

**CONDICIONES DE ACOPLAMIENTO EN HIDRODINÁMICA Y
RADIACIÓN EN RELATIVIDAD GENERAL**

LUDWIN FABIÁN CASTAÑEDA GODOY

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2018**

**CONDICIONES DE ACOPLAMIENTO EN HIDRODINÁMICA Y
RADIACIÓN EN RELATIVIDAD GENERAL**

LUDWIN FABIÁN CASTAÑEDA GODOY

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Físico**

Director
LUIS ALBERTO NÚÑEZ DE VILLAVICENCIO MARTÍNEZ
Doctor en ciencias
Codirector
JUSTO OSPINO ZÚÑIGA
PhD en Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2018

Índice general

Introducción	11
1. Materia, radiación, ecuaciones de campo y acoplamiento	13
2. Superficies de discontinuidad	21
2.1. Choques impulsivos	22
2.2. Capas	23
2.3. Ondas de choque	25
2.4. Fronteras	25
3. Ejemplos de régimen de escape libre y difusión total	27
4. Conclusiones	36
Bibliografía	37
A. Coeficientes de espín para una métrica esféricamente simétrica	39
B. Método de Taub para una frontera	43
C. Transición de una onda de choque a una frontera	45

Índice de figuras

1.1. Regiones de distribución material. Los distintos esquemas de transporte de radiación son presentados (escape libre, difusión total y factores de Eddington). Imagen tomada de [1]	18
--	----

Agradecimientos

Primeramente a Dios, por darme la fortaleza a diario para afrontar los retos que cada día surgieron en mi vida.

Gracias a mi madre, porque sin ella habría sido imposible llegar a cumplir todas mis metas y además porque fue, es y será mi mayor felicidad y sin importar la hora siempre esta dispuesta a escucharme. Que espero tener muchísimo tiempo para poder disfrutar los frutos de mis estudios con ella.

Un especial agradecimiento al profe Luis, porque además de ser mi director es un gran ser humano y me enseñó con tanta paciencia y dedicación durante estos últimos años el hermoso arte de aprender.

Gracias a mi familia, a mi papá, a mi tío Nelson, mi tía Rosalba, mi nona, José Luis, Paula, Daniel y María Alejandra, que aunque estén muy pequeños para entender todavía lo que estudio siempre están pendientes a mi lado para preguntarme todo lo que quieran.

A José, Bryan y Jeison porque son mi segunda familia y encuentro apoyo cada vez que voy a visitarlos y quedarme allá en su casa.

Al profesor José David Sanabria, porque en sus clases aprendí muchísimo y me enseñó a ser autónomo en mi estudio.

A Jessica, porque me ha brindado una amistad muy bonita y con paciencia me ha aconsejado sobre las decisiones a las cuales le he pedido consejo. Que espero verla triunfando en la física y demostrándole al mundo lo inteligente que es.

A Wendy, con quién disfruto pasar el tiempo cada vez que voy a visitarla (aunque se nos pase volando el tiempo), me gustan las locuras que hacemos juntos pero sobretodo me encanta su manera tan natural de ser.

Gracias a Nathalia porque disfruto los momentos que pasamos, espero verla realizando y cumpliendo todas sus metas porque lo merece ya que es una humilde, noble y excelente persona.

Un especial agradecimiento a:

A Daniel, porque además de ser mi compañero, es un gran amigo.

Los muchachos y muchachas del centro de estudios, Jennifer, Edwin, Marquitos, Cucho, Heiner (maestro) entre otros que me brindaron tantos años de su compañía y me enseñaron de política, arte, literatura entre otros temas.

A Eder, Nicolás, Sixto, Daniel, Jhon y Diego. Que aunque estudiamos carreras diferentes siempre serán mis amigos y disfrutamos nuestro tiempo en la universidad y en cada salida que hacíamos.

A Ferney, porque desde mi punto de vista es uno de los mejores científicos que he conocido.

Y por último a Edilson, quién ha sido mi amigo durante los últimos años .
Pido disculpas a las personas que no nombre, gracias a todos aquellos que de una u otra forma compartieron tiempo conmigo durante mi estadía en la universidad.

Resumen

TÍTULO: CONDICIONES DE ACOPLAMIENTO EN HIDRODINÁMICA Y RADIACIÓN EN RELATIVIDAD GENERAL *

AUTOR: LUDWIN FABIAN CASTAÑEDA GODOY **

PALABRAS CLAVES: Condiciones de acoplamiento, hidrodinámica, radiación, relatividad general.

El interior de las estrellas es un campo activo de investigación, debido a que se desconoce el comportamiento de la materia a tan altas presiones y temperaturas. Las superficies de acoplamiento son tema actualmente discutido cuando se analizan objetos compactos en relatividad general, debido a que se conoce muy poco del acoplamiento entre las regiones que estas separan. La interacción entre radiación y materia ultradensa también es un tema discutido debido a que la mayor parte de las estrellas disipan energía en forma de fotones. Puesto que se desconoce el esquema de transporte de la radiación se ha indagado bastante sobre como acoplar este mecanismo de transporte a distribuciones materiales con el fin de hacer modelos mas realista.

En este trabajo se presentará las diferentes superficies de acoplamiento en una distribución material con una solución interna de Schwarzschild con sus respectivas condiciones de Rankine-Hugoniot generalizadas escritas mediante el formalismo de Newman-Penrose e identificando las discontinuidades en las variables físicas. Se hallará la diferencia del flujo de radiación para cada superficie y en los límites de escape libre y difusión. Para el caso de difusión se analiza el flujo de calor para los choques impulsivos y ondas de choque bajo la aproximación cuasiestática, analizando la “transparencia y radiancia” de las dos superficies de discontinuidad.

*Trabajo de Grado.

**Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Luis Alberto Núñez de Villavicencio Martínez. Co-Director: Justo Ospino Zúñiga.

Abstract

TITLE: Coupling conditions in hydrodynamics and radiation in general relativity ^{***}

AUTHOR: LUDWIN FABIÁN CASTAÑEDA GODOY ^{****}

KEYWORDS: Coupling conditions, hydrodynamics, radiation, general relativity.

The interior of the stars is an active field of research, because the behavior of matter at such high pressures and temperatures is unknown. Coupling surfaces are a subject currently discussed when analyzing compact objects in general relativity, because very little is known about the coupling between the regions they separate. The interaction between radiation and ultra-dense matter is also a subject discussed because most stars dissipate energy in the form of photons. Since the radiation transport scheme is unknown, much has been inquired about how to attach this transport mechanism to material distributions in order to make models more realistic. In this paper we present the different coupling surfaces in a material distribution with an internal Schwarzschild solution with their respective generalized Rankine-Hugoniot conditions written by the Newman-Penrose formalism and identifying the discontinuities in the physical variables. There is the difference of the radiation flow for each surface and in the limits of free streaming out and diffusion. For the case of diffusion, the heat flow for impulsive shocks and shock waves under the quasi-static approach is analyzed, analyzing the “transparency and radiance” of the two surfaces of discontinuity.

^{***} Degree Work.

^{****} Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Luis Alberto Núñez de Villavicencio Martínez. Co-Director: Justo Ospino Zúñiga.

Introducción

El interior de las estrellas es un campo activo de investigación, debido a que se desconoce el comportamiento de la materia a tan altas presiones y temperaturas, es aquí donde los avances teóricos toman un rol importante puesto que es imposible hasta el momento llevar a cabo investigaciones experimentales donde se alcancen esas presiones y temperaturas. Un tema actualmente discutido, es la propagación de superficies de discontinuidad al interior de estos objetos compactos, ya que se conoce muy poco del acoplamiento entre las dos regiones que se encuentran separadas por éstas [2, 3]. La interacción entre radiación y materia ultradensa, tiene también un interés astrofísico debido a que la mayor parte de las estrellas emiten radiación en forma de fotones. Puesto que se desconoce el esquema de transporte de la radiación se ha indagado bastante sobre este tema y cómo acoplar este mecanismo de transporte a distribuciones materiales con el fin de hacer los modelos más realistas.

Las superficies de acoplamiento es la interfaz entre dos regiones con diferentes características. Si se habla de distribuciones materiales masivas donde la relatividad general describa con gran precisión la dinámica de éstas, las hipersuperficies cobran una relevancia importantísima puesto que de ellas se saca información física sobre las variables. Un ejemplo es el colapso de una estrella de neutrones. Durante el proceso de implosión se presenta una serie de “ingredientes” [1] : una copiosa emisión de radiación, que una consecuencia de la microfísica del sistema; presiones anisotrópicas locales, que pueden haber sido inducidas a través de transiciones de fase y por último, la formación y generación de superficies de discontinuidad (ondas de choque) que separan el núcleo del manto.

Las estrellas solitónicas son configuraciones estelares que se componen de fermiones y/o bosones en un estado coherente cuántico (falso vacío) producido por bosones de Higgs. En la frontera que divide a este falso vacío, aparece una tensión superficial resultando en una energía superficial (capa), esta capa es interpretada como una superficie de acoplamiento [4].

Para estudiar este tipo de escenarios astrofísicos, donde se encuentran dos regiones diferentes del espacio-tiempo cada una con una ecuación de estado diferente, se utiliza el método de la esfera compuesta [5], que consiste en dividir la estrella en dos regiones diferentes mediante una superficie de acoplamiento.

Si las configuraciones estelares emiten energía en forma de radiación, es necesario tener en cuenta esta interacción. Debido a la dificultad para conocer la interacción entre materia y radiación, se analiza el esquema de transporte de radiación usando el método de factores de Eddington, en el que se usan dos cantidades: el *factor de flujo* $f = \mathcal{F}/\rho_R$ y el *factor variable de Eddington* $\chi = \mathcal{P}/\rho_R$, y relaciones de clausura entre ellas ($\chi = \chi(f)$) [6, 7],

donde \mathcal{F} , \mathcal{P} y ρ_R son el flujo, presión y densidad de radiación respectivamente. Este trabajo se encuentra dividido en cinco partes diferentes: El capítulo (1) trata acerca de las propiedades físicas de la distribución: el tensor de energía $T_{\mu\nu}$, el esquema de radiación, el formalismo de Newman-Penrose, la aproximación cuasiestática y las condiciones de Rankine-Hugoniot; El capítulo (2) analiza las cuatro superficies de discontinuidad (choques impulsivos, capas, ondas de choque y fronteras) hallando las condiciones de Rankine-Hugoniot para cada caso; El capítulo (3) describe el límite de escape libre y difusión total para cada superficie de discontinuidad; Por último, en el capítulo (4) se presenta las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

Materia, radiación, ecuaciones de campo y acoplamiento

Las ecuaciones de Einstein permiten hallar la métrica del espacio-tiempo por una distribución de materia descrita por $T_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ son los tensores de Ricci, métrico y energía-impulso respectivamente y R es el escalar de curvatura. La velocidad de la luz y la constante gravitatoria se eligen igual a la unidad ($c = G = 1$).

En este trabajo se considerará la evolución de distribuciones esféricamente simétricas y localmente anisótropas, disipando energía a través de un flujo radial de radiación. El elemento de línea en coordenadas de Schwarzschild está dado por

$$ds^2 = e^{2\nu(r,t)}dt^2 - e^{2\lambda(r,t)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.2)$$

las funciones λ y ν dependen del tiempo (t) y la coordenada radial (r).

De tal forma las ecuaciones de Einstein vienen dadas como un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas de la siguiente forma

$$-e^{-2\lambda} \left(\frac{2\nu_1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi T_1^1, \quad (1.3)$$

$$\frac{e^{-\nu}}{4} [2\lambda_{00} + \lambda_0(\lambda_0 - \nu_0)] - \frac{e^{-\lambda}}{4} \left[2\nu_{11} + \left(\nu_1 + \frac{2}{r} \right) (\nu_1 - \lambda_1) \right] = 8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3, \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{r^2} - e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda_1}{r} \right) = 8\pi T_0^0, \quad (1.5)$$

$$-e^{-2\lambda} \frac{2\lambda_0}{r} = 8\pi T_0^1. \quad (1.6)$$

Donde los subíndices 0 y 1 en las variables ν y λ indican derivación con respecto al tiempo y a la coordenada radial respectivamente.

Para darle un sentido físico a las componentes del tensor de energía-impulso $T_{\mu\nu}$, se utiliza el esquema propuesto por Bondi [8].

El sistema físico disipa energía a través de un flujo radial de radiación, el tensor de energía es la suma de dos contribuciones, una de ellas asociada con la parte material y la otra a la parte radiativa.

$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^R$, donde $T_{\mu\nu}^M$ corresponde a la parte material y $T_{\mu\nu}^R$ a la parte netamente de radiación.

