

Discos de Acreción con Magnetización Alrededor de Agujeros Negros de Kerr

Oscar Mauricio Pimentel Díaz

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Física

Director

Guillermo Alfonso González Villegas

Doctorado en Matemática Aplicada

Codirector

Fabio Duvan Lora Clavijo

Doctorado en Ciencias - Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2020

Dedicatoria

A mi esposa Paola por su amor y apoyo en este camino, a mi mamá Carmen, mi papá Carlos y mi hermano Carlos Daniel, porque sin ellos nada de esto hubiera sido posible. A mis profesores Fabio Lora y Guillermo González, por su amistad y compañía. A mis amigos, porque entre cafés y chistes hemos disfrutado de este proceso, y a Dios por haberme concedido el cariño de todos ellos.

Tabla de Contenido

Introducción	12
1. MHD Numérica en Relatividad General con Magnetización	21
1.1. Ecuaciones de la GRMHD con polarización magnética como un sistema conservativo	22
1.2. Estructura de valores propios de la GRMHD con polarización magnética	33
1.3. Métodos numéricos	46
1.4. Experimentos numéricos	54
1.4.1. Problemas de Riemann magnetizados en 1D con polarización magnética	54
1.4.1.1. Tubo de choque de Komissarov	57
1.4.1.2. Colisión de Komissarov	66
1.4.1.3. Balsara 1	67
1.4.1.4. Balsara 2	68
1.4.1.5. Balsara 3	69
1.4.1.6. Balsara 4	70
1.4.1.7. Balsara 5	70
1.4.1.8. Onda genérica de Alfvén	71
1.4.2. Acreción esférica magnetizada de un fluido perfecto con polarización magnética	72
2. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz relativista con polarización magnética	82

DISCOS DE ACRECION CON MAGNETIZACION EN AGUJEROS NEGROS	4
2.1. Ecuaciones basicas y configuración inicial	82
2.2. Análisis lineal de la inestabilidad	84
2.3. Evolución no lineal	94
2.4. Diferencias entre la RMHD con un campo magnético renormalizado y la RMHD con susceptibilidad magnética	102
3. Toros magnetizados con polarización magnética alrededor de agujeros negros de Kerr	110
3.1. Ecuaciones magnetohidrodinámicas con polarización magnética	111
3.2. Condiciones de integrabilidad de las ecuaciones de Euler	115
3.3. Toros polítropos con momento angular constante	120
3.3.1. Discos con susceptibilidad magnética constante	122
3.3.2. Discos con susceptibilidad magnética no constante	124
3.4. Acreción de discos toroidales con susceptibilidad constante	128
4. Conclusiones	137
Referencias Bibliográficas	145

Lista de Figuras

Figura 1.	Celda computacional	48
Figura 2.	Tubo de choque de Komissarov a tiempo $t = 0.8$	58
Figura 3.	Colisión de Komissarov a tiempo $t = 0.8$	59
Figura 4.	Balsara 1 a tiempo $t = 0.4$	60
Figura 5.	Balsara 2 a tiempo $t = 0.4$	61
Figura 6.	Balsara 3 a tiempo $t = 0.4$	62
Figura 7.	Balsara 4 a tiempo $t = 0.4$	63
Figura 8.	Balsara 5 a tiempo $t = 0.4$	64
Figura 9.	Onda genérica de Alfvén a tiempo $t = 0.4$	65
Figura 10.	Variables físicas para la acreción esférica	75
Figura 11.	Norma L_1 del error relativo para la densidad de masa en la acreción esférica	79
Figura 12.	Valor máximo de la divergencia del campo magnético en la acreción esférica	81
Figura 13.	Rapidez de crecimiento $\text{Im}(\omega)$ en función de la susceptibilidad magnética χ_m para diferentes valores de β_x	91
Figura 14.	Rapidez de crecimiento $\text{Im}(\omega)$ en función de el número de Mach relativista M_r para diferentes valores de β_x	93
Figura 15.	Evolución de la densidad de masa en reposo y de las líneas de campo magnético en la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz	96

Figura 16.	Amplitud de la perturbación Δv_y en función del tiempo	99
Figura 17.	Amplificación de la energía magnética $E_{\text{mag}}(t)/E_{\text{mag}}(0)$ en función del tiempo	101
Figura 18.	Máximo de amplificación magnética en función de χ_m para diferentes valores de β_x	103
Figura 19.	Perfil integrado de velocidad a tiempo $t = 25$ en función de y para diferentes valores de β_x y χ_m	104
Figura 20.	Rapidez de crecimiento de la inestabilidad: diferencias entre la RMHD con un campo magnético renormalizado y la RMHD con susceptibilidad magnética	107
Figura 21.	Error absoluto en la rapidez de crecimiento de la inestabilidad entre la RMHD con susceptibilidad magnética y la RMHD usual con un campo magnético renormalizado	108
Figura 22.	Amplitud de la perturbación y amplificación de la energía magnética: diferencias entre la RMHD con un campo magnético renormalizado y la RMHD con susceptibilidad magnética	109
Figura 23.	Densidad de masa ρ de discos de acreción con diferentes valores de χ_m	125
Figura 24.	Parámetro de magnetización β de discos de acreción con diferentes valores de susceptibilidad magnética χ_m	126
Figura 25.	Propiedades físicas de discos con susceptibilidad magnética no constante	129
Figura 26.	Densidad de masa en $t = 0$ y $t = 250$ para un disco diamagnético, uno paramagnético y uno con $\chi_m = 0$	132

- Figura 27. Diagramas espacio-temporales de la componente del tensor de esfuerzos de Maxwell que genera la MRI 134
- Figura 28. Promedio espacial del parámetro de viscosidad α en función del tiempo para discos con polarización magnética 136
- Figura 29. Flujo de masa promedio en el horizonte de eventos en función del tiempo para discos con polarización magnética 138

Lista de Tablas

Tabla 1.	Condiciones iniciales para los diferentes problemas de Riemann	56
Tabla 2.	Parámetros que definen el estado de polarización de los modelos de discos con χ_m no constante	127

Notación y convenciones

En este trabajo se adopta por convención una métrica con signatura mayormente positiva, es decir $(-, +, +, +)$. Los índices griegos $(\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots)$ van desde 0 hasta 3, los indices latinos $(i, j, k, \dots)$ de 1 a 3 y los índices caligráficos $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \dots)$ desde 1 hasta el número de variables de estado. A continuación se encuentran algunos símbolos que aparecen a lo largo del trabajo.

Símbolo	Descripción
$x^\mu = (t, x^i)$	Coordenadas espacio-temporales
∂_μ	Derivada parcial respecto a la coordenada x^μ
∇_μ	Derivada covariante
$g_{\mu\nu}$	Métrica espacio-temporal
$\gamma_{\mu\nu}$	Métrica inducida
g, γ	Determinantes de las métricas
$\eta_{\mu,\nu} = (-1, 1, 1, 1)$	Métrica de Minkowski
$A_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$	Simetrización
$A_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})$	Antisimetrización
χ_m	Susceptibilidad magnética
G	Constante de gravitación universal
c	Velocidad de la luz

Adicionalmente, las ecuaciones se escribirán en unidades geometrizadas donde la constante de gravitación universal y la velocidad de la luz son iguales a uno, es decir $G = c = 1$.

Resumen

Título: Discos de acreción con magnetización alrededor de agujeros negros de Kerr *

Autor: Oscar Mauricio Pimentel Díaz **

Palabras Clave: Magnetohidrodinámica relativista (GRMHD), métodos numéricos, relatividad, discos de acreción, inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, agujeros negros, susceptibilidad magnética.

