Puntos fijos de multifunciones difusas

Vladimir Angulo Castillo

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga
2011

Puntos fijos de multifunciones difusas

Autor

Vladimir Angulo Castillo

Trabajo de grado como requisito

parcial para optar el título de

Licenciado en Matemáticas

Director

Elder Jesús Villamizar Roa, Ph.D.

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga
2011

Agradecimientos

- Agradezco a Dios por estar siempre cuidándome y protegiéndome en todo momento.
- Agradezco al profesor Elder por toda su colaboración e interés en mi proyecto, por todas sus recomendaciones y concejos y por su dedicación y empeño.
- Agradezco todo el apoyo que me brindó mi familia y amigos. En particular, a mi novia que siempre estuvo ahí para apoyarme y animarme a escribir mi proyecto.
- A todos quienes hicieron posible este gran logro que representa par mi.

Índice general

Índice de figuras

TITULO: PUNTOS FIJOS DE MULTIFUNCIONES DIFUSAS[1]
AUTOR: Vladimir Angulo Castillo[2]

PALABRAS CLAVE: Espacios métricos; Conjuntos difusos; Multifunciones contractivas; Multifunciones contractivas difusas; Puntos fijos; Estabilidad; Sistemas iterados.

DESCRIPCIÓN

El Análisis Multívoco Difuso ha tenido un vertiginoso avance en los últimos años, destacando en particular, algunos trabajos con resultados relativos a la teoría de puntos fijos de multifunciones difusas con diversas aplicaciones y propiedades que han aparecido en la literatura [5, 9, 10, 11, 12, 13]. El contenido de está monografía se basa principalmente en una disertación del artículo [12] y en una aplicación de los puntos fijos de una multifunción y una multifunción difusa visto en [9, 19].

El presente trabajo ha sido organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo, se inicia dando un breve resumen sobre las principales definiciones y teoremas relacionados a los espacios métricos, incluyendo en particular la métrica de Hausdorff. Adicionalmente, se revisan las definiciones de conjunto difuso y α-nivel de un conjunto difuso. Luego se presentan algunos conceptos relativos a la teoría de multifunciones, junto con los resultados principales de los puntos fijos de una multifunción, con el objetivo de analizar aspectos como lo son la existencia, unicidad y estabilidad de los puntos fijos. El capítulo termina definiendo lo que es una multifunción difusa, y con ella, se destacan algunos resultados de puntos fijos.

El tema central del segundo capítulo, es el análisis de los conjuntos difusos de puntos fijos de multifunciones contractivas difusas, en donde se analiza un resultado relativo a la estabilidad de los puntos fijos de una multifunción difusa. Se destaca la existencia de un conjunto difuso u cuyos α-niveles corresponden con el conjunto de puntos fijos de una multifunción Γ_α, generada a través de una multifunción difusa Γ. Finalmente, se analiza un caso particular de multifunciones aplicadas a sistemas iterados de funciones y se trabaja con una clase especial de sistemas dinámicos sobre espacios de funciones denominados sistemas iterados de conjuntos difusos (ver [9, 19]).

[1]Tesis
[2]FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Ph. D. Élder Jesús Villamizar Roa

TITLE: FIXED POINTS OF FUZZY MULTIFUNCTION[1]
AUTHOR: Vladimir Angulo Castillo[2]

KEY WORDS: Metric spaces; Fuzzy sets; Multifunction contractive; Multifunction contractive fuzzy; Fixed points; Stability; Iterative systems.

DESCRIPTION

Fuzzy multivocal Analysis has had a rapid advance in recent years, highlighting in particular, some work with results on the theory of fixed points of fuzzy multifunctions with various applications and properties that have appeared in the literature [5, 9, 10, 11, 12, 13]. The contents of this paper is mainly based on a dissertation article [12] and an application of the fixed points of a multifunction and a multifunction fuzzy seen in [9, 19].

This paper is organized as follows. In the first chapter, begins with a brief summary on the main definitions and theorems related to metric spaces, including in particular the Hausdorff metric. Additionally, are reviewed the definitions of fuzzy set and α-level of a fuzzy set. Following are exhibit some concepts relating to the theory of multifunctions, along with the main results of the fixed points of a multifunction, in order to analyze aspects such as the existence, uniqueness and stability of fixed points. The chapter ends by defining what is a fuzzy multifunction and with it, are highlights some results of fixed points.

The central theme of the second chapter is the analysis of the fuzzy sets of fixed points of contractive fuzzy multifunctions, in where is analyzes a result on the stability of fixed points of a fuzzy multifunction. It highlights the existence of a fuzzy set u whose α levels correspond to the set of fixed points of a multifunction Γ_α, generated through a fuzzy multifunction Γ. Finally, is analyzed a particular case of multifunctions applied to iterated functions systems and is worked with a special class of dynamical systems on spaces of functions called iterated fuzzy set systems (see [9, 19]).

[1] Thesis
[2] FACULTY OF SCIENCES, DEGREE IN MATHEMATICS.
DIRECTOR Ph. D. Élder Jesús Villamizar Roa

Introducción

Durante los últimos 50 años la Teoría de Multifunciones se ha mantenido en escena, y con ella el llamado Análisis Multívoco. Estas teorías comenzaron a desarrollarse fuertemente debido a sus variadas aplicaciones en distintos campos, como por ejemplo, aplicaciones en la teoría de conjuntos difusos [7], en la Teoría de Control y Optimización [1, 20], en la Teoría de las Inclusiones Diferenciales [16], en Sistemas Estocásticos [8], en la Teoría de los Continuos [18], en Sistemas Iterados [19], en Electromagnetismo [21], entre otras.

Naturalmente, los objetos de estudio del Análisis Multívoco son las multifunciones, las cuales se definen como aplicaciones

$$\begin{aligned} F \quad : \quad & X \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\ & x \longmapsto F(x) \in \mathcal{P}(Y), \end{aligned}$$

donde X y Y son conjuntos no vacíos, $F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ y, $\mathcal{P}(Y)$ denota el conjunto "partes de Y".

Dada una función $f : X \to Y$, ésta induce naturalmente una multifunción $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ definida por $F(x) = \{f(x)\}$. De esta forma, la definición de una multifunción puede ser vista como una generalización del concepto de función. Desde el punto de vista del Análisis Matemático, son conocidos varios resultados que dan condiciones de existencia de puntos fijos de aplicaciones $f : X \to X$. Recordemos el resultado clásico de las contracciones de Banach que establece que si (X, d) es un espacio métrico completo y $f : X \to X$ es una contracción, entonces f tiene un único punto fijo; por lo tanto, una cuestión interesante es pasar al contexto multívoco e indagar por lo que sería un punto fijo de una multifunción y bajo qué condiciones se garantiza la existencia de puntos fijos. Se señala aquí que un punto $x \in X$ se dice que es un punto fijo de una multifunción $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$, si se verifica que $x \in F(x)$. Nadler en [10], extiende el principio de las contracciones de Banach para las contracciones multívocas $F : X \longrightarrow C(X)$, siendo $C(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos acotados y cerrados de un espacio métrico (X, d). Lim en [13], da algunos resultados relativos al conjunto de puntos fijos de una contracción multívoca, entre ellos, el análisis de la convergencia en los conjuntos de puntos fijos de una sucesión de contracciones multívocas.

El estudio de puntos fijos de multifunciones, además de su interés matemático implícito, tiene su impacto en un gran número de aplicaciones, entre las que citamos la Teoría de Control, cuyo objeto de estudio es el control de sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales, la Teoría de las Inclusiones Diferenciales, y sus aplicaciones, y en particular las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, los Sistemas Iterados para la animación de imágenes, entre otros (ver [2, 13, 16, 17, 19]).

Lo anterior motiva a entender la base de lo que es una multifunción, y con ello conocer resultados en la literatura que versen sobre la existencia de puntos fijos de multifunciones, aplicaciones y propiedades; entre otras razones, como etapa previa para el entendimiento y desarrollo de resultados en otras subáreas del análisis, en donde el cálculo de multifunciones es una herramienta imprescindible, como es el caso del Análisis Multívoco Difuso.

El Análisis Multívoco Difuso es una fusión entre el Análisis Multívoco con la Teoría de Conjuntos Difusos, ésta última, iniciada en la década de los 60 con el trabajo pionero de Zadeh [15], quien introdujo el concepto de conjunto difuso y sus propiedades, dando origen a una teoría que hoy en día ha cobrado mucha importancia debido a las aplicaciones que posee en problemas que obedecen a comportamientos de tipo no determinístico (ver [4, 12, 13]). Naturalmente, los elementos básicos del Análisis Multívoco Difuso son las multifunciones difusas, las cuales generalizan el concepto de multifunción y son, básicamente, multifunciones con valores, siendo conjuntos difusos, éstos últimos, definidos como funciones que van de un conjunto no vacío X

en el intervalo $[0, 1]$.

Un cuestionamiento que surge inmediatamente es el relacionado con el concepto de punto fijo de una multifunción difusa, sus propiedades y sus aplicaciones. En las dos últimas décadas han aparecido en la literatura algunos trabajos con resultados relativos a la teoría de puntos fijos de multifunciones difusas $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$, donde $E(X)$ representa el conjunto de los conjuntos difusos con α-niveles no vacíos, cerrados y acotados de un espacio métrico (X, d). Entre esos trabajos se encuentran [5, 9, 10, 11, 12, 13], en los cuales se han obtenido diversos resultados que incluyen propiedades y aplicaciones de los puntos fijos de una multifunción difusa. Se observa, en particular, el estudio de contracciones difusas $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$, que ha sido usado en la teoría de fractales con tonalidades de grises ("grey levels"), la cual tiene interesantes aplicaciones en animación de imágenes, y donde el conjunto de puntos fijos de contracciones difusas podría considerarse como atractores que representan imágenes que se deforman de manera aparentemente continua en el tiempo. Cabe resaltar que $x \in X$ es un punto fijo de una multifunción difusa $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$, si se verifica que $\mathcal{X}_{\{x\}} \subseteq \Gamma(x)$.

En ésta monografía se pretende hacer un acercamiento al lector hacia lo que son las multifunciones difusas, analizando en particular, aspectos como la existencia, unicidad y estabilidad del conjunto difuso de puntos fijos de multifunciones difusas, destacando la relación existente entre los resultados en el contexto multívoco clásico y el contexto multívoco difuso. Estabilidad en el sentido de que si u_i y u_0 son los conjuntos difusos de puntos fijos asociados a las multifunciones difusas Γ_i y Γ_0, respectivamente, en un espacio métrico (X, d) y Γ_i converge a Γ_0 uniformemente sobre X, entonces $D(u_i, u_0)$ converge a 0 cuando i tiende a infinito, siendo $D(u_i, u_0) = \sup_{x \in X} H(L_\alpha u_i(x), L_\alpha u_0(x))$ y $H(L_\alpha u_i(x), L_\alpha u_0(x))$ denotando la distancia entre los α-niveles acotados y cerrados de u_i y u_0 (ver Definición 2.1.3). Con este trabajo monográfico, se espera generar interés en la comunidad matemática iniciante en el tema, y de igual manera, motivar el avance de estos estudios a niveles de cursos de posgrado. En particular sería interesante investigar la relación entre la teoría de existencia y estabilidad de puntos fijos de multifunciones difusas con resultados recientes de existencia y unicidad de soluciones de problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales difusas (EDD) usando nociones generales de diferenciabilidad difusa, asuntos abordados recientemente en [1, 2, 3, 22].

El presente trabajo ha sido organizado de la siguiente manera: el primer capítulo, se inicia con un breve resumen sobre las principales definiciones y teoremas relacionados a los espacios métricos, incluyendo en particular la métrica de Hausdorff. Adicionalmente, se revisa la definición de conjunto difuso y se presenta el concepto de α-nivel de un conjunto difuso y sus propiedades. También se expone el Teorema de Representación de Negoita & Ralescu (ver [7]), el cual es una herramienta imprescindible para establecer, en el análisis difuso, resultados paralelos a los que se dan en el análisis clásico. Posteriormente se presentan algunos conceptos relativos a la teoría de multifunciones, incluyendo definiciones, fundamentos teóricos, propiedades y ejemplos, junto con los resultados principales del conjunto de puntos fijos de una multifunción; con el objetivo de analizar aspectos como lo son la existencia, unicidad y estabilidad del conjunto de puntos fijos. El capítulo termina definiendo lo que es una multifunción difusa $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$, y con ella se destacan algunos resultados de puntos fijos.

En el segundo capítulo, el tema central es el análisis de los conjuntos difusos de puntos fijos de multifunciones contractivas difusas, en donde se analiza un resultado relativo a la estabilidad del conjunto de puntos fijos de una multifunción difusa. Se destaca la existencia de un conjunto difuso u cuyos α-niveles corresponden con el conjunto de puntos fijos de una multifunción Γ_α, generada a través de una multifunción difusa Γ. Posteriormente se analiza un caso particular de multifunciones aplicadas a sistemas iterados de funciones o SIF, los cuales se componen de un sistema w de N contracciones $\omega_i : X \longrightarrow X$, $i = 1, 2, \cdots, N$, sobre un espacio métrico (X, d). Finalmente, se trabaja con una clase especial de sistemas dinámicos sobre espacios de funciones denominados sistemas iterados de conjuntos difusos o SICD (ver [9, 19]), los cuales se componen de un sistema w (denominado también la componente SIF) de N contracciones $\omega_i : X \longrightarrow X$, $i = 1, 2, \cdots, N$, sobre un espacio métrico (X, d), junto con un sistema asociado Φ (la componente tonalidad de grises o "grey level") de aplicaciones $\phi_i : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ denominadas "grey level". Estos sistemas, denotados como (w, Φ), están asociados a un operador contractivo

$T : E(X) \longrightarrow E(X)$, el cual posee un único punto fijo u, denominado el atractor del SICD, donde

u es un conjunto difuso. Los sistemas iterados, ya sean los SIF o los SICD, poseen varias aplicaciones, principalmente para la animación de imágenes y en la construcción de fractales.

El contenido de está monografía se basa principalmente en una disertación del artículo [12] y en una aplicación de los puntos fijos de una multifunción y una multifunción difusa visto en [9, 19].

Capítulo 1

Puntos fijos de multifunciones difusas

El objeto de estudio del Análisis Multívoco son las multifunciones, incluyendo las propiedades, relaciones y aplicaciones que ellas poseen. En este capítulo se presentan algunos conceptos relativos a la teoría de multifunciones, incluyendo definiciones, fundamentos teóricos, propiedades y ejemplos, junto con los resultados principales del conjunto de puntos fijos de una multifunción, con el objetivo de analizar aspectos como la existencia, unicidad y estabilidad del conjunto de puntos fijos. Se inicia dando algunos preliminares sobre espacios métricos y la métrica de Hausdorff. Adicionalmente, se revisa la definición de conjuntos difusos y se presenta el concepto de α-nivel de un conjunto difuso y sus propiedades. Posteriormente, se definie lo que es una multifunción difusa $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$, donde $E(X)$ representa el conjunto de todos los conjuntos difusos con α-niveles cerrados y acotados de un espacio métrico (X, d), y con ella se destacan algunos resultados de puntos fijos de una multifunción difusa $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$.

1.1. Espacios métricos

En esta sección, se darán algunos preliminares importantes para el desarrollo del trabajo referentes a espacios métricos.

Definición 1.1.1. *Un espacio métrico es un conjunto no vacío X con una función* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *que satisface las siguientes propiedades:*

a) $d(x,y) \geq 0, \ \ \forall x,y \in X$ *con* $d(x,y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$*,*

b) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$*,*

c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$*.*

Se destacan algunos ejemplos de espacios métricos que serán de utilidad a lo largo del texto.

Ejemplo 1.1.2. ⋄ $\mathbb{R}^n$ *con la métrica euclidiana es un espacio métrico.*

⋄ *Sea* S *un conjunto no vacío y sea* (Y,d) *un espacio métrico. Una función* $f : S \longrightarrow Y$ *es acotada si*

$$\sup_{x,y\in S} d\left(f(x), f(y)\right) < \infty.$$

El conjunto $B(S,Y) := \{f : S \longrightarrow Y, \ f \text{ es acotada}\}$ *es un espacio métrico si se considera como métrica a la función*

$$D(f,g) := \sup_{x,y\in S} d\left(f(x), f(y)\right), \quad \text{para cada} \quad f,g \in B(S,Y).$$

Para el desarrollo del trabajo es necesario tener en cuenta aspectos como la convergencia y la completez en espacios métricos. Por ello, se dan las siguientes definiciones relacionadas con sucesiones convergentes, sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos.

