LA TOPOLOGÍA DE COMPACTO-ABIERTO

Melany Dayana Mejía Caviedes

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2014

LA TOPOLOGÍA DE COMPACTO-ABIERTO

Melany Dayana Mejía Caviedes

Trabajo de grado para optar al título de

Matemático

Directora

Ph.D. Sonia Marleni Sabogal Pedraza

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2014

Agradecimientos

† Primeramente me gustaría agradecerte a ti Dios por bendecirme para llegar hasta donde hoy me encuentro, porque hiciste realidad tan anhelado sueño.

† Con todo mi cariño y mi amor agradezco a mis padres las personas que hicieron todo en la vida para que yo pudiera lograr mis metas, por motivarme y darme la mano cuando sentía que el camino terminaba.

† A mi directora de tesis, Dra. Sonia Marleni Sabogal Pedraza por su esfuerzo y dedicación, quien con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia y su motivación ha logrado en mí que pueda terminar mis estudios con éxito.

† También me gustaría agradecer a los profesores que durante toda mi carrera profesional han aportado con un granito de arena a mi formación y a los calificadores de este trabajo Dr. Javier Enrique Camargo García y Msc. Rafael Fernando Isaacs Giraldo por el tiempo que han dedicado a leer mi trabajo y sus valiosos aportes, comentarios y sugerencias.

† Son muchas las personas que han formado parte de mi vida profesional a las que me encantaría agradecerles su amistad, consejos, apoyo, ánimo y compañía en los momentos más difíciles de mi vida. Algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos y en mi corazón, sin importar en donde estén quiero darles las gracias por formar parte de mí, por todo lo que me han brindado y por todas sus bendiciones.

A todos ellos muchas gracias.

Índice general

Introducción **10**

1. Preliminares **12**

1.1. La Topología Producto sobre $X \times Y$ 12

1.1.1. La Topología Producto caso General 14

1.2. Espacios compactos 20

1.2.1. Compacidad local 23

1.3. Axiomas de separación y numerabilidad 24

1.3.1. Los axiomas de numerabilidad 24

1.3.2. Los axiomas de separación 26

1.3.3. Espacios regulares, completamente regular y normales 27

1.4. Homotopía de caminos 28

2. La Topología de Compacto-Abierta **30**

2.1. La Definición de Topología de Compacto-Abierto 31

2.2. Continuidad de la composición y la función evaluación. 40

2.3. Productos Cartesianos 43

2.4. Bases para Z^Y 44

2.5. Un Contraejemplo Elemental en la Topología Compacto-Abierto. 45

2.6. Resultados obtenidos por Ralph H. Fox. 47

3. Otras topologías sobre espacios de funciones. **51**

3.1. Convergencia secuencial en el espacio Y^X 51

3.2. Convergencia punto a punto en el espacio Y^X 53

4. Conclusiones y Tareas Pendientes **56**

Bibliografía **58**

Índice de figuras

1.1. Unión de abiertos básicos no siempre es un abierto básico, pero la intersección si lo es. 13
1.2. Intersección de dos abiertos subbásicos en la topología producto. 14
1.3. Homotopía de caminos 28

2.1. Contraejemplo de la otra contenencia en la Proposición 2.1.7(iii) 37
2.2. $(\mathbb{R}^2, \tau_{Sorgenfrey})$ no es normal. 40
2.3. Sucesión $(f_n)_n$ en I^I. 46

3.1. Sucesión (f_n) y la función límite g 54

TITULO: LA TOPOLOGÍA COMPACTO-ABIERTO.*

AUTOR: MELANY DAYANA MEJÍA CAVIEDES.**

PALABRAS CLAVES: TOPOLOGÍA, ESPACIO DE FUNCIONES, COMPACTO.

RESUMEN

En el desarrollo del presente trabajo, se realizará un estudio detallado y sistemático de la llamada Topología de compacto-abierto en espacios de funciones, cuya motivación inicia con el estudio de los espacios métricos, los espacios topológicos y las aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos.

Para nuestro propósito hemos organizado el trabajo en cuatro capítulos.

En el primer capítulo, titulado Preliminares, se establecen algunos conceptos y resultados conocidos, que se necesitarán en el desarrollo de los capítulos posteriores.

En el segundo capítulo que titulamos La Topología de Compacto-Abierto y que constituye el capítulo central del trabajo, encontramos la definición de topología de compacto-abierto que se denota por *c-topología*, algunos ejemplos que ilustran las propiedades y los resultados más importantes que se fueron estudiando en el transcurso del trabajo. El hecho más importante de la *c-topología* está referenciado en este capítulo (Teorema 2.3.1), al igual que un análisis del artículo [4] y los resultados obtenidos por Ralph H. Fox en [3].

El tercer capítulo, titulado Otras Topologías sobre Espacios de Funciones, incluye la convergencia secuencial y la convergencia punto a punto, algunos resultados importantes donde se hacen algunas comparaciones entre la topología compacto-abierto y estas otras topologías definidas en el espacio Y^X.

En el cuarto y último capítulo presentamos algunas conclusiones y tareas pendientes que surgieron a través del transcurso de nuestro trabajo. Cabe anotar aquí que dentro del desarrollo del trabajo, pudimos obtener algunos pequeños aportes y escribimos algunas demostraciones que no aparecían en los textos consultados

Finalmente, pensamos que el análisis hecho aquí es útil para estudiantes de la carrera de Matemáticas y de Licenciatura en Matemáticas tanto de pregrado como de maestría que puedan estar interesados en conocer este tema y esperamos que las tareas pendientes puedan servir como tema de otros trabajos.

***** Proyecto de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Ph.D. Sonia Marleni Sabogal Pedraza.

TITLE: THE COMPACT-OPEN TOPOLOGY.*

AUTHOR: MELANY DAYANA MEJÍA CAVIEDES.**

KEYWORDS: TOPOLOGY, FUNCTIONS SPACES, COMPACT.

ABSTRACT

In this work, we make a detailed and systematic study of the so-called compact-open topology in function spaces. Study of the compact-open topology begins with the study of metric spaces, topological spaces and continuous maps between two topological spaces.

For our purpose we have organized the work into four chapters.

Some concepts and known results that will be needed in the development of the later chapters are, set in the first chapter, entitled Preliminaries.

In the second chapter, titled The Compact-Open Topology and which is the central chapter of the work, we find the definition of compact-open topology, some examples illustrating the properties of this topoñogy, and the most important results that we studied during the work. The most important fact about the compact-open topology is referenced in this chapter (Theorem 2.3.1), as well as an analysis of the paper [4] and the results obtained by Ralph H. Fox in [3].

The third chapter, entitled Other Topologies on functions spaces, includes sequential convergence, pointwise convergence and some important results which establish some comparisons between the compact-open topology and others topologies on the function space Y^X.

In the fourth and final chapter, we present some conclusions and pending which that emerged through the course of our work. It should be noted here that in the development of the work, we were able to get some small contributions and wrote some proofs that we didn't found in the references consulted.

Finally, we think that the analysis done in our work, is useful for students of Mathematics and Lic. in Mathematics both undergraduate and masters, who may be interested in knowing this topic and we hope that the remaining tasks can serve as a topic for further works.

***** Bachelor Thesis
** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director: Ph.D. Sonia Marleni Sabogal Pedraza.

Introducción

La idea de considerar las funciones como puntos de un espacio topológico, constituyó el punto de partida para el análisis funcional, así como el paso intermedio esencial para la definición abstracta de los espacios métricos y más tarde de los espacios topológicos. Esta idea surgió como resultado de un largo proceso histórico de abstracción. Aún a principios del siglo XIX solamente era conocida la noción de una función arbitraria. El estudio formal de la convergencia uniforme comenzó en el último tercio del siglo XIX y fue hasta finales de este siglo, que se utilizaron sistemáticamente topologías sobre conjuntos de funciones.

En el desarrollo del presente trabajo, se realizará un estudio detallado y sistemático de la llamada ***topología de compacto-abierto*** en espacios de funciones, cuya motivación inicia con el estudio de los espacios métricos, los espacios topológicos y las aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos. Nuestro interés en esta topología surgió inicialmente a partir de la lectura de la nota hallada en la revista American Mathematical Monthly, titulada *An Elementary Counterexample in the Compact-Open Topology* [4].

Analizaremos un poco las topologías de convergencia puntual y convergencia uniforme, pero nos enfocaremos principalmente en la topología de compacto-abierto, la cual se define sobre el conjunto de las aplicaciones continuas $\mathcal{C}(X,Y)$ entre dos espacios topológicos X y Y, de la siguiente manera: dado un subconjunto compacto A de X y un subconjunto abierto V de Y, denotemos con $\langle A,V\rangle$ al conjunto de todas las funciones $f\in\mathcal{C}(X,Y)$ tales que $f(A)\subseteq V$. Así la topología de compacto-abierto se obtendrá tomando la colección de todos los $\langle A,V\rangle$ como una subbase de la topología. La topología de compacto-abierto fue definida por primera vez por R. H. Fox en [3], como respuesta a un problema que le propuso Hurewicz mediante una carta.

Para nuestro propósito hemos organizado el trabajo en cuatro capítulos.

En el primer capítulo, titulado ***Preliminares,*** se establecen algunos conceptos y resultados conocidos, que se necesitarán en el desarrollo de los capítulos posteriores. Estos conceptos y resultados preliminares han sido tomados de [2], [5], [6], [8] y por tanto las demostraciones faltantes de los lemas, teoremas, proposiciones, etc. que incluimos en este capítulo, se pueden encontrar en las referencias citadas anteriormente.

En el segundo capítulo que titulamos ***La Topología de Compacto-Abierto*** y que constituye el capítulo central del trabajo, encontramos la definición de topología de compacto-abierto que se denota por *c-topología*, algunos ejemplos que ilustran las propiedades y los resultados más importantes que se fueron estudiando en el transcurso del trabajo. El hecho mas importante de la *c-topología* está referenciado en este capítulo (Teorema 2.3.1), al igual que un análisis del artículo [4] y los resultados obtenidos por Ralph H. Fox en [3].

El tercer capítulo, titulado ***Otras Topologías sobre Espacios de Funciones,*** incluye la convergencia secuencial y la convergencia punto a punto, algunos resultados importantes donde se hacen algunas comparaciones entre la topología compacto-abierto y estas otras topologías definidas en el espacio Y^X.

En el cuarto y último capítulo presentamos algunas conclusiones y tareas pendientes que surgieron a través del transcurso de nuestro trabajo. Cabe anotar aquí que dentro del desarrollo del trabajo, pudimos obtener algunos pequeños aportes y escribimos algunas demostraciones que no aparecían en los textos consultados como por ejemplo la Afirmación 2.1.2, Afirmación 2.1.3, Ejemplo 2.1.4, Ejemplo 2.1.5, Afirmación 2.1.6, Proposición 2.1.7, Ejemplos 2.1.8, Ejemplo 2.1.10, Ejemplo 2.1.13, Ejemplo 3.2.2, Proposición 3.2.5*(ii),* entre otros.

Finalmente, pensamos que el análisis hecho aquí es útil para estudiantes de la carrera de Matemáticas y de Licenciatura en Matemáticas tanto de pregrado como de maestría que puedan estar interesados en conocer este tema y esperamos que las tareas pendientes puedan servir como tema de otros trabajos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se establecen algunas conceptos y resultados conocidos, que se necesitarán en el desarrollo de los capítulos posteriores. Estos conceptos y resultados preliminares han sido tomados de [2], [5], [6], [8] y por tanto las demostraciones faltantes de los lemas, teoremas, proposiciones, etc. que incluimos en el presente capítulo, se pueden encontrar en las referencias citadas anteriormente.

1.1. La Topología Producto sobre $X \times Y$

Si X y Y son espacios topológicos, existe un método natural de definir una topología sobre el producto cartesiano $X \times Y$. Analizaremos esta topología a continuación, y también estudiaremos algunas de sus propiedades.

Definición 1.1.1. Sean X y Y espacios topológicos. La ***topología producto*** sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U es un subconjunto abierto de X y V es un subconjunto abierto de Y.

Vamos a comprobar que $\mathcal{B}$ es una base. La primera condición es trivial, puesto que $X \times Y$ es ya un elemento básico. La segunda condición es casi igual de obvia, ya que la intersección de cualesquiera dos elementos básicos $U_1 \times V_1$ y $U_2 \times V_2$ es otro elemento básico. Tenemos

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

y el último conjunto es un elemento básico porque $U_1 \cap U_2$ y $V_1 \cap V_2$ son abiertos en X y Y, respectivamente (véase la Figura 1.1).

Obsérve que la colección $\mathcal{B}$ no es una topología sobre $X \times Y$. La unión de los dos rectángulos dibujados en la Figura 1.1 , por ejemplo, no es un producto de dos conjuntos, por lo que no puede pertenecer a $\mathcal{B}$; sin embargo, es abierto en $X \times Y$.

Teorema 1.1.2. *Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de X y $\mathcal{C}$ es una base para la topología de Y, entonces la colección*

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ y } C \in \mathcal{C}\}$$

es una base para la topología sobre $X \times Y$.

Ejemplo 1.1.3. La topología del orden es la topología usual de $\mathbb{R}$. El producto de esta topología consigo misma se denomina ***topología usual*** de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Tiene como base la colección de todos los productos de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$, pero el teorema que acabamos de mencionar nos dice que la colección mucho mas pequeña de todos los productos $(a, b) \times (c, d)$ de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ también sirve como base para la topología de $\mathbb{R}^2$. Cada conjunto de este tipo se puede dibujar como el interior de un rectángulo en $\mathbb{R}^2$.

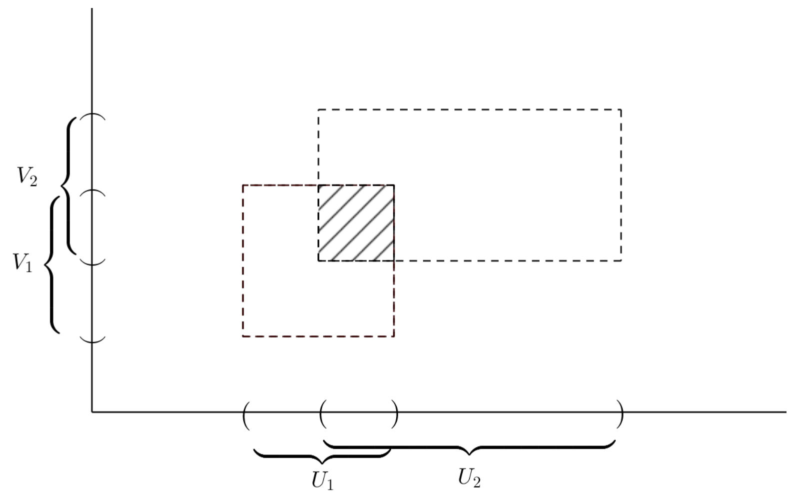

Figura 1.1: Unión de abiertos básicos no siempre es un abierto básico, pero la intersección si lo es.

Algunas veces es útil expresar la topología producto en términos de una subbase. Para hacer esto, primero definimos ciertas funciones llamadas *proyecciones.*

Definición 1.1.4. Sean $\pi_1 : X \times Y \to X$ definida por

$$\pi_1(x, y) = x$$

y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ definida por

$$\pi_2(x, y) = y.$$

Las aplicaciones π_1 y π_2 se denominan ***proyecciones*** de $X \times Y$ sobre su primer y segundo factor, respectivamente.

Usaremos la palabra "sobre" porque π_1 y π_2 son sobreyectivas (a menos que uno de los espacios X o Y sea vacío, en cuyo caso $X \times Y$ sería vacío y, por tanto, no tendría sentido hablar de ello).

Si U es un subconjunto abierto de X, el conjunto $\pi_1^{-1}(U)$ es, precisamente, el conjunto $U \times Y$, que es abierto en $X \times Y$. De modo similar, si V es abierto en Y, ocurre que

$$\pi_2^{-1}(V) = X \times V$$

que también es abierto en $X \times Y$. La intesección de estos dos conjuntos es el conjunto $U \times V$. Como se indica en la Figura 1.1. Este hecho nos lleva a enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1.1.5. *La colección*

$$\mathcal{S} = \left\{\pi_1^{-1}(U) \mid U \text{ es abierto en } X\right\} \cup \left\{\pi_2^{-1}(V) \mid V \text{ es abierto en } Y\right\}$$

es una subbase para la topología producto sobre $X \times Y$.

Demostración. Sean τ la topología producto sobre $X \times Y$ y τ' la topología generada por $\mathcal{S}$. Puesto que cada elemento de $\mathcal{S}$ pertenece a τ, también pertenecen las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Así $\tau' \subseteq \tau$. Por otro lado, cada elemento básico $U \times V$ para la topología τ es una intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$, puesto que

$$U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V).$$

Por lo tanto, $U \times V$ pertenece a τ', y así $\tau \subseteq \tau'$.

□

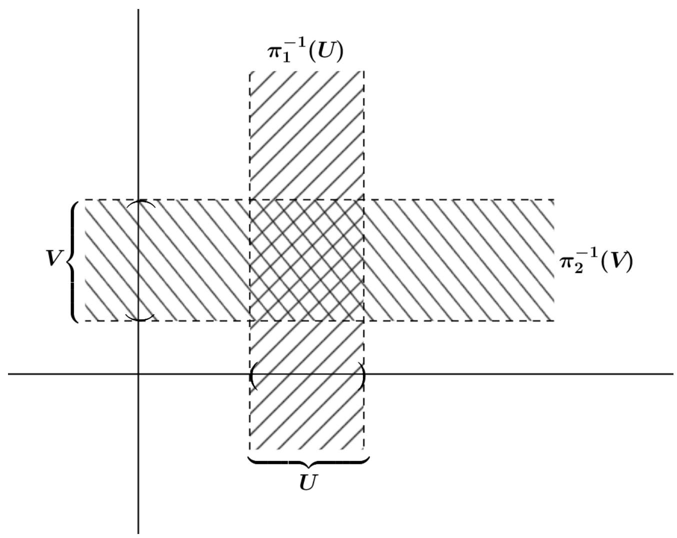

Figura 1.2: Intersección de dos abiertos subbásicos en la topología producto.

