

**PROCESAMIENTO POR BLOQUES DE SEÑALES
ESPECTRALES MEDIANTE LA TÉCNICA DE
COMPRESSIVE SAMPLING**

CLAUDIA VICTORIA CORREA PUGLIESE

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
BUCARAMANGA
2013

PROCESAMIENTO POR BLOQUES DE SEÑALES ESPECTRALES MEDIANTE LA TÉCNICA DE COMPRESSIVE SAMPLING

CLAUDIA VICTORIA CORREA PUGLIESE

Trabajo de investigación para optar por el título de:
Magíster en Ingeniería de Sistemas e Informática

Director:

Ph.D.(c), MPE. HENRY ARGUELLO FUENTES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA
BUCARAMANGA

2013

*A Dios,
A mis padres y hermano,
A Hoover*

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado con la colaboración del Departamento de Ingeniería Eléctrica y Computación de la Universidad de Delaware, Newark, DE, USA. Específicamente, los datos utilizados para las simulaciones fueron capturados en el laboratorio “Computational Imaging and Sensing” dirigido por el Profesor Gonzalo Arce.

También quiero expresar mi agradecimiento al Profesor Henry Arguello por su apoyo y enseñanzas en todas las etapas de la maestría. A los compañeros del grupo de investigación que han recorrido este camino conmigo. A mi familia por estar presente a pesar de la distancia, y a Hoover por su compañía y apoyo constante.

Índice general

Introducción	15
1. Teoría de Compressive Sampling	20
2. Sistema de Adquisición de Señales Espectrales Basado en Aperturas Codificadas (CASSI)	24
3. Modelo de Reconstrucción por Bloques	29
3.1. Descomposición del conjunto de mediciones en bloques	29
3.2. Reconstrucción del cubo de datos a partir de bloques de mediciones	33
4. Modelo de Reconstrucción por Bloques con Solapamiento	36
4.1. Descomposición del conjunto de mediciones en bloques con solapamiento	36
4.2. Reconstrucción del cubo de datos a partir de bloques con solapamiento	37
5. Simulaciones y Resultados	42
5.1. Reconstrucciones utilizando bloques con solapamiento	43
5.2. Reconstrucción por bloques con solapamiento usando mediciones con ruido	49
5.3. Tiempo de reconstrucción	50
6. Conclusiones, Contribuciones y Trabajo futuro	56
6.1. Conclusiones	56

6.2. Contribuciones	57
6.3. Trabajo Futuro	58
Referencias	59

Índice de figuras

1.	Conjunto de datos de una imagen espectral donde x y y corresponden a las dimensiones espaciales y λ es la dimensión espectral. Cada punto espacial (x, y) en la imagen contiene un espectro completo $I(x, y, \lambda)$	15
1.1.	(a) Imagen espectral original; (b) Coeficientes de (a) en una base de representación Ψ obtenida como el producto kronecker de la base coseno (DCT) y Wavelet en 2D; (c) Imagen espectral reconstruida utilizando el 7% de los coeficientes más significativos, el 93% restante fue convertido en cero.	21
2.1.	Arquitectura del sistema CASSI. La señal de entrada $f_0(x, y, \lambda)$ es modulada espacialmente por la apertura codificada $T(x, y)$ y dispersada por un prisma. La señal codificada y dispersada $f_2(x, y, \lambda)$ es integrada en el detector FPA.	24
2.2.	Proceso de captura del sistema CASSI. Un cubo de datos de dimensiones $N \times N \times L$ es modulado espacialmente por la apertura codificada y dispersado por el prisma. Cada píxel en el detector contiene información integrada correspondiente a diferentes elementos del cubo de datos.	25
2.3.	Estructura de la matriz \mathbf{H} para $N = 4$, $L = 3$ y $K = 2$. Los cuadros blancos indican los píxeles del código de apertura que permiten el paso de la luz.	27

3.1. Análisis inverso del sensado del sistema CASSI. Cada bloque de $B \times B$ en el detector es el resultado de sensar una porción del cubo de datos en forma de paralelepípedo oblicuo con dimensiones $B \times B \times L$. El proceso de sensado del CASSI no es modificado.	30
3.2. Procedimiento para obtener las sub-matrices \mathbf{H}_{mn}^i a partir de la matriz de sensado \mathbf{H}^i para $N = 4$, $L = 3$ y $B = 2$. Los elementos diferentes de cero en la matriz se presentan en colores, y cada color corresponde a una sub-matriz \mathbf{H}_{mn}^i específica. La matrices resultantes son de tamaño $B^2 \times B^2L$ y son obtenidas seleccionando las filas correspondientes a cada bloque y eliminando las columnas que contienen únicamente ceros.	32
3.3. (a) Banda espectral original. (b) Reconstrucción de una banda espectral utilizando el modelo de reconstrucción por bloques del sistema CASSI. Artefactos horizontales y verticales se observan en las uniones de los bloques.	35
4.1. Ejemplo del modelo de descomposición de las mediciones en bloques traslapados utilizando Δ filas y columnas de solapamiento. (a) Solapamiento horizontal, (b) Solapamiento vertical.	37
4.2. La reconstrucción a partir de bloques adyacentes con solapamiento vertical conduce a un solapamiento vertical en los paralelepípedos oblicuos reconstruidos. El solapamiento horizontal entre bloques de mediciones tiene un efecto similar en las reconstrucciones.	39
4.3. a) División de la k – ésima banda espectral de un paralelepípedo oblicuo reconstruido. Las regiones sombreadas incluyen $\frac{\Delta}{2}$ columnas o filas a cada lado. Los píxeles en estas regiones han sido reconstruidos tanto por el bloque (m, n) como por sus vecinos. b) Casos especiales que ocurren en los límites de la imagen.	40

4.4. Proceso de ensamblaje de la k – ésima banda espectral. Las regiones sombreadas corresponden a los píxeles que han sido promediados utilizando las reconstrucciones de paralelepípedos consecutivos.	40
5.1. Cubo de datos con 24 bandas espectrales cuyas longitudes de onda se encuentran en el rango de 452nm a 667nm. Cada banda espectral tiene una resolución espacial de 256×256 píxeles.	44
5.2. Cubo de datos con 24 bandas espectrales cuyas longitudes de onda se encuentran en el rango de 452nm a 667nm. Cada banda espectral tiene una resolución espacial de 512×512 píxeles.	45
5.3. Cubo de datos con 24 bandas espectrales cuyas longitudes de onda se encuentran en el rango de 452nm a 667nm. Cada banda espectral tiene una resolución espacial de 1024×1024 píxeles.	46
5.4. Resultados de reconstrucción (Rec.) en PSNR para el enfoque tradicional y la reconstrucción utilizando bloques con solapamiento (Rec. Bloq.) para los cubos de datos (a) $256 \times 256 \times 24$, (b) $512 \times 512 \times 24$, (c) $1024 \times 1024 \times 24$, y (d) $512 \times 512 \times 32$. . .	48
5.5. (a) Original del cubo de datos de dimensiones $256 \times 256 \times 24$. Reconstrucciones para 6 capturas utilizando: (b) Reconstrucción tradicional, 28.1 dB; (c) Reconstrucción por bloques con solapamiento, $B = 64$ y $\Delta = 24$, 31.46 dB. (d), (e) y (f) son acercamientos de las imágenes en (a), (b) y (c), respectivamente.	50
5.6. (a) Acercamiento del cubo de datos original de dimensiones $512 \times 512 \times 24$. Reconstrucciones para 6 capturas utilizando: (b) Reconstrucción tradicional, 31.09 dB; (c) Reconstrucción por bloques con solapamiento, $B = 64$ y $\Delta = 24$, 33.45 dB. (d),(e) y (f) son acercamientos de las imágenes en (a), (b) y (c), respectivamente.	51

5.7. (a) Acercamiento del cubo de datos original de dimensiones $1024 \times 1024 \times 24$. Reconstrucciones para 6 capturas utilizando: (b) Reconstrucción tradicional, 32.99 dB, y (c) Reconstrucción por bloques con solapamiento, $B = 128$ y $\Delta = 32$, 33.17 dB.	52
5.8. (a) Versión RGB de un acercamiento del cubo de datos de dimensiones $512 \times 512 \times 32$. Reconstrucciones para 10 capturas utilizando: (b) Reconstrucción tradicional, 30.99 db, y (c) Reconstrucción por bloques con solapamiento, $B = 64$ y $\Delta = 24$, 31.84 dB.	52
5.9. Reconstrucción espectral de los píxeles espaciales mostrados en (a) para (b) píxel B, (c) píxel C, y (d) píxel D. El eje x indica el eje espectral.	53
5.10. Resultados de reconstrucción (Rec.) en PSNR, a partir de mediciones con ruido, para el cubo de datos de dimensiones $256 \times 256 \times 24$ utilizando reconstrucción del cubo de datos completo y el enfoque de reconstrucción por bloques con solapamiento. (a) SNR = 20 dB y (b) SNR = 25 dB.	54
5.11. Tiempo de reconstrucción (Rec.) en función del número de capturas para el enfoque tradicional y reconstrucción por bloques con solapamiento. El tiempo promedio de reconstrucción de un bloque utilizando un procesador (Un bloque) también es incluido para los cubos de datos de dimensiones (a) $256 \times 256 \times 24$, (b) $512 \times 512 \times 24$ y, (c) $1024 \times 1024 \times 24$ y (d) $512 \times 512 \times 32$	55

Resumen

TITULO: PROCESAMIENTO POR BLOQUES DE SEÑALES ESPECTRALES MEDIANTE LA TÉCNICA DE COMPRESSIVE SAMPLING¹

AUTOR: CLAUDIA VICTORIA CORREA PUGLIESE ²

PALABRAS CLAVE: Imágenes espectrales, procesamiento por bloques, compressive sampling, sistemas ópticos basados en aperturas codificadas.

Las técnicas tradicionales de adquisición de imágenes espectrales realizan un barrido sobre la región de interés para obtener un conjunto tri-dimensional de datos que contiene la información espacial y espectral de la escena. Por otra parte, los sistemas de captura de imágenes espectrales basados en la técnica *compressive sampling*, obtienen dicha información mediante un conjunto bidimensional de proyecciones aleatorias. *Compressive sampling* (CS) establece que ciertas señales pueden ser reconstruidas usando un número de muestras menor que el establecido por el criterio de Nyquist. El sistema CASSI (*coded aperture snapshot spectral imager*), es una arquitectura óptica diseñada para capturar imágenes espectrales usando CS. Las reconstrucciones en CS son obtenidas utilizando algoritmos de optimización basados en la norma ℓ_1 , como GPSR (*gradient projection for sparse reconstruction*). La complejidad computacional del problema inverso de reconstrucción tiene un crecimiento de $O(KN^4L)$ por iteración del algoritmo, donde N^2 y L son las dimensiones espaciales y espectral de la escena, respectivamente, y K es el número de tomas realizadas. Diversas aplicaciones requieren imágenes espectrales de grandes dimensiones, sin embargo la complejidad computacional en estos casos es abrumadora, y las reconstrucciones pueden tomar horas en arquitecturas de escritorio. El objetivo de este trabajo de investigación es obtener un modelo matemático para las reconstrucciones por bloques en el sistema CASSI, de manera que la calidad de las imágenes no se afecte y la complejidad computacional sea reducida. Los resultados obtenidos muestran que el modelo propuesto satisface las premisas con complejidad $O(KB^4L)$ por iteración del GPSR, donde $B \ll N$ es el tamaño del bloque. Este enfoque aprovecha la estructura de la función de transferencia del sistema, y permite realizar reconstrucciones a partir de pequeños bloques con y sin solapamiento en el conjunto de mediciones. Los resultados muestran que este modelo permite acelerar las reconstrucciones hasta en un orden de magnitud y obtener un PSNR (*Peak Signal to Noise Ratio*) hasta de 5 dB mayor que el del modelo tradicional.

¹Trabajo de Investigación

²Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática. Director, Henry Arguello Fuentes.

Abstract

TITLE: BLOCK-PROCESSING OF SPECTRAL IMAGES USING COMPRESSIVE SAMPLING ¹

AUTHOR:CLAUDIA VICTORIA CORREA PUGLIESE ²

KEYWORDS: Spectral imaging, block-processing, compressive sampling, coded-aperture based optical systems.

Traditional spectral imaging techniques scan the whole region of interest to obtain a three dimensional set that contains the spatial and spectral information of the scene. In contrast, compressive spectral imaging systems allow capturing the spatial and spectral information of the scene using two dimensional sets of random projections. These systems rely on the theory of compressive sampling (CS), which establishes that certain signals can be recovered with high probability using far fewer samples from those dictated by Nyquist. The coded aperture snapshot spectral imaging system (CASSI) is an optical imaging architecture that accomplishes compressive spectral imaging. The reconstruction of the scene is obtained by ℓ_1 norm based inverse optimization algorithms such as the gradient projections for sparse reconstruction (GPSR). The computational complexity of the inverse problem grows with order $O(KN^4L)$ per iteration, where N^2 and L are the spatial and spectral dimensions of the scene, respectively, and K is the number of snapshots. Many applications deal with high-dimensional spectral images, and the computational complexity becomes overwhelming since reconstructions can take up to several hours in desktop architectures. The goal of this thesis is to obtain a mathematical model for block reconstructions in CASSI, such that the reconstruction quality is not affected and the computational complexity is reduced. The results obtained show that the lapped block reconstruction model in CASSI satisfies the premises with complexity $O(NB^4L)$ per GPSR iteration, where $B \ll N$ is the block size. The proposed approach takes advantage of the structure of the transfer function of the CASSI system thus allowing the independent recovery of small lapped blocks of the measurement set. Simulations show the benefits of the new model in terms of PSNR and reconstruction time. In particular, the data cube reconstruction can be accelerated by an order of magnitude and the PSNR is improved up to 5 dB over traditional reconstruction approach.

¹Research Work

²School of Physical-Mechanical Engineering. Department of Systems Engineering and Informatics. Advisor, Henry Arguello Fuentes.

Introducción

Las imágenes espectrales son conjuntos de imágenes adquiridas en diferentes longitudes de onda. Por esta razón, involucran tanto la teoría de imágenes como espectroscopía [1]. Por una parte, requieren la captura de información espacial y temporal de una escena, y por otra, utilizan espectroscopía para describir los fenómenos que ocurren en conjuntos de datos que contienen intensidades de luz en diferentes longitudes de onda, comúnmente llamados espectros. Las imágenes espectrales proporcionan información tanto espacial como espectral en el mismo conjunto de datos. Este tipo de señales es usualmente representado como cubos de datos debido a que son conjuntos de datos en tres dimensiones. La Figura 1 presenta un ejemplo de esta representación.

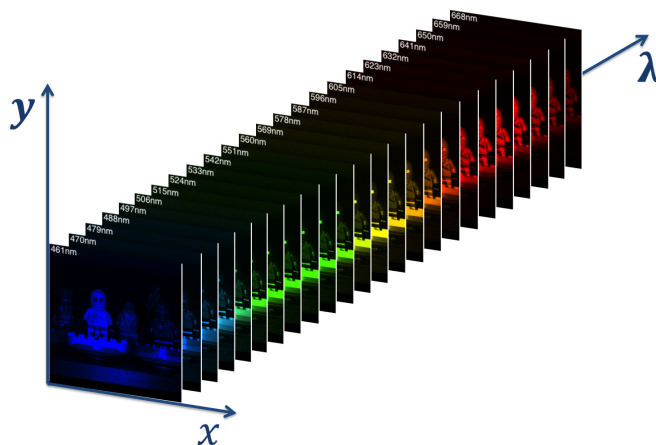


Figura 1: Conjunto de datos de una imagen espectral donde x y y corresponden a las dimensiones espaciales y λ es la dimensión espectral. Cada punto espacial (x, y) en la imagen contiene un espectro completo $I(x, y, \lambda)$.

Las imágenes espectrales son utilizadas principalmente en aplicaciones que involucran la identificación de materiales, detección de anomalías, y sensado remoto del medio ambiente [2]. Específicamente, los objetos en una escena pueden ser detectados y clasificados utilizando el espectro de la misma. Esto es posible debido a que diferentes materiales presentan diferentes firmas espectrales que dependen de la composición molecular, la escala y la forma de los objetos [3; 4; 5]. Entre otras aplicaciones de estas imágenes se encuentran el análisis de obras de arte con fines de restauración [6; 7; 8], y aplicaciones médicas y de microscopía [9; 10].

Las técnicas convencionales para la captura de imágenes espectrales, como *pushbroom* [9] y *whiskbroom* [11], realizan un barrido por toda la escena a lo largo de una o dos dimensiones y después capturan los datos en las dimensiones restantes para, finalmente obtener el cubo de datos. En particular, un sensor *pushbroom* captura la escena línea por línea, mientras que un sensor *whiskbroom* lo hace píxel por píxel. La desventaja de estas técnicas es que la cantidad de datos capturada en ocasiones excede la cantidad de datos que compone el cubo de datos completo [12; 13]. Además, el tiempo de sensado y los costos de adquisición relacionados con el detector, son proporcionales al tamaño de imagen deseado. Esto se debe a que las técnicas convencionales se basan en el teorema de muestreo de Shannon/Nyquist [14].