Definición 1.1.3. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Una sucesión es una aplicación* $N \to X$ *que a cada* n *le asocia el punto* $x_n \in X$*.*

Se utilizará la notación $x_n \overset{d}{\to} x$ para indicar que la sucesión (x_n) converge a x, cuando sea necesario aclarar el tipo de métrica en el cual tal sucesión es convergente.
Se usará también la notación $x_n \nearrow x$ para indicar que la sucesión (x_n) es tal que

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq \lim_{x\to\infty} x_n = x.$$

Definición 1.1.4 ([23])**.** *Una sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *de puntos de un espacio métrico* (X,d) *es convergente si existe un punto* $x_0 \in X$ *que cumpla que para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n > N$ *se tiene que* $d(x_n, x_0) < \epsilon$*.*

Definición 1.1.5 ([23]). *Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X es llamada de Cauchy si, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon > 0$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todo $m, n \geq n_\epsilon$.*

Definición 1.1.6 ([23]). *Un espacio métrico (X, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.*

Se destacan algunos ejemplos de espacios métricos completos.

Ejemplo 1.1.7. *Los espacios dados en el Ejemplo 1.1.2 son ejemplos de espacios métricos completos.*

1.2. Métrica de Hausdorff

Dado un espacio métrico (X, d) se define la métrica de Hausdorff sobre el espacio $C(X)$ de todos los subconjuntos no vacíos, acotados y cerrados de X; además, se presenta un resultado que garantiza que $(C(X), H)$ sea un espacio métrico completo desde que (X, d) sea un espacio métrico completo.

Definición 1.2.1 ([12]). *Sea (X, d) un espacio métrico. Se considera a*

$$C(X) = \{A \subseteq X,\ A \neq \emptyset,\ A \text{ acotado y cerrado}\},$$

el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos, acotados y cerrados de X, y a

$$N(A, \epsilon) = \{x \in X :\ d(x, a) < \epsilon,\ \text{para algún } a \in A\},$$

como el entorno con centro en $A \in C(X)$ y radio ϵ. La métrica de Hausdorff sobre $C(X)$ es definida como

$$H(A, B) = \text{ínf}\,\{\epsilon > 0 \mid A \subset N(B, \epsilon) \text{ y } B \subset N(A, \epsilon)\},\ \text{para cada } A, B \in C(X).$$

Si $A \in C(X)$ y $\epsilon > 0$ se puede ver que

$$\begin{aligned} N(A,\epsilon) &= \{x \in X \mid d(x,a) < \epsilon, \ \text{ para algún } \ a \in A\} \\ &= \bigcup_{a \in A} \{x \in X \mid d(x,a) < \epsilon\} \\ &= \bigcup_{a \in A} N(a,\epsilon). \end{aligned}$$

Geométricamente, en la figura 1.1 puede apreciarse la construcción del entorno del conjunto A a partir de la unión de los entornos de cada elemento de A.

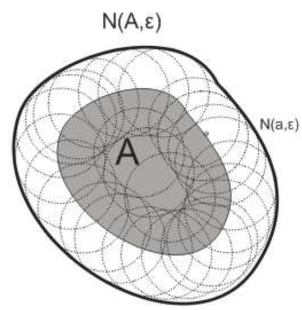


Figura 1.1 – $N(A,\epsilon)$ como la unión de $N(a,\epsilon)$ para cada $a \in A$.

La figura 1.2 muestra dos conjuntos $A, B \in C(X)$ con entornos de A y B, respectivamente, que satisfacen las condiciones $A \subset N(B,\epsilon_1)$ y $B \subset N(A,\epsilon_2)$. Aquí, ϵ_1 y ϵ_2 son las distancias más pequeñas posibles para que las anteriores condiciones se cumplan. La distancia de Hausdorff de A y B es el máximo valor entre ϵ_1 y ϵ_2; es decir, $H(A,B) = \text{máx}\{\epsilon_1,\epsilon_2\}$.

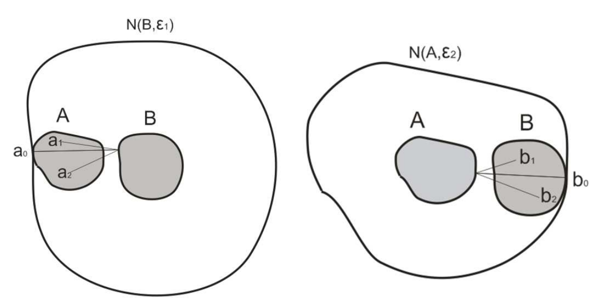


Figura 1.2 – $A \subset N(B,\epsilon_1)$ y $B \subset N(A,\epsilon_2)$.

Proposición 1.2.2 ([6]). *H es una métrica.*

Demostración: Comprobando cada una de las propiedades de un espacio métrico se tiene:

1. $H(A,B)=0$ si y sólo si $A=B$.

   Si $A=B$ entonces, por definición de H, $H(A,B)=H(A,A)=0$. Si $H(A,B)=0$ luego $\text{ínf}\,\{r>0 \mid A\subset N(B,r)\ y\ B\subset N(A,r)\}=0$, lo cual implica que $A\subset\overline{B}$ y $B\subset\overline{A}$, donde $\overline{B}$ y $\overline{A}$ denotan la clausura de B y A, respectivamente. Como A y B son cerrados, $A\subset B$ y $B\subset A$. Por lo tanto, $A=B$. Es claro que si $A\neq B$ entonces $H(A,B)>0$ para todo $A,B\in C(X)$.

2. Es claro que $H(A,B)=H(B,A)$ para todo $A,B\in C(X)$.

3. $H(A,C)\leq H(A,B)+H(B,C)$ para todo $A,B,C\in C(X)$.

   Sea $a\in A$. Como $A\subset N(B,H(A,B))$, existe un $b_0\in B$ tal que $d(a,b)<H(A,B)$. De igual manera, existe $c_0\in C$ tal que $d(b_0,c_0)<H(B,C)$, así

   $$d(a,c_0)\leq d(a,b_0)+d(b_0,c_0)<H(A,B)+H(B,C).$$

   Por lo tanto, dado $a\in A$, existe $c_0\in C$ tal que $d(a,c_0)<H(A,B)+H(B,C)$, es decir, $A\subset N(C,H(A,B)+H(B,C))$. De igual manera $C\subset N(A,H(A,B)+H(B,C))$. Por consiguiente,

   $$H(A,C)\leq H(A,B)+H(B,C).$$ □

Lema 1.2.3. *Si $A,B\in C(X)$, entonces*

$$\text{ínf}\left\{\epsilon>0 \mid \forall a\in A, \inf_{b\in B} d(a,b)<\epsilon\right\}=\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b).$$

Demostración: Sea

$$\epsilon_1=\text{ínf}\left\{\epsilon>0 \mid \quad \text{para todo} \quad a\in A, \inf_{b\in B} d(a,b)<\epsilon\right\}.$$

Entonces $\inf_{b\in B} d(a,b) \leq \epsilon_1$ para todo $a \in A$, lo cual quiere decir que ϵ_1 es una cota superior de $S = \left\{\inf_{b\in B} d(a,b) : a \in A\right\}$. Sea δ el supremo de S, entonces $\delta \leq \epsilon_1$ por ser δ la menor de las cotas superiores de S. Supóngase que $\delta < \epsilon_1$; luego existe $s \in S$ tal que $\delta < s \leq \epsilon_1$, es decir, existe $a_0 \in A$ tal que $\delta < \inf_{b\in B} d(a_0,b) \leq \epsilon_1$, lo cual es contradictorio ya que δ es el supremo de S. Por consiguiente $\delta = \epsilon_1$. □

Otra forma de calcular la métrica de Hausdorff es dada por la Proposición 1.2.4.

Proposición 1.2.4 ([6]). *La métrica de Hausdorff también se puede calcular como*

$$H(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b),\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b)\right\}.$$

Demostración: Por la definición de la métrica de Hausdorff se tiene que

$$\begin{aligned} H(A,B) &= \inf\{\epsilon > 0 \mid A \subset N(B,\epsilon)\ y\ B \subset N(A,\epsilon)\} \\ &= \max\{\inf\{\epsilon > 0 \mid A \subset N(B,\epsilon)\}, \inf\{\epsilon > 0 \mid B \subset N(A,\epsilon)\}\}, \end{aligned}$$

puesto que se debe satisfacer que $A \subset N(B,\epsilon)$ y $B \subset N(A,\epsilon)$.

La condición de que $A \subset N(B,\epsilon)$ significa que $A \subset \cup_{b\in B}\{x \in X : d(x,b) < \epsilon\}$ y esto implica que para todo $a \in A$, $\inf_{b\in B} d(a,b) < \epsilon$. De igual manera, si $B \subset N(A,\epsilon)$ implica que para todo $b \in B$, $\inf_{a\in A} d(a,b) < \epsilon$. Entonces por la Definición 1.2.1 y por el Lema 1.2.3 se tiene que

$$\begin{aligned} H(A,B) &= \max\{\inf\{\epsilon > 0 \mid A \subset N(B,\epsilon)\}, \inf\{\epsilon > 0 \mid B \subset N(A,\epsilon)\}\} \\ &= \max\left\{\inf\left\{\epsilon > 0 \mid \forall a \in A, \inf_{b\in B} d(a,b) < \epsilon\right\}, \inf\left\{\epsilon > 0 \mid \forall b \in B, \inf_{a\in A} d(a,b) < \epsilon\right\}\right\} \\ &= \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b)\right\}, \end{aligned}$$

lo cual demuestra el resultado. □

El siguiente ejemplo permite ver el significado geométrico de la métrica de Hausdorff dados dos conjuntos A y B.

Ejemplo 1.2.5. *Considere* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *y* $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-4)^2 + y^2 \leq 4\}$ *(ver Figura 1.3).*

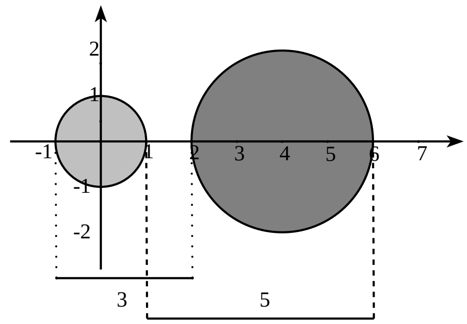


Figura 1.3 – Distancia de Hausdorff entre los conjuntos A y B.

Entonces $\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a, b) = 3$ *y* $\sup_{b\in B} \inf_{a\in A} d(a, b) = 5$*, luego* $H(A, B) = \max\{3, 5\} = 5$.

El Teorema 1.2.6 muestra que a partir de la completez de X, se obtiene la completez de $C(X)$.

Teorema 1.2.6 ([4, 14])**.** *Si* (X, d) *es un espacio métrico completo entonces* $(C(X), H)$ *es un espacio métrico completo.*

Demostración: Sea (A_p) una sucesión de Cauchy en $(C(X), H)$. Se probará que $A_p \xrightarrow{H} A$, donde $A \in C(X)$. Para todo $\epsilon > 0$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, existe p_k tal que si $p, q \geq p_k$, se tiene que $H(A_p, A_q) < 2^{-k}\epsilon$. Sea (r_k) una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ tal que $r_k \geq p_k$, para todo k. Sean $x_i \in A_{r_i}$, $i = 1, 2, \cdots, k-1$, tales que $d(x_i, x_{i+1}) < 2^{-i}\epsilon$ para $i = 1, 2, \cdots, k-1$. Entonces x_{k+1} es elegido en $A_{r_{k+1}}$ de modo que se verifique $d(x_k, x_{k+1}) < 2^{-(k+1)}\epsilon$.
Se puede observar que x_{k+1} existe, pues

$$H(\{x_k\}, A_{r_{k+1}}) \leq H(A_{r_k}, A_{r_{k+1}}) \leq 2^{-(k+1)}\epsilon.$$

Es posible ver que (x_k) es una sucesión de Cauchy en X. Luego existe $x \in X$ y un $A \in C(X)$ tales que $x_k \longrightarrow x$, con $x \in A$. Por otra parte, se tiene que

$$d(x, x_1) = \lim_{k\to\infty} d(x_k, x_1) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k-1} d(x_{i+1}, x_i) < \epsilon.$$

Así, para todo $r_1 \geq p_1$ y para todo $x_1 \in A_{r_1}$, es posible encontrar un $x \in A$ tal que $d(x_1, x) < \epsilon$. Es decir, $A_{r_1} \subseteq N(A, \epsilon)$, para todo $r_1 \geq p_1$.
Se mostrará ahora que $A \subseteq N(A_p, \epsilon)$, para todo $p \geq p_1$.
En efecto, se sabe que $H(A_p, A_q) < \dfrac{\epsilon}{2}$, para todo $p, q \geq p_1$. Si $x \in A$ entonces $x \in \overline{\bigcup_{p \geq p_1} A_p}$; por lo tanto, existe $q \geq p_1$ y $y \in A_q$ con $d(x, y) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Finalmente, si $p \geq p_1$, se tiene que

$$H(\{x\}, A_p) \leq H(\{x\}, A_q) + H(A_q, A_p) < \epsilon.$$

Por lo tanto, $A \subseteq N(A_p, \epsilon)$, para todo $p \geq p_1$. Esto muestra que $H(A_p, A)$ converge a 0, cuando $p \to \infty$. Entonces $(C(X), H)$ es un espacio métrico completo. □

La Definición 1.2.7 establece lo que es una semimétrica de Hausdorff, la cual es necesaria para la prueba del Teorema 1.3.5.

Definición 1.2.7. *Si $A, B \in C(X)$ se define la semimétrica de Hausdorff como*

$$\rho(A, B) = \sup_{a \in A} \operatorname{ínf}_{b \in B} d(a, b),$$

es decir, ρ sólo cumple la propiedad de desigualdad triangular de la Definición 1.1.1.

Observación 1.2.8. *Se puede mostrar que si $A, B, C \in C(X)$, entonces*

$$\rho(A, B) = 0 \quad \textit{si sólo si} \quad A \subset B$$

y además,

$$\rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C).$$

1.3. Conjuntos difusos, α-niveles y el espacio $E(X)$

Un conjunto difuso u sobre un conjunto X no vacío es una aplicación $u : X \longrightarrow [0, 1]$, donde el valor de $u(x)$ denota el grado de pertenencia del elemento x al conjunto difuso u. Si $u(x) = 1$ significa que x tiene una pertenencia total, si $0 < u(x) < 1$ indica una pertenencia parcial, y

$u(x) = 0$ indica no pertenencia de x al conjunto difuso. Los conjuntos clásicos son conjuntos difusos, donde la función de pertenencia es la función característica. En el presente trabajo, se denotará por $\mathcal{F}(X)$ a la colección de todos los conjuntos difusos definidos sobre X.

Definición 1.3.1. *Sean X un conjunto no vacío, $u : X \longrightarrow [0,1]$ un conjunto difuso definido sobre X y $\alpha \in (0,1]$. Se define el α-nivel del conjunto difuso u como:*

$$L_\alpha u = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\}$$

y el soporte de u como

$$L_0 u = \overline{\{x \in X : u(x) > 0\}}.$$

De la colección de todos los conjuntos difusos o $\mathcal{F}(X)$, se destaca el interés hacia el análisis de los conjuntos difusos con α niveles no vacíos, cerrados y acotados de un espacio métrico X.

Definición 1.3.2. *Se denota por $E(X)$ el espacio de los conjuntos difusos con α-niveles no vacíos, cerrados y acotados, es decir:*

$$E(X) = \{u : X \longrightarrow [0,1] : L_\alpha u \in C(X), \ \ \textit{para todo } \alpha \in [0,1]\}.$$

El Lema 1.3.3 destaca algunas propiedades de los α niveles.