El tensor de energía material se puede escribir como [9, 10]

$$T_{\mu\nu}^M = (\rho + P_{\perp})u_{\mu}u_{\nu} - P_{\perp}g_{\mu\nu} + (P - P_{\perp})v_{\mu}v_{\nu}, \quad (1.7)$$

y el tensor asociado a la radiación

$$T_{\mu\nu}^R = \frac{1}{2}(3\rho_R - \mathcal{P})u_{\mu}u_{\nu} - \frac{1}{2}(\rho_R - \mathcal{P})g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\rho_R - 3\mathcal{P})v_{\mu}v_{\nu} + F_{\mu}u_{\nu} + F_{\nu}u_{\mu}, \quad (1.8)$$

donde las variables materiales medidas por un observador comóvil Minkowskiano con la materia son: densidad ρ , presión radial P y presión tangencial P_{\perp} ; mientras que las de radiación medidas también por este observador serán: densidad de radiación ρ_R , presión de radiación, \mathcal{P} y flujo de radiación, f . Es importante señalar que estas últimas se expresan como los momentos de la intensidad específica del campo de radiación, $\mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu)$ –medida en un punto r y en un tiempo t , viajando en la dirección \vec{n} , con una frecuencia ν – y para el caso de simetría esférica pueden ser escritas como [9, 10]:

$$\rho_R = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\nu \int_1^{-1} d\mu \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu), \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\nu \int_1^{-1} d\mu \mu \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu) \quad (1.9)$$

y

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\nu \int_1^{-1} d\mu \mu^2 \mathbf{I}(r, t; \vec{n}, \nu). \quad (1.10)$$

Finalmente, los cuadvectores que definen las expresiones para las componentes materiales (1.7) y radiativas (1.8) del tensor de energía pueden ser expresados como:

$$u_{\mu} = \gamma(e^{\nu}, -\omega e^{\lambda}, 0, 0), \quad v_{\mu} = \gamma(-\omega e^{\nu}, e^{\lambda}, 0, 0) \quad \text{y} \quad F_{\mu} = -\mathcal{F}\gamma(-\omega e^{\nu}, e^{\lambda}, 0, 0). \quad (1.11)$$

donde

$$\omega = \frac{dr}{dt} e^{\lambda - \nu}, \quad (1.12)$$

representa la velocidad radial del fluido en estas coordenadas y γ el factor de Lorentz $\gamma = (1 - \omega^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Las ecuaciones de Einstein $G_{\beta}^{\alpha} = -8\pi T_{\beta}^{\alpha}$ están definidas como

$$-e^{-2\lambda} \left(\frac{2\nu_1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi \left(\frac{\bar{P} + \omega^2 \bar{\rho} + 2\omega \mathcal{F}}{1 - \omega^2} \right), \quad (1.13)$$

$$\frac{e^{-\nu}}{4} [2\lambda_{00} + \lambda_0 (\lambda_0 - \nu_0)] - \frac{e^{-\lambda}}{4} \left[2\nu_{11} + \left(\nu_1 + \frac{2}{r} \right) (\nu_1 - \lambda_1) \right] = 8\pi P_{\perp}, \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{r^2} - e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda_1}{r} \right) = 8\pi \left(\frac{\bar{\rho} + \omega^2 \bar{P} + 2\omega \mathcal{F}}{1 - \omega^2} \right), \quad (1.15)$$

$$\frac{\lambda_0}{r} = -4\pi e^{\nu+\lambda} \left[\frac{(\bar{\rho} + \bar{P})\omega + \mathcal{F}(1 + \omega^2)}{1 - \omega^2} \right], \quad (1.16)$$

donde

$$\bar{\rho} = \rho + \rho_R, \quad \bar{P} = P + \mathcal{P}, \quad \bar{P}_{\perp} = P_{\perp} + \mathcal{P}_{\perp}, \quad \mathcal{P}_{\perp} = \frac{\rho_R - \mathcal{P}}{2}. \quad (1.17)$$

La función masa se define como [11]:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m(r, t)}{r}, \quad (1.18)$$

y se interpreta como la energía interior de una esfera de radio r , de aquí que se encuentre una gran utilidad escribir las ecuaciones de campo en términos de ella.

Las ecuaciones de Einstein en términos de está quedan escritas de la siguiente manera:

$$\nu_1 = \frac{4\pi r^3 \tilde{P} + m}{r(r - 2m)}, \quad (1.19)$$

$$8\pi \bar{P}_{\perp} = \left[\left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(\nu_{11} + (\nu_1)^2 + \frac{\nu_1}{r} \right) + \left(\frac{m}{r^2} - \frac{m_1}{r} \right) \left(\nu_1 + \frac{1}{r} \right) \right], \quad (1.20)$$

$$m_1 = 4\pi r^2 \tilde{\rho}, \quad (1.21)$$

$$m_0 = -\frac{4\pi r^2 e^{\nu-\lambda}}{1 + \omega^2} \left[\omega(\tilde{\rho} + \tilde{P}) + (1 - \omega^2)\mathcal{F} \right] \quad (1.22)$$

donde se han utilizado las variables efectivas $\tilde{\rho}$ y \tilde{P} , las cuales se relacionan con $\bar{\rho}$, \bar{P} y \mathcal{F} de la siguiente manera

$$\tilde{\rho} = \frac{\bar{\rho} + \bar{P}\omega^2 + 2\mathcal{F}\omega}{1 - \omega^2}, \quad (1.23)$$

$$\tilde{P} = \frac{\bar{\rho}\omega^2 + \bar{P} + 2\mathcal{F}\omega}{1 - \omega^2}. \quad (1.24)$$

Factores de Eddington

La ecuación de transporte relativista de Boltzmann es la ecuación base para estudiar las interrelaciones entre la materia y la radiación de un fluido en relatividad general, la solución a esta ecuación, acoplada a las ecuaciones de Einstein, aún en simetría esférica reviste una terrible dificultad. Pero más allá de su complejidad matemática, la mayor de las dificultades reside en la falta de información sobre el acoplamiento entre radiación y materia ultradensa [7, 12]. Una de las posibles estrategias para eludir esta dificultad, es resolver la ecuación de transporte relativista considerando al campo de radiación en dos posibles límites físicos razonables, los cuales describen una variedad de escenarios astrofísicos [10].

El límite de escape libre, en el cual la radiación (neutrinos y / o fotones) tiene un camino libre del orden de la dimensión del sistema, es decir que la radiación no interactúa con la materia. Para este caso se cumple que

$$\rho_R = \mathcal{F} = \mathcal{P} = \hat{e}. \quad (1.25)$$

El otro límite para el campo de radiación es el límite de difusión donde se considera que la radiación fluye con un camino libre medio mucho menor que la longitud característica del sistema. Dentro de este límite, la radiación es localmente isótropa y tenemos que

$$\rho_R = 3\mathcal{P} \quad \text{y} \quad \mathcal{F} = \hat{q}. \quad (1.26)$$

Por esta razón, para simular escenarios astrofísicos donde se tenga en cuenta la interacción entre radiación y materia, es necesario introducir un parámetro que varíe entre los límites mencionados anteriormente; con este fin se introduce el factor de flujo f y el factor variable de Eddington χ . En el caso unidimensional, los factores se relacionan con las variables de radiación como [13]:

$$f = \frac{\mathcal{F}}{\rho_R}, \quad (1.27)$$

$$\chi = \frac{\mathcal{P}}{\rho_R}. \quad (1.28)$$

Con estas definiciones, se puede recuperar los casos de escape libre y difusión para valores particulares de los parámetros:

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{P} = \frac{1}{3}\rho_R \Rightarrow f \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \chi = \frac{1}{3} \\ \mathcal{F} = \mathcal{P} = \rho_R \Rightarrow f = 1 \quad \text{y} \quad \chi = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq f \leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} \leq \chi(f) \leq 1 \quad (1.29)$$

Con el fin de “cerrar” este problema necesitamos establecer una relación entre f y χ . Es fácil percibir que tal relación podría existir y hay varias reportadas en la literatura (ver [14, 15] y referencias allí expuestas). En la Tabla 1.1 listamos las mas conocidas. Algunas de éstas son simplemente relaciones de tipo *ad hoc* que interpolan suavemente el campo de radiación entre los regímenes difusivo y de escape libre. Otras, se derivan de un principio de entropía máxima o de una dependencia angular dada para funciones de distribución radiativa. Incluso una de éstas ha sido motivada por cálculos de transporte directo.

Relación de cierre	$\chi(f)$	$\left. \frac{d\chi}{df} \right _{f=1}$	$\left. \frac{d\chi}{df} \right _{f=0}$
<i>Lorentz-Eddington</i> (LE)	$\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{4 - 3f^2}$	2	0
<i>Bowers-Wilson</i>	$\frac{1}{3}(1 - f + 3f^2)$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$
<i>Janka (Monte Carlo)</i> (MC)	$\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}f^{1,31} + \frac{3}{2}f^{4,13}\right)$	2,28	0
<i>Maximum Packing</i> (MP)	$\frac{1}{3}(1 - 2f + 4f^2)$	2	$-\frac{2}{3}$
<i>Minerbo</i> (Mi)	$\chi(f) = 1 - 2\frac{f}{\kappa}$ donde $f = \coth \kappa - \frac{1}{\kappa}$	2	0
<i>Levermore-Pomraning</i>	$\chi(f) = f \coth \beta$ donde $f = \coth \beta - \frac{1}{\beta}$	1	0

Cuadro 1.1: Relaciones de cierre y algunas restricciones de aceptabilidad física

Aproximación cuasi-estática

Se dice que la distribución material se encuentra en evolución lenta si ella cambia muy poco en una escala de tiempo comparada con el tiempo típico en el cual el sistema reacciona a una perturbación del equilibrio hidrostático (tiempo hidrostático). Con esto, la evolución de la distribución se puede ver como una secuencia de modelos en equilibrio hidrostático ligados a pesar de que tanto las variables como la métrica dependen del tiempo.

La suposición de evolución lenta no es tan descabellada como parece, puesto que el tiempo hidrostático para el sol es de alrededor de 27 minutos, para una enana blanca 4,5 segundos y 10^{-4} segundos para una estrella de neutrones de 1 masa solar y 10 Km de radio [11]. Además, se quiere que en la aproximación cuasi-estática los cambios temporales tanto de la métrica como de las variables sean tan pequeños para asegurar así que el sistema no se aleje de la condición de equilibrio

$$\mathcal{O}(\omega^2) = \lambda_{00} = (\lambda_0)^2 = \nu_0 \lambda_0 = 0. \quad (1.30)$$

A partir de (1.30) se observa que se deja al sistema tener cambios muy pequeños para que así pueda volver al equilibrio antes de volver a ser perturbado.

No obstante, cuando un objeto autogravitante se encuentra en una fase evolutiva de colapso espontáneo, es decir, cuando la actividad dinámica del sistema es del orden del tiempo hidrostático, la aproximación cuasi-estática no es aplicable y hay que considerar todos los términos despreciados para llevar un análisis completo fuera del equilibrio hidrostático.

Condiciones de acoplamiento y el formalismo de Newman-Penrose

Como se observa en 1.1, se evidencian tres regiones distintas de las cuales el núcleo es la región interna (Región *I*), la región intermedia (región *II*) representa el manto y la región externa representa el espacio vacío (región *III*). El núcleo y el manto se encuentran descritos cada uno mediante una solución interna de Schwarzschild, y es aquí donde se encuentra un interés físico, puesto que al acoplar las dos regiones se debe evitar la aparición de comportamientos singulares en las variables físicas. La región *I* y *II* pueden estar separadas por distintas superficies de acoplamiento como se verá en el siguiente capítulo (fronteras, ondas de choque, capas y choques impulsivos), y es en esta diferencia donde radica el enfoque principal de este trabajo. Para acoplar estas regiones es necesario que se cumplan ciertas condiciones conocidas como condiciones de acoplamiento.

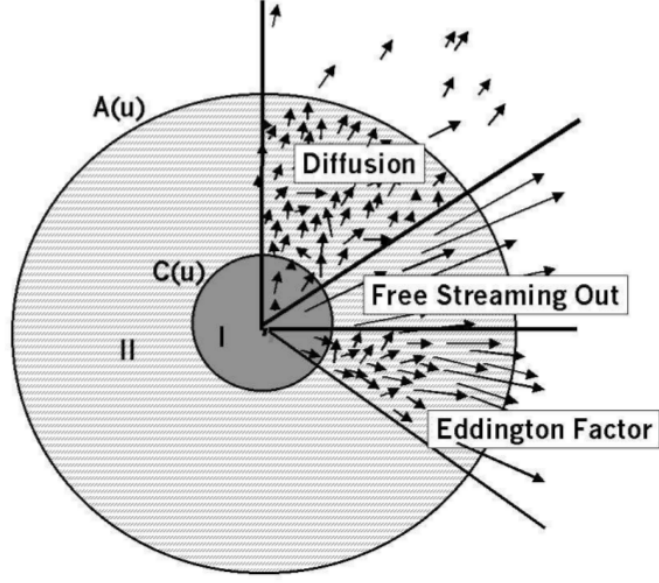


Figura 1.1: Regiones de distribución material. Los distintos esquemas de transporte de radiación son presentados (escape libre, difusión total y factores de Eddington). Imagen tomada de [1]

Las condiciones de acoplamiento fueron definidas de forma rigurosa por primera vez por G. Darmois [16]. De acuerdo a Darmois, para acoplar dos regiones del espacio-tiempo mediante una superficie es necesario que se cumpla que tanto la métrica inducida sobre ella como la derivada covariante de un vector normal a la hipersuperficie sean continuas a través de la misma.