Descripción: En la descripción magneto-hidrodinámica de sistemas astrofísicos usualmente se asume que los campos magnéticos son generados por corrientes de conducción. Sin embargo, la polarización magnética de la materia puede ser relevante en sistemas magnéticamente dominantes como discos de acreción, pulsares, magnetares, entre otros. En esta tesis se presenta por primera vez el sistema de ecuaciones conservativas de la GRMHD con polarización magnética y se calcula su estructura de valores propios. Estos resultados se implementan en el código CAFE para simular choques unidimensionales e inestabilidades de Kelvin-Helmholtz en fluidos diamagnéticos y paramagnéticos. Por otro lado, se presentan las primeras soluciones analíticas de discos de acreción magnéticamente polarizados alrededor de un agujero negro de Kerr, los cuales se evolucionan con el código *Cosmos++* para estudiar su proceso de acreción. El estudio teórico y numérico realizado en este trabajo sobre la propagación de ondas y generación de inestabilidades en plasmas magnéticamente polarizados muestra que en fluidos diamagnéticos las ondas más rápidas se propagan con mayor velocidad que en fluidos paramagnéticos. Sin embargo, el estado inicial de plasmas paramagnéticos es más susceptible a formación de inestabilidades magneto-rotacionales y del tipo Kelvin-Helmholtz, y por lo tanto, a la amplificación de la energía magnética. Esto produce niveles de turbulencia magnética en procesos de acreción que podrían explicar la discrepancia actual entre simulaciones y observaciones de núcleos activos de galaxias.

* Tesis de Doctorado

** Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Director: Guillermo Alfonso González Villegas, Doctor en Matematica Aplicada, Codirector: Fabio Duvan Lora Clavijo, Doctor en Ciencias - Física

Abstract

Title: Accretion discs with magnetization around Kerr black holes *

Author: Oscar Mauricio Pimentel Díaz **

Keywords: Relativistic magneohydrodynamics (GRMHD), numerical methods, relativity, accretion discs, Kelvin-Helmholtz instability, black holes, magnetic susceptibility.

Description: The magnetohydrodynamic description of astrophysical systems usually assumes that magnetic fields are generated by conduction currents. Nevertheless, the magnetic polarization of matter could be relevant in some magnetically dominated regions such as accretion discs, pulsars, magnetars, among others. In this thesis we present for the first time the GRMHD system of equations with magnetic polarization and we compute its characteristic speeds structure. These results are implemented the CAFE code to simulate one-dimesional shocks and Kelvin-Helmholtz instabilities in diamagnetic and paramagnetic fluids. On the other hand, we present the first analytic solutions describing magnetically polarized accretion discs around a Kerr black hole, which are evolved with the *Cosmos++* computational code to obtain its accretion process. The theoretical and numerical study we have done in this work concerning the propagation of waves and the generation of instabilities in magnetically polarized plasmas shows that the fastest waves in diamagnetic fluids move with a higher speed than in paramagnetic ones. However, the initial state of paramagnetic plasmas is more susceptible to the formation of magneto-rotational and Kelvin-Helmholtz instabilities, and thence to the magnetic energy amplification. This effect produces magnetic turbulence that could explain the current discrepancy between simulations and observations of active galactic nuclei.

* PhD. Thesis

** Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Director: Guillermo Alfonso González Villegas, Doctor en Matematica Aplicada, Codirector: Fabio Duvan Lora Clavijo, Doctor en Ciencias - Física

Introducción

Los fuertes campos magnéticos y gravitacionales son fundamentales para dar una descripción adecuada de algunos sistemas que involucran objetos compactos. Por ejemplo, se cree que un fluido que está siendo acretado en un agujero negro es la principal fuente de energía en los núcleos activos de galaxias (AGN por sus siglas en inglés) o en los microcuasares (Frank et al., 2002). En estos sistemas se puede observar radio-jets altamente colimados que sugieren la existencia de fuertes campos magnéticos (Blandford and Znajek, 1977; Beckwith et al., 2008; De Villiers et al., 2005). Adicionalmente, la interacción entre los campos magnéticos y la rotación diferencial de los fluidos alrededor de objetos compactos producen turbulencia a partir de la inestabilidad magnetorrotacional (MRI) (Balbus and Hawley, 1991). Esta turbulencia actúa en el disco como una viscosidad efectiva que transporta momento angular y disipa energía. Tal mecanismo es fundamental para explicar cómo inicia el proceso de acreción y cómo se mantiene en el tiempo. Las primeras observaciones de las estructuras de dichos campos magnéticos cerca al horizonte de eventos se obtuvieron en (Johnson et al., 2015) al resolver la emisión linealmente polarizada de Sagitario A*. Estas mediciones interferométricas permitieron identificar campos magnéticos parcialmente ordenados que varían en el tiempo, convirtiéndose así en evidencia observacional de los modelos de acreción en objetos compactos y de generación de jets. Además de los escenarios de acreción, algunas teorías que intentan explicar el mecanismo central de las explosiones de rayos gamma (GRB's) incluyen pulsares de milisegundos altamente magnetizados cuyos campos magnéticos se estiman alrededor de los $\sim 10^{14}$ G (Zhang and Meszaros, 2001). La estructura de dichos campos en estos

fenómenos de altas energías, y en particular en los jets que se producen, se puede determinar a partir de la radiación emitida en los choques de corta duración que se propagan dentro del jet (Laskar et al., 2019). Estas observaciones aportan nuevamente evidencia clave sobre la existencia de campos magnéticos alrededor de objetos compactos como agujeros negros o estrellas de neutrones.

Ahora, como se menciona en (Font, 2008), algunos procesos astrofísicos que involucran la dinámica de un fluido alrededor de un objeto compacto se pueden modelar apropiadamente por medio de la GRMHD en la aproximación de fluido de prueba. En este contexto teórico, el campo gravitacional del fluido se considera muy pequeño en comparación con el del objeto compacto, y se asume que el material es un conductor perfecto (Anile, 2005). Sin embargo, debido a que la GRMHD se describe por un sistema de ecuaciones multidimensional, dependiente del tiempo y no lineal, es muy difícil encontrar soluciones analíticas (Gammie et al., 2003). Sin embargo, en la actualidad existen códigos numéricos que resuelven este sistema de ecuaciones con el fin de estudiar sistemas astrofísicos reales como los AGN, los jets extragalácticos, los discos de acreción alrededor de estrellas de neutrones, los GRB's, las nebulosas de pulsar, entre otros. Algunos ejemplos de estos códigos son *Athena++* (Stone et al., 2008), *BHAC* (Porth et al., 2017) el cual fué diseñado para evolucionar discos de acreción en agujeros negros, *Cosmos++* (Anninos et al., 2005), desarrollado para aplicaciones astrofísicas newtonianas y relativistas, *ECHO* (Del Zanna et al., 2007), *HARM* (Gammie et al., 2003), *CAFE* (Lora-Clavijo et al., 2015a), el cual se ha usado, entre otras aplicaciones, para estudiar la acreción de Bondi-Hoyle y el crecimiento de agujeros negros semilla debido a la acreción de materia oscura no colisional y de un fluido de radiación. En (Porth et al.,

2019) se compara la habilidad que tienen los diferentes códigos para estudiar la acreción en agujeros negros y se concluye que la consistencia de los resultados aumenta con la resolución.

Los distintos códigos que se encuentran en la literatura han demostrado su habilidad para estudiar sistemas astrofísicos. Por ejemplo, en (Gammie et al., 2003) se simula la acreción de un disco toroidal con un campo magnético poloidal. En este trabajo, los autores encontraron que la MRI incrementa la intensidad del campo magnético, distorsiona el disco y permite la acreción de la materia en el agujero negro. En (Siegel and Metzger, 2017) se realizan simulaciones 3D de los discos que resultan de la fusión de estrellas de neutrones, y se demuestra que en estos discos se emite más masa en rafagas de vientos que en las simulaciones con el parámetro de viscosidad α hidrodinámico. Este resultado sugiere que las emanaciones de masa en los discos, producidos como resultado de la fusión de estrellas de neutrones, son posibles escenarios para la nucleosíntesis de elementos pesados. Otros sistemas astrofísicos interesantes que se pueden describir con las ecuaciones de la GRMHD son los discos de acreción cuyo momento angular no está alineado con el eje de rotación del agujero negro, como es el caso del núcleo activo AGN NGC4258 (Caproni et al., 2007). Las primeras simulaciones numéricas de este tipo de sistemas presentan notorias diferencias con los discos de acreción alineados con el espín del agujero negro. En particular, la órbita circular estable más interna se localiza a un radio mayor que en los discos no inclinados. Además, los discos inclinados precesan uniformemente con una frecuencia que podría explicar las oscilaciones cuasi-periodicas observadas (Fragile et al., 2007).

