c.m.$ de m y n.

$(m,n) = \prod_p p^{t_p}$, donde $t_p = \text{mínimo}\{\nu_p(m), \nu_p(n)\}$

$[m,n] = \prod_p p^{r_p}$, donde $r_p = \text{máximo}\{\nu_p(m), \nu_p(n)\}$

Ejemplo 1.24.

$18 = 2^1 \cdot 3^2$	$(18,24) = 2 \cdot 3 = 6$
$24 = 2^3 \cdot 3^1$	$[18,24] = 2^3 \cdot 3^2 = 72$
$126 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1$	$(126,375) = 2^0 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot = 3$
$375 = 2^0 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7^0$	$[126,375] = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 = 15750$
$99 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11$	$(99,110) = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^1 = 11$
$110 = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^1$	$[99,110] = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0 \cdot 11^1 = 990$

Esta función cumple algunas propiedades como

Proposición 1.25. *Si* $n_1,\ n_2\ \in\ \mathbb{Z}$ *entonces* $\nu_p(n_1 \cdot n_2) = \nu_p(n_1) + \nu_p(n_2)$.

Demostración.

Sean

$$a = \nu_p(n_1) \qquad\qquad b = \nu_p(n_2),$$

$\Longrightarrow$

$$p^a \mid n_1 \quad \wedge \quad p^{a+1} \nmid n_1 \qquad\quad p^b \mid n_2 \quad \wedge \quad p^{b+1} \nmid n_2,$$

$\Longrightarrow$

$$p^{a+b} \mid n_1 n_2 \quad \wedge \quad p^{a+b+2} \nmid n_1 n_2,$$

luego,

$$\nu_p(n_1 \cdot n_2) = a \ + \ b = \nu_p(n_1) + \nu_p(n_2).$$

$\blacksquare$

Ejemplo 1.26.

$\nu_2(7 \cdot 18) = \nu_2(126) = 1 \implies 2^1 = 2 \mid 126.$

$\nu_2(7) = 0 \implies 2^0 = 1 \ \wedge \ 1 \mid 7.$

$\nu_2(18) = 1 \implies 2^1 = 2 \ \wedge \ 2 \mid 18.$

Entonces, $\nu_2(7) + \nu_2(18) = 0 + 1 = 1 = \nu_2(126)$.

Ejemplo 1.27.

Se muestra que $\nu_p(m+n) = \nu_p(m) + \nu_p(n)$ *es falso.*

$\nu_3(90 + 99) = \nu_3(189) = 3 \implies 3^3 = 27 \;\wedge\; 27 \mid 189 = 7$

$\nu_3(90) = 2 \implies 3^2 = 9 \;\wedge\; 9 \mid 90 = 10$

$\nu_3(99) = 2 \implies 3^2 = 9 \;\wedge\; 9 \mid 99 = 11$

Luego, $\nu_3(90) + \nu_3(99) = 2 + 2 = 4 \neq \nu_3(189) = 3$

Proposición 1.28. *Si* $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$*,* p *primo entonces* $\nu_p(n_1 + n_2) \geq$ *mín*$(\nu_p(n_1), \nu_p(n_2))$*.*

Demostración. Sean $\nu_p(n_1) = a$, $\nu_p(n_2) = b$, entonces $p^a \mid n_1$, donde p^a es la mayor potencia de p que divide a a y $p^b \mid n_2$, donde p^b es la mayor potencia de p que divide a b.
Por lo tanto $n_1 = p^a k \;\;\wedge\;\; n_2 = p^b l$ con $k,\; l\; \in \mathbb{Z}$

- Si $a = b$
  $n_1 + n_2 = p^a k + p^b l = p^a k + p^a l = p^a(k + l)$.
  Si $p \nmid (k + l)$ entonces p^a es la mayor potencia de p que divide a $(n_1 + n_2)$, luego $\nu_p(n_1 + n_2) = a = \text{mín}(\nu_p(n_1), \nu_p(n_2))$.

  Si $p \mid (k + l)$ entonces existe p^δ tal que $p^\delta \mid (k + l) \;\wedge\; p^{\delta+1} \nmid (k + l)$ con $\delta > 0 \;\; \in \mathbb{Z}$ entonces $p^\delta m = k + l$ con $m \in \mathbb{Z}$ reemplazando se tiene que $n_1 + n_2 = p^a(k + l) = p^a(p^\delta m) = p^{a+\delta}$, donde $p^{a+\delta} \mid (n_1 + n_2) \;\wedge\; p^{a+\delta+1} \nmid (n_1 + n_2)$.

Por lo tanto,

$$\nu_p(n_1+n_2) = a+\delta > \text{mín}(\nu_p(n_1), \nu_p(n_2)).$$

- Si $a < b$

  $n_1+n_2 = p^a k + p^b l = p^a(k+p^{b-a}l)$. Luego $p \nmid (k+p^{b-a}l)$, puesto que $p \mid p^{b-a}l \ \wedge \ p \nmid k$. Por lo tanto, $p^a \mid (n_1+n_2) \ \wedge \ p^{a+1} \nmid (n_1+n_2)$, entonces $\nu_p(n_1+n_2) = a = \text{mín}(\nu_p(a), \nu_p(b))$.

  Análogamente, si $a > b$ se tiene que $\nu_p(a+b) = b = \text{mín}(\nu_p(a), \nu_p(b))$.

∎

Definición 1.29. *Sea $x = \frac{m}{n}$ un número racional, definimos*

$$\nu_p(x) = \nu_p(m) - \nu_p(n),$$

el cual es un número entero.

Teorema 1.30. *Si $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ entonces $\nu_p(x) = \nu_p(m) - \nu_p(n)$ no depende de m y n.*

Demostración. Se comprueba que esta expresión depende solamente de x y no de m y n.

$$\begin{aligned}
\nu_p\left(\frac{mc}{nc}\right) &= \nu_p(mc) - \nu_p(nc), \\
&= \nu_p(m) + \nu_p(c) - (\nu_p(n) + \nu_p(c)), \\
&= \nu_p(m) + \nu_p(c) - \nu_p(n) - \nu_p(c), \\
&= \nu_p(m) - \nu_p(n),
\end{aligned}$$

$$= \nu_p \left(\frac{m}{n}\right) = \nu_p(x).$$

■

Ejemplo 1.31.

$\nu_3\left(\frac{58806}{3}\right) = \nu_3(19602) = 4 \implies 3^4 = 81 \;\wedge\; 81 \mid 19602 = 242.$

$\nu_3(58806) = 5 \implies 3^5 = 243 \;\wedge\; 243 \mid 58806 = 242.$

$\nu_3(3) = 1 \implies 3^1 \;\wedge\; 3 \mid\; 3 = 1.$

$\nu_3\left(\frac{58806}{3}\right) = \nu_3(58806) - \nu_3(3) = 5 - 1 = 4.$

Capítulo 2

Soluciones de la ecuación $x^y = y^x$ con $x \neq y$

En el presente capítulo se estudia la solución a la ecuación $x^y = y^x$ con $x \neq y$, pues $x = y$ da una solución trivial a esta ecuación; este problema puede ser llamado como **"La conmutatividad de la potenciación"**. Esta es una ecuación diofántica que ha tenido considerable atención desde los días de Euler. Analizando la relación entre x^y y y^x sin causa aparente a veces una es mayor que la otra

$$x^y < y^x, \qquad x^y = y^x, \qquad x^y > y^x.$$

Para iniciar en forma el estudio, se buscarán las soluciones a la ecuación primero sobre $\mathbb{R}$, luego sobre $\mathbb{Q}$ y finalmente sobre $\mathbb{N}$.

2.1. Soluciones reales positivas

Mediante la sustitución $y = tx$ dónde $t \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, se tiene $(x^t)^x = (tx)^x$, (elevando a la x-ésima potencia) $x^t = tx$ y despejando t se obtiene $t = \frac{x^t}{x}$ entonces $t = x^{t-1}$ de donde $x = t^{\frac{1}{t-1}}$.

Si se hace el procedimiento anterior para $x = \frac{y}{t}$ y reemplazamos en $x^y = y^x$ se sigue que $(\frac{y}{t})^y = y^{\frac{y}{t}}$, de donde se tiene $(\frac{y}{t})^y = (y^{\frac{1}{t}})^y$. Elevando a la y-ésima potencia tenemos $(\frac{y}{t}) = y^{\frac{1}{t}}$, luego $\frac{y}{y^{\frac{1}{t}}} = t$, entonces $y^{1-\frac{i}{t}} = t$; donde $t = y^{\frac{t-1}{t}}$. De donde se sigue que $y = t^{\frac{t}{t-1}}$.

