

Aplicabilidad de los sistemas generalizados de un solo grado de libertad en el análisis de un puente durante construcción por voladizos sucesivos sometido a sismos verticales.

Camilo Eduardo Arias Osorio

Trabajo de Grado para Optar el Título de Ingeniero Civil

Director

José Miguel Benjumea Royero

PhD. en Ingeniería Civil y Ambiental

Codirector

Gustavo Chio Cho

PhD. en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas

Escuela de Ingeniería Civil

Bucaramanga

2021

Agradecimientos

A mis directores, por acompañarme en este camino.

A mis padres, por apoyarme incondicionalmente.

A mis amigos, por la motivación siempre presente.

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción.....	10
1. Objetivos.....	13
1.1 Objetivo General.....	13
1.2 Objetivos Específicos	13
2. Metodología.....	14
2.1 Descripción del puente	14
2.2 Modelamiento del puente y evaluación de cargas en fase constructiva	15
2.3 Análisis Dinámico	18
2.3.1 Análisis Multimodal Espectral	18
2.3.2 Espectro de aceleración horizontal.....	20
2.3.3 Espectro de aceleración vertical	22
2.4 Análisis simplificado con el método de sistemas de un grado de libertad generalizados	26
2.4.1 Funciones de forma utilizadas	30
2.4.2 Cálculo del nivel de exactitud del método de sistemas generalizados de un solo grado de libertad	32
3. Resultados y Análisis.....	33
3.1 Análisis dinámico multimodal espectral.....	33

3.1.1 Respuesta modal del puente	33
3.1.2 Respuestas sísmicas máximas	34
3.2 Análisis dinámico simplificado con el método de sistemas de un solo grado de libertad generalizados	37
3.2.1 Respuesta modal y sísmica de la viga	37
3.3 Comparación de respuestas sísmicas máximas	38
4. Conclusiones.....	46
Referencias Bibliográficas.....	48
Apéndices	51

Lista de Tablas**Pág.**

Tabla 1. Parámetros sísmicos utilizados para la construcción del espectro de aceleraciones horizontal.....	21
Tabla 2. Comparación de resultados al incluir e ignorar el presfuerzo presente en la viga del puente, para el primer modo de vibración vertical.	35
Tabla 3. Respuestas máximas del análisis multimodal espectral y del análisis simplificado utilizando f_1 , f_2 y f_3 , para el primer modo de vibración vertical.....	36
Tabla 4. Respuestas máximas del análisis multimodal espectral, teniendo en cuenta los primeros 30 modos de vibración estipulados.	37
Tabla 5. Periodos fundamentales verticales para cada una de las secciones propuestas. ...	38
Tabla 6. Comparación de las respuestas máximas del análisis multimodal espectral y del análisis numérico utilizando f_1 , f_2 y f_3 , para el primer modo de vibración vertical.....	40
Tabla 7. Comparación de las respuestas máximas del análisis multimodal espectral, teniendo en cuenta los primeros 30 modos de vibración.....	41
Tabla 8. Respuestas máximas del análisis multimodal espectral para media viga del puente en condición de empotramiento perfecto.....	44
Tabla 9. Porcentajes de diferencia entre el análisis multimodal espectral de la viga empotrada para el primer modo de vibración vertical y el análisis simplificado.....	44
Tabla 10. Porcentajes de diferencia entre el análisis multimodal espectral de la viga empotrada, teniendo en cuenta los primeros 30 modos de vibración, y el análisis simplificado.	45

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1. Sección transversal de viga sobre pila y sobre estribo.....	14
Figura 2. Sección transversal de la pila.....	15
Figura 3. Empotramiento y conexión rígida.....	16
Figura 4. Fases de construcción analizadas. a) Hasta el 25% (CS6), b) Hasta el 50% (CS11), c) Hasta el 75% (CS15), d) Hasta el 100% (CS19).	19
Figura 5. Espectro de aceleración horizontal.	22
Figura 6. Razón V/H simplificada propuesta por Bozorgnia y Campbell para rocas y suelos rígidos.....	24
Figura 7. Espectro de aceleración vertical de diseño propuesto por Bozorgnia y Campbell	25
Figura 8. Espectro de aceleración vertical.....	25
Figura 9. Idealización de la viga en voladizo.	26
Figura 10. Sistema de masa distribuida.....	27
Figura 11. Formas modales del primer modo de vibración vertical de la mitad de la viga del puente para las cuatro etapas de construcción evaluadas.	34
Figura 12. Comparación de las formas modales obtenidas por el análisis modal por software y el análisis simplificado, para un avance de voladizo del 75%.....	42
Figura 13. Comparación de las formas modales obtenidas por el análisis modal por software y el análisis simplificado, para un avance de voladizo del 25%.....	43

Lista de Apéndices

	Pág.
Apéndice A. Respuestas modales de las etapas constructivas.....	51
Apéndice B. Eigenvectores del primer modo de vibración vertical.....	54
Apéndice C. Porcentaje de diferencia en el análisis con y sin presfuerzo.....	57
Apéndice D. Pesos para el método numérico.....	58
Apéndice E. Ejemplo de estudio mostrado por Chopra.....	60
Apéndice F. Comparación de formas modales.....	63

Resumen

Título: aplicabilidad de los sistemas generalizados de un solo grado de libertad en el análisis de un puente en construcción por voladizos sucesivos sometido a sismos verticales *

Autor: Camilo Eduardo Arias Osorio **

Palabras Clave: Puente Viga Cajón, Componente Vertical Sísmica, Etapas de Construcción, Nivel de Exactitud, Análisis Multimodal Espectral, Análisis Numérico.

Descripción: La complejidad de los modelos matemáticos al momento de resolver sistemas de masa distribuida, como, por ejemplo, una viga en cantiléver con área e inercia variable conforme aumenta su longitud, junto con la gran inversión en tiempo y dinero que conlleva el modelamiento de una estructura en un software especializado, suponen un problema al momento de estimar las reacciones y deformaciones de un puente construido por voladizos sucesivos. Por estas razones, esta investigación busca determinar el nivel de exactitud del método de sistemas generalizados de un solo grado de libertad para calcular el momento flector y la fuerza cortante en la unión viga-pila, y la deformación sísmica vertical del extremo libre de un puente construido por voladizos sucesivos, en cuatro de sus etapas constructivas, bajo la influencia únicamente de la componente vertical sísmica. Para esto se realizó el modelamiento en el software Midas Civil de un puente viga cajón construido en Colombia, cuya longitud total y altura de pilar son 151 m y 19 m, respectivamente, junto con un análisis simplificado correspondiente al método en cuestión, de una viga en cantiléver que idealiza la viga de dicho puente. Los resultados mostraron que el nivel de exactitud del método en cuestión depende en gran medida de la función de forma escogida, de la rigidez del apoyo con que se modele la viga en cantiléver y de la influencia de los modos superiores de vibración en la respuesta modal de la estructura. Sin embargo, se encontró que, con la función de forma adecuada se pueden obtener resultados con un nivel de exactitud significativo, para el primer modo de vibración vertical de la estructura, en casos de avance del proceso de construcción de 50%, 75% y 100%.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Director: José Miguel Benjumea Royero. PhD. en Ingeniería Civil y Ambiental. Codirector: Gustavo Chio Cho. PhD. en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos.

Abstract

Título: applicability of the generalized single degree of freedom systems method in the analysis of a bridge under construction by progressive cantilevers subjected to vertical seisms*

Author: Camilo Eduardo Arias Osorio **

Keywords: Box Girder Bridge, Vertical Seismic Component, Construction Stages, Accuracy Level, Spectral Multimodal Analysis, Numerical Analysis.

Description: The complexity of numerical analysis when solving distributed mass systems, such as a cantilever beam with variable area and inertia as its length increases, and the large investment in time and money involved in modeling a structure in a specialized software, are both problems when estimating the reactions and deformations of a bridge built by progressive cantilever. For these reasons, this research seeks to determine the level of accuracy of the generalized single-degree-of-freedom systems method to calculate the bending moment and shear force in the beam-pile joint, and vertical deformation of the free end of a bridge built by progressive cantilevers, in 4 of its construction stages, under the influence of the vertical seismic component. For this purpose, the Midas Civil software was used to model a box girder bridge built in Colombia, whose total length and height of pillar are 151 m and 19 m, respectively, and a numerical analysis concerning the method in question of a cantilever beam, idealizing the bridge beam, took place. The results showed that the level of accuracy of the method in question largely depends on the chosen shape function, the stiffness with which the cantilever beam is modeled and the influence of the higher vibration modes on the modal response of the structure. However, it was found that with proper a shape function, results with a high level of accuracy can be obtained for the first vertical vibration mode of the structure as well as for an advance of the construction process of 25%, 50%, 75% and 100%.

* Trabajo de Grado.

** Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Director: José Miguel Benjumea Royero. PhD. en Ingeniería Civil y Ambiental. Codirector: Gustavo Chio Cho. PhD. en Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos.

Introducción

En el año 2008, los puentes viga cajón contruidos por voladizos sucesivos empezaron a adquirir popularidad en Colombia con el inicio de los grandes proyectos de infraestructura en el país, al igual que por sus ventajas con respecto a su método de construcción y forma estructural (Takács, 2002). Al momento de diseñar este tipo de puentes se deben tener en cuenta los efectos debidos a las cargas que actúan sobre el puente en la condición completa y durante construcción (Zheng & Yuan, 2012). En específico, se deben considerar todas las etapas constructivas del puente dentro de su análisis dinámico debido a que la construcción por voladizos sucesivos lo posiciona en un estado de vulnerabilidad importante puesto que carece de redundancia y tiene un peso considerable (Lucko & de la Garza, 2003).

Normalmente, los códigos y guías de diseño se enfocan en los efectos en las estructuras debidos a las componentes horizontales sísmicas, ignorando los relacionados a la componente vertical o sugiriendo que estos sean determinados asumiendo esta última como una fracción igual a $2/3$ de la primera (Cabrera, 2013; Perea & Esteva, 2005). Sin embargo, estudios previos han encontrado que este valor ($2/3$) no es exacto y en algunos casos subestima la acción de esta componente en hasta un 50% (Cabrera, 2013; Fernández & Ardila, 2020; Perea & Esteva, 2005). Además, se ha demostrado que la componente vertical del sismo tiene una gran influencia en los daños estructurales post-sismo de algunos puentes, entre los que se encuentran la fracturación del concreto de recubrimiento, la deformación severa del refuerzo longitudinal, y el estallamiento del concreto confinado, por lo general en la mitad de la pila (Acosta, 2009).

En una investigación reciente, Bayraktar et al. (2020) concluyeron que la omisión del movimiento vertical del suelo puede conducir a estimaciones incorrectas de las respuestas máximas de fuerza axial en la pila de puentes viga cajón de dos y tres vanos, y de las demandas de desplazamiento vertical y momento flector en la viga de los mismos puentes. Los autores recomendaron que se tuviera en cuenta la combinación de la componente vertical sísmica (V) y la horizontal (H) en los análisis sísmicos. En otro estudio reciente llevado a cabo por Castro (2021), se mostró, mediante un análisis multimodal espectral, que la inclusión de la componente vertical sísmica en los análisis dinámicos durante la construcción y en condición de servicio de un puente viga cajón de dos vanos causa incrementos significativos en las envolventes de fuerza axial en la pila del puente, y de fuerza cortante y momento flector en la viga del puente, al igual que se presenta una mayor influencia de la componente vertical sísmica durante construcción que en servicio.