Para realizar simulaciones de sistemas astrofísicos reales, tales como los discos de acreción, es necesario partir de una configuración que describa adecuadamente el estado inicial del sistema de interés. Por lo tanto, la mayoría las simulaciones que se presentan en la literatura parten de un modelo estacionario, el cual se evoluciona numéricamente en el tiempo para obtener los estados no lineales posteriores (Font, 2008; Abramowicz and Fragile, 2013). Entre los modelos analíticos, los discos gruesos (Abramowicz et al., 1978) son los más usados en simulaciones numéricas debido a su simplicidad y al bajo costo computacional que requieren (Abramowicz and Fragile, 2013). Los modelos consisten en un disco toroidal puramente hidrodinámico, estacionario y no autogravitante que orbita alrededor de un agujero negro de Kerr. A partir de estos discos también se puede estudiar el proceso de acreción en presencia de un campo magnético. Para esto, dicho campo se superpone a la solución hidrodinámica y se asume suficientemente débil de manera que no afecte el estado inicial de equilibrio (Porth et al., 2019).

Ahora bien, actualmente se cree que los jets relativistas son acelerados y auto colimados por un fuerte campo magnético mediante los mecanismos de Blandford-Znajek (Blandford and Znajek, 1977) o de Blandford-Payne (Blandford and Payne, 1982). Estos modelos han sido probados por medio de observaciones (Narayan and McClintock, 2012) y de simulaciones numéricas (Komissarov, 2005; McKinney, 2005; Lii et al., 2012). Con base en esta motivación, S. Komissarov generalizó en (Komissarov, 2006) los discos gruesos al obtener una solución analítica que incluía un fuerte campo magnético toroidal. Este aporte ha permitido estudiar algunos aspectos del proceso de acreción cuando la presión magnética es comparable con la presión del gas. Más específicamen-

te, los discos de Komissarov han sido útiles para mostrar que un campo magnético toroidal intenso no se puede mantener durante la evolución del disco (Fragile and Sadowski, 2017), o para determinar la relación entre la inestabilidad de Papaloizou-Pringle, que se genera en un disco grueso con momento angular constante, y la inestabilidad magnetorrotacional (Bugli et al., 2018), que surge de la interacción entre la rotación diferencial de un fluido y el campo magnético. Además, a partir de estos modelos también se han podido encontrar soluciones más realistas con una distribución de momento angular no constante (Gimeno-Soler and Font, 2017), o soluciones en las cuales el disco de acreción es autogravitante (Mach et al., 2019), lo cual requiere un tratamiento simultáneo de las ecuaciones de la MHD y las de Einstein. Este último caso es interesante, ya que los discos compactos se pueden formar a partir del colapso gravitacional de objetos supermasivos (Shibata and Shapiro, 2002), o en la fusión de estrellas de neutrones o de agujeros negros con estrellas de neutrones (Baiotti and Rezzolla, 2017).

A pesar de la importancia que tienen los campos magnéticos en el universo, y en particular en los GRB's y AGN's, donde son especialmente necesarios para explicar la radiación no térmica observada, aún existen muchos interrogantes sin resolver sobre el origen y la intensidad de dichos campos. Algunos mecanismos capaces de generar campos magnéticos son las inestabilidades en el plasma. Este es el caso de la KHI, la cual se produce cuando existe una velocidad relativa entre dos elementos de fluido (Chandrasekhar, 2013). En esta inestabilidad, la energía cinética se convierte en energía magnética gracias a la vorticidad del medio y a sus propiedades conductoras de la electricidad (Malagoli et al., 1996; Nishikawa et al., 2014). Debido a esto, se ha estudiado la

amplificación y saturación del campo magnético en simulaciones 3D de un fluido cuya turbulencia es provocada por la KHI (Zhang et al., 2009). Además, debido a que la KHI es un mecanismo viable para acelerar electrones relativistas y producir emisión sincrotrón (Ferrari et al., 1979), se ha utilizado para describir la interacción entre los jets relativistas y el medio que los rodea (Ferrari et al., 1981).

La KHI en magnetohidrodinámica (MHD KHI) se ha analizado ampliamente, tanto desde el punto de vista analítico, como desde el numérico. La aproximación analítica tiene como objetivo calcular la rapidez de crecimiento de una perturbación en la etapa inicial de la inestabilidad. Esto permite determinar bajo qué condiciones de densidad, velocidad de cizalla, campo magnético, etc, el sistema es inestable. El caso incompresible de la MHD KHI se presenta detalladamente en (Chandrasekhar, 2013), mientras que el caso compresible se presenta en (Pu and Kivelson, 1983). Los efectos relativistas fueron inicialmente introducidos por (Ferrari et al., 1980) en el límite de bajas velocidades de Alfvén. Sin embargo, este análisis se generalizó recientemente para cualquier velocidad de Alfvén (Osmanov et al., 2008) al redefinir el número de Mach para altas velocidades y al calcular la relación de dispersión en el marco de referencia de los fluidos. En todos estos trabajos se observa que los fluidos relativistas tienden a ser más estables que los de bajas velocidades, y que un campo magnético paralelo a la velocidad del fluido actúa como una tensión superficial, la cual evita que se genere la inestabilidad.

Por otro lado, las soluciones numéricas han sido de gran utilidad para obtener el régimen no

lineal de la inestabilidad, en donde se produce la amplificación y saturación del campo, los estados turbulentos, y el mezclado de fluidos. En (Miura, 1984) se realizan simulaciones en dos dimensiones para estudiar la MHD KHI en el régimen no relativista cuando el campo magnético es paralelo y cuando es perpendicular a la velocidad del flujo. Los autores encontraron que en los casos paralelos se puede amplificar la energía magnética debido a que las líneas de campo se enrollan y se comprimen en los vórtices característicos de la inestabilidad. Posteriormente, en (Malagoli et al., 1996) los autores extendieron el trabajo anterior en cuanto al espacio de parámetros y el tiempo de simulación, y encontraron que la amplificación del campo es en realidad un fenómeno transitorio que desaparece en el tiempo. Este resultado tiene sentido, ya que los procesos de dínamo no pueden operar en un espacio de dos dimensiones (Moffatt, 1978), por lo tanto, es necesario simulaciones 3D para explorar el efecto dínamo generado por la MHD KHI (Zhang et al., 2009). La evolución de la inestabilidad cuando los fluidos son relativistas fué obtenida por (Bucciantini and Del Zanna, 2006) con el fin de comparar las velocidades de crecimiento de la inestabilidad y su emisión sincrotrón con las características observadas en la Nebulosa de Cangrejo.

En todos los trabajos mencionados anteriormente, tanto analíticos como numéricos, se considera que el campo magnético es producido únicamente por el movimiento de cargas libres. Sin embargo, a nivel microscópico todas las sustancias contienen electrones que rotan alrededor de su propio eje y se mueven en órbitas alrededor del núcleo, formando así pequeños dipolos. Estos dipolos generan un campo magnético cuando hay un alineamiento promedio diferente de cero (polarización magnética), el cual se puede producir como respuesta a un campo externo, ya sea por

medio de torques magnéticos (paramagnetismo) o de momentos magnéticos inducidos (diamagnetismo) (?). Con el fin de estudiar la respuesta de un fluido a un campo magnético, es necesario incluir los términos de polarización magnética en el tensor de momento-energía. Un tensor con estas características se calculó en (Maugin, 1978) a partir de la fuerza invariante de Lorentz en un agregado de partículas. Los resultados de este trabajo se confirmaron en (Chatterjee et al., 2015), donde los autores obtuvieron un tensor equivalente partiendo de una densidad lagrangiana asociada a un sistema de fermiones en presencia de un campo magnético.