Compressed sensing, o *compressive sampling* (CS) es una técnica alternativa de muestreo que permite realizar el sensado de señales utilizando frecuencias menores a la de Nyquist [15; 16; 17; 18; 19; 20]. Esta técnica ha sido recientemente utilizada para la adquisición de imágenes espectrales. Específicamente, permite obtener la información espacial y espectral de una escena en un conjunto de mediciones bidimensional, utilizando una matriz de plano focal. La reconstrucción de la información espectral de la escena es obtenida mediante algoritmos que resuelven el problema inverso de *compressed sensing*, utilizando la representación dispersa del cubo de datos. En particular, una señal hiperespectral $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N \times N \times L}$ puede ser representada en forma vectorial como $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N^2 L}$. Una aproximación dispersa de \mathbf{f} en la base Ψ está dada

por $\mathbf{f} = \Psi\boldsymbol{\theta}$. Es decir, \mathbf{f} puede ser representada correctamente, utilizando únicamente $S \ll N^2L$ componentes de Ψ . Al utilizar la teoría de *compressed sensing*, $m \gtrsim S \log(N^2L) \ll N^2L$ proyecciones son suficientes para reconstruir \mathbf{f} con alta probabilidad. Lo anterior refleja una reducción considerable en el número de mediciones requeridas en comparación con las técnicas tradicionales.

El sistema de adquisición de señales espectrales basado en aperturas codificadas conocido como CASSI por sus siglas en inglés, es una arquitectura óptica que permite sensar señales espectrales utilizando la teoría de *compressed sensing* [12; 21; 22; 23; 24; 25; 26]. En este sistema, una matriz de plano focal captura conjuntos de combinaciones lineales de versiones desplazadas y codificadas de cada uno de los canales espectrales que componen la escena. Un conjunto de proyecciones en CASSI es representado como $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f}$, donde \mathbf{H} es una matriz de tamaño $N(N + L - 1) \times (N^2L)$ que incluye los efectos de la codificación y dispersión [25; 27; 28]. En la práctica, varios conjuntos de proyecciones son capturados utilizando patrones de apertura codificada diferentes en cada toma. El enfoque de múltiples capturas contribuye a que el problema inverso de reconstrucción sea mejor condicionado, y permite que el sistema CASSI se ajuste a aplicaciones que involucren escenas con alto contenido espacial y/o espectral [29; 30]. Los diferentes patrones de apertura codificada pueden ser implementados utilizando un arreglo de micro-espejos digitales (DMD) [26; 31] o un sistema mecánico que genera diferentes patrones al trasladar un patrón de mayores dimensiones [32]. Las proyecciones en la i –ésima captura se expresan como $\mathbf{y}^i = \mathbf{H}^i\mathbf{f}$. El conjunto de proyecciones obtenidas usando K tomas, $\mathbf{y} = [(\mathbf{y}^0)^T, \dots, (\mathbf{y}^{K-1})^T]^T$, puede expresarse como $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f}$, donde $\mathbf{H} = [(\mathbf{H}^0)^T, \dots, (\mathbf{H}^{K-1})^T]^T$. La teoría de *compressed sensing* es utilizada luego para reconstruir la señal $\mathbf{f} = \Psi\boldsymbol{\theta}$.

Diversos algoritmos de optimización numérica han sido desarrollados para resolver el problema de reconstrucción en *compressed sensing*. Las operaciones típicas realizadas por estos algoritmos incluyen cálculo de matrices pseudo-inversas, transformaciones de señales a bases en las que tienen una repre-

sentación *sparse*, multiplicaciones vector-escalar, y multiplicaciones vector-matriz. Debido a que las señales espectrales son de grandes dimensiones, éstos cálculos requieren una gran cantidad de operaciones punto flotante. Sin embargo, algunos algoritmos ofrecen ventajas respecto a otros en términos de complejidad computacional. Este trabajo se concentra específicamente en el algoritmo GPSR debido a que proporciona una relación aceptable entre la complejidad computacional y la calidad de las reconstrucciones que proporciona. Los métodos desarrollados en este trabajo son generales, y por esta razón pueden ser utilizados con otros algoritmos de reconstrucción. En cada iteración del GPSR, aproximadamente $O(KN^4L)$ operaciones son realizadas cuando se utilizan K conjuntos de mediciones, para un cubo de datos de dimensión espacial N y L canales espectrales. Cuando las dimensiones del cubo de datos se incrementan, las reconstrucciones son abrumadoras y pueden tomar horas en arquitecturas de escritorio [24; 32].

Trabajos previos en *compressed sensing* (CS) han abordado esta problemática utilizando operadores de muestreo separables [33; 34; 35], o implementaciones rápidas de los algoritmos de reconstrucción para GPU y FPGA [36]. En lugar de concentrarse en soluciones de tipo hardware, los métodos desarrollados en este trabajo aprovechan las propiedades físicas del fenómeno óptico del CASSI para reducir la complejidad computacional del problema de reconstrucción. Específicamente, la reconstrucción de la escena tridimensional es obtenida a partir de la reconstrucción individual de un conjunto de bloques traslapados de mediciones. El modelo de reconstrucción por bloques desarrollado permite reconstruir independientemente regiones de la escena original en forma de paralelepípedos. De esta manera, el algoritmo de reconstrucción GPSR realiza $O(KB^4L)$ operaciones por iteración en cada bloque de tamaño $B \times B$, donde $KB^4L \ll KN^4L$. Después de obtener las reconstrucciones individuales, el modelo propuesto permite ensamblar los paralelepípedos obtenidos para construir el cubo de datos completo.

El contenido de este trabajo de investigación está organizado de la siguiente manera. Primero se realiza una breve descripción de la base teórica de la

técnica de *compressed sensing*. En seguida, se presenta la descripción del modelo matemático del sistema CASSI. Allí, la estructura de la matriz de sentido \mathbf{H} es analizada. A continuación, se presenta el modelo de reconstrucción por bloques utilizando ventanas con y sin solapamiento. El tamaño del bloque y las secciones de solapamiento son analizados en función del número de tomas y las dimensiones espaciales del cubo de datos. Posteriormente, se presentan los resultados de simulación que muestran las mejoras en las reconstrucciones en comparación con el enfoque tradicional de reconstruir el cubo utilizando el conjunto completo de mediciones. Estos resultados son presentados en términos de PSNR y tiempo de reconstrucción. La reconstrucción es entonces analizada utilizando tres modelos: el enfoque tradicional de múltiples tomas del CASSI, el modelo de reconstrucción por bloques del CASSI, y el modelo de reconstrucción por bloques con solapamiento. La reconstrucción del cubo de datos se describe a continuación para cada modelo. Finalmente, se muestra que el uso de bloques de mediciones con solapamiento permite obtener reconstrucciones más rápidas y a la vez, mejorar la calidad de las mismas.

Capítulo 1

Teoría de Compressive Sampling

Compressive Sampling, conocida también como *Compressed Sensing* (CS), es una teoría que ha surgido recientemente como alternativa a los métodos tradicionales de adquisición de señales [15; 16; 20; 37; 38]. CS establece que es posible reconstruir cierto tipo de señales a partir de una cantidad de muestras menor a la requerida por los métodos convencionales [15; 39]. Dicha reconstrucción es obtenida a través de algoritmos de optimización numérica.

El teorema de Shannon/Nyquist establece que para evitar la pérdida de información, es necesario utilizar una frecuencia de muestreo superior a dos veces el ancho de banda de la señal. En aplicaciones como la adquisición de imágenes y video, el número de muestras resultante es tan grande que hace necesaria la aplicación de algoritmos de compresión para facilitar el almacenamiento y la transmisión de la señal. En contraste, el enfoque de CS integra las tareas de muestreo y compresión en un solo proceso, reduciendo los esfuerzos y costos relacionados con el incremento de la tasa de muestreo en el enfoque tradicional.

Uno de los conceptos principales en CS es la dispersión o *sparsity* de la señal bajo análisis. Este concepto establece que la mayor parte de la energía de una señal está concentrada en un porcentaje reducido de sus componentes [15; 34; 40]. En la práctica, pocas señales son completamente *sparse*, sin embargo, es posible encontrar una representación *sparse* en otros dominios

como Wavelet, Fourier o DCT. Específicamente, una señal $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, puede expresarse como $\mathbf{x} = \Psi\boldsymbol{\theta}$, donde $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una base de representación y $\boldsymbol{\theta}$ es el vector de coeficientes de \mathbf{x} en el dominio de Ψ . En este caso, $\boldsymbol{\theta}$ es K -sparse si $K \ll n$ de sus elementos son diferentes de cero. Dicho de otro modo, $\boldsymbol{\theta}$ es sparse, si puede representarse como combinación lineal de K vectores de la base de representación. En algunos casos esta representación $\boldsymbol{\theta}$ no es completamente sparse, sin embargo la mayoría de sus componentes son valores muy pequeños que pueden despreciarse sin obtener pérdidas considerables en la señal. La Figura 1.1 presenta un ejemplo de este comportamiento.

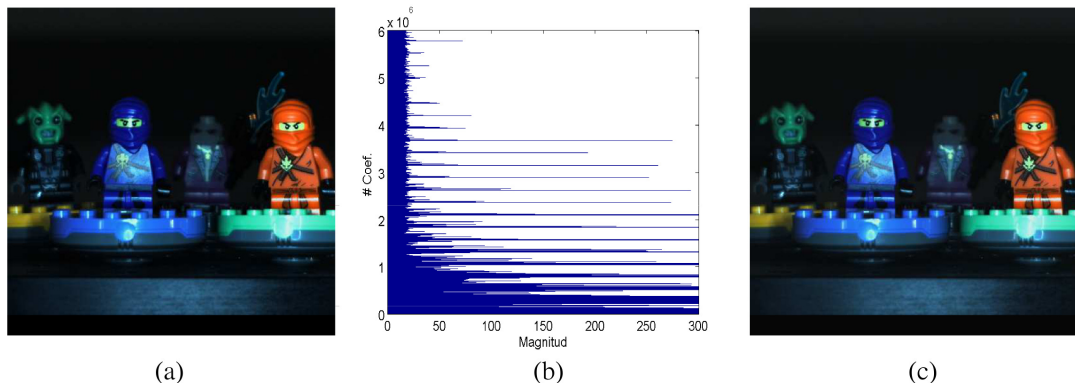


Figura 1.1: (a) Imagen espectral original; (b) Coeficientes de (a) en una base de representación Ψ obtenida como el producto kronecker de la base coseno (DCT) y Wavelet en 2D; (c) Imagen espectral reconstruida utilizando el 7% de los coeficientes más significativos, el 93% restante fue convertido en cero.

El concepto general de CS consiste en obtener una cantidad $m \ll n$ de mediciones utilizando una matriz de proyección $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Específicamente, el proceso de sensado y compresión está dado por la expresión

$$\mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{\theta} \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{A} = \Phi\Psi$ es una matriz de dimensiones $m \times n$. La selección de la base de representación y la matriz de proyección debe ser realizada de manera que \mathbf{A} satisfaga la propiedad de isometría restrictiva (RIP); esta propiedad determina las condiciones necesarias para que la reconstrucción de \mathbf{x} pueda

ser obtenida [28; 34; 40]. Además, determina el número mínimo de mediciones necesarias para tal reconstrucción. Matemáticamente, la RIP establece que existe una constante δ_s tal que la norma ℓ_2 de \mathbf{x} sea preservada al aplicar la transformación $\mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$. Específicamente, una matriz \mathbf{A} satisface la RIP si satisface la expresión

$$(1 - \delta_s) \|\boldsymbol{\theta}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_2 \leq \|\boldsymbol{\theta}\|_2 (1 + \delta_s). \quad (1.2)$$

Matrices comúnmente utilizadas en CS incluyen aquellas cuyas entradas son independiente e idénticamente generadas siguiendo una distribución normal o Bernoulli. Este tipo de matrices satisface la RIP con alta probabilidad, y el número de mediciones necesarias para la reconstrucción está dado por $m \lesssim K \log n$. Otros tipos de matrices cuya RIP ha sido previamente estudiada se describen en [41; 42; 43; 44].

Una estimación de la reconstrucción de $\boldsymbol{\theta}$ puede obtenerse resolviendo el problema $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$. Sin embargo, dado que el número de filas de la matriz \mathbf{A} es menor que el número de columnas, este problema tiene infinitas soluciones [41]. Por esta razón, se utilizan algoritmos computacionales que reconstruyen la señal original resolviendo el problema de optimización dado por $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_2 + \tau \|\boldsymbol{\theta}\|_1$. Estos algoritmos pueden clasificarse en cinco enfoques computacionales [45]. Los algoritmos de búsqueda codiciosa (algoritmos *greedy*) realizan una estimación de la solución de forma iterativa. Específicamente, realizan una selección de los átomos de un diccionario, y sus correspondientes factores de ponderación, de tal forma que la señal pueda expresarse como combinación lineal de dichos vectores. Este enfoque es implementado por algoritmos como OMP (*Orthogonal Matching Pursuit*) [46], StOMP (OMP por etapas) [17], y CoSaMP (*Compressive Sampling Matching Pursuit*) [47]. El segundo tipo de algoritmos está compuesto por aquellos que resuelven un problema de optimización convexa. Esta categoría incluye los algoritmos de punto interior como el software ℓ_1 -magic y los métodos de gradiente descendente como el algoritmo de reconstrucción *sparse* a través de aproximación separable (SpaRSA) [48], TwIST [49] y GPSR [50]. El tercer en-

foque utiliza un enfoque bayesiano para encontrar un estimador de un máximo a-posteriori asumiendo una distribución a-priori de los coeficientes de la señal que se quiere reconstruir [51]. Los dos enfoques restantes son optimización no convexa [52] y algoritmos de fuerza bruta; estos últimos buscan la solución probando todas las soluciones posibles. Una revisión de todos estos algoritmos y su análisis de complejidad computacional puede encontrarse en [45].

Capítulo 2

Sistema de Adquisición de Señales Espectrales Basado en Aperturas Codificadas (CASSI)

El sistema de adquisición de señales basado en aperturas codificadas (CASSI) es una arquitectura diseñada para capturar información espacial y espectral de una escena en un conjunto de mediciones bidimensionales. Las proyecciones en CASSI son obtenidas utilizando una apertura codificada y un elemento dispersivo [21; 22; 23; 25]. Los componentes principales del sistema CASSI se muestran en la Figura 2.1.

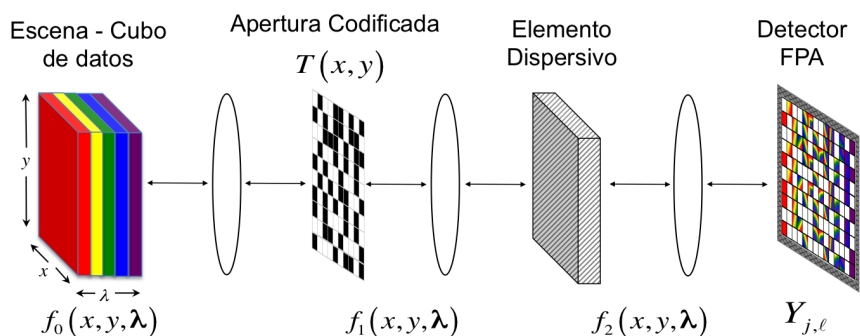


Figura 2.1: Arquitectura del sistema CASSI. La señal de entrada $f_0(x, y, \lambda)$ es modulada espacialmente por la apertura codificada $T(x, y)$ y dispersada por un prisma. La señal codificada y dispersada $f_2(x, y, \lambda)$ es integrada en el detector FPA.

El fenómeno análogo subyacente en el sistema CASSI es usualmente discretizado con fines analíticos y computacionales. En particular, la señal $f_0(x, y, \lambda)$ es representada como $F_{j\ell k}$ donde j, ℓ son los índices de las coordenadas espaciales y k es el índice de la coordenada espectral λ . La apertura codificada $T(x, y)$ también es discretizada como $T_{j\ell}$, y las componentes espectrales son limitadas entre λ_0 y λ_L por un filtro pasa-banda en el instrumento.

Un conjunto de mediciones CASSI se ilustra en la Figura 2.2. Allí, un cubo de datos discretizado, con L bandas espectrales, $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{F}_{L-1}]$, es inicialmente codificado en amplitud por la apertura codificada \mathbf{T}^i . El efecto del elemento dispersivo es representado en la figura 2.2 como un corrimiento espacial de cada una de las bandas. La información codificada y dispersada es integrada a lo largo de la dimensión espectral y capturada en el detector. El i -ésimo conjunto de mediciones está compuesto por $N \times (N + L - 1)$ píxeles expresado como [21]

$$Y_{j\ell}^i = \sum_{k=0}^{L-1} F_{j(\ell+k)(k)} T_{j(\ell+k)}^i + \omega_{j\ell}^i \quad i = 0, \dots, K - 1. \quad (2.1)$$

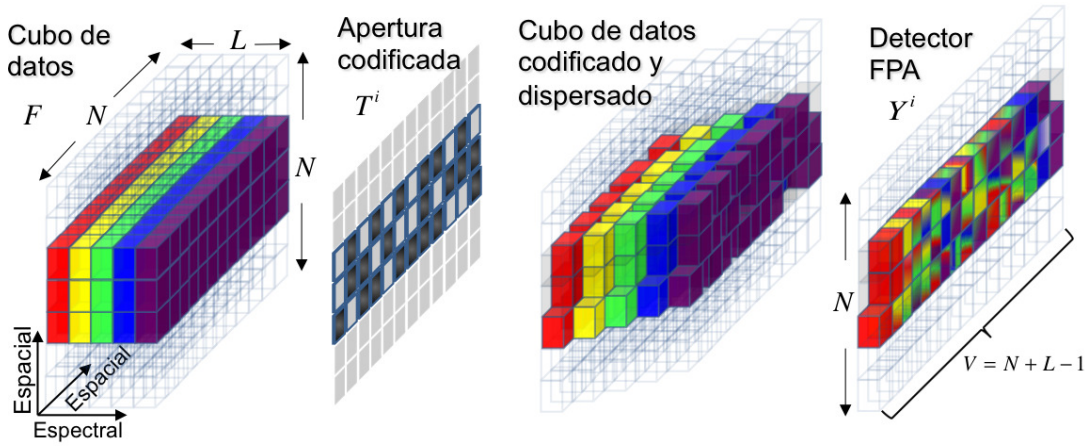


Figura 2.2: Proceso de captura del sistema CASSI. Un cubo de datos de dimensiones $N \times N \times L$ es modulado espacialmente por la apertura codificada y dispersado por el prisma. Cada píxel en el detector contiene información integrada correspondiente a diferentes elementos del cubo de datos.