Existen diferentes métodos para predecir las respuestas sísmicas de un puente durante construcción, mediante la técnica de voladizos sucesivos y bajo los efectos de la componente vertical sísmica. Por ejemplo, métodos refinados como el de la representación y solución de la estructura mediante elementos finitos o por medio de modelación y solución matemática de la estructura. Cada uno de estos métodos presenta inconvenientes, pues el primero requiere de un software de modelado para su solución, lo que conlleva una inversión en capital y tiempo considerable, y el segundo adquiere un nivel de complejidad considerable debido a que la sección transversal de los puentes construidos por voladizos sucesivos varía conforme aumenta su longitud. Por lo tanto, y considerando los resultados encontrados por Bayraktar et al. (2020) y Castro (2021) surge la necesidad de encontrar un método simplificado que sea aplicable en esta situación y permita determinar los valores máximos de desplazamiento en

el extremo libre, y de fuerza cortante y momento flector en la unión viga-pila generados por la componente vertical sísmica. Con el fin de dar un avance en este tema, y teniendo en cuenta que en Colombia se construyen múltiples puentes viga cajón mediante el método de voladizos sucesivos, la presente investigación busca determinar el nivel de exactitud que se obtendría al utilizar el método de sistemas de un grado de libertad generalizados en el análisis de la acción de la componente vertical sísmica para cuatro etapas constructivas (correspondientes al 25%, 50%, 75% y 100% de avance de construcción de la viga del puente), al compararlo con los resultados obtenidos de un análisis multimodal espectral de un modelo computacional del puente desarrollado en el software Midas Civil.

Este trabajo está estructurado en tres secciones. La sección 1 corresponde a la metodología, donde se encuentra la descripción del puente estudiado, el cálculo de los espectros de diseño y la explicación del método de sistemas generalizados de un solo grado de libertad; la sección 2 corresponde a los resultados obtenidos por medio de los análisis expuestos en el párrafo anterior, con su comparación y respectivo análisis; y, finalmente, la sección 3 corresponde a las conclusiones.

1. Objetivos

1.1 Objetivo General

Determinar el nivel de exactitud del método de sistemas de un solo grado de libertad generalizados al obtener las fuerzas y desplazamientos sísmicos en la viga de un puente durante su construcción por voladizos sucesivos y bajo la acción de la componente vertical sísmica.

1.2 Objetivos Específicos

Evaluar la respuesta máxima de desplazamientos, fuerza cortante y momento al variar la relación de canto del tablero conforme aumenta la longitud del puente en estudio durante construcción, mediante el método de sistemas de un solo grado de libertad generalizados.

Calcular la respuesta máxima de desplazamientos, fuerza cortante y momento al variar la relación de canto del tablero conforme aumenta la longitud del puente en estudio durante construcción, mediante el método multimodal espectral.

Comparar las respuestas máximas de desplazamientos, fuerza cortante y momento obtenidas con ambos métodos.

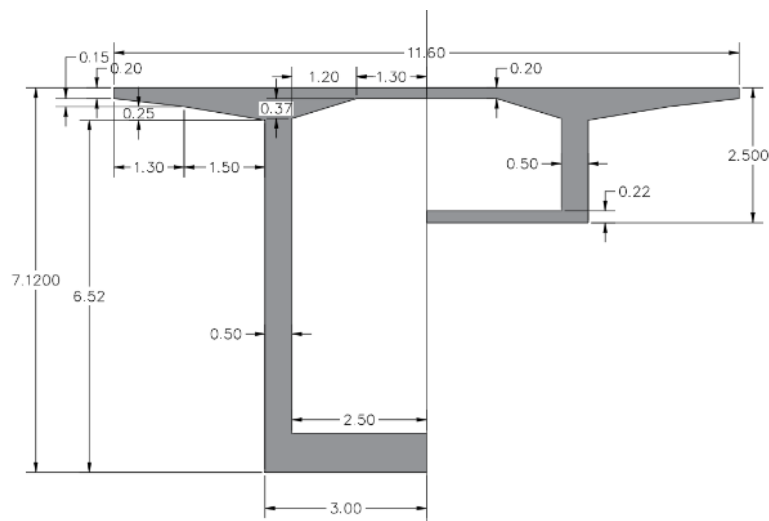
2. Metodología

2.1 Descripción del puente

Para el desarrollo de este estudio se escogió el puente estudiado por Castro (2021) con el fin de tener una forma de corroboración de los resultados obtenidos del modelo multimodal espectral. Este es un puente viga cajón de concreto postensado con dos vanos simétricos de 75.5 m de longitud (L) cada uno. La sección de la viga es unicelular, de ancho y aletas constantes de 11.6 m y 2.8 m de longitud, respectivamente. Además, la sección posee una altura variable de forma parabólica conforme aumenta la longitud de esta, iniciando con una altura de 7.12 m ($L/10.6$) en la zona del apoyo sobre la pila y finalizando con 2.5 m ($L/30.2$) en la zona de apoyo sobre los estribos (Figura 1). La pila tiene una altura de 19 m y su sección transversal es rectangular hueca con dimensiones de 4 m en dirección longitudinal, 6 m en sentido transversal y espesor de muros de 0.5 m (Figura 2).

Figura 1

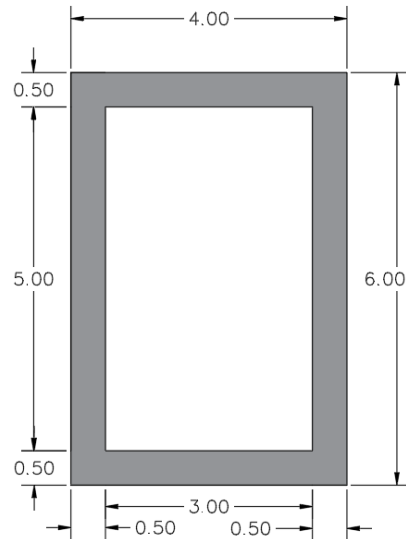
Sección transversal de viga sobre pila y sobre estribo.



Nota. Medidas en metros.

Figura 2

Sección transversal de la pila.



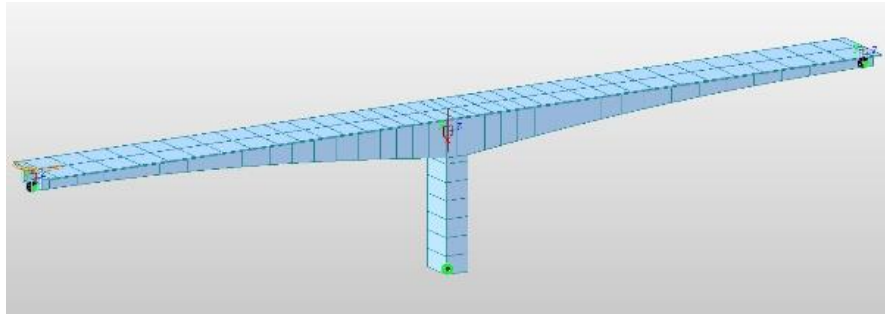
Nota. Medidas en metros.

2.2 Modelamiento del puente y evaluación de cargas en fase constructiva

Para el modelamiento y análisis multimodal espectral del puente se utilizó el software Midas Civil (*MIDAS CIVIL Software*, 2020). La pila y la viga fueron modelados en el programa como elementos tipo Beam (elementos longitudinales formados por dos nodos con 6 grados de libertad cada uno). Se estableció un empotramiento perfecto en la base de la pila y se asumió una conexión rígida (Rigid Link) en la unión viga-pila (Figura 3). Para simular los apoyos de la superestructura sobre los estribos se utilizaron apoyos tipo rodillo sin fricción, restringiendo los desplazamientos en la dirección Z (eje vertical) y en la dirección Y (eje transversal).

Figura 3

Empotramiento y conexión rígida.



Nota. Tomado de MIDAS Civil.

Los materiales utilizados en el modelo fueron un concreto de resistencia máxima a la compresión (f'_c) de 42 MPa y módulo de elasticidad (E_c) de 30348 MPa para la viga, y un concreto con f'_c igual a 35 MPa y E_c igual a 27704 MPa para la pila. Para ambos materiales se utilizó un coeficiente de Poisson (ν) de 0.2, un peso específico de 24 kN/m³ y se limitó al rango lineal-elástico de estos para el análisis de la estructura.

Para el presfuerzo se utilizaron torones de acero de baja relajación con diámetro nominal de 5/8", área de 1.4 cm², esfuerzo de rotura (F_{pu}) de 1890 MPa, módulo de elasticidad (E_{sp}) de 195000 MPa, coeficiente de rozamiento de 0.25, coeficiente de ondulación (K) de 0.0033 rad/m y penetración en cuña máxima de 5 mm.

El análisis del proceso constructivo se llevó a cabo teniendo en cuenta la activación y desactivación de elementos, condiciones de apoyo y cargas en cada etapa constructiva. Para esto se siguió una secuencia de construcción previamente establecida, la cual está comprendida por 20 etapas definidas por el prefijo CS (Construction Stage) y el número de la etapa. La primera etapa constructiva (CS1) corresponde a la construcción de la pila, a la cual se le atribuyó una duración de 100 días. Las etapas CS2 a CS19 comprenden la ejecución

de las dovelas, iniciando con las que se encuentran sobre la pila y terminando con las que se encuentran justo antes de las ubicadas sobre los estribos. Estas etapas constructivas tienen una duración de 7 días distribuidos en la fundición de las dovelas en el día 1 y, transcurridos 4 días, se procede a la instalación del postensado de la dovela en cuestión y el carro de avance a usar para la siguiente. Luego, en el día 7 se funde la dovela posterior. La etapa constructiva CS20 corresponde a la construcción de las dovelas de cierre sobre los estribos, con una duración de 20 días.

Los efectos generados por la fluencia y la retracción del concreto para la viga y la pila fueron modelados siguiendo las recomendaciones del Comité Euro-Internacional du Béton (1993) (Comite Euro-Internacional Du Beton, 1993). La humedad relativa del ambiente (RH) se tomó igual a 78%, según los planos del puente, y se asumió que el cemento es de endurecimiento rápido. El tamaño nominal de la columna es de 0.64 m, mientras que, en la viga, este parámetro varía con respecto aumenta la longitud de esta y disminuye su sección, tomando valores desde 0.60 m hasta 0.42 m. Los efectos de relajación del acero se incluyeron considerando los estudios realizados por Magura et al. (Magura et al., 1964).

Las cargas gravitacionales que se tuvieron en cuenta en el proceso constructivo fueron el peso propio de los elementos (SW), el presfuerzo de los cables de tensionamiento (PS), el peso del carro de avance (FT) y el peso del concreto fresco puesto en el carro de avance (WC).

Para modelar la acción del carro de avance sobre la estructura se aplicó en el extremo de cada dovela una carga vertical de 490.3 kN y un momento alrededor del eje Y (transversal a la viga del puente) de 1225.8 kN-m, el cual responde a una excentricidad de 2.5 m respecto

del punto de aplicación. De la misma manera se representó WC, con la diferencia de que el valor de esta dependía de la dovela que se fuera a fundir luego y era calculada por el software.