Años después A. Lichnerowicz [17] propuso un conjunto alterno de condiciones de acoplamiento, y tal como lo demostraron W.B.Bonnor y P.A. Vickers [18] son equivalentes a las condiciones de Darmois. L. Herrera y J. Jiménez [5] propusieron unas condiciones equivalentes a Lichnerowicz (y por lo tanto a Darmois). Este conjunto de condiciones están escritas en el formalismo de Newman-Penrose (tétrada nula y coeficientes de espín).

El formalismo de Newman-Penrose consiste en reescribir la métrica en función de una tétrada de vectores n, l, m y \bar{m}

$$g_{\mu\nu} = n_{\mu}l_{\nu} + l_{\mu}n_{\nu} - m_{\mu}\bar{m}_{\nu} - \bar{m}_{\mu}m_{\nu}, \quad (1.31)$$

que satisfacen las siguientes condiciones de normalización y ortogonalización

$$l_{\mu}n^{\mu} = -m_{\mu}\bar{m}^{\mu} = 1$$

$$l_{\mu}l^{\mu} = n^{\mu}n_{\mu} = m^{\mu}m_{\mu} = \bar{m}_{\mu}\bar{m}^{\mu} = l_{\mu}m^{\mu} = l_{\mu}\bar{m}^{\mu} = n_{\mu}m^{\mu} = n_{\mu}\bar{m}^{\mu} = 0.$$

l_{μ} y n_{μ} son cuadvectores reales, mientras que m_{μ} es un cuadvector complejo y \bar{m}_{μ} su respectivo complejo conjugado.

A partir de (1.31) se pueden escribir los vectores de la tétrada nula como

$$l_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}e^\nu\delta_\mu^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^\lambda\delta_\mu^1, \quad (1.32)$$

$$n_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}e^\nu\delta_\mu^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^\lambda\delta_\mu^1, \quad (1.33)$$

$$m_\mu = \frac{r}{\sqrt{2}}\delta_\mu^2 + \frac{i}{\sqrt{2}}r\sin\theta\delta_\mu^3, \quad (1.34)$$

$$\bar{m}_\mu = \frac{r}{\sqrt{2}}\delta_\mu^2 - \frac{i}{\sqrt{2}}r\sin\theta\delta_\mu^3, \quad (1.35)$$

donde su respectiva forma contravariante se expresa como

$$l^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\nu}\delta_0^\mu - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda}\delta_1^\mu, \quad (1.36)$$

$$n^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\nu}\delta_0^\mu + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda}\delta_1^\mu, \quad (1.37)$$

$$m^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}\delta_2^\mu - \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{1}{r\sin\theta}\delta_3^\mu, \quad (1.38)$$

$$\bar{m}^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}\delta_2^\mu + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{1}{r\sin\theta}\delta_3^\mu. \quad (1.39)$$

Los coeficientes de espín para la métrica de Schwarzschild que son diferentes de cero y dependen tanto de la métrica como de sus derivadas son únicamente el coeficiente γ y ϵ :

$$\gamma = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\lambda_0e^{-\nu} + \nu_1e^{-\lambda}\right), \quad \epsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\lambda_0e^{-\nu} - \nu_1e^{-\lambda}\right). \quad (1.40)$$

Condiciones de Rankine-Hugoniot

La propagación de una superficie de discontinuidad está modelada mediante la continuidad de la primera y la segunda forma fundamental, sin embargo no son condiciones suficientes para describir la dinámica de las hipersuperficies. La propagación de una onda de choque requiere de un ingrediente adicional [19]: las condiciones de Rankine-Hugoniot y al igual que en la hidrodinámica newtoniana, las condiciones de Rankine-Hugoniot implican las leyes de conservación a través de la superficie de discontinuidad, tales como la conservación del momentum, la energía y la masa.

En forma compacta, se expresan las condiciones de Rankine-Hugoniot mediante la proyección del tensor de energía-impulso a lo largo de un vector unitario [19]:

$$[T_{\mu\nu}]n^\nu = 0. \quad (1.41)$$

En el caso de ondas de choque, se ha demostrado que a través de la utilización de las condiciones de Rankine-Hugoniot se obtiene información física del sistema.

J.Rueda y L.Núñez [1] demostraron que una estrella colapsando, en presencia de una solución interna de Schwarzschild y que disipa energía mediante un flujo radial de radiación, en donde el núcleo y el manto se encuentran separadas por una onda de choque, las condiciones de Rankine-Hugoniot son necesarias. Puesto que de estas condiciones se deriva la velocidad de propagación de la onda de choque en términos de las discontinuidades en la densidad y presión efectiva.

Si se analiza el mismo caso anterior, pero en coordenadas de radiación [20], las condiciones de Rankine-Hugoniot resultan de gran utilidad puesto que las soluciones de las ecuaciones de estado a ambos lados de la onda de choque son acopladas mediante ellas.

Capítulo 2

Superficies de discontinuidad

En el marco de la hidrodinámica de fluidos disipativos en Relatividad

General es común encontrarse con superficies que separan dos fluidos con distintas ecuaciones de estado y esquemas de transporte de radiación.

Dependiendo de la continuidad de las variables físicas a sobre la superficie y de su contenido material, las podemos catalogar como:

- **Superficies sin masa: Fronteras y Ondas de choque.**

- **Fronteras:** Son superficies, sin masa en las cuales la velocidad del fluido es continua y, por lo tanto, coincide con la velocidad de la superficie. Típicamente a través de este tipo de superficies, la presión, el flujo de radiación y la velocidad del fluido son continuas, mientras la densidad no lo es. Como la velocidad es continua, este tipo de frontera es impermeable, vale decir que no hay paso de fluido a través de la superficie.
- **Ondas de choque:** En este tipo de superficie también sin masa, la velocidad del fluido es discontinua y su valor, a ambos lados de la superficie, no coincide con la velocidad de la discontinuidad. Las variables físicas (presión, densidad, flujo de radiación) pueden o no ser continuas, lo que conlleva a clasificaciones ulteriores para las ondas de choque: choques de radiación, discontinuidades suaves, choques fuertes, por mencionar algunos [21]. Dado que la velocidad de la superficie no coincide con la velocidad del fluido a ambos lados, este tipo de superficies es permeable, y hay flujo de materia de un lado al otro.

- **Superficies con masa: Capas y Choques Impulsivos.**

- **Capas o cáscaras.** Son superficies con masa que separan dos fluidos con distintas ecuaciones de estado y en la cual la velocidad es continua. Son fronteras con masa, por lo tanto también son impermeables.
- **Choques impulsivos.** Al igual que las capas o cáscaras generalizan las fronteras al incorporarle un contenido material a la discontinuidad, los choques impulsivos son ondas de choque en los cuales la superficie tiene contenido material.

2.1. Choques impulsivos

Las ecuaciones de estado a ambos lados de una hipersuperficie son en general diferentes, y las soluciones de estas se acoplan mediante las condiciones de Rankine-Hugoniot. Si la superficie de discontinuidad tienen un contenido material incorporado, es decir, si las dos regiones se encuentran separadas por un choque impulsivo, se debe tener en cuenta que la segunda forma fundamental es discontinua [22], también la velocidad del fluido es discontinua a través de $r = c(t)$ y es en general diferente a la cual se propaga el choque. La primera forma fundamental se asume siempre continua.

A partir de la continuidad de la primera forma fundamental a través de la superficie $r = c(t)$, se acopla (1.2) a ambos lados de la superficie

$$e^{2\nu_+} dt_+^2 - e^{2\lambda_+} dr_+^2 = e^{2\nu_-} dt_-^2 - e^{2\lambda_-} dr_-^2, \quad (2.1)$$

si se utiliza (1.12), se obtiene

$$[e^{2\nu} (1 - \omega^2)]_c = 0, \quad (2.2)$$

donde (ya que la superficie $r = c(t)$ no es comóvil con el fluido)

$$c_0 \neq \left(\frac{dr}{dt} \right)_c, [\omega]_c \neq 0. \quad (2.3)$$

Si se escribe (1.40) en términos de (1.19) y (1.22) los coeficientes de espín adquieren la siguiente forma

$$\gamma = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{r} m_0 e^{2\lambda} e^{-\nu} + \frac{4\pi r^3 \tilde{P} + m}{r(r-2m)} e^{-\lambda} \right),$$

$$\epsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{r} m_0 e^{2\lambda} e^{-\nu} - \frac{4\pi r^3 \tilde{P} + m}{r(r-2m)} e^{-\lambda} \right).$$

Al sumarse y restarse los dos coeficientes de espín, evaluarse antes y después de $r = c(t)$ se obtiene

$$\left(\sqrt{2} [re^{-\nu} (\epsilon - \gamma)]_c \right) = [m_0 e^{2\lambda - \nu}]_c, \quad (2.4)$$

$$\sqrt{2} \left(\left[r \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \gamma \right]_c + \left[r \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \epsilon \right]_c \right) + \left[\frac{m}{r} \right]_c = [-4\pi r^2 \tilde{P}]_c. \quad (2.5)$$

Si se multiplica (2.4) antes de hacerse el salto por $c_0 e^{-\nu}$ y luego se suma con (2.5)

$$\left[m_0 c_0 e^{2(\lambda - \nu)} + 4\pi r^2 \tilde{P} \right]_{c(t)} = \sqrt{2} c_0 \left([re^{-\nu} \epsilon]_c - [re^{-\nu} \gamma]_c \right) - \sqrt{2} \left(\left[r \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \epsilon \right]_c - \left[r \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \gamma \right]_c \right) - \left[\frac{m}{r} \right]_c. \quad (2.6)$$

La ecuación anterior se define como una condición de Rankine-Hugoniot generalizada [22]. A partir de esta ecuación (como se verá mas adelante) si el salto en la segunda forma

fundamental es igual a cero, se genera las condiciones de Rankine-Hugoniot para una onda de choque.

Si la distribución se encuentra en evolución lenta, es decir que el tiempo hidrostático sea muy pequeño comparado con el tiempo que ésta reacciona a una perturbación, la aproximación cuasiestática es válida y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}c_0}{4\pi} \left(\left[\frac{e^{-\nu}\epsilon}{r} \right]_c - \left[\frac{e^{-\nu}\gamma}{r} \right]_c \right) - \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \left[\frac{\epsilon}{r} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c \\ - \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \left[\frac{\gamma}{r} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{m}{r^3} \right]_c = [\bar{P}]_{c(t)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Expandiendo la función masa alrededor del frente del choque, se obtiene una relación entre la derivada temporal y radial, y ésta implica el salto de la derivada temporal de la masa a través del choque impulsivo

$$[m_0]_c = \{[m]_c\}_0 - c_0 [m_1]_c, \quad (2.8)$$

al sustituir (1.21) en la ecuación anterior, se obtiene

$$[m_0 + 4\pi r^2 c_0 \tilde{\rho}]_c = \{[m]_c\}_0, \quad (2.9)$$

donde (2.9) se define como la otra condición de Rankine-Hugoniot generalizada.

2.2. Capas

Por otra parte, si la superficie de separación entre la región *I* y *II* (ver figura 1.1) [4,20] se propaga a la misma velocidad con la que se propaga el fluido $r = c(t)$ y tiene un contenido material, es decir que se encuentra separada por una capa, la continuidad de la primera forma fundamental resulta de acoplar la métrica (1.2) a ambos lados de la capa

$$[\nu]_c = 0, \quad (2.10)$$

donde (la capa es comóvil con el fluido)

$$c_0 = \left(\frac{dr}{dt} \right)_c, \quad [\omega]_c = 0 \quad \text{y} \quad c_0 = \omega e^{\nu-\lambda}. \quad (2.11)$$

Las ecuaciones (2.4) y (2.5) para una capa son

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}(1-\omega^2)}{4\pi c} \left(\left[\gamma \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c - \left[\epsilon \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c \right) = \\ [\bar{\rho}]_c \omega + [\bar{P}]_c \omega + (1 + \omega^2) [\mathcal{F}]_c, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\sqrt{2} \left(\left[\gamma \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c + \left[\epsilon \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c \right) = -4\pi r [\tilde{P}]_c, \quad (2.13)$$

o escrito en función de las variables $\bar{\rho}$, \bar{P} y \mathcal{F}

$$\frac{\sqrt{2}(1-\omega^2)}{4\pi c} \left(\left[\gamma \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c - \left[\epsilon \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c \right) = [\bar{\rho}]_c \omega + [\bar{P}]_c \omega + (1 + \omega^2) [\mathcal{F}]_c, \quad (2.14)$$

$$- \frac{\sqrt{2}(1-\omega^2)}{4\pi c} \left(\left[\gamma \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c + \left[\epsilon \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c \right) = [\bar{\rho}]_c \omega^2 + [\bar{P}]_c + 2\omega [\mathcal{F}]_c, \quad (2.15)$$

las ecuaciones anteriores, por lo tanto describen las restricciones físicas que deben cumplir las variables $\bar{\rho}$, \bar{P} y \mathcal{F} para la región interior y exterior así como el salto en los coeficientes de espín, los cuales indican el salto en la segunda forma fundamental.