Una representación vectorizada de \mathbf{Y}^i en la Ecuación 2.1 puede obtenerse como

$$(\mathbf{y}^i)_\ell = Y_{(\ell-rN)r}^i \quad \text{para } \ell = 0, \dots, M-1, \quad i = 0, \dots, K-1 \quad (2.2)$$

donde $r = \lfloor \frac{\ell}{N} \rfloor$ y $M = N(N+L-1)$. El cubo de datos \mathbf{F} también es representado en forma vectorial como $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_0^T, \dots, \mathbf{f}_{L-1}^T]^T$ donde cada banda espectral \mathbf{f}_k puede ser expresada como

$$\mathbf{f}_k = [F_{00k}, F_{10k}, \dots, F_{(N-1)0k}, \dots, F_{01k}, F_{11k}, \dots, F_{(N-1)1k}, \dots, F_{(N-1)(N-1)k}]^T.$$

Una representación vectorizada compacta de \mathbf{f}_k es obtenida mediante la expresión

$$(\mathbf{f}_k)_\ell = F_{(\ell-rN)rk} \quad \text{para } \ell = 0, \dots, N^2-1, \quad k = 0, \dots, L-1 \quad (2.3)$$

donde $r = \lfloor \frac{\ell}{N} \rfloor$. La representación vectorizada de la i -ésima apertura codificada $(\mathbf{t}^i)_\ell$ es obtenida utilizando la Ecuación 2.2. Las anteriores representaciones vectorizadas son usadas para derivar el modelo matricial del CASSI para una sola captura

$$\mathbf{y}^i = \mathbf{H}^i \mathbf{f} + \boldsymbol{\omega}^i \quad (2.4)$$

en donde la matriz \mathbf{H}^i representa los efectos de la apertura codificada y el elemento dispersivo. La matriz de proyección para una sola captura puede ser expresada como

$$\mathbf{H}^i = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{t}_{00}^i & \mathbf{0}_{N(1) \times N^2} & \dots & \mathbf{0}_{N(L-1) \times N^2} \\ & \mathbf{t}_{00}^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{t}_{(N-1)(N-1)}^i \\ \mathbf{0}_{N(L-1) \times N^2} & \mathbf{0}_{N(L-2) \times N^2} & \dots & \mathbf{t}_{(N-1)(N-1)}^i \end{array} \right] \quad (2.5)$$

donde $\mathbf{0}_{N(1) \times N^2}$ y $\mathbf{0}_{N(L-1) \times N^2}$ son matrices de tamaño $N(1) \times N^2$ y $N(L-1) \times N^2$ cuyos elementos son cero; los elementos diferentes de cero en \mathbf{H}^i corresponden a $\text{diag}(\mathbf{t}^i)$, una matriz diagonal de tamaño $N^2 \times N^2$ cuyas entradas son los elementos de la representación vectorizada de la apertura codificada \mathbf{t}^i . Múltiples tomas pueden ensamblarse en un solo vector $\mathbf{y} = [(\mathbf{y}^0)^T, \dots, (\mathbf{y}^{K-1})^T]^T$

y el modelo CASSI para múltiples tomas [30; 32] puede escribirse como

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\omega} \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{H} = [(\mathbf{H}^0)^T, \dots, (\mathbf{H}^{K-1})^T]^T$. La Figura 2.3 presenta un ejemplo de una matriz \mathbf{H} para $N = 4$, $L = 3$, y $K = 2$. Allí es posible notar que la matriz \mathbf{H} en la Ecuación 2.5 es altamente dispersa (*sparse*) y tiene una estructura definida. Cada fila contiene a lo sumo L elementos diferentes de cero. Un resumen de las variables del modelo CASSI se muestra en la Tabla 2.1.

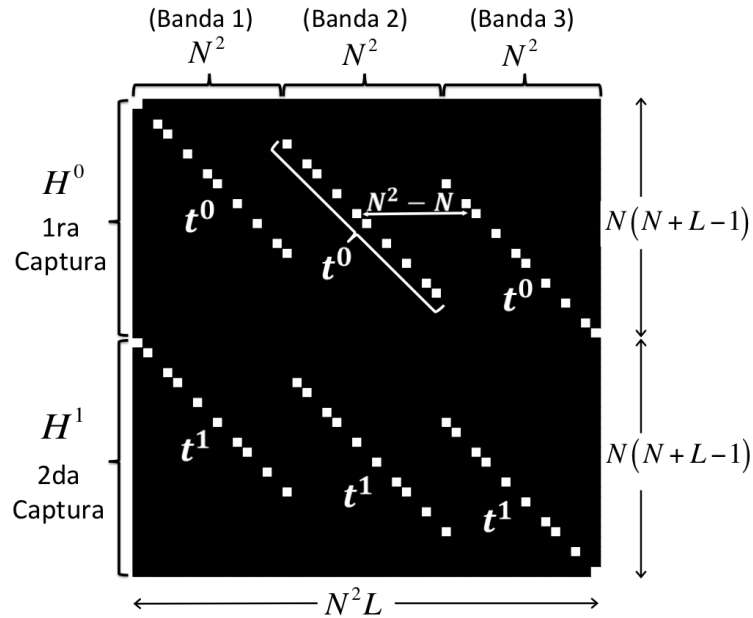


Figura 2.3: Estructura de la matriz \mathbf{H} para $N = 4$, $L = 3$ y $K = 2$. Los cuadros blancos indican los píxeles del código de apertura que permiten el paso de la luz.

El conjunto de mediciones \mathbf{y} en la Ecuación 2.6 es utilizado como entrada del algoritmo de reconstrucción (GPSR) para recuperar el cubo de datos completo $\hat{\mathbf{F}} = [\hat{\mathbf{F}}_0, \dots, \hat{\mathbf{F}}_{L-1}]$, donde $\hat{\mathbf{F}}_k$ es la reconstrucción de la k -ésima banda espectral. La señal subyacente es obtenida resolviendo el problema de optimización dado por $\hat{\mathbf{f}} = \Psi \left(\underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}\|_2 + \tau \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \right)$, donde $\boldsymbol{\theta}$ es una representación S-sparse de \mathbf{f} en la base de representación $\boldsymbol{\Psi}$, y τ es una constante de regularización.

Cuadro 2.1: Variables del modelo CASSI

Variable	Tamaño	Descripción
L		Número de bandas espectrales
$N \times N$		Dimensiones espaciales del cubo de datos
K		Número de capturas
$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{F}_{L-1}]$	$N \times N \times L$	Cubo de datos
$\mathbf{f} = [\mathbf{f}_0^T, \dots, \mathbf{f}_{L-1}^T]^T$	$N^2 L$	Forma vectorizada de \mathbf{F}
\mathbf{T}^i	$N \times N$	Apertura codificada en la i -ésima captura
\mathbf{t}^i	N^2	Vectorización de \mathbf{T}^i
\mathbf{Y}^i	$N \times (N + L - 1)$	i -ésimo conjunto de mediciones
\mathbf{y}^i	$N(N + L - 1)$	Vectorización de \mathbf{Y}^i
$\mathbf{y} = [(\mathbf{y}^0)^T, \dots, (\mathbf{y}^{K-1})^T]^T$	$KN(N + L - 1)$	Vectorización de K capturas
\mathbf{H}^i	$N(N + L - 1) \times N^2 L$	Matriz CASSI para la i -ésima captura
$\mathbf{H} = [(\mathbf{H}^0)^T, \dots, (\mathbf{H}^{K-1})^T]^T$	$KN(N + L - 1) \times N^2 L$	Matriz CASSI para K capturas

La complejidad computacional por cada iteración del GPSR se describe en [50]. Esta complejidad está determinada por cálculo de productos interiores, multiplicaciones vector-escalar, y adición de vectores, cada uno de estos requiere $N^2 L$ operaciones de punto flotante. Además, se realizan transformaciones a bases de representación y multiplicaciones por \mathbf{H} y \mathbf{H}^T . Algoritmos rápidos de transformación basados en Wavelets realizan $N^2 L$ operaciones, y el costo de multiplicar por \mathbf{H} y \mathbf{H}^T es determinado por el tamaño de la matriz $N(N + L - 1) \times N^2 L$ por lo que el número de operaciones en este caso es del orden de $N^4 L$. Si se realizan K capturas de mediciones, la complejidad computacional es $O(KN^4 L)$ por iteración del GPSR.

Un enfoque para simplificar la reconstrucción en el CASSI consiste en recuperar una rebanada $\hat{\mathbf{F}}_{j_1 \ell k}$ del cubo de datos a la vez, para $\ell = 0, \dots, N - 1$, $k = 0, \dots, L - 1$ y un j_1 fijo. Esto es posible debido a que las mediciones comprimidas son codificadas únicamente a lo largo de la coordenada x debido a la dispersión del prisma. Sin embargo, la desventaja de este enfoque es que el modelado de la base 3-dimensional no es utilizado, y conduce a una mala calidad en las reconstrucciones. El enfoque de reconstrucción por bloques que se describe a continuación permite superar esta desventaja.

Capítulo 3

Modelo de Reconstrucción por Bloques

El modelo de reconstrucción por bloques consiste en recuperar el cubo de datos a partir de porciones del mismo, las cuales son reconstruidas utilizando bloques del conjunto de mediciones. Este enfoque propone una metodología diferente para la reconstrucción del cubo de datos, que aprovecha la estructura de la matriz de sensado; sin embargo, el proceso de captura no es modificado. La división del conjunto de mediciones puede usar bloques independientes o con solapamiento.

Este capítulo presenta un análisis detallado de la relación entre los elementos de la matriz \mathbf{H} y el conjunto de proyecciones aleatorias en el detector. Posteriormente, se presenta el proceso de reconstrucción del cubo de datos a partir del conjunto de bloques de mediciones sin solapamiento.

3.1. Descomposición del conjunto de mediciones en bloques

En este capítulo, el conjunto de mediciones es dividido en bloques independientes (sin solapamiento). Sea $\mathbf{Y}_{m,n}^i$ un bloque de mediciones de tamaño $B \times B$; la Figura 3.1 presenta un análisis inverso de la energía capturada en

un bloque y su proceso a través del sistema óptico. Después del prisma, la energía capturada por un bloque de tamaño $B \times B$ es un cubo compuesto por L bandas espectrales, que ha sido codificado y dispersado. En la escena, la energía correspondiente es un paralelepípedo oblicuo de L bandas espectrales, cada una de ellas desplazada una posición espacial en el eje horizontal. La Figura 3.1 muestra cómo un bloque del cubo de datos, en forma de paralelepípedo oblicuo, es modulado en amplitud por una apertura codificada de tamaño $B \times (B + L - 1)$, y espectralmente dispersado por el prisma. Finalmente, el resultado es un bloque de mediciones de tamaño $B \times B$ en el detector. En otras palabras, los píxeles volumétricos (voxels) que son capturados en un área $B \times B$ en el detector, provienen de un volumen oblicuo en la fuente y no de un cubo. Además, una vez que el paralelepípedo oblicuo ha sido dispersado por el prisma, es transformado en un cubo de dimensiones $B \times B \times L$, antes de ser integrado en el detector.

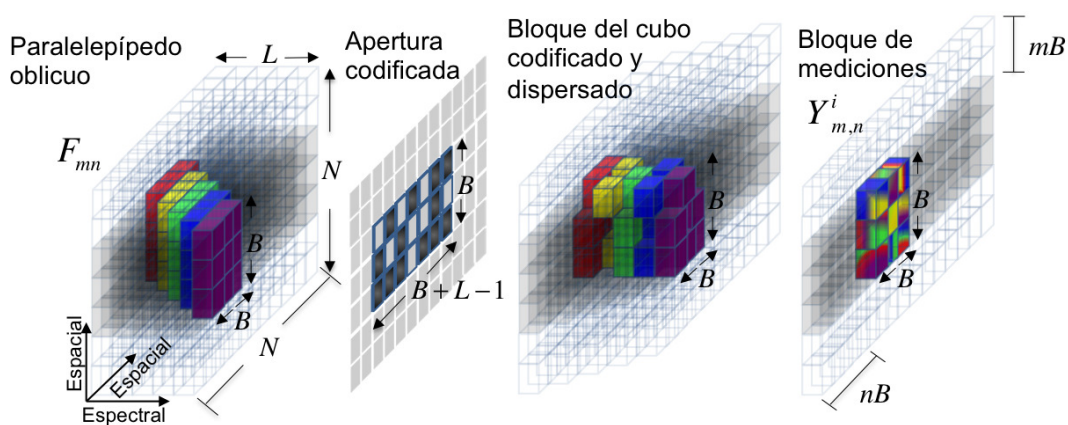


Figura 3.1: Análisis inverso del sentido del sistema CASSI. Cada bloque de $B \times B$ en el detector es el resultado de sensar una porción del cubo de datos en forma de paralelepípedo oblicuo con dimensiones $B \times B \times L$. El proceso de sentido del CASSI no es modificado.

La energía capturada en un bloque adyacente del detector puede ser analizada utilizando la misma metodología, de tal manera que el conjunto completo de mediciones del detector $\mathbf{Y}^i \in \mathbb{R}^{N \times (N+L-1)}$ puede escribirse como un arreglo

de $N' \times V'$ bloques de tamaño $B \times B$ dado por

$$\mathbf{Y}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{0,0}^i & \mathbf{Y}_{0,1}^i & \cdots & \mathbf{Y}_{0,V'-1}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{N'-1,0}^i & \mathbf{Y}_{N'-1,1}^i & \cdots & \mathbf{Y}_{N'-1,V'-1}^i \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde el conjunto de matrices $\mathbf{Y}_{m,n}^i$ está conformado por bloques de \mathbf{Y}^i que no se traslapan entre sí. El número total de bloques en el conjunto está dado por $N' = \frac{N}{B}$ y $V' = \lceil \frac{N+L-1}{B} \rceil$, donde B determina el tamaño del bloque utilizado en el nuevo modelo. En capítulos subsiguientes se describen con más detalle las implicaciones de la selección de B .

El proceso de sensado de un bloque del cubo de datos, en forma de paralelepípedo puede ser expresado en forma vectorial como

$$\mathbf{y}_{mn}^i = \mathbf{H}_{mn}^i \mathbf{f}_{mn} + \boldsymbol{\omega}_{mn}^i, \quad (3.2)$$

donde $(\mathbf{y}_{mn}^i)_\ell = (Y_{mn}^i)_{(\ell-rB)r}$ para $\ell = 0, \dots, B^2 - 1$, $i = 0, \dots, K - 1$ y $r = \lfloor \frac{\ell}{B} \rfloor$. El paralelepípedo en el cubo de datos puede expresarse en forma matricial como

$$(\mathbf{F}_{mn})_{j,\ell,k} = (\mathbf{F})_{mB+j+1,nB+\ell+k+1,k} \quad (3.3)$$

para $k = 0, \dots, L - 1$ y $j, \ell = 0, \dots, B - 1$. Por lo tanto, \mathbf{f}_{mn} en la Ecuación (3.2) es una representación vectorizada obtenida usando $(\mathbf{f}_{mn})_\ell = (F_{mn})_{(\ell-rB)r}$, donde $\ell = 0, \dots, B^2 - 1$, $k = 0, \dots, L - 1$ y $r = \lfloor \frac{\ell}{B} \rfloor$. La matriz \mathbf{H}_{mn}^i en la Ecuación (3.2) es una sub-matriz de \mathbf{H}^i de dimensiones $B^2 \times B^2L$. Esta sub-matriz es obtenida seleccionando las filas y columnas que afectan cada bloque de mediciones del detector. Específicamente, el elemento (ℓ, j) en la sub-matriz (m, n) está dado por

$$(\mathbf{H}_{mn}^i)_{\ell,j} = (\mathbf{H}^i)_{r_\ell, r_j} \quad (3.4)$$

donde $r_\ell = (nB + \lfloor \frac{\ell}{B} \rfloor)N + mB + \ell - B\lfloor \frac{\ell}{B} \rfloor$, $r_j = r_\ell + \lfloor \frac{j}{B^2} \rfloor(N^2 - N)$ para $\ell = 0, \dots, B^2 - 1$ y $j = 0, \dots, B^2L - 1$. La Figura 3.2 presenta el procedimiento para obtener las sub-matrices \mathbf{H}_{mn}^i a partir de \mathbf{H}^i . Allí, se muestra una porción

de la matriz en la Figura 2.3, y las seis sub-matrices obtenidas cuando $N = 4$, $L = 3$ y $B = 2$. En consecuencia, $N' = 2$ y $V' = 3$. Los colores en esta figura han sido asignados con el propósito de identificar las entradas diferentes de cero que corresponden a cada una de las sub-matrices.