Adicional a las cargas gravitacionales, se tuvieron en cuenta las acciones sísmicas explicadas en la siguiente sección.

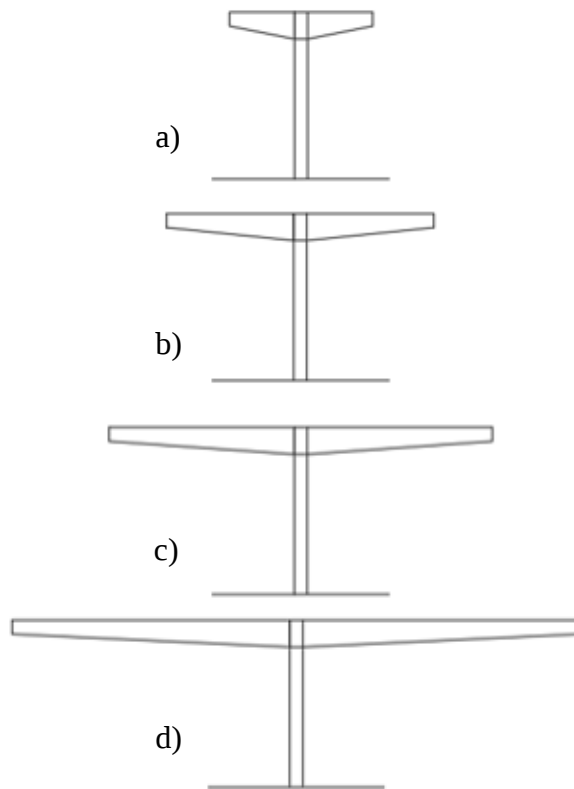
2.3 Análisis Dinámico

2.3.1 Análisis Multimodal Espectral

Con el fin de evaluar la respuesta sísmica de la estructura durante construcción, se evaluaron cuatro etapas constructivas (Figura 4): (I) puente con un avance del voladizo a ambos lados del 25% (CS6); (II) puente con un avance del voladizo a ambos lados del 50% (CS11); (III) puente con un avance del voladizo a ambos lados del 75% (CS15); (IV) puente con un avance del voladizo a ambos lados del 100% (CS19). Como última etapa se tomó CS19 pues se necesitaba que la viga estuviera en voladizo para poder comparar los resultados con los obtenidos con el método simplificado expuesto en la Sección 1.4. Adicionalmente, el análisis sísmico se hizo incluyendo e ignorando la fuerza del presfuerzo. Es importante observar que a medida que avanza el proceso constructivo, la relación de esbeltez de la viga (longitud del vano sobre la altura de la viga) cambia. Estas relaciones son iguales a 14/6.04, 34/4.23, 54/3.01 y 74/2.52 para los avances de 25%, 50%, 75% y 100% del voladizo, respectivamente.

Figura 4

Fases de construcción analizadas. a) Hasta el 25% (CS6), b) Hasta el 50% (CS11), c) Hasta el 75% (CS15), d) Hasta el 100% (CS19).



Las propiedades dinámicas del modelo del puente desarrollado en el software Midas Civil (periodos y formas modales) se determinaron mediante un análisis modal (EigenValue en Midas Civil) utilizando 30 modos de vibración para cada una de las etapas evaluadas. Esto se hizo con el fin de asegurar un porcentaje de masa modal participante mayor al 90% de la masa total del puente, tal y como se exige en la Norma CCP-14. La masa del puente fue determinada a partir del peso propio de la viga y la pila del puente. No se tomó en cuenta la masa del carro de avance puesto que se evaluó cada una de las etapas hasta el comienzo del día 4, es decir, excluyendo la implantación del carro de avance a utilizar para la ejecución de

la dovela de la siguiente etapa constructiva. Esto último se hizo con el fin de tener las mismas condiciones del método simplificado expuesto en la Sección 1.4. Por último, se asumió un coeficiente de amortiguamiento viscoso de 5%, siguiendo las recomendaciones del CCP-14.

2.3.2 Espectro de aceleración horizontal

Para el análisis dinámico del puente en el presente estudio se utilizó únicamente el espectro de aceleración vertical, sin embargo, para el cálculo de este se necesita el espectro de aceleración horizontal. Este último espectro de diseño, para la condición terminada del puente, se obtuvo siguiendo la sección 3.10.4 del CCP-14. Con este fin, se utilizó la zona de amenaza sísmica empleada en el diseño del puente, el cual se encuentra ubicado en la vía que comunica los municipios de Santa Fé de Antioquia y Cañasgordas, Colombia. Adicionalmente, se asumió un tipo de suelo C, el cual corresponde a una velocidad de onda cortante encontrada en el intervalo entre 360 m/s y 760 m/s. Los demás valores necesarios para construir el espectro se muestran en la Tabla 1, mientras que el coeficiente sísmico elástico de diseño (C_{sm}) se muestra en la Figura 5.

Tabla 1

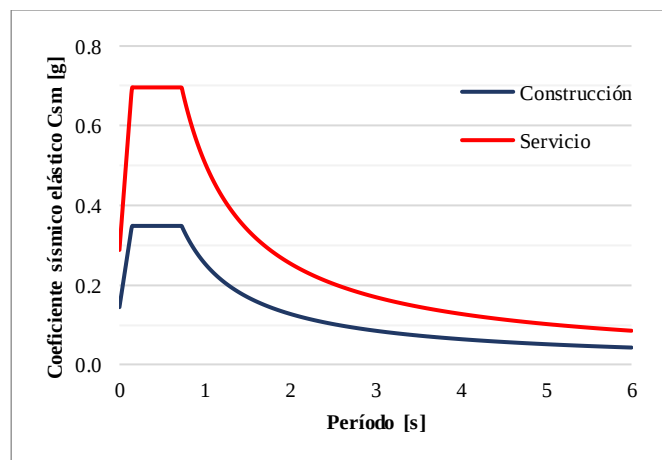
Parámetros sísmicos utilizados para la construcción del espectro de aceleraciones horizontal.

PGA	
Coeficiente de aceleración pico efectiva	0.25
Ss	
Coef. de aceleración de respuesta horizontal para un período de 0.2 s	0.60
S1	
Coef. de aceleración de respuesta horizontal para un período de 1 s	0.35
Fpga	
Factor de sitio para un período nulo en el Espectro de Aceleraciones.	1.15
Fa	
Factor de sitio para el intervalo de periodos de vibración cortos del Espectro de Aceleraciones.	1.16
Fv	
Factor de sitio para el intervalo de periodos de vibración largos del Espectro de Aceleraciones	1.45
As	
Coef. de aceleración pico del suelo modificado por factores de sitio para periodo corto	0.29
Sds	
Coef. de aceleración de respuesta espectral horizontal para un periodo de 0.2s modificado por un factor de sitio de periodos cortos	0.70
Sd1	
Coef. de aceleración de respuesta espectral horizontal para un periodo de 1 s modificado por un factor de sitio de periodos largos	0.51

Debido a que la presente investigación estudia el puente durante su proceso constructivo, se debe construir un espectro de aceleración horizontal para esta condición. Para esto, se tomó en cuenta lo estipulado en la sección 3.10.10 del CCP-14, en donde se expone que el coeficiente elástico de respuesta sísmica para puentes que se construyen por etapas puede reducirse por un factor no mayor a dos (2) para el cálculo de fuerzas y desplazamientos elásticos. Por otro lado, Stucki y Bruneau (2018) encontraron que un factor de reducción espectral de dos (2) es conservador. Por consiguiente, para esta investigación se tomó un factor de reducción igual a 2, siguiendo la Norma CCP-14, para hallar el espectro de aceleración horizontal durante construcción, mostrado en la Figura 5.

Figura 5

Espectro de aceleración horizontal.



2.3.3 Espectro de aceleración vertical

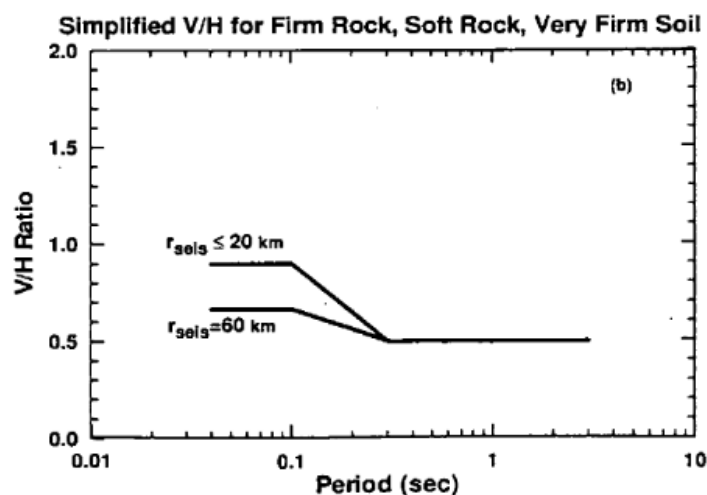
La relación entre las componentes vertical y horizontal del sismo, denominada comúnmente la razón V/H, varía de valor dependiendo del código de diseño que se tome

como referencia o del autor que se esté leyendo. Sin embargo, generalmente se le asigna un valor de $2/3$ para simplificar el cálculo de la componente vertical sísmica. Ejemplos de esto son el Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente (NSR-10) (Ministerio Ambiente Vivienda y Desarrollo Territorial, 2010) en el capítulo A.2.8, y el Manual de Referencia del LRFD Seismic Analysis and Design of Bridges, en la sección 2.7 (Lee et al., 2014). Ahora bien, diferentes investigaciones (Cabrera, 2013; Fernández & Ardila, 2020; Perea & Esteva, 2005) han demostrado que este valor no es exacto y en algunos casos subestima la acción de esta componente hasta en un 50%, ya que esta depende de la distancia a la fuente, la profundidad del evento, el período de oscilación de la estructura y las condiciones del lugar (Cabrera, 2013).

Por estas razones, para el desarrollo de este trabajo, el espectro de aceleración vertical se construyó siguiendo el enfoque de Castro (2021), quien utilizó la metodología propuesta por Bozorgnia y Campbell (2004). Dichos autores plantearon construir el espectro de aceleración vertical a partir del horizontal (C_{sm}) y de las relaciones V/H mostradas en la Figura 6. Esta razón depende del periodo de vibración vertical de la estructura y de la distancia a la fuente, para lo cual plantean dos casos: el primero, para distancias menores a 20 km, y el segundo, para distancias iguales a 60 km. El segundo caso no se tuvo en cuenta puesto que la influencia de la componente vertical sísmica en puntos lejanos a la fuente es despreciable (Acosta, 2009).

Figura 6

Razón V/H simplificada propuesta por Bozorgnia y Campbell para rocas y suelos rígidos.