La polarización magnética en un fluido astrofísico ya se ha considerado para estudiar la estructura de equilibrio de estrellas de neutrones. Por ejemplo, en (Blandford and Hernquist, 1982) se calcula la susceptibilidad magnética de los electrones libres degenerados en la corteza de la estrella y se concluye que la magnetización no contribuye significativamente a las propiedades superficiales, pero puede estar acoplada indirectamente con algunos efectos observables. Por ejemplo, en (Wang et al., 2016) se afirma que las estrellas de neutrones pueden ser importantes para probar el efecto Haas-van Alphen, en el cual la susceptibilidad magnética oscila cuando se incrementa el campo magnético aplicado. Además, se cree que los repetidores de rayos gamma suaves y los pulsares anómalos de rayos X pueden ser evidencias observacionales de formación de dominios magnéticos en magnetares (Suh and Mathews, 2010). Sin embargo, hasta donde se sabe, en el marco de la GRMHD no se ha estudiado la evolución de un fluido de prueba magnéticamente polarizado en la vecindad de un objeto compacto.

Debido a la importancia que tienen los fenómenos magnéticos en los sistemas astrofísicos, y en especial en los AGN's y GRB's, es interesante explorar los efectos de la estructura microscópica de la materia, es decir, de la polarización magnética, en dichos sistemas. Por esta razón, el objetivo principal de esta tesis es presentar el marco teórico y numérico necesario para estudiar la evolución de un medio magnético en el campo gravitacional de un objeto compacto. En el capítulo 2 se presentan por primera vez las ecuaciones conservativas de la GRMHD ideal con polarización magnética. Además se calcula la estructura de valores propios asociada a estas ecuaciones, y se implementan en el código *CAFE*. Esta primera parte abre la posibilidad de estudiar la evolución de fluidos diamagnéticos y paramagnéticos en escenarios astrofísicos.

Como se mencionó anteriormente, el origen e intensidad de los campos magnéticos en los discos de acreción es todavía un problema abierto en astrofísica. Por esta razón, en el capítulo 3 se presenta un estudio de los efectos lineales y no lineales producidos por la susceptibilidad magnética en el desarrollo de la MHD KHI en un plasma relativista, con especial énfasis en la rapidez de crecimiento de la inestabilidad y en la amplificación de la energía magnética. El análisis de esta inestabilidad se realizó en el código *CAFE*, el cual incluye los términos de susceptibilidad magnética del fluido. En el capítulo 4 se generalizan los modelos de Komissarov para calcular la primera solución analítica de un disco magnéticamente polarizado alrededor de un agujero negro de Kerr. Estas soluciones se usan al final del capítulo como dato inicial en el código *Cosmos++* para estudiar el proceso de acreción de fluidos paramagnéticos y diamagnéticos en agujeros negros rotantes. Por último, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo.

1. MHD Numérica en Relatividad General con Magnetización

La GRMHD estudia la interacción entre un fluido relativista conductor (gas o líquido) y un campo magnético. Más específicamente, se encarga de describir el movimiento de los electrones cuando hay un campo magnético aplicado, teniendo en cuenta los desplazamientos de masa, e ignorando los efectos de separación de cargas (iones y electrones). La MHD se construye asumiendo que el tiempo en el que cambian los campos es muy grande en comparación con el tiempo de recorrido libre medio de los electrones. De esta manera, la compleja dinámica del fluido se describe por medio de las ecuaciones de la hidrodinámica acopladas con las ecuaciones de Maxwell. Este sistema de ecuaciones sólo tiene solución analítica para casos muy particulares (Giacomazzo and Rezzolla, 2006), y por lo tanto muy poco realistas, de manera que para describir sistemas astrofísicos es necesario resolver las ecuaciones numéricamente.

Ahora bien, debido a que hasta el momento no se ha estudiado la polarización magnética en el marco de la GRMHD, es útil comenzar escribiendo el sistema de ecuaciones en su forma conservativa por medio del formalismo $3 + 1$ de la relatividad general (Misner et al., 2017). Esto permite la aplicación de métodos numéricos adecuados para estudiar la propagación de ondas en los fluidos. Posteriormente, se obtienen las diferentes velocidades de propagación de las ondas en el medio en términos de la polarización magnética y finalmente, los resultados se implementan en el código *CAFE* con el fin de llevar a cabo aplicaciones a sistemas astrofísicos.

1.1. Ecuaciones de la GRMHD con polarización magnética como un sistema conservativo

La evolución de un fluido de prueba magnéticamente polarizado que se mueve alrededor de un campo gravitacional intenso y un campo magnético, se obtiene al resolver la ecuación de conservación del número bariónico (Anile, 2005),

$$\nabla_\mu (\rho u^\mu) = 0, \quad (1)$$

las ecuaciones de conservación del momento y la energía,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2)$$

y las ecuaciones de Maxwell homogéneas,

$$\nabla_{[\kappa} F_{\mu\nu]} = 0. \quad (3)$$

En este sistema acoplado de ecuaciones, ∇_μ es la derivada covariante, ρ es la densidad de masa en reposo medida por un observador comovil, es decir, que se mueve con el fluido, u^μ es la cuadrivelocidad, $T^{\mu\nu}$ es el tensor de momento-energía y $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Faraday. Este último está definido en términos del campo eléctrico e^μ y el campo magnético b^μ , medidos en el marco comovil, como

$$F^{\mu\nu} = u^\mu e^\nu - u^\nu e^\mu + \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} b_\alpha u_\beta, \quad (4)$$

donde $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita (Synge, 1960)

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \eta^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (5)$$

siendo $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}$ el tensor de Levi-Civita, y g el determinante del tensor métrico, $g_{\mu\nu}$.

Ahora bien, usualmente los fluidos astrofísicos (plasmas) son fuertemente ionizados (Pringle and King, 2007), y por lo tanto presentan una alta conductividad eléctrica, σ . Algunos ejemplos de estos fluidos son los discos de acreción alrededor de agujeros negros, los jets extragalácticos, las estrellas de neutrones, entre otros (Anile, 2005). Debido a esta propiedad, en muchos casos es posible asumir que el material es un conductor perfecto, es decir que $\sigma \rightarrow \infty$. Sin embargo, de acuerdo con la ley de Ohm, $j^\mu = \sigma e^\mu$, la aproximación de fluido perfecto implica que $e^\mu = 0$, de manera que j^μ sea finita. De esta manera, el tensor de Faraday (4) se reduce a

$$F^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} b_\alpha u_\beta. \quad (6)$$

Al remplazar esta última expresión en la ecuación (3), y multiplicar la ecuación resultante por $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}$ se obtiene

$$\nabla_\mu (u^\mu b^\nu - b^\mu u^\nu) = 0, \quad (7)$$

las cuales se conocen como las ecuaciones de Maxwell relevantes. Es importante mencionar que la ley de Ampère se usa únicamente para calcular la densidad de corrientes a partir del campo magnético y por lo tanto no representa una ecuación de evolución.

Para terminar de establecer las ecuaciones de la GRMHD ideal es necesario definir el tensor de momento-energía del fluido magnéticamente polarizado, el cual se puede escribir como la superposición

$$T^{\mu\nu} = T_f^{\mu\nu} + T_{em}^{\mu\nu}, \quad (8)$$

donde $T_f^{\mu\nu}$ y $T_{em}^{\mu\nu}$ son los tensores de momento-energía del fluido y del campo electromagnético, respectivamente. Con el fin de dar una primera aproximación a la descripción del fluido, se siguen los trabajos (Huang et al., 2010; Chatterjee et al., 2015), donde se considera que la presión termodinámica es isótropa y que el flujo de calor es cero. Es importante aclarar que cuando el fluido tiene polarización magnética o magnetización diferente de cero, la presión termodinámica total es la suma de la presión cinética y de una contribución adicional debido a la densidad de fuerza de Lorentz, la cual está relacionada con las corrientes de magnetización (Potekhin and Yakovlev, 2012). Por consiguiente, la presión cinética es anisótropa en un medio polarizado, pero la presión termodinámica total, que denotaremos como p , es isótropa. Con estas consideraciones es posible asumir el material como un fluido perfecto, cuyo tensor de momento-energía

$$T_f^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (9)$$

es ampliamente usado en el área de la astrofísica relativista. En esta última expresión, $h = (e + p)/\rho$ es la entalpía específica y e es la densidad de energía en el marco comovil. Por otro lado, la energía y el momento asociados con el campo electromagnético y su interacción con la materia se pueden