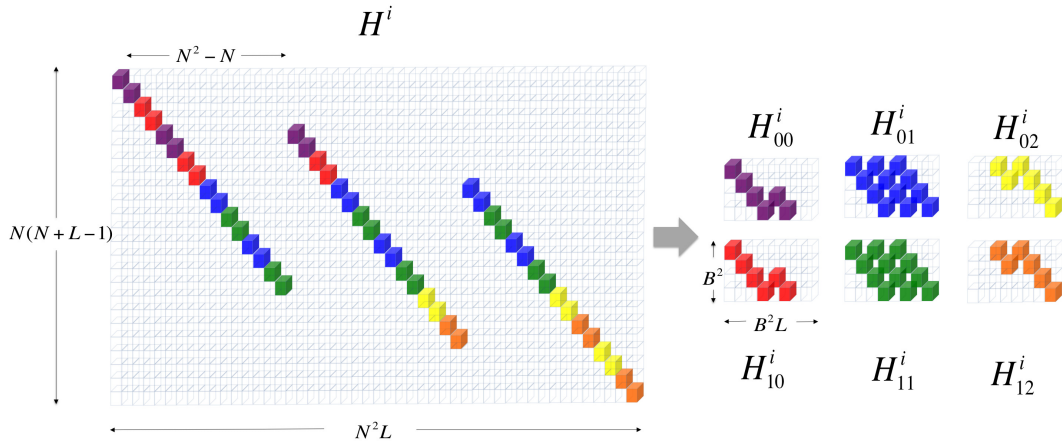


Figura 3.2: Procedimiento para obtener las sub-matrices \mathbf{H}_{mn}^i a partir de la matriz de sensado \mathbf{H}^i para $N = 4$, $L = 3$ y $B = 2$. Los elementos diferentes de cero en la matriz se presentan en colores, y cada color corresponde a una sub-matriz \mathbf{H}_{mn}^i específica. Las matrices resultantes son de tamaño $B^2 \times B^2L$ y son obtenidas seleccionando las filas correspondientes a cada bloque y eliminando las columnas que contienen únicamente ceros.

El conjunto de bloques de mediciones obtenidos en diferentes capturas pueden ensamblarse como en el modelo tradicional del CASSI para obtener $\mathbf{y}_{mn} = [(\mathbf{y}_{mn}^0)^T, \dots, (\mathbf{y}_{mn}^{K-1})^T]^T$. De igual forma, las matrices correspondientes, \mathbf{H}_{mn}^i , pueden ensamblarse para obtener $\mathbf{H}_{mn} = [(\mathbf{H}_{mn}^0)^T, \dots, (\mathbf{H}_{mn}^{K-1})^T]^T$. De esta forma, el modelo de reconstrucción por bloques para el CASSI puede escribirse como

$$\mathbf{y}_{mn} = \mathbf{H}_{mn} \mathbf{f}_{mn} + \boldsymbol{\omega}_{mn}. \quad (3.5)$$

Es posible notar que en este modelo, las matrices en la Ecuación 3.4 conservan la estructura de \mathbf{H}^i en la Ecuación 2.5 con dimensiones considerablemente menores. Cuando se utilizan K capturas, la cantidad de elementos diferentes de cero en la matriz de sensado completa del CASSI es KN^2L . Para el mismo número de capturas, cada matriz del modelo de reconstrucción

Cuadro 3.1: Variables del modelo de reconstrucción por bloques para el CASSI

Variable	Tamaño	Descripción
$B \times B$		Dimensiones de un bloque de mediciones
$N' = \frac{N}{B}, V' = \lceil \frac{N+L-1}{B} \rceil$		Número de bloques
$\mathbf{F}_{mn} = [\mathbf{F}_{mn0}, \dots, \mathbf{F}_{mn(L-1)}]$	$B \times B \times L$	paralelepípedo oblicuo (m, n)
$\mathbf{f}_{mn} = [\mathbf{f}_{mn0}^T, \dots, \mathbf{f}_{mn(L-1)}^T]^T$	$B^2 L$	Forma vectorizada de \mathbf{F}
$\mathbf{Y}_{m,n}^i$	$B \times B$	Bloque de mediciones (m, n) en la i -ésima captura
\mathbf{y}_{mn}^i	B^2	Forma vectorizada de $\mathbf{Y}_{m,n}^i$
$\mathbf{y}_{mn} = [(\mathbf{y}_{mn}^0)^T, \dots, (\mathbf{y}_{mn}^{K-1})^T]^T$	KB^2	Bloque vectorizado para K capturas
\mathbf{H}_{mn}^i	$B^2 \times B^2 L$	Matriz CASSI para el bloque (m, n) en la i -ésima captura
$\mathbf{H}_{mn} = [(\mathbf{H}_{mn}^0)^T, \dots, (\mathbf{H}_{mn}^{K-1})^T]^T$	$KB^2 \times B^2 L$	Matriz CASSI para el bloque (m, n) y K capturas

* En todas las ecuaciones de esta tabla $i = 0, \dots, K-1$; $m = 0, \dots, N'-1$; $n = 0, \dots, V'-1$.

por bloques tiene a lo sumo KN^2L/C^2 elementos diferentes de cero, donde $C = \frac{N}{B}$.

3.2. Reconstrucción del cubo de datos a partir de bloques de mediciones

Cada bloque de mediciones \mathbf{y}_{mn} en la Ecuación 3.5 es utilizado como entrada del algoritmo GPSR para reconstruir el paralelepípedo oblicuo $\hat{\mathbf{F}}_{mn} \in \mathbb{R}^{B \times B \times L}$. Específicamente, una representación vectorizada de la señal $\hat{\mathbf{F}}_{mn}$ es obtenida resolviendo el problema inverso dado por

$$\hat{\mathbf{f}}_{mn} = \Psi' \left(\underset{\theta'}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{y}_{mn} - \mathbf{H}_{mn} \Psi' \theta'\|_2 + \tau \|\theta'\|_1 \right) \quad (3.6)$$

donde θ' es una representación *sparse* de $\hat{\mathbf{f}}_{mn}$ en la base Ψ' . Es posible notar que el problema de la reconstrucción de un bloque es el mismo que el del enfoque tradicional. Sin embargo, la matriz de sensado en el enfoque por bloques, \mathbf{H}_{mn} es una porción de la matriz completa \mathbf{H} , como se muestra en la Ecuación 3.4. Del mismo modo, la matriz de la base de representación Ψ' ,

es una versión reducida de Ψ debido a que la señal bajo análisis, \mathbf{F}_{mn} , es una porción del cubo de datos \mathbf{F} .

El cubo de datos completo $\hat{\mathbf{F}}$, es obtenido al ensamblar las reconstrucciones de los paralelepípedos oblicuos. La relación entre $\hat{\mathbf{F}}_{mn}$ y la reconstrucción del cubo de datos completo, $\hat{\mathbf{F}}$, está dada por la Ecuación 3.3. En particular, el proceso de ensamblaje puede escribirse como

$$\hat{\mathbf{F}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{00k} & \dots & \hat{\mathbf{F}}_{0(V'-1)k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{F}}_{(N'-1)0k} & \dots & \hat{\mathbf{F}}_{(N'-1)(V'-1)k} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

donde $k = 0, \dots, L - 1$ es el índice de la componente espectral, y $\hat{\mathbf{F}} = [\hat{\mathbf{F}}_0, \dots, \hat{\mathbf{F}}_{L-1}]$.

En términos de la complejidad computacional del proceso de reconstrucción, el número de operaciones por iteración del algoritmo GPSR depende de las dimensiones de la señal subyacente, y las dimensiones del vector de mediciones. En particular, el algoritmo GPSR en CASSI, realiza aproximadamente $O(KN^4L)$ operaciones por iteración, para reconstruir un cubo de datos de dimensiones $N \times N \times L$, y utilizando K capturas. Así mismo, la reconstrucción de un paralelepípedo oblicuo de dimensiones $B \times B \times L$ requiere $O(KB^4L)$ operaciones. En consecuencia, la reconstrucción del cubo de datos a partir de $(N')^2$ bloques de mediciones requiere $O\left(K\frac{N^4}{(N')^2}L\right)$ operaciones. Adicionalmente, el modelo de reconstrucción por bloques puede ser distribuido en arquitecturas de múltiples procesadores. Asumiendo que el número de núcleos se ajusta exactamente al número de bloques de mediciones, la cantidad de operaciones por núcleo es $O\left(K\frac{N^4}{(N')^4}L\right)$. Un resumen de las variables del modelo de reconstrucción por bloques del sistema CASSI se presenta en la Tabla 3.1. Una comparación entre las características del modelo tradicional y el modelo de reconstrucción por bloques se presenta en la Tabla 3.2.

Por otra parte, la Figura 3.3 presenta la reconstrucción de una banda es-

Cuadro 3.2: Comparación de los modelos de reconstrucción para el CASSI

Característica	CASSI	CASSI por bloques
Modelo en notación matricial	$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\omega}$	$\mathbf{y}_{mn} = \mathbf{H}_{mn}\mathbf{f}_{mn} + \boldsymbol{\omega}_{mn}$
Dimensión espacial de \mathbf{F}	N	$B \ll N$
Dimensión espectral de \mathbf{F}	L	L
Número de capturas	K	K
Número de elementos diferentes de cero en \mathbf{H}	KN^2L	KB^2L
Tamaño de la matriz de sensado	$KN(N + L - 1) \times N^2L$	$KB^2 \times B^2L$
Operaciones por iteración del GPSR	$O(KN^4L)$	$O(KB^4L)$

pectral utilizando el modelo por bloques sin solapamiento. Allí es posible observar la presencia de artefactos indeseados en las uniones de los bloques. Estos artefactos son causados por el ensamblaje de pequeños paralelepípedos oblicuos que han sido reconstruidos independientemente unos de otros. El siguiente capítulo trata este problema utilizando secciones de píxeles que son incluidas en varios bloques de mediciones, es decir, que dichos bloques son traslapados y no independientes. Este enfoque permite reducir el efecto visual de los artefactos indeseados.

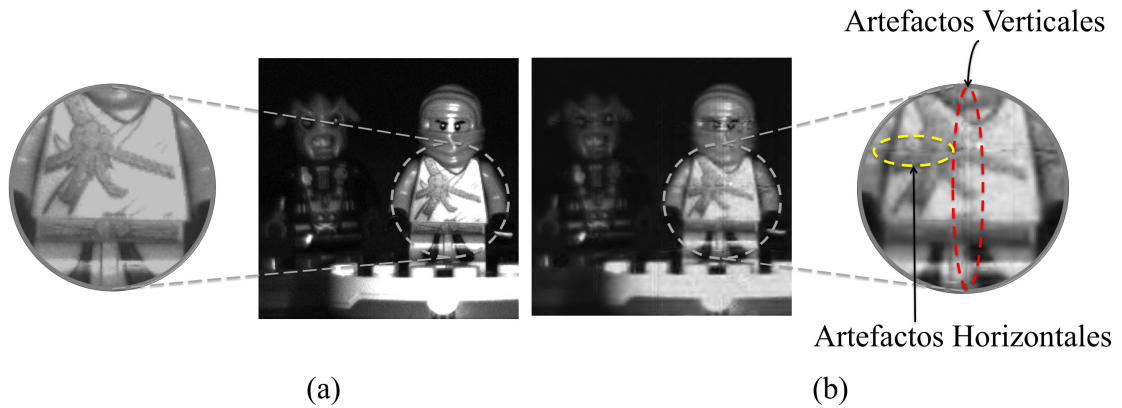


Figura 3.3: (a) Banda espectral original. (b) Reconstrucción de una banda espectral utilizando el modelo de reconstrucción por bloques del sistema CASSI. Artefactos horizontales y verticales se observan en las uniones de los bloques.

Capítulo 4

Modelo de Reconstrucción por Bloques con Solapamiento

Este modelo de reconstrucción utiliza bloques de mediciones con solapamiento, es decir, que dos bloques adyacentes comparten una porción de píxeles. Esto implica que el conjunto de paralelepípedos oblicuos obtenidos al reconstruir los bloques de mediciones, también presenta regiones de solapamiento. El proceso de descomposición de las mediciones en bloques traslapados y la reconstrucción del cubo de datos completo se describen a continuación.

4.1. Descomposición del conjunto de mediciones en bloques con solapamiento

Sea Δ la cantidad de columnas o filas de solapamiento entre bloques de mediciones consecutivos. La Figura 4.1 presenta un ejemplo de este enfoque en el cual dos bloques consecutivos comparten un conjunto de ΔB elementos, tanto horizontal como verticalmente. A diferencia del enfoque anterior, donde cada entrada de la matriz \mathbf{H} afecta únicamente a un bloque de mediciones, en el enfoque descrito en este capítulo, algunas entradas de la matriz \mathbf{H} afectarán más de un bloque; esto como consecuencia de los elementos incluidos en las

regiones de solapamiento. La selección apropiada de los índices de filas y columnas en la matriz \mathbf{H}^i que afectan a un bloque específico conduce a que la Ecuación 3.4 pueda reescribirse para el modelo de reconstrucción por bloques con solapamiento. El elemento (ℓ, j) de la sub-matriz asociada al bloque (m, n) está dado por

$$(\mathbf{H}_{mn}^i)_{\ell,j} = (\mathbf{H}^i)_{r'_\ell, r'_j} \quad (4.1)$$

donde $r'_\ell = r_\ell - (m+nN)\Delta$ y $r'_j = r'_\ell + \lfloor \frac{j}{B^2} \rfloor (N^2 - N)$. El número total de bloques de mediciones utilizados es $N' \times V'$, donde $N' = \lceil \frac{N}{B-\Delta} \rceil$ y $V' = \lceil \frac{N+L-1}{B-\Delta} \rceil$.

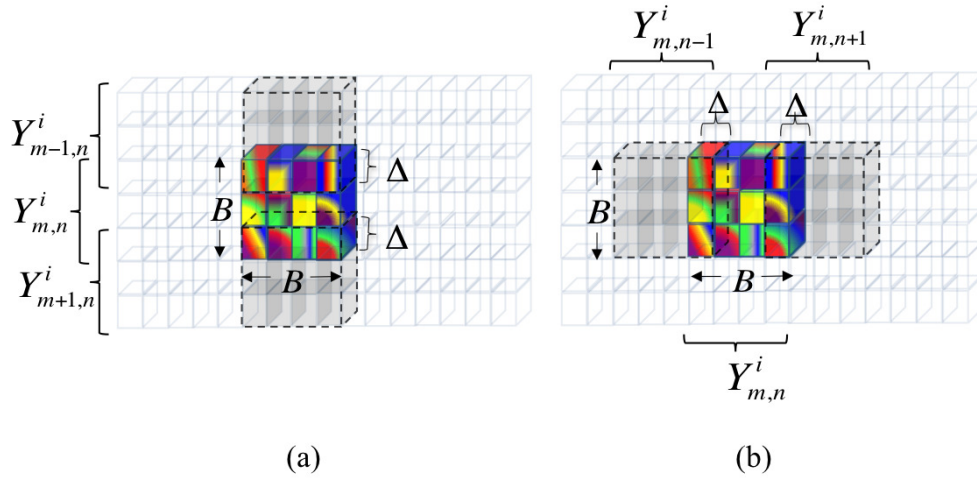


Figura 4.1: Ejemplo del modelo de descomposición de las mediciones en bloques traslapados utilizando Δ filas y columnas de solapamiento. (a) Solapamiento horizontal, (b) Solapamiento vertical.

4.2. Reconstrucción del cubo de datos a partir de bloques con solapamiento

El uso de bloques traslapados en el detector se ve reflejado en el solapamiento existente entre los paralelepípedos reconstruidos. Dado el conjunto de bloques de mediciones $\{y_{mn}\}_{m=0, n=0}^{N'-1, V'-1}$, un algoritmo de reconstrucción de *compressed sensing* es utilizado para reconstruir $\{\tilde{f}_{mn}\}_{m=0, n=0}^{N'-1, V'-1}$. Este procedimiento es realizado como se describe en la Tabla 4.1.

Cuadro 4.1: Reconstrucción individual de porciones del cubo de datos a partir de bloques de mediciones con solapamiento

Entradas	$\{\mathbf{Y}^i\}_{i=0}^{K-1}, K, B, \Delta$
Inicialización	$N' = \lceil \frac{N}{B-\Delta} \rceil, V' = \lceil \frac{N+L-1}{B-\Delta} \rceil$
Dividir el conjunto de mediciones	$\mathbf{Y}^i = [\mathbf{Y}_{0,0}^i, \dots, \mathbf{Y}_{N'-1, V'-1}^i]$
Agrupar los bloques de diferentes capturas	$\mathbf{Y}_{m,n} = [\mathbf{Y}_{m,n}^0, \dots, \mathbf{Y}_{m,n}^{K-1}]$
Vectorizar las mediciones	$\mathbf{y}_{mn} = [(\mathbf{y}_{mn}^0)^T, \dots, (\mathbf{y}_{mn}^{K-1})^T]^T$
Usar algoritmo GPSR para reconstruir el paralelepípedo oblicuo	$\tilde{\mathbf{f}}_{m,n} = [(\tilde{\mathbf{f}}_{0,0})^T, \dots, (\tilde{\mathbf{f}}_{N'-1, V'-1})^T]^T$
Reordenar los resultados	$\tilde{\mathbf{F}}_{m,n} = [\tilde{\mathbf{F}}_{0,0}, \dots, \tilde{\mathbf{F}}_{N'-1, V'-1}]$

Una vez que los paralelepípedos oblicuos han sido reconstruidos individualmente, estos deben ser ensamblados para obtener el cubo de datos completo. El proceso de ensamblaje es crítico debido a que contribuye en la reducción de artefactos indeseados y mejora la calidad de la reconstrucción final.