Lema 1.3.3. *La familia de niveles $\{L_\alpha u : \alpha \in [0,1]\}$ satisface las siguientes propiedades:*

a) $L_0 u \supseteq L_\alpha u \supseteq L_\beta u$ *para todo* $0 \leq \alpha \leq \beta$.

b) *Si* $\alpha_n \nearrow \alpha$ *implica que* $L_\alpha u = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n} u$.

c) $u = v$ *si y sólo si* $L_\alpha u = L_\alpha v$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$.

d) $L_\alpha u \neq \emptyset$, *para todo* $\alpha \in [0,1]$ *es equivalente a decir que* $u(x) = 1$ *para algún* $x \in X$.

e) *Se define un orden parcial* $\subseteq$ *sobre* $E(X)$ *por*

$$u \subseteq v \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \leq v(x), \quad \textit{para todo } x \in X \quad \Leftrightarrow \quad L_\alpha u \subseteq L_\alpha v, \quad \textit{para todo } \alpha \in [0,1].$$

Demostración: a) $L_\beta u = \{x \in X : u(x) \geq \beta\} \subseteq \{x \in X : u(x) \geq \alpha\} \subseteq \{x \in X : u(x) \geq 0\}$. Entonces $L_\beta u \subseteq L_\alpha u \subseteq L_0 u$.

b) Por hipótesis $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$, $L_\alpha u \subseteq L_{\alpha_n} u$. Por lo tanto,

$$L_\alpha u \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n} u.$$

Sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n} u$, por lo tanto, $x \in L_{\alpha_n} u$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $u(x) \geq \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como α_n converge a α cuando $n \to \infty$ se tiene que dado $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, $|\alpha_n - \alpha| < \epsilon$. Así, si $n > n_0$, $u(x) \geq \alpha_n > \alpha - \epsilon$. Dado que $\epsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $u(x) \geq \alpha$ y así $x \in L_\alpha u$, esto es,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n} u \subseteq L_\alpha u.$$

Por consiguiente,

$$L_\alpha u = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n} u.$$

c) $L_\alpha u = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\} = \{x \in X : v(x) \geq \alpha\} = L_\alpha v$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

d) Como $L_\alpha u \neq \emptyset$, para todo $\alpha \in [0, 1]$ entonces $L_1 u = \{x \in X : u(x) = 1\} \neq \emptyset$, lo cual implica que existe $x \in X$ tal que $u(x) = 1$.

e) Si $u(x) \leq v(x)$ para todo $x \in X$, se cumple que $L_\alpha u = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\} \subseteq \{x \in X : v(x) \geq u(x) \geq \alpha\} = L_\alpha v$, para todo $\alpha \in [0, 1]$. Por otro lado, si $L_\alpha u \subseteq L_\alpha v$, para todo $\alpha \in [0, 1]$ se tiene que $u(x) \leq v(x)$ para todo $x \in X$. □

El Teorema 1.3.4 es un resultado importante que permite establecer, en el análisis difuso, resultados paralelos a los que se dan en el análisis clásico.

Teorema 1.3.4 (Teorema de Representación de Negoita-Ralescu, [7, 8]). *Sean X un conjunto no vacío, y $\{S_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ una familia de subconjuntos de X tales que:*

i. $S_0 = X$,

ii. *Si* $\alpha \leq \beta$ *entonces* $S_\beta \subseteq S_\alpha$,

iii. *Si* $\alpha_n \nearrow \alpha$ *implica que* $S_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{\alpha_n}$.

Entonces, la función $u : X \longrightarrow [0,1]$ *definida por* $u(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] : x \in S_\alpha\}$ *tiene la propiedad que* $L_\alpha u = S_\alpha$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$.

La demostración del anterior Teorema puede verse en [7, 8].

La Proposición 1.3.5 establece una métrica para el conjunto $E(X)$, a partir de la métrica de Hausdorff.

Proposición 1.3.5. *Para cada* $u, v \in E(X)$ *se define*

$$D(u,v) = \sup_{\alpha\in[0,1]} H(L_\alpha u, L_\alpha v).$$

Entonces, $(E(X), D)$ *es un espacio métrico.*

Demostración: Sean $u, v, w \in E(X)$.

i) Si $D(u,v) = 0$ entonces $H(L_\alpha u, L_\alpha v) = 0$ para todo $\alpha \in [0,1]$, y esto implica que $L_\alpha u = L_\alpha v$ para todo $\alpha \in [0,1]$; por lo tanto $u = v$.

ii) Como $H(L_\alpha u, L_\alpha v) = H(L_\alpha v, L_\alpha u)$ se tiene que $D(u,v) = D(v,u)$.

iii) La desigualdad triangular, $D(u,v) \leq D(u,w) + D(w,v)$, se sigue usando la propiedad de desigualdad triangular de la métrica de Hausdorff. □

Con la Proposición 1.3.6 se logra obtener la completez de $E(X)$, a partir de la completez de X.

Proposición 1.3.6 ([8]). *Si* (X,d) *es un espacio métrico completo, entonces* $(E(X), D)$ *es también completo.*

Demostración: Sea $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $E(X)$. Considere un punto $\alpha > 0$ fijo. Entonces $(L_\alpha(u_n))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $(C(X), H)$. Como $(C(X), H)$ es completo, se sigue que existe un $M_\alpha \in C(X)$ tal que

$$L_\alpha(u_n) \xrightarrow{H} M_\alpha.$$

De hecho, de la definición de D y de la continuidad de H, es fácil ver que:

$$L_\alpha(u_n) \xrightarrow{H} M_\alpha, \text{ uniformemente en } \alpha \in [0, 1].$$

Tomando $\alpha \leq \beta$, y con la semimétrica de Hausdorff se tiene que

$$\rho(M_\beta, M_\alpha) \leq \rho(M_\beta, L_\beta(u_n)) + \rho(L_\beta(u_n), L_\alpha(u_n)) + \rho(L_\alpha(u_n), M_\alpha).$$

Como $L_\beta(u_n) \subseteq L_\alpha(u_n)$, se sigue que

$$\rho(L_\beta(u_n), L_\alpha(u_n)) = 0.$$

Así $\rho(M_\beta, M_\alpha) \leq \rho(M_\beta, L_\beta(u_n)) + \rho(L_\alpha(u_n), M_\alpha) < \epsilon$, si n es suficientemente grande. De esta manera se tiene que $\rho(M_\beta, M_\alpha) = 0$ y como M_β, M_α son cerrados, se tiene que $M_\beta \subseteq M_\alpha$.
Ahora, tomando $\alpha > 0$, $\alpha_n \nearrow \alpha$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, se tiene que mostrar que $M_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}$.
Es claro que $M_\alpha \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}$. Usando la semimétrica de Hausdorff (ver Definición 1.2.7), se obtiene

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, M_\alpha\right) \leq \rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_\alpha, \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j)\right) + \rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j), L_\alpha(u_j)\right) + \rho\left(L_\alpha(u_j), M_\alpha\right),$$

para j fijo. Pero $\rho\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j), L_\alpha(u_j)\right) = 0$, puesto que por el Lema 1.3.3 se tiene que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j) = L_\alpha(u_j)$. Consecuentemente, para todo $\epsilon > 0$, existe j_ϵ tal que

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, M_\alpha\right) \leq \epsilon + \rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j)\right)$$

para $j \geq j_\epsilon$, donde $L_\alpha(u_j)$ converge a M_α. Ahora,

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j)\right) \leq \rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, M_{\alpha_p}\right) + \rho\left(M_{\alpha_p}, L_{\alpha_p}(u_j)\right) + \rho\left(L_{\alpha_p}(u_j), \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j)\right),$$

para cualquier $p \geq 1$. Como $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} \subseteq M_{\alpha_p}$, se obtiene

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j)\right) \leq \rho\left(M_{\alpha_p}, L_{\alpha_p}(u_j)\right) + \rho\left(L_{\alpha_p}(u_j), \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j)\right).$$

Ahora, $\rho\left(M_{\alpha_p}, L_{\alpha_p}(u_j)\right) < \epsilon$ para $j \geq j_0$. Note que j_0 no depende de p. Como $(L_{\alpha_p}(u_j))_{p=1}^{\infty}$ decrece a $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j)$, se sigue que $\rho\left(L_{\alpha_{p_0}}(u_j), \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j)\right) < \epsilon$ para algún p_0. Así,

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}(u_j)\right) < 2\epsilon,$$

si j es grande. Finalmente, al tomar j suficientemente grande se obtiene $\rho\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}, M_\alpha\right) \leq 3\epsilon$; es decir, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} \subseteq M_\alpha$. Entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n} = M_\alpha,$$

para cada $\alpha \in [0,1]$. Por lo tanto, por el Teorema 1.3.4 se sigue que existe un único $u \in E(X)$ tal que $L_\alpha(u_n) \xrightarrow{H} L_\alpha(u)$. Resta demostrar que $u_n \to u$ en $(E(X), D)$. Como (u_n) es de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe n_ϵ tal que $n, m > \epsilon$ implica que $D(u_n, u_m) < \epsilon$. Sea $n (> n_\epsilon)$ fijo. Entonces

$$\begin{aligned} H(L_\alpha(u_n), L_\alpha(u)) &= \lim_{m\to\infty} H(L_\alpha(u_n), L_\alpha(u_m)) \\ &\leq \overline{\lim_{m\to\infty}} \sup_{\alpha>0} H(L_\alpha(u_n), L_\alpha(u_m)) \\ &= \overline{\lim_{m\to\infty}} D(u_n, u_m) < \epsilon. \end{aligned}$$

Así que $\sup\limits_{\alpha>0} H(L_\alpha(u_n), L_\alpha(u)) \leq \epsilon$, es decir, $D(u_n, u) \leq \epsilon$ para $n > n_\epsilon$, y así $u_n \xrightarrow{D} u$. $\square$

Definición 1.3.7. *Sean* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *espacios métricos. Una aplicación* $f : X \to Y$ *se dice que es una* isometría*, si para todo* $a, b \in X$ *se tiene*

$$d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b).$$

Observación 1.3.8. *Para todo espacio métrico* (X, d) *las inmersiones*

$$(X, d) \longmapsto (C(X), H) \longmapsto (E(X), D)$$

definidas por medio de $x \to \{x\}$ *y* $A \to \mathcal{X}_A$ *(donde* $\mathcal{X}_A$ *denota la característica de* A*), respectivamente, son isometrías.*
En efecto, para todo $x, y \in X$ *se tiene*

$$H(\{x\}, \{y\}) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 \mid \{x\} \subset N(\{y\}, \epsilon) \quad y \quad \{y\} \subset N(\{x\}, \epsilon)\} = d(x, y),$$

y para todo $A, B \in C(X)$ *se tiene*

$$D(\mathcal{X}_A, \mathcal{X}_B) = \sup_{\alpha \in [0,1]} H(L_\alpha \mathcal{X}_A, L_\alpha \mathcal{X}_B) = H(A, B).$$

1.4. Multifunciones contractivas y puntos fijos

Las multifunciones poseen diversas aplicaciones en distintos campos de la matemática, como por ejemplo, aplicaciones en la Teoría de las Inclusiones Diferenciales para la solución de problemas de valor inicial de la forma $x' \in F(t, x)$ con $x(0) = x_0$ y donde F es una multifunción [2, 16]; en problemas de optimización para espacios vectoriales [20], en sistemas iterados de funciones o SIF para la reconstrucción de imágenes [19]; en la Teoría de los Continuos para la construcción de aplicaciones continuas y sobreyectivas [18]; entre otros. El tema central de esta sección está dedicado a los puntos fijos de multifunciones contractivas, analizando en particular algunos resultados que garantizan la existencia de puntos fijos de multifunciones $F : X \longrightarrow C(X)$, los cuales serán de gran importancia para establecer condiciones de existencia de los puntos fijos de una multifunción difusa.

Definición 1.4.1. *Sean X e Y conjuntos no vacíos. Una multifunción es una aplicación $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ tal que $F(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$, siendo $\mathcal{P}(Y)$ el conjunto "partes de Y".*

Ejemplo 1.4.2. *Una función $f : X \longrightarrow Y$ define una multifunción F si se considera $F(x) = \{f(x)\}$ para todo $x \in X$.*

Para el análisis de los puntos fijos de multifunciones se consideran las multifunciones contractivas.

Definición 1.4.3. *Sean (X, d) un espacio métrico y $F : X \longrightarrow C(X)$ una multifunción. Decimos que F es una contracción (multifunción contractiva ó contracción multivaluada) si y sólo si existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que para todo $x, y \in X$ se cumple que $H(F(x), F(y)) \leq \lambda d(x, y)$.*

Ejemplo 1.4.4. *Sean $I = [0, 1]$ el intervalo unitario de números reales con la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$ y $f : I \longrightarrow I$ definida por (ver Figura 1.4)*

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} & si \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}x & si \quad \dfrac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

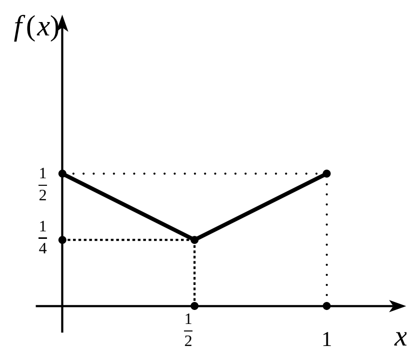


Figura 1.4 – Gráfica de $f(x)$.

Considere $F : I \longrightarrow \mathcal{P}(I)$ como $F(x) = \{0\} \cup \{f(x)\}$ para todo $x \in I$.

Nótese que $H(F(x), F(y)) = d(f(x), f(y))$ para todo $x, y \in I$. Sean $x, y \in [0, 1/2]$, entonces

$$d(f(x), f(y)) = \left| -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}d(x, y).$$

Si $x, y \in (1/2, 1]$, *entonces* $d(f(x), f(y)) = \left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right| = \frac{1}{2}d(x, y)$.
Considere ahora $x \in [0, 1/2]$ *y* $y \in (1/2, 1]$. *Entonces*

$$d(f(x), f(y)) = \left|\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right|.$$

Para probar que existe $0 \leq \lambda < 1$ *tal que* $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$, *observe que si* $y \geq x$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right| \leq \lambda|y - x| = \lambda(y - x), \\ &\Leftrightarrow \lambda(x - y) \leq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \leq \lambda(y - x) \\ &\Leftrightarrow \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)y - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)x \geq \frac{1}{2} \quad y \quad \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)x - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)y \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Obsérvese que tomando $\lambda = 1/2$, *se satisfacen las anteriores desigualdades. Por lo tanto,* F *es una contracción multivaluada.*

Ejemplo 1.4.5. *Sea* $I^2 = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ *y sean* $F, G : I^2 \longrightarrow C(I^2)$ *definidas de la siguiente manera:* $F(x, y)$ *como el segmento en* I^2 *que va del punto* $\left(\frac{1}{4}x, 0\right)$ *al punto* $\left(\frac{1}{4}x, 1\right)$ *(ver Figura 1.5), y* $G(x, y)$ *como el segmento en* I^2 *que va del punto* $\left(\frac{1}{3}x, 0\right)$ *al punto* $\left(\frac{1}{2}x, 1\right)$ *(ver Figura 1.6) para todo* $(x, y) \in I^2$.

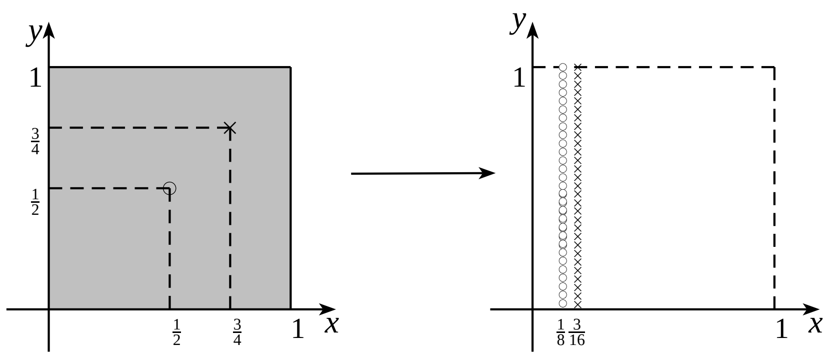


Figura 1.5 – Gráfica que contiene algunos segmentos de $F(x, y)$.

Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I^2$, *entonces* $F(x_1, y_1) = \left\{(x, y) \in I^2 : x = \frac{x_1}{4}\right\}$ *y*

$F(x_2, y_2) = \left\{(x, y) \in I^2 : x = \dfrac{x_2}{4}\right\}.$

Por lo tanto, la métrica de Hausdorff entre esos dos conjuntos está dada por

$$\begin{aligned} H(F(x_1, y_1), F(x_2, y_2)) &= \frac{1}{4}|x_1 - x_2| \\ &< \frac{1}{4}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \frac{1}{4}d((x_1, y_1), (x_2, y_2)), \end{aligned}$$

es decir, si $\frac{1}{4} \leq \lambda < 1$ *se tiene que* $H(F(x_1, y_1), F(x_2, y_2)) \leq \lambda d((x_1, y_1), (x_2, y_2))$. *Entonces* F *es una multifunción contractiva. Por otro lado,* $H(G(x_1, y_1), G(x_2, y_2)) = \left|\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right| = \frac{1}{2}d(x_1, x_2)$. *Entonces, si* $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$ *se tiene que* G *es una multifunción contractiva.*

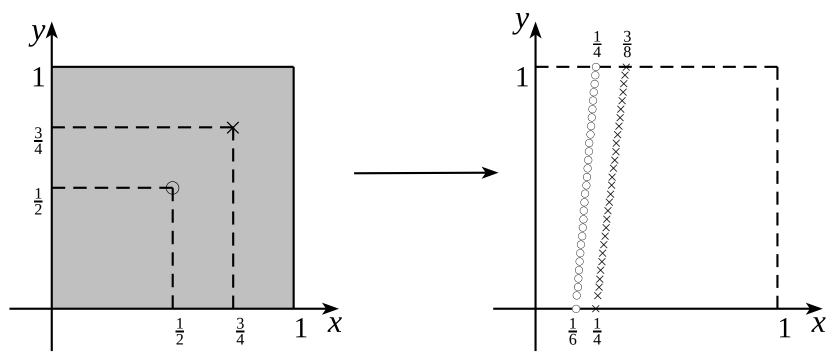


Figura 1.6 – Gráfica que contiene algunos segmentos de $G(x, y)$.