Las soluciones obtenidas mediante la sustitución son

$$(x, y) = (t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}}) \qquad \text{y} \qquad (x, y) = (u, u). \tag{2.1}$$

Estas son soluciones paramétricas, para los números reales positivos con $t \neq 1$ dadas por Goldbach. Por ejemplo $x = 4$ $y = 2$ es solución a esta ecuación con $t = \frac{1}{2}$.

Para $t = 1$ hay una singularidad única, ahora si se toma el límite cuando t tiende a 1 y sustituimos $t = s + 1$, se obtiene la expresión usual que define a e.

$$\lim_{s \to 0}(1 + s)^{\frac{1}{s}} = e = \lim_{s \to 0}(1 + s)^{1+\frac{1}{s}}.$$

2.2. Soluciones racionales positivas

Esta parametrización caracteriza ciertos tipos importantes de puntos. Por ejemplo, Euler observó que si $t = 1 + \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{Z}$ (ver [3]), entonces

$(x, y) = (t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}})$ da una solución racional a $x^y = y^x$ a saber

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{y} \qquad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{2.2}$$

Se observa que, $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1$ además (x_n) crece monótonamente a e y (y_n) decrece monótonamente a e.

Para mostrar que (2.2) son soluciones racionales, se necesita del siguiente lema fundamental.

Lema 2.1. *Sean a, b, m y n números enteros que satisfacen $mcd(a, b) = mcd(m, n) = 1$, con $b \neq 0$, $n \neq 0$. Entonces $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{a}{b}}$ es racional si y solo si m y n son b-ésimas potencias de enteros.*

Demostración. Sea $\left(\frac{m}{n}\right)^{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{p}{q}$ dónde $mcd(p, q) = 1$ entonces

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\left(\frac{ab}{b}\right)} = \left(\frac{p}{q}\right)^b \Longrightarrow \frac{m^a}{n^a} = \frac{p^b}{q^b},$$

de dónde $m^a q^b = n^a p^b$. Ahora,

i) Si $m^a | n^a p^b$ y como el $mcd(m, n) = 1$, se sigue que $m^a | p^b$ luego $p^b = m^a r$, dónde $r \in \mathbb{Z}$.

ii) Si $n^a | m^a q^b$ y como el $mcd(m, n) = 1$ entonces $n^a | q^b$ luego $q^b = n^a t$, dónde $t \in \mathbb{Z}$.

Debemos ver que $r = \pm 1$. Como $m^a q^b = n^a p^b$ se tiene que $p^b | m^a q^b$ y como el $mcd(p, q) = 1$ se tiene que $p^b | m^a$. Luego $m^a = p^b \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{Z}$, de (i) se sigue que $m^a = p^b \alpha$ y $p^b = m^a r$ reemplazando p^b tenemos $m^a = m^a r \alpha$ entonces

$1 = r\alpha$ luego $r = \alpha = 1$ ó $r = \alpha = -1$.Se tiene que $m^a = p^b$.
Sea $m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ y $p = \prod_{j=1}^{n} q_j^{\beta_j}$ entonces $p^b = \prod_{j=1}^{n} q_j^{b\beta_j} = q_1^{b\beta_1} q_2^{b\beta_2} \dots q_n^{b\beta_n}$ y $m^a = \prod_{i=1}^{n} p_i^{a\alpha_i} = p_1^{a\alpha_1} p_2^{a\alpha_2} \dots p_n^{a\alpha_n}$, como $p^b = m^a$, luego $q_1^{b\beta_1} q_2^{b\beta_2} \dots q_n^{b\beta_n} = p_1^{a\alpha_1} p_2^{a\alpha_2} \dots p_n^{a\alpha_n}$; sea $p_1^{a\alpha_1} = p_1$ por lo tanto existe j que $1 \leq j \leq n$ tal que $a\alpha_1 = b\beta_j$ y como el $(a, b) = 1$ entonces $b \mid \alpha_1$ por lo tanto $\alpha_1 = bt$ con $t \in \mathbb{Z}$, luego $p_1^{a\alpha_1} = (p_1^{at})^b$; por lo tanto $p_1^{a\alpha_1}$ es una b-ésima potencia de enteros, tomando ahora $p_2^{a\alpha_2} = p_2$, existe $i \neq j$ con $1 \leq i \leq n$ tal que $a\alpha_2 = b\beta_i$ y como el $(a, b) = 1$ entonces $b \mid \alpha_2$ por lo tanto $\alpha_2 = bt_1$ con $t_1 \in \mathbb{Z}$, luego $p_1^{a\alpha_2} = (p_1^{at_1})^b$; por lo tanto $p_1^{a\alpha_2}$ es una b-ésima potencia de enteros; continuando así hasta p_n tenemos que m es una b-ésima potencia de enteros.

Análogamente se observa que n es una b-ésima potencia de enteros.

Ahora, como $m, n \in \mathbb{Z}$, se representan canónicamente como producto de potencias de primos.

$$m = \prod p_i^{\alpha_i} \qquad y \qquad n = \prod q_j^{\beta_j}.$$

Por hipótesis m y n son b-ésimas potencias de enteros, luego

$$m = r^b \qquad y \qquad n = s^b$$

entonces,

$$\frac{m}{n} = \frac{r^b}{s^b} = \left(\frac{r}{s}\right)^b$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{a}{b}} = \left(\frac{r}{s}\right)^{a} = \frac{r^a}{s^a} \in \mathbb{Q}$$

$\blacksquare$

Si se considera una forma equivalente a $x^y = y^x$ con $x \neq y$, (elevando a la xy-ésima potencia) tenemos que $x^{\frac{y}{xy}} = y^{\frac{x}{xy}}$ luego $x^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{y}}$ con $x \neq y$.

Tomando ahora la ecuación equivalente $x^{1/x} = y^{1/y}$ con $x \neq y$; esta forma sugiere introducir la función $f(x) : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^{1/x}$. Esta función es derivable en $(0, +\infty)$ entonces derivando para todo $x \in (0, +\infty)$ se tiene

$$\begin{aligned} y = x^{1/x} &\Longrightarrow \ln y = \frac{1}{x}\ lnx, \\ &\Longrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ lnx, \\ &\Longrightarrow y' = \frac{y(1 - lnx)}{x^2}, \\ &\Longrightarrow y' = \frac{x^{1/x}(1 - lnx)}{x^2}. \end{aligned}$$

1. Punto crítico:

$$\begin{aligned} \frac{x^{1/x}(1 - lnx)}{x^2} = 0 &\Longrightarrow x^{1/x}(1 - \ln x) = 0, \\ &\Longrightarrow 1 - \ln x = 0, \\ &\Longrightarrow 1 = \ln x, \\ &\Longrightarrow x = e. \end{aligned}$$

Evaluando en la derivada por $x = e$

$$f'(e) = \frac{e^{1/e}(1 - lne)}{e^2} = 0.$$

Se tiene que $x = e$ es el único punto crítico.

2. $f'(x) > 0$, para todo $x \in (0, e)$, luego f es estrictamente creciente en dicho intervalo.

3. $f'(x) < 0$, para todo $x \in (e, +\infty)$, luego f es estrictamente decreciente en dicho intervalo.

Utilizando el criterio de la primera derivada se puede concluir que $x = e$ es un máximo absoluto de la función, por lo tanto para todo $x > 0,\ x \neq e$ se tiene $e^{1/e} > x^{1/x}$.

Observemos que,

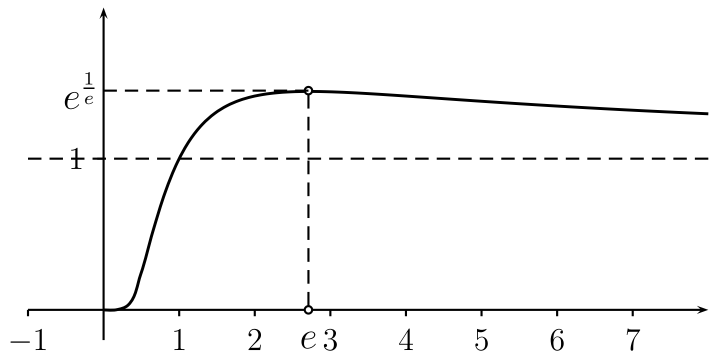
$$\lim_{x \to +\infty} x^{1/x} = 1,$$

pues

$$\begin{aligned}
y = \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} &\Longrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}, \\
&\Longrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{1/x}}, \\
&\Longrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{(\frac{1}{x})^{-1}}, \\
&\Longrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{-(1/x)^{-2}(1/x^2)}, \\
&\Longrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{-x^2/x^2}, \\
&\Longrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{-1}, \\
&\Longrightarrow \ln y = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x} = 0, \\
&\Longrightarrow \ln y = 0,
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow y = e^0 = 1.$$

Con la información anterior se puede bosquejar la gráfica de la función.