1.1.1. La Topología Producto caso General

Previamente hemos definido una topología sobre el producto $X \times Y$ de dos espacios topológicos. En esta subsección ampliamos esta definición a productos cartesianos más generales.

Para ello consideremos los productos cartesianos

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \qquad y \qquad X_1 \times X_2 \times \ldots$$

donde cada X_i es un espacio topológico. Hay dos métodos posibles para proceder. Uno es tomar como base todos los conjuntos de la forma $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ en el primer caso, y de la forma $U_1 \times U_2 \times \ldots$ en el segundo caso, donde U_i es un conjunto abierto de X_i para cada i. Este procedimiento efectivamente define una topología sobre el producto cartesiano que llamaremos *topología por cajas.*

Otra forma de proceder es generalizar la formulación de subbase de la definición dada en la sección 1.1. En este caso, tomamos como subbase todos los conjuntos de la forma $\pi_i^{-1}(U_i)$, donde i es cualquier índice y U_i es un conjunto abierto de X_i. Esta topología se denomina *topología producto.*

¿En qué se diferencian estas topologías? Considere el típico elemento básico B para la segunda topología. Es una intersección finita de elementos de la subbase $\pi_i^{-1}(U_i)$, digamos para $i = i_1, \ldots, i_k$. Entonces, un punto x pertenece a B si, y sólo si, $\pi_i(x)$ pertenece a U_i para $i = i_1, \ldots, i_k$; no existe restricción alguna sobre $\pi_i(x)$ para otros valores de i.

Se sigue que estas dos topologías coinciden para el producto cartesiano finito y difieren para el producto infinito. Lo que no está claro es por qué parece que preferimos la segunda topología. Esta es la cuestión que investigaremos en esta subsección.

Antes de proceder, sin embargo, introduciremos una noción más general de producto cartesiano. Nosotros hemos definido el producto cartesiano de una familia indexada de conjuntos sólo en los casos donde el conjunto de índices era el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ o el conjunto $\mathbb{Z}^+$. Ahora consideremos el caso donde el conjunto de índices es completamente arbitrario.

Definición 1.1.6. Sean J un conjunto de índices. Dado un conjunto cualquiera X, definimos una $J-$ *upla* de elementos de X como una función $x : J \to X$. Si α es un elemento de J, a menudo denotaremos el valor de x en α mediante x_α en lugar de $x(\alpha)$; lo llamaremos la $\alpha-$ *ésima* ***coordenada*** de x. Y a menudo denotaremos a la función x mediante el símbolo

$$(x_\alpha)_{\alpha\in J},$$

que es lo más cercano a una "notación upla" para un conjunto arbitrario de índices J. Denotamos el conjunto de todas las $J-$ *uplas* de elementos de X por X^J.

Definición 1.1.7. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de conjuntos indexada y sea $X = \cup_{\alpha\in J} A_\alpha$. El ***producto cartesiano*** de esta familia indexada, denotado por

$$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha,$$

se define como el conjunto de todas las $J-$ *uplas* $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ de elemetos de X tales que $x_\alpha \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in J$.

En ocasiones denotaremos el producto simplemente por $\prod A_\alpha$, y a su elemento general por (x_α), si el conjunto de índices se sobreentiende.

Si todos los conjuntos A_α son iguales a un conjunto X, entonces el producto cartesiano $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ es exactamente el conjunto X^J de todas las $J-$ *uplas* de elementos de X. Algunas veces utilizaremos la "notación upla" para los elementos de X^J, y otras veces usaremos notación funcional, dependiendo de la que sea más conveniente.

Definición 1.1.8. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia indexada de espacios topológicos. Tomemos como base para una topología sobre el espacio producto

$$\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$$

la colección de todos los conjunto de la forma

$$\prod_{\alpha \in J} U_\alpha,$$

donde U_α es abierto en X_α, para cada $\alpha \in J$. La topología generada por esta base se denomina ***topología por cajas.***

Esta colección satisface la primera condición para una base, porque $\prod X_\alpha$ es, por sí solo, un elemento básico y satisface la segunda condición, porque la intersección de cualesquiera dos elementos básicos es otro elemento básico:

$$\left(\prod_{\alpha \in J} U_\alpha\right) \cap \left(\prod_{\alpha \in J} V_\alpha\right) = \prod_{\alpha \in J} \left(U_\alpha \cap V_\alpha\right).$$

Ahora generalizaremos la fomulación de subbase de la definición. Sea la función que asigna a cada elemento del espacio producto su coordenada $\beta - ésima$,

$$\pi_\beta \left((x_\alpha)_{\alpha \in J} \right) = x_\beta;$$

π_β se denomina ***aplicación proyección*** asociada con el índice β.

Definición 1.1.9. Denotaremos por $\mathcal{S}_\beta$ a la colección

$$\mathcal{S}_\beta = \left\{ \pi_\beta^{-1}\left(U_\beta\right) \mid U_\beta \, es \, abierto \, en \, X_\beta \right\}$$

y denotaremos por $\mathcal{S}$ a la unión de esas colecciones,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta.$$

La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ se denomina ***topología producto.*** En esta topología, $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ se denomina ***espacio producto.***

Para comparar estas topologías, consideremos la base $\mathcal{B}$ que $\mathcal{S}$ genera. La colección $\mathcal{B}$ consta de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Si intersecamos elementos que pertenecen al mismo conjunto $\mathcal{S}_\beta$ no obtenemos nada nuevo, porque

$$\pi_\beta^{-1}\left(U_\beta\right) \cap \pi_\beta^{-1}\left(V_\beta\right) = \pi_\beta^{-1}\left(U_\beta \cap V_\beta\right);$$

la intersección de dos elemeentos de $\mathcal{S}_\beta$, o de un número finito de tales elementos, es de nuevo un elemento de $\mathcal{S}_\beta$. El típico elemento básico $\mathcal{B}$ puede, así, ser descrito como sigue: sea $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ un conjunto finito de índices distintos del conjunto índice J, y sea U_{β_i} un conjunto abierto en X_{β_i} para $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$B = \pi_{\beta_1}^{-1}\left(U_{\beta_1}\right) \cap \pi_{\beta_2}^{-1}\left(U_{\beta_2}\right) \cap \ldots \cap \pi_{\beta_n}^{-1}\left(U_{\beta_n}\right)$$

es el elemento típico de $\mathcal{B}$.

Ahora bien, un punto $x = (x_\alpha)$ está en B si, y sólo si, su coordenada $\beta_1 - ésima$ está en U_{β_1}, su coordenada $\beta_2 - ésima$ está en U_{β_2}, y así sucesivamente. No existe restricción alguna sobre la coordenada $\alpha - \acute{e}sima$ de x si α no es uno de los índices $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Como resultado, podemos escribir B como el producto

$$B = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$$

donde U_α denota el espacio entero X_α si $\alpha \neq \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Todo esto se resume en el siguiente teorema:

Teorema 1.1.10. ***(Comparación de las topologías por cajas y producto).*** *La topología por cajas sobre $\prod X_\alpha$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde U_α es abierto en X_α para cada α. La topología producto sobre $\prod X_\alpha$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde U_α es abierto en X_α para cada α y U_α es igual a X_α excepto para un número finito de valores de α. La topología de cajas es más fina que la topología producto.*

Dos cosas están inmediatamente claras. En primer lugar, para productos finitos $\prod_{\alpha=1}^{n} X_\alpha$, las dos topologías son, precisamente, la misma. En segundo lugar, la topología por cajas es, en general, mas fina que la topología producto.

Lo que no está tan claro es por qué preferimos la topología producto a la topología por cajas. La respuesta aparecerá a medida que continuemos nuestro estudio de la topología. Encontraremos que un número de teoremas importantes sobre productos finitos también se cumplirán para productos arbitrarios si usamos la topología producto, pero no si utilizamos la topología por cajas. Como consecuencia, la topología producto es importantísima en matemáticas. La topología por cajas no es tan importante; la usaremos principalmente para construir contraejemplos. Por tanto, convendremos lo siguiente:

> *Siempre que consideremos el producto $\prod X_\alpha$ lo supondremos con la topología producto, a menos que específicamente establezcamos lo contrario.*

Algunos de los teoremas que hemos mencionado para el producto $X \times Y$ se cumplen también para el producto $\prod X_\alpha$ sin importar la topología que usemos. Los enunciamos a continuación, donde la mayoría de demostraciones no se realizarán.

Teorema 1.1.11. *Supongamos que la topología sobre cada espacio X_α está dada por una base $\mathcal{B}_\alpha$. La colección de todos los conjuntos de la forma*

$$\prod_{\alpha \in J} B_\alpha$$

donde $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para cada α, es una base para la topología por cajas sobre $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$.

La colección de todos los conjuntos de la misma forma, donde $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para un conjunto finito de índices α y $B_\alpha = X_\alpha$ para todos los índices restantes, servirá como base para la topología producto $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$.

Ejemplo 1.1.12. Consideremos el espacio euclídeo $n - dimensional$ $\mathbb{R}^n$. Una base de $\mathbb{R}$ consiste en todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$; de aquí, una base para la topología de $\mathbb{R}^n$ consiste en todos los productos de la forma

$$(a_1, b_1) \times (a_1, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n).$$

Puesto que $\mathbb{R}^n$ es un producto finito, las topologías por cajas y producto coinciden. Siempre que estudiemos el espacio $\mathbb{R}^n$, supondremos que se da esta topología, a menos que digamos lo contrario.

Los siguientes teoremas se refieren a propiedades del producto $\prod X_\alpha$, con las topológias de cajas y producto.

Teorema 1.1.13. *Sea A_α un subespacio de X_α, para cada $\alpha \in J$. Entonces $\prod A_\alpha$ es un subespacio de $\prod X_\alpha$ si en ambos productos está dada la topología por cajas, o si en ambos productos está dada la topología producto.*

Es natural preguntarse: ¿si cada espacio X_α cumple una cierta propiedad, entonces $\prod X_\alpha$ también cumple dicha propiedad? El siguiente Teorema da una respuesta a esta pregunta.

Teorema 1.1.14. *Si cada espacio X_α es un espacio de Hausdorff, entonces $\prod X_\alpha$ es un espacio de Hausdorff en las topologías por cajas y producto.*

Como cada espacio X_α se puede ver como un subespacio de $\prod X_\alpha$ y como la propiedad de ser Hausdorff es hereditaria, entonces es claro que el resiprocro del Teorema anterior se tiene.

Teorema 1.1.15. *Sea $\{X_\alpha\}$ una familia indexada de espacios y sea $A_\alpha \subseteq X_\alpha$, para cada α. Si $\prod X_\alpha$ está dotado de la topología por cajas o producto, entonces X_*

$$\prod \overline{A}_\alpha = \overline{\prod A_\alpha}.$$

Hasta aquí no ha aparecido razón alguna para preferir la topología producto a la topología por cajas. Es cuando intentamos generalizar nuestro teorema anterior sobre continuidad por aplicaciones en espacios producto cuando nos encontramos con la primera diferencia. Aquí tenemos un teorema que no se cumple si $\prod X_\alpha$ está dotado con la topología por cajas:

Teorema 1.1.16. *Sea $f : A \to \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ dada por la ecuación*

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha\in J}$$

donde $f_\alpha : A \to X_\alpha$ para cada α. Tomemos sobre $\prod X_\alpha$ la topolgía producto. Entonces la función f es continua si, y sólo si, cada función f_α es continua.

Demostración. Sea π_β la proyección del producto sobre su factor $\beta - \acute{e}simo$. La función π_β es continua, por lo que si U_β es abierto en X_β, el conjunto $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un elemento de la subbase para la topología producto sobre X_α. Ahora supongamos que $f : A \to \prod X_\alpha$ es continua. La función f_β es igual a la composición $\pi_\beta \circ f$ que, al ser la composición de dos funciones continuas, es continua.

Recíprocamente, supongamos que cada función coordenada f_α es continua. Para probar que f es continua, es suficiente demostrar que la imagen inversa mediante f de cada elemento de la subbase es abierto en A; hemos insistido en este hecho cuando definimos las funciones continuas. Un elemento característico de la subbase para la topología producto sobre $\prod X_\alpha$ es un conjunto de forma $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$, donde β es algún índice y U_β es abierto en X_β. Ahora,

$$f^{-1}\left(\pi_\beta^{-1}\left(U_\beta\right)\right) = f_\beta^{-1}\left(U_\beta\right)$$

porque $f_\beta = \pi_\beta \circ f$. Puesto que f_β es continua, este conjunto es abierto en A, como se deseaba.

□

¿Por qué no se cumple este teorema si usamos la topología por cajas? Probablemente, el argumento más conveniente sea ver un ejemplo.

Ejemplo 1.1.17. Consideremos $\mathbb{R}^\omega$, el producto numerable de $\mathbb{R}$ consigo mismo infinitas veces. Recuérdese que

$$\mathbb{R}^\omega = \prod_{n\in\mathbb{Z}^+} X_n$$

donde $X_n = \mathbb{R}$ para todo n. Definamos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$ mediante la ecuación

$$f(t) = (t, t, t, ...)\,;$$

la $n-$*ésima* función coordenada de f es la función $f_n(t) = t$. Cada una de las funciones coordenadas $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua; así pues, la función f es continua si $\mathbb{R}^\omega$ está dotado con la topología producto. Pero f no es continua si $\mathbb{R}^\omega$ está dotado con la topología por cajas. Consideremos, por ejemplo, el elemento básico

$$B = (-1, 1) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \times \ldots$$

de la topología por cajas. Afirmamos que $f^{-1}(B)$ no es abierto en $\mathbb{R}$. Si $f^{-1}(B)$ fuera abierto en $\mathbb{R}$, contendría algún intervalo $(-\delta, \delta)$ alrededor del punto 0. Esto significaría que $f(-\delta, \delta) \subseteq B$, por lo que, aplicando π_n a ambos lados de la inclusión,

$$f_n((-\delta, \delta)) = (-\delta, \delta) \subseteq \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

para todo n, lo que es una contradicción.

Teorema 1.1.18. *Sea $\aleph(\mathscr{A})$ arbitrario. Para cada $\alpha \in \mathscr{A}$, sea la función $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$. Defenimos*

$$\begin{array}{rcl} \prod f_\alpha : \prod\limits_\alpha X_\alpha & \to & \prod\limits_\alpha Y_\alpha \\ \{x_\alpha\} & \to & \{f_\alpha(x_\alpha)\}\,. \end{array}$$

Entonces:

(i) Si cada f_α es continua, así también lo es $\prod\limits_\alpha f_\alpha$.

(ii) Si cada f_α is una función abierta, y todas salvo a lo sumo un número finito son sobreyectivas, entonces $\prod f_\alpha$ es también una función abierta.

1.2. Espacios compactos

La noción de compacidad no nos es tan cercana y natural como la de conexión. Desde los inicios de la topología , se ha admitido que el intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real gozaba de una cierta propiedad que era crucial en la demostración de teoremas tales como el teorema del valor máximo y el teorema de la continuidad uniforme. Sin embargo, tal propiedad ha tardado muchísimo en poder ser formulada para un espacio topológico arbitrario. Normalmente, se pensaba que esta propiedad crucial del intervalo cerrado era el hecho de que cualquier subconjunto infinito de puntos de $[a, b]$ tenía un punto límite y fue esta propiedad la que en un principio recibió el nombre de compacidad. Más tarde, los matemáticos asumieron que esta formulación no era la más adecuada, y que era posible encontrar una definición en términos más débiles y generales; de hecho, en términos de cubrimientos del espacio por conjuntos abiertos. Es a esta última formulación a la que nosotros llamaremos compacidad. Aunque no es tan natural ni intuitiva como su precedente, nos permitirá trabajar en contextos más arbitrarios.

Definición 1.2.1. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio X se dice que ***cubre*** X, o que es un ***cubrimiento*** de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con X. Se dice que $\mathcal{A}$ es un ***cubrimiento abierto*** de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.

Definición 1.2.2. Un espacio X se dice que es ***compacto*** si de cada cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X podemos extraer una subcolección finita que también cubre a X.

Ejemplo 1.2.3. La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta, pues el cubrimiento de $\mathbb{R}$ por intervalos abiertos

$$\mathcal{A} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

no contiene ninguna subcolección finita que cubra $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.4. El siguiente subespacio de $\mathbb{R}$ es compacto:

$$\mathcal{X} = \{0\} \cup \left\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^+\right\}.$$

Dado un cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X, existe un elemento U de $\mathcal{A}$ que contiene al 0. El conjunto U contiene a todos los puntos de la forma $1/n$ excepto a un número finito de ellos; elijamos para cada uno de estos puntos que no están en U, un elemento de $\mathcal{A}$ que los contenga. La colección de estos elementos de $\mathcal{A}$, junto con el mismo U, es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre X.

Ejemplo 1.2.5. Cualquier espacio X que contenga a un número finito de puntos es trivialmente compacto, pues cualquier cubrimiento por abiertos de X es finito.