describir por medio del tensor (Maugin, 1978; Huang et al., 2010; Chatterjee et al., 2015)

$$T_{em}^{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) + \frac{1}{2} (F_{\alpha}^{\nu} M^{\alpha\mu} + F_{\alpha}^{\mu} M^{\alpha\nu}), \quad (10)$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacio y $M^{\mu\nu}$ es el tensor de magnetización, el cual incluye los términos de polarización magnética y eléctrica. Sin embargo, en la aproximación de la MHD ideal este tensor toma la forma

$$M^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} m_{\alpha} u_{\beta}, \quad (11)$$

siendo m^{μ} el cuadri-vector de polarización magnética en el marco comovil. Ahora, remplazando (6) y (11) en (10) se obtiene

$$T_{em}^{\mu\nu} = \left(u^{\mu} u^{\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \right) \frac{b^2}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_0} b^{\mu} b^{\nu} - (u^{\mu} u^{\nu} + g^{\mu\nu}) b^{\kappa} m_{\kappa} + m^{(\mu} b^{\nu)}, \quad (12)$$

donde $m^{(\mu} b^{\nu)} = (m^{\mu} b^{\nu} + m^{\nu} b^{\mu})/2$ y $b^2 = b^{\kappa} b_{\kappa}$. Con estas dos contribuciones, el tensor de momento-energía total se puede escribir en forma compacta como,

$$T^{\mu\nu} = \rho h^* u^{\mu} u^{\nu} + p^* g^{\mu\nu} - \Pi^{\mu\nu}, \quad (13)$$

con,

$$\rho h^* = \rho h + \frac{b^2}{\mu_0} - b^\kappa m_\kappa, \quad (14)$$

$$p^* = p + \frac{b^2}{2\mu_0} + b^\kappa m_\kappa, \quad (15)$$

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} b^\mu b^\nu - m^{(\mu} b^{\nu)}. \quad (16)$$

Escribir el tensor de momento-energía en la forma compacta (13) no sólo es físicamente más intuitivo, sino que ayuda a simplificar el sistema de ecuaciones. Además, cuando se considera que el fluido es autogravitante, el tensor en la forma (13) permite calcular de manera directa las condiciones de energía de la relatividad general que garantizan que la fuente del campo gravitacional tenga un comportamiento físicamente adecuado. Estas condiciones se calculan en (Pimentel et al., 2016) para un fluido autogravitante con un tensor $T^{\mu\nu}$ general y en (Pimentel et al., 2017) para un fluido con radiación.

Una vez definido el tensor de momento-energía, el siguiente paso es escribir las ecuaciones (1), (2) y (7) como un sistema conservativo. En este tipo de sistemas las derivadas temporales están separadas de las espaciales, de manera que es posible aplicar métodos numéricos para calcular la evolución de un sistema a partir de su estado inicial. Para lograr este objetivo se sigue la *formulación de Valencia*, escribiendo las ecuaciones en términos de las mismas variables de estado (Banyuls et al., 1997; Antón et al., 2006b), de tal manera que se pueda extender dicha formulación para el caso de fluidos con polarización magnética. En este proceso se usa el formalismo 3+1 de la relatividad general (Gourgoulhon, 2012), en el cual el espacio-tiempo se separa en hipersuperficies

tipo espacio de t constante, Σ_t . Estas hipersuperficies tienen un vector normal tipo tiempo n^μ , de manera que $n^\kappa n_\kappa = -1$, y un conjunto de vectores tangentes tipo espacio $\mathbf{e}_{(i)}^\mu$, con los cuales se define la métrica inducida en la hipersuperficie $\gamma_{ij} = g_{\mu\nu} \mathbf{e}_{(i)}^\mu \mathbf{e}_{(j)}^\nu$. Ahora, al escoger tres coordenadas espaciales, x^i , sobre Σ_t , es posible usar la transformación de coordenadas $x^\mu = x^\mu(t, x^i)$ para escribir el elemento de línea como (Poisson, 2004)

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (17)$$

de manera que el tensor métrico y su inversa toman la forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta^i \beta_i & \beta_i \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta_i/\alpha^2 \\ \beta_i/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

donde α es la función lapso y β^i es el vector de desplazamiento.

Ademas del observador comovil, también es conveniente introducir el observador euleriano, cuya quadri-velocidad es $n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0)$, y por lo tanto se mueve perpendicular a las hipersuperficies. La velocidad espacial del fluido, v^i , medida desde este observador, es tangente a Σ_t y se relaciona con la parte espacial de la velocidad del fluido en el marco comovil por medio de la ecuación

$$v^i = \frac{u^i}{W} + \frac{\beta^i}{\alpha}, \quad (19)$$

donde $W = -u^\mu n_\mu = \alpha u^0$ es el factor de Lorentz entre los observadores euleriano y comovil.

Adicionalmente, b^μ y m^μ también se pueden calcular a partir de las ecuaciones (Baumgarte and Shapiro, 2010)

$$b^i = \frac{B^i + \alpha b^0 u^i}{W}, \quad b^0 = \frac{W}{\alpha} B^i v_i, \quad (20)$$

$$m^i = \frac{M^i + \alpha m^0 u^i}{W}, \quad m^0 = \frac{W}{\alpha} M^i v_i, \quad (21)$$

donde B^μ y M^μ son el campo magnético y el vector de polarización magnética en el marco euleriano, respectivamente.

Ahora, la ecuación (1), que describe la conservación del número bariónico, se puede reescribir como

$$\partial_t(\sqrt{\gamma}D) + \partial_i \left[\alpha \sqrt{\gamma} D \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \right] = 0, \quad (22)$$

donde $D = \rho W$ es la densidad de masa en reposo medida en el marco euleriano. Esta última ecuación se obtiene al remplazar las derivadas covariantes por derivadas parciales mediante la formula de la divergencia (Poisson, 2004),

$$\nabla_\kappa A^\kappa = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\kappa (\alpha \sqrt{\gamma} A^\kappa), \quad (23)$$

siendo A^κ cualquier campo vectorial. Por otro lado, cuando se contrae (2) con el vector normal n^μ , se obtiene la ecuación de conservación de la energía en el marco euleriano

$$-\partial_t (\alpha^2 \sqrt{\gamma} T^{tt}) - \partial_i (\alpha^2 \sqrt{\gamma} T^{ti}) = \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \nabla_\mu n_\nu. \quad (24)$$

Sin embargo, a partir del tensor de momento-energía (13) y de las ecuaciones de transformación (20) y (21) se pueden calcular las componentes T^{tt} y T^{ti} , de manera que la ecuación anterior se convierte en

$$\begin{aligned} \partial_t (\sqrt{\gamma} \tau) + \partial_i \left\{ \alpha \sqrt{\gamma} \left[\tau \tilde{v}^i + v^i p^* - \frac{\alpha}{\mu_0 W} b^t B^i + \frac{\alpha}{2W} (m^t B^i + b^t M^i) \right] \right\} \\ = \alpha \sqrt{\gamma} \left(T^{\mu t} \partial_\mu \alpha - \alpha T^{\mu \nu} \Gamma_{\mu \nu}^t \right), \end{aligned} \quad (25)$$

donde $\tilde{v}^i = v^i - \beta^i / \alpha$ y

$$\tau = \rho h^* W^2 - p^* - \frac{\alpha^2}{\mu_0} (b^t)^2 + \alpha^2 m^t b^t - D, \quad (26)$$

es la densidad de energía medida en el marco euleriano (menos D). Adicionalmente, al proyectar (2) sobre la hipersuperficie Σ_t , es decir, al contraerla con los vectores espaciales del observador euleriano $e_{(i)\mu}$ se obtiene la ecuación de conservación del flujo de energía

$$\partial_t [\alpha \sqrt{\gamma} (T^{tt} \beta_i + T^{jt} \gamma_{ij})] + \partial_k [\alpha \sqrt{\gamma} (T^{tk} \beta_i + T^{jk} \gamma_{ij})] = \alpha \sqrt{\gamma} T^{\mu \nu} \nabla_\nu e_{(i)\mu}. \quad (27)$$

Nuevamente, las componentes del tensor de momento-energía se obtienen de la ecuación (13).