La representación matricial del paralelepípedo oblicuo reconstruido a partir del bloque \mathbf{y}_{mn} es representada como $\tilde{\mathbf{F}}_{m,n}$. La relación dentro del cubo de datos, entre los bloques traslapados y los paralelepípedos oblicuos traslapados se muestra en la Figura 4.2.

Cada banda espectral de la porción reconstruida (paralelepípedo oblicuo) puede expresarse como

$$\tilde{\mathbf{F}}_{m,n,k} = \begin{bmatrix} & \mathcal{A}_{m,n,k} & \\ \mathcal{C}_{m,n,k} & \mathcal{B}_{m,n,k} & \mathcal{D}_{m,n,k} \\ & \mathcal{E}_{m,n,k} & \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

donde \mathcal{A}_{mnk} , \mathcal{C}_{mnk} , \mathcal{D}_{mnk} y \mathcal{E}_{mnk} son matrices que representan las regiones que han sido reconstruidas por más de un bloque. Específicamente, \mathcal{A}_{mnk} además de estar contenida en $\tilde{\mathbf{F}}_{m,n}$ también los está en $\tilde{\mathbf{F}}_{m-1,n}$; \mathcal{C}_{mnk} también está contenida en $\tilde{\mathbf{F}}_{m,n-1}$, y así sucesivamente. Por otra parte, \mathcal{B}_{mnk} corresponde a la reconstrucción de la porción del bloque que no incluye píxeles de solapamiento, y por lo tanto únicamente está contenida en $\tilde{\mathbf{F}}_{m,n}$. La Figura 4.3

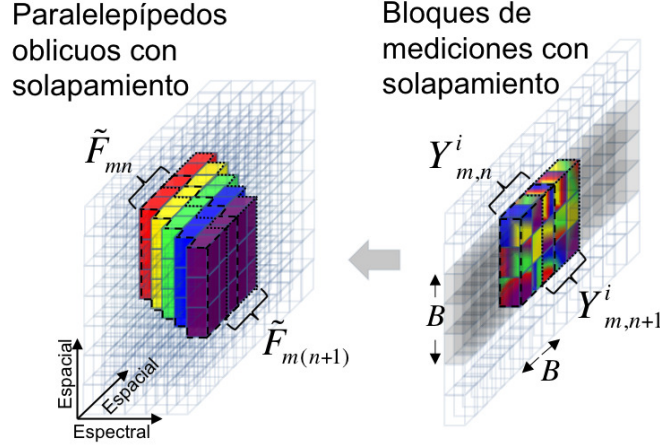


Figura 4.2: La reconstrucción a partir de bloques adyacentes con solapamiento vertical conduce a un solapamiento vertical en los paralelepípedos oblicuos reconstruidos. El solapamiento horizontal entre bloques de mediciones tiene un efecto similar en las reconstrucciones.

a) presenta una descripción general de la estructura de solapamiento expresada en la Ecuación 4.2. Como se muestra en la Figura 4.3 b), esta metodología se ajusta también a los casos especiales que ocurren en los límites de la imagen.

El proceso de ensamblaje es realizado de manera que las regiones duplicadas, que han sido reconstruidas por bloques adyacentes, sean calculadas como el promedio de dichas reconstrucciones y posteriormente, fusionadas con el conjunto $\{\mathcal{B}_{m,n,k}\}_{m=0,n=0}^{N'-1,V'-1}$. Este procedimiento es presentado en la Figura 4.4. Otros enfoques como los filtros de mediana o myriad [53; 54] son alternativas válidas para reducir el efecto de los artefactos y pueden ser explorados en trabajos futuros. El promedio de las regiones con solapamiento entre bloques adyacentes se define como

$$\mathcal{E}'_{m(m+1),n,k} = \frac{\mathcal{E}_{m,n,k} + \mathcal{A}_{(m+1),n,k}}{2}, \quad \mathcal{D}'_{m,n(n+1),k} = \frac{\mathcal{D}_{m,n,k} + \mathcal{C}_{m,(n+1),k}}{2} \quad (4.3)$$

para $m = 0, \dots, N' - 1$ y $n = 0, \dots, V' - 1$. En la Figura 4.4, es posible notar que la porción de cada paralelepípedo oblicuo que se utiliza para el proceso

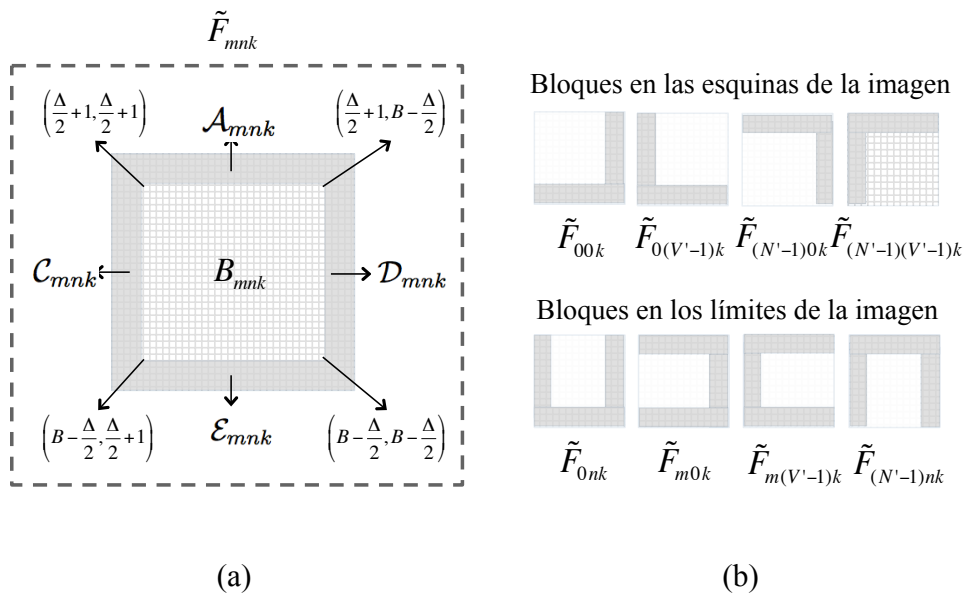


Figura 4.3: a) División de la k – ésima banda espectral de un paralelepípedo oblicuo reconstruido. Las regiones sombreadas incluyen $\frac{\Delta}{2}$ columnas o filas a cada lado. Los píxeles en estas regiones han sido reconstruidos tanto por el bloque (m, n) como por sus vecinos. b) Casos especiales que ocurren en los límites de la imagen.

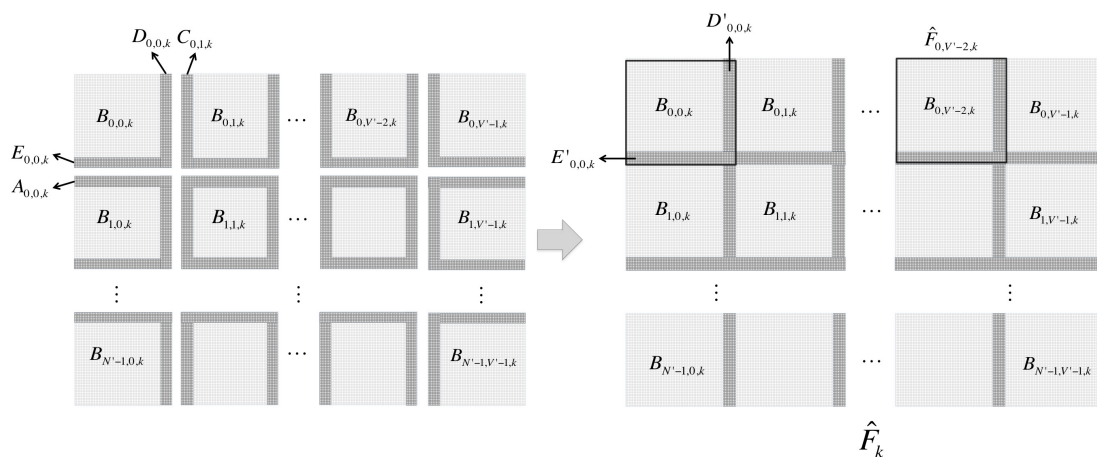


Figura 4.4: Proceso de ensamblaje de la k – ésima banda espectral. Las regiones sombreadas corresponden a los píxeles que han sido promediados utilizando las reconstrucciones de paralelepípedos consecutivos.

de ensamblaje puede escribirse como

$$\hat{\mathbf{F}}_{m,n,k} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{m,n,k} & \mathcal{D}'_{m,n(n+1),k} \\ \mathcal{E}'_{m(m+1),n,k} & \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Finalmente, la k –ésima banda espectral del cubo de datos completo, $\hat{\mathbf{F}}_k$, es ensamblada utilizando la expresión

$$\hat{\mathbf{F}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{0,0,k} & \hat{\mathbf{F}}_{0,1,k} & \dots & \hat{\mathbf{F}}_{0,V'-1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{F}}_{N'-1,0,k} & \hat{\mathbf{F}}_{N'-1,1,k} & \dots & \hat{\mathbf{F}}_{N'-1,V'-1,k} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

para $k = 0, \dots, L - 1$. La reconstrucción completa del cubo de datos está dada por $\hat{\mathbf{F}} = [\hat{\mathbf{F}}_0, \dots, \hat{\mathbf{F}}_{L-1}]$. El proceso de ensamblaje del cubo de datos se resume en la Tabla 4.2.

Cuadro 4.2: Resumen: Proceso de ensamblaje para el modelo de reconstrucción del CASSI, utilizando bloques con solapamiento

Entradas: $N', V', L, \{\tilde{\mathbf{F}}_{m,n,k}\}_{m=0,n=0,k=0}^{N'-1,V'-1,L-1}$
<p>para $k = 0, \dots, L - 1$ para $m = 0, \dots, N' - 1$ para $n = 0, \dots, V' - 1$ Extraer $\mathcal{B}_{m,n,k}$ de $\tilde{\mathbf{F}}_{m,n,k}$ Promediar regiones duplicadas: $\mathcal{E}'_{m(m+1),n,k}$ y $\mathcal{D}'_{m,n(n+1),k}$ Utilizar la plantilla para ensamblar $\hat{\mathbf{F}}_{m,n,k} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{m,n,k} & \mathcal{D}'_{m,n(n+1),k} \\ \mathcal{E}'_{m(m+1),n,k} & \end{bmatrix}$</p> <p>fin fin</p> <p>Ensamblar la k–ésima banda espectral $\hat{\mathbf{F}}_k = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{F}}_{0,0,k} & \dots & \hat{\mathbf{F}}_{0,V'-1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{F}}_{N'-1,0,k} & \dots & \hat{\mathbf{F}}_{N'-1,V'-1,k} \end{bmatrix}$</p> <p>fin</p>
Salida: $\tilde{\mathbf{F}} = [\tilde{\mathbf{F}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{F}}_{L-1}]$

El tamaño de los bloques y la cantidad de píxeles de solapamiento determinan el número de total de bloques, y por ende, la cantidad de reconstrucciones necesarias para obtener la escena 3-dimensional completa. La selección de estos parámetros involucra una relación entre la calidad de la señal reconstruida y el tiempo de cómputo necesario para reconstruir cada paralelepípedo.

Capítulo 5

Simulaciones y Resultados

El desempeño del modelo de reconstrucción por bloques con solapamiento para el sistema CASSI fue evaluado mediante la realización de diferentes simulaciones. Para esto se utilizaron tres cubos de datos \mathbf{F} con resolución espacial 256×256 , 512×512 y 1024×1024 píxeles, respectivamente, y $L = 24$ bandas espectrales en el rango de 452nm a 667nm. Los cubos de datos de 256×256 y 512×512 fueron obtenidos en el laboratorio utilizando un monocromador en el espectro visible. Las 24 bandas espectrales de estas bases de datos y sus frecuencias centrales se muestran en la Figura 5.1 y Figura 5.2, respectivamente. El cubo de datos de 1024×1024 fue obtenido sintéticamente, realizando reflexiones y traslaciones del cubo de 512×512 , y se muestra en la Figura 5.3. Un cuarto cubo de datos con resolución espacial 512×512 píxeles y $L = 32$ bandas espectrales fue utilizado para analizar el enfoque de reconstrucción por bloques cuando existe un incremento en la resolución espectral. Este cubo de datos es una porción de la vista aérea de *Moffett field* en California, capturada por el sistema AVIRIS[55]. El espectro contenido en esta base de datos va desde 447nm hasta 737nm. Una representación RGB de este cubo de datos se presenta en la Figura 5.8 (a). El proceso de sensado fue simulado utilizando aperturas codificadas $T_{j\ell}^i \in \{0, 1\}$, cuyas entradas son valores booleanos generados aleatoriamente, con una transmitancia de 50% píxeles. Posteriormente, las reconstrucciones fueron obtenidas utilizando el algoritmo GPSR [50] y los procedimientos del enfoque de reconstrucción por bloques con solapamiento presentados en las las Tablas 4.1 y 4.2. Estos re-

sultados son comparados con el enfoque de reconstrucción tradicional para el sistema CASSI descrito en el Capítulo 2. En los dos enfoques se fijó el mismo número de iteraciones, sin embargo, se pudo observar que las reconstrucciones por bloques convergen más rápidamente. El parámetro de regularización del algoritmo GPSR fue seleccionado de manera que cada simulación utiliza el valor que resulta en la mejor reconstrucción posible [50]. En el caso de las reconstrucciones utilizando bloques con solapamiento, el mismo valor de τ fue utilizado para reconstruir todos los bloques. Debido a que los códigos de apertura son de naturaleza aleatoria, los resultados que se presentan en esta sección son promedios obtenidos al realizar varias repeticiones de cada experimento. Por otra parte, se utilizó una base de representación tridimensional $\Psi = \Psi_C \otimes \Psi_{2D}$, donde Ψ_C es la base Coseno y Ψ_{2D} es una base *Wavelet Symmlet 8* en 2D. El uso de una base de representación en 3D permite preservar el 99,64% de la energía de la señal utilizando únicamente el 3% de los coeficientes. Cada cubo de datos fue aproximado utilizando una razón de dispersión $S/v = 0,065$, donde $v = N^2L$ y S es el número de coeficientes diferentes de cero. Específicamente, cada cubo de datos \mathbf{F} es representado como un vector de longitud v utilizando la Ecuación 2.3 y la aproximación es realizada convirtiendo en cero los $v - S$ coeficientes menos significativos de la representación *sparse* de la señal en la base de representación seleccionada. Estas representaciones *sparse* de los cubos de datos conforman el conjunto de señales analizadas en las simulaciones. El tamaño del bloque en todos los experimentos debe ser un valor diádico, de manera que la representación de la señal en la base *Wavelet* pueda ser calculada. Todas las simulaciones fueron realizadas utilizando un equipo de cómputo con un procesador Intel Core i7 3960X de 3.30GHz, 12 núcleos y 32 GB de memoria RAM.

5.1. Reconstrucciones utilizando bloques con solapamiento

En este experimento los cubos de datos de prueba son reconstruidos utilizando diferentes tamaños de bloque y cantidad de solapamiento entre bloques

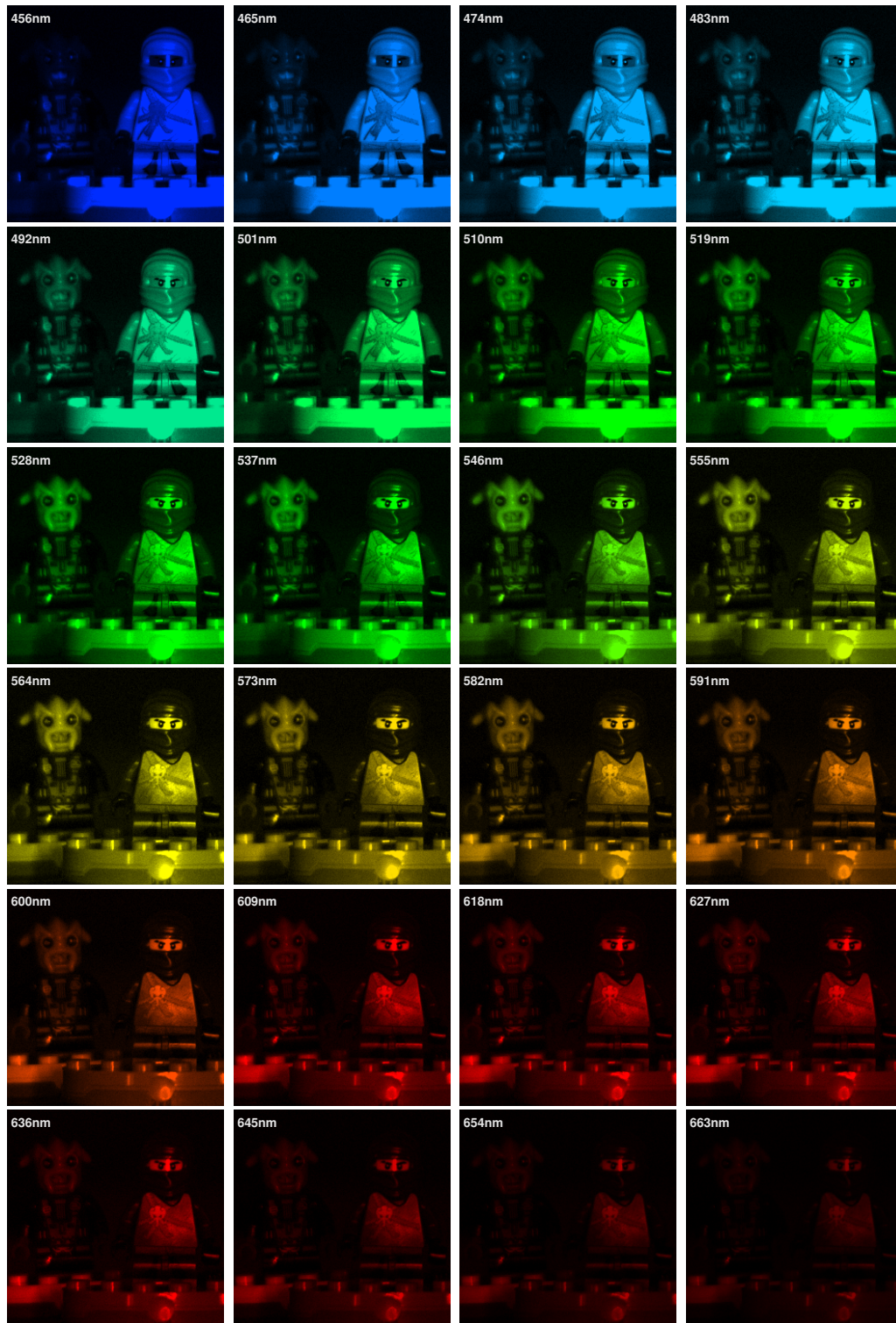


Figura 5.1: Cubo de datos con 24 bandas espectrales cuyas longitudes de onda se encuentran en el rango de 452nm a 667nm. Cada banda espectral tiene una resolución espacial de 256×256 píxeles.