Es importante conocer cuando una multifunción es continua, y además, saber cuando se puede garantizar.

Definición 1.4.6. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Una multifunción* $F : X \longrightarrow C(X)$ *es continua en* $x_0 \in X$*, si para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ *tal que si* $d(x, x_0) < \delta$*, implica que* $H(F(x), F(x_0)) < \epsilon$*, para todo* $x \in X$*.*

Observación 1.4.7. *La definición anterior en términos de sucesiones es equivalente a decir que si* (x_n) *es una sucesión en* X *que convege a* x_0*, entonces* $H(F(x_n), F(x_0))$ *converge a* 0*, cuando* $n \to \infty$*.*

Observación 1.4.8. *Toda contracción multivaluada $F : X \longrightarrow C(X)$ es continua.*

En el contexto multívoco, la Definición 1.4.9 aclara que es un punto fijo.

Definición 1.4.9. *Sea $F : X \longrightarrow C(X)$ una multifunción. Se dice que $x \in X$ es un punto fijo de F, si $x \in F(x)$.*

El siguiente ejemplo considera una multifunción no contractiva con varios puntos fijos.

Ejemplo 1.4.10. *Sea $X = \mathfrak{C}$ el Conjunto de Cantor y $Y = [0,1]$. Considere la multifunción $F : \mathfrak{C} \longrightarrow C([0,1])$, definida por:*

$$\begin{aligned}
&F(0) = A_1, \\
&F(1) = A_3, \\
&F\left(\frac{i}{3}\right) = A_i \cup A_{i+1} && \textit{para} \quad i = 1,2, \\
&F(x) = A_i && \textit{si} \quad x \in \left(\frac{i-1}{3}, \frac{i}{3}\right) \cap \mathfrak{C}, \quad i = 1,2,3;
\end{aligned}$$

donde $A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $A_2 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ y $A_3 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.
La acción de esta multifunción es rellenar el intervalo cerrado $[0,1]$ a partir de los elementos del Conjunto de Cantor, como se muestra en la Figura 1.7.

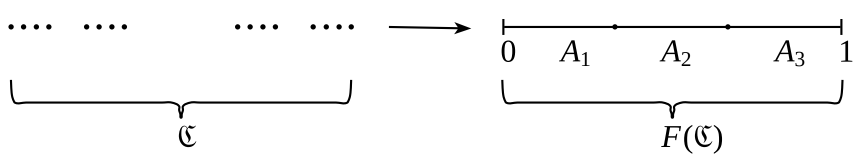


Figura 1.7 – Gráfica de la multifunción F.

F no es una multifunción contractiva. De hecho, si $x = \frac{1}{9}$ y $y = \frac{4}{9}$ se tiene que $F(x) = A_1$ y $F(y) = A_2$; así

$$H(F(x), F(y)) = H(A_1, A_2),$$

y por la definición de la métrica de Hausdorff, se tiene que $H(A_1, A_2) = \frac{1}{3}$*, la cual coincide con la distancia entre x y y, es decir,* $d(x, y) = \frac{1}{3}$*. Por lo tanto,* $H(F(x), F(y)) = d(x, y)$*. Sin embargo, a pesar de que F no es una multifunción contractiva, todos los elementos del Conjunto de Cantor son puntos fijos de la multifunción F (ver Figura 1.7).*

Ejemplo 1.4.11. *Note que la multifunción F definida en el Ejemplo 1.4.4 tiene dos puntos fijos, los cuales son* 0 *y* $\frac{1}{3}$.

El Teorema 1.4.12 señala bajo qué condiciones se garantiza la existencia de puntos fijos.

Teorema 1.4.12 ([10])**.** *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo. Si* $F : X \longrightarrow C(X)$ *es una multifunción contractiva, entonces F tiene un punto fijo.*

Demostración: Sean $0 < \alpha < 1$ y $p_0 \in X$. Sea $p_1 \in F(p_0)$. Como

$$F(p_0), F(p_1) \in C(X),$$

por la definición de la métrica de Hausdorff, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\epsilon_0 \leq H(F(p_0), F(p_1)) + \alpha$ con $F(p_0) \subset N(F(p_1), \epsilon_0)$ y $F(p_1) \subset N(F(p_0), \epsilon_0)$. Como $p_1 \in F(p_0)$, existe $p_2 \in F(p_1)$ tal que $d(p_1, p_2) < \epsilon_0$, luego

$$d(p_1, p_2) \leq H(F(p_0), F(p_1)) + \alpha.$$

Ahora, como

$$F(p_1), F(p_2) \in C(X) \quad \text{y} \quad p_2 \in F(p_1),$$

se tiene que existe $p_3 \in F(p_2)$ tal que

$$d(p_2, p_3) \leq H(F(p_1), F(p_2)) + \alpha^2.$$

Continuando de esta forma se construye una sucesión $(p_i)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de X tales que $p_{i+1} \in F(p_i)$ y

$$d(p_i, p_{i+1}) \leq H(F(p_{i-1}), F(p_i)) + \alpha^i, \tag{1}$$

para todo $i \geq 1$. Note que

$$\begin{aligned} d(p_i, p_{i+1}) &\leq H(F(p_{i-1}), F(p_i)) + \alpha^i \leq \alpha d(p_{i-1}, p_i) + \alpha^i \\ &\leq \alpha(H(F(p_{i-2}), F(p_{i-1})) + \alpha^{i-1}) + \alpha^i \\ &\leq \alpha^2 d(p_{i-2}, p_{i-1}) + 2\alpha^i \leq \cdots \leq \alpha^i d(p_0, p_1) + i\alpha^i, \end{aligned}$$

para todo $i \geq 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d(p_i, p_{i+j}) \leq & d(p_i, p_{i+1}) + d(p_{i+1}, p_{i+2}) + \cdots + d(p_{i+j-1}, p_{i+j}) \\ \leq & [\alpha^i d(p_0, p_1) + i\alpha^i] + [\alpha^{i+1} d(p_0, p_1) + (i+1)\alpha^{i+1}] + \cdots + \\ & + [\alpha^{i+j-1} d(p_0, p_1) + (i+j-1)\alpha^{i+j-1}] \\ = & d(p_0, p_1) \sum_{n=i}^{i+j-1} \alpha^n + \sum_{n=i}^{i+j-1} n\alpha^n, \end{aligned}$$

para todo $i, j \geq 1$. Como $\sum_{n=i}^{\infty} \alpha^n$ converge, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=i}^{i+j-1} \alpha^n < \dfrac{\epsilon}{2d(p_0, p_1)}$. Por lo tanto,

$$d(p_0, p_1) \sum_{n=i}^{i+j-1} \alpha^n \leq d(p_0, p_1) \sum_{n=i}^{\infty} \alpha^n < \frac{\epsilon}{2d(p_0, p_1)} d(p_0, p_1) = \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\alpha^{n+1}}{n\alpha^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\alpha}{n} = \alpha,$$

y $\alpha < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n$ es convergente. Luego, existe un $N \in \mathbb{N}$ para todo $n > N$ tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} n\alpha^n < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $n \geq N$; por lo tanto,

$$\sum_{n=i}^{i+j-1} n\alpha^n < \sum_{n=N}^{\infty} n\alpha^n < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3}$$

Así de (1)-(3) se sigue que $d(p_i, p_{i+j}) < \epsilon$ para todo $n > N$, es decir, la sucesión $(p_i)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Como (X, d) es completo, la sucesión $(p_i)_{n=1}^{\infty}$ converge a algún punto $p \in X$ y como F es continua, la sucesión $F(p_i)_{n=1}^{\infty}$ converge a $F(p) \in C(X)$. Ahora, supóngase que $p \notin F(p)$, entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $p \notin N(F(p), \epsilon_0)$ y como p_i converge a p, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \geq N$, $p_i \notin N(F(p), \epsilon_0)$. Por otro lado, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $F(p_i) \subset N(F(p), \epsilon)$ para todo $i \geq M$; sea $K = \text{máx}\{N, M\}$, entonces como $p_i \in F(p_{i-1})$, se tiene que $p_i \in N(F(p), \epsilon)$, $\forall i \geq K$, lo cual es contradictorio; entonces $p \in F(p)$, y así F tiene un punto fijo. $\square$

Una multifunción contractiva F puede tener más de un punto fijo, por ello, la Definición 1.4.13 determina el conjunto de puntos fijos de F.

Definición 1.4.13. *Si $F : X \longrightarrow C(X)$ una multifunción, $S(F)$ denota el conjunto de puntos fijos de F.*

Lema 1.4.14. *Sean (X, d) un espacio métrico y $F : X \longrightarrow C(X)$ una multifunción. $S(F)$ es un conjunto cerrado.*

Demostración: Probar que S(F) es cerrado equivale a probar que si x_n converge a x y $x_n \in F(x_n)$ implica que $x \in F(x)$. Supóngase que $x \notin F(x)$, entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $x \notin N(F(x), \epsilon_0)$ y como x_n converge a x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $x_n \notin N(F(x), \epsilon_0)$. Por otro lado, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $F(x_n) \subset N(F(x), \epsilon)$ para todo $n \geq M$. Sea $K = \text{máx}\{N, M\}$, como $x_n \in F(x_n)$ se tiene que $x_n \in N(F(x), \epsilon)$, para todo $n \geq K$, lo cual es contradictorio. Así, $x \in F(x)$, y en consecuencia, S(F) es cerrado. $\square$

Ejemplo 1.4.15. *Si $A \in C(X)$ y $F(x) = A$, para todo $x \in X$, entonces F es una contracción con $S(F) = A$. De hecho, $S(F) = \{x : x \in F(x)\} = \{x : x \in A\} = A$, y para todo $x, y \in X$ se tiene que existe un $0 \leq \lambda < 1$ tal que*

$$H(F(x), F(y)) = H(A, A) = 0 \leq \lambda d(x, y).$$

Para probar un resultado de estabilidad de los puntos fijos de multifunciones se prueba el siguiente resultado usando multifunciones contractivas sobre un espacio métrico completo.

Proposición 1.4.16 ([13]). *Sea (X,d) un espacio métrico completo y $F_1, F_2 : X \to C(X)$ multifunciones λ – contractivas, es decir;*

$$H(F_i(x), F_i(y)) \leq \lambda d(x,y), \quad \forall x, y \in X, \quad i = 1,2 \quad y \quad 0 \leq \lambda < 1.$$

Entonces

$$H(S(F_1), S(F_2)) \leq \frac{1}{1-\lambda} \sup_{x \in X} H(F_1(x), F_2(x)).$$

Demostración: Sea $K = \dfrac{1}{1-\lambda} \sup_{x\in X} H(F_1(x), F_2(x))$ y asúmase que $K < \infty$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\lambda^{n+1}}{n\lambda^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\lambda}{n} = \lambda,$$

y $\lambda < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^n$ es convergente, lo cual implica que dado $\epsilon > 0$, existe $c > 0$ tal que

$$c \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^n < 1.$$

Sean $\epsilon_1 = \dfrac{c}{1-\lambda}\epsilon$ y $x_0 \in S(F_1)$. Como $H(F_1(x_0), F_2(x_0)) \leq K$, existe $x_1 \in F_2(x_0)$ tal que

$$d(x_1, x_0) \leq H(F_2(x_0), F_1(x_0)) + \epsilon \leq K + \epsilon.$$

Además, como $H(F_2(x_1), F_2(x_0)) \leq \lambda d(x_1, x_0)$, existe $x_2 \in F_2(x_1)$ tal que

$$d(x_2, x_1) \leq \lambda d(x_1, x_0) + \lambda\epsilon_1.$$

De esta forma se construye la sucesión (x_n) en X tal que $x_{n+1} \in F_2(x_n)$ y

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) + \lambda^n \epsilon_1,$$

para $n \geq 1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &\leq \lambda d(x_n, x_{n-1}) + \lambda^n \epsilon_1 \\
&\leq \lambda(\lambda d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \lambda^{n-1}\epsilon_1) + \lambda^n \epsilon_1 \\
&= \lambda^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) + 2\lambda^n \epsilon_1 \\
&\ \ \vdots \\
&\leq \lambda^n d(x_1, x_0) + n\lambda^n \epsilon_1.
\end{aligned}
$$

Luego, la desigualdad

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n d(x_1, x_0) + n\lambda^n \epsilon_1,$$

también es válida para $n = 0$. Así,

$$\sum_{n=m}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \lambda^n d(x_1, x_0) + \sum_{n=m}^{\infty} n\lambda^n \epsilon_1.$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ converge, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \lambda^n < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^n < \dfrac{\epsilon}{2d(x_1, x_0)}$. Entonces,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \lambda^n d(x_1, x_0) < \frac{\epsilon}{2d(x_1, x_0)} d(x_1, x_0) = \frac{\epsilon}{2}.$$

Igualmente, como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\lambda^n$ es convergente, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N}^{\infty} n\lambda^n < \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^n < \frac{\epsilon}{2\epsilon_1},$$

luego

$$\sum_{n=N}^{\infty} n\lambda^n \epsilon_1 < \frac{\epsilon}{2\epsilon_1}\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}.$$

Por consiguiente, $\sum\limits_{n=N}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n) < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Entonces la sucesión (x_n) es de Cauchy y como

(X, d) es un espacio métrico completo, (x_n) es convergente a un $\overline{x} \in X$. Por la continuidad de F_2, la sucesión $(F_2(x_n))$ converge a $F_2(\overline{x})$ en la métrica de Hausdorff. Por otra parte, como $x_{n+1} \in F_2(x_n)$ entonces $\overline{x} \in F_2(\overline{x})$, es decir, $\overline{x} \in S(F_2)$. Además,

$$\begin{aligned} d(x_0, \overline{x}) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda} d(x_1, x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^n \epsilon_1 \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda}(d(x_1, x_0) + \epsilon) \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda}(K + 2\epsilon). \end{aligned} \tag{1}$$

De manera análoga, se tiene que para cada $x_0 \in S(F_2)$, existe $\overline{x} \in S(F_1)$ tal que se cumple (1); por lo tanto, para todo ϵ, se tiene que

$$H(S(F_1), S(F_2)) < d(x_0, \overline{x}) < \frac{1}{1-\lambda} K. \qquad \square$$

1.5. Convergencia uniforme de multifunciones

El objetivo de esta sección es dar una pequeña introducción a la convergencia uniforme de multifunciones, la cual será de gran utilidad para establecer un resultado de estabilidad del conjunto de puntos fijos, tanto de una multifunción como de una multifunción difusa.

Definición 1.5.1. *Sean (X, d) un espacio métrico, $F_n : X \longrightarrow C(X)$ una sucesión de multifunciones, $S \subset X$ y $F : S \longrightarrow C(X)$ una multifunción. Entonces F_n converge uniformemente a F en S si, para cada $\epsilon > 0$, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_\epsilon$ se tiene que para todo $x \in S$*

$$H(F_n(x), F(x)) \leq \epsilon.$$

El ejemplo 1.5.2 trata sobre la convergencia uniforme de multifunciones.