Sea $a \in \mathbb{R}^+, a \neq e$. Puede ocurrir

i) $0 < a \leq 1$. Entonces $0 < a^{\frac{1}{a}} \leq 1$ y $f(x)$ alcanza el valor $a^{\frac{1}{a}}$ una sola vez. Esto es, $f(x) = a^{\frac{1}{a}}$ solo para $x = a$.

ii) $1 < a \leq e$. Entonces $0 < a^{\frac{1}{a}} \leq e^{\frac{1}{e}}$. Como $f(x)$ es estrictamente creciente en $(1, e)$, el único x en $(1, e)$ tal que $f(x) = a^{\frac{1}{a}}$ es $x = a$. De otro lado $f(e) = e^{\frac{1}{e}}, f(+\infty) = 1$ y $1 < a^{\frac{1}{a}} < e^{\frac{1}{e}}$. Entonces por el teorema del valor intermedio existe b en $(0, +\infty)$ tal que $f(b) = a^{\frac{1}{a}}$. Por ser f estrictamente decreciente en $(e, +\infty)$ este b es único. Es decir, existe un único $b \neq a$ tal que $b^{\frac{1}{b}} = a^{\frac{1}{a}}$.

iii) $a > e$. Nuevamente $f(+\infty) = 1 < a^{\frac{1}{a}} < e^{\frac{1}{e}} = f(e)$. Un razonamiento análogo prueba que f toma el valor $a^{\frac{1}{a}}$ una única vez en $(1, e)$ y una única vez en$(e, +\infty)$.

El razonamiento anterior se puede resumir en

Proposición 2.2. *Si $a > 1, a \neq e$ existe un único real $b \neq a$ tal que $a^b = b^a$.*

Proposición 2.3.

i) Si $0 < a < b < e$ entonces $a^b < b^a$.

ii) Si $e < a < b$ entonces $a^b > b^a$.

Queda una cuestión aún por resolver: si $1 < a < e < b$, ¿Cómo es a^b con respecto a b^a?

Para responder a esta pregunta se procede como sigue. Se busca el único $x > e$ tal que $a^{\frac{1}{a}} = x^{\frac{1}{x}}$. Ahora si $x < b$ entonces $x^{\frac{1}{x}} > b^{\frac{1}{b}}$ y por tanto $a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}}$ de donde $a^b > b^a$. Si $x > b$ entonces $b^{\frac{1}{b}} > x^{\frac{1}{x}} = a^{\frac{1}{a}}$, de donde $b^a > a^b$.

Si $a > 1, a \neq e$, existe un único $b > 1$ tal que $a^{\frac{1}{a}} = b^{\frac{1}{b}}$ y $a \neq b$. Obsérvese que $0 < \frac{1}{a} < 1$ y $0 < \frac{1}{b} < 1$, luego $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{a}}} = \dfrac{1}{b^{\frac{1}{b}}}$, entonces $\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{a}} = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{b}}$. Ahora se procede a encontrar las soluciones racionales de $x^y = y^x$ con $x \neq y$. Por simetría se puede asumir que $y > x$ y como vimos en la sección anterior $t \neq 1$ y $t > 1$. Si $x,\ y$ son racionales entonces también se tiene que $t = \frac{y}{x}$ es racional. Escribiendo t en otros términos tenemos

$$t = \frac{p}{q} := \frac{q+d}{q}, \qquad d, q > 0,$$

de modo que reemplazando t tenemos

$$\frac{1}{t-1} = \frac{1}{\frac{q+d}{q}-1} = \frac{1}{d/q} = \frac{q}{d} \quad y \quad \frac{t}{t-1} = \frac{\frac{q+d}{q}}{\frac{q+d-q}{q}} = \frac{q+d}{d} = 1+\frac{q}{d}. \quad (2.3)$$

Reemplazando (2.3) en (2.1), obtenemos nuevamente las soluciones paramétricas solución de esta ecuación haciendo $d=1$, y $q=n$, pues se recupera de nuevo $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Además, como $mcd(d,q) = mcd(q,q+d) = mcd(d,q+d) = 1$ y los números q y $q+d$ deben ser ambos d-ésimas potencias por el lema 1 y sustituyendo (2.3) en (2.1) se tiene

$$x = \left(\frac{q+d}{q}\right)^{\frac{q}{d}} \qquad \text{y} \qquad y = \left(\frac{q+d}{q}\right)^{\frac{q}{d}+1}.$$

Finalmente, mencionemos que si $n=-r$ en $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ entonces $(x_{-r}, y_{-r}) = (y_{r-1}, x_{r-1})$ pues:

i) $\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-r} = \left(\frac{r-1}{r}\right)^{-r} = \left(\frac{r}{r-1}\right)^{r} = \left(1+\frac{1}{r-1}\right)^{r}.$

ii) $\left(1-\frac{1}{r}\right)^{r} = \left(\frac{r-1}{r}\right)^{1-r} = \left(\frac{r}{r-1}\right)^{-(1-r)} = \left(\frac{r}{r-1}\right)^{r-1} = \left(1+\frac{1}{r-1}\right)^{r-1}.$

Así, quitando la restricción de que n sea positiva, podemos eliminar la condición $y > x$ en $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Como se ha visto, las siguientes expresiones son soluciones racionales que se obtienen para cualquier n; a continuación mostramos algunos ejemplos

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{y} \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Cada pareja puede ser encontrada en los números racionales como sigue:

Si $n = 1$,

$$x = 2 \qquad y \qquad y = 4.$$

Si $n = 2$,

$$x = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right) \quad y \quad y = \left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{27}{8}\right).$$

Si $n = 3$,

$$x = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \left(\frac{64}{27}\right) \qquad y \qquad y = \left(1+\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{256}{81}\right).$$

Si $n = 4$,

$$x = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \left(\frac{625}{256}\right) \qquad y \qquad y = \left(1+\frac{1}{4}\right)^5 = \left(\frac{3125}{1024}\right).$$

$$\vdots$$

Si se hace $x^y = y^x$, se tiene

$$2^4 = 4^2 = 16.$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\left(\frac{27}{8}\right)} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\left(\frac{9}{4}\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}}.$$

$$\left(\frac{64}{27}\right)^{\left(\frac{256}{81}\right)} = \left(\frac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\left(\frac{256}{27}\right)}.$$

$$\vdots$$

2.3. Soluciones enteras positivas

Si se restringen los valores de $x = m$ e $y = n$ al conjunto de los enteros positivos se obtiene la ecuación diofántica

$$m^n - n^m = 0. \tag{2.4}$$

Proposición 2.4. *Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, si $m \neq n$, la ecuación diofántica $m^n = n^m$ tiene una única solución en los entero $m = 2$ y $n = 4$*

Sean m, n tales que

i) Si $0 < m < n < e$ por la Proposición 1 se tiene que $m^n < n^m$.

ii) Si $e < m < n$ entonces $m^n > n^m$.

Luego si (2.4) tiene solución, debe tenerse que $0 < m < e < n$. Esto implica que $m = 1$ ó $m = 2$, si reemplazamos en (2.4) $m = 1$ se tiene $1^n - n^1 = 0$, luego $1 - n = 0$ entonces $n = 1$, pero $e < n$ luego $m \neq 1$. Sustituyendo $m = 2$ en (2.4) resulta:

$$n^2 = 2^n, \qquad\qquad n > 2.$$

Lo que implica que el único factor primo de n es 2, y $n = 2^k$ con $k > 1$. Luego $(2^k)^2 = 2^{2^k}$ lo cual conduce a $2^k = 2k, k > 1$, ténganse presente que $a^x = a^y$ si y solo si $x = y$, esta igualdad solo se da cuando $k = 1$ ó $k = 2$ y como $k > 1$ entonces $k = 2$; pero $2^k > 2k$ para $k > 2$ y de esto $1 < k < 3$, es decir $k = 2$ y por tanto, $n = 4$.

Hasta ahora se ha encontrado una pareja solución en los enteros positivos, $m = 2$ y $n = 4$. La unicidad de m está implícita en el argumento anterior y la unicidad de n se sigue de la unicidad de k. Las soluciones de esta ecuación diofántica se encontraron con la ayuda de elementos de calculo.