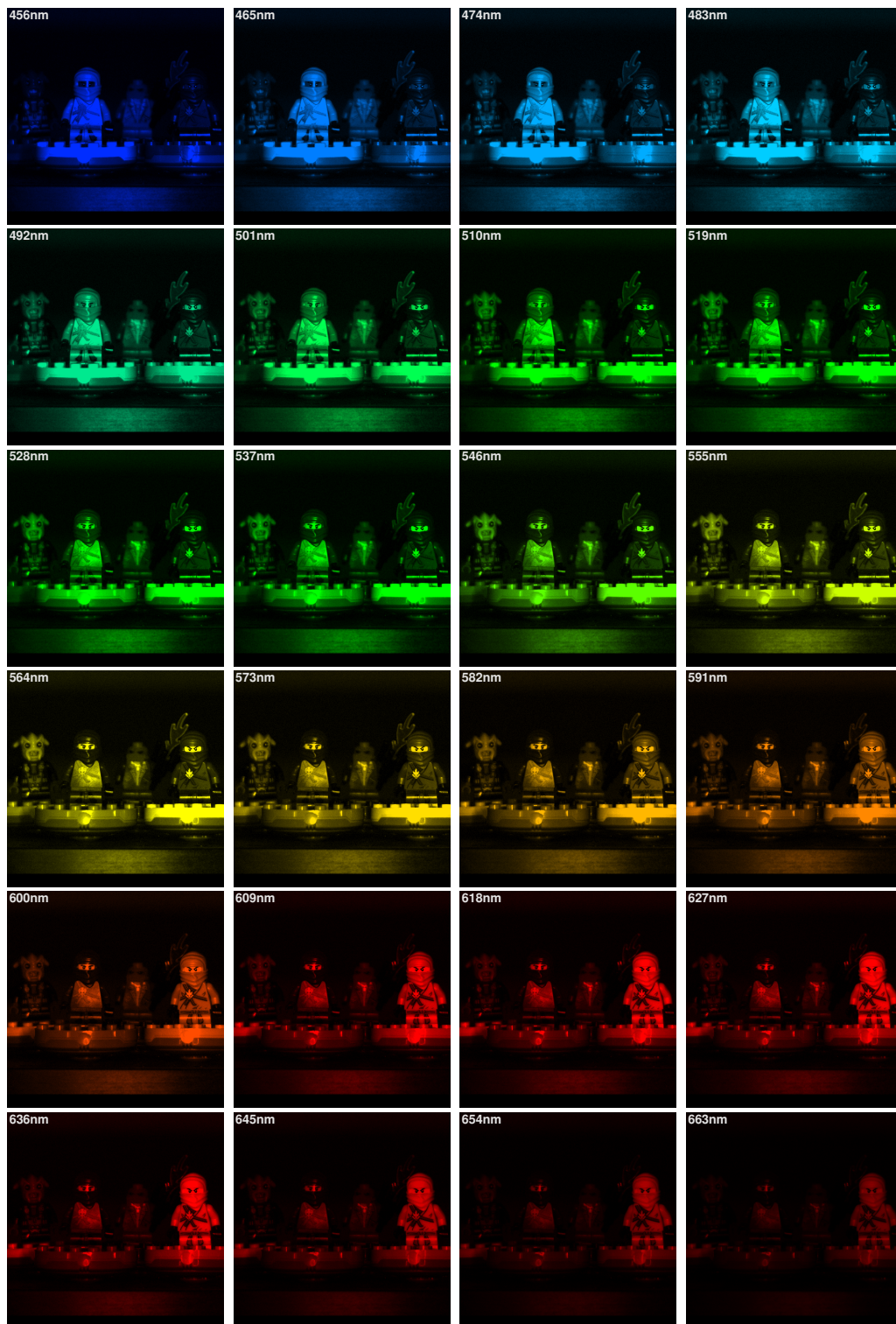


Figura 5.2: Cubo de datos con 24 bandas espectrales cuyas longitudes de onda se encuentran en el rango de 452nm a 667nm. Cada banda espectral tiene una resolución espacial de 512×512 píxeles.

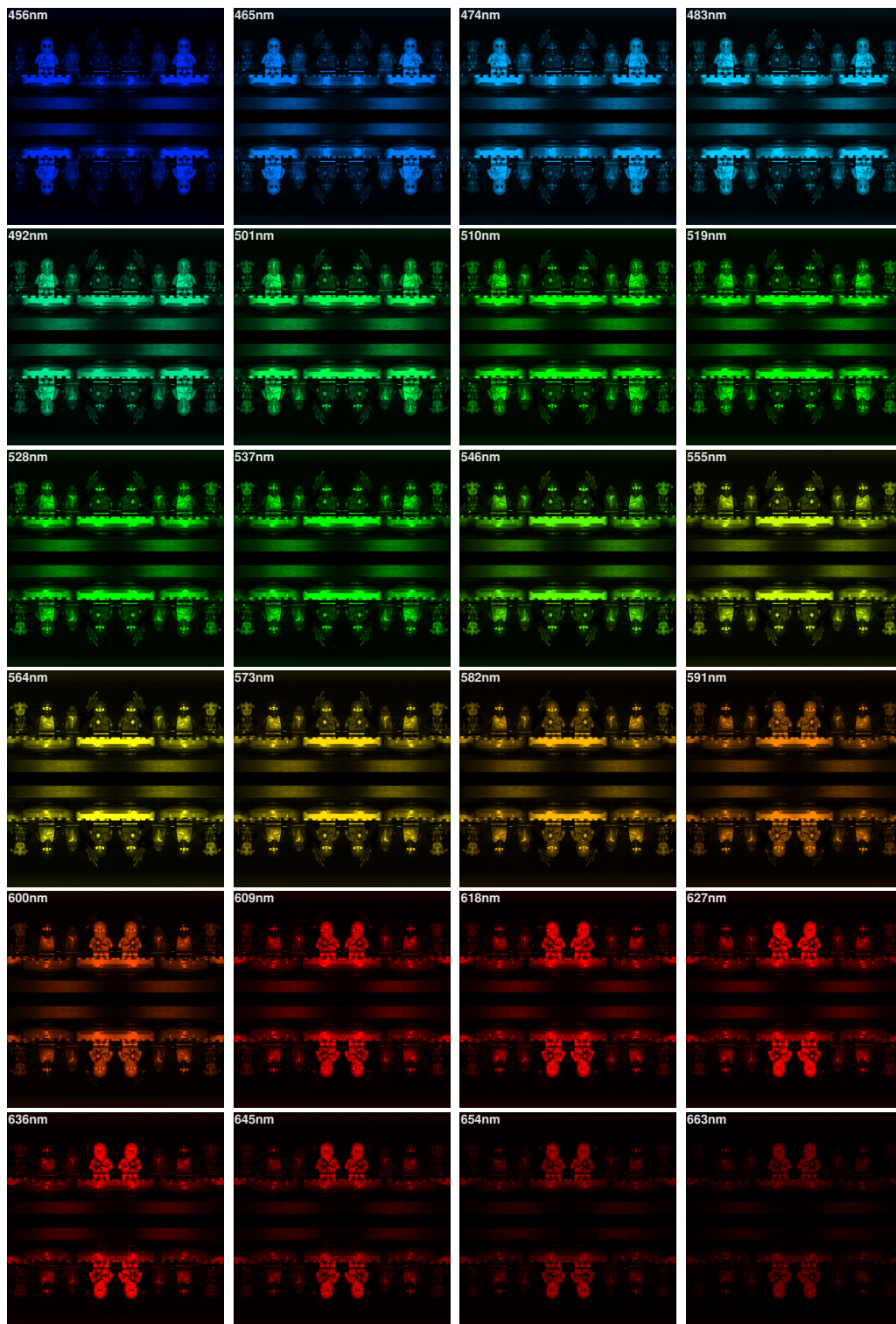


Figura 5.3: Cubo de datos con 24 bandas espectrales cuyas longitudes de onda se encuentran en el rango de 452nm a 667nm. Cada banda espectral tiene una resolución espacial de 1024×1024 píxeles.

de mediciones. La Tabla 5.1 presenta los parámetros usados en estas simulaciones para cada cubo de datos.

Cuadro 5.1: Parámetros para reconstrucciones CASSI utilizando bloques con solapamiento

Cubo de datos	Tamaño de bloque B	Solapamiento Δ
256×256	32	12
	64	24
512×512	64	24
	128	30
1024×1024	128	32
	256	40

La Figura 5.4 presenta los resultados de reconstrucción para el enfoque de reconstrucción tradicional y el modelo de reconstrucción por bloques con solapamiento. Estos resultados están expresados en PSNR, en función del número de capturas. Las Figuras 5.4 (a) y (b), muestran que los resultados de las reconstrucciones realizadas mediante la técnica de bloques traslapados superan la reconstrucción tradicional para los cubos de datos de 256×256 y 512×512 píxeles. Los resultados para el cubo de datos de 1024×1024 píxeles son ligeramente diferentes; el nuevo enfoque obtuvo mejores valores de PSNR cuando se utilizaron más de 6 capturas. Sin embargo, el uso de bloques de menor tamaño para este cubo de datos podría traducirse en mejores resultados de PSNR, similares a los de las Figuras 5.4 (a) y (b). Por otra parte, es posible notar que en la Figura 5.4 (c) no se muestran resultados de las reconstrucciones tradicionales utilizando más de 12 capturas. Para estos casos, la carga computacional superó las capacidades del equipo de cómputo utilizado en este trabajo, y por lo tanto no fue posible obtener dichas reconstrucciones. El enfoque de reconstrucción utilizando bloques con solapamiento proporciona un modelo que permite superar estos inconvenientes. Finalmente, la Figura 5.4 (d) presenta los resultados para el caso del cubo de datos AVIRIS de dimensiones $512 \times 512 \times 32$. Allí es posible notar que el comportamiento de los resultados es similar a los casos anteriores.

En general, las simulaciones muestran que el enfoque de reconstrucción

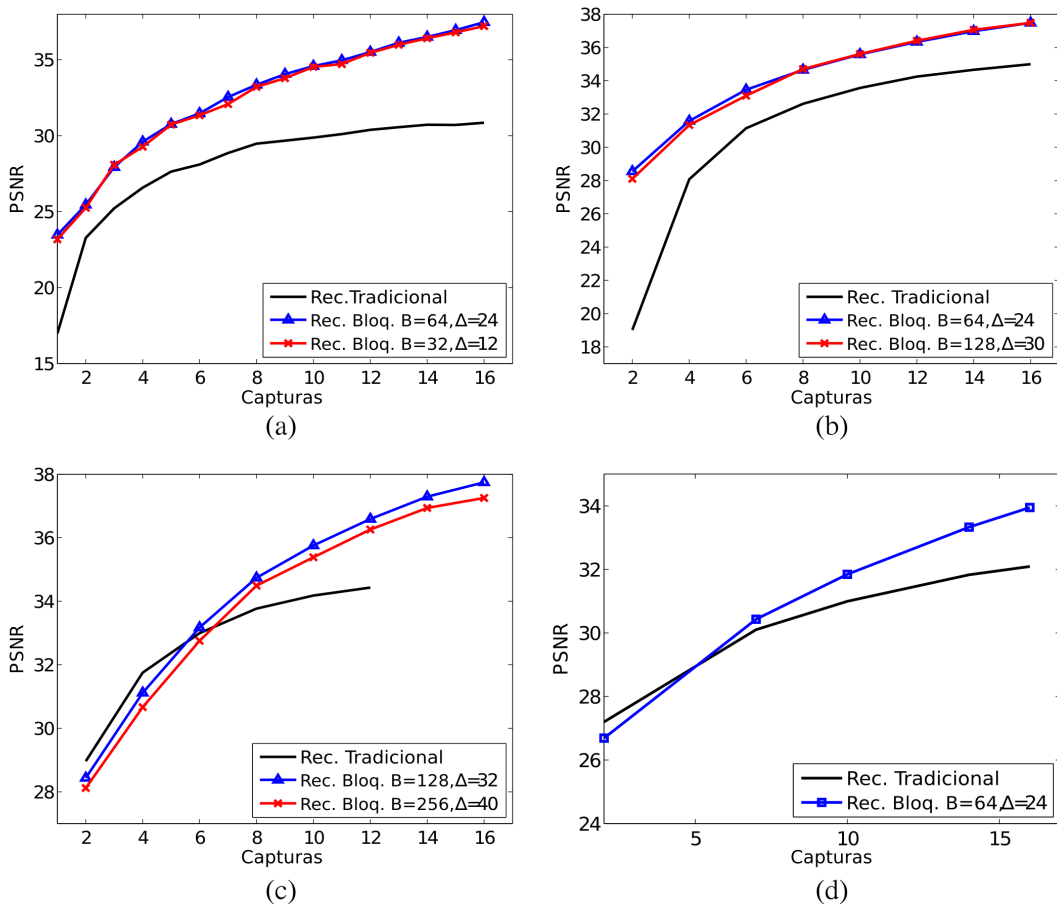


Figura 5.4: Resultados de reconstrucción (Rec.) en PSNR para el enfoque tradicional y la reconstrucción utilizando bloques con solapamiento (Rec. Bloq.) para los cubos de datos (a) $256 \times 256 \times 24$, (b) $512 \times 512 \times 24$, (c) $1024 \times 1024 \times 24$, y (d) $512 \times 512 \times 32$.

utilizando bloques de mediciones traslapados resulta en una mejora de hasta 5 dB sobre el enfoque tradicional. La Figura 5.5 presenta una comparación de la calidad de reconstrucción para el cubo de datos de dimensiones $256 \times 256 \times 24$. Las Figuras 5.6 y 5.7 presentan, respectivamente, acercamientos de los resultados obtenidos para los cubos de dimensiones $512 \times 512 \times 24$ usando $B = 64$, $\Delta = 24$ y $1024 \times 1024 \times 24$ usando $B = 128$, $\Delta = 24$. La Figura 5.8 presenta los resultados de las reconstrucciones para la vista aérea de *Moffet field*. Además, en la Figura 5.9 se presenta la reconstrucción espectral para tres píxeles de la Figura 5.5. Desde ese punto de vista, es posible notar que el enfoque de reconstrucción por bloques con solapamiento proporciona aproximaciones más precisas de la información espectral de la fuente en comparación con la reconstrucción tradicional.

5.2. Reconstrucción por bloques con solapamiento usando mediciones con ruido

Reconstrucciones a partir de mediciones con ruido fueron obtenidas tanto para el enfoque tradicional como para el enfoque de reconstrucción por bloques con solapamiento. En este experimento el conjunto de mediciones y en la Ecuación 2.6, fue contaminado utilizando ruido Gaussiano con media cero. La varianza del ruido fue seleccionada de manera que se obtuviera el valor de relación señal a ruido (SNR) deseado. El SNR puede ser expresado como $\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_n^2} \right)$, donde σ_y^2 es la varianza del conjunto de mediciones del CASSI, y σ_n^2 es la varianza del ruido.

Los resultados de simulación para SNR de 20 dB y 25 dB utilizando el cubo de datos de dimensiones $256 \times 256 \times 24$ se presentan en la Figura 5.10. Estos resultados muestran que a pesar de la presencia de estos niveles de ruido en el conjunto de mediciones, el enfoque de reconstrucción por bloques con solapamiento supera los resultados del método tradicional.