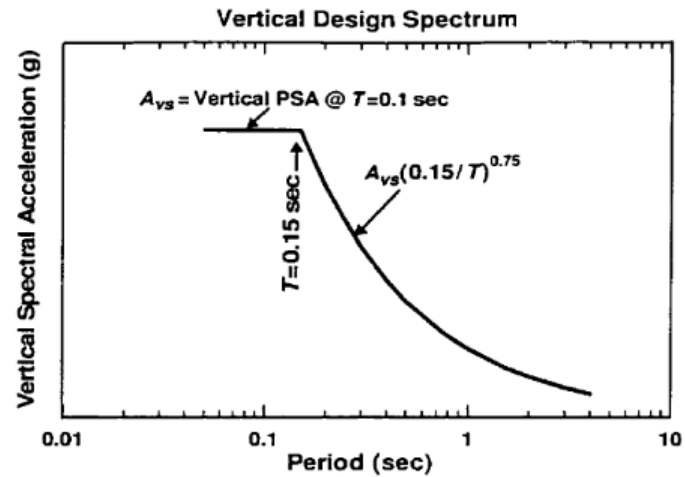


Nota. Tomado de *The vertical-to-horizontal response spectral ratio and tentative procedures for developing simplified V/H and vertical design spectra*, por Y. Bozorgnia & K. W. Campbell, 2004.

Para construir el espectro de aceleración vertical, Bozorgnia y Campbell (2004) plantean determinar primero la amplitud máxima (A_{vs}), la cual se calcula multiplicando el valor del coeficiente sísmico elástico C_{sm} afectado por el coeficiente de reducción (“Construcción” en Figura 5) correspondiente a un periodo de 0.1 s, con el valor de V/H correspondiente a un periodo de 0.1 s, determinado usando la Figura 6. Este valor de amplitud máxima resultante (A_{vs}) se relaciona en el espectro de aceleración vertical con periodos menores a 0.15 s, mientras que para periodos mayores a 0.15 s se utiliza la expresión mostrada en la Figura 7. El espectro de aceleración vertical usado en esta investigación se muestra en la Figura 8.

Figura 7

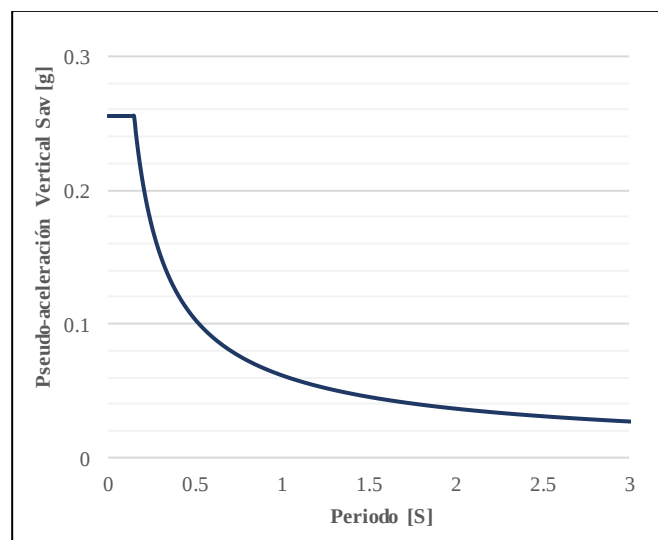
Espectro de aceleración vertical de diseño propuesto por Bozorgnia y Campbell.



Nota. Tomado de The vertical-to-horizontal response spectral ratio and tentative procedures for developing simplified V/H and vertical design spectra, por Y. Bozorgnia & K. W. Campbell, 2004.

Figura 8

Espectro de aceleración vertical.

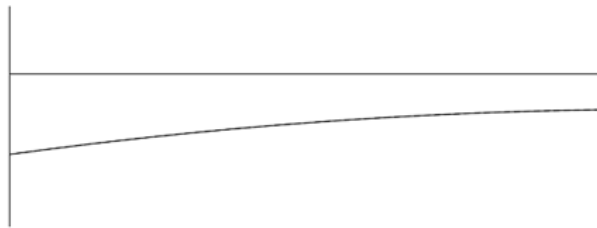


2.4 Análisis simplificado con el método de sistemas de un grado de libertad generalizados

Para la implementación de este método se idealizó la viga del puente como una viga en voladizo, correspondiente a la mitad de la viga total, con empotramiento perfecto al inicio de la dovela sobre la pila (Figura 9). Esta idealización es razonable considerando que el proceso constructivo de este tipo de puente consiste en la construcción simétrica de las dovelas a cada lado de la pila.

Figura 9

Idealización de la viga en voladizo.



En este análisis se utilizó el espectro de aceleración vertical definido en la subsección anterior y se evaluaron las mismas cuatro etapas constructivas mostradas en la Figura 4. Adicionalmente, se omitió la fuerza del presfuerzo presente en el puente y se utilizó el software Matlab (Matlab, 2020) para obtener los resultados.

Ahora bien, el método plantea un “análisis de sistemas más complejos que se tratan como sistemas de un GDL (un grado de libertad) y que se denominan sistemas generalizados de un (1) GDL” (Chopra, 2011). Para esto, define el desplazamiento en cada una de las

ubicaciones del sistema en términos de una *coordenada generalizada* $z(t)$, a través de una *función de forma* $\psi(x)$ (Chopra, 2011), como se muestra en la Ecuación 1.

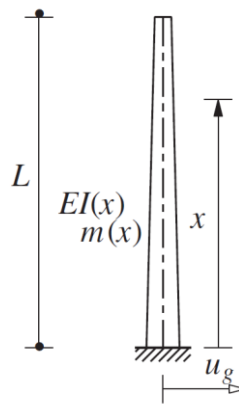
$$u(x, t) = \psi(x)z(t), \quad (1)$$

Para el caso de un sistema de masa distribuida $m(x)$ (Ecuación 2), rigidez a la flexión $EI(x)$ y excitación del terreno $u_g(t)$, como el mostrado en la Figura 10, se debe determinar inicialmente una función de forma que cumpla con las condiciones de frontera de desplazamiento de la estructura. Por ejemplo, en el caso de la Figura 10, $\psi(0) = 0$ y $\psi'(0) = 0$.

$$m(x) = \frac{\text{Peso específico}}{g} * \text{Área}(x), \quad (2)$$

Figura 10

Sistema de masa distribuida.



Nota. Tomado de *Dynamic of Structures Chopra*, por A. Chopra, 2011.

Luego de establecer la función de forma, se prosigue a formular la ecuación de movimiento de la estructura generalizada (Ecuación 3), donde $\tilde{m}$, $\tilde{k}$ y $\tilde{L}$ son la masa, rigidez y fuerza excitadora generalizadas respectivamente, calculadas mediante las Ecuaciones 4 a 6, respectivamente:

$$\tilde{m}\ddot{z} + \tilde{k}z = -\tilde{L}\ddot{u}_g(t), \quad (3)$$

$$\tilde{m} = \int_0^L m(x)[\psi(x)]^2 dx, \quad (4)$$

$$\tilde{k} = \int_0^L EI(x)[\psi''(x)]^2 dx, \quad (5)$$

$$\tilde{L} = \int_0^L m(x)\psi(x)dx, \quad (6)$$

Si se divide la ecuación (2) entre $\tilde{m}$ y se usa un coeficiente de amortiguamiento estimado ζ , se obtiene la siguiente expresión:

$$\ddot{z} + 2\zeta Wn\dot{z} + Wn^2 z = -\tilde{L}\ddot{u}_g(t), \quad (7)$$

Donde Wn es la frecuencia de vibración natural y equivale a:

$$Wn^2 = \frac{\tilde{k}}{\tilde{m}}, \quad (8)$$

Al igual que el factor que acompaña a la aceleración del terreno corresponde a:

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{m}}, \quad (9)$$

Luego, se calculan las fuerzas internas correspondientes a momentos flexionantes y fuerzas cortantes asociados con los desplazamientos $u(x, t)$, mediante un análisis estático de la estructura sometida a fuerzas estáticas equivalentes. De esto se obtiene que la mejor estimación para estas fuerzas es:

$$f_s(x, t) = Wn^2 m(x)\psi(x)z(t), \quad (10)$$

Si se tiene un espectro de respuesta disponible, se pueden calcular los valores máximos de desplazamiento en cualquier punto de la viga, y de fuerza cortante y momento flector en el apoyo de la viga (Ecuaciones 11 a 13 respectivamente) debidos al movimiento del terreno. Para esto se ingresa un nuevo valor denominado A, el cual es la ordenada de la pseudo-aceleración del espectro de diseño para un periodo $Tn = 2\pi/Wn$.

$$u_o(x) = \frac{\tilde{\Gamma}A}{Wn^2}\psi(x), \quad (11)$$

$$V = \tilde{L}\tilde{\Gamma}A, \quad (12)$$

$$M = \tilde{L}^\theta \tilde{\Gamma}A, \quad (13)$$

$$\tilde{L}^{\theta} = \int_0^L x m(x) \psi(x) dx, \quad (14)$$

El valor de x en la Ecuación 11 representa todos los puntos de la viga y se mide desde el apoyo del elemento evaluado, como se muestra en la Figura 10.

En esta investigación, se tomó la viga idealizada mostrada en la Figura 9 como el sistema de masa distribuida sobre el que se aplicará este método y se utilizó el espectro de aceleraciones verticales (Figura 8) para el cálculo de A . Por consiguiente, las Ecuaciones 12 y 13 corresponden a la fuerza cortante y al momento flector, respectivamente, encontrados en la base de la viga. Para el cálculo del desplazamiento máximo vertical en el extremo libre de la viga se utilizó la Ecuación 11 con el valor de la función de forma correspondiente al punto final de la viga, donde x se iguala a la longitud de la viga.

Para la solución de estas ecuaciones en el software Matlab, específicamente de las ecuaciones 4, 5, 6 y 14, se utilizó el método numérico de la Regla del Trapecio (Romero, 2007), tomando los valores de área e inercia del comienzo y final de cada una de las dovelas del puente, con el fin de que se tuvieran los mismo datos del modelo utilizado en el análisis multimodal espectral. Estas respuestas sísmicas se calcularon para cada una de las etapas constructivas mostradas en la Figura 4.

2.4.1 Funciones de forma utilizadas

Para este análisis se utilizaron tres (3) funciones de forma distintas, denominadas $f1$, $f2$ y $f3$, con el objetivo de observar la influencia de este parámetro en las respuestas sísmicas calculadas, al igual que para determinar cuál de estas funciones otorga un mejor nivel de exactitud con respecto a los resultados del análisis multimodal espectral.

La primera de estas funciones (f_1), mostrada en la Ecuación 15, corresponde a la establecida por De La Cruz (De La Cruz, 2018) para el caso de una viga cantiléver con empotramiento perfecto a un lado y con sección transversal constante (m y EI constantes). El planteamiento de esta función aplica la teoría de Bernoulli-Euler.

$$f_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\cos\left(\frac{\beta x}{L}\right) - \cosh\left(\frac{\beta x}{L}\right) \right) + D \left(\sin\left(\frac{\beta x}{L}\right) - \sinh\left(\frac{\beta x}{L}\right) \right) \right] \quad (15)$$

Donde,

$$\beta \cong \left(j - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad (16)$$

$$D = \frac{-\cos(\beta) - \cosh(\beta)}{\sin(\beta) + \sinh(\beta)}, \quad (17)$$

L es la longitud de la viga y j corresponde al modo de vibración que se quiera evaluar, es decir, $j=1,2,3,4,\dots$, la cual en este caso se tomará como 1 puesto que uno de los aspectos a comparar será el primer modo de vibración vertical de la viga.