Ejemplo 1.5.2. *Sea $I = [0, 1]$, el intervalo unitario de los números reales, y sean*

$F_n, G_n : I \longrightarrow \mathcal{P}(I)$ sucesiones de multifunciones contractivas para todo $n \in \mathbb{N}$ definidas por

$$F_n(x) = \left\{ y : 0 \leq y \leq \frac{2n}{2n+1} x \right\} \quad y \quad G_n(x) = \left\{ y : \frac{2n}{2n+1} x + \frac{1}{2n+1} \leq y \leq 1 \right\},$$

para todo $x \in I$. Entonces $F_n(x)$ y $G_n(x)$ convergen uniformemente para $F(x)$ y $G(x)$, respectivamente, las cuales están definidas por $F(x) = \{y : 0 \leq y \leq x\}$ y $G(x) = \{y : x \leq y \leq 1\}$ para todo $x \in I$. De hecho, para todo $x \in I$,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1} x = x \quad y \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Si se define $J_n(x) = F_n(x) \cup G_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $J_n(x)$ converge uniformemente a la unión de $F(x)$ y $G(x)$, es decir, $J_n(x)$ converge uniformemente a I para todo $x \in I$.
Además,

- *Para F_n se tiene que*

$$H(F_n(x), F_n(z)) = \text{máx}\left\{ 0, d\left(\frac{2n}{2n+1} x, \frac{2n}{2n+1} z \right) \right\} = d\left(\frac{2n}{2n+1} x, \frac{2n}{2n+1} z \right) = \frac{2n}{2n+1} d(x, z).$$

- *Para G_n se tiene que*

$$H(G_n(x), G_n(z)) = d\left(\frac{2n}{2n+1} x + \frac{1}{2n+1}, \frac{2n}{2n+1} z + \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{2n}{2n+1} d(x, z).$$

- *Y para J_n se tiene que*

$$H(J_n(x), J_n(z)) = \text{máx}\left\{ \frac{2n}{2n+1} d(x, z), \frac{2n}{2n+1} d(x, z) \right\} = \frac{2n}{2n+1} d(x, z).$$

Como $0 < \dfrac{2n}{2n+1} < 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces F_n, G_n y J_n son multifunciones contractivas.

El Teorema 1.5.3 es uno de los principales resultados de la estabilidad de los puntos fijos de multifunciones contractivas.

Teorema 1.5.3 ([13]). *Sean* (X, d) *un espacio métrico completo y* $F_0, F_i : X \longrightarrow C(X)$ *una sucesión de contracciones* λ*-multivaluadas (*$i = 1, 2, \cdots$*), tal que* $F_i \longrightarrow F_0$ *uniformemente sobre* X*. Entonces* $H(S(F_i), S(F_0))$ *converge a* 0 *cuando* i *tiende a* ∞*.*

Demostración: Para $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in X} H(F_i(x), F_0(x)) < (1 - \lambda)\epsilon$$

para $i \geq N$. Entonces por la Proposición 1.4.16, $H(S(F_i), S(F_0)) < \epsilon$ para todo $i \geq N$. □

1.6. Puntos fijos de multifunciones difusas

La fusión entre el Análisis Multívoco y la Teoría de los Conjuntos Difusos dió origen al llamado Análisis Multívoco Difuso, cuyo objeto de estudio son las multifunciones difusas, definidas en términos generales como multifunciones que toman como valores conjuntos difusos.

Definición 1.6.1. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Una multifunción difusa es una aplicación* $\Gamma : X \longrightarrow \mathcal{F}(X)$*, siendo* $\mathcal{F}(X)$ *la colección de todos los conjuntos difusos definidos sobre* X*.*

Ahora, se consideran las multifunciones difusas contractivas dadas en la siguiente definición.

Definición 1.6.2. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Una multifunción difusa* $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$ *es contractiva, si existe* $0 \leq \lambda < 1$ *tal que, para cada* $x, y \in X$*,*

$$D(\Gamma(x), \Gamma(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

La Definición 1.6.3 establece qué es un punto fijo de una multifunción difusa.

Definición 1.6.3. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$ *una multifunción difusa. Se dice que* $x \in X$ *es un punto fijo de* Γ *si* $\mathcal{X}_{\{x\}} \subseteq \Gamma(x)$ *ó equivalentemente* $\Gamma(x)(x) = 1$*.*

Ejemplo 1.6.4. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$ *una multifunción difusa definida por* $\Gamma(t) = u \in E(X)$ *tal que* $\Gamma(t)(x) = u(x) = 4x(1 - x)$ *(ver Figura 1.8).*

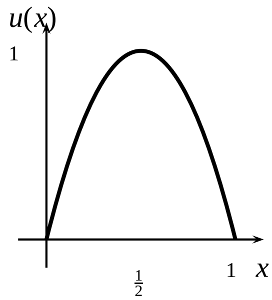


Figura 1.8 – Gráfica de $u(x)$ asociado a Γ.

Nótese que $\Gamma(1/2)(1/2) = 1$*, lo cual indica que* $1/2$ *es un punto fijo de la multifunción difusa* Γ.

La Proposición 1.6.5 muestra que se puede obtener una multifunción contractiva Γ_α a partir de una multifunción difusa contractiva Γ definida por $\Gamma_\alpha(x) = L_\alpha\Gamma(x)$.

Proposición 1.6.5. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$ *una multifunción difusa contracción con constante* λ*. Entonces, para todo* $\alpha \in [0, 1]$*, la multifunción* $\Gamma_\alpha : X \longrightarrow C(X)$ *definida por* $\Gamma_\alpha(x) = L_\alpha\Gamma(x)$ *es una contracción.*

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} H(\Gamma_\alpha(x), \Gamma_\alpha(y)) &\leq \sup_{0\leq\lambda\leq 1} H(\Gamma_\alpha(x), \Gamma_\alpha(y)) \\ &= D(\Gamma(x), \Gamma(y)) \leq \lambda d(x, y). \end{aligned}$$ □

La Definición 1.6.6 es dada en [11] para probar el Teorema 1.6.7.

Definición 1.6.6 ([11])**.** *Sea* (X, d) *un espacio métrico vectorial completo. Se denota a* $\mathcal{W}(X)$ *como la colección de todos los conjuntos difusos* u *sobre* X *tales que sus* α*-niveles son conjuntos compactos-convexos de* X *para todo* $\alpha \in [0, 1]$ *y que* $\sup_{x\in X} u(x) = 1$.

Heilpern en [11], obtiene el siguiente resultado que trata sobre la existencia de puntos fijos de multifunciones.

Teorema 1.6.7 ([11]). *Sea* (X, d) *un espacio métrico vectorial completo y* $\Gamma : X \longrightarrow \mathcal{W}(X) \subset C(X)$ *cualquier multifunción difusa de* X *que satisface la siguiente condición:*

$$D(\Gamma(x), \Gamma(y)) \leq \lambda d(x, y),$$

para todo $x, y \in X$ *y para algún* $\lambda \in (0, 1)$*. Entonces,* Γ *tiene un punto fijo.*

En el teorema anterior, X tiene una estructura vectorial y los α-niveles $L_\alpha\Gamma(x)$, para cada $x \in X$, son conjuntos compactos-convexos. A continuación, se probará un resultado más general.

Teorema 1.6.8 ([12]). *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo. Si* $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$ *es una multifunción contractiva difusa, entonces* Γ *tiene un punto fijo.*

Demostración. Como Γ es una multifunción difusa contractiva, por la Proposición 1.6.5 se tiene que para todo $\alpha \in [0, 1]$, $\Gamma_\alpha : X \longrightarrow C(X)$ definida por $\Gamma_\alpha(x) = L_\alpha\Gamma(x)$ es una multifunción contractiva. En particular, si $\alpha = 1$, $\Gamma_1 : X \longrightarrow C(X)$ es una multifunción contractiva difusa con $\Gamma_1(x) = L_1\Gamma(x)$, y por el Teorema 1.4.12, Γ_1 tiene un punto fijo, es decir, existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \in \Gamma_1(x_0) = L_1\Gamma(x_0)$. Como

$$L_1\Gamma(x_0) = \{x \in X : \Gamma(x_0)(x) = 1\},$$

entonces existe $x_0 \in X$ tal que $\Gamma(x_0)(x_0) = 1$. Por lo tanto, Γ tiene un punto fijo. $\square$

Capítulo 2

Estabilidad del conjunto de puntos fijos de multifunciones difusas

El tema central de este capítulo es el análisis del conjunto de puntos fijos de multifunciones difusas contractivas. Se destaca la existencia de un conjunto difuso u cuyos α-niveles corresponden con el conjunto de puntos fijos de una multifunción Γ_α generada a través de una multifunción difusa Γ. Adicionalmente, se da un resultado relativo a la estabilidad del conjunto de puntos fijos de una multifunción difusa, en el sentido de que si u_i y u_0 son los conjuntos difusos de puntos fijos asociados a las multifunciones difusas Γ_i y Γ_0, respectivamente, sobre un espacio métrico (X, d) y Γ_i converge a Γ_0 uniformemente sobre X, entonces $(D(u_i, u_0))$ converge a 0 cuando $i \to \infty$, siendo $D(u_i, u_0) = \sup_{x \in X} H(L_\alpha u_i(x), L_\alpha u_0(x))$ y $H(L_\alpha u_i(x), L_\alpha u_0(x))$ denotando la distancia de Hausdorrf entre los α-niveles cerrados y acotados de u_i y u_0, respectivamente.

2.1. Conjunto de puntos fijos de multifunciones difusas

Teniendo en cuenta que si (X, d) es un espacio métrico y $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$ es una multifunción difusa entonces para cada $\alpha \in [0, 1]$, la aplicación $\Gamma_\alpha : X \longrightarrow C(X)$ definida por $\Gamma_\alpha(x) = L_\alpha \Gamma(x)$, $x \in X$, es una multifunción.

Lema 2.1.1. *Si S_α representa el conjunto de puntos fijos de la multifunción contractiva Γ_α, es* *decir,* $S_\alpha = \{x \in X : x \in \Gamma_\alpha(x)\}$*, entonces* $S_\alpha \neq \emptyset$ *y* $S_\alpha \in C(X)$ *para todo* $\alpha \in [0, 1]$.

Demostración: Por el Teorema 1.4.12 y el Lema 1.4.14, S_α es no vacío y cerrado para todo $\alpha \in [0, 1]$. Además, de la definición de S_α se tiene que $S_\alpha \subset \Gamma_\alpha(x)$ para todo $x \in X$ y para todo $\alpha \in [0, 1]$. Así, S_α es un conjunto acotado para todo $\alpha \in [0, 1]$. Por lo tanto, $S_\alpha \in C(X)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. □

La Proposición 2.1.2 establece la existencia de un único $u \in E(X)$ tal que sus α niveles corresponden con el conjunto de puntos fijos de una multifunción Γ_α.

Proposición 2.1.2. *Sea* $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$ *una multifunción difusa contracción. Entonces existe un único* $u \in E(X)$ *tal que* $L_\alpha u = S_\alpha$*, para todo* $\alpha \in [0, 1]$.

Demostración: La demostración está basada en una aplicación directa del Teorema de Representación de Negoita-Ralescu

i. Si $\alpha \leq \beta$ se tiene que $S_\beta \subseteq S_\alpha$, puesto que $L_\beta u \subseteq L_\alpha u$.

ii. Si $\alpha_n \nearrow \alpha$ probemos que $S_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{\alpha_n}$.

Supóngase que $x_0 \in S_\alpha$ y que $\alpha_n \nearrow \alpha$. Entonces, por la parte *i.* se tiene que $S_\alpha \subseteq S_{\alpha_n}$ para todo n, es decir, $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{\alpha_n}$. Por otro lado, si $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_{\alpha_n}$ entonces $x_0 \in S_{\alpha_n}$ para todo n, esto es, $x_0 \in \Gamma_{\alpha_n}(x_0)$ para todo n. Como $\Gamma_{\alpha_n}(x_0) = L_{\alpha_n}\Gamma(x_0)$ para todo $\alpha_n \in [0, 1]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_{\alpha_n}(x_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} L_{\alpha_n}\Gamma(x_0) = L_\alpha\Gamma(x_0) = \Gamma_\alpha(x_0).$$

Entonces $x_0 \in \Gamma_\alpha(x_0)$, y por lo tanto, $x_0 \in S_\alpha$; así, la familia $\{S_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ satisface las condiciones del Teorema 1.3.4. Por lo tanto, existe un único $u \in E(X)$ tal que $L_\alpha u = S_\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$. □

Definición 2.1.3. *El conjunto difuso u de la proposición anterior será llamado el conjunto difuso de puntos fijos asociado con la multifunción difusa* Γ *(de forma corta,* $u = S(\Gamma)$*).*

El conjunto difuso u de la Proposición 2.1.2 coincide con el conjunto difuso $\Gamma(x)$ para todo $x \in X$, así como se muestra en la Proposición 2.1.4.

Proposición 2.1.4. *Sea $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$ y $u \in E(X)$, tal que $L_\alpha u = S_\alpha$, para todo $\alpha \in [0,1]$ (es decir, $u = S(\Gamma)$). Entonces para todo $x \in X$ se tiene que $u(x) = \Gamma(x)(x)$.*

Demostración: Supóngase que para algún $x_0 \in X$ y que algún $\alpha_0 \in [0,1]$ se tiene que $u(x_0) = \alpha_0$. Luego $x_0 \in L_{\alpha_0}u = S_{\alpha_0}$. Por lo tanto, $x_0 \in \Gamma_{\alpha_0}(x_0) = L_{\alpha_0}\Gamma(x_0)$, lo cual implica que $\Gamma(x_0)(x_0) \geq \alpha_0$. Si $\Gamma(x_0)(x_0) > \alpha_0$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\Gamma(x_0)(x_0) = \alpha_0 + \epsilon$, por lo tanto, $x_0 \in L_{\alpha_0+\epsilon}\Gamma(x_0) = \Gamma_{\alpha_0+\epsilon}(x_0)$, así $x_0 \in S_{\alpha_0+\epsilon} = L_{\alpha_0+\epsilon}u$. Luego $u(x_0) \geq \alpha_0 + \epsilon$, lo cual es contradictorio. Entonces $\Gamma(x_0)(x_0) = \alpha_0 = u(x_0)$. □

Los siguientes ejemplos muestran como se puede obtener el conjunto difuso de puntos fijos de una multifunción difusa.

Ejemplo 2.1.5. *Sean $X = [0,1]$, $0 < \lambda < 1$ y $\Gamma_\lambda : X \longrightarrow E(X)$ definida como*

$$\Gamma_\lambda(t)(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\lambda t} & si \quad t \neq 0 \quad y \quad 0 \leq x \leq \lambda t, \\ 1 & si \quad t \neq 0 \quad y \quad \lambda t < x \leq 1, \\ \mathcal{X}_{[0,1]}(x) & si \quad t = 0. \end{cases}$$

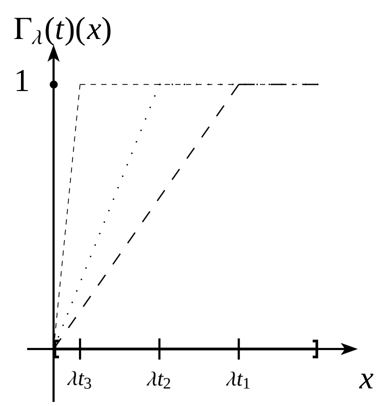


Figura 2.1 – Gráfica de varios conjuntos difusos de Γ_λ.

En la Figura 2.1 se muestran varios conjuntos difusos de la imagen de la multifunción difusa Γ_λ.

Si $x \in L_\alpha\Gamma_\lambda(t)$ entonces $\Gamma_\lambda(t)(x) \geq \alpha$. Luego:

- ◇ *si $t \neq 0$ y $0 \leq x \leq \lambda t$ entonces $\Gamma_\lambda(t)(x) = \dfrac{x}{\lambda t} \geq \alpha$, lo cual implica que $\alpha\lambda t \leq x \leq \lambda t$.*
- ◇ *si $t \neq 0$ y $\lambda t < x \leq 1$ entonces $1 \geq \alpha$, lo cual es siempre verdadero para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Por lo tanto, si $t \neq 0$ y $x \in L_\alpha\Gamma_\lambda(t)$, entonces $\alpha\lambda t \leq x \leq 1$.

- ◇ *Si $t = 0$ entonces $\mathcal{X}_{[0,1]}(x) \geq \alpha$ para todo $x \in X$. Como $\mathcal{X}_{[0,1]}(x) = 1$ para todo $x \in X$ entonces $1 \geq \alpha$, lo cual es siempre verdadero para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Entonces $L_\alpha\Gamma_\lambda(t) = [\alpha\lambda t, 1]$ para todo $\alpha, t \in [0, 1]$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
D(\Gamma_\lambda(t_1), \Gamma_\lambda(t_2)) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} H(L_\alpha\Gamma_\lambda(t_1), L_\alpha\Gamma_\lambda(t_2)) \\
&= \sup_{\alpha\in[0,1]} H([\alpha\lambda t_1, 1], [\alpha\lambda t_2, 1]) && \text{(Proposición 1.4.16)} \\
&= \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\lambda|t_1 - t_2| \\
&= \lambda|t_1 - t_2|.
\end{aligned}$$

Así, Γ_λ es una contracción con constante λ. Note que

$$\Gamma_\lambda(t)(t) = 1, \quad \textit{para cada} \quad t \in (0, 1], \quad (\textit{note que} \quad \lambda t < t \leq 1)$$

y

$$\Gamma_\lambda(0)(0) = \mathcal{X}_{[0,1]}(0) = 1.$$

Así, $u = S(\Gamma_\lambda) = \mathcal{X}_{[0,1]}$.