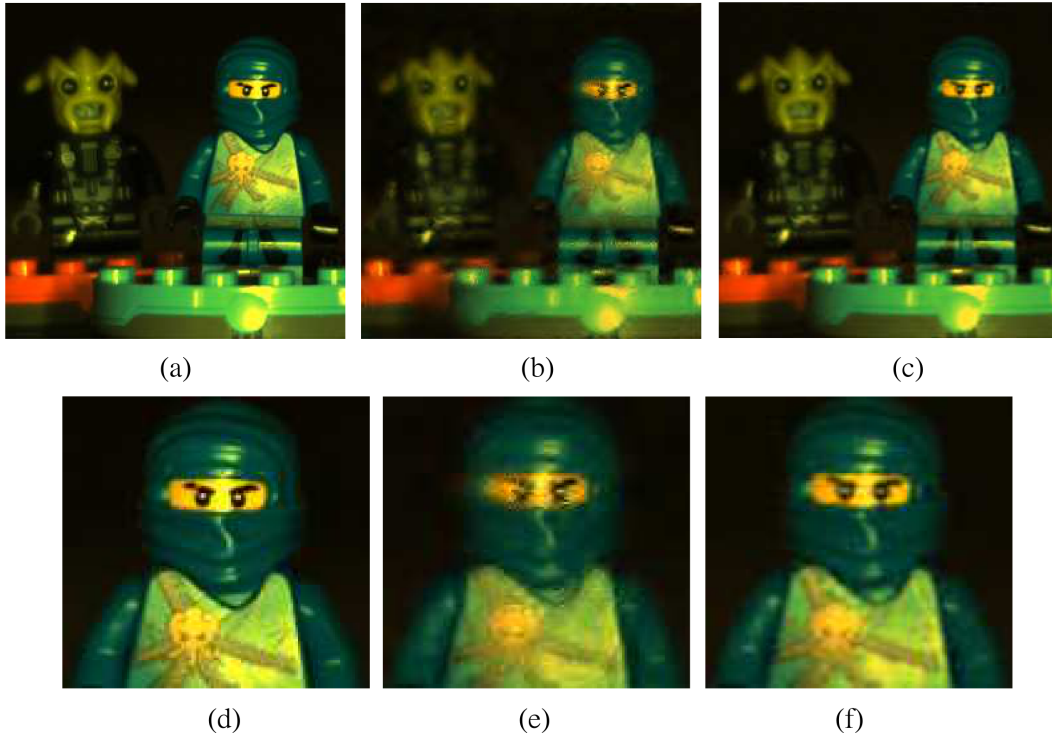


Figura 5.5: (a) Original del cubo de datos de dimensiones $256 \times 256 \times 24$. Reconstrucciones para 6 capturas utilizando: (b) Reconstrucción tradicional, 28.1 dB; (c) Reconstrucción por bloques con solapamiento, $B = 64$ y $\Delta = 24$, 31.46 dB. (d), (e) y (f) son acercamientos de las imágenes en (a), (b) y (c), respectivamente.

5.3. Tiempo de reconstrucción

Debido a que las reconstrucciones por bloques manipulan matrices de menor tamaño, el tiempo de reconstrucción requerido para cada bloque en la Ecuación 4.2 es considerablemente menor que el tiempo de reconstrucción en el enfoque tradicional. Sin embargo, el tamaño del bloque tiene una relación directa con el tiempo requerido para la reconstrucción, y a su vez, también está relacionado con la calidad de las imágenes reconstruidas. La selección de este parámetro depende tanto de las dimensiones espaciales como espectrales del cubo de datos, puesto que bloques muy pequeños carecen de información suficiente a lo largo de todas las bandas para proporcionar reconstrucciones precisas; esto se ve reflado en reconstrucciones de baja cali-

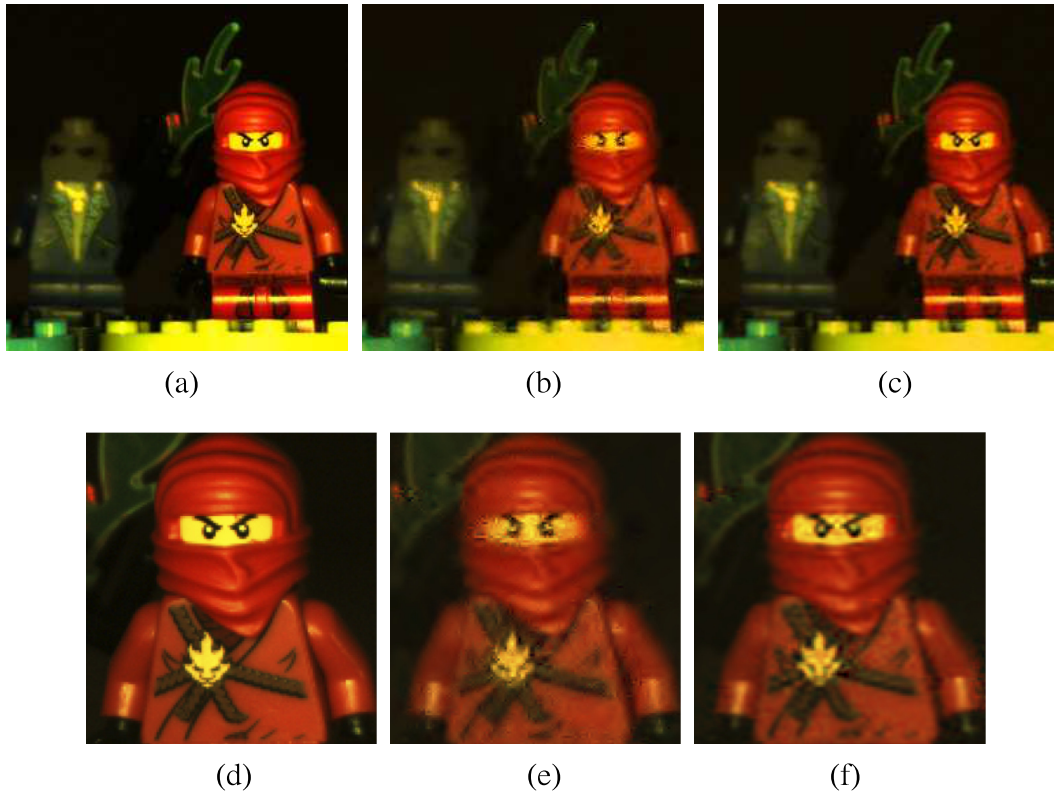


Figura 5.6: (a) Acercamiento del cubo de datos original de dimensiones $512 \times 512 \times 24$. Reconstrucciones para 6 capturas utilizando: (b) Reconstrucción tradicional, 31.09 dB; (c) Reconstrucción por bloques con solapamiento, $B = 64$ y $\Delta = 24$, 33.45 dB. (d), (e) y (f) son acercamientos de las imágenes en (a), (b) y (c), respectivamente.

dad. Además, el uso de pequeños bloques conduce a un mayor número total de bloques; en consecuencia, más procesadores son requeridos con el fin de acelerar la reconstrucción total. Por otra parte, el uso de bloques más grandes incrementa el tiempo de reconstrucción individual pero puede conducir a un menor tiempo de reconstrucción total dependiendo del número de procesadores disponibles, debido a que la cantidad de bloques también es menor. Sin embargo, cuando el tamaño del bloque tiende al tamaño de la imagen, el enfoque de reconstrucción por bloques se acerca a los resultados del enfoque tradicional, es decir que la calidad de la reconstrucción se reduce y el tiempo de cómputo aumenta.

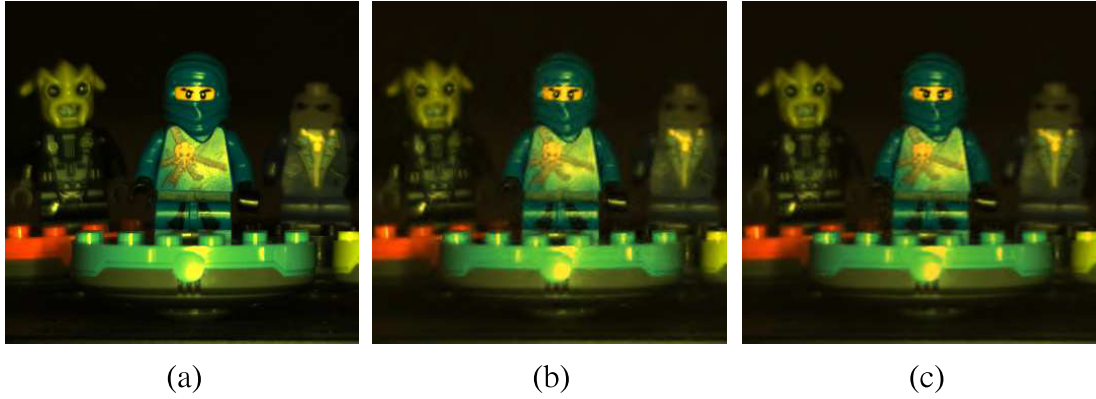


Figura 5.7: (a) Acercamiento del cubo de datos original de dimensiones $1024 \times 1024 \times 24$. Reconstrucciones para 6 capturas utilizando: (b) Reconstrucción tradicional, 32.99 dB, y (c) Reconstrucción por bloques con solapamiento, $B = 128$ y $\Delta = 32$, 33.17 dB.

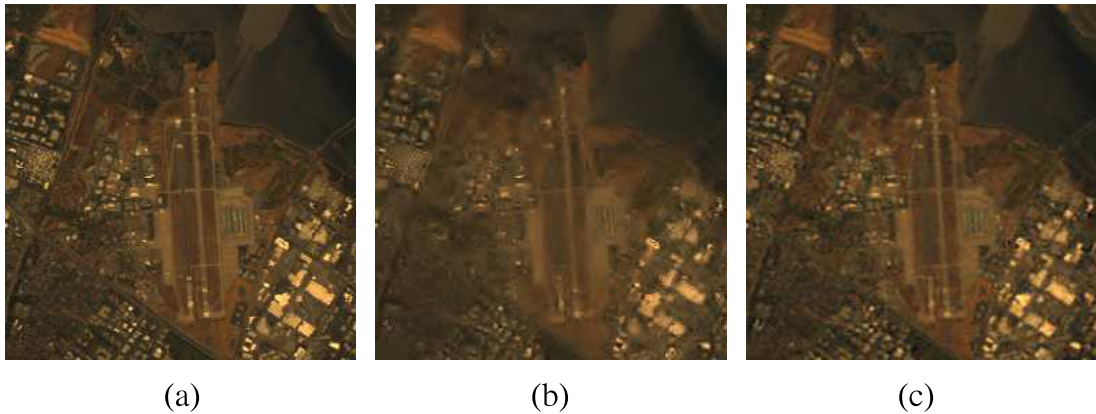
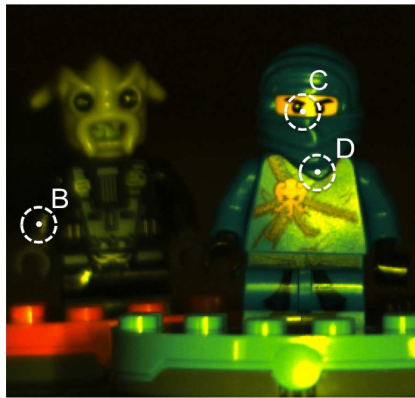
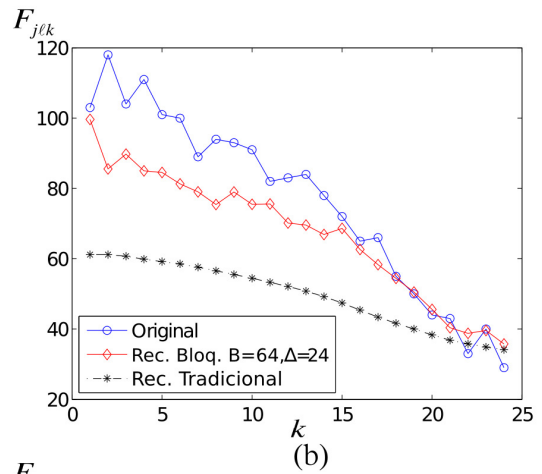


Figura 5.8: (a) Versión RGB de un acercamiento del cubo de datos de dimensiones $512 \times 512 \times 32$. Reconstrucciones para 10 capturas utilizando: (b) Reconstrucción tradicional, 30.99 dB, y (c) Reconstrucción por bloques con solapamiento, $B = 64$ y $\Delta = 24$, 31.84 dB.

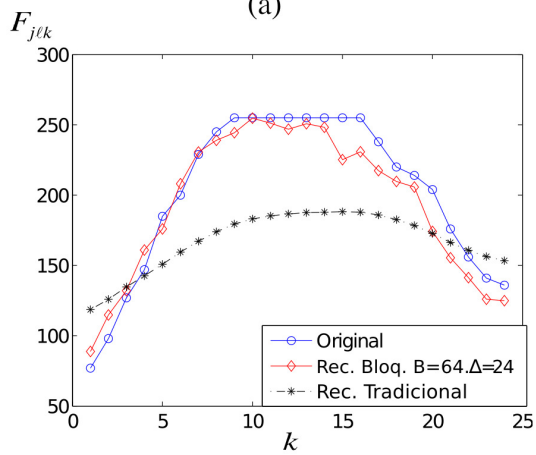
La Figura 5.11 presenta el tiempo de reconstrucción para los experimentos realizados en la Sección 5.1. Estos resultados muestran que el enfoque por bloques es hasta 4 veces más rápido que la reconstrucción tradicional para el cubo de datos de dimensiones $256 \times 256 \times 24$; en el caso del cubo de dimensiones $512 \times 512 \times 24$, el enfoque por bloques es hasta 5 veces más rápido. Para dimensiones espaciales mayores como $1024 \times 1024 \times 24$, el enfoque por bloques es hasta 9 veces más rápido en los casos en que ambas



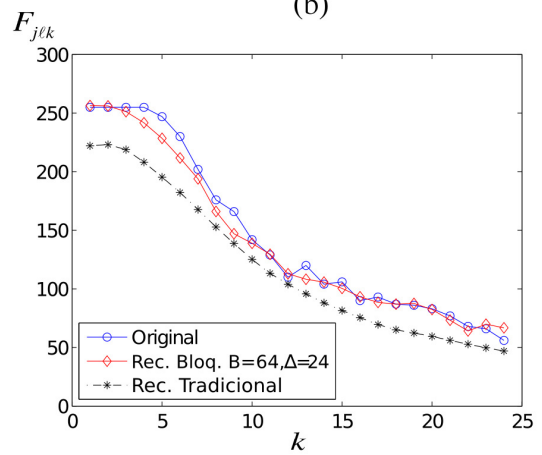
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.9: Reconstrucción espectral de los píxeles espaciales mostrados en (a) para (b) píxel B, (c) píxel C, y (d) píxel D. El eje x indica el eje espectral.

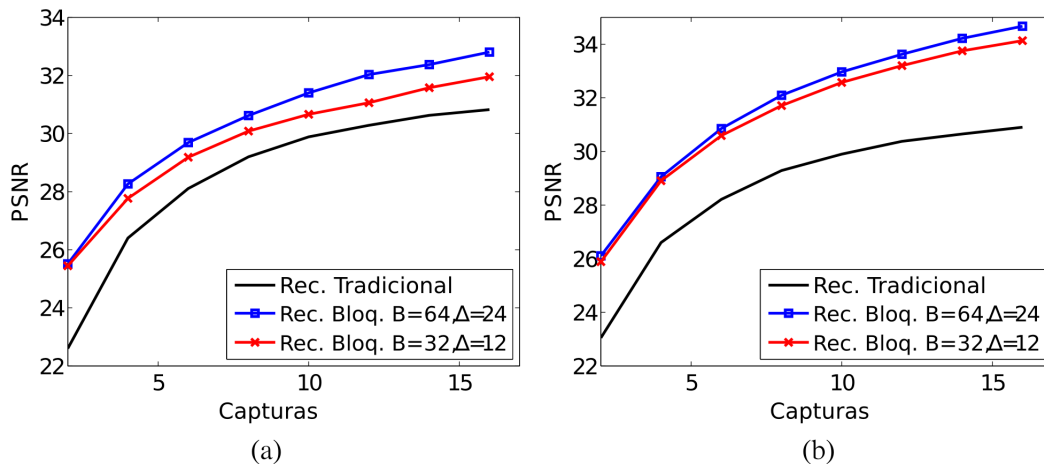


Figura 5.10: Resultados de reconstrucción (Rec.) en PSNR, a partir de mediciones con ruido, para el cubo de datos de dimensiones $256 \times 256 \times 24$ utilizando reconstrucción del cubo de datos completo y el enfoque de reconstrucción por bloques con solapamiento. (a) SNR = 20 dB y (b) SNR = 25 dB.

reconstrucciones pueden obtenerse, puesto que para un número mayor de capturas, la reconstrucción usando el enfoque tradicional puede tomar varios días. Los resultados también muestran que un incremento en la resolución espectral conduce a un incremento en el tiempo de reconstrucción con respecto a un cubo de datos con dimensiones espaciales similares. Sin embargo, la reconstrucción por bloques sigue siendo más rápida que el enfoque tradicional. Además, la Figura 5.11 muestra el tiempo promedio para reconstruir un bloque utilizando un procesador. Estos resultados son útiles para el diseño de esquemas de reconstrucción en paralelo, de manera que cada procesador reconstruya el menor número de bloques posible, y de esta manera, el tiempo total de reconstrucción sea reducido para aplicaciones específicas.