La siguiente función, f_2 (Ecuación 18), se tomó de Chopra (2011), teniendo en cuenta que mostró buenas aproximaciones de periodo para el caso de una viga de sección variable. La última función, f_3 (Ecuación 19), se escogió por su semejanza con las formas modales correspondientes al primer modo de vibración, de las 4 etapas constructivas evaluadas en este trabajo.

$$f_2 = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2L}x\right), \quad (18)$$

$$f_3 = x^2, \quad (19)$$

Para determinar el nivel de exactitud del método de sistemas generalizados de un solo grado de libertad usando cada una de las funciones (f_1 a f_3) se utilizó como criterio el porcentaje de diferencia entre los resultados obtenidos del análisis multimodal espectral y los del método de sistemas generalizados de un solo grado de libertad (Ecuación 20). Entre más pequeño el valor del porcentaje de diferencia entre los resultados de ambos análisis, mejor el nivel de exactitud del análisis simplificado.

2.4.2 Cálculo del nivel de exactitud del método de sistemas generalizados de un solo grado de libertad

El porcentaje de diferencia se calculó entre un valor exacto (VE), que corresponde a los resultados del análisis multimodal espectral, y un valor calculado (VC), que corresponde a los resultados del análisis simplificado con cada una de las funciones de forma, en términos del valor exacto. Por ende, si este porcentaje es positivo, significa que el análisis simplificado sobrestima las respuestas sísmicas del puente, mientras que, si es negativo, el análisis simplificado subestima las respuestas sísmicas del puente.

$$\% \text{ dif.} = \frac{VC - VE}{VE} * 100, \quad (20)$$

3. Resultados y Análisis

3.1 Análisis dinámico multimodal espectral

3.1.1 Respuesta modal del puente

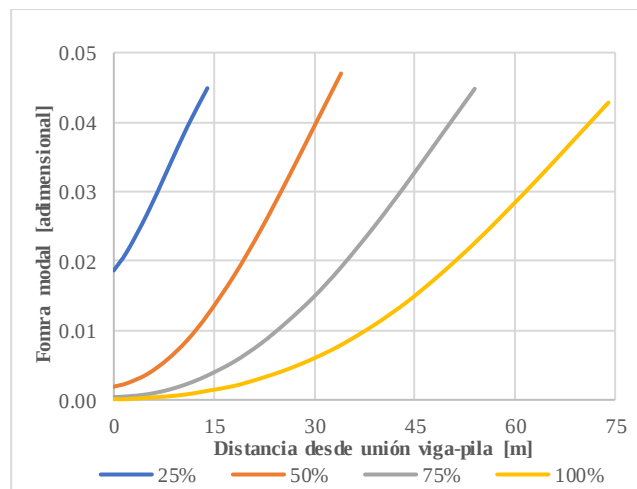
En el Anexo A se presentan los periodos de vibración y porcentajes de masa modal en la dirección Z para los primeros 30 modos de vibración de cada una de las etapas de construcción evaluadas (Figura 4). En este anexo se puede observar que el periodo fundamental de la estructura aumenta (se alarga) con el avance de la construcción del puente (p. ej., 0.7 s en la etapa CS6 y 3.0 s en la etapa CS19). Así mismo, también se alarga el periodo del primer modo de vibración vertical con el avance de la construcción del puente (p. ej., 0.1 s en la etapa CS6 y 1.1 s en la etapa CS19). También se puede observar que el porcentaje de participación de masa modal del primer modo de vibración vertical disminuye conforme avanza el proceso constructivo, iniciando en 79.5% en CS6, y terminando en 40.8% en CS19. Esto último indica que, conforme aumenta la longitud del puente, los modos superiores tendrán mayor influencia en la respuesta total de la estructura frente al movimiento vertical del suelo.

La Figura 11 presenta la forma modal correspondiente al primer modo de vibración vertical de las cuatro etapas constructivas evaluadas. Debe notarse que en esa figura sólo se presenta el movimiento de un voladizo del puente, debido a la simetría de la respuesta, y se excluye la pila. Los valores de los eigenvectores mostrados en la Fig. 11 se presentan en el Anexo B. Se puede observar en la Fig. 11 que el punto central de la viga, el cual corresponde a la unión viga-pila, no tiene un desplazamiento modal igual a cero, pues la rigidez axial y a flexión de la pila no es infinita. Teniendo en cuenta los resultados mostrados en el Anexo B

y la Figura 11, se evidencia que conforme se avanza en el proceso constructivo, el valor de eigenvector en la unión viga-pila disminuye, iniciando en 0.0186 (CS6) y terminando en $9.6 \cdot 10^{-5}$ (CS19).

Figura 11

Formas modales del primer modo de vibración vertical de la mitad de la viga del puente para las cuatro etapas de construcción evaluadas.



3.1.2 Respuestas sísmicas máximas

Con el fin de comprobar la influencia del presfuerzo en la respuesta sísmica, en la Tabla 2 se muestra una comparación con los resultados obtenidos incluyendo e ignorando el presfuerzo presente en el puente para el primer modo de vibración vertical (en adelante se usará la abreviatura PS para presfuerzo) y se muestra en el Anexo C la tabla con los resultados incluyendo los primeros 30 modos de vibración del puente. Como se puede observar en las Tabla 2 y C1, los porcentajes de diferencia entre los resultados en los que se incluyen e ignoran el PS (tomando como referencia los primeros) son despreciables, por lo tanto, de

aquí en adelante se utilizarán las respuestas sísmicas del modelo que incluye el presfuerzo del puente para la comparación de los dos tipos de análisis establecidos.

Tabla 2

Comparación de resultados al incluir e ignorar el presfuerzo presente en la viga del puente, para el primer modo de vibración vertical.

Avance del voladizo	Aspecto	Sin PS	Con PS	% Diferencia
25%	M [kN-m]	9530	9524.1	0.06%
	V [kN]	1080.9	1082.2	-0.12%
	δ [cm]	0.046	0.046	0.00%
50%	M [kN-m]	25574.9	25909.5	-1.29%
	V [kN]	1055.9	1072.7	-1.57%
	δ [cm]	0.406	0.399	1.75%
75%	M [kN-m]	25491.7	25992.1	-1.93%
	V [kN]	648	661.3	-2.01%
	δ [cm]	1.277	1.238	3.15%
100%	M [kN-m]	23844.4	24302.3	-1.88%
	V [kN]	433.8	441.7	-1.79%
	δ [cm]	3.098	2.989	3.65%

En las Tablas 3 y 4 se pueden encontrar los valores resultantes de momento flector y fuerza cortante en la unión viga-pila para el primer modo de vibración vertical y para luego combinar la respuesta de los primeros 30 modos de vibración incluidos en el análisis, respectivamente. Además, en las Tablas 3 y 4 también se encuentran los resultados de desplazamiento sísmico vertical en el extremo libre, para cada una de las etapas constructivas

planteadas en la Figura 4. Se tuvieron en cuenta los resultados sísmicos para el primer modo de vibración vertical (Tabla 3) debido a que Chopra (2011) estipula que el método de sistemas generalizados de un solo grado de libertad ofrece resultados aproximados para el modo de vibración fundamental en el caso de sistemas de masa distribuida. En adelante, en las tablas se utilizará la letra “M” para indicar momento flector y la letra “V” para referirse a la fuerza cortante, ambos en la unión viga-pila (análisis multimodal espectral) o al inicio de la viga idealizada en cantiléver (análisis simplificado). Además, letra griega “ δ ” denota el desplazamiento vertical del extremo libre de la viga del puente o idealizada.

Tabla 3

Respuestas máximas del análisis multimodal espectral y del análisis simplificado utilizando f_1 , f_2 y f_3 , para el primer modo de vibración vertical.

Avance Voladizo	Análisis Multimodal			Análisis Simplificado								
	Espectral			f1			f2			f3		
	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]
25%	9524.1	1082.2	0.05	6796.4	659.5	0.01	6610.7	632.5	0.01	6350.5	597.2	0.01
50%	25909.5	1072.7	0.40	26612.9	1094.5	0.34	25474.5	1032.6	0.35	25580.5	1020.2	0.34
75%	25992.1	661.3	1.24	28826.4	756.0	1.09	27052.0	698.9	1.17	26091.8	663.0	1.21
100%	24302.3	441.7	2.99	29804.7	571.2	2.44	27507.8	519.2	2.69	25896.1	480.7	2.90

Tabla 4

Respuestas máximas del análisis multimodal espectral, teniendo en cuenta los primeros 30 modos de vibración estipulados.

Avance Voladizo	Análisis Multimodal Espectral		
	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]
25%	9657.6	1084.7	0.05
50%	26252.3	1385.1	0.40
75%	29270.6	1328.6	1.25
100%	29392.6	1095.7	3.01

3.2 Análisis dinámico simplificado con el método de sistemas de un solo grado de libertad generalizados

3.2.1 Respuesta modal y sísmica de la viga

Este análisis se lleva a cabo utilizando el método numérico de la regla del trapecio, para el cual se utilizan como pesos las áreas e inercias del comienzo y final de cada dovela, mostrados en el Anexo D, junto con las longitudes de cada dovela. Por lo tanto, si se tienen cinco (5) dovelas, se tendrían seis (6) puntos a evaluar con el método numérico. Como resultado de este análisis se obtuvo un valor de período fundamental vertical para cada una de las etapas de construcción evaluadas, mostrados en la Tabla 5. Al igual que en el análisis modal con el software Midas Civil, los periodos fundamentales se alargan con el avance del proceso constructivo, iniciando con 0.04 s en CS6 y terminando con 0.97 s en CS19.

Tabla 5

Periodos fundamentales verticales para cada una de las secciones propuestas.

Avance del voladizo	Periodo [s]
25%	0.04
50%	0.20
75%	0.51
100%	0.97

En la Tabla 3 se muestran los resultados de momento flector y fuerza cortante en el apoyo de la viga, al igual que el valor del desplazamiento vertical del extremo libre, correspondientes a cada una de las cuatro etapas constructivas evaluadas y a cada una de las funciones de forma utilizadas. Para este análisis se utilizó el espectro de diseño de aceleración vertical definido en la Figura 8 y como pesos para el uso de la regla del trapecio, los valores de área e inercia de comienzo y final de cada dovela (ver Anexo D), al igual que las mismas características de los materiales ingresados al software Midas Civil.

3.3 Comparación de respuestas sísmicas máximas

Para determinar el nivel de exactitud del método de sistemas generalizados de un solo grado de libertad en el cálculo del momento flector y la fuerza cortante en la unión viga-pila del puente y el desplazamiento vertical del extremo libre, se calculó un porcentaje de diferencia entre los resultados obtenidos siguiendo lo expuesto en la sección 1.4.2.

La Tabla 6 muestra los porcentajes de diferencia calculados entre los resultados obtenidos para el primer modo de vibración vertical con el análisis multimodal espectral y para el análisis

simplificado utilizando con las funciones de forma $f1$, $f2$ y $f3$, para cada una de las etapas de construcción evaluadas. Por otro lado, la Tabla 7 muestra los porcentajes de diferencia calculados al usar los resultados teniendo en cuenta los primeros 30 modos de vibración, comparados con los mismos datos obtenidos del análisis simplificado.