Capítulo 3

Soluciones de la ecuación $x^y = y^{mx}$ con $x \neq y$

En el capítulo anterior se estudiaron las soluciones de la ecuación

$$x^y = y^x \text{ } con \text{ } x, y > 0, \tag{3.1}$$

cuya solución es mucho más fácil de lo que uno pensaría a primera vista. Ahora se estudiará la ecuación $x^y = y^{mx}$ con $x \neq y$, conocida como la generalización de Euler, como lo mencionamos al inicio de esta monografía. En el contexto de este capítulo es natural considerar la ecuación

$$x^y = y^{2x}. \tag{3.2}$$

Resulta que hay soluciones de (3.1) en las cuales no cabe el patrón paramétrico bien conocido a (3.1), $(x, y) = (t^{\frac{1}{t-1}}, t^{\frac{t}{t-1}})$, por ejemplo se tiene:

$$x = \left(\frac{4}{5}\right)^{128}, \qquad y = \left(\frac{4}{5}\right)^{125}. \tag{3.3}$$

Esta es una solución de (3.2) con $m = 2$; este hecho es fácil verificarlo, simplemente se sustituye (3.3) en (3.2) se toman logaritmos y se obtiene

$$x^y = y^{2x} \Longrightarrow \ln x^y = \ln y^{2x} \Longrightarrow y \ln x = 2x \ln y \Longrightarrow \frac{\ln x}{\ln y} = \frac{2x}{y},$$

luego se tiene

$$\frac{2x}{y} = \frac{2 \cdot (\frac{4}{5})^{128}}{(\frac{4}{5})^{125}} = 2\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{2 \cdot 4^3}{5^3} = \frac{128}{125} = \frac{\ln x}{\ln y}.$$

Al descubrir (3.3) se inició la búsqueda de un patrón para tratar de generalizar estas soluciones. En este capítulo presentamos los casos correspondientes a $m = 2$ y $m = 3$.

3.1. Soluciones reales

Ahora se considera la siguiente ecuación

$$x^y = y^{mx}. \tag{3.4}$$

Esta ecuación es conocida como la generalización de Euler con $m > 1$ un número entero positivo fijo. Se restringe otra vez la atención a las soluciones positivas (x, y). Si $x = 1$ o $y = 1$, entonces necesariamente $(x, y) = (1, 1)$. Suponiendo que $x, y \neq 1$ y tomando logaritmos en (3.4) se tiene

$$x^y = y^{mx} \Longrightarrow y \ln x = mx \ln y \Longrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{m \ln y}{y}, \text{ donde } x \neq y.$$

Escribiendo $y = x^r$ con $x \neq 1$ y $r \neq 1$ y reemplazando se tiene $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{m \ln x^r}{x^r}$, entonces $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{mr \ln x}{x^r}$. Por lo tanto, $\dfrac{x^r}{x} = mr$, luego $x^{r-1} = mr$.
Por lo tanto las soluciones reales positivas de (3.4) están dadas por

$$x = y = 1 \qquad \text{y} \qquad x = (mr)^{\frac{1}{r-1}}, \qquad y = (mr)^{\frac{r}{r-1}}. \tag{3.5}$$

3.2. Soluciones racionales

Ahora se restringe la atención a las soluciones racionales positivas y hacemos $\frac{y}{x} = mr$, siendo $r > 0$; además x e y son racionales, se tiene $r \in \mathbb{Q}$. Escribamos $r = \frac{a}{b}$ donde a y b son números naturales con $mcd(a, b) = 1$ y $k = |a - b|$. Para que $x \in \mathbb{Q}$, se requiere

$$x = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{1}{\frac{a}{b}-1}} = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{1}{\frac{a-b}{b}}} = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}} \in \mathbb{Q},$$

$$y = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}-1}} = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a-b}{b}}} = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{ab}{b(a-b)}} = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{a}{(a-b)}} \in \mathbb{Q}.$$

Si se supone que $mcd(b, m) = d$ y escribiendo $b = db'$ y $m = dm'$. Además $mcd(am', b') = 1$, necesitamos que tanto am' y b' sean k-ésimas potencias enteras.

Si $am' = u^k$ y $b' = v^k$, se sigue esto

$$|u^k - mv^k| = |am' - mb'| = \left|\frac{am}{d} - \frac{mb}{d}\right| = \frac{m}{d}k = m'k. \tag{3.6}$$

Para un número entero positivo m, definimos el sistema $S(m)$ de soluciones racionales positivas de (3.4) como sigue

$$S(m) = \bigcup_{k=0}^{\infty} S_k(m),$$

donde $S_k(m)$ representa la solución del sistema (x, y) correspondiente a la ecuación (3.6). Aquí $S_0(m)$ denota las soluciones con $x = y$ (es decir $(x, y) =$

$(1,1)$ para $m > 1)$; para $k = 1$, se tiene que $S_1(m)$ implica las soluciones

$$x = \left(m + \frac{m}{b}\right)^{b} \qquad y = \left(m + \frac{m}{b}\right)^{1+b}$$

ó

$$x = \left(m - \frac{m}{b}\right)^{-b} \qquad y = \left(m - \frac{m}{b}\right)^{1-b}.$$

A continuación mostraremos cómo se puede caracterizar este sistema en los casos $m = 2$ y $m = 3$. Las pruebas de los siguientes teoremas son muy difíciles (ver [6]) e involucran técnicas de teoría de números trascendental y de la aproximación de Diofanto

Teorema 3.1. *Todas las soluciones racionales positivas de la ecuación* $x^y = y^{2x}$ *tienen la forma*

a) $$x = \left(2 + \frac{2}{n}\right)^{n} \qquad y \qquad y = \left(2 + \frac{2}{n}\right)^{n+1},$$

para $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, -1$ *ó*

b) $$(x, y) = (1,1), (2,16) \text{ ó } \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{128}, \left(\frac{4}{5}\right)^{125}\right).$$

Veamos que las soluciones del caso a en el Teorema anterior para $m = 2$ y $k = 2$ tiene la forma $x = \left(2 + \frac{2}{n}\right)^n$ y $y = \left(2 + \frac{2}{n}\right)^{n+1}$; en la sección anterior vimos que $x = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}$ y $y = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}$ son soluciones racionales de la ecuación $x^y = y^{mx}$; como $k = |a - b|$ y para este caso $k = 2$, se tiene que $a = b + 2$

ó $a = b - 2$, si reemplazamos estos valores tenemos

$$x = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}} = \left(2\left(\frac{2+b}{b}\right)\right)^{\frac{b}{2+b-b}} = \left(2 + 2\frac{2}{b}\right)^{\frac{b}{2}}$$

Si hacemos $n = \frac{b}{2}$ obtenemos la parte a del Teorema

$$x = \left(2 + \frac{2}{n}\right)^{n}$$

Haciendo un razonamiento análogo para el valor de y se tiene

$$y = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}} = \left(2\left(\frac{2+b}{b}\right)\right)^{\frac{2+b}{2+b-b}} = \left(2 + 2\frac{2}{b}\right)^{\frac{2+b}{2}} = \left(2 + 2\frac{2}{b}\right)^{1+\frac{b}{2}}$$

Si hacemos $n = \frac{b}{2}$ se tiene la parte a del Teorema

$$y = \left(2 + \frac{2}{n}\right)^{n+1}$$

Teorema 3.2. *Todas las soluciones racionales positivas de la ecuación $x^y = y^{3x}$ tienen la forma*

a) $$x = \left(3 + \frac{3}{n}\right)^{n} \qquad y \qquad y = \left(3 + \frac{3}{n}\right)^{n+1},$$

para $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, -1$ ó

b) $$x = \left(\frac{3w_n}{v_n}\right)^{v_n^2} \qquad y \qquad y = \left(\frac{3w_n}{v_n}\right)^{3w_n^2},$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$ ó

c) $\qquad x = \left(\frac{w_n}{v_n}\right)^{3w_n^2} \qquad y \qquad y = \left(\frac{w_n}{v_n}\right)^{v_n^2},$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$

Veamos que las soluciones del caso a en el Teorema anterior para $m = 3$ y $k = 3$ tiene la forma $x = \left(3 + \frac{3}{n}\right)^n$ y $y = \left(3 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}$; en la sección anterior vimos que $x = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}$ y $y = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}$ son soluciones racionales de la ecuación $x^y = y^{mx}$; como $k = |a - b|$ y para este caso $k = 3$, se tiene que $a = b + 3$ ó $a = b - 3$, si reemplazamos estos valores tenemos

$$x = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}} = \left(3\left(\frac{3+b}{b}\right)\right)^{\frac{b}{3+b-b}} = \left(3 + 3\frac{3}{b}\right)^{\frac{b}{3}}$$

Si hacemos $n = \frac{b}{3}$ obtenemos la parte a del Teorema

$$x = \left(3 + \frac{3}{n}\right)^n$$

Haciendo un razonamiento análogo para el valor de y se tiene

$$y = \left(\frac{ma}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}} = \left(\left(\frac{3+b}{b}\right)\right)^{\frac{3+b}{3+b-b}} = \left(3 + 3\frac{3}{b}\right)^{\frac{3+b}{3}} = \left(3 + 3\frac{3}{b}\right)^{1+\frac{b}{3}}$$