Además, con las transformaciones (20) y (21), la ecuación anterior toma la forma

$$\begin{aligned} \partial_t (\sqrt{\gamma} S_j) + \partial_i \left\{ \alpha \sqrt{\gamma} \left[S_j \tilde{v}^i + p^* \delta_j^i - \frac{b_j B^i}{\mu_0 W} + \frac{1}{2W} (m_j B^i + b_j M^i) \right] \right\} \\ = \sqrt{-g} T^{\mu \nu} (\partial_\mu g_{j\beta} - g_{j\kappa} \Gamma_{\mu \nu}^\kappa), \end{aligned} \quad (28)$$

donde

$$S_j = \rho h^* W^2 v_j - \frac{\alpha}{\mu_0} b_j b^t + \frac{\alpha}{2} (m^t b_j + b^t m_j), \quad (29)$$

es el vector flujo de energía en el marco euleriano. Por último, las ecuaciones de Maxwell relevantes que se presentan en (7) se pueden reescribir como

$$\partial_t (\sqrt{\gamma} B^k) + \partial_i \left[\sqrt{-g} (\tilde{v}^i B^k - \tilde{v}^k B^i) \right], \quad (30)$$

ya que para cualquier tensor antisimétrico, $A^{\mu\nu}$, se cumple la propiedad

$$\nabla_\nu A^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\alpha \sqrt{\gamma} A^{\mu\nu}). \quad (31)$$

El campo magnético, además de evolucionar en el tiempo según la ecuación (7), también debe satisfacer la ecuación de ligadura

$$\partial_i (\sqrt{\gamma} B^i) = 0, \quad (32)$$

la cual garantiza la ausencia de monopolos magnéticos.

En resumen, las ecuaciones de la GRMHD para un fluido de prueba magnéticamente polarizado se pueden escribir como un sistema conservativo de la forma (Pimentel et al., 2018)

$$\partial_t (\sqrt{\gamma} \vec{U}) + \partial_i (\sqrt{-g} \vec{F}^i) = \sqrt{-g} \vec{S}, \quad (33)$$

donde $\vec{U}$ es el vector de estado en el marco de referencia euleriano

$$\vec{U} = [D, S_j, \tau, B^k]^T, \quad (34)$$

$\vec{F}^i$ son los flujos en cada dirección espacial,

$$\vec{F}^i = \begin{bmatrix} D\tilde{v}^i \\ S_j\tilde{v}^i + p^*\delta_j^i - \frac{b_j B^i}{\mu_0 W} + \frac{1}{2W}(m_j B^i + b_j M^i) \\ \tau\tilde{v}^i + p^*v^i - \frac{\alpha}{\mu_0 W}b^0 B^i + \frac{\alpha}{2W}(m^0 B^i + b^0 M^i) \\ \tilde{v}^i B^k - \tilde{v}^k B^i \end{bmatrix}, \quad (35)$$

y $\vec{S}$ es el vector de fuentes,

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ T^{\mu\nu}(\partial_\mu g_{j\nu} - g_{j\delta}\Gamma_{\mu\nu}^\delta) \\ T^{\mu 0}\partial_\mu \alpha - \alpha T^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^0 \\ 0^k \end{bmatrix}, \quad (36)$$

en el cual se incluyen todos los términos que no contienen derivadas de las variables de estado.

Las ecuaciones (33) se convierten en un sistema cerrado, una vez se introduce la ecuación de

estado, $p = p(\rho, e)$, y la relación constitutiva entre el vector de polarización magnética y el campo

magnético, $m^\mu = m^\mu(b^\nu)$.

En la mayoría de las sustancias el vector de polarización magnética es proporcional al campo magnético aplicado. Por esta razón, a partir de ahora se asume una relación constitutiva lineal de la forma

$$m^\mu = \frac{\chi}{\mu_0} b^\mu, \quad (37)$$

donde $\chi = \chi_m/(1 + \chi_m)$, y χ_m es la susceptibilidad magnética del medio. Este último parámetro físico es negativo en materiales diamagnéticos ($\chi_m < 0$) y positivo en paramagnéticos ($\chi_m > 0$). El fenómeno del diamagnetismo se debe principalmente al movimiento orbital de los electrones alrededor del núcleo, más específicamente, a la interacción entre el campo magnético y los momentos magnéticos orbitales. Por otra parte, el paramagnetismo se produce debido a torques magnéticos en sustancias cuyos átomos tienen un momento dipolar de espín diferente de cero, es decir, en átomos con un número impar de electrones (Lorrain and Corson, 1970).

Asumiendo la relación constitutiva (37), es posible escribir el tensor de momento-energía como

$$T^{\mu\nu} = \rho h^* u^\mu u^\nu + p^* \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{\mu_0} (1 - \chi) b^\mu b^\nu, \quad (38)$$

donde

$$h^* = h + \frac{1}{\mu_0 \rho} b^2 (1 - \chi), \quad p^* = p + \frac{1}{2\mu_0} b^2 (1 - 2\chi). \quad (39)$$

Además, las componentes del vector de estado (34) en términos de la susceptibilidad magnética

del fluido, toman la forma

$$D = \rho W, \quad (40)$$

$$S_j = \rho h^* W^2 v_j - \frac{\alpha}{\mu_0} b_j b^t (1 - \chi), \quad (41)$$

$$\tau = \rho h^* W^2 - p^* - \frac{\alpha^2}{\mu_0} (b^t)^2 (1 - \chi) - D. \quad (42)$$

De manera similar, el vector de flujo (35) se reduce a,

$$\vec{F}^i = \begin{bmatrix} D \tilde{v}^i \\ S_j \tilde{v}^i + p^* \delta_j^i - \frac{b_j B^i}{\mu_0 W} (1 - \chi) \\ \tau \tilde{v}^i + p^* v^i - \frac{\alpha}{\mu_0 W} b^0 B^i (1 - \chi) \\ \tilde{v}^i B^k - \tilde{v}^k B^i \end{bmatrix}, \quad (43)$$

para un medio lineal en el que se cumple la relación (37).

1.2. Estructura de valores propios de la GRMHD con polarización magnética

Debido a que el sistema de ecuaciones (33) es no lineal, dependiente del tiempo y multidimensional, no es posible obtener una solución analítica general para el vector de estado $\vec{U}$. Además, la complejidad de estas ecuaciones hace difícil el tratamiento puramente analítico de sistemas astrofísicos reales. Por esta razón, es necesario resolver este sistema de ecuaciones numéricamente. Algunos métodos diseñados para resolver ecuaciones tipo conservación se basan en la estructura

de valores propios, es decir, en las velocidades con que se propagan las perturbaciones en el fluido. Por lo tanto, con el objetivo de calcular los valores propios de (33), se sigue un procedimiento similar al descrito por Anile en (Anile, 2005). El punto de partida de este procedimiento es escribir las ecuaciones (1), (2) y (7) en la forma covariante

$$A_{\mathcal{P}}^{\mu\mathcal{K}} \nabla_{\mu} V^{\mathcal{P}} = 0, \quad (44)$$

donde $\mathcal{P}, \mathcal{K} = 1, 2, \dots, N$, siendo N el número de variables de estado, $A_{\mathcal{P}}^{\mu\mathcal{K}}$ son matrices de coeficientes y $V^{\mathcal{P}}$ es el vector de estado en el marco comovil.