Ejemplo 1.2.6. El intervalo $(0, 1]$ no es compacto; el cubrimiento abierto

$$\mathcal{A} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right] \mid n \in \mathbb{Z}^+\right\},$$

no contiene ninguna subcolección finita que cubre a $(0, 1]$. Aplicando un argumento análogo se demuestra que tampoco es compacto el intervalo $(0, 1)$. Por otra parte, el intervalo $[0, 1]$ sí es compacto; quizá ya resulte familiar este hecho del análisis.

En general, resulta complicado decidir cuándo un espacio dado es compacto o no. Primero vamos a probar algunos teoremas generales que nos muestran cómo construir nuevos espacios compactos a partir de otros compactos ya dados. En la siguiente sección demostraremos que algunos espacios en concreto son compactos. Estos espacios incluyen a todos los intervalos cerrados de la recta real y a todos los conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$.

Vamos a probar en primer lugar algunos hechos acerca de subespacios. Si Y es un subespacio de X, una colección $\mathcal{A}$ se dice que cubre a Y (o que es un cubrimiento de Y) si la unión de sus elementos contiene a Y.

Lema 1.2.7. *Sea Y un subespacio de X. Entonces Y es compacto si, y sólo si, cada cubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre Y.*

Teorema 1.2.8. *Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado del espacio compacto X. Dado un cubrimiento $\mathcal{A}$ de Y por conjuntos abiertos en X, podemos considerar el cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ de X uniendo a $\mathcal{A}$ el conjunto abierto $X - Y$, esto es,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X - Y\} .$$

Como X es compacto, alguna subcolección finita cubre X. Si esta subcolección contiene al conjunto $X - Y$, lo descartamos. Si no es así, la dejamos como está. La colección resultante en cualquier caso es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre Y.

□

Teorema 1.2.9. *Cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Lema 1.2.10. *Si Y es un subespacio compacto de un espacio de Hausdorff X y x_0 no está en Y, entonces existen abiertos disjuntos U y V de X conteniendo a x_0 y a Y respectivamente.*

Ejemplo 1.2.11. Una vez que hayamos demostrado que el intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es compacto, se sigue del Teorema 1.2.8 que cualquier subespacio cerrado de $[a, b]$ es compacto. Por otra parte, del Teorema 1.2.9 se deduce que los intervalos $(a, b]$ y (a, b) no pueden ser compactos (hecho que ya conocímos), ya que no son cerrados en el espacio Hausdorff $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.12. La condición de ser Hausdorff es imprescindible para demostrar el Terema 1.2.9. Consideremos, por ejemplo, la topología cofinita en la recta real. Los únicos subconjuntos propios de $\mathbb{R}$ que son cerrados en esta topología son los finitos. Pero cada subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto con esta topología, tal y como se puede comprobar.

Una utilidad importante del teorema precedente es la herramienta que nos ofrece para comprobar si una aplicación es un homeomorfismo.

Teorema 1.2.13. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y biyectiva. Si X es compacto y Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Teorema 1.2.14. *El producto de un número finito de espacios compactos es compactos.*

A continuación, nos podemos plantear la siguiente cuestión: ¿es el producto infinito de espacios compactos un espacio compacto? Uno podría esperar que la respuesta fuera afirmativa, y de hecho así es. El resultado es lo suficientemente importante (y complicado) como para ser llamado por el nombre de la persona que lo describió: se denomina el ***Teorema de Tychonoff.***

A la hora de probar que el producto cartesiano de espacios conexos es conexo, lo que se hace es probar primero el resultado para un producto finito y a continuación deducir el caso general. Para el caso de la compacidad, no hay ninguna forma directa de extrapolar el resultado de productos finitos a productos arbitrarios de espacios. El caso infinito demanda un nuevo enfoque donde la prueba es bastante complicada. En cualquier texto clásico de topología general se puede encontrar una demostración del Teorema de Tychonoff.

Teorema 1.2.15. *Tenemos que:*

(i) La imagen continua de un conjunto compacto es compacto.

(ii) Un subconjunto compacto A de un espacio de Hausdorff X es cerrado en X; de hecho, para cada $x \notin A$, hay una vecindad no de intersección de $U(A)$, $U(x)$.

(iii) Un subespacio de un espacio compacto es compacto si y sólo si es cerrado.

Ejemplo 1.2.16. Si X no es Hausdorff, el resultado del ***Teorema 1.2.15 (ii)*** no se tiene. En efecto: en el espacio de Sierpinski, $X = \{0,1\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{0\}\}$, el subespacio $\{0\}$ es compacto, pero este no es cerrado.

A continuación una lista de propiedades de los conjuntos compactos.

Proposición 1.2.17. *Tenemos:*

(i) La unión finita de subconjuntos compactos es compacto.

(ii) Dos subespacios compactos disjuntos de un espacio Hausdorff tienen vecindades disjuntas.

(iii) Si A es un subconjunto compacto de un espacio regular, entonces para cada abierto U, que contiene a A, existe una abierto V con $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(iv) Sea $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ un recubrimiento abierto de vecindades finitas de un espacio X. Si A es compacto $A \subseteq X$, entonces A tiene una vecindad que intersecta a lo sumo un número finito de conjuntos U_α (en términos precisos: existe una vecindad U de A tal que $U \cap U_\alpha \neq \emptyset$ para a lo sumo un número finito de índices α).

Corolario 1.2.18. *Sea $A \subseteq X$ arbitrario y sea Y compacto. Sea U una vecindad de $A \times Y$ en $X \times Y$. Entonces hay una vecindad V, que contiene a A tal que $V \times Y \subseteq U$.*

Teorema 1.2.19. ***(Tychonoff).*** *El producto arbitrario de espacios es compacto si y sólo si cada espacio factor es compacto.*

1.2.1. Compacidad local

En esta subsección estudiaremos el concepto de compacidad local, y algunas de sus propiedades.

Definición 1.2.20. Un espacio X se dice que es ***localmente compacto en*** x si para toda vecindad U de x, existe un subespacio compacto C de X tal que $x \in U \subseteq C$. Si X es localmente compacto en cada uno de sus puntos, diremos que X es ***localmente compacto.***

Observación 1.2.21. Un espacio compacto es automáticamente localmente compacto.

Ejemplo 1.2.22. La recta $\mathbb{R}$ es localmente compacta. El punto x está contenido en un intervalo de la forma (a, b), el cual a su vez está contenido en el subespacio compacto $[a, b]$. El subespacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es localmente compacto: por ejemplo para $x = 0$, sean $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $U = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ es una vecindad básica de $x = 0$ entonces U no es compacto. En efecto, basta tomar $i \in (a, b) \setminus \mathbb{Q}$ sabemos que existe una sucesión de racionales $(r_n)_n$ tal que $(r_n)_n \to i$ y $r_n \in U$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(r_n)_n$ es una sucesión en U, que no admite subsuseción convergente en U.

Ejemplo 1.2.23. El espacio $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto; el punto x está contenido en algún elemento básico de la forma

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n),$$

el cual está contenido en el subespacio compacto

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

El espacio $\mathbb{R}^\omega$ no es localmente compacto; ninguno de sus elementos básicos están contenidos en un subespacio compacto ya que si

$$B = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \ldots$$

estuviera contenido en un subespacio compacto, su adherencia

$$\overline{B} = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} \times \ldots$$

sería compacta, cuando ciertamente no lo es.

Teorema 1.2.24. *Sea X un espacio de Hausdorff. Entonces X es localmente compacto si, y sólo si, dados x en X y un entorno U de x, existe un entorno V de x tal que $\overline{V}$ es compacto y $\overline{V} \subseteq U$.*

Corolario 1.2.25. *Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff y sea A un subespacio de X. Si A es cerrado en X o abierto en X, entonces A es localmente compacto.*

Corolario 1.2.26. *Un espacio X es homeomorfo a un subespacio abierto de un espacio compacto y de Hausdorff si, y sólo si, X es localmente compacto y de Hausdorff.*

Teorema 1.2.27. *Las cuatro propiedades siguientes son equivalentes*

(i) X es localmente compacto.

(ii) Para cada $x \in X$ y cada vecindad $U(x)$, existe un abierto V relativamente compacto con $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(iii) Para cada C compacto y abierto $U \supseteq C$, existe un abierto V relativamente compacto con $C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(iv) X tiene una base que consta de conjuntos abiertos relativamente compactos.

1.3. Axiomas de separación y numerabilidad

Los conceptos que vamos a introducir ahora, a diferencia de la compacidad y conexión, no surgen naturalmente en el estudio del cálculo y el análisis. Surgen de un estudio más profundo de la topología misma. Tales problemas, como sumergir un espacio dado en un espacio métrico o en un espacio compacto de Hausdorff, son problemas básicamente de topología más que de análisis. Estos problemas particulares poseen soluciones que incluyen a los axiomas de separación y numerabilidad.

Ya hemos mencionado uno de los axiomas de separación -el axioma de Hausdorff-. En esta sección introduciremos otros, y más fuertes, axiomas de este tipo, y estudiaremos algunas de sus consecuencias. Veremos un resultado importante que es el *Teorema de metrización de Urysohn.* Éste afirma que si un espacio topológico X satisface un cierto axioma de numerabilidad y un cierto axioma de separación, entonces X se puede embeber en un espacio métrico, y así es metrizable.

1.3.1. Los axiomas de numerabilidad

Definición 1.3.1. Un espacio X se dice que tiene una ***base numerable en*** x si existe una colección numerable $\mathcal{B}$ de entornos de x tales que cada entorno de x contiene al menos a uno de los elementos de $\mathcal{B}$. Un espacio que tiene una base numerable en cada uno de sus puntos se dice que satisface el ***primer axioma de numerabilidad,*** que es $1AN$, o que es ***uno-numerable.***

Observación 1.3.2. Es fácil ver que todo espacio metrizable satisface este axioma. El hecho más útil sobre espacios que satisfacen este axioma es el hecho de que en un espacio tal, las sucesiones convergentes son adecuadas para detectar puntos límite de conjuntos y para comprobar la continuidad de funciones. Estableceremos ahora este hecho formalmente como un teorema:

Teorema 1.3.3. *Sea X un espacio topológico.*

(i) Sea A un subconjunto de X. Si existe una sucesión de puntos de A convergente a x, entonces $x \in \overline{A}$ y el recíproco se cumple si X es $1AN$.

(ii) Sea $f : X \to Y$. Si f es continua, entonces para cada sucesión convergente $x_n \to x$ en X, la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$. El recíproco se cumple si X es $1AN$.

De mucha más importancia que el primer axioma de numerabilidad es el siguiente:

Definición 1.3.4. Si un espacio X tiene una base numerable para su topología, entonces se dice que X satisface el ***segundo axioma de numerabilidad,*** que es $2AN$, o que es ***dos-numerable.***

Obviamente, el segundo axioma implica el primero: si $\mathcal{B}$ es una base numerable para la topología de X, entonces el subconjunto de $\mathcal{B}$ formado por aquellos elementos de la base que contienen al punto x es una base numerable en x. El segundo axioma es, de hecho, mucho más fuerte que el primero; es tan fuerte que incluso no todo espacio métrico lo satisface.

Entonces, ¿por qué es interesante este segundo axioma? Bien, por un lado, muchos espacios que nos son familiares lo satisfacen. Por otro, es una hipótesis crucial usada para probar teoremas tales como el Teorema de metrización de Urysohn.

Ejemplo 1.3.5. La recta real $\mathbb{R}$ tiene una base numerable: la colección de todos los intervalos abiertos (a, b) con extremos racionales. Del mismo modo, $\mathbb{R}^n$ tiene una base numerable: la colección de todos los productos de intervalos con extremos racionales. Incluso $\mathbb{R}^\omega$ tiene una base numerable: la colección de todos los productos $\prod_{n\in\mathbb{Z}_+} U_n$, donde U_n es un intervalo abierto con extremos racionales para un número finito de valores de n, y $U_n = \mathbb{R}$ para el resto de valores de n.

Ambos axiomas de numerabilidad se comportan bien con respecto a las operaciones de tomar subespacios o productos numerables:

Teorema 1.3.6. *Un subespacio de un espacio $1AN$ es $1AN$, y un producto numerable de espacios $1AN$ es $1AN$. Un subespacio de una espacio $2AN$ es $2AN$, y un producto numerable de espacios $2AN$ es $2AN$.*

En el siguiente teorema se dan dos consecuencias del segundo axioma de numerabilidad. Antes, daremos una definición:

Definición 1.3.7. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es ***denso*** en X si $\overline{A} = X$.

Teorema 1.3.8. *Supongamos que X tiene una base numerable. Entonces:*

(i) Todo cubrimiento abierto de X contiene una subcolección numerable que recubre a X.

(ii) Existe un subconjunto numerable de X que es denso en X.

Observación 1.3.9. Un espacio que tiene un subconjunto numerable denso, a menudo se dice que es ***separable.***

Ejemplo 1.3.10. El espacio $(\mathbb{R}, \tau_{Sorgenfrey})$ definido por

$$\tau_{Sorgenfrey} = \langle \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \rangle .$$

Este espacio topológico se llama la recta de Sorgenfrey, satisface todos los axiomas de numerabilidad excepto el segundo.

Dado $x \in \mathbb{R}$, el conjunto de todos los elementos de la base de la forma $\left[x, a + \frac{1}{n}\right)$ es una base numerable en x. Y es fácil ver que los números racionales son densos en $\mathbb{R}$.

Para ver que $\mathbb{R}$ no tiene una base numerable, sea $\mathcal{B}$ una base para $\mathbb{R}$. Para cada x, elijamos un elemento B_x de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq [x, x + 1)$. Si $x \neq y$, entonces $B_x \neq B_y$, ya que $x = \acute{\imath}nf\, B_x$ e $y = \acute{\imath}nf\, B_y$. Por tanto, $\mathcal{B}$ debe ser no numerable.

Proposición 1.3.11. *Sea $\varphi : Z^+ \to X$ una sucesión. Entonces:*

(i) $\varphi \to y_0$ si y sólo si cada subsucesión φ' de φ contiene una subsucesión φ'' tal que $\varphi'' \to y_0$.

(ii) Sea X $1^\circ -$ contable. Entonces $\varphi \to x_0$ si y sólo si hay alguna subsucesión $\varphi' \to x_0$.

1.3.2. Los axiomas de separación

Aquí introduciremos siete axiomas de separación y estudiaremos algunas de sus propiedades. Ya hemos mencionado uno de ellos: el axioma de Hausdorff. Los otros son similares unos más fuertes que otros. Examinaremos la relación entre estos axiomas y los conceptos introducidos anterioremente en el capítulo.

Definición 1.3.12. Sea X un espacio topológico. Diremos que:

(i) X es T_0 si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe una vecindad abierta U_x de x que no contiene a y o existe una vecindad abierta U_y de y que no contiene a x.

(ii) X es T_1 si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen vecindades abiertas U_x, U_y tales que $y \notin U_x$, $x \notin U_y$.

(iii) X es T_2 o Hausdorff si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen vecindades abiertas disjuntas U_x, U_y tales que $y \notin U_x$, $x \notin U_y$.

(iv) X es regular si dados $x \in X$ y un conjunto cerrado B que no contiene a x, existen vecindades disjuntas que contienen a x y B, respectivamente.

(v) X es normal si dados dos conjuntos cerrados disjuntos A, B de X, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B respectivamente.

(vi) X es T_3 si es T_1 y regular.

(vii) X es T_4 si es T_1 y normal.

Observación 1.3.13. Es claro que un espacio Hausdorff es T_0 y T_1, un espacio regular es de Hausdorff, y que un espacio normal es regular.

Estos axiomas se llaman los axiomas de separación por el hecho de implicar la "separación" de ciertas clases de conjuntos por conjuntos abiertos disjuntos.

A continuación relacionaremos los axiomas de separación con los conceptos que introdujimos anteriormente en el capítulo.

Teorema 1.3.14. *(i) Un subespacio de un espacio de Hausdorff es de Hausdorff y el producto de Hausdorff es de Hausdorff.*

(ii) Un subespacio de un espacio regular es regular y un producto de espacios regulares es regular.

(iii) Un subespacio de un espacio normal no necesariamente es normal y un producto de espacios normales no necesariamente es normal.

Teorema 1.3.15. *Si f es una función continua abierta de X en Y, entonces Y es Hausdorff si y sólo si $\{(x_1, x_2) \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ es un subconjunto cerrado de $X \times X$.*

Teorema 1.3.16. *Si $f, g : X \to Y$ son continuas, Y es Hausdorff, y f y g conininciden en un conjunto denso D en X, entonces $f = g$.*

1.3.3. Espacios regulares, completamente regular y normales

Iniciamos ahora un estudio más profundo de los espacios que satisfacen los axiomas de separación vistos en la sección anterior. Algunos de estos axiomas son bastante débiles por lo que las propiedades que se introducirán en esta sección son bastante más restrictivos. Por otro lado en cierto sentido, el termino “normal” es algo inapropiado, puesto que los espacios normales no se comportan tan bien como uno podría esperar. Por otro lado, la mayoría de los espacios que nos son familiares satisfacen este axioma, como veremos. Su importancia viene del hecho de que los resultados que se pueden probar bajo la hipótesis de normalidad son centrales para una parte considerable de la topología.

Empezaremos enunciando un teorema que da tres conjuntos importantes de hipótesis bajo las cuales se garantiza la normalidad de un espacio.

Teorema 1.3.17. *(i) Todo espacio regular con una base numerable es normal.*

(ii) Todo espacio metrizable es normal.

(iii) Todo espacio de Hausdorff compacto es normal.

Ejemplo 1.3.18. *(i)* Si J no es numerable,entonces el espacio $\mathbb{R}^J$no es normal.