Ejemplo 2.1.6. *Sean $X = [0, 1]$, $0 < \lambda < 1$ y $\Gamma_\lambda : X \longrightarrow E(X)$ definida como*

$$\Gamma_\lambda(t)(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\lambda t} & si \quad t \neq 0 \quad y \quad 0 \leq x \leq \lambda t, \\ 0 & si \quad t \neq 0 \quad y \quad \lambda t < x \leq 1, \\ \mathcal{X}_{\{0\}}(x) & si \quad t = 0. \end{cases}$$

En la Figura 2.2 se muestran varios conjuntos difusos de la imagen de la multifunción difusa Γ_λ.

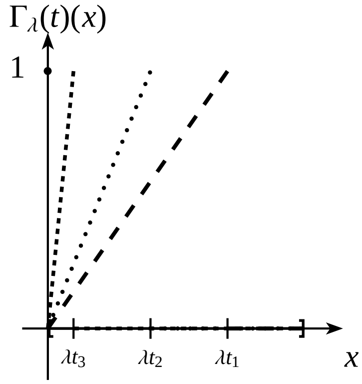


Figura 2.2 – Gráfica de varios conjuntos difusos de Γ_λ.

Si $x \in L_\alpha \Gamma_\lambda(t)$ *entonces* $\Gamma_\lambda(t)(x) \geq \alpha$*. Luego:*

- *si* $t \neq 0$ *y* $0 \leq x \leq \lambda t$ *entonces* $\dfrac{x}{\lambda t} \geq \alpha$*, lo cual implica que* $\alpha\lambda t \leq x \leq \lambda t$.
- *si* $t \neq 0$ *y* $\lambda t < x \leq 1$ *se tiene que* $0 \geq \alpha$*, lo cual implica que* $\alpha = 0$*. Entonces, si* $\alpha \neq 0$ *no existe* $x \in L_\alpha \Gamma_\lambda(t)$*, si* $x \in [\lambda t, 1]$.

Por lo tanto, si $t \neq 0$ *y* $x \in L_\alpha \Gamma_\lambda(t)$ *entonces* $\alpha\lambda t \leq x \leq \lambda t$.

- *Si* $t = 0$ *se tiene que* $\Gamma_\lambda(t) = \mathcal{X}_{\{0\}}$*. Así, si* $\mathcal{X}_{\{0\}}(x) \geq \alpha$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$ *entonces* $x = 0$.

Por lo tanto, $L_\alpha \Gamma_\lambda(t) = [\alpha\lambda t, \lambda t]$ *para todo* $t \in [0,1]$*. Por consiguiente,*

$$\begin{aligned} D(\Gamma_\lambda(t_1), \Gamma_\lambda(t_2)) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} H(L_\alpha\Gamma_\lambda(t_1), L_\alpha\Gamma_\lambda(t_2)) \\ &= \sup_{\alpha\in[0,1]} H([\alpha\lambda t_1, \lambda t_1], [\alpha\lambda t_2, \lambda t_2]) && \text{(Proposición 1.4.16)} \\ &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \text{máx}\{\lambda|t_1 - t_2|, \alpha\lambda|t_1 - t_2|\} \\ &= \lambda|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, Γ_λ *es una contracción con constante* λ*. Note que el conjunto difuso u de puntos* *fijos asociado a* Γ_λ *es*

$$u(t) = \Gamma_\lambda(t)(t) = 0, \quad \forall t \in (0,1], \quad (\textit{note que} \quad \lambda t < t \leq 1),$$

y

$$u(0) = \Gamma_\lambda(0)(0) = \mathcal{X}_{\{0\}}(0) = 1.$$

De este modo se obtiene que $u = S(\Gamma_\lambda) = \mathcal{X}_{\{0\}}$.

Ejemplo 2.1.7. *Sean* $X = [0,1]$ *y* $\Gamma : X \longrightarrow E(X)$ *definida para todo* $x, t \in X$ *por*

$$\Gamma(t)(x) = x.$$

Nótese que el conjunto difuso $\Gamma(t)$*, al evaluarlo en un elemento de* X*, no depende de* t*, luego para todo* $t \in X$*, se obtiene la Figura 2.8 del conjunto difuso* $\Gamma(t)$.

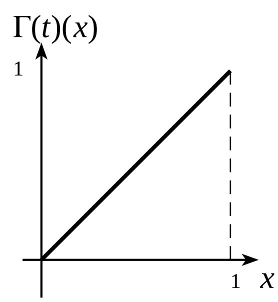


Figura 2.3 – Gráfica del conjunto difuso de puntos fijos de Γ.

Como $L_\alpha\Gamma(t)$ *no depende de* t*, entonces* Γ *es una contracción con constante* $\lambda = 0$*. Además, el conjunto difuso de puntos fijos* $u = S(\Gamma)$ *asociado a la multifunción difusa* Γ *es tal que* $u(t) = \Gamma(t)(t) = t$ *para todo* $t \in [0,1]$*. En general, si* $u \in E(X)$ *y* $\Gamma(x) = u$ *para todo* $x \in X$*, entonces* Γ *es una contracción con* $S(\Gamma) = u$.

El Lema 2.1.8 es análogo, en el contexto difuso, a la Proposición 1.4.16.

Lema 2.1.8 ([12])**.** *Sean* (X, d) *un espacio métrico completo y* $\Gamma_1, \Gamma_2 : X \longrightarrow E(X)$ *dos contracciones difusas con constante* λ *y* u_1, u_2 *los conjuntos difusos de puntos fijos asociados a* Γ_1 *y* Γ_2, *respectivamente. Entonces,*

$$D(u_1, u_2) \leq \frac{1}{1-\lambda} \sup_{x \in X} D(\Gamma_1(x), \Gamma_2(x)).$$

Demostración: Usando la Proposición 1.4.16 se tiene que para cada $\alpha \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} H(L_\alpha u_1, L_\alpha u_2) &= H(S_{1_\alpha}, S_{2_\alpha}) \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda} \sup_{x \in X} H(\Gamma_{1_\alpha}(x), \Gamma_{2_\alpha}(x)) \\ &\leq \frac{1}{1-\lambda} \sup_{x \in X} D(\Gamma_1(x), \Gamma_2(x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando el supremo sobre α se obtiene

$$D(u_1, u_2) \leq \frac{1}{1-\lambda} \sup_{x \in X} D(\Gamma_1(x), \Gamma_2(x)). \qquad \square$$

Ahora se puede establecer el siguiente resultado de estabilidad de conjuntos de puntos fijos en el contexto difuso.

Teorema 2.1.9 ([12]). *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $\Gamma_0, \Gamma_i : X \longrightarrow E(X)$ una sucesión de contracciones difusas con constante λ $(i = 1, 2, \ldots)$, tal que $\Gamma_i \longrightarrow \Gamma_0$ uniformemente en X. Si u_i, u_0 son los conjuntos difusos de puntos fijos asociados a las multifunciones difusas Γ_i y Γ_0, respectivamente, entonces la sucesión $(D(u_i, u_0)) \to 0$ cuando $i \longrightarrow \infty$.*

Demostración: Como $\Gamma_i \longrightarrow \Gamma_0$ uniformemente en X, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in X} D(\Gamma_i(x), \Gamma_0(x)) < (1-\lambda)\epsilon, \qquad \text{para todo } \ i \geq n.$$

Entonces, por el Lema 2.1.8, se tiene que para todo $i \geq n$,

$$D(u_i, u_0) \leq \frac{1}{1-\lambda} \sup_{x \in X} D(\Gamma_i(x), \Gamma_0(x)) < \epsilon. \qquad \square$$

El siguiente ejemplo considera una sucesión de multifunciones difusas Γ_n convergentes uniformemente a una multifunción difusa Γ_0.

Ejemplo 2.1.10. *Sean* $X = [0, 1]$, $0 < \lambda < 1$, $\Gamma_0 : X \longrightarrow E(X)$ *una multifunción difusa definida por*

$$\Gamma_0(t)(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\lambda t} & si \quad t \neq 0 \quad y \quad 0 \leq x \leq \lambda t, \\ x & si \quad t \neq 0 \quad y \quad \lambda t < x \leq 1, \\ \mathcal{X}_{\{0,1\}}(x) & si \quad t = 0, \end{cases}$$

y $\Gamma_n : X \longrightarrow E(X)$ *la sucesión de multifunciones difusas definida por*

$$\Gamma_n(t)(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\lambda t} + \dfrac{1}{n} & si \quad t \neq 0 \quad y \quad 0 \leq x \leq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\lambda t, \\ \dfrac{(n+1)x}{n} & si \quad t \neq 0 \quad y \quad \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\lambda t < x \leq 1, \\ \mathcal{X}_{\{0,1\}}(x) & si \quad t = 0. \end{cases}$$

Nótese que $L_\alpha\Gamma_0(t) = [\alpha\lambda t, \lambda t] \cup [\alpha, 1]$. *Entonces,*

$$\begin{aligned} D(\Gamma_0(t_1), \Gamma_0(t_2)) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} H(L_\alpha\Gamma_0(t_1), L_\alpha\Gamma_0(t_2)) \\ &= \sup_{\alpha\in[0,1]} H([\alpha\lambda t_1, \lambda t_1] \cup [\alpha, 1], [\alpha\lambda t_2, \lambda t_2] \cup [\alpha, 1]) \\ &= \sup_{\alpha\in[0,1]} \text{máx}\{\alpha\lambda|t_1 - t_2|, \lambda|t_1 - t_2|\} \\ &= \lambda|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, Γ_0 *es una contracción difusa. Además, como* $\lambda t < t \leq 1$ *se tiene que* $\Gamma_0(t)(t) = t$ *para todo* $t \in [0, 1]$. *Así,* $t = 1$ *es un punto fijo de* Γ_0 *y*

$$\Gamma_0(0)(0) = \mathcal{X}_{[0,1]}(0) = 1.$$

Consecuentemente, $u_0 = S(\Gamma_0) = \mathcal{X}_{\{0,1\}}$.

Si $x \in L_\alpha\Gamma_n(t)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *entonces* $\Gamma_n(t)(x) \geq \alpha$. *Luego:*

- *si* $t \neq 0$ *y* $0 \leq x \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda t$ *entonces* $\Gamma_n(t)(x) = \frac{x}{\lambda t} + \frac{1}{n} \geq \alpha$, *lo cual implica que*

$$\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)\lambda t \leq x \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda t,$$

- *si* $t \neq 0$ *y* $\left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda t < x \leq 1$ *se tiene que* $\Gamma_n(t)(x) = \frac{(n+1)x}{n} \geq \alpha$, *lo cual implica que* $\frac{\alpha n}{n+1} \leq x \leq 1$,

- *si* $t = 0$ *se tiene que* $\Gamma_n(t) = \mathcal{X}_{\{0,1\}}$. *Así, si* $\mathcal{X}_{\{0,1\}}(x) \geq \alpha$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$, *entonces* $x = 0$ *y* $x = 1$.

Por lo tanto,

$$L_\alpha \Gamma_n(t) = \left[\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)\lambda t, \left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda t\right] \cup \left[\frac{\alpha n}{n+1}, 1\right]$$

para todo $t \in [0,1]$ *y para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces,*

$$\begin{aligned}
&H\Big(L_\alpha\Gamma_n(t_1), L_\alpha\Gamma_n(t_2)\Big) \\
&= H\left(\left[\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)\lambda t_1, \left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda t_1\right] \cup \left[\frac{\alpha n}{n+1}, 1\right], \left[\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)\lambda t_2, \left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda t_2\right] \cup \left[\frac{\alpha n}{n+1}, 1\right]\right) \\
&= \text{máx}\left\{\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)\lambda|t_1 - t_2|, \left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda|t_1 - t_2|\right\}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
D(\Gamma_n(t_1), \Gamma_n(t_2)) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} H(L_\alpha\Gamma_n(t_1), L_\alpha\Gamma_n(t_2)) \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda|t_1 - t_2|,
\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Así, para todo* $n \in \mathbb{N}$, Γ_n *es una contracción difusa con constante* $0 \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\lambda < 1$. *Además, si* $t = \frac{n}{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_n(t)(t) = 1$ *y si* $t = 0$ *se tiene que* $\Gamma_n(0)(0) = \mathcal{X}_{\{0,1\}}(0) = 1$; *por lo tanto, el conjunto difuso* u_n *de puntos fijos asociado a* Γ_n

esta dado por

$$u_n = S(\Gamma_n) = \mathcal{X}_{\left\{0,\frac{n}{n+1}\right\}},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, nótese que Γ_n *converge a* Γ_0 *uniformemente sobre* X*, si* $n \to \infty$*. De este modo, se observa que* Γ_n *cumple con todas las condiciones del Teorema 2.1.9:*

- $X = [0,1]$ *es un espacio métrico completo,*
- $\Gamma_0, \Gamma_n : X \longrightarrow E(X)$ *es una sucesión de contracciones difusas con constante* λ $(n = 1, 2, \cdots)$*,*
- $\Gamma_n \longrightarrow \Gamma_0$ *uniformemente sobre* X.

Por lo tanto se concluye que $D(u_n, u_0) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*. De hecho, como* $\dfrac{n}{n+1} \to 1$ *se tiene que* $u_n = \mathcal{X}_{\left\{0,\frac{n}{n+1}\right\}} \xrightarrow{D} \mathcal{X}_{\{0,1\}} = u_0$.

2.2. Multifunciones y sistemas iterados de funciones

El objetivo de esta sección es analizar un caso particular de multifunciones aplicadas a sistemas iterados de funciones, o SIF, los cuales se componen de un sistema w de N contracciones $\omega_i : X \longrightarrow X$, $i = 1, 2, \cdots, N$, sobre un espacio métrico (X, d).

Definición 2.2.1. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $\omega_i : X \longrightarrow X$ N *contracciones sobre* X*; es decir, para todo* $x, y \in X$ *se tiene que*

$$d(\omega_i(x), \omega_i(y)) \leq \lambda_i d(x, y), \quad 0 \leq \lambda_i < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

El conjunto $\{\omega_i, i = 1, 2, \ldots, N\}$ *se denotará por* w *y será llamado un sistema de funciones iteradas, o SIF.*

La Definición 2.2.2 establece una multifunción $\widehat{w}$ para los sistemas iterados de funciones o SIF's con sólo una contracción.

Definición 2.2.2. *Dado un SIF con $w = (\omega_1)$ se define la multifunción $\widehat{w}$ sobre el conjunto $C(X)$ como*

$$\begin{aligned} \widehat{w} \quad : \quad & C(X) \longrightarrow \mathcal{P}(C(X)) \\ & S \longmapsto \widehat{w}(S) = \{\omega_1(S)\}, \end{aligned}$$

donde $\omega_1(S) = \{\omega_1(y) : y \in S\}$.

La Definición 2.2.3 define lo que sería el atractor de la multifunción dada en la anterior definición.

Definición 2.2.3. *Sean (X, d) un espacio métrico y $\widehat{w} : C(X) \longrightarrow \mathcal{P}(C(X))$ la multifunción definida por $\widehat{w}(S) = \{\omega_1(S)\}$. Se dice que $A \in C(X)$ es el atractor del SIF $w = (\omega_1)$ si se cumple que $\widehat{w}(A) = \{A\}$.*

La Proposición 2.2.4 da condiciones para la existencia y unicidad de atractores de multifunciones.