Si hacemos $n = \frac{b}{3}$ se tiene la parte a del Teorema

$$y = \left(3 + \frac{3}{n}\right)^{n+1}$$

En el Teorema 3.2, v_n y w_n son los enteros definidos por

$$v_n + w_n\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n.$$

Para encontrar los valores de x y y, primero se obtienen los valores de v_n y w_n de la siguiente manera

$$
\begin{array}{llll}
n=0 & \Longrightarrow & \sqrt{3}+1 & \Longrightarrow v_0=1 \quad \text{y } w_0=1 \\
n=1 & \Longrightarrow & 3\sqrt{3}+5 & \Longrightarrow v_1=5 \quad \text{y } w_1=3 \\
n=2 & \Longrightarrow & 11\sqrt{3}+19 & \Longrightarrow v_2=19 \quad \text{y } w_2=11 \\
n=3 & \Longrightarrow & 41\sqrt{3}+71 & \Longrightarrow v_3=71 \quad \text{y } w_3=41 \\
n=4 & \Longrightarrow & 153\sqrt{3}+265 & \Longrightarrow v_4=265 \quad \text{y } w_4=153 \\
n=5 & \Longrightarrow & 571\sqrt{3}+989 & \Longrightarrow v_5=989 \quad \text{y } w_5=571 \\
n=6 & \Longrightarrow & 2131\sqrt{3}+3691 & \Longrightarrow v_6=3691 \quad \text{y } w_6=2131 \\
n=7 & \Longrightarrow & 7953\sqrt{3}+13775 & \Longrightarrow v_7=13775 \quad \text{y } w_7=7953 \\
n=8 & \Longrightarrow & 29681\sqrt{3}+51409 & \Longrightarrow v_8=51409 \quad \text{y } w_8=29681 \\
n=9 & \Longrightarrow & 110771\sqrt{3}+191861 & \Longrightarrow v_9=1911861 \quad \text{y } w_9=110771 \\
n=10 & \Longrightarrow & 413403\sqrt{3}+716035 & \Longrightarrow v_{10}=716035 \quad \text{y } w_{10}=413403
\end{array}
$$

Ahora se reemplazan estos valores en b y c; a continuación lo haremos para el caso b; estos resultados tienen un número significativo de cifras, por esto se hace difícil ver las soluciones. Veamos algunos valores de x y y:

Si $n=0$,

$x=\left(\frac{3\cdot 1}{1}\right)^{1^2}=\left(\frac{3}{1}\right)^{1}=3$ y $y=\left(\frac{3\cdot 1}{1}\right)^{3\cdot 1^2}=\left(\frac{3}{1}\right)^{3}=27.$

Reemplazando en el teorema $x^y=y^{3x}$ se tiene

$x^y=3^{27}=7625597484987$ $y^{3x}=27^{3\cdot 3}=7625597484987.$

Si $n=1$,

$x=\left(\frac{3\cdot 3}{5}\right)^{5^2}=\left(\frac{9}{5}\right)^{25}$ y $y=\left(\frac{3\cdot 3}{5}\right)^{3\cdot 3^2}=\left(\frac{9}{5}\right)^{27},$

Cuando reemplazamos estos valores en el teorema, presentan desbordamiento por la cantidad de cifras de estos.

3.3. Los casos $k = 1$ y $k = 2$

Cuando $k = 1$ se encuentra que cualquiera de estas son soluciones

$$x = \left(m + \frac{m}{b}\right)^{b} \qquad y = \left(m + \frac{m}{b}\right)^{1+b}$$

ó

$$x = \left(m - \frac{m}{b}\right)^{-b} \qquad y = \left(m - \frac{m}{b}\right)^{1-b}.$$

es fácil a través de un programa calcular el sistema $S_1(m)$, porque se obtienen las soluciones racionales (2.2) multiplicadas por m.

Como vimos en la sección anterior $r = \frac{a}{b}$ y $k = |a - b|$, si $k = 1$ implica que $1 = a - b$ ó $1 = b - a$, si hacemos $a = b + 1$ y reemplazando en $x = (mr)^{\frac{1}{r-1}}$ e $y = (mr)^{\frac{r}{r-1}}$ se obtiene

$$x = \left(m\left(1 + \frac{1}{b}\right)\right)^{\frac{b}{a-b}} = \left(m\left(1 + \frac{1}{b}\right)\right)^{\frac{b}{b+1-b}} = \left(m + \frac{m}{b}\right)^{b},$$

$$y = \left(m\left(1 + \frac{1}{b}\right)\right)^{\frac{a}{a-b}} = \left(m\left(1 + \frac{1}{b}\right)\right)^{\frac{b+1}{b+1-b}} = \left(m + \frac{m}{b}\right)^{b+1}.$$

Análogamente cuando $a = b - 1$

$$x = \left(m\left(1 - \frac{1}{b}\right)\right)^{\frac{b}{a-b}} = \left(m\left(1 - \frac{1}{b}\right)\right)^{\frac{b}{b-1-b}} = \left(m - \frac{m}{b}\right)^{-b},$$

$$y = \left(m\left(1-\frac{1}{b}\right)\right)^{\frac{a}{a-b}} = \left(m\left(1-\frac{1}{b}\right)\right)^{\frac{b-1}{b-1-b}} = \left(m-\frac{m}{b}\right)^{1-b}.$$

Para b un número entero positivo. Se observa que estas soluciones corresponden a la familia de paramétricas (2.2) de la solución a la ecuación general de Euler; estas son dadas en la parte (a) de los Teoremas 3.1 y 3.2.

Si $k \geq 2$ la situación llega a ser más interesante, aunque el sistema $S_2(m)$ todavía no está difícil de describir, pues no tiene soluciones ó tienen infinitas soluciones. Los lemas siguientes proporcionan suficientes condiciones para que lo anterior ocurra. Como es usual, para $x \in \mathbb{N}$, $\nu_2(x)$ es el número entero más grande tal que $2^{v_2(x)}$ divide a x.

Lema 3.3. *Si $\nu_2(m)$ es impar y k es par, entonces $S_k(m)$ es vacío.*

Demostración. Se tiene que $mcd(a,b) = 1$ y $k = |a-b|$ es par, a y b deben ser ambos impares. Se sigue que $d = mcd(b,m)$ es impar también. Escribiendo como antes $b = db', m = dm', am' = u^k, b' = v^k$. Entonces como $m = dm'$ y $\nu_2(m)$ es impar por hipótesis, se tiene que $\nu_2(dm')$ es impar, se tiene d y $\nu_2(m')$ son impares, por lo tanto tenemos que $\nu_2(am')$ es impar y como $am' = u^k$ entonces $\nu_2(am') = k\nu_2(u)$ es impar, luego k es impar, lo que contradice la hipótesis. ∎

Lema 3.4. *Si $m = 2^{\nu_2(m)}m_1$ es un número entero positivo para el cual $m_1 \equiv 1 \pmod 4$ entonces $S_2(m)$ es vacío.*

Demostración. Si $\nu_2(m)$ es impar, este es un caso especial del lema 4. Si $k = 2$ es par, se puede concluir como antes que a y b son ambos impares.

Si se supone que $\nu_2(m)$ es par, entonces, se dice que $\nu_2(m) = 2t$. Se sigue a partir de (3.6) que:

$$u^2 - 2^{2t}m_1v^2 = \pm\frac{2^{2t}\cdot m_1}{d}\cdot 2 = \pm 2^{2t+1}\frac{m_1}{d},$$

donde u y v son coprimos y d divide a m. Porque $d|b$, se sigue que d es impar también $d|m_1$. Obsérvese así que $2^t|u$, se expresa $u = 2^tu_1$ por lo cual

$$\begin{aligned}
2^{2t}u_1^2 - 2^{2t}m_1v^2 &= \pm 2^{2t+1}\frac{m_1}{d},\\
2^{2t}(u_1^2 - m_1v^2) &= \pm 2^{2t+1}\frac{m_1}{d},\\
{u_1}^2 - m_1v^2 &= \pm 2\left(\frac{m_1}{d}\right). \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

puesto que el lado derecho de esta ecuación es par, u_1 y v tienen la misma paridad y u y v son coprimos necesariamente impares. Por hipótesis $m_1 \equiv 1$ (mód 4), esto implica que el lado izquierdo (3.7) es divisible por 4. El lado derecho de esta ecuación es congruente con 2 módulo 4, esto rinde la contradicción deseada. ■

La afirmación bien conocida de las ecuaciones diofántica cuadráticas nos dice que estas ecuaciones $x^2 - my^2 = c$, con $m > 0$, m no es un cuadrado perfecto y c diferente de cero, tiene infinitas soluciones, que se obtienen todas a partir de una mínima; como es claro si (x, y) es una solución, también lo son $(x, -y)$, $(-x, y)$ y $(-x, -y)$, pero nos interesan solo las soluciones $x, y > 0$. Se puede encontrar una colección de parejas de números enteros positivos, es decir

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_r, y_r),$$

de $x_i^2 - my_i^2 = c$, para $i = 1, 2, \ldots r$, tal que cada solución entera positiva (x, y) de la ecuación $x^2 - my^2 = c$ satisface

$$x + y\sqrt{m} = (x_i + y_i\sqrt{m}) \cdot (u_1 + v_1\sqrt{m})^k, \tag{3.8}$$

dónde k es un entero positivo, i pertenece $1, 2, \ldots,$ y (u_1, v_1) es la minima solución entera positiva de la ecuación $u^2 - mv^2 = 1$. El número entero r aquí depende de c y potencialmente de m.
De esto se sigue que si $S_2(m)$ es no vacío entonces es infinito. No es difícil proporcionar suficientes condiciones para que $S_2(m)$ sea no vacío.