(ii) El plano de Sorgenfrey $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_{Sorgenfrey} \times \tau_{Sorgenfrey})$ definido por

$$\tau_{Sorgenfrey} \times \tau_{Sorgenfrey} := \left\langle \left\{ [a, b) \times [c, d) \in \mathbb{R}^2 \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \right\rangle ,$$

no es normal. Como veremos mas adelante en el Ejemplo 2.1.13.

Afirmación 1.3.19. Sea Y un espacio regular y $A \subseteq Y$ cualquier subconjunto infinito. Entonces existe una familia $\{U_n \mid n \geq 0\}$ de conjuntos abiertos cuyas clausuras son disjuntas por pares y de forma que $A \cap U_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq 1$.

Proposición 1.3.20. *Las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

(i) Y es regular.

(ii) Para cada $y \in Y$ y vecindad U de y, existe una vecindad V de y con $y \in V \subset \overline{V} \subset U$.

(iii) Para cada $y \in Y$ y A cerrado que no contiene a y, hay una vecindad V de y con $\overline{V} \cap A = \phi$.

Teorema 1.3.21. *(i) Cada subespacio de un espacio completamente regular (o Tychonoff) es completamente regular (respectivamente, Tychonoff).*

(ii) Un espacio producto no vacío, es completamente regular (o Tychonoff) si y sólo si cada espacio factor es completamenete regular (respectivamente, Tychonoff).

Lema 1.3.22. *Si X contiene un conjunto denso D y un subespacio S relativamente discreto cerrado con $\mid S \mid \geq 2^{|D|}$, entonces X no es normal.*

Teorema 1.3.23. ***(de Extensión de Tietze).*** *X es normal si y sólo si cada vez que A es un subconjunto cerrado de X y $f : A \to \mathbb{R}$ es continua, hay una extensión de f a todo X; es decir, hay un función continua $F : X \to \mathbb{R}$ tal que $F_{|A} = f$.*

1.4. Homotopía de caminos

Vamos a considerar caminos sobre un espacio X y una relación de equivalencia entre ellos conocida como *homotopía de caminos.*

Definición 1.4.1. Si f y f' son aplicaciones continuas del espacio X en el espacio Y, decimos que f es ***homotópica*** a f' si existe una aplicación continua $F : X \times I \to Y$ tal que

$$F(x, 0) = f(x) \;\; y \;\; F(x, 1) = f'(x)$$

para cada $x \in X$. La aplicación F se conoce como ***homotopía*** entre f y f'. Si f es homotópica a f', escribimos $f \simeq f'$. Si $f \simeq f'$ y f' es una aplicación constante, decimos que f es ***homotópicamente nula.***

Podemos imaginar una homotopía como una familia uniparamétrica continua de aplicaciones de X en Y. Si pensamos en el parámetro t como representante del tiempo, entonces la homotopía F describe una "deformación" continua de la aplicaión f en la aplicaión f', cuando t se mueve de 0 a 1.

Consideremos ahora el caso especial en el cual f es un camino en X. Recordemos que si $f : [0, 1] \to X$ es una aplicaión continua tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$, decimos que f es un camino en X desde x_0 hasta x_1. También decimos que x_0 es el ***punto inicial*** y x_1 es el ***punto final*** del camino f. Usaremos por convenencia, el intervalo $I = [0, 1]$ como el dominio de todos los caminos.

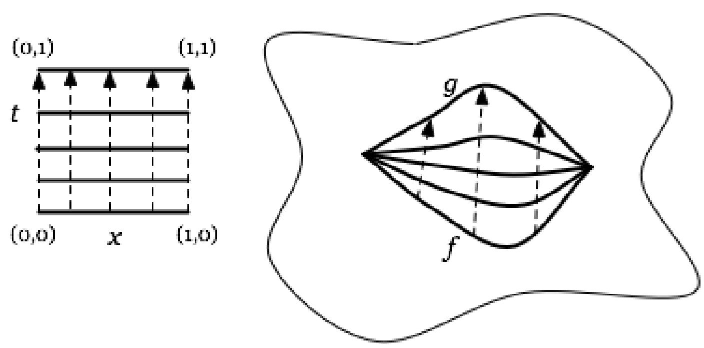

Figure 1.3: Homotopía de caminos

Si f y f' son dos caminos en X, existe una relación más fuerte entre ellos que la de homotopía simplemente. Está definida como sigue:

Definición 1.4.2. Dos caminos f y f', que aplican el intervalo I en X, se dice que son ***homotópicos por caminos*** si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1, y existe una aplicación continua $F : I \times I \to X$ tal que

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s) \;\; y \;\; F(s, 1) = f'(s), \\ F(0, t) &= x_0 \;\; y \;\; F(1, t) = x_1, \end{aligned}$$

para cada $s \in I$ y cada $t \in I$. La aplicación F recibe el nombre de ***homotopía de caminos*** entre f y f'. Véase la Figura 1.4. Si f es homotópico por caminos a f', escribimos $f \simeq_p f'$.

La primera condición dice simplemente que F es una homotopía entre f y f', y la segunda dice que, para cada t, la aplicación f_t, definida por la ecuación $f_t(s) = F\left(s,t\right)$, es un camino desde x_0 hasta x_1. Dicho de otro modo, la primera condición dice que F representa una forma continua de deformar el camino f en el camino f', y la segunda dice que los puntos extremos del camino permanecen fijos durante la deformación.

Capítulo 2

La Topología de Compacto-Abierta

La idea de dotar de una topología el conjunto de todas las funciones continuas de un espacio a otro, juega un papel importante en la topología moderna. De las muchas posibles topologías que se pueden definir en un conjunto de funciones, aquí estudiaremos una que surge del concepto clásico de convergencia uniforme sobre todo conjunto compacto, concepto enmarcado en la teoría de espacios de funciones. La idea original surge en el artículo [3], en el cual R.H. Fox plantea el tema de la siguiente manera: dados X, T, y Y espacios topológicos y una función $h : X \times T \to Y$ continua en X para cada t fijo, existe una función h^* asociada con h, $h^* : T \to F := Y^X$, F el espacio cuyos elementos son las funciones continuas de X a Y. La función h^* se define como sigue:

$$\begin{aligned} h^* : T &\to Y^X \\ t &\to h^*(t) = h_t : X \to Y \\ &\qquad\qquad\qquad\quad x \to h_t(x) := h(x,t). \end{aligned}$$

La correspondencia entre h y h^* es uno a uno, en efecto:

dadas $h, f : X \times T \to Y$, entonces veamos que si $h^* = f^*$ implica $h = f$, es decir: si $h^*(t) = f^*(t)$, para todo $t \in T$, tenemos que $h_t(x) = f_t(x)$, para todo $x \in X$, entonces $h(x,t) = f(x,t)$ entonces $h = f$.

Aunque la continuidad de una h particular depende solamente de los espacios topólogicos dados X, T y Y, la topología del espacio de funciones $F := Y^X$ está involucrada en la continuidad de h^*. Sería deseable así, *"topologizar"* $F := Y^X$ de tal manera que las funciones h^* que sean continuas, sean precisamente aquellas que correspondan a funciones continuas h.

Es importante aquí señalar que el problema es motivado por la teoría de homotopía, es decir, en el caso especial en el que $T = [0,1]$, cuando T es el intervalo unidad, h es una homotopía y h^* es un camino en el espacio de funciones; en la topología de deformaciones, usualmente se requiere la equivalencia de los conceptos de *"homotopía"* y de *"camino en un espacio de funciones"*.

R. H. Fox en [3] afirma que entre todas las posibles topologías para F, existe una, la cual él llama la ***topología de compacto abierto*** (y la abrevia por: co.o), que le parece es la más natural.

Más adelante, en la sección 2.6, mostraremos los principales resultados obtenidos por Ralph. H. Fox en [3].

2.1. La Definición de Topología de Compacto-Abierto

Sean X, Y espacios topológicos, denotemos por Y^X el conjunto de todas las funciones continuas de X en Y. Queremos definir "cercanía" de dos funciones por su "cercanía" sobre los subconjuntos compactos de X. Si f satisface la condición $f(A) \subseteq V$, donde $A \subseteq X$, A es compacto y $V \subseteq Y$, V es abierto, entonces las funciones cercanas a f están obligadas a satisfacer la misma condición. La topología más pequeña en Y^X compatible con este requisito se llama la *topología compacto-abierta*, denotada por *c-topología* y definida a continuación:

Definición 2.1.1. Para cada par de conjuntos $A \subseteq X$, $V \subseteq Y$, sea

$$\langle A, V\rangle = \left\{f \in Y^X \mid f(A) \subseteq V\right\}.$$

La *c-topología* en Y^Xes la que tiene como subbase todos los conjuntos $\langle A, V\rangle$, donde $A \subseteq X$, A compacto y $V \subseteq Y$, V abierto.

Afirmación 2.1.2. La familia

$$\mathscr{S} := \{\langle A, V\rangle \mid A \subseteq X,\, V \subseteq Y,\, A\, es\, compacto\, en\, X\, y\, V\, es\, abierto\, en\, Y\}$$

es una subbase de topología.

Demostración. Para esto hay que ver que $\cup\mathscr{S} = Y^X$, es decir $Y^X \subseteq \cup\mathscr{S}$, (la contenencia $\cup\mathscr{S} \subseteq Y^X$ es inmediata). En efecto: sea $f \in Y^X$, sea $x \in X$ entonces $f \in \langle\{x\}, Y\rangle$ ya que $f(\{x\}) = \{f(x)\} \subseteq Y$, $\langle\{x\}, Y\rangle \in \mathscr{S}$, luego $f \in \cup\mathscr{S}$.

$\square$

Afirmación 2.1.3. Si $X \cong L$ y $Y \cong M$, entonces $Y^X \cong M^L$:

Demostración. Sean $h_1 : L \to X$, $h_2 : Y \to M$ homeomorfismos. Sea además $h \in Y^X$. (Véase el Diagrama 2,1)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[d, "h_2"] \\
L \arrow[u, "h_1"] \arrow[r, dashed, "\varphi(h):=h_2\circ h\circ h_1"'] & M
\end{tikzcd}$$

Diagrama 2,1

Veamos que $\varphi : Y^X \to M^L$ definida por $\varphi(h) := h_2 \circ h \circ h_1$ es un homeomorfismo, en efecto:

φ ***está bien definida:*** Puesto que:

(i) $L \overset{h_1}{\to} X \overset{h}{\to} Y \overset{h_2}{\to} M$ es claro que $\varphi(h) := h_2 \circ h \circ h_1 : L \to M$.

(ii) φ es continua dado que es composición de funciones continuas.

φ ***es inyectiva:*** Supongamos que $\varphi(h) = \varphi(\tilde{h})$ entonces probemos que $h = \tilde{h}$. Es claro que h y $\tilde{h}$ pertenecen a Y^X, ahora, como

$$\varphi(h) \;\; = \;\; \varphi(\tilde{h}) \;\; \textit{entonces} \;\; h_2 \circ h \circ h_1 = h_2 \circ \tilde{h} \circ h_1.$$

Por hipótesis h_1, h_2 son homeomorfismos, por lo tanto existen h_1^{-1} y h_2^{-1} tales que:

$$h_2^{-1} \circ h_2 \circ h \circ h_1 \circ h_1^{-1} \;\; = \;\; h_2^{-1} \circ h_2 \circ \tilde{h} \circ h_1 \circ h_1^{-1},$$

entonces $h = \tilde{h}$.

φ ***es sobreyectiva:*** Sea $f \in M^L$. Debemos probar que existe $h \in Y^X$ tal que $\varphi(h) = f$ (véase el Diagrama 2,2). Definamos:

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{h}{\dashrightarrow} & Y \\ h_1 \uparrow & & \downarrow h_2 \\ L & \underset{f}{\longrightarrow} & M \end{array}$$

Diagrama 2,2

donde $h := h_2^{-1} \circ f \circ h_1^{-1}$, es claro que $h := h_2^{-1} \circ f \circ h_1^{-1} : X \to Y$, y que h es continua, por ser composición de continuas. Ahora:

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \varphi(h_2^{-1} \circ f \circ h_1^{-1}) \\ &= h_2 \circ h_2^{-1} \circ f \circ h_1^{-1} \circ h_1 \\ &= f, \end{aligned}$$

por lo tanto $\varphi(h) = f$.

φ ***es continua:*** Es decir φ^{-1} es abierta: basta ver que φ^{-1} "envía" abiertos subbásicos en abiertos.

Sea $\langle H, W \rangle$ abierto subbásico de M^L, con $H \subseteq L$, H compacto en L y $W \subseteq M$, W abierto en M. Veamos que $\varphi^{-1}(\langle H, W \rangle)$ es abierto en Y^X.

Si $\varphi^{-1}(\langle H, W \rangle) = \emptyset$ ya está, dado que $\emptyset$ es abierto.

Si $\varphi^{-1}(\langle H, W \rangle) \neq \emptyset$ entonces existe $f \in \langle H, W \rangle$ de modo que

$$\varphi^{-1}(f) \in \varphi^{-1}(\langle H, W \rangle).$$

Como $f \in \langle H, W \rangle$ entonces $f(H) \subseteq W$. Tenemos: $h_1 : L \to X$, $h_2^{-1} : M \to Y$ homeomorfosmos, $h_1(H) \subseteq X$, $h_1(H)$ compacto en X, $h_2^{-1}(W) \subseteq Y$, $h_2^{-1}(W)$ abierto en Y y

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \quad & M^L \to Y^X \\ & f \to \varphi^{-1}(f) \;\; = h_2^{-1} \circ f \circ h_1^{-1}. \end{aligned}$$

Veamos que

$$\varphi^{-1}(f) \in \left\langle h_1(H), h_2^{-1}(W) \right\rangle \subseteq \varphi^{-1}(\langle H, W \rangle).$$

(i) Probemos $\varphi^{-1}(f) \in \left\langle h_1(H), h_2^{-1}(W) \right\rangle$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{-1}\left(f\right) & = & h_2^{-1} \circ f \circ h_1^{-1} \in \left\langle h_1(H), h_2^{-1}(W) \right\rangle \\ & \leftrightarrow & h_2^{-1} \circ f \circ h_1^{-1}(h_1(H)) \subseteq h_2^{-1}(W) \\ & \leftrightarrow & h_2^{-1} \circ f \circ h_1^{-1} \circ h_1(H)) \subseteq h_2^{-1}(W) \\ & \leftrightarrow & h_2^{-1} \circ f(H) \subseteq h_2^{-1}(W) \\ & \leftrightarrow & h_2 \circ h_2^{-1} \circ f(H) \subseteq W \\ & \leftrightarrow & f(H) \subseteq W \\ & \leftrightarrow & f \in \langle H, W \rangle . \end{array}$$

(ii) Probemos que $\left\langle h_1(H), h_2^{-1}(W) \right\rangle \subseteq \varphi^{-1}(\langle H, W \rangle)$.
Sea $h \in \left\langle h_1(H), h_2^{-1}(W) \right\rangle \subseteq Y^X$ entonces

$$\begin{array}{rcl} h(h_1(H)) & \subseteq & h_2^{-1}(W) \\ & \leftrightarrow & h \circ h_1(H) \subseteq h_2^{-1}(W) \\ & \leftrightarrow & h_2 \circ h \circ h_1(H) \subseteq W. \end{array}$$

Como $\varphi^{-1} : M^L \to Y^X$ es biyectiva entonces φ^{-1} es sobre, entonces existe $t \in M^L$ tal que $\varphi^{-1}(t) = h$. Veamos que $t \in \langle H, W \rangle$ esto es $t(H) \subseteq W$.

Tenemos que

$$\begin{array}{rcl} h_2 \circ h \circ h_1(H) & \subseteq & W \\ & \leftrightarrow & h_2 \circ \varphi^{-1}(t) \circ h_1(H) \subseteq W \\ & \leftrightarrow & h_2 \circ h_2^{-1} \circ t \circ h_1^{-1} \circ h_1(H) \subseteq W \\ & \leftrightarrow & t(H) \subseteq W \\ & \leftrightarrow & t \in \langle H, W \rangle . \end{array}$$

Como se quería probar.

φ^{-1} ***es continua:*** Es decir φ es abierta: basta ver que φ “envía” abiertos subbásicos en abiertos.
Sea $\langle A, V \rangle$ abierto subbásico de Y^X, con $A \subseteq X$, A compacto en X y $V \subseteq Y$, V abierto en Y. Veamos que $\varphi(\langle A, V \rangle)$ es abierto en M^L.

Si $\varphi(\langle A, V \rangle) = \emptyset$ ya está, dado que $\emptyset$ es abierto.