Al igual que en los choques impulsivos, (2.14) se multiplica por ω y luego se suma con (2.15), con lo cual se obtiene

$$- \frac{\sqrt{2}}{4\pi c} \left(\left(\left[(\gamma - \epsilon) \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c \right) \omega + \left[(\gamma + \epsilon) \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c \right) = [\bar{P}]_c + \omega [\mathcal{F}]_c, \quad (2.16)$$

cabe resaltar el hecho que si $c_0 = \omega e^{\nu-\lambda}$ en las ecuaciones del choque impulsivo, se obtienen las ecuaciones dinámicas para una capa.

La otra ecuación que muestra la dinámica de la capa se halla haciendo una expansión en Taylor alrededor de m y luego derivando al igual que en el choque impulsivo para así encontrar el salto en la derivada temporal de la masa a través de la superficie

$$[m_0 + c_0 m_1]_c = \{[m]_c\}_0. \quad (2.17)$$

Si se utiliza las ecuaciones de Einstein (1.15) y (1.16) junto con la continuidad de la primera forma fundamental en la ecuación anterior, se obtiene como resultado

$$[\bar{P}]_c \omega + [\mathcal{F}]_c = \frac{1}{4\pi r (1 - \omega^2)} \left((m_+)_0 \left(1 - \frac{2m_+}{r} \right)^{-1/2} - (m_-)_0 \left(1 - \frac{2m_-}{r} \right)^{1/2} \right) e^{-\nu}, \quad (2.18)$$

por lo tanto, (2.16) y (2.18) son las condiciones de Rankine-Hugoniot generalizadas para una capa. Es decir, que a partir del formalismo de Newman-Penrose y la continuidad ν a través de una capa se obtienen la dinámica de estas últimas, escritas en forma de unas condiciones de Rankine-Hugoniot generalizadas.

Si se define ahora la función ζ de la siguiente manera

$$[\zeta]_c = \frac{\sqrt{2}}{4\pi c} \left(\left(\left[(\gamma - \epsilon) \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c - \right) \omega + \left[(\gamma + \epsilon) \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c \right). \quad (2.19)$$

A partir de las condiciones de Rankine-Hugoniot, se reemplaza (2.18) en (2.16) para así obtener los saltos tanto del flujo de radiación \mathcal{F} como en la presión hidrodinámica P en función del salto en ζ y m

$$[\mathcal{F}]_c = \frac{[\zeta]_c \omega}{1 - \omega^2} - \frac{1}{4\pi r (1 - \omega^2)} \left[(m_{c\pm})_0 \left(1 - \frac{2m_{c\pm}}{r} \right)^{-1/2} \right]_c e^{-\nu}, \quad (2.20)$$

$$[\bar{P}]_c = [\zeta] \left(1 - \frac{\omega^2}{1 - \omega^2} \right) + \frac{\omega}{4\pi r (1 - \omega^2)} \left[(m_{c\pm})_0 \left(1 - \frac{2m_{c\pm}}{r} \right)^{-1/2} \right]_c e^{-\nu}. \quad (2.21)$$

2.3. Ondas de choque

Para las ondas de choque a parte de la continuidad de la primera forma hay que agregar que la segunda forma fundamental también es continua, esto implica la continuidad del flujo de masa a través de la superficie [1]. Esto se traduce en el formalismo de Newman-Penrose como la continuidad de los coeficientes de espín y la función masa a través del acoplamiento

$$[\nu]_c = [\gamma]_c = [\epsilon]_c = [m]_c = 0. \quad (2.22)$$

Debido a que las ondas de choque resultan ser un caso especial de los choques impulsivos, las condiciones de Rankine-Hugoniot para las ondas de choque se deducen de estos últimos.

$$[m_0 + 4\pi r^2 \dot{c}\tilde{\rho}]_{c(t)} = 0, \quad (2.23)$$

$$[m_0 c_0 e^{2(\lambda-\nu)} + 4\pi r^2 \tilde{P}]_{c(t)} = 0. \quad (2.24)$$

Las ecuaciones anteriores son obtenidas mediante el formalismo de Newman-Penrose y son las mismas que se obtendrían por el método de Taub [1].

Si se expande la función masa en una serie de Taylor y se deriva para así encontrar la relación entre la derivada temporal y radial, se obtiene

$$[m_0]_c + c_0 [m_1]_c = [m_c]_0. \quad (2.25)$$

$$m_0 = -4\pi r^2 e^{\nu-\lambda} \left(\frac{(\bar{\rho} + \bar{P})\omega + (1 + \omega^2)\mathcal{F}}{1 - \omega^2} \right), \quad (2.26)$$

$$m_1 = 4\pi r^2 \left(\frac{\bar{\rho} + \bar{P}\omega^2 + 2\omega\mathcal{F}}{1 - \omega^2} \right). \quad (2.27)$$

Haciendo uso de las ecuaciones anteriores y de la continuidad de m , (2.25) es

$$\left[-4\pi r^2 e^{\nu-\lambda} \left(\frac{(\bar{\rho} + \bar{P})\omega + (1 + \omega^2)\mathcal{F}}{1 - \omega^2} \right) + 4\pi r^2 c_0 \left(\frac{\bar{\rho} + \bar{P}\omega^2 + 2\omega\mathcal{F}}{1 - \omega^2} \right) \right]_c = 0 \quad (2.28)$$

2.4. Fronteras

Las fronteras son una simplificación de una capa y por lo tanto el caso más sencillo de una superficie de acoplamiento que se propaga con una velocidad c_0 . La propagación de fronteras en distribuciones de materia que radían mediante un flujo radial de calor han sido ampliamente estudiadas [11], sin embargo en estos casos se ha estudiado este tipo de propagación usando proyecciones al tensor de energía. En este trabajo, a partir del formalismo de Newman-penrose se deducen las condiciones de Rankine-Hugoniot, que son iguales a las que se hallan mediante el método de Taub (apéndice B).

En la frontera la primera y segunda forma son continuas a través de ella, en el formalismo de Newman-Penrose es igual a

$$[\gamma]_c = [\epsilon]_c = [m]_c = 0, \quad (2.29)$$

por lo tanto, a partir de la capa se obtienen las dos ecuaciones para la frontera

$$[\bar{\rho}]_c \omega + [\bar{P}]_c \omega + (1 + \omega^2) [\mathcal{F}]_c = 0, \quad (2.30)$$

$$[\bar{\rho}]_c \omega^2 + [\bar{P}]_c + 2\omega [\mathcal{F}]_c = 0, \quad (2.31)$$

con lo que se obtiene

$$[\bar{P}]_c + \omega [\mathcal{F}]_c = 0, \quad (2.32)$$

La otra ecuación para la frontera, se halla de la misma forma que para la capa, puesto que la primera forma fundamental (continuidad de la métrica) es continua

$$[\bar{P}]_c \omega + [\mathcal{F}]_c = 0. \quad (2.33)$$

Nótese que (2.32) y (2.33) son las condiciones usuales de Rankine-Hugoniot para una frontera (la deducción de dichas condiciones por el método de Taub se muestran en el apéndice B).

Si se supone que la velocidad del fluido no es igual a la velocidad de la luz, de las condiciones de Rankine-Hugoniot se deduce que

$$[P]_c + [\mathcal{P}]_c = 0, \quad (2.34)$$

$$[\mathcal{F}]_c = 0, \quad (2.35)$$

a partir de (2.34) y (2.35), se puede hallar la relación entre el flujo de radiación (\mathcal{F}) y las demás variables físicas.

Capítulo 3

Ejemplos de régimen de escape libre y difusión total

Con el fin de cerrar el problema de las condiciones de acoplamiento, se presentan ahora dos casos representativos que ocurren al acoplar superficies: régimen de escape libre y difusión total en las dos regiones separadas por la superficie. En cada uno de dichos regímenes, los esquemas de transporte de radiación presentan unas características especiales que están definidas mediante valores específicos en los factores de Eddington. Para el límite de escape libre, cuando se supone que la radiación no interactúa con la materia, el valor de la presión de radiación es igual a la densidad de radiación, al flujo de radiación y la densidad de energía de radiación no polarizada ($\mathcal{P} = \rho_R = \mathcal{F} = \hat{\epsilon}$), esto conlleva a que el factor de flujo y el factor variable de Eddington a ambos lados de la superficie de separación sean iguales a la unidad $\chi = f = 1$. Para el límite de difusión total por el contrario se supone que el camino libre medio de la radiación es muy pequeña en comparación con las dimensiones del objeto autogravitante, esto conduce a que la radiación sea localmente isótropa, con lo que la relación entre la presión y la densidad de radiación esta dada mediante la ecuación de estado $\mathcal{P} = \frac{1}{3}\rho_R$, y debido a esto, los factores de Eddington adquieren el valor de $f = 0$ y $\chi = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, es necesario escribir la dinámica de cada superficie de acoplamiento en función de los factores de Eddington (1.28) y (1.27).

Choques impulsivos

Puesto que las ecuaciones de Einstein son válidas a ambos del choque impulsivo y estas relacionan las variables geométricas con las variables físicas, es necesario escribir (2.9) en términos de variables físicas de las cuales se puedan extraer información física de la distribución, en este caso en particular se utiliza para hallar el flujo de radiación \mathcal{F} antes

y después del choque de manera implícita en términos de las demás variables físicas

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathcal{F}_+}{1-\omega_+^2} \left(\frac{c_0}{f_+} (1+\chi_+\omega_+^2) + 2\omega_+c_0 - \frac{\omega_+e^{\nu-\lambda}}{f_+} (1+\chi_+) - (1+\omega_+^2)e^{\nu-\lambda} \right) - \\
& \frac{\mathcal{F}_-}{1-\omega_-^2} \left[\frac{c_0}{f_-} (1+\chi_-\omega_-^2) + 2\omega_-c_0 - \frac{\omega_-e^{\nu-\lambda}}{f_-} (1+\chi_-) - (1+\omega_-^2)e^{\nu-\lambda} \right] = \\
& -\frac{1}{1-\omega_+^2} \left[c_0(\rho_+ + P_+\omega_+^2) - \omega_+e^{\nu-\lambda}(\rho_+ + P_+) \right] + \\
& \frac{1}{1-\omega_-^2} \left[c_0(\rho_- + P_-\omega_-^2) - \omega_-e^{\nu-\lambda}(\rho_- + P_-) \right] - \{[m]_c\}_0, \tag{3.1}
\end{aligned}$$

puesto que se considera al objeto autogravitante en evolución lenta, (3.1) se transforma a

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathcal{F}_+}{f_+} \left(c_0 - \omega_+e^{\nu-\lambda}(1+\chi_+) - f_+e^{\nu-\lambda} \right) - \frac{\mathcal{F}_-}{f_-} \left(c_0 - \omega_-e^{\nu-\lambda}(1+\chi_-) - f_-e^{\nu-\lambda} \right) \\
& -c_0(\rho_- - \rho_+) - \omega_+e^{\nu-\lambda}(\rho_+ + P_+) + \omega_-e^{\nu-\lambda}(\rho_- + P_-) - \{[m]_c\}_0 = 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si se evalúa (2.7) antes y después del choque en el régimen cuasi-estático se obtiene de manera implícita el flujo de radiación \mathcal{F}

$$\frac{\sqrt{2}c_0}{4\pi} \left(\left[\frac{e^{-\nu}\epsilon}{r} \right]_c - \left[\frac{e^{-\nu}\gamma}{r} \right]_c \right) - \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \left(\left[\frac{\epsilon}{r} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c - \left[\frac{\gamma}{r} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c \right) - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{m}{r^3} \right]_c^{+P_- - P_+} = \frac{\mathcal{F}_+\chi_+}{f_+} - \frac{\mathcal{F}_-\chi_-}{f_-}. \tag{3.2}$$

Con esto se obtienen dos ecuaciones, a partir de las cuales se puede despejar la diferencia del flujo de radiación a través de $r = c(t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_- &= \frac{f_+}{\chi_+} ([\kappa]_c - [P]_c) \\
&+ \frac{c_0(\rho_- - \rho_+) + [\omega e^{\nu-\lambda}(\rho + P)]_c + \{[m]_c\}_0}{G} \left(\frac{\chi_-}{\chi_+} f_+ - f_- \right) \\
&- \frac{\left(\frac{[\kappa]_c}{\chi_+} + \frac{P_- - P_+}{\chi_+} \right) (c_0 - \omega_+e^{\nu-\lambda}(1+\chi_+) + f_+e^{\nu-\lambda})}{G} \left(\frac{\chi_-}{\chi_+} f_+ - f_- \right),
\end{aligned}$$

donde G es igual a

$$G = \frac{\chi_-}{\chi_+} \left(c_0 - \omega_+e^{\nu-\lambda}(1+\chi_+) + f_+e^{\nu-\lambda} \right) - \left(c_0 - \omega_-e^{\nu-\lambda}(1+\chi_-) + f_-e^{\nu-\lambda} \right).$$

La función κ es por lo tanto igual a

$$[\kappa]_c = \frac{\sqrt{2}c_0}{4\pi} \left(\left[\frac{e^{-\nu}\epsilon}{r} \right]_c - \left[\frac{e^{-\nu}\gamma}{r} \right]_c \right) - \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \left(\left[\frac{\epsilon}{r} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c - \left[\frac{\gamma}{r} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2} \right]_c \right) - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{m}{r^3} \right]_c, \tag{3.3}$$

el significado de $[\kappa]_c$ es asociar la discontinuidad en la segunda forma fundamental en una misma ecuación.