Lema 3.5. *Si $p \equiv 3 \pmod 4$ y p es primo, entonces $S_2(p)$ es infinito*

Demostración. De (3.6) tenemos

$$x^2 - py^2 = -2 \qquad x^2 - py^2 = 2$$

Estas ecuaciones corresponden a Ecuaciones de Pell, pues por hipótesis tenemos $p \equiv 3 \pmod 4$ y p es primo, lo cual nos implica que p no es la suma de dos cuadrado (ver [9]); luego p no es un cuadrado, por lo tanto son ecuaciones de Pell y tiene solución entera x y y; y esto implica que cualquiera de las ecuaciones tiene infinitas soluciones, por lo que $S_2(p)$ es infinito. ■

Se ha llevado a los lectores poco a poco (a algo no trivial) a obtener las condiciones para que $S_2(k)$ no sea vacía.

3.4. Ecuaciones de Thue

Un famoso teorema del matemático Noruego **Axel Thue** afirma: Si Θ es un número algebraico de grado $k \geq 3$ y $\varepsilon > 0$, entonces la inecuación

$$\left|\Theta - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{|y|^{\frac{k}{2}+1+\varepsilon}}$$

tiene muchas soluciones finitas enteras x y y con $y \neq 0$. Note esto, si $\Theta = \sqrt[k]{m}$ tenemos la identidad algebraica

$$|x^k - my^k| = y^k \left|\Theta - \frac{x}{y}\right| \cdot \left(\left(\frac{x}{y}\right)^{k-1} + \Theta\left(\frac{x}{y}\right)^{k-2} + \ldots + \Theta^{k-1}\right).$$

Si m no es una k-ésima potencia perfecta y $c \neq 0$ es un entero, entonces se sigue que la ecuación

$$x^k - my^k = c$$

tiene muchas soluciones finitas enteras x y y. Estas ecuaciones son llamadas las ecuaciones de Thue en la actualidad.

Para este estudio, esto inmediatamente implica que $S_k(m)$ es finito para cada número entero fijo $k \geq 3$.

3.5. Formas lineales en logaritmos

Los sistemas $S_k(m)$ están definidos por las desigualdades de la forma

$$u^k - mv^k \leq \pm\frac{m}{d}k.$$

Para los número enteros positivos u y v. En todos los casos tenemos así

$$|u^k - mv^k| \leq mk,$$

a esto le sigue

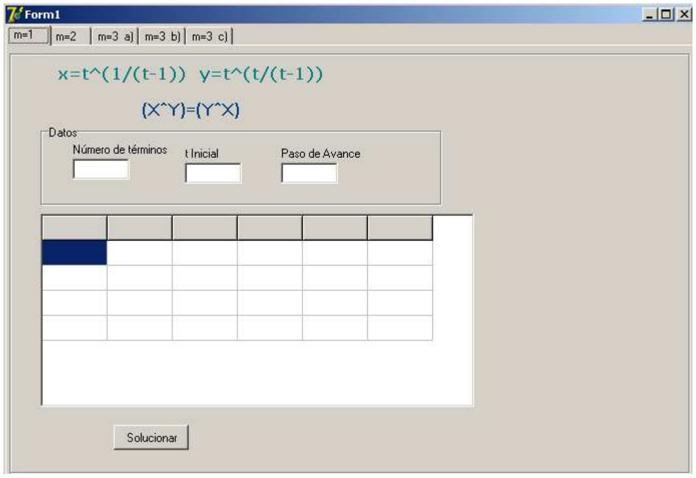
$$\left| m^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)^k - 1 \right| \leq \frac{k}{v^k}$$

y por lo tanto la forma lineal $|k\lg(\frac{u}{v}) - \lg m|$ de los logaritmos es pequeño. Un resultado de Gel'fond (extendiendo su trabajo sobre el séptimo problema de Hilbert) indica que para cualesquiera números algebraicos distintos a cero $\alpha_1,\ \alpha_2, \beta_1$ y β_2 con $\log\alpha_1$ y $\log\alpha_2$ linealmente independientes sobre los números racionales, tenemos

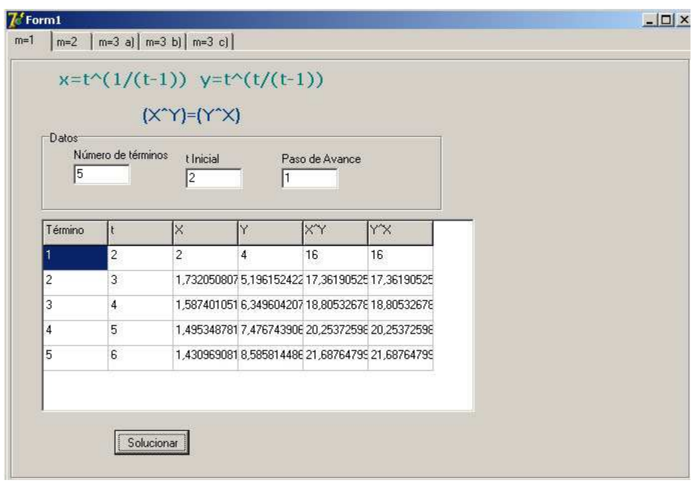
$$|\beta_1 \log\alpha_1 - \beta_2 \log\alpha_2| \neq 0$$

3.6. Resolviendo las ecuaciones

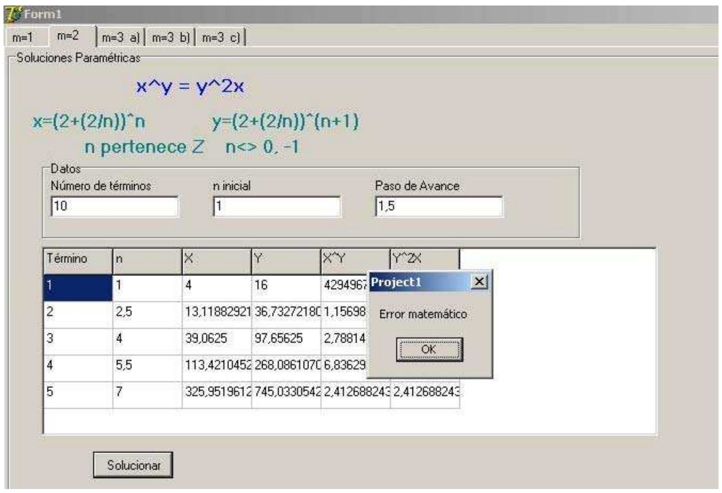
Ahora describiremos una estrategia explícita para determinar estos sistemas y la ilustramos para los casos $m = 1$, $m = 2$ y $m = 3$, por medio de un programa hecho en **Delphi7** que nos muestra algunas soluciones; los dos últimos casos tienen algunos inconvenientes por la gran cantidad de cifras de estos números. En el caso $m = 1$, si recordamos en el Capítulo 2, se tienen unas soluciones paramétricas, que son utilizadas para realizar estos cálculos; el programa consta de 5 pestañas que nos solucionan la ecuación para dichos casos. La primera pestaña corresponde a $m = 1$, el programa en esta nos pide 3 datos, número de términos, t inicial y paso de avance; En la parte inferior encontramos una tabla que nos muestra los resultados y finalmente el botón solucionar.



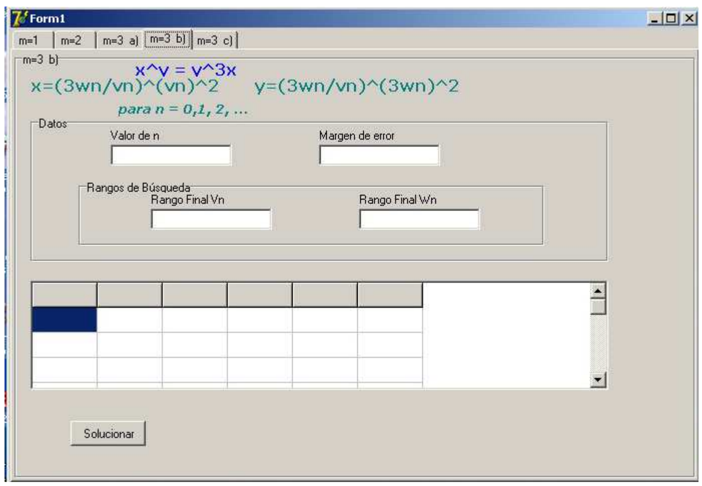
A continuación vemos para el caso $m = 1$ algunas soluciones para este caso, nos muestra 5 términos, con un t inicial de 2 y paso de avance 1.