Si $\varphi(\langle A, V \rangle) \neq \emptyset$ entonces existe $h \in \langle A, V \rangle$ de modo que

$$\varphi(h) \in \varphi(\langle A, V \rangle).$$

Como $h \in \langle A, V \rangle$ entonces $h(A) \subseteq V$, tenemos: $h_1^{-1} : X \to L$, $h_2 : M \to Y$ homeomorfosmos, $h_1^{-1}(A) \subseteq L$, $h_1^{-1}(A)$ compacto en L, $h_2(V) \subseteq M$, $h_2(V)$ abierto en M y

$$\begin{array}{rl} \varphi : & Y^X \to M^L \\ & h \to \varphi(h) \quad = h_2 \circ h \circ h_1. \end{array}$$

Veamos que

$$\varphi(h) \in \left\langle h_1^{-1}(A), h_2(V) \right\rangle \subseteq \varphi(\langle A, V \rangle).$$

(i) Probemos $\varphi(h) \in \left\langle h_1^{-1}(A), h_2(V) \right\rangle$.

$$\begin{aligned}
\varphi(h) &= h_2 \circ h \circ h_1 \in \left\langle h_1^{-1}(A), h_2(V) \right\rangle \\
&\leftrightarrow h_2 \circ h \circ h_1(h_1^{-1}(A)) \subseteq h_2(V) \\
&\leftrightarrow h_2 \circ h \circ h_1 \circ h_1^{-1}(A)) \subseteq h_2(V) \\
&\leftrightarrow h_2 \circ h(A) \subseteq h_2(V) \\
&\leftrightarrow h_2^{-1} \circ h_2 \circ h(A) \subseteq V \\
&\leftrightarrow h(A) \subseteq V \\
&\leftrightarrow h \in \langle A, C \rangle .
\end{aligned}$$

(ii) Probemos que $\left\langle h_1^{-1}(A), h_2(V) \right\rangle \subseteq \varphi(\langle A, V \rangle)$.
Sea $f \in \left\langle h_1^{-1}(A), h_2(V) \right\rangle \subseteq M^L$ entonces

$$\begin{aligned}
f(h_1^{-1}(A)) &\subseteq h_2(V) \\
&\leftrightarrow f \circ h_1^{-1}(A) \subseteq h_2(V) \\
&\leftrightarrow h_2^{-1} \circ f \circ h_1^{-1}(A) \subseteq V.
\end{aligned}$$

Como $\varphi : Y^X \to M^L$ es sobre, entonces existe $t \in Y^X$ tal que $\varphi(t) = f$. Veamos que $t \in \langle A, V \rangle$ esto es $t(A) \subseteq V$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}
h_2^{-1} \circ f \circ h_1^{-1}(A) &\subseteq V \\
&\leftrightarrow h_2^{-1} \circ \varphi(t) \circ h_1^{-1}(A) \subseteq V \\
&\leftrightarrow h_2^{-1} \circ h_2 \circ t \circ h_1 \circ h_1^{-1}(A) \subseteq V \\
&\leftrightarrow t(A) \subseteq V \\
&\leftrightarrow t \in \langle A, V \rangle .
\end{aligned}$$

Como se quería probar.

De esta manera, $\varphi : Y^X \to M^L$ definida por $\varphi(h) := h_2 \circ h \circ h_1$ es en efecto un homeomorfismo.

□

Ejemplo 2.1.4. Si X es espacio discreto, entonces Y^Xes homeomorfo a $\prod \{Y_x, x \in X\}$ donde cada Y_x es una copia de Y, ya que

$$\prod \{Y_x \mid x \in X\} = \prod_{x \in X} Y_x = \{(y_x)_x \mid x \in X\}$$

$$= \{f : X \to \cup_{x \in X} Y_x \mid f(x) \in Y\}$$

$$= \{f : X \to Y \mid f(x) \in Y\} = Y^X,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} h:(Y^X,\tau_{co.o}) &\to (\prod_{x\in X} Y_x,\tau_{prod}) \\ f &\to h(f)=f \end{aligned}$$

es un homeomorfismo, en efecto: es claro que h esta bien definida veamos que:

h ***es inyectiva:*** Supongamos que $h(f)=h(\tilde{f})$ entonces probemos que $f=\tilde{f}$. Es claro que f y $\tilde{f}$ pertenecen a Y^X, ahora como $h(f)=h(\tilde{f})$ entonces $f=\tilde{f}$.

h ***es sobreyectiva:*** Sea $f\in\prod_{x\in X}Y_x$ entonces $f:X\to Y$, osea $f\in Y^X$ y $h(f)=f$.

h ***es continua:*** Sean $f\in Y^X$ y $\pi_x^{-1}(V)$ abierto subbásico es decir

$$\begin{aligned} \pi_x:\prod_{x\in X} Y_x &\to Y \\ f &\to \pi_x(f):=f(x) \end{aligned}$$

entonces en la inyección π_x y $V\subseteq Y$, V abierto, tal que

$$\begin{aligned} h(f) &= f\in\pi_x^{-1}(V)\leftrightarrow \pi_x(f)=f(x)\in V, \\ &\leftrightarrow f\in\langle\{x\},V\rangle \end{aligned}$$

se ha probado que $\pi_x^{-1}(V)=h^{-1}\left(\pi_x^{-1}(V)\right)=\langle\{x\},V\rangle$ luego h es continua.

h^{-1} ***es continua:*** Es decir h es abierta: Basta tomar un abierto subbásico: $\langle A,V\rangle$ de $\left(Y^X,\tau_{co.o}\right)$ y tenemos:

$$\begin{aligned} h\left(\langle A,V\rangle\right) &= \{h(f)\mid f\in\langle A,V\rangle\} \\ &= \{f\mid f\in\langle A,V\rangle\} \\ &= \langle A,V\rangle \end{aligned}$$

Solo faltaría ver que $\langle A,V\rangle=\underset{a\in A}{\cap}\pi_a^{-1}(V)\in\tau_{producto}$. Observese que como $A\subseteq X$, A compacto en X, X el espacio discreto entonces A es un conjunto finito de puntos (en un espacio discreto los compactos son exactamente los conjuntos finitos). Ahora tenemos que:

$$\begin{aligned} f &\in \underset{a\in A}{\cap}\pi_a^{-1}(V)\leftrightarrow f\in\pi_a^{-1}(V),\ \text{para todo } a\in A \\ &\leftrightarrow f(a)\in V,\ \text{para todo } a\in A \\ &\leftrightarrow f(A)\in V \\ &\leftrightarrow f\in\langle A,V\rangle \end{aligned}$$

luego h^{-1} es continua.

Ejemplo 2.1.5. En base al Ejemplo 2.1.4 tenemos un caso particular, si tomamos a $\{0,1\}$ como el espacio discreto entonces:

$$\left(\mathbb{R}^2, \tau_{co.o}\right) \cong \left(\mathbb{R}^2, \tau_{prod}\right).$$

Afirmación 2.1.6. Sean X y Y espacios arbitrarios, veamos que $\tau_{prod} \subseteq \tau_{co.o}$.

Demostración. Sea $x \in X$, A un subconjunto abierto de Y, entonces $\pi_x^{-1}(A)$ es un abierto subbásico de $\left(Y^X, \tau_{prod}\right)$ .Tenemos

$$\begin{aligned} \pi_x^{-1}(A) &= \left\{f \in Y^X \mid \pi_x(f) \in A\right\} \\ &= \left\{f \in Y^X \mid \pi_x(f) \in A\right\} \\ &= \langle \{x\}, A\rangle \end{aligned}$$

dado que $\{x\}$ es un subconjunto compacto de X y A es abierto en Y, entonces $\langle \{x\}, A\rangle$ es un abierto subbásico de $\left(Y^X, \tau_{co.o}\right)$, por lo tanto $\tau_{prod} \subseteq \tau_{co.o}$.

□

Ya que los conjuntos abiertos básicos en Y^X son las intersecciones finitas de los abiertos subbásicos, es útil ver que:

Proposición 2.1.7. *Sean X y Y dos espacios topológicos, $A \subseteq X$, A compacto en X y $W \subseteq Y$, W abierto en Y. Tenemos:*

(i) $\bigcap_{i=1}^{n} \langle A_i, W\rangle = \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} A_i, W\right\rangle$;

(ii) $\bigcap_{i=1}^{n} \langle A, W_i\rangle = \left\langle A, \bigcap_{i=1}^{n} W_i\right\rangle$;

(iii) $\bigcap_{i=1}^{n} \langle A_i, W_i\rangle \subseteq \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \bigcup_{i=1}^{n} W_i\right\rangle$. *La otra contenencia en general no se tiene.*

Demostración. *(i)* $\subseteq$) Sea $f \in Y^X$ tal que $f \in \bigcap_{i=1}^{n} \langle A_i, W\rangle$, luego

$$f(A_i) \subseteq W \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Como para cada $x \in A_i$ con $i = 1, 2, ..., n$, $f(x) \in W$ entonces $f(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \subseteq W$ entonces

$$f \in \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} A_i, W\right\rangle.$$

$\supseteq$) Sea $f \in \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} A_i, W\right\rangle$, luego $f(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \subseteq W$; para todo $i = 1, 2, ..., n$ se tiene que

$$f(A_i) \subseteq f(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \subseteq W$$

ya que $A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, luego

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} \langle A_i, W\rangle.$$

(ii) $\subseteq$) Sea $f \in Y^X$ tal que $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle A, W_i \rangle$ luego $f(A) \subseteq W_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$f(A) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} W_i \text{ y } f \in \left\langle A, \bigcap_{i=1}^{n} W_i \right\rangle.$$

$\supseteq$) Sea $f \in \left\langle A, \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i \right\rangle$ luego $f(A) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_i$ así,

$$f(A) \subseteq W_i, \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n,$$

entonces $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle A, W_i \rangle$.

(iii) Sea $f \in Y^X$ tal que $f \in \cap_{i=1}^{n} \langle A_i, W_i \rangle$ luego

$$f(A_i) \subseteq W_i, \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Como la unión respeta contenencias tenemos que

$$\bigcup_{i=1}^{n} f(A_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_i.$$

Veamos que $f\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i$. Sea $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$. Existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $x \in A_i$. Así, $f(x) \in W_i$. Como $W_i \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i$, $f(x) \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i$. Así, $f\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} W_i$.

$\square$

Veamos un contraejemplo de que la otra contenencia de la Proposición 2.1.7(iii) en general no se tiene:

Ejemplo 2.1.8. Tomemos la siguiente función $f(x) = x^2$, y los intervalos cerrados $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$ donde A y B son compactos en $\mathbb{R}$, el dominio de f y $C = (-2, -\frac{1}{2})$, $D = (-1, 2)$ donde C y D son abiertos en $\mathbb{R}$, el codominio de f, entonces veamos que

$$f(A \cup B) \subseteq C \cup D \nrightarrow f(A) \subseteq C \ \wedge \ f(B) \subseteq D.$$

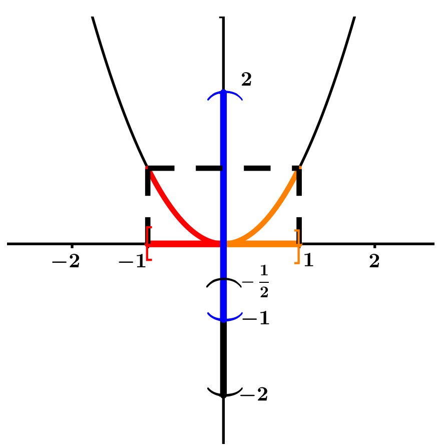

Figura 2.1: Contraejemplo de la otra contenencia en la Proposición 2.1.7(iii)

En efecto

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= [-1,0] \cup [0,1] = [-1,1], \\
C \cup D &= (-2,-\frac{1}{2}) \cup (-1,2) = (-2,2)
\end{aligned}
$$

tenemos que

$$
f(A \cup B) = f([-1,1]) = [0,1] \subseteq (-2,2) = C \cup D
$$

pero

$$
\begin{aligned}
f(A) &= f([-1,0] = [0,1] \nsubseteq (-2,\frac{1}{2}) = C, \\
f(B) &= f([0,1] = [0,1] \subseteq (-1,2) = B.
\end{aligned}
$$

Para la clausura, tenemos que:

Proposición 2.1.9. *Sean X, Y espacios totopologícos, $A \subseteq X$, A compacto en X y $W \subseteq Y$, W abierto en Y entonces $\overline{\langle A, W \rangle} \subseteq \langle A, \overline{W} \rangle$.*

Demostración. Por contradicción:

Si $g \notin \langle A, \overline{W} \rangle$ entonces $g \in (a, Y - \overline{W})$ para algún $a \in A$. Ya que el conjunto unitario $\{a\}$ es siempre compacto y claramente $Y - \overline{W}$ es abierto, $\langle a, Y - \overline{W} \rangle$ es una vecindad de g en la *c-topología*, y $\langle A, W \rangle \bigcap \langle a, Y - \overline{W} \rangle = \emptyset$, por definición de adherencia nos encontramos con que $g \notin \overline{\langle A, W \rangle}$.

□

El espacio Y^X contiene algunos subespacios útiles.

Proposición 2.1.10. *(i) Para cada $y_o \in Y$, sea $c_{y_0} : X \to Y$ la función constante $c_{y_0}(x) = y_o$ para cada $x \in X$. La función $j : Y \to Y^X$ dada por $j(y) = c_y$, para todo $y \in Y$ es un homeomorfismo de Y sobre un subespacio de Y^X; por lo tanto Y siempre puede ser encajado en Y^X.*

(ii) Sea $Y_0 \subseteq Y$ un subespacio de Y, entonces Y_0^X es homeomorfo al subespacio

$$
S_0 = \{ f \in Y^X \mid f(X) \subseteq Y_0 \} \subseteq Y^X.
$$

Demostración. *(i)* Dado que las afirmaciones $c_y \in \langle A, V \rangle$ y $y \in V$ son equivalentes, es evidente que la inyección j es un homeomorfismo.

$$
\begin{aligned}
j :\ & Y \to Y^X \\
& y \to c_y : \quad X \to Y \\
& \qquad\qquad\quad x \to c_y(x) = y
\end{aligned}
$$

tenemos $Y \cong j(Y) \subseteq Y^X$, así concluimos que Y siempre puede ser encajado en Y^X.

(ii) Sea

$$
\begin{aligned}
\varphi : Y_0^X &\to S_0 \\
f &\to \varphi(f) = f
\end{aligned}
$$

φ es la función identidad, si $W \subseteq Y$, W abierto en Y y $V = (W \cap Y_0) \subseteq Y_0$, V abierto de Y_0, la fórmula

$$\varphi [\langle A, V \rangle] = \langle A, W \rangle \cap S_0$$

muestra que φ es un homeomorfismo.

$\square$

Ejemplo 2.1.11. El análago de la Proposición 2.1.10(ii), para $X_0 \subseteq X$, es falso: es decir, una función $f : X_0 \to Y$ no necesariamente es extendible a X , de modo que Y^{X_0} en general no es un subespacio de Y^X. Veamos un ejemplo.

Sea $X = \mathbb{R}^2$ sabemos que el espacio $(\mathbb{R}^2, \tau_{Surgenfrey})$ no es normal, entonces por el *Teorema de Extensión de Tietze* (Teorema 1.3.23), existen $X_0 \subseteq \mathbb{R}^2$, X_0 cerrado y $f : X_0 \to \mathbb{R}$ continua tal que f ***no*** se puede extender a todo $\mathbb{R}^2$ de manera continua, es decir, no existe $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, F continua y tal que $F_{|X_0} = f$.

Veamos que algunas de las propiedades de separación de Y^X están determinadas por las de Y.

Teorema 2.1.12. *(i) Y^X es T_i si y sólo si Y es T_i para $i = 0, 1, 2$ y 3.*
(ii) Y^X es regular si y sólo si Y es regular.

Demostración. (i) Si Y^X es T_i o regular, entonces por la Proposición 2.1.10, Y puede ser considerado como un subespacio de Y^X, como ser T_i o regular son propiedades hereditarias, entonces Y debe tener estas propiedades también.

Por lo tanto solo nos queda probar los recíprocos.

Como lo que más nos interesa es el caso de los espacios Hausdorff, veamos que se cumple para $i = 2$, (los casos $i = 0, 1, 3$ son similares).

Sea $f \neq g$; entonces $f(x_0) \neq g(x_0)$ para algún $x_0 \in X$. Como Y es Hausdorff, existen vecindades disyuntas $U(f(x_0))$; $V(g(x_0))$, de modo que $\langle x_0, U \rangle$, $\langle x_0, V \rangle$, son vecindades disyuntas de f y g respectivamente. En efecto, si $h \in \langle x_0, U \rangle \cap \langle x_0, V \rangle$ entonces $h(x_0) \in U \cap V = \emptyset$ lo que nos llevaría a una contradicción.

(ii) Veamos que Y^X es regular. Dados $A \subseteq X$, A compacto, $V \subseteq Y$, V abierto y $f \in \langle A, V \rangle$, entonces $f(A) \subseteq V$, $f(A)$ es compacto en Y y Y es regular, entonces por la Proposición 1.2.17, existe un abierto W con $f(A) \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq V$. Concluimos que $f \in \langle A, W \rangle \subseteq \overline{\langle A, W \rangle} \subseteq \langle A, \bar{W} \rangle \subseteq \langle A, V \rangle$, lo cual establece la regularidad de Y^X.

$\square$

Ejemplo 2.1.13. Si Y es normal, entonces Y^X no necesariamente es normal. Veamos un ejemplo.

Sean $X = \{0, 1\}$, X espacio discreto, $Y = \mathbb{R}$. Veamos que:
$(\mathbb{R}, \tau_{Sorgenfrey})$ es normal pero $(\mathbb{R}^{\{0,1\}}, \tau_{co.o})$ no es normal. En efecto:
sean F, H cerrados en $(\mathbb{R}, \tau_{Surgenfrey})$, con

$$F \cap H = \emptyset, F \neq \emptyset, H \neq \emptyset.$$

Para cada $a \in F$, si $a \notin H$ entonces $a \in \mathbb{R} - H$, $\mathbb{R} - H$ es abierto, entonces existe una vecindad básica $[a, x_a)$, tal que $a \in [a, x_a) \subseteq \mathbb{R} - H$. Análogamente para cada $b \in H$, si $b \notin F$ entonces $b \in \mathbb{R} - F \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R} - F$ abierto, entonces existe una vecindad básica $[b, x_b)$ tal que $b \in [b, x_b) \subseteq \mathbb{R} - F$. Sean

$$U := \bigcup_{a \in F} [a, x_a) \;\; y \;\; V := \bigcup_{b \in H} [b, x_b)\,,$$

U, V abiertos, con $a \in U$, $b \in V$, $F \subseteq U$, $H \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Ahora, por el Ejemplo 2.1.5 sabemos que si $X = \{0, 1\}$ es el espacio discreto entonces

$$(\mathbb{R}^2, \tau_{co.o}) \cong (\mathbb{R}^2, \tau_{prod}),$$

por otro lado

$$(\mathbb{R}^2, \tau_{Sorgenfrey}) = (\mathbb{R}^2, \tau_{Sorgenfrey} \times \tau_{Sorgenfrey}) = (\mathbb{R}^2, \tau_{prod})$$

entonces $(\mathbb{R}^2, \tau_{co.o}) \cong (\mathbb{R}^2, \tau_{Sorgenfrey})$. Veamos que $(\mathbb{R}^2, \tau_{prod})$ no es normal.