Capas

Para las capas, también se pueden utilizar los factores de Eddington en las ecuaciones (2.20) y (2.21), estas por lo tanto son

$$\begin{aligned}
 P_+ - P_- + \mathcal{F}_- \left(\frac{\chi_+}{f_+} - \frac{\chi_-}{f_-} \right) &= [\zeta] \left(1 - \frac{\omega^2}{1 - \omega^2} \right) + \\
 \frac{\omega}{4\pi r (1 - \omega^2)} \left[(m_{c\pm})_0 \left(1 - \frac{2m_{c\pm}}{r} \right)^{-1/2} \right]_c e^{-\nu} &- \\
 \left(\frac{[\zeta]_c \omega}{1 - \omega^2} - \frac{1}{4\pi r (1 - \omega^2)} \left[(m_{c\pm})_0 \left(1 - \frac{2m_{c\pm}}{r} \right)^{-1/2} \right]_c e^{-\nu} \right) \frac{\chi_+}{f_+}. &
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ondas de choque

Si se evalúa (2.24) en la región posterior del choque ($r = c_+$) y se utilizan los factores de Eddington (1.27) y (1.28) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathcal{F}_+}{1 - \omega_+^2} \left(\frac{c_0}{f_+} (1 + \chi_+ \omega_+^2) + 2\omega_+ c_0 - \frac{\omega_+ e^{\nu-\lambda}}{f_+} (1 + \chi_+) - (1 + \omega_+^2) e^{\nu-\lambda} \right) + \\
 \frac{1}{1 - \omega_+^2} \left(c_0 (\rho_+ + P_+ \omega_+^2) - \omega_+ e^{\nu-\lambda} (\rho_+ + P_+) \right) &= \frac{(m_+)_0}{4\pi c_+}, \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Para la región interior se hace el mismo procedimiento, hasta llegar a una solución similar que en (3.5)

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathcal{F}_-}{1 - \omega_-^2} \left(\frac{c_0}{f_-} (1 + \chi_- \omega_-^2) + 2\omega_- c_0 - \frac{\omega_- e^{\nu-\lambda}}{f_-} (1 + \chi_-) - (1 + \omega_-^2) e^{\nu-\lambda} \right) + \\
 \frac{1}{1 - \omega_-^2} \left(c_0 (\rho_- + P_- \omega_-^2) - \omega_- e^{\nu-\lambda} (\rho_- + P_-) \right) &= \frac{(m_-)_0}{4\pi c_-}, \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

si se resta (3.5) y (3.6) se obtiene (3.7), donde se ha tenido en cuenta que $r = c_+ = c_-$ y $[m]_c = 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathcal{F}_+}{1 - \omega_+^2} \left(\frac{c_0}{f_+} (1 + \chi_+ \omega_+^2) + 2\omega_+ c_0 - \frac{\omega_+ e^{\nu-\lambda}}{f_+} (1 + \chi_+) - (1 + \omega_+^2) e^{\nu-\lambda} \right) - \\
 \frac{\mathcal{F}_-}{1 - \omega_-^2} \left(\frac{c_0}{f_-} (1 + \chi_- \omega_-^2) + 2\omega_- c_0 - \frac{\omega_- e^{\nu-\lambda}}{f_-} (1 + \chi_-) - (1 + \omega_-^2) e^{\nu-\lambda} \right) = \\
 -\frac{1}{1 - \omega_+^2} \left(c_0 (\rho_+ + P_+ \omega_+^2) - \omega_+ e^{\nu-\lambda} (\rho_+ + P_+) \right) + \\
 \frac{1}{1 - \omega_-^2} \left(c_0 (\rho_- + P_- \omega_-^2) - \omega_- e^{\nu-\lambda} (\rho_- + P_-) \right), \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

en la aproximación cuasiestática, se pueden utilizar la ecuación de flujo junto con la segunda condición de Rankine-Hugoniot.

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathcal{F}_+}{f_+} \left(c_0 - \omega_+ e^{\nu-\lambda} (1 + \chi_+) - f_+ e^{\nu-\lambda} \right) - \frac{\mathcal{F}_-}{f_-} \left(c_0 - \omega_- e^{\nu-\lambda} (1 + \chi_-) - f_- e^{\nu-\lambda} \right) \\
 = c_0 (\rho_- - \rho_+) + \omega_+ e^{\nu-\lambda} (\rho_+ + P_+) - \omega_- e^{\nu-\lambda} (\rho_- + P_-), \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_- = \frac{\mathcal{F}_+\chi_+}{f_+} - \frac{\mathcal{F}_-\chi_-}{f_-} = P_- - P_+. \quad (3.9)$$

Con esto tenemos dos ecuaciones cuya solución es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_- &= \frac{f_+}{\chi_+} (P_- - P_+) + \frac{c_0(\rho_- - \rho_+) + \omega_+ e^{\nu-\lambda}(\rho_+ + P_+)}{G} \left(\frac{\chi_-}{\chi_+} f_+ - f_- \right) \\ - \frac{\omega_- e^{\nu-\lambda}(\rho_- + P_-) - \frac{P_- - P_+}{\chi_+} (c_0 - \omega_+ e^{\nu-\lambda}(1 + \chi_+) + f_+ e^{\nu-\lambda})}{G} \left(\frac{\chi_-}{\chi_+} f_+ - f_- \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde G ya ha sido definido anteriormente para los choques impulsivos.

Fronteras

Si se quiere interpolar el campo de radiación para una frontera, se utilizan los factores de Eddington con el fin de eliminar tanto la presión como la densidad de radiación.

Al reemplazar (1.28) en (2.34), se obtiene

$$\left[P + \frac{\mathcal{F}\chi}{f} \right]_c = 0, \quad (3.11)$$

$$\left(P + \frac{\mathcal{F}\chi}{f} \right)_{II} - \left(P + \frac{\mathcal{F}\chi}{f} \right)_I = 0, \quad (3.12)$$

$$P_{II} - P_I + \frac{\mathcal{F}_{II}\chi_{II}}{f_{II}} - \frac{\mathcal{F}_I\chi_I}{f_I} = 0, \quad (3.13)$$

teniendo en cuenta que $[\mathcal{F}]_a = 0$, por lo tanto $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_- = \mathcal{F}$.

$$P_{II} - P_I + \mathcal{F} \left(\frac{\chi_{II}}{f_{II}} - \frac{\chi_I}{f_I} \right) = 0. \quad (3.14)$$

Ahora hay que revisar los diferentes casos que se pueden presentar, con el fin de conocer el comportamiento de las fronteras en ciertos límites de radiación y con esto las restricciones que se encuentran presentes.

Límite de escape libre para las diferentes superficies de acoplamiento

Región interior y exterior en el límite de escape libre para un choque impulsivo

Para la situación en la cual las dos regiones (interior y exterior) se encuentran en el límite de escape libre $f = \chi = 1$, se obtiene la siguiente relación entre las variables físicas

$$[\mathcal{F}]_c + [\bar{P}]_c = [\kappa]_c, \quad (3.15)$$

donde κ se ha definido anteriormente.

Con lo cual se demuestra que si el coeficiente κ es nulo, la relación entre el flujo de radiación y la presión total a través de la superficie de discontinuidad es la misma que para una onda de choque.

Para el caso en que κ sea diferente de cero es necesario hallarlo, para dar explícitamente el valor del salto en los coeficientes de espín.

Región interior y exterior en el límite de escape libre para una capa

En el límite de escape libre tanto para la región interior como exterior en una capa, la radiación no interactúa con la materia, es decir, que los factores de Eddington son iguales a la unidad $\chi = f = 1$. Si se evalúa en la aproximación cuasiestática, (3.4) es

$$P_+ - P_- = [\zeta] + \frac{\omega}{4\pi r} \left((m_+)_0 \left(1 - \frac{2m_+}{r}\right)^{-1/2} - (m_-)_0 \left(1 - \frac{2m_-}{r}\right)^{1/2} \right) e^{-\nu} - \left([\zeta]_c \omega - \frac{1}{4\pi r} \left((m_+)_0 \left(1 - \frac{2m_+}{r}\right)^{-1/2} - (m_-)_0 \left(1 - \frac{2m_-}{r}\right)^{1/2} \right) e^{-\nu} \right), \quad (3.16)$$

donde se puede apreciar que para el caso de escape libre a ambos lados de la capa, la discontinuidad en la presión hidrodinámica depende de la discontinuidad en las derivadas de la métrica y en el salto de masa. En el caso de escape libre en las dos regiones separadas por una capa, el flujo de radiación no altera la dinámica del sistema.

Región interior y exterior en el límite de escape libre para una onda de choque

Al igual que en la frontera, en el límite de escape libre los factores son iguales a la unidad. Con esto (3.10) se convierte en

$$\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_- = P_- - P_+. \quad (3.17)$$

En forma más compacta, la ecuación anterior queda

$$[\mathcal{F}]_c + [P]_c = 0. \quad (3.18)$$

En el límite de escape libre, se observa que el flujo sobre la onda de choque se equilibra con la presión hidrodinámica.

Región interior y exterior en el límite de escape libre para una frontera

Este es el caso más simple de analizar, y es en el cual la radiación no interacciona con la materia que la rodea. En este límite, los factores de Eddington tienen un valor específico $\chi = f = 1$, si tanto la región interior como la exterior se encuentran en este límite el flujo de radiación se anula y solo sobrevive por lo tanto la presión hidrodinámica a ambos lados de la superficie de separación

$$P_{II} = P_I. \quad (3.19)$$

Régimen de difusión total para las diferentes superficies de acoplamiento

Región interior y exterior en el límite de difusión total para un choque impulsivo

En el límite de difusión total, la presión es isotrópica $\bar{P} = \bar{P}_\perp$ y tener una ecuación de estado de la forma $\mathcal{P} = \frac{1}{3}\rho R$. Un método para analizar el régimen de difusión total consiste en

utilizar la ecuación de estado, la diferencia de flujo de radiación usando esta ecuación de estado es

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_- = & -P_+ \left(3\dot{c}e^{\lambda+\nu+} + \omega_+ \right) + P_- \left(3\dot{c}e^{\lambda-\nu-} + \omega_- \right) + \rho_+ \left(\dot{c}e^{\lambda+\nu+} - \omega_+ \right) \\ & - \rho_- \left(\dot{c}e^{\lambda-\nu-} - \omega_- \right) - 4(\omega_+ \mathcal{P}_+ - \omega_- \mathcal{P}_-) + 3\dot{c} \left[e^{\lambda-\nu} \kappa \right]_c - \{[m]_c\}_0. \end{aligned}$$

Se puede analizar para el choque impulsivo el caso en el que la velocidad del fluido es continua en la dos regiones separadas por dicha discontinuidad $[\omega]_c = 0$ pero $\omega \neq c_0$, es decir, en este caso la velocidad del fluido a ambos lados del choque es la misma pero la velocidad a la que se propaga la discontinuidad es diferente, lo cual conserva la definición de choque impulsivo.

Debido a que el flujo de radiación en el límite de difusión total es igual al flujo de calor, (3.20) se convierte por lo tanto

$$q_+ - q_- = 3c_0 \left[Pe^{\lambda-\nu} \right]_c + 3[P]_c \omega + c_0 \left[\rho e^{\lambda-\nu} \right] - \omega [\rho] - \{[m]_c\}_0 + 3c_0 \left[e^{\lambda-\nu} \kappa \right]_c,$$

si se analiza el caso en que $q_+ - q_- > 0$, se obtiene

$$3c_0 \left[Pe^{\lambda-\nu} \right]_c + 3[P]_c \omega + c_0 \left[\rho e^{\lambda-\nu} \right] - \omega [\rho] - \{[m]_c\}_0 + 3c_0 \left[e^{\lambda-\nu} \kappa \right]_c > 0,$$

$$3c_0 \left[Pe^{\lambda-\nu} \right]_c + 3[P]_c \omega < c_0 \left[\rho e^{\lambda-\nu} \right] - \omega [\rho] - \{[m]_c\}_0 + 3c_0 \left[e^{\lambda-\nu} \kappa \right]_c.$$

Debido a los términos de discontinuidad en la métrica y en sus derivadas, no se puede despejar la velocidad del choque impulsivo a un lado y en el otro lado los términos asociados a la hidrodinámica del fluido y a la parte geométrica.