Proposición 2.2.4. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $\widehat{w} : C(X) \longrightarrow \mathcal{P}(C(X))$ una multifunción definida por $\widehat{w}(S) = \{\omega_1(S)\}$, donde $\omega_1 : X \longrightarrow X$ es una contracción. Entonces $\widehat{w}$ es una multifunción contractiva y existe un único $A \in C(X)$ tal que $\widehat{w}(A) = \{A\}$.*

Demostración: Para todo $S, T \in C(X)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} H(\widehat{w}(S), \widehat{w}(T)) &= H(\{\omega_1(S)\}, \{\omega_1(T)\}) \\ &= H(\omega_1(S), \omega_1(T)) \\ &= \text{máx}\Big\{ \sup_{\omega_1(s)\in\omega_1(S)} \inf_{\omega_1(t)\in\omega_1(T)} d(\omega_1(s), \omega_1(t)), \sup_{\omega_1(t)\in\omega_1(T)} \inf_{\omega_1(s)\in\omega_1(S)} d(\omega_1(s), \omega_1(t))\Big\} \\ &\leq \text{máx}\Big\{\sup_{s\in S} \inf_{t\in T} \lambda_1 d(s, t), \sup_{t\in T} \inf_{s\in S} \lambda_1 d(s, t)\Big\} \\ &= \lambda_1 \, \text{máx}\Big\{\sup_{s\in S} \inf_{t\in T} d(s, t), \sup_{t\in T} \inf_{s\in S} d(s, t)\Big\} \\ &= \lambda_1 H(S, T), \end{aligned}$$

donde $0 \leq \lambda_1 < 1$. Por lo tanto, $\widehat{w}$ es una multifunción contractiva.
Ahora, para probar la existencia del atractor de $\widehat{w}$, considérensen $B \in C(X)$ y la sucesión

$$\{A_0\} = B, \quad \{A_{n+1}\} = \widehat{w}(A_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $A_n \in C(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\widehat{w}$ es una contracción, se tiene que existe $0 \leq \lambda_1 < 1$ tal que

$$H(\{A_{n+1}\}, \{A_n\}) = H(\widehat{w}(A_n), \widehat{w}(A_{n-1})) \leq \lambda_1 H(A_n, A_{n-1}).$$

Entonces, por inducción resulta que $H(\{A_{n+1}\}, \{A_n\}) \leq \lambda_1^n H(\{A_1\}, \{A_0\}) = c\lambda_1^n$, donde $c = H(\{A_1\}, \{A_0\})$. Utilizando la desigualdad triangular, se tiene para $m > n$ que:

$$H(\{A_m\}, \{A_n\}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} H(\{A_{k+1}\}, \{A_k\}) \leq c \sum_{k=n}^{m-1} \lambda_1^n = c\frac{\lambda_1^n - \lambda_1^m}{1 - \lambda_1} < \frac{c}{1 - \lambda_1}\lambda_1^n.$$

Como (λ_1^n) converge a 0 cuando $n \to \infty$, dicha desigualdad prueba que la sucesión $(\{A_n\})$ es de Cauchy. Teniendo en cuenta que $(C(X), H)$ (ver Teorema 1.2.6) es un espacio métrico completo, se tiene que existe un único $K \in C(X)$ tal que $(\{A_n\})$ converge a $\{K\}$; es decir, $H(\{A_n\}, \{K\})$ converge a 0 cuando $n \to \infty$.
Luego, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ se tiene que $H(\{A_n\}, \{K\}) < \dfrac{\epsilon}{2\lambda_1}$, y entonces

$$H(\widehat{w}(K), \widehat{w}(A_n)) \leq \lambda_1 H(\{K\}, \{A_n\}) < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $n > N$. Además, como $\{A_{n+1}\} = \widehat{w}(A_n)$ se tiene que para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ implica que $H(\widehat{w}(A_n), \{K\}) < \dfrac{\epsilon}{2}$.
Por lo tanto,

$$H(\widehat{w}(K), \{K\}) \leq H(\widehat{w}(K), \widehat{w}(A_n)) + H(\widehat{w}(A_n), \{K\}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para todo $n > N$. De ésta forma, si n es suficientemente grande se tiene que $\widehat{w}(K) = \{K\}$. Por lo tanto, se garantiza la existencia de un $K \in C(X)$ tal que $\widehat{w}(K) = \{K\}$.
Para probar la unicidad, supongamos que existen K y K' tales que $\widehat{w}(K) = \{K\}$ y $\widehat{w}(K') = \{K'\}$.

Como $\widehat{w}$ es contractiva, entonces

$$H(\{K\},\{K'\}) = H(\widehat{w}(K),\widehat{w}(K')) \leq \lambda_1 H(\{K\},\{K'\}).$$

Por lo tanto, $H(\{K\},\{K'\}) = 0$ ya que $\lambda_1 < 1$, lo cual implica que $K = K'$. En conclusión, existe un único $K \in C(X)$ tal que $\widehat{w}(K) = \{K\}$. □

La multifunción $\widehat{w}$ de la Definición 2.2.2 es generalizada para un SIF de N contracciones.

Ejemplo 2.2.5. *Sean $X = [0,1]$ un espacio métrico completo con la métrica usual, $w = (\omega_1)$ un IFS y $\widehat{w} : C(X) \longrightarrow \mathcal{P}(C(X))$ una multifunción definida por $\widehat{w}(S) = \{\omega_1(x) : x \in S\}$, donde $\omega_1(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$ y $S \in C(X)$. Nótese que como $\omega_1 : X \longrightarrow X$ es una contracción se tiene que $\widehat{w} : C(X) \longrightarrow \mathcal{P}(C(X))$ es una multifunción contractiva y que si $S = \{1\}$,*

$$\widehat{w}(\{1\}) = \{\{1\}\}.$$

Por lo tanto, por la Proposición 2.2.4 se tiene que el atractor de $\widehat{w}$ es precisamente $S = \{1\}$. Gráficamente, se puede visualizar quien puede ser el atractor del IFS $w = (\omega_1)$ a través de la secuencia de iteraciones de ω_1, si se elige como conjunto inicial a $S \subset [0,1]$, mostrado en la Figura 2.4.

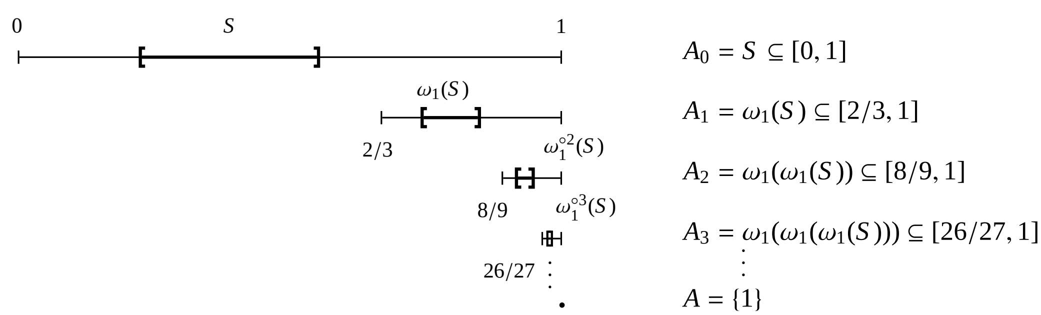


Figura 2.4 – Descripción de la construcción del atractor de ω_1.

Definición 2.2.6. *Dado un SIF con $w = \{\omega_i, i = 1,2,\ldots,N\}$, se define la multifunción $\widehat{w}$ para* *cada* $S \in C(X)$ *como*

$$\begin{aligned} \widehat{w} \ \ : \ \ & C(X) \longrightarrow \mathcal{P}(C(X)) \\ & S \longmapsto \widehat{w}(S) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(S) \right\}, \end{aligned}$$

donde $\omega_i(S) = \{\omega_i(y) : y \in S\}$.

Se obtiene un resultado similar a la Proposición 2.2.4.

Proposición 2.2.7. *Sean* (X, d) *un espacio métrico completo y* $\widehat{w} : C(X) \longrightarrow \mathcal{P}(C(X))$ *la multifunción definida anteriormente. Si cada* $\omega_i : X \longrightarrow X$ *es una contracción, entonces* $\widehat{w}$ *es una multifunción contractiva y existe un único* $A \in C(X)$ *tal que* $\widehat{w}(A) = \{A\}$.

Demostración: Sean $S, T \in C(X)$. En la métrica de Hausdorff se cumple que

$$H\left(\bigcup_{1 \le i \le N} A_i, \bigcup_{1 \le i \le N} B_i \right) \le \max_{1 \le i \le N} H(A_i, B_i),$$

para todo $A_i, B_i \in C(X)$ (ver [19]). Entonces, para cada $S, T \in C(X)$ se tiene que

$$\begin{aligned} H(\widehat{w}(S), \widehat{w}(T)) &= H\left(\left\{ \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(S) \right\}, \left\{ \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(T) \right\} \right) \\ &= H\left(\bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(S), \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(T) \right) \\ &\le \max_{1 \le i \le N} H(\omega_i(S), \omega_i(T)), \\ &= \max_{1 \le i \le N} \max\left\{ \sup_{\omega_i(s) \in \omega_i(S)} \inf_{\omega_i(t) \in \omega_i(T)} d(\omega_i(s), \omega_i(t)), \sup_{\omega_i(t) \in \omega_i(T)} \inf_{\omega_i(s) \in \omega_i(S)} d(\omega_i(s), \omega_i(t)) \right\} \\ &\le \max_{1 \le i \le N} \max\left\{ \sup_{s \in S} \inf_{t \in T} \lambda_i d(s, t), \sup_{t \in T} \inf_{s \in S} \lambda_i d(s, t) \right\} \\ &= \lambda \max\left\{ \sup_{s \in S} \inf_{t \in T} d(s, t), \sup_{t \in T} \inf_{s \in S} d(s, t) \right\} \\ &= \lambda H(S, T), \end{aligned}$$

donde $\lambda = \max_{1 \le i \le N} \lambda_i$ y $0 \le \lambda < 1$. Por lo tanto, $\widehat{w}$ es una multifunción contractiva.

Por otro lado, la prueba de la existencia y unicidad del conjunto atractor es análoga a la expuesta en la Proposición 2.2.4. □

Ejemplo 2.2.8. *Sean $X = [0,1]^2$ y $w = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ un SIF, donde*

$$\omega_1(x,y) = \Big(1/2x, 1/2y\Big),$$
$$\omega_2(x,y) = \Big(1/2x + 1/2, 1/2y\Big),$$
$$\omega_3(x,y) = \Big(1/2x + 1/4, 1/2y + \sqrt{3}/4\Big).$$

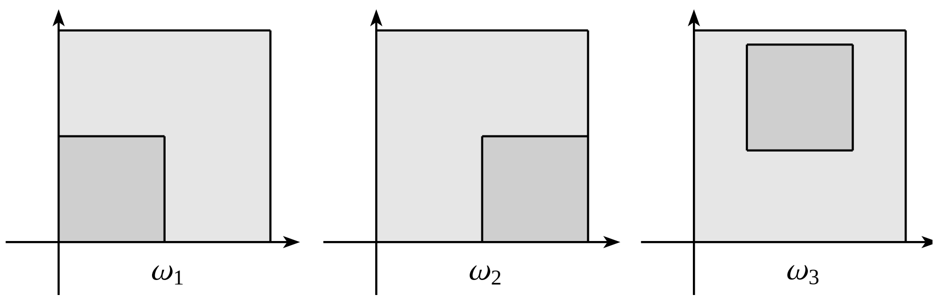


Figura 2.5 – Gráfica de la acción de cada ω_i sobre $[0,1]^2$.

Considérese la multifunción $\widehat{w} : C(X) \longrightarrow \mathcal{P}(C(X))$ definida por $\widehat{w}(S) = \left\{\bigcup_{i=1}^{3} \omega_i(S)\right\}$, donde $\omega_i(S) = \{\omega_i(x) : x \in S\}$.

Primero, nótese que $\widehat{w}$ es una multifunción contractiva ya que cada ω_i es una contracción. La acción de cada ω_i, $i = 1,2,3$, puede verse gráficamente en la Figura 2.5.

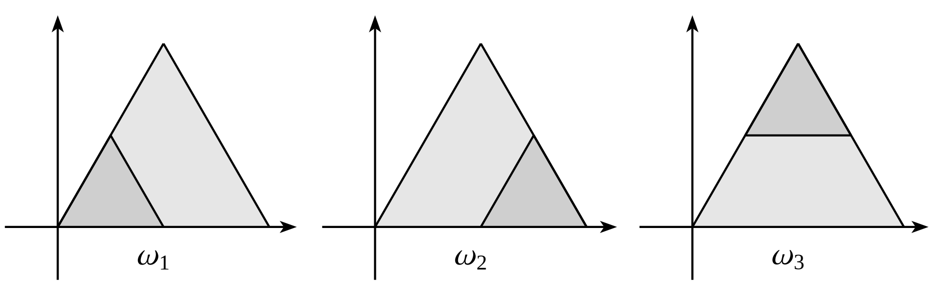


Figura 2.6 – Gráfica de la acción de cada ω_i sobre S.

Ahora, considere como conjunto inicial a $S \subset [0,1]^2$*, el cual corresponde al triángulo equilátero (relleno) con vértices en* $(0,0)$*,* $(1,0)$ *y* $(1/2, \sqrt{3}/2)$*. La Figura 2.7 muestra la acción de cada* ω_i*,* $i = 1,2,3$ *para* S*.*
La multifunción $\widehat{w}$ *actúa reproduciendo este conjunto* S *en cada iteración, como se muestra en la Figura 2.7.*

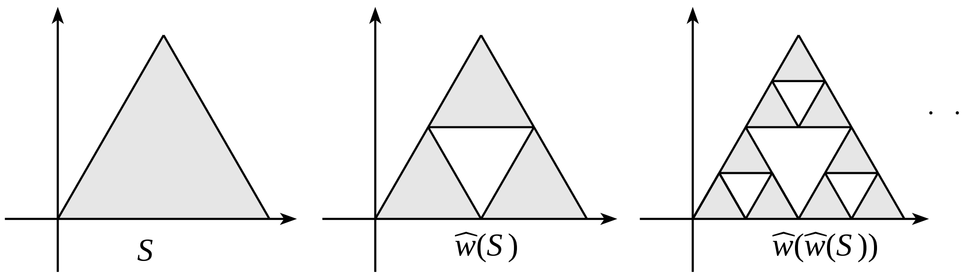


Figura 2.7 – Primeras iteraciones para la construcción del triángulo de Sierpinski con la multifunción $\widehat{w}$.

Entonces, por la Proposición 2.2.7, existe $A \subset [0,1]^2$ *tal que* $\widehat{w}(\{A\}) = \{A\}$ *denominado el atractor, el cual corresponde al limite de la sucesión generada por las iteraciones. Este conjunto compacto* A *es llamado comúnmente el triángulo de Sierpinski.*

2.3. Sistemas iterados de conjuntos difusos (SICD)

El objetivo de esta sección es dar una pequeña introducción a una clase especial de sistemas dinámicos sobre espacios de funciones, los cuales han sido introducidos en [19] y han sido denominados como “sistemas de conjuntos difusos iterados” o SICD. Estos sistemas, denotados como (w, Φ), se componen de un sistema w (denominado también la componente SIF) de N contracciones $\omega_i : X \longrightarrow X$, $i = 1, 2, \ldots, N$, sobre un espacio métrico (X, d), junto con un sistema asociado Φ (la componente “grey level”) de aplicaciones $\phi_i : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ denominadas “grey level”. Mediante este tipo de sistemas se puede establecer a otro nivel la idea de punto fijo, al considerarse a un conjunto difuso u denominado el atractor del SICD, como un punto fijo de un operador multívoco difuso $T : E(X) \longrightarrow E(X)$, siendo $E(X)$ el espacio de todos los conjuntos difusos con α-niveles no vacíos, acotados y cerrados de un espacio métrico (X, d).

En animación de imágenes, un SICD es una nueva herramienta que permite la construcción, análisis y/o aproximación de conjuntos e imágenes donde es posible exhibir fractales característicos, introduciendo los conjuntos difusos. De particular interés está el problema inverso de codificar un conjunto o imagen con un número relativamente pequeño de parámetros. La ventaja de trabajar con conjuntos difusos es que pueden determinar totalmente cualquier imagen a blanco y negro; es decir, si P representa el conjunto de puntos o pixeles que componen una imagen, ésta está determinada por un conjunto difuso $u : P \longrightarrow [0,1]$, donde $0 \leq u(x) \leq 1$ (0=negro: el fondo, 1=blanco: el frente) representa los niveles de grises o valores de brillo para cada $x \in P$. En el problema inverso de codificar un conjunto o imagen a través de un SICD, el atractor representa la imagen final después de realizar el proceso iterativo del SICD.

Definición 2.3.1. *Sea* $\mathcal{M}^{+}([0,1])$ *el conjunto de todas las funciones* $\phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *tales que:*

i. ϕ *es no-decreciente sobre* $[0,1]$,

ii. ϕ *es continua a derecha sobre* $[0,1)$,

iii. $\phi(0) = 0$,

iv. *para al menos un* $j \in \{1,2,\ldots,N\}$, $\phi_j(1) = 1$.

Las funciones ϕ *se denominan "grey level". Además, se denota* $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N)$ *como el conjunto de las funciones "grey level" asociadas (es decir, para cada* ω_i *se asocia una* ϕ_i*), donde* $\phi_i \in \mathcal{M}^{+}([0,1])$ *para todo* $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ *(ver Figura 2.8).*

Al introducir estas aplicaciones ϕ_i, denominadas "grey level", a este tipo de sistemas se obtiene una mayor flexibilidad en la generación de imágenes, lo cual permite simplificar considerablemente el tratamiento del problema inverso para imágenes que están tanto a blanco y negro como a color (ver [9, 19]).