Por Lema 1.3.22, si X contiene un conjunto denso D y un subespacio cerrado, relativamente discreto S, con $\mid S \mid \geq 2^{|D|}$ entonces X no es normal. En efecto:

Sean $S = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $S \subseteq \mathbb{R}^2$, S cerrado en $\mathbb{R}^2$ y relativamente discreto (véase Figura 2.2), $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y $\mid S \mid = \aleph_1$, $\mid D \mid = \aleph_0$ entonces

$$\aleph_1 = \mid S \mid \geq 2^{|D|} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

entonces $(\mathbb{R}^2, \tau_{prod})$ no es normal, por lo tanto $(\mathbb{R}^2, \tau_{co.o})$ no es normal.

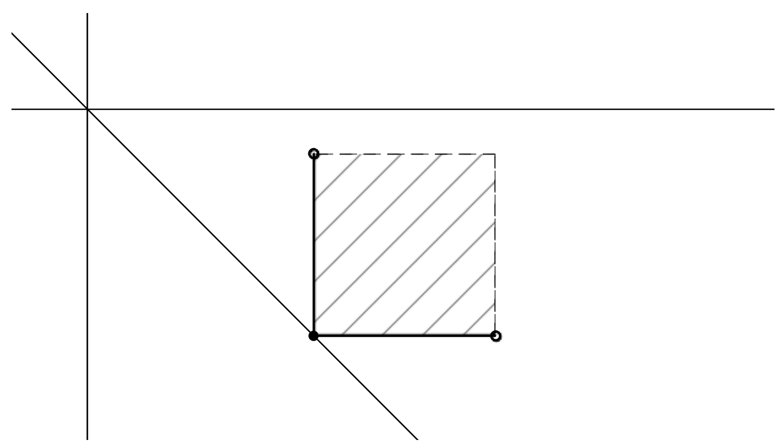

Figura 2.2: $(\mathbb{R}^2, \tau_{Sorgenfrey})$ no es normal.

Dado que se consideran sólo subconjuntos compactos de X en la definición de la topología de Y^X, es de esperar que la *c-topología* tendrá especial importancia cuando X contiene "*suficientes*" subconjuntos compactos para definir su topología.

2.2. Continuidad de la composición y la función evaluación.

Sean X, Y y Z tres espacios. Para $f \in Y^X$ y $g \in Z^Y$, la composición $g \circ f \in Z^X$, de modo que $T(f, g) = g \circ f$ define una función $T : Y^X \times Z^Y \to Z^X$. Investiguemos la continuidad de T.

Proposición 2.2.1. *T es siempre continua en cada argumento separadamente, esto es:*

(i) $g \to g \circ f_1$ es función continua $T_{f_1} : Z^Y \to Z^X$ para cada f_1 fija.

(ii) $f \to g_1 \circ f$ es función continua $T_{g_1} : Y^X \to Z^X$ para cada g_1 fija.

Demostración. *(i)* Veamos que $T_{f_1}^{-1} : Z^X \to Z^Y$ es abierta. En efecto: sea $\langle A, V\rangle$ vecindad subbásica de $g \circ f_1$, con A subconjunto compacto de X y V abierto de Z. Observemos que

$$\begin{aligned} g \circ f_1 \ \ \in & \ \ \langle A, V\rangle \leftrightarrow (g \circ f_1)(A) \subseteq V \\ & \leftrightarrow g(f_1(A)) \subseteq V \\ & \leftrightarrow g \in \langle f_1(A), V\rangle\,, \end{aligned}$$

y dado que $f_1(A)$ es subconjunto compacto de Y, entonces $\langle f_1(A), V\rangle$ es en efecto una vecindad de g; así $T\left[f_1, \langle f_1(A), V\rangle\right] = \langle A, V\rangle$, estableciendo la continuidad de T_{f_1}.

(ii) Esta prueba se hace similarmente; sea $\langle A, V\rangle$ vecindad subbásica de $g_1 \circ f$, con A subconjunto compacto de X y V abierto de Z. Veamos que las afirmaciones $g_1 \circ f \in \langle A, V\rangle$ y $f \in \left\langle A, g_1^{-1}(V)\right\rangle$ son equivalentes. En efecto

$$\begin{aligned} g_1 \circ f \ \ \in & \ \ \langle A, V\rangle \leftrightarrow (g_1 \circ f)(A) \subseteq V \\ & \leftrightarrow g_1(f(A)) \subseteq V \\ & \leftrightarrow f(A) \subseteq g_1^{-1}(V) \\ & \leftrightarrow f \in \left\langle A, g_1^{-1}(V)\right\rangle, \end{aligned}$$

y dado que $g_1^{-1}(V)$ es abierto en Y, entonces $\left\langle A, g_1^{-1}(V)\right\rangle$ es en efecto una vecindad de f; así

$$T\left[\left\langle A, g_1^{-1}(V)\right\rangle, g_1\right] = \langle A, V\rangle\,,$$

estableciendo la continuidad de T_{g_1}.

$\square$

Este resultado se resume mediante el uso de la siguiente terminología.

Definición 2.2.2. Para cada función continua fija $f : X \to Y$, la función $f^+ : Z^Y \to Z^X$, dada por $f^+(g) = g \circ f$, se llama la ***función inducida*** por f. Similarmente cada función continua $g : Y \to Z$ induce una función $g^+ : Y^X \to Z^X$ dada por $g^+(f) = g \circ f$.

La Proposición 2.2.1 simplemente establece que una función de espacios de funciones, inducida por una aplicación continua de uno de los factores, es siempre continua.

En general, T no es continua en ambas variables, como veremos más adelante (en el Ejemplo 2.2.6). Sin embargo se tiene:

Teorema 2.2.3. *Sean X, Z espacios de Hausdorff y Y localmente compacto. Entonces la función $T : Y^X \times Z^Y \to Z^X$ es continua.*

Demostración. Veamos que $T^{-1} : Z^X \to Y^X \times Z^Y$ es abierta. Sean $f_1 \in Y^X$, $g_1 \in Z^Y$ y $\langle A, W\rangle$ una vecindad de $g_1 \circ f_1$, con A subconjunto compacto de X y W abierto de Z. Observe que

$$\begin{aligned} g_1 \circ f_1 \ \ \in & \ \ \langle A, W\rangle \leftrightarrow g_1 \circ f_1(A) \subseteq W \\ & \leftrightarrow g_1(f_1(A)) \subseteq W \\ & \leftrightarrow f_1(A) \subseteq g_1^{-1}(W), \end{aligned}$$

como $g_1^{-1}(W)$ es subconjunto abierto de Y, $f_1(A) \subset g_1^{-1}(W)$ y $f_1(A)$ es compacto en Y, la compacidad local de Y y el Teorema 1.2.27 aseguran que hay un abierto relativamente compacto V con

$$f_1(A) \subset V \subset \overline{V} \subset g_1^{-1}(W).$$

Así tenemos vecindades $f_1 \in \langle A, V \rangle$, $g_1 \in \langle \overline{V}, W \rangle$ y claramente,

$$T\left[\langle A, V \rangle, \langle \overline{V}, W \rangle\right] \subset \langle A, W \rangle .$$

Entonces $T : Y^X \times Z^Y \to Z^X$ es continua.

□

La función evaluación juega un papel importante en los espacios de funciones.

Definición 2.2.4. Para cualesquiera dos espacios Y y Z, la función $\omega : Z^Y \times Y \to Z$ definida por $\omega(f, y) := f(y)$ se llama ***la función evaluación*** de Z^Y.

Teorema 2.2.5. *(i) Para cada y_0 fijo, la función $\omega_{y_0} : Z^Y \to Z$, dada por $\omega_{y_0}(f) := \omega(f, y_0) = f(y_0)$ es continua.*

(ii) Si Y es localmente compacto, entonces $\omega : Z^Y \times Y \to Z$ es continua.

Demostración. Ya que ω es precisamente la función de composición $T : Y^X \times Z^Y \to Z^X$, siempre que X es un espacio que consiste de un único punto, los resultados *(i) y (ii)* se deducen de la Proposición 2.2.1 y el Teorema 2.2.3, respectivamente.

□

Veamos que la compacidad local de Y es esencial en el Teorema 2.2.5(ii), como mostraremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.6. Sea $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ los racionales con la topología inducida (se requiere únicamente que $\mathbb{Q}$ sea un espacio completamente regular, no localmente compacto). Sea I el intervalo unidad cerrado y

$$\begin{aligned} \omega : I^{\mathbb{Q}} \times \mathbb{Q} &\to I \\ (f_0, q_0) &\to \omega(f_0, q_0) := f_0(q_0) \end{aligned}$$

la función evaluación. Sea $f_0 : \mathbb{Q} \to I$ dada por $f_0(\mathbb{Q}) = 0$, y dado $q_0 \in \mathbb{Q}$ cualquier punto, probemos que ω no es continua en (f_0, q_0), mostrando que $\omega\left(f_0, q_0\right)$ tiene como vecindad $W = \{t \mid t < 1\}$, y para cualquier vecindad de (f_0, q_0) , la imagen de dicha vecindad bajo ω, no está contenida en W.

Sea U cualquier vecindad de q_0 y $V = \cap_{i=1}^{n} \langle A_i, V_i \rangle$ cualquier vecindad básica de f_0, donde A_i es subconjunto compacto de $\mathbb{Q}$ para todo $i = 1, 2, ..., n$ y V_i es un abierto de I para todo $i = 1, 2, ..., n$. Puesto que $\overline{U}$ no es compacto, pues $\mathbb{Q}$ no es un espacio localmente compacto (véase el Ejemplo 1.2.22), mientras que cada A_i lo es. Así U no puede ser un subconjunto de $\cup_{i=1}^{n} A_i$. Por lo tanto existe $\widetilde{q} \in U - \cup_{i=1}^{n} A_i$. Ahora como $\mathbb{Q}$ es completamente regular, existe una función continua $\widetilde{f} : \mathbb{Q} \to I$ tal que $\widetilde{f}(\widetilde{q}) = 1$, y $\widetilde{f}(\cup_{i=1}^{n} A_i) = 0$. Observando que $0 \in \cap_{i=1}^{n} V_i$, ya que $f_0 \in V$ entonces $f_0\left(A_i\right) \subseteq V_i$ para todo $i = 1, 2, ..., n$, luego $f_0\left(A_i\right) = \{0\} \subseteq V_i$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Llegamos a la conclusión de que $\widetilde{f} \in V$, $\widetilde{q} \in U$ pero $\omega\left(\widetilde{f}, \widetilde{q}\right) := \tilde{f}\left(\tilde{q}\right) = 1 \notin W$. Por lo tanto, ω es no continua.

Este ejemplo también muestra que la compacidad local de Y es esencial en el Teorema 2.2.3: si tomamos el espacio X del Teorema 2.2.3 que consiste de un solo punto, entonces T se convierte simplemente en la función evaluación.

2.3. Productos Cartesianos

Dados X, T, y Y espacios topológicos y una función $h(x, y) = z$ puede considerarse como una función $h : X \times Y \to Z$ o como una familia de funciones $h^*(x) : Y \to Z$ con X como el espacio de parámetros. En esta sección, se considera el efecto que el cambio anterior, produce en la continuidad de las funciones h y $h^*(x)$.

Para la notación, sea $h : X \times Y \to Z$ continua en y para cada x fijo; la formula

$$[h^*(x)]\,(y) = h(x, y)$$

define, para cada x fijo, un $h^*(x) : Y \to Z$, así: $x \to h^*(x)$ es una función

$$h^* : X \to Z^Y.$$

Recíprocamenente, dada una $h^* : X \to Z^Y$, la fórmula

$$[h^*(x)]\,(y) = h(x, y)$$

define una $h : X \times Y \to Z$ continua en y para cada x fijo. Las funciones

$$h : X \times Y \to Z \quad y \quad h^* : X \to Z^Y$$

relacionadas por la fórmula anterior, son llamadas ***asociadas.***

El hecho más importante de la *c-topología* es:

Teorema 2.3.1. *(i) Si $h : X \times Y \to Z$ es continua entonces $h^* : X \to Z^Y$ también es continua.*

(ii) Si $h^* : X \to Z^Y$ es continua, y si Y es localmente compacto, entonces $h : X \times Y \to Z$ también es continua.

Demostración. *(i)* Es suficiente demostrar que para cada x_0 y cada subbásico $\langle A, V\rangle$ que satisface $h^*(x_0) \in \langle A, V\rangle$, hay una vecindad $U(x_0)$ con $h^*(U) \subseteq \langle A, V\rangle$. De manera equivalente, debemos demostrar que, si $h(x_0, A) \subseteq V$, entonces hay una vecindad $U(x_0)$ abierta con $h(U \times A) \subseteq V$. Para esto, tengamos en cuenta que $\{x_0\} \times A \subseteq h^{-1}(V)$ y que debido a que h es continua, $h^{-1}(V)$ es abierto; puesto que A es compacto, el Corolario 1.2.18 se aplica para obtener una vecindad $U(x_0)$ con $U \times A \subseteq h^{*-1}(V)$. Esto completa la prueba.

(ii) Tenemos las funciones continuas $h : X \to Z^Y$ y $1_y : Y \to Y$ entonces la secuencia de $X \times Y \overset{h^* \times 1_y}{\to} Z^Y \times Y \overset{\omega}{\to} Z$ es continua: la primera función es continua por el Teorema

1.1.18(ii), y porque Y es localmente compacto, así también la función ω es continua. Por consiguiente, la función compuesta es continua, y esto es

$$\begin{aligned} h := \omega \circ (h^* \times 1_y) : X \times Y &\rightarrow Z \\ (x, y) &\rightarrow \omega(h^*(x), y) = h^*(x)(y) \\ &\qquad = h(x, y). \end{aligned}$$

□

2.4. Bases para Z^Y

En los conjuntos subbásicos abiertos $\langle A, V \rangle$ para la topología de Z^Y, los conjuntos abiertos $V \subseteq Z$ y los conjuntos compactos $A \subseteq Y$ se pueden restringir a ciertas subfamilias, y la colección resultante seguirá siendo una subbase para la *c-topología*.

Proposición 2.4.1. *(i) Sea $\mathscr{B} = \{W_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ una subbase para Z. Entonces la familia*

$$\{\langle A, W \rangle \mid A \subseteq Y,\ A\,es\,compacto\,y\,W \in \mathscr{B}\},$$

es también una subbase para Z^Y.

(ii) Sea $\mathscr{F} = \{C_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ una familia de conjuntos compactos en Y con la siguiente propiedad: para cada compacto A y abierto U con $A \subseteq U$, hay un número finito $C_i \in \mathscr{F}$ con $A \subseteq \cup_{i=1}^n C_i \subseteq U$. Entonces la familia

$$\{\langle C, W \rangle \mid C \in \mathscr{F}, W \in \mathscr{B}\}$$

es también una subbase para Z^Y.

Demostración. *(i)* Es suficiente demostrar que, dado $f \in \langle A, V \rangle$ hay un número finito $\langle A_i, W_i \rangle$, $W_i \in \mathscr{B}$, con $f \in \cap_{i=1}^n \langle A_i, W_i \rangle \subseteq \langle A, V \rangle$. Empezamos por la observación de que, debido a que V es abierto y $\mathscr{B}$ es una subbase, se deduce que la fórmula $V = \cup_\beta V_\beta$, donde cada V_β es una intersección finita $\cap_{j=1}^{k(\beta)} W_{\beta,j}$. Ahora, ya que $f(A) \subseteq V$, los conjuntos de $\{f^{-1}(V_\beta) \cap A\}$ son abiertos *(en A),* que cubren el compacto A, por lo que podemos extraer un subcubrimiento finito $\{f^{-1}(V_i) \cap A\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *(ya que A es normal);* para obtener $A_1, A_2, \ldots, A_n$ compactos, con $A = \cup_{i=1}^n A_i$, y $A_i \subseteq f^{-1}(V_i)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Ya que

$$f \in \langle A_i, V_i \rangle = \left\langle A_i, \cap_{j=1}^{k(i)} W_{i,j} \right\rangle = \cap_{j=1}^{k(i)} \langle A_i, W_{i,j} \rangle,$$

para cada i, encontramos

$$f \in \cap_{i=1}^n \cap_{j=1}^{k(1)} \langle A_i, W_{i,j} \rangle = \cap_{i=1}^n \langle A_i, V_i \rangle \subseteq \langle A, \cup_{i=1}^n V_i \rangle \subseteq \langle A, V \rangle,$$

como se quería.

(ii) Dado $f \in \langle A, W \rangle$, se puede elegir un número finito $C_i \in \mathscr{F}$ con

$$A \subseteq \cup_{i=1}^n C_i \subseteq f^{-1}(W);$$

entonces $f \in \langle C_i, W\rangle$ para $i = 1, ..., n$, de modo que

$$f \in \cap_{i=1}^{n}(C_i, W) = (\cup_{i=1}^{n} C_i, W) \subseteq (A, W),$$

así la prueba queda completa.