Si el choque impulsivo es “transparente”, el flujo de calor que lo atraviesa es nulo y se obtiene

$$3c_0 \left[Pe^{\lambda-\nu} \right]_c + 3[P]_c \omega + c_0 \left[\rho e^{\lambda-\nu} \right] - \omega [\rho] = \{[m]_c\}_0 - 3c_0 \left[e^{\lambda-\nu} \kappa \right]_c,$$

$$c_0 \left[(3P + \rho) e^{\lambda-\nu} \right]_c + \omega [3P - \rho]_c = \{[m]_c\}_0 - 3c_0 \left[e^{\lambda-\nu} \kappa \right]_c. \quad (3.20)$$

La transparencia del choque impulsivo es compatible con la presencia de fenómenos superficiales [22].

Región interior y exterior en el régimen de difusión total para una capa

El caso contrario a escape libre se denomina de difusión total, y es en el cual la radiación se encuentra atrapada y por lo tanto su camino libre medio es muy pequeño comparado con las dimensiones del objeto autogravitante. Al utilizarse la ecuación de estado $\mathcal{P} = \frac{1}{3}\rho R$, se obtiene que no es posible analizar puesto que las condiciones de Rankine-Hugoniot no dependen de la densidad y esto lleva a que no se pueda utilizar este método.

Región interior y exterior en el caso de difusión total para una onda de choque

Debido a la discontinuidad existente en el factor de flujo cuando está igualado a cero, es necesario analizar el límite de difusión para una onda de choque utilizando la ecuación de estado $\mathcal{P} = (1/3)\rho_R$ ya que el sistema presenta anisotropía local.

Dejando (3.8) y (3.9), en términos de la densidad y presión de radiación se obtiene respectivamente

$$\begin{aligned} & \rho_{R+}c_0 - (\omega_+\rho_{R+} + \omega_+\mathcal{P}_+) e^{\nu-\lambda} - \mathcal{F}_+e^{\nu-\lambda} - \\ & \left(\rho_{R-}c_0 - (\omega_-\rho_{R-} + \omega_-\mathcal{P}_-) e^{\nu-\lambda} - \mathcal{F}_-e^{\nu-\lambda} \right) = \\ & c_0(\rho_- - \rho_+) + \omega_+e^{\nu-\lambda}(\rho_+ + P_+) - \omega_-e^{\nu-\lambda}(\rho_- + P_-), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_- = P_- - P_+, \quad (3.22)$$

a partir de estas ecuaciones se puede despejar la diferencia de flujo entre la superficie de acoplamiento

$$\begin{aligned} & -(\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_-) e^{\nu-\lambda} = -c_0(\rho_{R+} - \rho_{R-}) + \\ & e^{\nu-\lambda}(\omega_+\rho_{R+} - \omega_-\rho_{R-} + \omega_+\mathcal{P}_+ - \omega_-\mathcal{P}_-) \\ & + c_0(\rho_- - \rho_+) + \omega_+e^{\nu-\lambda}(\rho_+ + P_+) - \omega_-e^{\nu-\lambda}(\rho_- + P_-). \end{aligned} \quad (3.23)$$

En el límite de difusión total $\mathcal{P} = \frac{1}{3}\rho_R$ o lo que es equivalente $3\mathcal{P} = \rho_R$, con esto la ecuación anterior se convierte en

$$\begin{aligned} & -(\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_-) e^{\nu-\lambda} = -\dot{c}(3\mathcal{P}_+ - 3\mathcal{P}_-) + \\ & e^{\nu-\lambda}(3\omega_+\mathcal{P}_+ - 3\omega_-\mathcal{P}_- + \omega_+\mathcal{P}_+ - \omega_-\mathcal{P}_-) \\ & + \dot{c}(\rho_- - \rho_+) + \omega_+e^{\nu-\lambda}(\rho_+ + P_+) - \omega_-e^{\nu-\lambda}(\rho_- + P_-), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & -(\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_-) e^{\nu-\lambda} = -3c_0(\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-) + 4e^{\nu-\lambda}(\omega_+\mathcal{P}_+ - \omega_-\mathcal{P}_-) \\ & + c_0(\rho_- - \rho_+) + \omega_+e^{\nu-\lambda}(\rho_+ + P_+) - \omega_-e^{\nu-\lambda}(\rho_- + P_-). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Utilizando (3.22), (3.25) queda

$$\begin{aligned} & -(\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_-) e^{\nu-\lambda} = -3c_0(P_- - P_+) + 4e^{\nu-\lambda}(\omega_+\mathcal{P}_+ - \omega_-\mathcal{P}_-) \\ & + c_0(\rho_- - \rho_+) + \omega_+e^{\nu-\lambda}(\rho_+ + P_+) - \omega_-e^{\nu-\lambda}(\rho_- + P_-), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_- = -3c_0(P_- - P_+) e^{\lambda-\nu} - 4(\omega_+\mathcal{P}_+ - \omega_-\mathcal{P}_-) \\ & - c_0(\rho_- - \rho_+) e^{\lambda-\nu} - \omega_+(\rho_+ + P_+) + \omega_-(\rho_- + P_-), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_- = -P_+ \left(3c_0e^{\lambda-\nu} + \omega_+ \right) + P_- \left(3c_0e^{\lambda-\nu} + \omega_- \right) + \\ & \rho_+ \left(c_0e^{\lambda-\nu} - \omega_+ \right) - \rho_- \left(c_0e^{\lambda-\nu} - \omega_- \right) - 4\omega_+\mathcal{P}_+ + 4\omega_-\mathcal{P}_-, \end{aligned} \quad (3.28)$$

por último, en el límite de difusión total, la diferencia del flujo de radiación es igual a la diferencia entre el flujo de calor que atraviesa la onda de choque

$$q_+ - q_- = -P_+ \left(3c_0 e^{\lambda-\nu} + \omega_+ \right) + P_- \left(3c_0 e^{\lambda-\nu} + \omega_- \right) + \rho_+ \left(c_0 e^{\lambda-\nu} - \omega_+ \right) - \rho_- \left(c_0 e^{\lambda-\nu} - \omega_- \right) - 4\omega_+ \mathcal{P}_+ + 4\omega_- \mathcal{P}_-. \quad (3.29)$$

De (3.29) se desprende que si la velocidad del choque se reduce a la velocidad con la que se mueve el fluido desaparecen los términos de densidad y se reduce a una frontera si la diferencia entre el flujo saliente y el entrante es el mismo.

En el límite de difusión total, donde el flujo de radiación es igual al flujo de calor que atraviesa la onda de choque ($\mathcal{F} = q$), se puede analizar el caso en el que la velocidad hidrodinámica del fluido (ω) sea la misma tanto para la región interior como la exterior, teniendo en cuenta que dicha velocidad por supuesto es diferente a la velocidad con la cual se propaga la onda de choque

$$c_0 \neq \left(\frac{dr}{dt} \right)_c, \quad [\omega]_c = 0. \quad (3.30)$$

A partir de (3.29) y (3.30) se obtiene

$$q_+ - q_- = -P_+ \left(3c_0 e^{\lambda-\nu} + \omega \right) + P_- \left(3c_0 e^{\lambda-\nu} + \omega \right) + \rho_+ \left(c_0 e^{\lambda-\nu} - \omega \right) - \rho_- \left(c_0 e^{\lambda-\nu} - \omega \right) - 4\omega \mathcal{P}_+ + 4\omega \mathcal{P}_-, \quad (3.31)$$

$$q_+ - q_- = -(P_+ - P_-) \left(3c_0 e^{\lambda-\nu} + \omega \right) + (\rho_+ - \rho_-) \left(c_0 e^{\lambda-\nu} - \omega \right) - 4\omega (\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-).$$

Utilizando (3.22) se puede escribir la diferencia de calor en función únicamente de variables hidrodinámicas

$$q_+ - q_- = 3(P_- - P_+) \left(c_0 e^{\lambda-\nu} + \omega \right) + (\rho_+ - \rho_-) \left(c_0 e^{\lambda-\nu} - \omega \right)$$

El salto del flujo de radiación en términos de los saltos en la presión y la densidad hidrodinámica es

$$[q] = c_0 e^{\lambda-\nu} [3P + \rho]_c + \omega [3P - \rho]. \quad (3.32)$$

Se observa que a diferencia del choque impulsivo, la tétrada y los coeficientes de espín son continuos a través de las ondas de choque. A partir de la ecuación anterior, se pueden analizar diversos casos que pueden ocurrir en el límite de difusión total para una onda de choque.

Si se desea que la diferencia de flujo que atraviesa la superficie de discontinuidad sea mayor que cero $q_+ - q_- > 0$, entonces debe cumplirse que

$$3(P_- - P_+) \left(c_0 e^{\lambda-\nu} + \omega \right) + (\rho_+ - \rho_-) \left(c_0 e^{\lambda-\nu} - \omega \right) > 0,$$

Si se separa a un lado el salto en las variables hidrodinámicas

$$\frac{P_+ - P_-}{\rho_+ - \rho_-} < \frac{1}{3} \left(\frac{c_0 e^{\lambda-\nu} - \omega}{c_0 e^{\lambda-\nu} + \omega} \right), \quad (3.33)$$

o escrito en una forma mas compacta

$$\frac{[P]_c}{[\rho]_c} < \frac{1}{3} \left(\frac{c_0 e^{\lambda-\nu} - \omega}{c_0 e^{\lambda-\nu} + \omega} \right) \quad (3.34)$$

A diferencia del choque impulsivo, en las ondas de choque se halla el cociente entre los saltos de presión y densidad de manera explícita.

Si la onda de choque es “transparente” ($[q] = 0$), la dinámica del choque está dada como

$$\frac{[P]_c}{[\rho]_c} = \frac{1}{3} \left(\frac{c_0 e^{\lambda-\nu} - \omega}{c_0 e^{\lambda-\nu} + \omega} \right). \quad (3.35)$$

Región interior y exterior en el régimen difusión total para una frontera

Además del límite de escape libre para el campo de radiación en la frontera existe el límite de difusión total. En el límite de difusión total la ecuación de estado para la radiación es $\mathcal{P} = \frac{1}{3}\rho_R$, Sin embargo esta información no se puede utilizar debido a que (2.34) no depende de la densidad de radiación.

Capítulo 4

Conclusiones

La falta de información del interior de objetos compactos representa una dificultad al momento de analizar los procesos que allí ocurren, de aquí que la dinámica de las superficies de acoplamiento que ocurren en el interior resulte ser de gran importancia, ya que a partir de éstas se logra un mejor entendimiento del comportamiento tanto de las variables físicas como geométricas y de las restricciones que deben cumplir.

En el presente trabajo se presentó las diferentes superficie de acoplamiento (choques impulsivos, capas, ondas de choque y fronteras) bajo un mismo esquema para una distribución material con una solución interna de Schwarzschild hallándose las condiciones de Rankine-Hugoniot generalizadas para cada superficie. Se evidencia que al hacer continua la masa en los choques impulsivos y en las capas no desaparece la discontinuidad en la segunda forma fundamental debido a que no desaparecen los coeficientes de espín ($[\gamma] \neq 0$ y $[\epsilon] \neq 0$), esto es debido a fenómenos superficiales [22]. Por este motivo, plantear las condiciones de Rankine-Hugoniot para cada superficie de separación y presentarlas de forma deductiva es un gran avance hacia el conocimiento de los procesos internos en las estrellas, ya que en ellas se encuentra de manera relacionada las restricciones en las variables geométricas y físicas

Adicionalmente, se halló la diferencia del flujo de radiación a través de las distintas superficies de acoplamiento, modelando el esquema de transporte de radiación mediante el uso de los factores de Eddington, teniendo en cuenta los límites físicos en que esta radiación se puede encontrar (escape libre y difusión total). Se propone realizar para trabajos futuros, los casos intermedios en las diferentes superficies de acoplamiento utilizando las diferentes relaciones de cierre $\chi = \chi(f)$ [14, 15].

Para el caso de difusión total donde la presión se comporta de manera isótropa, la ecuación de estado para la radiación es $\mathcal{P} = (1/3)\rho_R$. Bajo este régimen el flujo de radiación es igual al flujo de calor emitido ($\mathcal{F} = q$) por la distribución material. En los choques impulsivos y ondas de choque, se analizó esta diferencia de calor bajo la aproximación cuasiestática y a partir de esta diferencia, se analiza cuando las superficies son “transparentes o radiantes”. La transparencia del choque impulsivo es compatible con la presencia de fenómenos superficiales [22].