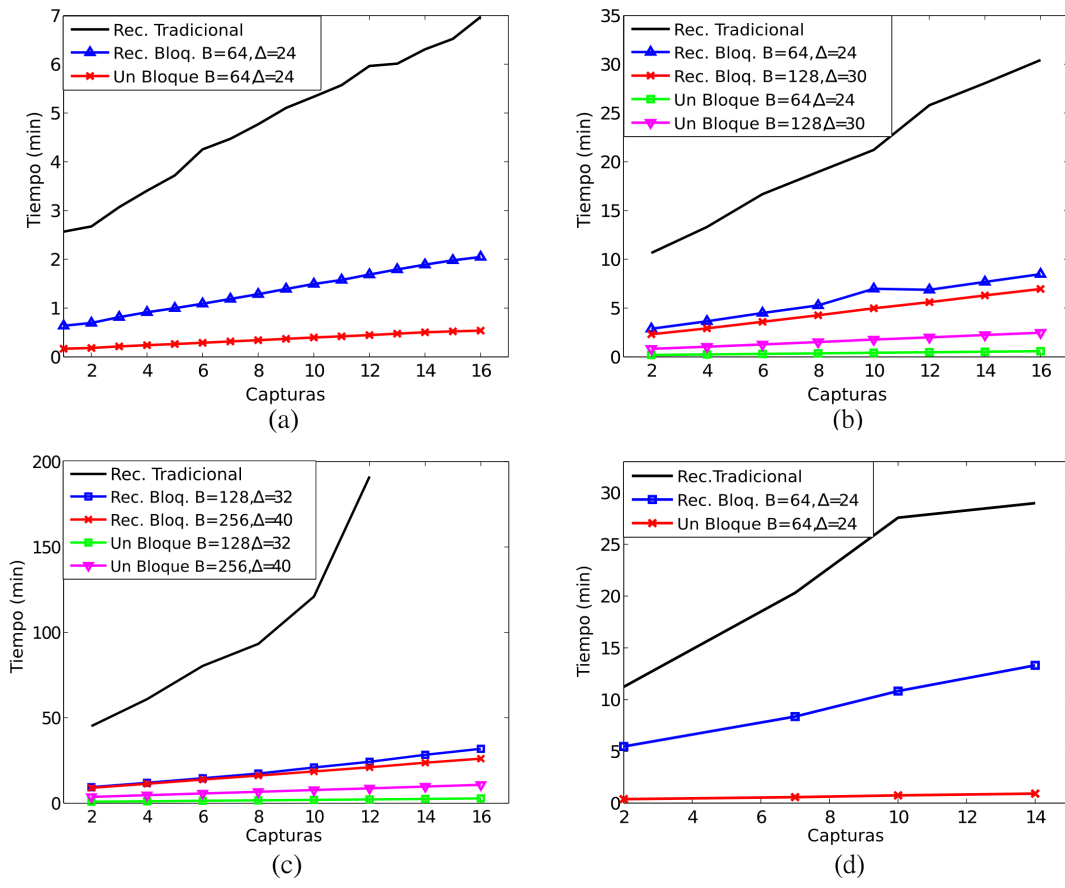


Figura 5.11: Tiempo de reconstrucción (Rec.) en función del número de capturas para el enfoque tradicional y reconstrucción por bloques con solapamiento. El tiempo promedio de reconstrucción de un bloque utilizando un procesador (Un bloque) también es incluido para los cubos de datos de dimensiones (a) $256 \times 256 \times 24$, (b) $512 \times 512 \times 24$ y, (c) $1024 \times 1024 \times 24$ y (d) $512 \times 512 \times 32$.

Capítulo 6

Conclusiones, Contribuciones y Trabajo futuro

6.1. Conclusiones

El modelo matemático para reconstrucciones por bloques en el sistema CASSI ha sido desarrollado. La estructura de las mediciones comprimidas en CASSI es apropiada para reconstruir paralelepípedos oblicuos independientes que a su vez, son porciones del cubo de datos. Dos variaciones del modelo de reconstrucción por bloques fueron presentadas: la primera utiliza bloques de mediciones independientes y la segunda utiliza bloques con solapamiento. La aparición de artefactos en las reconstrucciones es inherente al procesamiento por bloques, sin embargo, dichos artefactos son considerablemente reducidos cuando se utilizan bloques de mediciones con solapamiento. Un proceso de ensamblaje para el enfoque de reconstrucción por bloques traslapados también ha sido propuesto. Este proceso se basa en promediar las regiones duplicadas, sin embargo, otras alternativas como filtros mediana pueden ser exploradas.

El método de reconstrucción propuesto puede ser adaptado a arquitecturas de múltiples procesadores, en las cuales cada bloque es reconstruido por un procesador. El costo computacional de reconstruir un cubo de datos completo es reducido por un factor de $(N')^2$ por iteración del GPSR, cuando

se utilizan $(N')^2 = \lfloor \frac{N}{B} \rfloor^2$ bloques de mediciones. Esto se debe a que el costo computacional de la reconstrucción tradicional es $O(KN^4L)$ mientras que el costo del enfoque por bloques es $O\left(K\frac{N^4}{(N')^2}L\right)$. Además, las simulaciones realizadas para diferentes variaciones de dimensiones espaciales y espectrales de los cubos de datos, tamaño del bloque, cantidad de solapamiento entre bloques y presencia de ruido en el conjunto de mediciones, muestran que el modelo propuesto conduce a una reducción del tiempo de reconstrucción y mejoras en la calidad de la imagen reconstruida. En particular, las reconstrucciones utilizando bloques con solapamiento resultan en una mejora de hasta 5 dB sobre el enfoque tradicional, y el tiempo de reconstrucción es reducido hasta en un orden de magnitud.

6.2. Contribuciones

- C. V. Correa, H. Arguello, and G. R. Arce. “Block-based reconstructions for compressive spectral imaging”. *SPIE Conference on Defense, Security and Sensing*, Baltimore, MD, April 2013.
- H. Arguello, C. V. Correa, and G. R. Arce. “Fast lapped block reconstructions in compressive spectral imaging”. *Applied Optics*, Vol. 52, Issue 10, pp. D32 - D45, 2013.
- H. Arguello, C. V. Correa, and G. R. Arce. “Coded aperture optimization by concentration of measure in compressive spectral imaging”. *In preparation to be submitted to J. Opt. Soc. Am. A*.
- Este trabajo fue desarrollado en el marco del convenio de doble titulación de maestría suscrito entre la Universidad Industrial de Santander y la Universidad de Delaware. Por esta razón, este trabajo condujo a la obtención del título de *Master in Electrical and Computer Engineering* otorgado por la Universidad de Delaware.

6.3. Trabajo Futuro

El trabajo desarrollado no incluye un análisis para imágenes espectrales en las que el número de bandas excede la resolución espacial del cubo de datos. Trabajos futuros que tengan en cuenta el tamaño del bloque, son requeridos para este tipo de señales debido a que es posible que los bloques en los extremos del conjunto de mediciones no contengan suficiente información para obtener buenas reconstrucciones del paralelepípedo correspondiente.

Por otra parte, un modelo de discretización más preciso para el sistema CASSI ha sido recientemente publicado en [26]. El desarrollo de un método de reconstrucción por bloques que aproveche las ventajas de este nuevo modelo del CASSI es un área importante para continuar este trabajo.

El diseño de los patrones de las aperturas codificadas permite explotar las cualidades del sistema, y a su vez, obtener reconstrucciones de mayor calidad. Las simulaciones desarrolladas en este trabajo utilizaron aperturas codificadas booleanas generadas aleatoriamente. El desarrollo de patrones que se ajusten específicamente al método de reconstrucción por bloques contribuiría a un mejoramiento de la calidad de los resultados.

Referencias

- [1] Y. Garini, I. T. Young, and G. McNamara. Spectral imaging: principles and applications. *Cytometry Part A*, 69(8):735–747, 2006.
- [2] W. Smith, D. Zhou, and F. Harrison. Hyperspectral remote sensing of atmospheric profiles from satellites and aircraft. *Proc. of SPIE 4151, Hyperspectral Remote Sensing of the Land and Atmosphere*, pages 94–102, 2001.
- [3] G. Shaw and H. Burke. Spectral imaging for remote sensing. *Lincoln Laboratory Journal*, 14(1):3–28, 2003.
- [4] Y. Wang, N. P. Pitsianis, S. T. McCain, M. Gehm, and D. Brady. Coded aperture raman spectroscopy for quantitative measurements of ethanol in a tissue phantom. *Applied Spectroscopy*, 60:663 – 671, 2006.
- [5] B. M. Davis, A. J. Hemphill, D. C. Maltas, M. A. Zipper, P. Wang, and D. Ben-Amotz. Multivariate hyperspectral raman imaging using compressive detection. *Analytical Chemistry*, 83(13):5986 – 5992, 2011.
- [6] C. Fisher and I. Kakoulli. Multispectral and hyperspectral imaging technologies in conservation: current research and potential applications. *Reviews in conservation*, (7), 2006.
- [7] D. Lau, C. Villis, S. Furman, and M. Livett. Multispectral and hyperspectral image analysis of elemental and micro-raman maps of cross-sections from a 16th century painting. *Analytica chimica acta*, 610(1):15 – 24, 2008.

-
- [8] A. Jurado-López and M. Luque. Use of near infrared spectroscopy in a study of binding media used in paintings. *Analytical and Bioanalytical Chemistry*, 380(4):706 – 711, 2004.
- [9] M. Gehm, M. Kim, C. Fernandez, and D. Brady. High-throughput, multiplexed pushbroom hyperspectral microscopy. *Optics Express*, 16:44–51, 2008.
- [10] M. Gehm and D. Brady. High-throughput hyperspectral microscopy. *Proc. of SPIE*, 6090, 2006.
- [11] M. Green, R. Eastwood, C. Sarture, T. Chrien, M. Aronsson, B. Chippendale, J. Faust, B. Pavri, C. Chovit, and M. Solis. Imaging spectroscopy and the airborne visible/infrared imaging spectrometer (aviris). *Remote Sensing of Environment*, 65(3):227–248, 1998.
- [12] D. Brady and M. Gehm. Compressive imaging spectrometers using coded apertures. *Proc. of SPIE Vol*, 6246:62460A–1 – 62460A–9.
- [13] A. Wagadarikar, R. John, R. Willett, and D. Brady. Single disperser design for coded aperture snapshot spectral imaging. *Applied optics*, 47(10):B44–B51, 2008.
- [14] E. Matusiak and Y. Eldar. Sub-nyquist sampling of short pulses. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(3):1134–1148, 2012.
- [15] E. Candès and M. Wakin. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2):21–30, 2008.
- [16] D. Donoho. Compressed sensing. *IEEE Trans. on Information Theory*, 52:1289–1306, 2006.
- [17] D. Donoho, Y. Tsaig, I. Drori, and J. Starck. Sparse solution of under-determined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit (stomp). *Stanford Univ., Palo Alto, CA, Stat. Dept. Tech. Rep.*, 26(3):301–321, March 2006.

-
- [18] E. Candès and T. Tao. Near-optimal signal recovery from random projections and universal encoding strategies. *IEEE Trans. Information Theory*, pages 5406–5245, 2006.
- [19] Z. Wang and G. R. Arce. Variable density compressed image sampling. *IEEE Trans. Image Processing*, 19(1):264–270, 2010.
- [20] J Romberg. Compressive sensing by random convolution. *SIAM J. Imaging Sciences*, pages 1098–1128, 2009.
- [21] A. A. Wagadarikar, R. John, R. Willett, and D. Brady. Single disperser design for coded aperture snapshot spectral imaging. *Appl. Opt.*, 47(10):B44–B51, 2008.
- [22] D. J. Brady. *Optical Imaging and Spectroscopy*. Wiley, John and Sons, 2009.
- [23] A. A. Wagadarikar, N. P. Pitsianis, X. Sun, and D. J. Brady. Spectral image estimation for coded aperture snapshot spectral imagers. *Proc. SPIE*, 7076:707602–1–707602–15, 2008.
- [24] A. A. Wagadarikar, N. P. Pitsianis, X. Sun, and D. J. Brady. Video rate spectral imaging using a coded aperture snapshot spectral imager. *Opt. Express*, 17(8):6368–6388, 2009.
- [25] H. Arguello and G. R. Arce. Code aperture optimization for spectrally agile compressive imaging. *J. Opt. Soc. Am. A*, 28(11):2400–2413, 2011.
- [26] H. Arguello, H. Rueda, Y. Wu, D. W. Prather, and G. R. Arce. Higher-order computational model for coded aperture spectral imaging. *Applied Optics*, 52(10):D12 – D21, 2013.
- [27] H. Arguello and G. R. Arce. Code aperture agile spectral imaging (caasi). In *Proc. International Congress of Imaging and Applied Optics*, Toronto, Canada, July 2011. OSA Optics and Photonics Congress.

-
- [28] H. Arguello and G. R. Arce. Restricted isometry property in coded aperture compressive spectral imaging. In *IEEE Statistical Signal Processing Workshop*, Ann Arbor, MI, USA, 2012.
- [29] H. Arguello and G. R. Arce. Rank minimization code aperture design for spectrally selective compressive imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 22(3):941–954, 2013.
- [30] H. Arguello and G. R. Arce. Spectrally selective compressive imaging by matrix system analysis. In *OSA Optics and Photonics Congress*, Monterey, CA, USA, 2012.
- [31] Y. Wu, I. O. Mirza, G. R. Arce, and D. W. Prather. Development of a digital-micromirror-device-based multishot snapshot spectral imaging system. *Opt. Lett.*, 36:2692–2694, 2011.
- [32] D. Kittle, K. Choi, A. A. Wagadarikar, and D. J. Brady. Multiframe image estimation for coded aperture snapshot spectral imagers. *Appl. Opt.*, 49(36):6824–6833, 2010.
- [33] Y. Rivensons and A. Stern. Compressed imaging with a separable sensing operator. *IEEE Signal Process. Lett.*, 16(6):449–452, 2009.
- [34] M. F. Duarte and R. G. Baraniuk. Kronecker compressive sensing. *IEEE Trans. on Image Processing*, 21(2):494–504, 2012.
- [35] L. Gan. Compressed sensing of natural images. *Proc. Int. Conf. Dig. Signal Process., Cardiff, U.K.*, pages 403–406, July 2007.
- [36] Y. Fang, L. Chen, J. Wu, and B. Huang. Gpu implementation of orthogonal matching pursuit for compressive sensing. *Parallel and Distributed Systems (ICPADS), 2011 IEEE 17th International Conference on*, pages 1044–1047, 2011.
- [37] E. Candès. Compressive sampling. *Proc. International Congress of Mathematicians Madrid, Spain*, pages 1433–1452, 2006.

-
- [38] R. Baraniuk. Compressive sensing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 24(4):118 – 121, 2007.
- [39] E. Candès and J. Romberg. Sparsity and incoherence in compressive sampling. *Inverse Problems*, 23:969, 2007.
- [40] E. Candès and T. Tao. Decoding by linear programming. *IEEE Trans. on Information Theory*, 51(12):4203 – 4215, 2005.
- [41] H. Rauhut. Compressive sensing and structured random matrices. *Theoretical Foundations and Numerical Methods for Sparse Recovery*, 9 of Radon Series Comp. Appl. Math.:1 – 92, 2010.
- [42] J. Haupt, W. Bajwa, G. Raz, and R. Nowak. Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation. *IEEE Trans. Information Theory*, 56:5862 – 5875, 2010.
- [43] J. L. Paredes, G. R. Arce, and Z. Wang. Ultra-wideband compressed sensing: Channel estimation. *IEEE J. of Selected Topics in Signal Processing*, 1:383 – 395, 2007.
- [44] M. F. Duarte and Y. Eldar. Structured compressed sensing: From theory to applications. *IEEE Trans. Signal Processing*, 59:4053 – 4085, 2011.
- [45] J. Tropp and S. Wright. Computational methods for sparse solution of linear inverse problems. *Proceedings of the IEEE*, 98(6):948–958, 2010.
- [46] J. Tropp and A. Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, 53(12):4655–4666, 2007.
- [47] D. Needell and J. Tropp. Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26(3):301–321, 2009.
- [48] S. Wright, R. Nowak, and M. Figueiredo. Sparse reconstruction by separable approximation. *IEEE Transactions Signal Processing*, 57(8):2479–2493, 2009.

-
- [49] J. Bioucas-Dias and M. Figueiredo. A new twist: Two-step iterative shrinking/thresholding algorithms for image restoration. *IEEE Transactions Image Processing*, 16(12):2992–3004, 2007.
- [50] M. A. T. Figueiredo, R. D. Nowak, and S. J. Wright. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems. *IEEE J. of Selected Topics in Signal Processing*, 1(4):586–597, 2007.
- [51] J. Shihao, X. Ya, and L. Carin. Bayesian compressive sensing. *IEEE Transactions Signal Processing*, 56(6):2346–2356, 2008.
- [52] R. Chartrand. Exact reconstruction of sparse signals via nonconvex minimization. *IEEE Signal Processing Letters*, pages 707–710, 2007.
- [53] M. P. McLoughlin and G. R. Arce. Deterministic properties of the recursive separable median filter. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 35(1):98–106, 1987.
- [54] S. Kalluri and G. R. Arce. Robust frequency-selective filtering using weighted myriad filters admitting real-valued weights. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(11):2721–2733, 2001.
- [55] Airborne visible infrared imaging spectrometer. http://aviris.jpl.nasa.gov/data/free_data.html.