Se observa de la Tabla 6 que el análisis simplificado muestra un nivel de exactitud alto para las tres funciones de forma evaluadas cuando se tiene un avance del 50% del voladizo, especialmente en el caso del momento flector y la fuerza cortante, mientras que para un avance del 25% se tiene un nivel de exactitud bajo para las tres funciones de forma evaluadas, especialmente en el caso del desplazamiento vertical del extremo libre. De las tres funciones de forma usadas, la que muestra mejores resultados es $f3$, sin tener en cuenta el caso del avance del 25%, en el cual todas presentan resultados similares, mientras que $f1$ es la que muestra los porcentajes de diferencia mayores. Resultados similares se obtuvieron al utilizar el mismo método (sistemas de un solo grado de libertad generalizados) y las mismas funciones de forma $f1$, $f2$ y $f3$, sobre una viga sencilla de sección variable introducida por Chopra [18]. Estos últimos resultados se pueden encontrar en el Anexo E.

Por otro lado, teniendo en cuenta los resultados de la Tabla 7, se observa un nivel de exactitud bajo para un avance de voladizo del 25%, para las tres respuestas sísmicas y con las tres funciones de forma, mientras que el nivel de exactitud obtenido es aceptable (diferencias absolutas menores a 15%) en el caso de los momentos flectores con un avance de voladizo de 50%, 75% y 100%, principalmente con $f1$. Sin embargo, este nivel de exactitud disminuye en gran medida para el caso de la fuerza cortante (diferencias entre 21% y 57%), con las tres funciones de forma evaluadas. Esto puede explicarse por la distribución de los porcentajes de participación de masa modal en los modos de vibración verticales del puente. Conforme avanza el proceso constructivo,

los modos de vibración superiores adquieren mayor porcentaje de participación de masa modal, por lo tanto, adquieren mayor influencia en la respuesta combinada de los primeros 30 modos de vibración. Adicionalmente, los modos de vibración superiores tienen periodos más cortos, lo cual está relacionado con aceleraciones verticales mayores (Figura 8), y, por consiguiente, fuerzas sísmicas mayores. Por lo tanto, los modos de vibración superiores aportan una cantidad considerable de fuerza cortante a la viga del puente conforme avanza su proceso constructivo.

Tabla 6

Comparación de las respuestas máximas del análisis multimodal espectral y del análisis numérico utilizando f_1 , f_2 y f_3 , para el primer modo de vibración vertical.

Avance Voladizo	f1			f2			f3		
	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]
25%	-28.6%	-39.1%	-73.5%	-30.6%	-41.6%	-73.3%	-33.3%	-44.8%	-78.7%
50%	2.7%	2.0%	-15.2%	-1.7%	-3.7%	-11.8%	-1.3%	-4.9%	-14.8%
75%	10.9%	14.3%	-12.3%	4.1%	5.7%	-5.9%	0.4%	0.3%	-2.6%
100%	22.6%	29.3%	-18.3%	13.2%	17.5%	-10.0%	6.6%	8.8%	-3.0%

Tabla 7

Comparación de las respuestas máximas del análisis multimodal espectral, teniendo en cuenta los primeros 30 modos de vibración.

Avance Voladizo	f1			f2			f3		
	M [kN- m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN- m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN- m]	V [kN]	δ [cm]
25%	-29.6%	-39.2%	-73.5%	-31.5%	-41.7%	-73.3%	-34.2%	-44.9%	-78.7%
50%	1.4%	-21.0%	-15.6%	-3.0%	-25.4%	-12.3%	-2.6%	-26.3%	-15.2%
75%	-1.5%	-43.1%	-13.0%	-7.6%	-47.4%	-6.6%	-10.9%	-50.1%	-3.4%
100%	1.4%	-47.9%	-18.9%	-6.4%	-52.6%	-10.7%	-11.9%	-56.1%	-3.8%

En la Figura 12 se comparan las formas modales normalizadas obtenidas del análisis modal usando el software Midas Civil para el primer modo de vibración vertical con un avance del 75% del voladizo, con las funciones de forma especificadas en el apartado 1.4.1. Las gráficas con las comparaciones para las demás etapas del proceso constructivo se presentan en el Anexo F. Se puede observar en la Figura 12 que la forma modal normalizada obtenida con el análisis modal usando el software Midas Civil es similar a las formas modales obtenidas al utilizar las funciones de forma $f2$ y $f3$, mientras que se encuentra más alejada de la función de forma $f1$. También se puede observar en la Tabla 6 que los porcentajes de diferencia para las funciones $f2$ y $f3$ para un avance de voladizo del 75% son bajos (toman valores de 0,5% hasta 6%), mientras que para la función $f1$ son un poco mayores (de 10.9% a 14.3%). Este patrón se repite en las otras gráficas mostradas en el Anexo F, lo que permite concluir que existe una relación entre la similitud de las formas modales generalizadas y el porcentaje de diferencia entre las respuestas sísmicas halladas con cada tipo de análisis para el primer modo de vibración vertical.

Esto también se ve reflejado en los altos valores de porcentaje de diferencia obtenidos en el caso del avance del voladizo del 25% (Figura 13), pues las formas modales normalizadas obtenidas con las funciones $f1$, $f2$ y $f3$, difieren en gran medida con la obtenida con el análisis modal, mientras que, en los otros tres casos, las diferencias son mucho menores.

Figura 12

Comparación de las formas modales obtenidas por el análisis modal por software y el análisis simplificado, para un avance de voladizo del 75%.

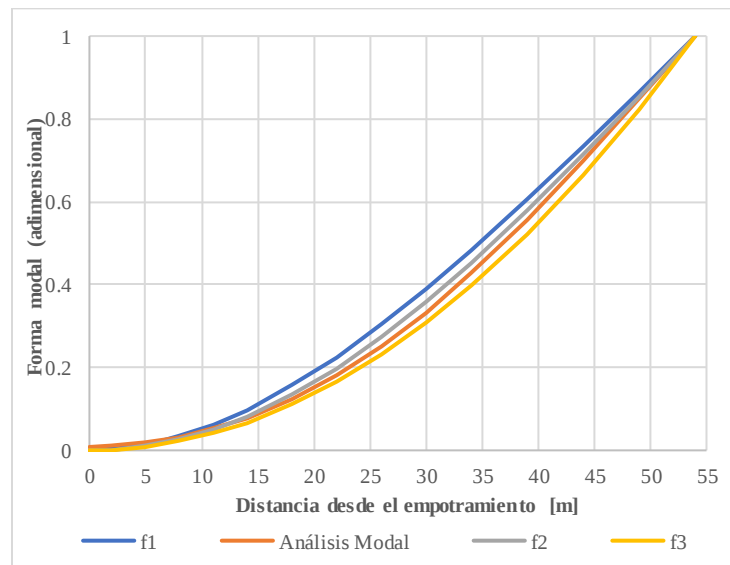
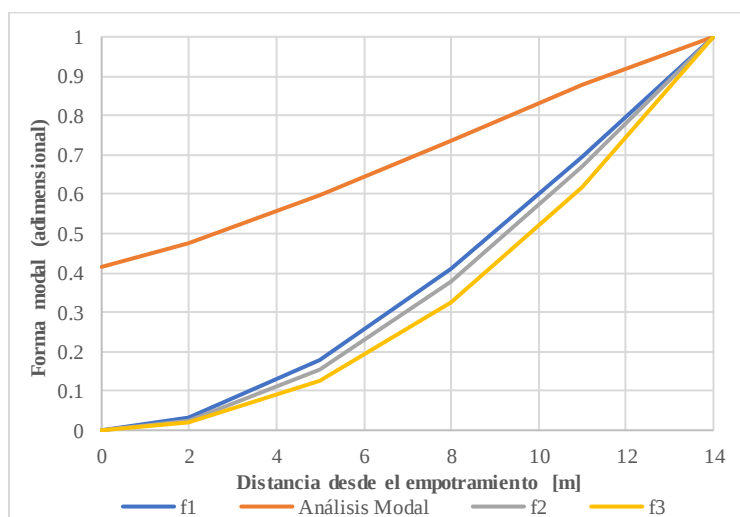


Figura 13

Comparación de las formas modales obtenidas por el análisis modal por software y el análisis simplificado, para un avance de voladizo del 25%.



Para determinar si estos porcentajes altos de diferencia son consecuencia de la desigualdad en la rigidez entre empotramiento perfecto y conexión rígida o, en cambio, está únicamente relacionado con la función de forma utilizada, se creó un modelo en el software Midas Civil en el cual se modeló la mitad de la viga del puente y se implementó un empotramiento perfecto en el lugar donde estaría la conexión rígida. Para este modelo se utilizaron las mismas características de materiales, etapas de construcción (excluyendo *CS1*) y demás datos implementados en el modelo original. En la Tabla 8 se muestran los resultados obtenidos por este análisis tanto para el primer modo de vibración vertical y para la respuesta teniendo en cuenta los primeros 30 modos de vibración establecidos, mientras que en las Tablas 9 y 10 se listan los porcentajes de diferencia entre los resultados sísmicos de la Tabla 8 y los resultados sísmicos correspondientes a cada una de las funciones de forma $f1$, $f2$ y $f3$ (Tabla 3).

Tabla 8

Respuestas máximas del análisis multimodal espectral para media viga del puente en condición de empotramiento perfecto.

Avance Voladizo	Análisis Multimodal Espectral					
	Primer modo de vibración			Primeros 30 modos de vibración		
	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]
25%	6729.5	692.4	0.02	6840.9	731.4	0.02
50%	23674.9	975.5	0.38	24175.8	1158	0.38
75%	25008.6	638.6	1.25	27507.4	1066.6	1.25
100%	23772.6	433.8	3.04	28047.7	909.1	3.06

Tabla 9

Porcentajes de diferencia entre el análisis multimodal espectral de la viga empotrada para el primer modo de vibración vertical y el análisis simplificado.

Avance Voladizo	f1			f2			f3		
	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]
25%	1.0%	-4.8%	-49.2%	-1.8%	-8.7%	-48.8%	-5.6%	-13.7%	-59.2%
50%	12.4%	12.2%	-10.7%	7.6%	5.9%	-7.2%	8.0%	4.6%	-10.3%
75%	15.3%	18.4%	-12.7%	8.2%	9.4%	-6.4%	4.3%	3.8%	-3.2%
100%	25.4%	31.7%	-19.7%	15.7%	19.7%	-11.5%	8.9%	10.8%	-4.6%

Tabla 10

Porcentajes de diferencia entre el análisis multimodal espectral de la viga empotrada, teniendo en cuenta los primeros 30 modos de vibración, y el análisis simplificado.