Bibliografía

- [1] L. Núñez *et al.*, “General relativistic radiant shock waves in the post-quasistatic approximation,” vol. 66, no. 1, p. 012042, 2007.
- [2] M. Jasim, Y. Gupta, S. Ray, D. Deb, and S. R. Chowdhury, “Anisotropic compact stars in general relativity,” *arXiv preprint arXiv:1801.10594*, 2018.
- [3] A. Ganguly, R. Gannouji, R. Goswami, and S. Ray, “Neutron stars in the starobinsky model,” *Physical Review D*, vol. 89, no. 6, p. 064019, 2014.
- [4] J. Ibanez and L. Herrera, “Juntion conditions on surface layers for radiating fluid spheres with heat flow,” *Physics Letters A*, vol. 138, pp. 487–518, 1989.
- [5] L. Herrera and J. Jiménez, “Junction conditions and the propagation of isometries in general relativity,” *Physical Review D*, vol. 28, no. 12, p. 2987, 1983.
- [6] M. Rampp and H.-T. Janka, “Radiation hydrodynamics with neutrinos-variable eddington factor method for core-collapse supernova simulations,” *Astronomy & Astrophysics*, vol. 396, no. 1, pp. 361–392, 2002.
- [7] C. Y. Cardall, E. Endeve, and A. Mezzacappa, “Conservative 3+ 1 general relativistic variable eddington tensor radiation transport equations,” *Physical Review D*, vol. 87, no. 10, p. 103004, 2013.
- [8] H. Bondi, “Massive spheres in general relativity,” in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 282, pp. 303–317, The Royal Society, 1964.
- [9] R. W. Lindquist, “Relativistic transport theory,” *Annals of Physics*, vol. 37, no. 3, pp. 487–518, 1966.
- [10] D. Mihalas and W. Mihalas, *Foundations of Radiation Hydrodynamics*. Oxford University Press, 1984.
- [11] L. H. Cometta, “Campos gravitacionales en la materia: La otra cara de la moneda,” *Escuela Venezolana de relatividad, campos y Astrofísica*, 1996.
- [12] E. Murchikova, E. Abdikamalov, and T. Urbatsch, “Analytic closures for m1 neutrino transport,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 469, no. 2, pp. 1725–1737, 2017.

- [13] A. Anile, S. Pennisi, and M. Sammartino, "A thermodynamical approach to eddington factors," *Journal of mathematical physics*, vol. 32, no. 2, pp. 544–550, 1991.
- [14] J. A. Pons, J. M. Ibáñez, and J. A. Miralles, "Hyperbolic character of the angular moment equations of radiative transfer and numerical methods," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 317, no. 3, pp. 550–562, 2000.
- [15] J. Smit, L. Van den Horn, and S. Bludman, "Closure in flux-limited neutrino diffusion and two-moment transport," *Astronomy and Astrophysics*, vol. 356, pp. 559–569, 2000.
- [16] G. Darmois, "Mémorial des sciences mathématiques," *Gauthier-Villars, Paris*, vol. 25, no. 1, 1927.
- [17] A. Lichnerowicz and T. Teichmann, "Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme," *Physics Today*, vol. 8, p. 24, 1955.
- [18] W. Bonnor and P. Vickers, "Junction conditions in general relativity," *General Relativity and Gravitation*, vol. 13, no. 1, pp. 29–36, 1981.
- [19] A. H. Taub, "Relativistic fluid mechanics," *Annual review of fluid mechanics*, vol. 10, no. 1, pp. 301–332, 1978.
- [20] L. Herrera and L. Núñez, "Propagation of a shock wave in a radiating spherically symmetric distribution of matter," *The Astrophysical Journal*, vol. 319, pp. 868–884, 1987.
- [21] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, "Fluid mechanics, volume 6 of course of theoretical physics," *Course of theoretical physics/by LD Landau and EM Lifshitz*, vol. 6, 1987.
- [22] L. Herrera and J. Ibáñez, "Junction conditions on surface layers for radiating fluid spheres with heat flow," *Physics Letters A*, vol. 138, no. 1-2, pp. 1–4, 1989.

Apéndice A

Coeficientes de espín para una métrica esféricamente simétrica

Debido a la dificultad de hallar explícitamente la discontinuidad de la segunda forma fundamental, se han propuesto diversas maneras de abordar este problema usando diferentes métodos. Uno de ellos es utilizar el formalismo de Newman-Penrose [20], donde se puede observar que la discontinuidad en los coeficientes de espín es igual a la discontinuidad en la segunda forma fundamental. A partir de esto, se procederá a calcular los coeficientes de espín para (1.2) que dependen tanto de la métrica como de sus derivadas.

Los únicos coeficientes que cumplen estas condiciones son γ y ϵ .

El coeficiente gamma escrito en función de los símbolos de Christoffel

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial l_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^k l_k \right) n^\mu n^\nu - \left(\frac{\partial \bar{m}_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^k \bar{m}_k \right) \bar{m}^\mu n^\nu \right]. \quad (\text{A.1})$$

Para la primera derivada covariante, la expansión es

$$l_{\mu;\nu} = \frac{\partial l_0}{\partial x^\nu} - \Gamma_{0\nu}^k l_k + \frac{\partial l_1}{\partial x^\nu} - \Gamma_{1\nu}^k l_k + \frac{\partial l_2}{\partial x^\nu} - \Gamma_{2\nu}^k l_k + \frac{\partial l_3}{\partial x^\nu} - \Gamma_{3\nu}^k l_k,$$

proyectando la derivada covariante a lo largo del vector n^μ

$$\begin{aligned}
l_{\mu;\nu}n^\mu n^\nu = & \left(\frac{\partial l_0}{\partial x^0} - \Gamma_{00}^k l_k \right) n^0 n^0 + \left(\frac{\partial l_0}{\partial x^1} - \Gamma_{01}^k l_k \right) n^0 n^1 + \\
& \left(\frac{\partial l_0}{\partial x^2} - \Gamma_{02}^k l_k \right) n^0 n^2 + \left(\frac{\partial l_0}{\partial x^3} - \Gamma_{03}^k l_k \right) n^0 n^3 + \\
& \left(\frac{\partial l_1}{\partial x^0} - \Gamma_{10}^k l_k \right) n^1 n^0 + \left(\frac{\partial l_1}{\partial x^1} - \Gamma_{11}^k l_k \right) n^1 n^1 + \\
& \left(\frac{\partial l_1}{\partial x^2} - \Gamma_{12}^k l_k \right) n^1 n^2 + \left(\frac{\partial l_1}{\partial x^3} - \Gamma_{13}^k l_k \right) n^1 n^3 + \\
& \left(\frac{\partial l_2}{\partial x^0} - \Gamma_{20}^k l_k \right) n^2 n^0 + \left(\frac{\partial l_2}{\partial x^1} - \Gamma_{21}^k l_k \right) n^2 n^1 + \\
& \left(\frac{\partial l_2}{\partial x^2} - \Gamma_{22}^k l_k \right) n^2 n^2 + \left(\frac{\partial l_2}{\partial x^3} - \Gamma_{23}^k l_k \right) n^2 n^3 + \\
& \left(\frac{\partial l_3}{\partial x^0} - \Gamma_{30}^k l_k \right) n^3 n^0 + \left(\frac{\partial l_3}{\partial x^1} - \Gamma_{31}^k l_k \right) n^3 n^1 + \\
& \left(\frac{\partial l_3}{\partial x^2} - \Gamma_{32}^k l_k \right) n^3 n^2 + \left(\frac{\partial l_3}{\partial x^3} - \Gamma_{33}^k l_k \right) n^3 n^3.
\end{aligned}$$

Debido a que el vector l_μ y n_μ solo tienen dos componentes, una en la dirección temporal y otra radial, hace que los cálculos se simplifiquen.

$$\begin{aligned}
l_{\mu;\nu}n^\mu n^\nu = & \left(\frac{\partial l_0}{\partial x^0} - \Gamma_{00}^k l_k \right) n^0 n^0 + \left(\frac{\partial l_0}{\partial x^1} - \Gamma_{01}^k l_k \right) n^0 n^1 + \\
& \left(\frac{\partial l_1}{\partial x^0} - \Gamma_{10}^k l_k \right) n^1 n^0 + \left(\frac{\partial l_1}{\partial x^1} - \Gamma_{11}^k l_k \right) n^1 n^1,
\end{aligned} \tag{A.2}$$

expandiendo ahora la sumatoria sobre k

$$\begin{aligned}
l_{\mu;\nu}n^\mu n^\nu = & \left(\frac{\partial l_0}{\partial x^0} - \Gamma_{00}^0 l_0 - \Gamma_{00}^1 l_1 \right) n^0 n^0 + \left(\frac{\partial l_0}{\partial x^1} - \Gamma_{01}^0 l_0 - \Gamma_{01}^1 l_1 \right) n^0 n^1 \\
& + \left(\frac{\partial l_1}{\partial x^0} - \Gamma_{10}^0 l_0 - \Gamma_{10}^1 l_1 \right) n^1 n^0 + \left(\frac{\partial l_1}{\partial x^1} - \Gamma_{11}^0 l_0 - \Gamma_{11}^1 l_1 \right) n^1 n^1,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
l_{\mu;\nu}n^\mu n^\nu = & \left(\frac{\partial l_0}{\partial x^0} - \nu_0 l_0 - e^{2(\nu-\lambda)} \nu_1 l_1 \right) n^0 n^0 + \left(\frac{\partial l_0}{\partial x^1} - \nu_1 l_0 - \lambda_0 l_1 \right) n^0 n^1 \\
& + \left(\frac{\partial l_1}{\partial x^0} - \nu_1 l_0 - \lambda_0 l_1 \right) n^1 n^0 + \left(\frac{\partial l_1}{\partial x^1} - \lambda_0 e^{2(\lambda-\nu)} l_0 - \lambda_1 l_1 \right) n^1 n^1,
\end{aligned}$$

donde se utilizó los siguientes símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{00}^0 = \nu_1, \Gamma_{00}^1 = e^{2(\nu-\lambda)}, \Gamma_{01}^0 = \nu_1, \Gamma_{01}^1 = \lambda_0, \Gamma_{11}^0 = \lambda_0 e^{2(\lambda-\nu)}, \Gamma_{11}^1 = \lambda_1. \tag{A.3}$$

Haciendo las respectivas derivadas parciales y sustituyendo

$$\begin{aligned}
l_{\mu;\nu}n^\mu n^\nu &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\nu_0 e^\nu - \frac{\sqrt{2}}{2}\nu_0 e^\nu - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{2(\nu-\lambda)}\nu_1 e^\lambda \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\nu} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\nu} \right) \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^\nu \nu_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^\nu \nu_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^\lambda \lambda_0 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\nu} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda} \right) \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^\lambda \lambda_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^\nu \nu_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^\lambda \lambda_0 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\nu} \right) \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^\lambda \lambda_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_0 e^{2(\lambda-\nu)}e^\nu - \frac{1}{\sqrt{2}}e^\lambda \lambda_1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda} \right). \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Con las respectivas simplificaciones

$$\begin{aligned}
l_{\mu;\nu}n^\mu n^\nu &= -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{2(\nu-\lambda)}e^\lambda \nu_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\nu} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\nu} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_0 e^\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\nu} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda} \right) \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}}e^\nu \nu_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\nu} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_0 e^{2(\lambda-\nu)}e^\nu \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\lambda} \right) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\lambda}\nu_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda_0 e^{-\nu} - \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-\lambda}\nu_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda_0 e^{-\nu} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^\lambda \nu_1 + \lambda_0 e^{-\nu} \right]. \tag{A.5}
\end{aligned}$$

Para el segundo término de γ , los calculos son los siguientes

$$m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu n^\nu = \left(\frac{\partial m_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^k m_k \right) \bar{m}^\mu n^\nu, \tag{A.6}$$

los únicos términos que sobreviven son los siguientes

$$\begin{aligned}
m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu n^\nu &= \left(\frac{\partial m_2}{\partial x^0} - \Gamma_{20}^k m_k \right) \bar{m}^2 n^0 + \left(\frac{\partial m_2}{\partial x^1} - \Gamma_{21}^k m_k \right) \bar{m}^2 n^1 + \left(\frac{\partial m_3}{\partial x^0} - \Gamma_{30}^k m_k \right) \bar{m}^3 n^0 \\
&+ \left(\frac{\partial m_3}{\partial x^1} - \Gamma_{31}^k m_k \right) \bar{m}^3 n^1, \\
m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu n^\nu &= \left(\frac{\partial m_2}{\partial x^0} - \Gamma_{20}^2 m_2 - \Gamma_{20}^3 m_3 \right) \bar{m}^2 n^0 + \left(\frac{\partial m_2}{\partial x^1} - \Gamma_{21}^2 m_2 - \Gamma_{21}^3 m_3 \right) \bar{m}^2 n^1
\end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{\partial m_3}{\partial x^0} - \Gamma_{30}^2 m_2 - \Gamma_{30}^3 m_3 \right) \bar{m}^3 n^0 + \left(\frac{\partial m_3}{\partial x^1} - \Gamma_{31}^2 m_2 - \Gamma_{31}^3 m_3 \right) \bar{m}^3 n^1.$$