□

Ejemplo 2.4.2. En $Z^{X\times Y}$, los conjuntos $\langle A \times B, V\rangle$, donde $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, A, B son compactos y $V \subseteq Z$, V es abierto, forman una subbase para la *c-topología*. Para esto, sea $C \subseteq X \times Y$ compacto, y sea W una vecindad de C. Si A y B son las proyecciones de C sobre X y Y, respectivamente, entonces $A \times B$ es compacto (por lo tanto, normal) y contiene C; por lo tanto cada $c \in C$ tiene una vecindad $U_c \times V_c$ en $A \times B$ con $\bar{U}_c \times \bar{V}_c \subseteq (A \times B) \cap W$. Ya que C es compacto, se puede extraer una cubierta finita $\{U_{c_i} \times V_{ci}\}$; luego $C \subseteq \cup\left(\bar{U}_{c_i} \times \bar{V}_{c_i}\right) \subseteq W$ y debido a que $\bar{U}_{c_i}, \bar{V}_{c_i}$ son compactos, la condición *(ii)* de la Proposición 2.4.1 se satisface.

También utilizamos la Proposición 2.4.1 para establecer el siguiente teorema:

Teorema 2.4.3. *Sea Y localmente compacto y X y Z espacios arbitrarios. La función $h \to h^*$ establece un homeomorfismo entre $Z^{X\times Y}$ y $(Z^Y)^X$.*

Demostración. Es evidente que $h \to h^*$ es biyectiva. Una subbase para $(Z^Y)^X$ consiste de todos los pares $\langle A, \langle B, W\rangle\rangle$, donde $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, A, B son compactos y $W \subseteq Z$, W es abierto. Por el Ejemplo 2.4.2 los conjuntos $\langle A \times B, W\rangle$ forman una subbase para $Z^{X\times Y}$; dado que $h \in \langle A \times B, W\rangle$ si y sólo si $h^* \in \langle A, \langle B, W\rangle\rangle$, el teorema queda demostrado.

□

2.5. Un Contraejemplo Elemental en la Topología Compacto-Abierto.

En esta sección analizaremos un ejemplo presentado en [1].

Supongamos X y Y espacios topológicos compactos. Sea Y^X el conjunto de las funciones continuas de X a Y, y dotamos a este conjunto de la topología compacto-abierto. Un problema interesante de topología es probar o refutar que Y^X es compacto.

¿Cuál es la topología compacto abierto en Y^X? Sea C un subconjunto compacto de X y U un abierto de Y. Sea $\langle C, U\rangle$ el conjunto de todas las funciones $f \in Y^X$ tales que $f(C) \subseteq U$. Entonces, los conjuntos $\langle C, U\rangle$ forman una subbase de la topología-compacto abierto en Y^X.

Resulta que Y^X no necesariamente es compacto, incluso si X y Y lo son. Esto es conocido por los expertos, pero no se encuentra en textos elementales tales como [2], [5], [6] y [8]. El propósito de esta sección es hacer un breve análisis del contraejemplo proporcionado en la nota [4]. Todo lo que necesitamos es el teorema del valor intermedio, el cual recordamos a continuación:

Teorema 2.5.1. ***Teorema del Valor Intermedio:***

Sea f continua en cada punto de un intervalo cerrado $[a, b]$. Escojamos dos puntos arbitrarios $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$, tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Entonces dado $c \in (f(x_1), f(x_2))$, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.

En nuestro contraejemplo, tomamos $X = Y = I$, el intervalo unidad cerrado $[0, 1]$ con la topología de subespacio usual heredada de $\mathbb{R}$. Una prueba común de que I^I no es compacto usa el hecho de que la topología compacto-abierto coincide con la topología uniforme en I^I y que la sucesión $(f_n)_n$ definida por $f_n(x) = x^n$ no tiene ninguna subsucesión uniformemente convergente, dado que la función límite no es continua. (Véase la Figura 2.5)

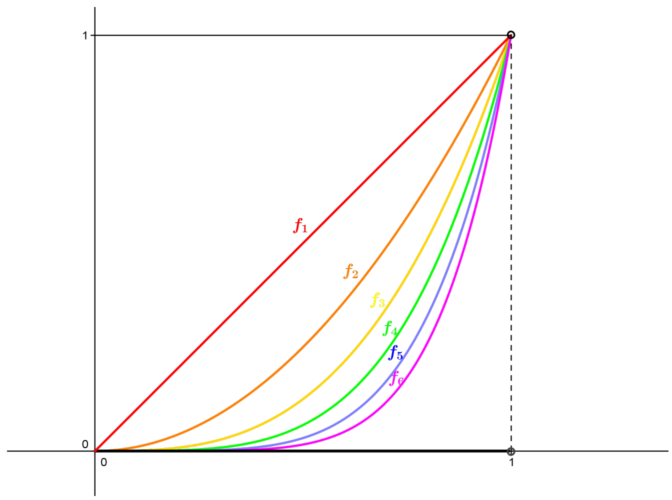

Figura 2.3: Sucesión $(f_n)_n$ en I^I.

Para nuestra prueba, escojamos $\epsilon < 1/2$. Para $x \in I$, sea

$$U_x = S\left(\{x\}, (x - \epsilon, x + \epsilon) \cap I\right).$$

Estos conjuntos forman un cubrimiento abierto de I^I, ya que, por el teorema de valor intermedio, toda función continua de I a I tiene un punto fijo, en efecto: sea $F : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Veamos que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $F(x_0) = x_0$.

Definamos una función G como:

$$G(x) = F(x) - x.$$

Esta función es continua por ser composición de un polinomio $(-x)$ y una función F continua. Como la imagen de F solo recorre el intervalo $[0, 1]$ entonces $0 \leq G(0) = F(0)$, así como $G(1) = F(1) - 1 \leq 0$ (ya que $F(1)$ es a lo sumo 1). Luego, por Teorema 2.5.1, existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ tal que $G(x_0) = 0$. Es decir

$$G(x_0) = F(x_0) - x_0 = 0$$

entonces

$$F(x_0) = x_0$$

El caso que $G(0) = G(1) = 0$ es trivial, ya que en este caso $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$.

Ahora probemos que el cubrimiento abierto $\{U_x\}$ no tiene subcubrimiento finito. Sea $U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}$ una subcolección finita de este cubrimiento abierto y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Dado que $\epsilon < 1/2$, ningún conjunto U_{x_i} cubre I^I. Escojamos $y_i \in I \setminus (x_i - \epsilon, x_i + \epsilon)$ cada $i = 1, 2, ..., n$. Sea f la función lineal a trozos que conecta a $(0, f(0))$, (x_1, y_1),(x_2, y_2),...,(x_n, y_n), y $(1, f(1))$, donde $f(0) = 0$ si $x_1 \neq 0$ y $f(1) = 1$ si $x_n \neq 1$. Entonces es claro que $f \notin U_{x_i}$ para todo i, pero $f \in I^I$ lo cual prueba que esta subcolección finita no cubre a I^I. Así I^I no es compacto en la topología compacto-abierto.

J. Groves comenta al final de su nota: *"Me gusta esta prueba porque es un buen ejemplo de las definiciones de compacidad y de la topología compacto-abierto, y es una buena aplicación del teorema del valor intermedio".*

2.6. Resultados obtenidos por Ralph H. Fox.

En esta sección presentaremos los resultados obtenidos por Ralph H. Fox en [3].

Dados X, T, y Y espacios topológicos y una función $h : X \times T \to Y$ continua en X para cada t fijo, existe una función h^* asociada con h, $h^* : T \to F := Y^X$, F el espacio cuyos elementos son las funciones continuas de X a Y. La función h^* se define como sigue:

$$\begin{array}{rcl} h^* : T & \to & Y^X \\ t & \to & h^*(t) = h_t : \; X \to Y \\ & & \qquad\qquad\quad x \to h_t(x) := h(x,t). \end{array}$$

La correspondencia entre h y $h*$ es uno a uno, en efecto:

dadas $h, f : X \times T \to Y$, entonces veamos que si $h^* = f^*$ implica $h = f$, es decir: si $h^*(t) = f^*(t)$, para todo $t \in T$, tenemos que $h_t(x) = f_t(x)$, para todo $x \in X$, entonces $h(x,t) = f(x,t)$ entonces $h = f$.

Aunque la continuidad de una h particular depende solamente de los espacios topólogicos dados X, T y Y, la topología del espacio de funciones $F := Y^X$ está involucrada en la continuidad de h^*. Sería deseable así, *"topologizar"* $F := Y^X$ de tal manera que las funciones h^* que sean continuas, sean precisamente aquellas que correspondan a funciones continuas h. Se ha sabido por mucho tiempo que esto es posible si X satisface ciertas condiciones, el principal de lo cual es el estado de compactación local (Teorema 2.6.1). Esta condición a menudo se percibe como demasiado restrictiva (ya que excluye prácticamente la posibilidad de que ella misma siendo X un espacio de función), y desde hace varios años, en una carta, Hurewicz le propuso a R. H. Fox el problema de definir una topología para F cuando X no es localmente compacto. En ese momento R. H. Fox se presento con un ejemplo (esencialmente el Teorema 2.6.3) que esto no es posible en general. Recientemente he descubierto que, mediante la restricción de la rango de T en una manera muy razonable, una de las topologías estándar para F tiene la propiedad deseada incluso para espacios X que no son localmente compacto (Teorema 2.6.2). En este último resultado la condición de compacidad local se sustituye por el primer axioma de numerabilidad y esto es una condición menos problemática.

Es importante aquí señalar que el problema es motivado por la teoría de homotopía, es decir, en el caso especial en el que $T = [0, 1]$, cuando T es el intervalo unidad, h es una homotopía y h^* es un camino en el espacio de funciones; en la topología de deformaciones, usualmente se requiere la equivalencia de los conceptos de *"homotopía"* y de *"camino en un espacio de funciones"*.

Entre las diversas topologías posibles sobre $F := Y^X$ hay una, a la que él llama la ***topología (co.o.) compacto-abierto,*** la que parece ser la más natural. Para cualesquiera dos conjuntos, A en X y W en F, sea $\langle A, W\rangle$ el conjunto de aplicaciones $f \in F$ para las cuales $f(A) \subseteq W$. La topología co.o. se define seleccionando como una subbase para los conjuntos abiertos de F, los conjuntos $\langle A, W\rangle$, donde A recorre todos los subconjuntos compactos de X y W recorre todos los subconjuntos abiertos de Y.

Teorema 2.6.1. *Si X es regular y localmente compacto, Y un espacio topológico arbitrario, y si F tiene la topología compacto-abierto, entonces la continuidad de h es equivalente a la continuidad de h^* para cualquier espacio topológico T.*

Teorema 2.6.2. *Si X es un espacio que satisface el primer axioma numerabilidad, Y un espacio topológico arbitrario, y si F tiene la topología compacto-abierto, entonces la continuidad de h es equivalente a la continuidad de h^* para cualquier T, que satisface el primer axioma de numerabilidad.*

Teorema 2.6.3. *Si X es metrizable separable y Y es la recta real, entonces con el fin de que sea posible topologizar F tal que la continuidad de h y de h^* sean equivalentes, es necesario y suficiente que X sea localmente compacto.*

Lema 2.6.4. *Si F tiene la topología compacto-abierto, entonces la continuidad de h implica la continuidad de h^* sin hacer restricción alguna sobre los espacios topológicos X, T, y Y.*

Demostración. Sea W un conjunto abierto en Y y A un conjunto compacto en X y sea t_0 un punto en $h^{*-1}(\langle A, W\rangle)$. Entonces $A \times t_0 \subseteq h^{-1}(W)$. Como $h^{-1}(W)$ es abierto, es decir es la unión de conjuntos abiertos $U_\alpha \times V_\alpha$. Puesto que A es compacto, $A \times t_0$ está contenido en una unión finita $\cup_{i=1}^n U_i \times V_i$ con cada V_i una vecindad de t_0. Entonces $\cap_{i=1}^n V_i$ es un entorno abierto de t_0 y está contenido en $h^{*-1}(\langle A, W\rangle)$.

□

Demostración. del Teorema 2.6.1.

En vista del lema es suficiente para probar que la continuidad de h^* implica la continuidad de h. Sea W un conjunto abierto en Y y sea (x_0, t_0) un punto en $h^{-1}(W)$. Ya que $h^*(t_0)$ es continua en x, existe un entorno abierto U de x_0 tal que $h^*(t_0) \in \langle U, W\rangle$. Debido a las condiciones sobre X, existe una vecindad R de x_0 abierta tal que $\overline{R}$ es compacto y contenido en U. Dado que $\langle \overline{R}, W\rangle$ es abierto y contiene $h^*(t_0)$, existe un entorno abierto V de t_0 tal que $h^*(V) \subseteq \langle \overline{R}, W\rangle \subseteq \langle R, W\rangle$. Así $R \times V$ es un entorno abierto de (x_0, t_0) que está contenido en $h^{-1}(W)$.

□

Demostración. del Teorema 2.6.2.

Al igual que antes, tenemos que demostrar que la continuidad de h^* implica la continuidad de h. Sea W un conjunto abierto en Y y supongamos que $h^{-1}(W)$ no es abierto. Entonces hay un punto (x_0, t_0) en $h^{-1}(W)$, que también se encuentra en la clausura del complemento de $h^{-1}(W)$. Sea $\{Gn\}$ una base para los conjuntos abiertos de $X \times T$ en el punto (x_0, t_0) y escojamos, para cada entero n, un punto (x_n, t_n) en la intersección $\cap_{i \leqq n} G_i$ y el complemento de $h^{-1}(W)$. Dado que $h^*(t_0)$ es continua en x, existe un entorno abierto U de x_0 tal que $h^*(t_o) \subseteq \langle U, W \rangle$. Sea $A = U \cap \cup_{n=0}^{\infty} x_n$. Como A es compacto, $\langle A, W \rangle$ es abierto y ya que h^* es continua y $t_0 \in h^{*-1}(\langle A, W \rangle)$, existe un vecindad V de t_0 tal que $h^*(V) \subseteq \langle A, W \rangle$. Hay un número entero N tal que $x_n \in U$ y $t_n \in V$ cada vez que $n > N$. Por lo tanto $h(x_n, t_n) \in W$ para todo n mayor que N. Esta contradicción con la elección de los puntos (x_n, t_n) prueba que $h^{-1}(W)$ es abierto. Por lo tanto h es continua.

□

Lema 2.6.5. *Sea X un espacio metrizable separable, sea Y la recta real, y supongamos que la topología de F es tal que la continuidad de h para $T = [0, 1]$ implica la continuidad de h^*. Sea $W = (a, b)$ un intervalo abierto finito en Y y sea A un subconjunto cerrado de X que no es compacto. Entonces el conjunto $\langle A, W \rangle$ no tiene puntos interiores.*

Demostración. Dado que A no es compacto existe una sucesión $\{x_n\}$ en A tal que $U_{n=1}^{\infty} x_n$ es cerrado en X. Dado cualquier elemento $h^*(0)$ de el conjunto $\langle A, W \rangle$ vamos a definir

$$h_t(x_n) := min\{1 + b, h_0(x_n) + nt)\}.$$

Dado que la función h se define sobre el conjunto cerrado $(X \times [0]) \cup ((\cup_{n=1}^{\infty} x_n) \times [0, 1])$ este puede extenderse de forma continua sobre el espacio normal $X \times [0, 1]$. Si $t > 0$ existe un entero n tal que $a + nt > 1 + b$; por lo tanto, $h^*(t)$ está en el complemento de $\langle A, W \rangle$ para cada t positiva. Por hipótesis la topología de F es tal que h^* es continua. Por lo tanto $h^*(0)$ pertenece a la clausura del complemento de $\langle A, W \rangle$.

□

Lema 2.6.6. *Si la topología de F es tal que la continuidad de la h^* siempre implica la continuidad de h entonces, dado un punto x_0 in X, un conjunto abierto W en Y, y un elemento f_0 en $\langle x_0, W \rangle$, existe un entorno R de x_0 tal que $\langle R, W \rangle$ es una vecindad de f_0 en F.*

Demostración. Definamos $\phi(x, \mathrm{f}) := f(x)$ para todo $(x, f) \in X \times F$. Puesto que $\phi^*(f) = f$, ϕ^* es continua y por lo tanto ϕ también es continua. Como $\phi^{-1}(W)$ es abierto, por tanto, debe existir una vecindad R de x_0 y una vecindad V de f_0 tal que $\phi(R, V) \subseteq W$. Por lo tanto$f_0 \in V \subseteq \langle R, W \rangle$ y, por tanto, $\langle R, W \rangle$ es una vecindad de f_o en F.

□

Demostración. del Teorema 2.6.3:

Sea W el intervalo abierto finito (a, b) y supongamos que la topología de F es tal que la continuidad de h y de h^* son equivalentes para cada T. Por el Lema 2.6.6 se deduce que, dado cualquier punto x_0 en X y cualquier elemento f_0 en $\langle x_0, W \rangle$, existe una vecindad R de x_0 tal que $\langle R, W \rangle$ es una vecindad de f_0 en F. Dado que X es regular hay una vecindad U de x_0 cuya clausura está contenida en R, por lo que $\langle \overline{U}, W \rangle$ es también un vecindad de f_0. Dado que f_0 es un punto interior de $\langle U, W \rangle$ se sigue del Lema 2.6.5 que $\overline{U}$ es compacto. Por lo tanto X debe ser localmente compacto. Esto demuestra la necesidad de la condición; la suficiencia es una consecuencia del Teorema 2.6.1.