Para escribir las ecuaciones en la forma covariante (44), se proyectan las ecuaciones de Maxwell relevantes (7) a lo largo de u_{ν} y b_{ν} para así obtener

$$\nabla_{\mu} b^{\mu} + u^{\mu} u^{\nu} \nabla_{\mu} b_{\nu} = 0, \quad (45)$$

$$b^2 \nabla_{\mu} u^{\mu} + \frac{1}{2} u^{\mu} \nabla_{\mu} (b^2) - b^{\mu} b^{\nu} \nabla_{\mu} u_{\nu} = 0, \quad (46)$$

respectivamente. Por otro lado, para obtener la ecuación de conservación de la energía se proyecta (2) a lo largo de u_{ν} de manera que,

$$(\nabla_{\mu} T^{\mu\nu}) u_{\nu} = \nabla_{\mu} (T^{\mu\nu} u_{\nu}) - T^{\mu\nu} \nabla_{\mu} u_{\nu} = 0. \quad (47)$$

Debido a que es necesario escribir la ecuación anterior en términos de derivadas de las variables de estado, se usa el tensor de momento-energía (13), las propiedades $b^{\nu} u_{\nu} = 0$ y $u^{\mu} u_{\mu} = -1$, y

además, la ecuación (46) para escribir (47) como

$$u^\mu \nabla_\mu e + (e + p - b^\kappa m_\kappa) \nabla_\mu u^\mu + m^{(\mu} b^{\nu)} \nabla_\mu u_\nu = 0. \quad (48)$$

Sin embargo, a partir de una ecuación de estado $e = e(p, s)$, donde s es la entropía específica, es posible reescribir el primer término en la ecuación anterior, de manera que la conservación de la energía toma finalmente forma,

$$e'_p u^\mu \nabla_\mu p + e'_s u^\mu \nabla_\mu s + K \nabla_\mu u^\mu + m^{(\mu} b^{\nu)} \nabla_\mu u_\nu = 0, \quad (49)$$

donde $K = e + p - b^\kappa m_\kappa$, $e'_p = \partial e / \partial p$ y $e'_s = \partial e / \partial s$.

La segunda ecuación en el método usado por Anile describe la producción de entropía. Esta ecuación se calcula a partir de la primera ley de la termodinámica para un material magnéticamente polarizado (Groot and Suttrop, 1972)

$$T u^\mu \nabla_\mu s = u^\mu \nabla_\mu \varepsilon - \frac{p}{\rho^2} u^\mu \nabla_\mu \rho + \frac{1}{\rho} m_\kappa u^\mu \nabla_\mu b^\kappa, \quad (50)$$

siendo T la temperatura y ε la energía interna. Ahora, sabiendo que $e = \rho(1 + \varepsilon)$, es posible escribir la ecuación anterior en términos de la presión, p , y la densidad de energía, e ,

$$T u^\mu \nabla_\mu s = \frac{1}{\rho} u^\mu \nabla_\mu e - \frac{e}{\rho^2} u^\mu \nabla_\mu \rho - \frac{p}{\rho^2} u^\mu \nabla_\mu \rho + \frac{1}{\rho} m_\kappa u^\mu \nabla_\mu b^\kappa. \quad (51)$$

Finalmente, a partir de la conservación del número bariónico (1) y de la ecuación (48) se obtiene

$$\rho T u^\mu \nabla_\mu s = b^\kappa m_\kappa \nabla_\mu u^\mu + u^\mu m_\kappa \nabla_\mu b^\kappa - m^{(\mu} b^{\nu)} \nabla_\mu u_\nu, \quad (52)$$

donde se observa que cuando la polarización magnética del fluido es cero ($m^\mu = 0$), o cuando se cumple la relación constitutiva (37) para un medio lineal, se satisface la condición de adiabaticidad, es decir, $u^\mu \nabla_\mu s = 0$. Con un vector de magnetización general no se satisface esta condición.

Otra ecuación importante en el método de Anile es la conservación del momento, la cual se puede obtener al proyectar (2) sobre la hipersuperficie, Σ_t , por medio del tensor de proyección $h_{\nu\kappa} = g_{\nu\kappa} + u_\nu u_\kappa$, de manera que

$$\nabla_\mu (g_{\nu\sigma} T^{\mu\nu}) + u_\sigma (u_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu}) = 0. \quad (53)$$

El segundo término de la expresión anterior corresponde a la ecuación de conservación de la energía y por lo tanto es igual a cero. A partir del tensor de momento-energía (13), y multiplicando

(53) por $g^{\sigma\kappa}$ se llega a la expresión

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu (g^{\sigma\kappa} g_{\nu\sigma} T^{\mu\nu}) = & \left(\nabla_\mu e + \nabla_\mu p + \frac{1}{\mu_0} \nabla_\mu b^2 - b^\tau \nabla_\mu m_\tau - m_\tau \nabla_\mu b^\tau \right) u^\mu u^\kappa \\
& + \left(e + p + \frac{b^2}{\mu_0} - b^\tau m_\tau \right) (u^\mu \nabla_\mu u^\kappa + u^\kappa \nabla_\mu u^\mu) \\
& + \left(\nabla_\mu p + \frac{1}{2\mu_0} \nabla_\mu b^2 - b^\tau \nabla_\mu m_\tau - m_\tau \nabla_\mu b^\tau \right) g^{\mu\kappa} \\
& - \frac{1}{\mu_0} b^\mu \nabla_\mu b^\kappa - \frac{1}{\mu_0} b^\kappa \nabla_\mu b^\mu + \frac{1}{2} m^\mu \nabla_\mu b^\kappa + \frac{1}{2} b^\kappa \nabla_\mu m^\mu \\
& + \frac{1}{2} m^\kappa \nabla_\mu b^\mu + \frac{1}{2} b^\mu \nabla_\mu m^\kappa.
\end{aligned} \tag{54}$$

Ahora bien, de la ecuación de conservación de la energía (49) se despeja $\nabla_\mu u^\mu$ y se remplace en el resultado anterior. Adicionalmente, se despeja $\nabla_\mu b^\mu$ de la expresión que resulta de calcular $b_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu}$ y también se remplace en (54). Por último, se agrupan las derivadas, sabiendo que $\nabla_\mu e = e'_p \nabla_\mu p + e'_s \nabla_\mu s$, para obtener como resultado la ecuación de conservación del momento

$$\mathcal{A}^{\kappa\mu} \nabla_\mu p + \mathcal{B}^{\kappa\mu}_\nu \nabla_\mu b^\nu + \mathcal{C}^{\kappa\mu}_\nu \nabla_\mu u^\nu + \mathcal{D}^{\kappa\mu}_\nu \nabla_\mu m^\nu + \mathcal{E}^{\kappa\mu} \nabla_\mu s = 0, \tag{55}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{\kappa\mu} &= h^{\kappa\mu} - \frac{b^2}{\mu_0} K^{-1} e'_p u^\kappa u^\mu - \zeta \eta^\kappa b^\mu, \\
\mathcal{B}^{\kappa\mu}_v &= \frac{1}{\mu_0} (h^{\kappa\mu} + u^\kappa u^\mu) b_v + \zeta \eta^\kappa \left(b^\mu m_v - \frac{1}{2} m^\mu b_v \right) - h^{\kappa\mu} m_v + \eta^\mu \delta_v^\kappa, \\
\mathcal{C}^{\kappa\mu}_v &= \left(K + \frac{b^2}{\mu_0} \right) [u^\mu \delta_v^\kappa - K^{-1} u^\kappa m^{(\mu} b^{\gamma)} g_{\gamma v}], \\
\mathcal{D}^{\kappa\mu}_v &= \frac{1}{2} \zeta \eta^\kappa b^\mu b_v - h^{\kappa\mu} b_v - \frac{b^2}{2} \zeta \eta^\kappa \delta_v^\mu + \frac{1}{2} b^\kappa \delta_v^\mu + \frac{1}{2} b^\mu \delta_v^\kappa, \\
\mathcal{E}^{\kappa\mu} &= -\frac{b^2}{\mu_0} K^{-1} e'_s u^\kappa u^\mu,
\end{aligned}$$

con $\zeta = (K + \frac{1}{2} b^\sigma m_\sigma)^{-1}$ y $\eta^\mu = \frac{1}{2} m^\mu - \frac{1}{\mu_0} b^\mu$.