Teniendo en cuenta los coeficientes Γ que sean cero se obtiene

$$m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu = \left(\frac{\partial m_2}{\partial x^1} - \Gamma_{21}^2 m_2 \right) \bar{m}^2 n^1 + \left(\frac{\partial m_3}{\partial x^1} - \Gamma_{31}^3 m_3 \right) \bar{m}^3 n^1,$$

por lo tanto

$$m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{r} \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \bar{m}^2 n^1 + \left(\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \theta - \frac{1}{r} \frac{i}{\sqrt{2}} r \sin \theta \right) \bar{m}^3 n^1 = 0.$$

De esta forma el coeficiente γ puede ser escrito como

$$\gamma = -\frac{1}{2\sqrt{2}} [e^{-\lambda} \nu_1 + \lambda_0 e^{-\nu}]. \quad (\text{A.7})$$

El coeficiente de spin ϵ se calcula de la misma forma que γ , dando como resultado

$$\epsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}} [\lambda_0 e^{-\nu} - \nu_1 e^{-\lambda}]. \quad (\text{A.8})$$

Apéndice B

Método de Taub para una frontera

Las condiciones de Rankine-Hugniot proviene de proyectar el tensor de energía-impulso a lo largo de un vector normal a la superficie de separación entre las dos regiones en las cuales se quiera analizar la conservación de la masa, impulso y energía. Para una frontera en la que se encuentra tanto variables radiativas como hidrodinámicas en el tensor de energía, las condiciones de Rankine-Hugniot son

$$[T_{\mu\nu}] n^\nu = [T_{\mu\nu}^M + T_{\mu\nu}^R] n^\nu = 0. \quad (\text{B.1})$$

La hipersuperficie se escribe en la forma

$$\Psi \equiv r - c(t) = 0, \quad (\text{B.2})$$

de esta manera un vector unitario normal a dicha superficie es

$$n_\mu^{(-)} = \frac{\partial_\mu \Psi}{(-\partial_\alpha \Psi \partial_\beta \Psi g^{\alpha\beta})^{1/2}}, \quad (\text{B.3})$$

donde $(-)$ indica que las componentes del vector están evaluadas en la región interna. A partir de (1.2), (B.2) y (B.3), se obtiene

$$n_\mu^{(-)} = \bar{\gamma}_{(-)} (-c_0 \delta_\mu^0 + \delta_\mu^1), \quad (\text{B.4})$$

donde

$$\bar{\gamma}_{(-)} = \frac{1}{\left(e^{-2\lambda_\Sigma} - [c_0(t)]^2 e^{-2\nu_\Sigma}\right)^{1/2}}. \quad (\text{B.5})$$

Si se quiere escribir el vector normal en forma contravariante, basta con utilizar la métrica

$$n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu = -\bar{\gamma}_{(-)} c_0(t) e^{-2\nu} \delta_0^\mu - \bar{\gamma}_{(-)} e^{-2\lambda} \delta_1^\mu, \quad (\text{B.6})$$

se define un vector unitario tipo tiempo

$$u_\mu^{(-)} = \gamma_{(-)} (e^{\nu_\Sigma} \delta_\mu^0 - \omega_\Sigma e^{\lambda_\Sigma} \delta_\mu^1), \quad (\text{B.7})$$

donde $\gamma_{(-)} = \frac{1}{(1-\omega_\Sigma^2)^{1/2}}$ es el factor de lorentz.

En forma contravariante, (B.7) se escribe como

$$u^\mu = \gamma_{(-)} (e^{-\nu_\Sigma} \delta_0^\mu + \omega_\Sigma e^{-\lambda_\Sigma} \delta_1^\mu), \quad (\text{B.8})$$

se define también un vector v_μ , tal que

$$v_\mu = \gamma (-\omega e^\nu \delta_\mu^0 + e^\lambda \delta_\mu^1), \quad (\text{B.9})$$

de esta forma, la proyección del tensor de energía asociado a la parte material (1.7) con el vector normal resulta

$$T_{\mu\nu}^M n^\mu n^\nu = [(\rho + P_\perp) u_\mu u_\nu - P_\perp g_{\mu\nu} + (P - P_\perp) v_\mu v_\nu] n^\mu \quad (\text{B.10})$$

$$= (\rho + P_\perp) u_\mu u_\nu n^\nu - P_\perp n^\mu + (P - P_\perp) v_\mu v_\nu n^\nu, \quad (\text{B.11})$$

debido a que se trata de una frontera, es decir, una superficie de acoplamiento en la cual la velocidad a la que se propaga el fluido tanto en la región interior como en la región exterior esta relacionada con la velocidad con la que se propaga la hipersuperficie de la siguiente forma $\omega = c_0 e^{\lambda-\nu}$, se pueden realizar las siguientes relaciones

$$u_\mu n^\mu = \gamma \bar{\gamma} (\omega - c_0(t)) = 0, \quad (\text{B.12})$$

$$n_\mu n^\mu = -1, \quad (\text{B.13})$$

$$v_\mu n^\mu = \gamma \bar{\gamma} (1 - \omega c_0) = -1, \quad (\text{B.14})$$

$$u_\mu v^\mu = \gamma [-\omega + \omega] = 0, \quad (\text{B.15})$$

de esta forma, (B.11) queda para la componente cero y uno como

$$T_{\mu\nu}^M n^\mu = P \omega e^\nu \delta_\mu^0 - P e^\lambda \delta_\mu^1. \quad (\text{B.16})$$

La contracción del tensor de energía asociado a la parte radiativa con el vector normal da

$$T_{\mu\nu}^R n^\nu = \left[\frac{1}{2} (3\rho_R - \mathcal{P}) u_\mu u_\nu - \frac{1}{2} (\rho_R - \mathcal{P}) g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\rho_R - 3\mathcal{P}) v_\mu v_\nu + F_\mu u_\nu + F_\nu u_\mu \right] n^\nu, \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^R n^\nu &= \frac{1}{2} (3\rho_R - \mathcal{P}) u_\mu u_\nu n^\nu - \frac{1}{2} (\rho_R - \mathcal{P}) g_{\mu\nu} n^\nu - \\ &\quad \frac{1}{2} (\rho_R - 3\mathcal{P}) v_\mu v_\nu n^\nu + F_\mu u_\nu n^\nu + F_\nu u_\mu n^\nu, \\ &= (\mathcal{P} \omega e^\nu + \mathcal{F} e^\nu) \delta_\mu^0 - (\mathcal{P} e^\lambda + \mathcal{F} \omega e^\lambda) \delta_\mu^1. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

En donde se han usado las relaciones (B.12), (B.13) y (B.14).

Luego de calcular las proyecciones de los tensores de Energía-Impulso tanto para la parte bariónica como para la parte radiativa, las condiciones de Rankine-Hugoniot son

$$[T_{\mu\nu}] n^\nu = (\bar{P} \omega e^\nu + \mathcal{F} e^\nu) \delta_\mu^0 - (\bar{P} e^\lambda + \mathcal{F} \omega e^\lambda) \delta_\mu^1 = 0. \quad (\text{B.19})$$

Con lo cual obtenemos las dos condiciones de Rankine-Hugoniot para una frontera

$$[\bar{P}]_c \omega + [\mathcal{F}]_c = 0, \quad (\text{B.20})$$

$$[\bar{P}]_c + \omega [\mathcal{F}]_c = 0. \quad (\text{B.21})$$

Las dos ecuaciones anteriores son las mismas que se hallaron mediante el formalismo de Newman-Penrose para una frontera.

Apéndice C

Transición de una onda de choque a una frontera

A partir de (3.7), se observa que si la velocidad con la cual se propaga la discontinuidad es igual a la velocidad que lleva el fluido, debe recuperarse la ecuación del flujo de radiación asociada a una frontera. Con esto, se procede a analizar el caso mas sencillo en el cual las dos regiones se encuentran en el límite de escape libre.

En el límite de escape libre y cuando la velocidad de la onda choque sea igual a la del fluido, es necesario usar las siguientes relaciones

$$\omega_+ = \omega_- = \omega, f_+ = f_- = \chi_+ = \chi_- = 1 \quad \text{y} \quad c_0 = \omega e^{\nu-\lambda}. \quad (\text{C.1})$$

Si eliminamos el subíndice + y - para simplicidad de cálculos.

Con esto (3.7), se convierte en

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{F}}{1-\omega^2} [\omega e^{\nu-\lambda} (1+\omega^2) + 2\omega^2 e^{\nu-\lambda} - \omega e^{\nu-\lambda} (2) - (1+\omega^2) e^{\nu-\lambda}] + \\ & \frac{1}{1-\omega^2} [\omega e^{\nu-\lambda} (\rho + P\omega^2) - \omega e^{\nu-\lambda} (\rho + P)] = \\ & \frac{\mathcal{F}}{1-\omega^2} [-\omega e^{\nu-\lambda} + \omega^3 e^{\nu-\lambda} + \omega^2 e^{\nu-\lambda} - e^{\nu-\lambda}] + \frac{1}{1-\omega^2} [\omega e^{\nu-\lambda} P(\omega^2 - 1)] = \\ & \frac{\mathcal{F}}{1-\omega^2} [e^{\nu-\lambda} (\omega^2 - 1) + e^{\nu-\lambda} \omega (\omega^2 - 1)] + \frac{1}{1-\omega^2} [\omega e^{\nu-\lambda} P(\omega^2 - 1)] = \\ & -\mathcal{F} [e^{\nu-\lambda} + \omega e^{\nu-\lambda}] - \omega e^{\nu-\lambda} P, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

utilizando la diferencia entre la región exterior e interior

$$\mathcal{F}_+ [e^{\nu-\lambda} + \omega e^{\nu-\lambda}] - \omega e^{\nu-\lambda} P_+ - \mathcal{F}_- [e^{\nu-\lambda} + \omega e^{\nu-\lambda}] - \omega e^{\nu-\lambda} P_- = 0, \quad (\text{C.4})$$

$$\mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_- + \mathcal{F}_+ \omega - \mathcal{F}_- \omega + P_+ \omega - P_- \omega = 0. \quad (\text{C.5})$$

Si el flujo de radiación en la región exterior es igual al de la región interior ($\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_-$)

$$P_+ - P_- = 0. \quad (\text{C.6})$$

Con la ecuación anterior, se demuestra que en el régimen de escape libre y con la velocidad a la cual se propaga la discontinuidad igual a la velocidad del fluido se obtiene (3.19).

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, se procede a calcular (3.7) en el régimen de escape libre para la región exterior y la interior modelada con factores de Eddington

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{F}}{1-\omega^2} \left[\frac{\omega}{f} (1 + \chi\omega^2) + 2\omega^2 - \frac{\omega}{f} (1 + \chi) - (1 + \omega^2) \right] + \frac{1}{1-\omega^2} [\omega P(\omega^2 - 1)] = \\ & \frac{\mathcal{F}}{1-\omega^2} \frac{1}{f} [\omega + \chi\omega^3 + 2\omega^2 f - \omega - \omega\chi - f - \omega^2 f] - \omega P = \\ & \frac{\mathcal{F}}{1-\omega^2} \frac{1}{f} [\omega\chi(\omega^2 - 1) + f(\omega^2 - 1)] - \omega P = \\ & -\frac{\mathcal{F}}{f} (\omega\chi + f) - \omega P. \end{aligned}$$

Evaluando en la región exterior e interior

$$\mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_+\omega + P_+\omega - \frac{F_-}{f_-} (\omega\chi_- + f_-) - \omega P_- = 0, \quad (\text{C.7})$$

si el flujo antes y después del choque es el mismo

$$\mathcal{F} \left(1 - \frac{\chi_-}{f_-} \right) = P_- - P_+. \quad (\text{C.8})$$

Para la situación en que las dos regiones se encuentran modeladas por medio de los factores de Eddington, la situación es muy parecida.

$$\frac{F_+}{f_+} (\omega\chi_+ + f_+) - \frac{F_-}{f_-} (\omega\chi_- + f_-) = \omega (P_- - P_+), \quad (\text{C.9})$$

si $\mathcal{F}_+ = \mathcal{F}_-$, (C.9) es

$$\mathcal{F} = \frac{P_- - P_+}{\frac{\chi_+}{f_+} - \frac{\chi_-}{f_-}}, \quad (\text{C.10})$$

donde se ha demostrado que bajo ciertas condiciones el flujo de radiación de una onda de choque se llega a convertir en el flujo emitido por una frontera.