Avance Voladizo	f1			f2			f3		
	M [kN- m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN- m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN- m]	V [kN]	δ [cm]
25%	-0.7%	-9.8%	-49.2%	-3.4%	-13.5%	-48.8%	-7.2%	-18.3%	-59.2%
50%	10.1%	-5.5%	-10.7%	5.4%	-10.8%	-7.2%	5.8%	-11.9%	-10.3%
75%	4.8%	-29.1%	-13.2%	-1.7%	-34.5%	-6.9%	-5.1%	-37.8%	-3.7%
100%	6.3%	-37.2%	-20.2%	-1.9%	-42.9%	-12.1%	-7.7%	-47.1%	-5.3%

Los datos de las Tablas 9 y 10 revelan que, en comparación con los resultados obtenidos en la Tabla 6, los resultados de la Tabla 8 mejoraron considerablemente para el caso de avance del voladizo del 25%, mientras que para los demás casos este porcentaje de diferencia aumentó. Sin embargo, siguen siendo relativamente bajos en su mayoría (por ejemplo, 15%). Al igual que los resultados presentados para el puente completo. La función de forma f_3 brinda los mejores resultados en general. Comparando los resultados de las Tablas 7 y 10, también se observa una mejora en los porcentajes de diferencia para el caso de avance de voladizo del 25%, al igual que una mejora en la exactitud del cálculo de las fuerzas cortantes para las tres funciones de forma, pues disminuyó el porcentaje de diferencia de esta respuesta sísmica. Sin embargo, la fuerza cortante sigue siendo el parámetro que presenta un mayor porcentaje de diferencia cuando se contemplan los primeros 30 modos de vibración, a pesar de que el modelo en cuestión presenta un empotramiento perfecto.

En este caso se muestra una disminución en los porcentajes de diferencia y aunque todavía haya valores que tengan un porcentaje significativo, principalmente los relacionados a la fuerza

cortante, se generó una mejor aproximación que con el modelo computacional original del puente. Esto quiere decir que la rigidez de la unión viga-pila influye en gran medida en la exactitud de la respuesta obtenida, como se vio reflejado con el caso del 25% de avance del voladizo.

4. Conclusiones

En esta investigación se buscaba determinar el nivel de exactitud al usar el método de sistemas generalizados de un solo grado de libertad para hallar el momento flector y la fuerza cortante en la unión viga-pila de un puente construido por voladizos sucesivos, al igual que el desplazamiento vertical del extremo libre. Las principales conclusiones del estudio son:

El nivel de exactitud del método de sistemas generalizados de un solo grado de libertad depende en gran medida de la función de forma que se escoja, de cuán similar sea ésta a la forma modal del puente en cada etapa constructiva, y de la condición de rigidez que se le atribuya a la unión viga-pila en el análisis simplificado.

La influencia de los modos superiores de vibración en la respuesta modal de la estructura afecta el nivel de exactitud del análisis simplificado realizado, especialmente en el caso de la estimación de la fuerza cortante.

Se concluye que, de las tres funciones de forma planteadas, $f_3=x^2$ brindó los mejores resultados al tener en cuenta únicamente el primer modo de vibración vertical, mientras que f_1 (Ecuación 15), que corresponde a la forma modal de una viga cantiléver con empotramiento perfecto a un lado y con sección transversal constante (m y EI constantes), fue la que brindó un nivel de exactitud más bajo.

Se observa que para el caso del 25% de avance del voladizo, la condición de rigidez establecida (empotramiento perfecto y conexión rígida) tuvo una influencia importante en el nivel de exactitud del método de sistemas generalizados de un solo grado de libertad, sin importar la función de forma.

Se concluye que el método no es aplicable en cualquier etapa constructiva, si no que tiene ciertas limitaciones relacionadas a la función de forma y a la condición de rigidez que se le atribuya a la unión viga-pila, ya sea de empotramiento perfecto o de conexión rígida.

Referencias Bibliográficas

- Acosta, J. (2009). *Reglas de Combinación de las Componentes Sísmicas en el Diseño de Puentes*.
- Bayraktar, A., Kudu, F. N., Sömerkan, S., Demirtas, B., & Akköse, M. (2020). Near-fault vertical ground motion effects on the response of balanced cantilever bridges. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Bridge Engineering*, 173(1), 17–33.
<https://doi.org/10.1680/jbren.19.00007>
- Bozorgnia, Y., & Campbell, K. W. (2004). The vertical-to-horizontal response spectral ratio and tentative procedures for developing simplified V/H and vertical design spectra. *Journal of Earthquake Engineering*, 8(2), 175–207. <https://doi.org/10.1080/13632460409350486>
- Cabrera, O. (2013). *Incidencia de la Componente Vertical Sísmica en el Comportamiento Estructural de una Edificación en Mampostería Estructural*. 66(1997), 37–39.
- Castro, S. (2021). *Respuesta Elástica de un Puente Viga Cajón bajo la Acción Combinada de Movimientos Sísmicos Verticales y Horizontales Durante Construcción y Servicio*.
- Chopra, A. (2011). *Dynamic of Structures Chopra*. Pearson.
- Comite Euro-Internacional Du Beton. (1993). *CEB-FIP Model Code 90*. 213/214, 460.
- De La Cruz, C. (2018). *Análisis De La Respuesta Dinámica De Los Esfuerzos De Empotramiento En Una Viga En Cantiliver*.
- Fernández, M., & Ardila, J. (2020). *Caracterización de la componente vertical de los sismos moderados y fuertes en Colombia Characterization of the Vertical Component of Moderate and Strong Ground Motions in Colombia*.
- Lee, Marsh, M., Buckle, I. G., & Kavazanjian, E. (2014). *LRFD Seismic Analysis and Design of*

Bridges - Reference Manual. FHWA-NHI-15-004, 608.

Lucko, G., & de la Garza, J. M. (2003). Constructability Considerations for Balanced Cantilever Construction. *Practice Periodical on Structural Design and Construction*, 8(1), 47–56.

[https://doi.org/10.1061/\(asce\)1084-0680\(2003\)8:1\(47\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1084-0680(2003)8:1(47))

Magura, D. D., Sozen, M., & Siess, C. P. (1964). A Study of Stress Relaxation in Prestressing Reinforcement. *PCI Journal*, 9, 13–57.

Matlab. (2020). *version 7.20.0 (R2020b)* (No. R2020b). The Mathworks Inc.

MIDAS CIVIL Software (No. 2021). (2020).

Ministerio Ambiente Vivienda y Desarrollo Territorial. (2010). Título A - Requisitos Generales de Diseño y Construcción Sismo Resistente. *Nsr-10, Título A*, 1–174.

Perea, T., & Esteva, L. (2005). Componente vertical de registros sísmicos en México y en su efecto en la respuesta sísmica no lineal de edificios. *Revista de Ingeniería Sísmica*, 72, 45–79.

Romero, E. (2007). *Integración Numérica*. x, 1–15. <http://www-lacan.upc.es>

Stucki, C., & Bruneau, M. (2018). Reduction of Seismic Acceleration Parameters for Temporary Bridge Design. *Journal of Bridge Engineering*, 23(10), 04018081.

[https://doi.org/10.1061/\(asce\)be.1943-5592.0001292](https://doi.org/10.1061/(asce)be.1943-5592.0001292)

Takács, P. F. (2002). *Deformations in Concrete Cantilever Bridges : Observations and Theoretical Modelling*. March, 205. <http://ntnu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:121731>

Zheng, Y., & Yuan, W. (2012). Study on dynamic characteristics of long span continuous bridge from construction to completion constructed by cantilever method based on perspective of earthquake resistance. *Advanced Materials Research*, 368–373, 988–992.

<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.368-373.988>

Apéndices

Apéndice A. Respuestas modales de las etapas constructivas

A continuación, se presentan las respuestas modales en la dirección vertical “Z” de cada una de las etapas constructivas evaluadas (Figura 4), correspondientes a los periodos y porcentajes de participación de masa modal para cada uno de los primeros 30 modos de vibración establecidos.

Tabla A1.

Respuestas modales y periodos del puente para un avance del voladizo del 25% y del 50%.

25%				50%			
Modo No	Periodo [s]	TRAN-Z		Modo No	Periodo [s]	TRAN-Z	
		MASS(%)	SUM(%)			MASS(%)	SUM(%)
1	0.680	0	0	1	1.298	0	0
2	0.453	0	0	2	0.966	0	0
3	0.283	0	0	3	0.673	0	0
4	0.113	0	0	4	0.276	0	0
5	0.071	79.54	79.54	5	0.231	51.32	51.32
6	0.043	0	79.54	6	0.133	0	51.32
7	0.032	11.45	90.99	7	0.072	34.95	86.27
8	0.032	0	90.99	8	0.069	0	86.27
9	0.032	0	90.99	9	0.060	0	86.27
10	0.019	0	90.99	10	0.043	0	86.27
11	0.017	0	90.99	11	0.037	7.18	93.44
12	0.017	2.58	93.57	12	0.036	0	93.44
13	0.016	0	93.57	13	0.035	0.49	93.93

14	0.015	0	93.57	14	0.035	0	93.93
15	0.013	0	93.57	15	0.028	0	93.93
16	0.013	1.94	95.51	16	0.027	0	93.93
17	0.011	0	95.51	17	0.022	1.66	95.59
18	0.010	0	95.51	18	0.021	0	95.59
19	0.010	0	95.51	19	0.021	0	95.59
20	0.010	1.99	97.5	20	0.018	0	95.59
21	0.010	0	97.5	21	0.017	0	95.59
22	0.009	0	97.5	22	0.016	0	95.59
23	0.009	0	97.5	23	0.016	0.44	96.03
24	0.008	0	97.5	24	0.016	0	96.03
25	0.008	0	97.5	25	0.015	0.63	96.67
26	0.008	0	97.5	26	0.015	0	96.67
27	0.008	0.57	98.08	27	0.014	0	96.67
28	0.008	0	98.08	28	0.013	0	96.67
29	0.007	0.07	98.14	29	0.012	0	96.67
30	0.007	0	98.14	30	0.012	0.75	97.41

Tabla A2.

Respuestas modales y periodos del puente para un avance del voladizo del 75% y del 100%.

75%				100%			
Modo No	Periodo [s]	TRAN-Z		Modo No	Periodo [s]	TRAN-Z	
		MASS(%)	SUM(%)			MASS(%)	SUM(%)
1	2.069	0	0	1	3.032	0	0
2	1.794	0	0	2	2.749	0	0
3	0.858	0	0	3	1.115	40.79	40.79
4	0.556	44.59	44.59	4	1.106	0	40.79

5	0.415	0	44.59	5	0.589	0	40.79
6	0.285	0	44.59	6	0.453	0	40.79
7	0.173	0	44.59	7	0.328	0	40.79
8	0.143	25.46	70.05	8	0.280	21.29	62.08
9	0.127	0	70.05	9	0.222	0	62.08
10	0.074	0	70.05	10	0.137	0	62.08
11	0.069	17.42	87.47	11	0.123	0	62.08
12	0.069	0	87.47	12	0.123	13.56	75.64
13	0.055	0.66	88.12	13	0.080	0	75.64
14	0.050	0	88.12	14	0.076	9.12	84.76
15	0.043	5.8	93.92	15	0.074	0	84.76
16	0.043	0	93.92	16	0.070	2.4	87.15
17	0.039	0	93.92	17	0.059	0	87.15
18	0.036	0	93.92	18	0.051	6.12	93.28
19	0.035	0	93.92	19	0.048	0	93.28
20	0.030	1.79	95.71	20	0.045	0	93.28
21	0.030	0	95.71	21	0.044	0	93.28
22	0.030	0	95.71	22	0.042	0	93.28
23	0.026	0	95.71	23	0.038	2.27	95.55
24	0.025	0	95.71	24	0.036	0	95.55
25	0.022	0.73	96.45	25	0.035	0	95.55
26	0.021	0	96.45	26	0.032	0	95.55
27	0.021	0.04	96.48	27	0.031	0	95.55
28	0.020	0	96.48	28	0.030	0.6	96.15
29	0.019	0	96.48	29	0.028	0.33	96.48
30	0.018	0.46	96.94	30	0.027	0	96.48

Apéndice B. Eigenvectores del primer modo de vibración vertical.