Definición 2.3.2. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Un SICD es un sistema w de N contracciones* $\omega_i : X \longrightarrow X$*, con un sistema asociado* Φ *de N aplicaciones* $\phi_i : [0,1] \longrightarrow [0,1]$*, donde* $\phi_i \in \mathcal{M}^{+}([0,1])$ *para todo* $i \in \{1,2,\ldots,N\}$.

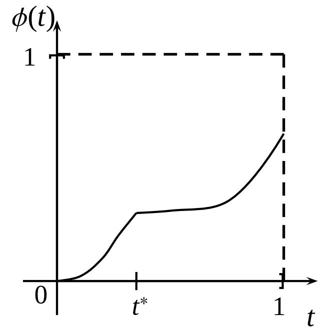


Figura 2.8 – Ejemplo de una ϕ.

Se define un tipo de operador contractivo en $E(X)$ para un SICD.

Definición 2.3.3. *Sean* (X,d) *un espacio métrico. Se define el operador* $T : E(X) \longrightarrow E(X)$ *por*

$$(Tu)(x) = \sup_{1\leq i\leq N}\left\{\phi_i(\widetilde{u}(\omega_i^{-1}(x)))\right\} \tag{2.1}$$

donde, para $B \subset X$, $\widetilde{u}(B) = \sup_{y\in B}\{u(y)\}$ *si* $B \neq \emptyset$ *y* $\widetilde{u}(B) = 0$ *si* $B = \emptyset$

El siguiente es un ejemplo de un SICD con cuatro contracciones.

Ejemplo 2.3.4. *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $T : E(X) \longrightarrow E(X)$ *un operador contractivo definido en* (2.1). *Además, se define el sistema SICD sobre* $X = [0,1]$ *como*

$$\begin{aligned}
\omega_1(x) &= \frac{1}{4}x; & \phi_1(t) &= \frac{1}{4}t;\\
\omega_2(x) &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}; & \phi_2(t) &= t;\\
\omega_3(x) &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}; & \phi_3(t) &= \frac{33}{10}t;\\
\omega_4(x) &= \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}; & \phi_4(t) &= \frac{3}{4}t.
\end{aligned}$$

Sea $u_0(x) = 4x(1-x)$ *el conjunto difuso inicial del SICD* $w = (\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4)$. *La Figura 2.9 muestra la primera iteración del SICD, obteniéndose un nuevo conjunto difuso* $u_1(x) = (Tu_0)(x)$ *definido como*

$$u_1(x) = \begin{cases} -16x^2 + 4x & si \quad 0 \leq x \leq 0{,}25, \\ -64x^2 + 48x - 8 & si \quad 0{,}25 < x \leq 0{,}5, \\ -21{,}12x^2 + 26{,}4x - 7{,}92 & si \quad 0{,}5 < x \leq 0{,}75, \\ -48x^2 + 84x - 36 & si \quad 0{,}75 < x \leq 1. \end{cases}$$

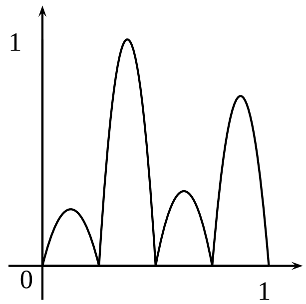


Figura 2.9 – Gráfica de la primera iteración de (w, Φ).

Ahora, se realiza la segunda iteración del SICD, obteniéndose un nuevo conjunto difuso $u_2(x) = (Tu_1)(x)$ *mostrado en la Figura 2.10.*

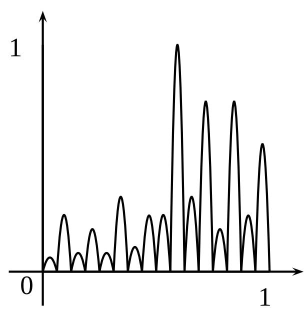


Figura 2.10 – Gráfica de la segunda iteración de (w, Φ).

Al igual que en los sistemas iterados de funciones o SIF, la Definición 2.3.5 establece, en el contexto difuso, lo que es un atractor.

Definición 2.3.5. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* $T : E(X) \longrightarrow E(X)$ *el operador definido en* $(*)$. *Se dice que* u *es el atractor de SICD si* $Tu = u$ *para un único* $u \in E(X)$.

Una propiedad notable de estos operadores es la siguiente.

Lema 2.3.6 ([9, 19])**.** *Para cada* $v \in E(X)$ *y* $\alpha \in [0,1]$ *se tiene que*

$$L_\alpha(Tv) = \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(L_\alpha(\phi_i \circ v)).$$

Se da un resultado importante de los sistemas iterados de conjuntos difusos que establece las condiciones de existencia y unicidad de atractores en el contexto difuso.

Proposición 2.3.7 ([9, 19])**.** *Sean* (X, d) *un espacio métrico completo y* $T : E(X) \longrightarrow E(X)$ *el operador definido en* $(*)$*. Entonces* T *es un operador contractivo y existe un único* $u \in E(X)$ *tal que* $Tu = u$*.*

Demostración: Sean $u, v \in E(X)$. Entonces de la Proposición 1.3.5, el Lema 2.3.6 y la Proposición 2.2.7, se tiene que

$$\begin{aligned} D(Tu, Tv) &= \sup_{\alpha\in[0,1]} H(L_\alpha Tu, L_\alpha Tv) \\ &= \sup_{\alpha\in[0,1]} H\left(\bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(L_\alpha(\phi_i \circ u)), \bigcup_{i=1}^{N} \omega_i(L_\alpha(\phi_i \circ v))\right) \\ &\leq \sup_{\alpha\in[0,1]} \max_{1\leq i\leq N} H(\omega_i(L_\alpha(\phi_i \circ u)), \omega_i(L_\alpha(\phi_i \circ v))) \\ &\leq \sup_{\alpha\in[0,1]} \max_{1\leq i\leq N} \lambda_i H(L_\alpha(\phi_i \circ u), L_\alpha(\phi_i \circ v)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sea $\beta(i) = \text{ínf}\{t \in [0,1] : \phi_i(t) \geq \alpha\}$ para todo $0 \leq \alpha < 1$. Como ϕ_i es no decreciente y continua a derecha para todo $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} x \in L_\alpha(\phi_i \circ u) &\Leftrightarrow \phi_i(u(x)) \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow \beta(i) \leq u(x) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \in L_{\beta(i)} u. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $L_\alpha(\phi_i \circ u) = L_{\beta(i)} u$ para todo $0 \leq \alpha < 1$.
Por otro lado, $L_0(\phi_i \circ u) = \lim_{n\longrightarrow\infty} L_{\beta_n(i)} u$ para una sucesión decreciente $\beta_n(i)$ en $(0,1)$.

Entonces, para todo $\alpha \in [0,1]$ y para todo $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ se tiene que

$$H(L_\alpha(\phi_i \circ u), L_\alpha(\phi_i \circ v)) = H(L_{\beta(i)}(u), L_{\beta(i)}(v)) \leq D(u,v).$$

De $(**)$ se sigue que

$$D(Tu, Tv) \leq \lambda D(u,v),$$

donde $\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq N} \lambda_i$.

Para probar la existencia del atractor, se considera $v \in E(X)$ y se define la sucesión recursiva en $E(X)$ como

$$u_0 = v, \quad u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Como T es contractiva, existe $0 \leq \lambda < 1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$D(u_{n+1}, u_n) = D(Tu_n, Tu_{n+1}) \leq \lambda D(u_n, u_{n-1})$$

y entonces, por inducción, resulta que

$$D(u_{n+1}, u_n) \leq \lambda^n D(u_1, u_0) = c\lambda^n,$$

donde $c = D(u_1, u_0)$. Utilizando la desigualdad triangular, se tiene para $m > n$ que

$$D(u_m, u_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} D(u_{k+1}, u_k) \leq c \sum_{k=n}^{m-1} \lambda^n = c\frac{\lambda^n - \lambda^m}{1-\lambda} < \frac{c}{1-\lambda}\lambda^n.$$

Como la sucesión (λ^n) converge a 0 cuando $n \to \infty$, esta desigualdad prueba que (u_n) es de Cauchy en $E(X)$. Entonces $(D(u_n, u))$ converge a 0 cuando $n \to \infty$, ya que $E(X)$ es un espacio métrico completo y esto conlleva que (u_n) es convergente. Luego, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ se tiene que

$$D(u_n, u) < \frac{\epsilon}{2\lambda}.$$

Entonces $D(Tu, Tu_n) \leq \lambda D(u, u_n) < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $n > N$. Además, como $u_{n+1} = Tu_n$ se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ implica que

$$D(Tu_n, u) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto,

$$D(Tu, u) \leq D(Tu, Tu_n) + D(Tu_n, u) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para todo $n > N$. De está forma, si n es suficientemente grande se tiene que $Tu = u$. Para probar la unicidad, supongamos que existen u y u' tal que $Tu = u$ y $Tu' = u'$. Como T es contractiva entonces

$$D(u, u') = D(Tu, Tu') \leq \lambda D(u, u').$$

Por lo tanto, $D(u, u') = 0$ lo cual implica que $u = u'$. □

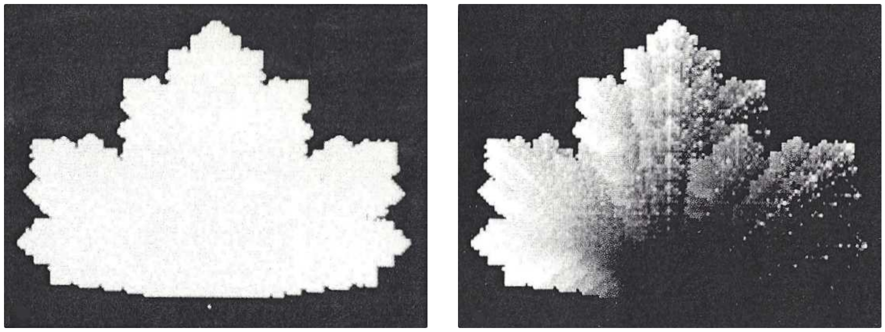
El siguiente ejemplo fue tomado del artículo [19].

Ejemplo 2.3.8. *Sean $X = [0, 1]^2$ y $w = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ tal que*

$$\begin{aligned}
\omega_1(x, y) &= (0{,}6x + 0{,}18, \quad 0{,}6y + 0{,}36);\\
\omega_2(x, y) &= (0{,}6x + 0{,}18, \quad 0{,}6y + 0{,}08);\\
\omega_3(x, y) &= (0{,}3x + 0{,}5y + 0{,}27, \quad -0{,}5x + 0{,}3y + 0{,}5);\\
\omega_4(x, y) &= (0{,}3x - 0{,}5y + 0{,}36, \quad 0{,}5x + 0{,}3y + 0{,}06).
\end{aligned}$$

Por sí solas, las contracciones ω_i, $i = 1, 2, 3, 4$, definen un SIF. Ahora bien, si se toman las siguientes aplicaciones "grey level" $\phi_i(t) = t$, $i = 1, 2, 3, 4$, se obtendrá como atractor el conjunto difuso u que se muestra en la parte izquierda de la Figura 2.11, el cual corresponde a $u = \mathcal{X}_A$, donde A es el atractor del IFS w.
Por otro lado, si se considera un SICD (w, Φ), donde w es el SIF anterior y Φ es el sistema $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ de funciones "grey level";

$$\phi_1(t) = 0{,}85t; \quad \phi_2(t) = 0{,}8\sqrt{t}; \quad \phi_3(t) = 0{,}4(t^2 + t); \quad \phi_4(t) = t,$$



(a) El atractor *u*. **(b)** El atractor *v*.

Figura 2.11 – Atractores.

se obtendrá como atractor el conjunto difuso v que se muestra en la parte derecha de la Figura 2.11, donde $v \subset \mathcal{X}_A$.

En este ejemplo, puede verse que las funciones ϕ_i *ofrecen gran flexibilidad en el manejo de niveles de grises de imágenes que se puedan representar a través de estos sistemas iterados.*

Conclusiones

- ⋄ Se elaboró un trabajo basado principalmente en [7, 9, 10, 11, 12, 13, 19], cuyo contenido reúne varios resultados principales referentes a la Teoría de puntos fijos de multifunciones difusas y aplicaciones. Se analizo, en particular, aspectos como la existencia, unicidad, estabilidad y la relación existente entre los resultados en el contexto multívoco clásico y el contexto multívoco difuso.

- ⋄ Se presentaron varios conceptos y propiedades relativos a la Teoría de los Conjuntos Difusos y a la Teoría de las multifunciones, aspectos que son importantes para el desarrollo de la Teoría de puntos fijos de multifunciones difusas. Adicionalmente, Se revisó las definiciones de conjunto difuso, α-nivel de un conjunto difuso, multifunción y conjunto de puntos fijos de una multifunción.

- ⋄ Se realizo un análisis de la aplicación de la Teoría de puntos fijos de multifunciones contractivas vista en [19] y relacionada con los sistemas iterados de funciones o SIF. Además, se trabajó con una clase especial de sistemas dinámicos sobre espacios de funciones, denominada sistemas iterados de conjuntos difusos o SICD, la cual es una herramienta importante que permite la construcción, análisis y/o aproximación de conjuntos e imágenes, donde es posible exhibir fractales característicos.

Bibliografía

[1] Banks H. T. & Jacobs M. Q., A differential calculus for multifunctions, *J. Math. Anal. Appl.* 29 (1970), 246-272.

[2] González W., Ecuaciones Diferenciales Difusas. Universidad Industrial de Santander, Tesis de Maestría en Matemáticas, 2010.

[3] Blasi F.S., On the diferentiability of multifunctions, *Pacific J. Math.*, 66 (1976), 67-81.

[4] Caceres N., Espacios y convergencia de conjuntos difusos. Universidad Industrial de Santander, Tesis de pregrado, 2006.

[5] Roman-Flores H., Flores-Fraunilic A., Rojas-Medar M. & Bassanezi R.C., On the stability of fixed points set of fuzzy contractions, *In Proceedings Sixth IFSA World Congress*, São Paulo, Brazil, 1995, 487-489.

[6] Herikson J., Completeness and total boundedness of the Hausdorff metric, *MIT Undergraduate Journal of Mathematics*, 2000, 69-79.

[7] Negoita C.V. & Ralescu D., Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis, Wiley, New York, 1975.

[8] Puri M. & Ralescu D., Fuzzy random variables, *J. Math. Anal. Appl.*, 114 (1986), 409-422.

[9] Forte B., Lo Schiavo M. & Vrscay E.R., Continuity properties of attractors for iterated fuzzy set systems, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* 36 (1994), 175-193.

[10] Nadler S., Multi-valued contraction mappings, *Pac. J. of Math.*, 30 (1969), 465-488.

[11] Heilpern S., Fuzzy mapping and fixed point theorem, *J. Math. Anal. Appl.*, 83 (1981), 566-569.

[12] Roman-Flores H., Flores-Fraunilic A., Rojas-Medar M. & Bassanezi R.C., Stability of Fixed Points Set of Fuzzy Contractions, *Appl. Math. Lett.* 11 (1998), 33-37.

[13] Lim T.C., On fixed point for set-valued contractive mappings with applications to generalized diferential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 110 (1985), 436-441.

[14] Klein E. & Thompson A., Theory of correspondences, Wiley, New York, 1984.

[15] Zadeh L.A., Fuzzy sets, *Infor. and Control*, 8 (1965), 338-353.

[16] Aubin J.P. & Cellina A., Differential Inclusions, Springer, Berlín, 1984.

[17] Bede B. & Gal S.G., Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications to fuzzy differential equations, *Fuzzy Set and System*, 151 (2005), 581-599.

[18] Macías J.C., Funciones multivaluadas y sus aplicaciones, *Miscelánea Matemática*, 44 (2007), México, 101-116.

[19] Cabrelli C.A., Forte B., Molter U.M. & Vrscay E.R., Iterated fuzzy set systems: a new approach to the inverse problem for fractals and other sets, *J. Math. Anal. Appl.*, 171 (1992), 79-100.

[20] Li T., Set valued mapping and its application, *Applied mathematics and mechanics*, 27 (2006), 263-268.

[21] Kleinert, Hagen, Multivalued Fields in Condensed Matter, Electrodynamics and Gravitation, World Scientific Singapore, 2008.

[22] Reatiga, A., Diferenciabilidad de multifunciones y aplicaciones en el contexto difuso, Universidad Industrial de Santander, Tesis de Maestría en Matemáticas, 2010.

[23] Apostol, T., Análisis matemático, Editorial Reverté S.A., California Institute of Tecnology, Madrid, 1982.