Para el caso $m = 2$ el ambiente del programa es similar al anterior, pero de aquí en adelante tenemos algunos inconvenientes pues para valores pequeños de n esto es posible, sin embargo cuando n es suficientemente grande, esto se convierte computacionalmente imposible debido a la dificultad al reemplazar los valores x, y en el teorema por la cantidad de cifras de estos números, entre otros. Cuando esto sucede nos aparece un mensaje de *Error matemático* y a partir del termino que presenta este inconveniente, el programa no continua haciendo cálculos pero pone el último obtenido hasta completar el número de termino que digitamos.



En el caso $m = 3$ se presentan estos inconvenientes más rápidamente y además se suma otro, ya que en nuestro mundo matemático permitimos la existencia de números con una cantidad infinita de cifras para ejemplo se define $\sqrt{3}$, como el único número positivo tal que al multiplicarse por si mismo produce el entero 3; mientras que la aritmética que usa la computadora tiene solo un número finito de cifras, es decir que solo los racionales (no todos ellos) se pueden representar con exactitud. Puesto que $\sqrt{3}$ no es racional, se da una representación aproximada, cuyo cuadrado no sera 3, aunque si lo bastante cercano. En el Teorema 3.2 se tienen 3 casos, los cuales se intentan ilustrar mediante en el programa, por el inconveniente que se mencionó anteriormente el desbordamiento se hace más rápido; Este caso consta de tres pestañas con datos iniciales similares al anterior, pero se le suman margen de error, este es para evitar problemas de truncamiento; entre más pequeño sea el número el resultado es más aproximado (el número decimal lo digitamos con ,), rango final v_n y rango final w_n, estos son para definir el limite de búsqueda de las soluciones; se omite el inicial porque se inicia automáticamente en cero.



Para concluir una ecuación diofántica es una ecuación polinómica con coeficientes y raíces enteras. Resolver una ecuación diofántica (o un sistema de ellas) es hallar explícitamente sus raíces enteras. Si una ecuación (o sistema) es determinada, es decir tiene un número finito de soluciones en $\mathbb{Q}$ o en $\mathbb{R}$, podemos resolverla en uno de estos cuerpos y comprobar sus raíces una a una para ver cuales son enteras. Por ello, las ecuaciones diofánticas interesantes son las indeterminadas, que admiten infinitas soluciones y se deben caracterizar cuales de ellas son enteras; en el caso de este trabajo, la ecuación diofántica $x^y - y^{mx} = 0$, nos ha llevado poco a poco a la caracterización de sus soluciones, pasando por los casos $m = 1$, que podemos verla como la conmutatividad en la potenciación, en los casos $m = 2$ y $m = 3$ nos ha llevado a mostrar dos resultados que son empleados en el campo de los problemas diofánticos, igualmente en el transcurso de este trabajo, surgen algunas preguntas ó una generalización, entre estas ¿cuando $x^{ny} = y^{mx}$?

Bibliografía

[1] GENTILE, ENZO R. *Aritmetica Elemental.* Secretaria General de la Organización de los Estados Americanos, Programa Regional de Desarrollo Cientifico y Tecnológico, Washington, D.C. 1985.

[2] JIMENEZ Rafael, GORDILLO Enrique y RUBIANO Gustavo, *Teoría de Números Para Principiantes.* 2^{da} edición, Unibiblios, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, 1999.

[3] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers. Vol. 2* Reimpreso por Chelsea, New York, 1966.

[4] ORTEGA P. Pedro y CABARCAS U. Héctor, *Existencia de raices no triviales de la ecuación* $x^y - y^x = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}^+$. Revista Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol XI No.1 (Dic.), 2003.

[5] R. A. Knoebel, *Exponencials Reiterated.* American Mathematical Monthly, Vol. 88, 1981.

[6] REZNICK Bruce y BENNETT Michael, *Positive Rational Solutions to $x^y = y^{mx}$: A Number-Theoretic Excursion.* American Mathematical Monthly, 2004, Articulo.

[7] RODRIGUEZ D. Emilio, *Introducción a los números p-ádicos*. Bucaramanga, 2002.Tesis de grado. UIS.

[8] SHOCKLEY Jame E. *Introduction to number theory*. The Macmillan Company, New York, 1959.

[9] STEWART B. M. *Theory of numbers*. The United States of America, 1967.