A continuación, se muestran los eigenvectores correspondientes al primer modo de vibración vertical de cada uno de los nodos ubicados en los extremos de cada una de las dovelas, para un avance del 25%, 50%, 75% y 100% del voladizo.

Tabla B1.

Eigenvectores del primer modo de vibración vertical de la viga del puente para un avance del voladizo del 25% y 50%.

25%			50%		
Nodo	Distancia desde unión viga-pila [m]	Eigenvector	Nodo	Distancia desde unión viga-pila [m]	Eigenvector
15	14	0.044876	10	34	0.0470
16	11	0.039317	11	30	0.0394
17	8	0.033042	12	26	0.0318
18	5	0.026794	13	22	0.0245
19	2	0.02139	14	18	0.0179
20	0	0.0186	15	14	0.0122
21	2	0.0214	16	11	0.0086
22	5	0.0268	17	8	0.0058
23	8	0.0330	18	5	0.0037
24	11	0.0393	19	2	0.0024
25	14	0.0449	20	0	0.0019
			21	2	0.0024
			22	5	0.0037
			23	8	0.0058

24	11	0.0086
25	14	0.0122
26	18	0.0179
27	22	0.0245
28	26	0.0318
29	30	0.0394
30	34	0.0470

Tabla B2.

Eigenectores del primer modo de vibración vertical de la viga del puente para un avance del voladizo del 75% y 100%.

75%			100%		
Nodo	Distancia desde unión viga-pila [m]	Eigenvector	Nodo	Distancia desde unión viga-pila [m]	Eigenvector
6	54	0.0448	2	74	0.0428
7	49	0.0381	3	69	0.0376
8	44	0.0314	4	64	0.0324
9	39	0.0250	5	59	0.0274
10	34	0.0191	6	54	0.0226
11	30	0.0149	7	49	0.0182
12	26	0.0113	8	44	0.0142
13	22	0.0081	9	39	0.0108
14	18	0.0055	10	34	0.0079
15	14	0.0035	11	30	0.0060
16	11	0.0023	12	26	0.0044
17	8	0.0014	13	22	0.0031

18	5	0.0008	14	18	0.0020
19	2	0.0005	15	14	0.0013
20	0	0.0004	16	11	0.0008
21	2	0.0005	17	8	0.0005
22	5	0.0008	18	5	0.0003
23	8	0.0014	19	2	0.0001
24	11	0.0023	20	0	0.0001
25	14	0.0035	21	2	0.0001
26	18	0.0055	22	5	0.0003
27	22	0.0081	23	8	0.0005
28	26	0.0113	24	11	0.0008
29	30	0.0149	25	14	0.0013
30	34	0.0191	26	18	0.0020
31	39	0.0250	27	22	0.0031
32	44	0.0314	28	26	0.0044
33	49	0.0381	29	30	0.0060
34	54	0.0448	30	34	0.0079
			31	39	0.0108
			32	44	0.0142
			33	49	0.0182
			34	54	0.0226
			35	59	0.0274
			36	64	0.0324
			37	69	0.0376
			38	74	0.0428

Apéndice C. Porcentaje de diferencia en el análisis con y sin presfuerzo.

A continuación, se muestra la tabla adicional con el cálculo del porcentaje de diferencia cuando se incluye y se ignora la acción del presfuerzo en la respuesta sísmica de la viga del puente. Esta tabla hace referencia a los primeros 30 modos de vibración del puente.

Tabla C1.

Comparación de resultados al incluir e ignorar el presfuerzo presente en la viga del puente, para los primeros 30 modos de vibración.

Avance del voladizo	Aspecto	Sin PS	Con PS	% Diferencia
25 %	M [kN-m]	9664.1	9657.6	0.07%
	V [kN]	1083.5	1084.7	0.11%
	δ [cm]	0.046	0.046	0.00%
50 %	M [kN-m]	25931.3	26252.3	1.22%
	V [kN]	1374.2	1385.1	0.79%
	δ [cm]	0.407	0.401	1.50%
75 %	M [kN-m]	28761	29270.6	1.74%
	V [kN]	1315	1328.6	1.02%
	δ [cm]	1.287	1.248	3.12%
100 %	M [kN-m]	28742.1	29392.6	2.21%
	V [kN]	1069	1095.7	2.44%
	δ [cm]	3.123	3.013	3.65%

Apéndice D. Pesos para el método numérico.

Para la ejecución del análisis numérico se utilizó el método numérico de la regla del trapecio, para el cual se utilizan como pesos las áreas e inercias del comienzo y final de cada dovela, mostrados a continuación, junto con las longitudes de cada dovela. Los datos de longitud se obtuvieron de los planos de diseño, mientras que los datos de áreas e inercias se obtuvieron del software Midas Civil. Los valores de “x” mostrados en la tabla comienzan en la unión viga-pila (análisis multimodal espectral) o base de la viga cantiléver (análisis simplificado), y van aumentando con respecto a las longitudes de las dovelas. Como un adicional, se incluyen las etapas constructivas en las que se llevan a cabo cada una de las dovelas en cuestión.

Tabla D1.

Datos de distancias, áreas, inercias y etapas de construcción utilizados en el análisis simplificado.

x [m]	Longitud Dovela [m]	CS	Área [m ²]	Inercia [m ⁴]
0	-	-	14.304	107.779
2	2	2	14.304	107.779
5	3	3	13.723	93.090
8	3	4	13.167	80.254
11	3	5	12.635	69.069
14	3	6	12.128	59.351
18	4	7	11.491	48.392
22	4	8	10.898	39.393
26	4	9	10.348	32.049
30	4	10	9.843	26.091
34	4	11	9.382	21.289

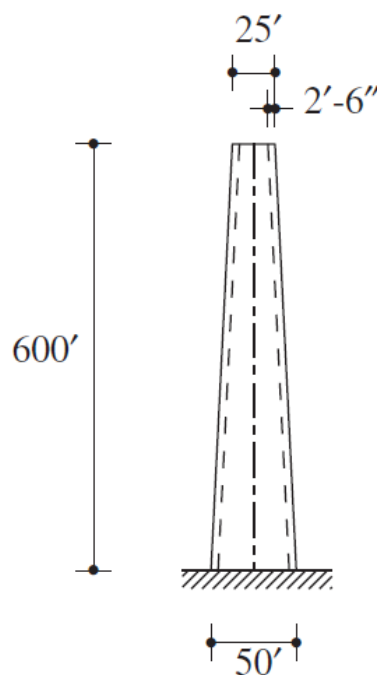
39	5	12	8.866	16.616
44	5	13	8.420	13.121
49	5	14	8.042	10.546
54	5	15	7.733	8.689
59	5	16	7.493	7.394
64	5	17	7.321	6.546
69	5	18	7.218	6.067
74	5	19	7.184	5.912

Apéndice E. Ejemplo de estudio mostrado por Chopra.

En el libro *Dinámica de Estructuras*, 4ta edición, Chopra plantea el ejercicio mostrado en la Figura E1. Se supone que la chimenea está fija en la base y se estima que su fracción de amortiguamiento es de 5%. El peso unitario del concreto es de 150 lb/pie^3 y su módulo de elasticidad $E_c = 3600 \text{ ksi}$ y se usa el espectro de diseño mostrado en la Figura E2 escalado a $0.25g$.

Figura E1

Comparación de las formas modales obtenidas por el análisis modal por software y el análisis simplificado, para un avance de voladizo del 75%.



Nota. Tomado de *Dynamic of Structures Chopra*, por A. Chopra, 2011.

Figura E2

Espectro de diseño.

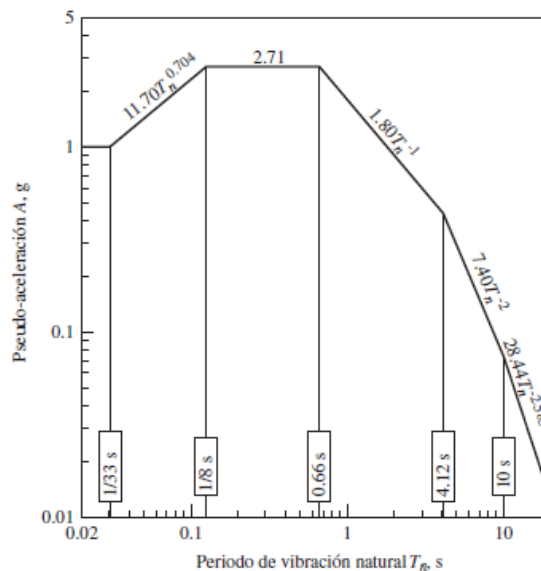


Figura 6.9.5 Espectro de diseño elástico de pseudo-aceleración (percentil 84.1) para movimientos del terreno con $\ddot{u}_{go} = 1g$, $\dot{u}_{go} = 48$ pulg/s y $u_{go} = 36$ pulg; $\zeta = 5\%$.

Nota. Tomado de *Dynamic of Structures Chopra*, por A. Chopra, 2011.

Para poder comparar resultados, se modeló la estructura con las características anteriormente expuestas en el software Midas Civil para determinar el momento flector y la fuerza cortante en la base de la estructura y el desplazamiento del extremo libre de esta, y se calcularon los mismos valores por el método de sistemas generalizados de un solo grado de libertad, de la misma forma que en esta investigación, con las funciones de forma f_1 , f_2 y f_3 y teniendo en cuenta 50 intervalos de igual tamaño. En este caso, estos valores se calcularon para la estructura completa. Los resultados se muestran a continuación:

Tabla E1.

Respuestas máximas del análisis multimodal espectral y del análisis numérico utilizando f_1 , f_2 y f_3 , para el primer modo de vibración vertical.

Análisis Multimodal Espectral			Análisis Numérico								
			f1			f2			f3		
M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]
269828.0	636.3	9.32	286786.3	687.3	8.94	272623.3	643.6	9.27	273121.8	634.4	9.30

Tabla E2.

Porcentaje de diferencia entre los resultados del análisis multimodal espectral y el análisis numérico utilizando f_1 , f_2 y f_3 .

f1			f2			f3		
M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]	M [kN-m]	V [kN]	δ [cm]
6.3%	8.0%	-4.1%	1.0%	1.1%	-0.5%	1.2%	-0.3%	-0.2%

Se puede observar que la función que menos se ajusta y da los porcentajes de diferencia mayores es f_1 , mientras que f_3 brinda resultados más acertados.

Apéndice F. Comparación de formas modales.

A continuación, se muestra la comparación entre las formas modales normalizadas obtenidas por el análisis modal del software Midas Civil para el primer modo de vibración vertical, y por las funciones de forma f1, f2 y f3, para las 4 etapas constructivas evaluadas.

Figura F1

Comparación de las formas modales obtenidas por el análisis modal del software Midas Civil y por las tres funciones de forma, para un avance de voladizo de a) 25%, b) 50%, c) 75% y d) 100%.