□

Corolario 2.6.7. *Si Y es la recta real y X es metrizable separable pero no localmente compacto, entonces F no satisface el primer axioma numerabilidad en la topología compacto-abierto.*

Demostración. Sea W el intervalo abierto finito (a, b). Si F satisface el primer axioma de numerabilidad entonces el Teorema 2.6.2 se aplicaría para obtener la continuidad de la función ϕ definida anteriormente. Si x_0 es un punto en el que X no es localmente compacto y f_0 cualquier elemento de $\langle x_0, W\rangle$, a continuación, se desprende de la demostración del Lema 2.6.6 que existe un entorno de R de x_0 tal que $\langle R, W\rangle$ es una vecindad de f_0 en F. Sea U una vecindad de x_0 cuya clausura está contenida en R, por lo que f_0 es un punto interior de $\left\langle \overline{U}, W\right\rangle$. Como $\overline{U}$ no es compacto esto no concuerda con los Lemas 2.6.4 y 2.6.5. Esta contradicción muestra que F no satisface el primer axioma numerabilidad en la topología compacto-abierto.

□

Capítulo 3

Otras topologías sobre espacios de funciones.

Este capítulo incluye la convergencia secuencial y la convergencia punto a punto, algunos resultados importantes donde se hacen algunas comparaciones entre la convergencia de sucesión en Y^X con la topología de compacto-abierto y los otros tipos de convergencias definidas en el conjunto Y^X.

3.1. Convergencia secuencial en el espacio Y^X

Mostraremos en esta sección que cada vez que Y es un espacio métrico, la convergencia secuencial en Y^X es precisamente la convergencia clásica de la teoria de funciones, sobre cada subconjunto compacto de X.

Definición 3.1.1. Sea $(f_n)_n$ una sucesión en Y^X con la topología compacto-abierto, decimos que f_n converge a f si para todo $\langle C, V\rangle$ abierto subbásico de Y^X tal que $f \in \langle C, V\rangle$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $(f_n) \in \langle A, V\rangle$.

Definición 3.1.2. Sean (Y, d) un espacio métrico y X un espacio arbitrario. Una sucesión $(f_n)_n$ en Y^X se dice que ***converge a*** $f \in Y^X$ ***uniformemente*** en cada subconjunto compacto, si para cada compacto $C \subset X$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un entero $N = N(C, \varepsilon)$ tal que $d(f(c), f_n(c)) < \varepsilon$ para cada $n \geq N$ y cada $c \in C$.

Teorema 3.1.3. *Sea (Y, d) espacio métrico y X un espacio arbitrario. Una sucesión $(f_n)_n$ en Y^X converge a un $f \in Y^X$ uniformemente en cada subconjunto compacto, si y sólo si $f_n \to f$ en la c-topología de Y^X.*

Demostración. $\Longrightarrow$] Supongamos que $f_n \to f$ según la Definición 3.1.2, y sea $f \in \langle C, V\rangle$. Puesto que C es compacto, tenemos que

$$d(f(C), Y - V) = \varepsilon > 0.$$

Sea ahora $N = N(C, \varepsilon)$; entonces para $n \geq N$, tenemos $d(f(c), f_n(c)) < \varepsilon$ para todo $c \in C$, y por lo tanto $f_n \in \langle C, V\rangle$ para todo $n \geq N$. Así $f_n \to f$ en la topología compacto-abierto.

$\Longleftarrow$] Sea $f_n \to f$ en la topología compacto-abierto. Dado cualquier compacto C y $\varepsilon > 0$, cada $c \in C$ tiene un vecindad $U(c)$ con

$$f(U(c)) \subseteq B(f(c), \varepsilon),$$

cubriendo a C con un número finito

$$U(c_1) \cap C, \ldots U(c_n) \cap C,$$

obtenemos compactos $C_1, \ldots C_n$, con $C = \cup_{i=1}^n C_i$. Sea W la vecindad

$$\cap_{i=1}^n < C_i, B(f(c_i), \varepsilon) >$$

de f, tenemos que si $f_n \in W$, entonces $d(f_n(c), f(c)) < 2\varepsilon$ para todo $c \in C$.

$\square$

En el Teorema 3.1.3, se ha supuesto que la función límite f es continua; si omitimos este requisito de continuidad , tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.1.4. *Sea (f_n) una sucesión en Y^X que converge uniformemente en cada subconjunto compacto de alguna función f. Entonces $f_{|C}$ es continua para cada compacto $C \subset Y$.*

Demostración. Sea C compacto, y $f_n \to f$ como en la Definición 3.1.2. Probemos que$f$ es continua en cada $c_0 \in C$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un entero n con $d(f(c), f_n(c)) < \varepsilon$ para todo $c \in C$. Tenemos que:

$$d(f(c), f(c_0)) \leq d(f(c), f_n(c)) + d(f_n(c), f_n(c_0)) + d(f_n(c_0), f(c_0))$$

encontramos $d(f(c), f(c_0)) < 3\varepsilon$ en la vecindad $C \cap f_n^{-1}[B(f_n(c_0), \varepsilon)]$ de c_0, completando así la prueba .

$\square$

Otro tipo de convergencia, estrechamente relacionada con la de la Definición 3.1.2, se da en la siguiente definición:

Definición 3.1.5. Una sucesión $(f_n)_n$ en Y^X ***converge continuamente*** a $f \in Y^X$ si $f_n(x_n) \to f(x)$ para cada $x \in X$ y la sucesión $x_n \to x$.

Proposición 3.1.6. *Sea (Y, d) un espacio métrico, y sea X 1° contable. Entonces, la convergencia continua en Y^X es equivalente a la convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de X.*

Demostración. (Por contradicción):

Supongamos $f_n \to f$ continuamente, pero no de manera uniforme en un conjunto compacto $C \subseteq X$. Entonces hay un $\varepsilon > 0$, y una sucesión de números enteros $n_1 < n_2 < \ldots$, y una sucesión de puntos $c_k \in C$ tal que $d(f_{n_k}(c_k), f(c_k)) \geq \epsilon$ para cada $k \geq 1$. Puesto que C es compacto toda sucesión de elementos de C, admite una subsucesión convergente en C y además como C es 1° contable, podemos asumir que $c_k \to c_0$; de lo contrario, se utiliza una subsucesión y la Proposición 1.3.11(ii). Debido a la convergencia continua, se deduce que $f_k(c_k) \to f(c_0)$, y , por la continuidad de f, nos encontramos con que

$$d(f_{n_k}(c_k), f(c_k)) \leq d(f_{n_k}(c_k), f(c_0)) + d(f(c_0), f(c_k)) \to 0,$$

lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, asumiendo $f_n \to f$ uniformemente en cada conjunto compacto y sea $x_n \to x_0$, entonces $C = \{x_n\} \cup \{x_0\}$ es compacto, por lo que $f_{n|C} \to f_{|C}$ uniformemente; por lo tanto tenemos que:

$$d(f_n(x_n), f(x_0)) \leq d(f_n(x_n), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x_0))$$

y la continuidad de f , encontramos que $f_n(x_n) \to f(x_0)$.

□

3.2. Convergencia punto a punto en el espacio Y^X

Hemos visto que la topología compacto-abierto describe la convergencia uniforme en cada conjunto compacto. Otro tipo de convergencia utilizado con frecuencia en el análisis se da en la siguiente definición.

Definición 3.2.1. Una sucesión $(f_n)_n \subset Y^X$ ***converge punto a punto*** a una $f \in Y^X$ si $f_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in X$, x fijo.

Es evidente que la convergencia uniforme en cada conjunto compacto implica la convergencia puntual. Los ejemplos clásicos del análisis muestran que:

(i) El recíproco no es cierto.

(ii) Que si una sucesión $(f_n)_n \subset Y^X$ converge punto a punto a una función f, entonces f puede no ser continua.

Ejemplo 3.2.2. Sean $(f_n)_n$ una sucesión en I^I, dada por $f_n(x) = 1 - x^n$, con $n \in \mathbb{N}$ y $g : I \to I$ la función definida por: (véase la Figura 3.2.2).

$$\begin{aligned} &g : I \to I \\ &x \to g(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 0 & si\ x = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Veamos que $(f_n)_n \to g$ cuando $n \to \infty$, aunque $(f_n)_n$ no converge en I^I porque $g \notin I^I$. En efecto:

Si $a \in [0, 1)$ es claro que $(f_n(a))_n \to 1$ puesto que $a^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y como $g(a) = 1$ entonces $(f_n(a))_n \to g(a)$.

Si $a = 1$ entonces $(f_n(a))_n \to 0$ puesto que $a^n \to 1$ cuando $n \to \infty$, y como $g(a) = 0$ entonces $(f_n(a))_n \to g(a)$. Por lo tanto $(f_n)_n \to g$ cuando $n \to \infty$.

Obtenemos que $g_{|_{[0,1]}}$ ***no*** es continua. Véase la Figura 3.2.2.

El Ejemplo 3.2.2 ilustra las condiciones *(i)* (usando la Proposición 3.1.4 y la observación anterior de que $g_{|_{[0,1]}}$ ***no*** es continua) y *(ii)*.

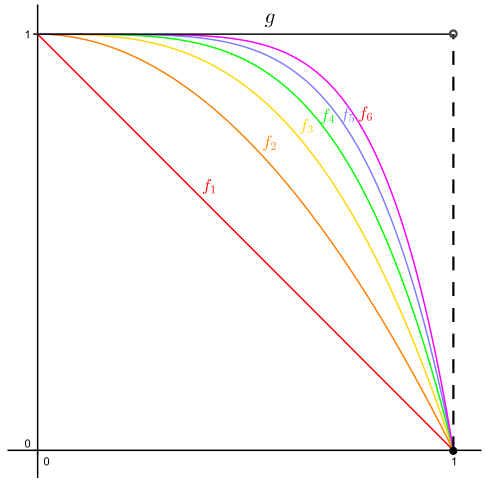

Figura 3.1: Sucesión (f_n) y la función límite g

Para obtener una topología para el conjunto Y^X en la que la convergencia secuencial es equivalente a la convergencia puntual, veamos la siguiente definición.

Definición 3.2.3. En el conjunto Y^X, se define la *p- topología,* como la topología que tiene como subbase, la familia $\{\langle x, V\rangle \mid x \in X, V \subset Y, V \textit{ abierto}\}$. Este espacio se denota por $Y^X(p)$.

La *p- topología* está evidentemente contenida en la *c-topología*, ya que los conjuntos compactos utilizados en la definición de la subbase para la *c-topología* se sustituyen por puntos individuales. La verificación de que la convergencia secuencial en $Y^X(p)$ es equivalente a la convergencia puntual es inmediata , una vez que establecemos la siguiente descripción equivalente de $Y^X(p)$:

Proposición 3.2.4. *$Y^X(p)$ es homeomorfo a un subespacio del producto cartesiano $\prod\{Y_x \mid x \in X\}$, donde cada Y_x es una copia de Y. En efecto:*
Si por cada $f \in Y^X$, definimos

$$\mu(f) = \{(y_x)_x \mid x \in X,\ y_x = f(x)\} = \prod_{x\in X} Y_x = Y^X(p),$$

entonces $Y^X(p)$ es homeomorfo a $\mu(Y^X)$.

Demostración. Es evidente, que μ es inyectiva . Sea $\cap_{i=1}^n \langle x_i, U_i\rangle$ cualquier conjunto abierto básico en $Y^X(p)$. Definimos $U_{x_i} \subseteq Y_{x_i}$ como el conjunto U_i, tenemos que

$$\mu\left[\cap_{i=1}^n \langle x_i, U_i\rangle\right] = \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\rangle \cap \mu(Y^X),$$

establece que μ es un homeomorfismo.

□

Dado que la convergencia en los productos cartesianos es equivalente a la convergencia en cada compacto del producto, es evidente de la Proposición 3.2.4, que la convergencia en $Y^X(p)$ es equivalente a la convergencia puntual.

Proposición 3.2.5. *(i) Para cada $x_0 \in X$ fijo, la función evaluación $\omega_{x_0} : Y^X(p) \to Y$ es continua.*

(ii) Si $f : Z \to X$ es continua , la función inducida $f^+ : Y^X(p) \to Y^Z(p)$ también es continua.

Demostración. *(i)* Basta observar que $\omega_{x_0} = p_{x_0} \circ \mu$ donde

$$p_{x_0} : \prod Y_x \to Y_{x_0} = Y$$

es la proyección sobre el factor x_0.

(ii) Es suficiente con ver que la preimagen de un abierto subbásico es una abierto. En efecto: Sean $z \in Z$, y $V \subseteq Y$, V abiero en Y entonces $\langle z, V\rangle$ un abierto subbásico de $Y^Z(p)$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
(f^+)^{-1}(\langle z, V\rangle) &\subseteq \left\{g \in Y^X(p) \mid f^+(g) \in \langle z, V\rangle\right\} \\
&\subseteq \left\{g \in Y^X(p) \mid g \circ f \in \langle z, V\rangle\right\} \\
&\subseteq \left\{g \in Y^X(p) \mid (g \circ f)(z) \in V\right\} \\
&\subseteq \left\{g \in Y^X(p) \mid (g(f(z)) \in V\right\} \\
&\subseteq \left\{g \in Y^X(p) \mid g \in \langle f(z), V\rangle\right\},
\end{aligned}$$

y dado que $f : Z \to X$ continua, entonces $f(z) \in X$, luego $\langle f(z), V\rangle$ es una abierto de $Y^X(p)$, estableciendo así la continuidad de f^+.

$\square$

Capítulo 4

Conclusiones y Tareas Pendientes

† El presente trabajo tuvo como objetivo central realizar un estudio detallado de la topología compacto-abierto. Un aspecto importante en este trabajo fue haber estudiado minuciosamente la respuesta a la pregunta que Hurewicz le realizó a Ralpha. H. Fox.

Problema: Dados X, T y Y tres espacios topolólogicos y una función $h : X \times T \to Y$ la cual es continua en x, para cada t fijo existe una función $h^* : T \to F := Y^X$, h^* asociada a h. La función h^* se define por $h^*(t) := h_t : T \to Y^X$ tal que $h_t(x) := h(x, t)$, para todo $x \in X$. ¿Como "topologizar" F de tal manera que la función h^* sea continua si, y sólo si, las funciones h lo son? El trabajo de Ralpha H. Fox permite concluir:

1. Si X es regular y localmente compacto, Y un espacio topológico arbitrario, y si F tiene la topología compacto-abierto, entonces la continuidad de h es equivalente a la continuidad de h^* para cualquier espacio topológico T.

2. Si X es un espacio que satisface el primer axioma numerabilidad, Y un espacio topológico arbitrario, y si F tiene la topología compacto-abierto, entonces la continuidad de h es equivalente a la continuidad de h^* para cualquier T, que satisface el primer axioma de numerabilidad.

3. Si X es metrizable separable y Y es la recta real, entonces con el fin de que sea posible topologizar F tal que la continuidad de h y de h^* sean equivalentes, es necesario y suficiente que X sea localmente compacto.

4. Si F tiene la topología compacto-abierto, entonces la continuidad de h implica la continuidad de h^* sin hacer restricción alguna sobre los espacios topológicos X, T, y Y.

† El teorema de Tychonoff no se cumple en la topología compacto-abierto. Esta conclusión corresponde al análisis del contraejemplo de que el espacio de las funciones continuas de $[0, 1]$ a $[0, 1]$ no es compacto en la c-topología, contraejemplo hallado [4]. Cabe destacar que este artículo fue el punto de partida de este proyecto.

† Continuidad de la función evaluación: para cualesquiera dos espacios Y, Z, la función $\omega : Z^Y \times Y \to Z$ definida por $\omega(f, y) := f(y)$ se llama *la función evaluación*

de Z^Y. Se concluye que: Si Y es localmente compacto, entonces $\omega : Z^Y \times Y \to Z$ es continua.

† Una última conclusión sería acerca de las interrelaciones que se pudieron estudiar entre la c-topología y otras topologías definidas en el espacio de funciones continuas Y^X tales como: la topología de convergencia uniforme, la topología de convergencia punto a punto y la topología producto, se tiene que: $\tau_{Prod} \subseteq \tau_{co.o}$, $\tau_{Cnv.Unf} = \tau_{co.o}$ si el espacio Y es metrizable y X 1° contable, $\tau_{Cnv.p.p} \subseteq \tau_{co.o}$ ya que los conjuntos compactos utilizados en la definición de subbase para la c-topología se sustituyen por puntos individuales.

Tareas Pendientes:

¿Y^X es T_i si, y sólo si, Y es T_i para $i = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 5$?

Contraejemplo para mostrar que $\left\langle A, \overline{W} \right\rangle \nsubseteq \left\langle \overline{A, W} \right\rangle$.

Se sabe que en Y^X, si X es espacio discreto entonces: $\tau_{Prod} = \tau_{Co.o}$. ¿Se cumple lo reciprocro?

Bibliografía

[1] Apostol Tom M., *Calculus*, Volumen 1 second edition, Xerox College Publishing, USA, 1967.

[2] Dugundji J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1966.

[3] Fox R. H., "On Topologies For Function Spaces", *Bull Amer. Math Coc*; 51, (1945),
429-432.

[4] Groves J., "An Elementary Counterexample in the Compact-Open Topology", *Amer.*
Math. Month. Volumen 119 (2012), 693-694.

[5] Hinrichsen D., Fernández J. L., Fraguela A. y Álvarez A., *Topología General*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2003 Sexagésimo Aniversario.

[6] Munkres J. R., *Topology*, Volumen 1, Prentice Hall, INC, Madrid, España, 2000. 2000.

[7] Patty C. Wayne, *Foundations of Topology*, Second edition, Jones and Bartlett Publishers, USA, 2009

[8] Willard Stephen; *General Topoly*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 1970.