A

Anexo

El presente Anexo, es el código del programa hecho en **Delphi**7 que nos ilustra las soluciones para los casos $m = 1$, $m = 2$ y $m = 3$.

```
StgGdResultadosM1.Cells[0,1]:='1';
StgGdResultadosM1.Cells[1,1]:=FloatToStr(t);
StgGdResultadosM1.Cells[2,1]:=FloatToStr(x);
StgGdResultadosM1.Cells[3,1]:=FloatToStr(y);
StgGdResultadosM1.Cells[4,1]:=FloatToStr(xy);
StgGdResultadosM1.Cells[5,1]:=FloatToStr(yx);

for cont:=0 to (StrToInt(LblEdNumTermM1.Text)-2) do
begin
t:=t+  StrToFloat(LbleEdPasoM1.Text);
x:=Power(t,(1/(t-1)));
```

```
  y:=Power(t,(t/(t-1)));
  xy:=power(x,y);
  yx:=power(y,x);

    StgGdResultadosM1.RowCount:=StgGdResultadosM1.RowCount+1;
  StgGdResultadosM1.Cells[0,2+cont]:=FloatToStr(cont+2);
  StgGdResultadosM1.Cells[1,2+cont]:=FloatToStr(t);
  StgGdResultadosM1.Cells[2,2+cont]:=FloatToStr(x);
  StgGdResultadosM1.Cells[3,2+cont]:=FloatToStr(y);
  StgGdResultadosM1.Cells[4,2+cont]:=FloatToStr(xy);
  StgGdResultadosM1.Cells[5,2+cont]:=FloatToStr(yx);
   end;
end; procedure TForm1.BitBtnSolM2Click(Sender: TObject); var
  n,x,y,xy,yx:Extended;
  cont:Integer;
begin
  n:=StrToFloat(LbEdtTInicialM2.Text);
  x:=power((2+(2/n)),n);
  y:=power((2+(2/n)),(n+1));
  xy:=power(x,y);
  yx:=power(y,2*x);
  //xy:=power(x,y);
  //yx:=power(y,x);
  //  Encabezado de las columnas
  StgGdResultadosM2.RowCount:=1;
```

```
StgGdResultadosM2.Cells[0,0]:='Término';
StgGdResultadosM2.Cells[1,0]:='n'; //FloatToStr(x);
StgGdResultadosM2.Cells[2,0]:='X'; //FloatToStr(x);
StgGdResultadosM2.Cells[3,0]:='Y';//FloatToStr(y);
StgGdResultadosM2.Cells[4,0]:='X^Y'; // FloatToStr(xy);
StgGdResultadosM2.Cells[5,0]:='Y^2X'; //FloatToStr(yx);

StgGdResultadosM2.RowCount:=2;
StgGdResultadosM2.FixedRows:=1;

StgGdResultadosM2.Cells[0,1]:='1';
StgGdResultadosM2.Cells[1,1]:=FloatToStr(n);
StgGdResultadosM2.Cells[2,1]:=FloatToStr(x);
StgGdResultadosM2.Cells[3,1]:=FloatToStr(y);
StgGdResultadosM2.Cells[4,1]:=FloatToStr(xy);
StgGdResultadosM2.Cells[5,1]:=FloatToStr(yx);

for cont:=0 to (StrToInt(LblEdtNumTermM2.Text)-2) do
begin
n:=n+  StrToFloat(LbleEdPasoM2.Text);
x:=power((2+(2/n)),n);
y:=power((2+(2/n)),(n+1));
try
  xy:=power(x,y);
  yx:=power(y,2*x);
```

```
  Except
    ShowMessage('Error matemático');
  end;
  StgGdResultadosM2.RowCount:=StgGdResultadosM2.RowCount+1;

  StgGdResultadosM2.Cells[0,2+cont]:=FloatToStr(cont+2);
  StgGdResultadosM2.Cells[1,2+cont]:=FloatToStr(n);
  StgGdResultadosM2.Cells[2,2+cont]:=FloatToStr(x);
  StgGdResultadosM2.Cells[3,2+cont]:=FloatToStr(y);
  StgGdResultadosM2.Cells[4,2+cont]:=FloatToStr(xy);
  StgGdResultadosM2.Cells[5,2+cont]:=FloatToStr(yx);
  end;
end; procedure TForm1.BitBtnSol3aClick(Sender: TObject); var
  n,x,y,xy,yx:Extended;
  cont:Integer;
begin
  n:=StrToFloat(LblEdtm3aNInic.Text);
  x:=power((3+(3/n)),n);
  y:=power((3+(3/n)),(n+1));

  xy:=power(x,y);
  yx:=power(y,3*x);

  //xy:=power(x,y);
  //yx:=power(y,x);
```

```
//  Encabezado de las columnas
StringGridResult3a.RowCount:=1;

StringGridResult3a.Cells[0,0]:='Término';
StringGridResult3a.Cells[1,0]:='n'; //FloatToStr(x);
StringGridResult3a.Cells[2,0]:='X'; //FloatToStr(x);
StringGridResult3a.Cells[3,0]:='Y';//FloatToStr(y);
StringGridResult3a.Cells[4,0]:='X^Y'; // FloatToStr(xy);
StringGridResult3a.Cells[5,0]:='Y^3X'; //FloatToStr(yx);

StringGridResult3a.RowCount:=2;
StringGridResult3a.FixedRows:=1;

StringGridResult3a.Cells[0,1]:='1';
StringGridResult3a.Cells[1,1]:=FloatToStr(n);
StringGridResult3a.Cells[2,1]:=FloatToStr(x);
StringGridResult3a.Cells[3,1]:=FloatToStr(y);
StringGridResult3a.Cells[4,1]:=FloatToStr(xy);
StringGridResult3a.Cells[5,1]:=FloatToStr(yx);

for cont:=0 to (StrToInt(LblEdtm3aNterm.Text)-2) do
begin
n:=n+  StrToFloat(LblEdtm3aPaso.Text);
x:=power((3+(3/n)),n);
```

```
  y:=power((3+(3/n)),(n+1));
  try
    xy:=power(x,y);
    yx:=power(y,3*x);
  Except
    ShowMessage('Error matemático');
  end;
  StringGridResult3a.RowCount:=StringGridResult3a.RowCount+1;

  StringGridResult3a.Cells[0,2+cont]:=FloatToStr(cont+2);
  StringGridResult3a.Cells[1,2+cont]:=FloatToStr(n);
  StringGridResult3a.Cells[2,2+cont]:=FloatToStr(x);
  StringGridResult3a.Cells[3,2+cont]:=FloatToStr(y);
  StringGridResult3a.Cells[4,2+cont]:=FloatToStr(xy);
  StringGridResult3a.Cells[5,2+cont]:=FloatToStr(yx);
  end;
end; procedure TForm1.BitBtnSol3bClick(Sender: TObject);
 var
 n,vn,wn,cont:integer;
 producto, error,x,y,xy,y3x, sumaVnWn:Extended;
begin
   error:=StrToFloat(LblEdtm3bError.Text);
   n:= StrToInt(LblEdtm3bNInic.Text);
  producto:=(1+Sqrt(3))*power((2+Sqrt(3)),n);
//******************************************************
```

```
  //  Encabezado de las columnas
  StringGridResult3a.RowCount:=1;
  StringGridResult3b.Cells[0,0]:='Término';
  StringGridResult3b.Cells[1,0]:='n'; //FloatToStr(x);
  StringGridResult3b.Cells[2,0]:='X'; //FloatToStr(x);
  StringGridResult3b.Cells[3,0]:='Y';//FloatToStr(y);
  StringGridResult3b.Cells[4,0]:='X^Y'; // FloatToStr(xy);
  StringGridResult3b.Cells[5,0]:='Y^3X'; //FloatToStr(yx);

  StringGridResult3b.RowCount:=2;
  StringGridResult3b.FixedRows:=1;

  //StringGridResult3b.Cells[1,1]:='AUXILIO';
   //ShowMessage('Help ');
 (*
  StringGridResult3b.Cells[0,1]:='1';
  StringGridResult3b.Cells[1,1]:=FloatToStr(n);
  StringGridResult3b.Cells[2,1]:=FloatToStr(x);
  StringGridResult3b.Cells[3,1]:=FloatToStr(y);
  StringGridResult3b.Cells[4,1]:=FloatToStr(xy);
  StringGridResult3b.Cells[5,1]:=FloatToStr(yx);
  *)
//*******************************************************
   cont:=0;
  for vn:= 0 to StrToInt(LblEdtm3bRngFinVn.Text) do
```

```
begin
   for wn:= 0 to StrToInt(LblEdtm3bRngFinWn.Text) do
   begin
       sumaVnWn:= vn + (wn*Sqrt(3));
       if (Abs( sumaVnWn - producto)<= error) then
       begin
          cont:=cont+1;
          x:=( power((3*wn/(vn)),sqr(vn)) )/1;
          y:=( power((3*wn/(vn)),3*sqr(wn)) )/1;
           xy:=power(x,y);
           y3x:=power(y,(3*x));

           //ShowMessage(FloatToStr(y3x));
           //**********
            StringGridResult3b.RowCount:=StringGridResult3b.RowCount+1;
            StringGridResult3b.Cells[0,0+cont]:=FloatToStr(cont);
            StringGridResult3b.Cells[1,0+cont]:=FloatToStr(n);
            StringGridResult3b.Cells[2,0+cont]:=FloatToStr(x);
            StringGridResult3b.Cells[3,0+cont]:=FloatToStr(y);
            StringGridResult3b.Cells[4,0+cont]:=FloatToStr(xy);
            StringGridResult3b.Cells[5,0+cont]:=FloatToStr(y3x);
           //********
       end;
   end;
end;
```

```
end; procedure TForm1.SolucionarClick(Sender: TObject);
 var
 n,vn,wn,cont:integer;
 producto, error,x,y,xy,y3x, sumaVnWn:Extended;
 Hallado:Boolean;
begin
//*******************************************
   error:=StrToFloat(LblEdtm3cError.Text);
   n:= StrToInt(LblEdtm3cNInic.Text);
  producto:=(1+Sqrt(3))*power((2+Sqrt(3)),n);
//*****************************************************
  //  Encabezado de las columnas
  StringGridResult3c.RowCount:=1;

  StringGridResult3c.Cells[0,0]:='Término';
  StringGridResult3c.Cells[1,0]:='n'; //FloatToStr(x);
  StringGridResult3c.Cells[2,0]:='X'; //FloatToStr(x);
  StringGridResult3c.Cells[3,0]:='Y';//FloatToStr(y);
  StringGridResult3c.Cells[4,0]:='X^Y'; // FloatToStr(xy);
  StringGridResult3c.Cells[5,0]:='Y^3X'; //FloatToStr(yx);

  StringGridResult3c.RowCount:=2;
  StringGridResult3c.FixedRows:=1;

  //StringGridResult3b.Cells[1,1]:='AUXILIO';
```

```
  //ShowMessage('Help ');
 (*
  StringGridResult3b.Cells[0,1]:='1';
  StringGridResult3b.Cells[1,1]:=FloatToStr(n);
  StringGridResult3b.Cells[2,1]:=FloatToStr(x);
  StringGridResult3b.Cells[3,1]:=FloatToStr(y);
  StringGridResult3b.Cells[4,1]:=FloatToStr(xy);
  StringGridResult3b.Cells[5,1]:=FloatToStr(yx);
  *)
//*******************************************************
   cont:=0;

  Hallado:=False;
  for vn:= 0 to StrToInt(LblEdtm3cRngFinVn.Text) do
  begin
     for wn:= 0 to StrToInt(LblEdtm3cRngFinWn.Text) do
     begin
         sumaVnWn:= vn + (wn*Sqrt(3));
         if (Abs( sumaVnWn - producto)<= error) then
         begin
            Hallado:=True;
            cont:=cont+1;
            x:=( power((wn/(vn)),3*sqr(wn)) )/1;
            y:=( power((wn/(vn)),sqr(vn)) )/1;
             xy:=power(x,y);
```

```
             y3x:=power(y,(3*x));

             //ShowMessage(FloatToStr(y3x));
            //**********
              StringGridResult3c.RowCount:=StringGridResult3c.RowCount+1;
              StringGridResult3c.Cells[0,0+cont]:=FloatToStr(cont);
              StringGridResult3c.Cells[1,0+cont]:=FloatToStr(n);
              StringGridResult3c.Cells[2,0+cont]:=FloatToStr(x);
              StringGridResult3c.Cells[3,0+cont]:=FloatToStr(y);
              StringGridResult3c.Cells[4,0+cont]:=FloatToStr(xy);
              StringGridResult3c.Cells[5,0+cont]:=FloatToStr(y3x);
            //********
            Break;
         end;
         if Hallado then
           Break;
     end;
  end;
//**********************************************
end;
end.
```