La última ecuación se obtiene al expandir todos los términos de las ecuaciones de Maxwell relevantes (7), de manera que

$$u^\mu \nabla_\mu b^\nu + b^\nu \nabla_\mu u^\mu - b^\mu \nabla_\mu u^\nu - u^\nu \nabla_\mu b^\mu = 0. \quad (56)$$

A partir de esta ecuación se sigue un procedimiento muy similar al que se usó para calcular la conservación del momento (55). Así, obtenemos las ecuaciones de Maxwell relevantes con polarización magnética en la versión de Anile

$$\mathcal{F}^{\kappa\mu} \nabla_\mu p + \mathcal{G}^{\kappa\mu}_v \nabla_\mu b^\nu + \mathcal{H}^{\kappa\mu}_v \nabla_\mu u^\nu + \mathcal{I}^{\kappa\mu}_v \nabla_\mu m^\nu + \mathcal{J}^{\kappa\mu} \nabla_\mu s = 0, \quad (57)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{\kappa\mu} &= \zeta b^\mu u^\kappa - K^{-1} e'_p u^\mu b^\kappa, \\ \mathcal{G}_\nu^{\kappa\mu} &= u^\mu \delta_\nu^\kappa - u^\kappa \zeta \left(b^\mu m_\nu - \frac{1}{2} m^\mu b_\nu \right), \\ \mathcal{H}_\nu^{\kappa\mu} &= -b^\mu \delta_\nu^\kappa - K^{-1} g_{\sigma\nu} m^{(\mu} b^{\sigma)} b^\kappa,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\nu^{\kappa\mu} &= \frac{1}{2} (b^2 \delta_\nu^\mu u^\kappa - b^\mu u^\kappa b_\nu) \zeta, \\ \mathcal{J}^{\kappa\mu} &= -K^{-1} e'_s b^\kappa u^\mu.\end{aligned}$$

En el caso particular cuando la polarización magnética es cero, es decir, cuando $m^\mu = 0$, las ecuaciones (49), (52), (55) y (57) se reducen a las ecuaciones de Anile (Anile, 2005), las cuales corresponden a la GRMHD usual. Este resultado es importante ya que indica que las ecuaciones que se presentan en este trabajo pueden reproducir todos los resultados previos en los cuales los fluidos no están polarizados. Es decir, son una generalización de la GRMHD que incluye la interacción entre el campo magnetico y la estructura dipolar del fluido.

Por otro lado, asumiendo que el fluido es un medio magnético lineal en el cual se satisface la relación (37), es posible escribir las ecuaciones de esta sección en términos de la susceptibilidad magnética, la cual es una cantidad conocida. De esta manera, las ecuaciones obtenidas en esta

sección se pueden organizar en la forma matricial (44), donde $V^{\mathcal{P}} = (u^\mu, b^\mu, p, s)^T$ y

$$A^\mu = \begin{bmatrix} [\eta + (1 - \chi)b^2]u^\mu \delta_v^\kappa & \tilde{P}^{\kappa\mu} b_v - (1 - \chi)b^\mu \delta_v^\kappa & \tilde{I}^{\kappa\mu} & 0^{\kappa\mu} \\ b^\mu \delta_v^\kappa & -u^\mu \delta_v^\kappa + 2\chi\eta^{-1}b_v u^{(\kappa} b^{\mu)} & f^{\mu\kappa} & 0^{\kappa\mu} \\ \eta\delta_v^\mu + \chi\tilde{\gamma}_v^\mu & 0_v^\mu & e'_p u^\mu & 0^\mu \\ 0_v^\mu & 0_v^\mu & 0^\mu & u^\mu \end{bmatrix}. \quad (58)$$

En esta última ecuación se han introducido las funciones $\eta = \rho h = e + p$, $\tilde{\gamma}_v^\mu = b^\mu b_v - b^2 \delta_v^\mu$,

$$\begin{aligned} \tilde{P}^{\kappa\mu} &= (1 - 2\chi)h^{\kappa\mu} - \chi(1 - \chi)\eta^{-1}b^\kappa b^\mu \\ &\quad + (1 - \chi)(\eta - \chi b^2)\eta^{-1}u^\kappa u^\mu, \end{aligned} \quad (59)$$

$$\tilde{I}^{\kappa\mu} = h^{\kappa\mu} + \eta^{-1}(1 - \chi)(b^\kappa b^\mu - e'_p b^2 u^\kappa u^\mu), \quad (60)$$

$$f^{\mu\kappa} = -\eta^{-1}(-e'_p u^\mu u^\kappa + u^\kappa b^\mu), \quad (61)$$

con el objetivo de reducir las expresiones.

Para calcular la estructura característica del sistema de ecuaciones (44) se introduce la hipersuperficie $\phi(x^\nu) = 0$ cuyo vector normal es $\phi_\mu = \nabla_\mu \phi$. Dicha hipersuperficie es característica

si $\det(A^\mu \phi_\mu) = 0$. Por lo tanto, contrayendo A^μ con el vector ϕ_μ se obtiene

$$A^\mu \phi_\mu = \begin{bmatrix} [\eta + (1 - \chi)b^2]a\delta_v^\kappa & m_v^\kappa & \tilde{1}^\kappa & 0^\kappa \\ \tilde{B}\delta_v^\kappa & -a\delta_v^\kappa + \chi\eta^{-1}b_v(\tilde{B}u^\kappa + ab^\kappa) & f^\kappa & 0^\kappa \\ \eta\phi_v + \chi(\tilde{B}b_v - b^2\phi_v) & 0_v & ae'_p & 0 \\ 0_v & 0_v & 0 & a \end{bmatrix}, \quad (62)$$

donde $a = u^\mu \phi_\mu$, $\tilde{B} = b^\mu \phi_\mu$, y

$$m_v^\kappa = \tilde{P}^{\kappa\mu} \phi_\mu b_v - (1 - \chi)\tilde{B}\delta_v^\kappa, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \tilde{1}^\kappa &= \tilde{1}^{\kappa\mu} \phi_\mu, \\ &= \phi^\kappa + au^\kappa + \eta^{-1}(1 - \chi)(\tilde{B}b^\kappa - e'_p b^2 au^\kappa), \end{aligned} \quad (64)$$

$$f^\kappa = f^{\kappa\mu} \phi_\mu = -\eta^{-1}(-e'_p au^\kappa + \tilde{B}u^\kappa). \quad (65)$$

Con ayuda de algun software de calculo simbólico se obtiene el determinante de (62), y con éste, la ecuación característica

$$\det(A^\mu \phi_\mu) = \eta^{-1}a^2\tilde{A}^2\tilde{N}_4Q = 0, \quad (66)$$

en donde

$$\tilde{A} = [\eta + (1 - \chi)b^2]a^2 - (1 - \chi)B^2, \quad (67)$$

$$\tilde{N}_4 = f_1 a^4 - f_2 a^2 G - f_3 a^2 \tilde{B}^2 + f_4 \tilde{B}^2 G, \quad (68)$$

$$Q = b^4 \chi^2 - b^2(b^2 + 2\eta)\chi + \eta(\eta + b^2), \quad (69)$$

siendo

$$f_1 = (e'_p - 1)\eta + (e'_p + 1)\chi b^2, \quad (70)$$

$$f_2 = \eta + (1 - 2\chi)b^2 e'_p - \chi b^2, \quad (71)$$

$$f_3 = (e'_p + 1)\chi, \quad (72)$$

$$f_4 = 1 - \chi, \quad (73)$$

y $G = \phi_\mu \phi^\mu$ las funciones que definen a $\tilde{N}_4$.

La ecuación (66) depende de ϕ_μ , el cual representa el vector velocidad de una onda en el medio (Ruggeri, 1981). Por lo tanto, una perturbación que se propaga con una rapidez λ en la primera dirección espacial, que se denota como x , tiene un vector $\phi_\mu = (\lambda, 1, 0, 0)$. Al remplazar ϕ_μ en la ecuación característica se obtiene un polinomio de orden 10, cuyas raíces se obtienen al hacer únicamente $a = 0$, $\tilde{A} = 0$ y $\tilde{N}_4 = 0$, ya que η^{-1} y Q no dependen de ϕ_μ . De esta manera, el

valor propio que resulta de la ecuación $a = 0$ es

$$\lambda_e = \alpha v^x - \beta^x, \quad (74)$$

y describe la velocidad de propagación de perturbaciones en la densidad de masa (ondas materiales). Este valor propio se le conoce comúnmente como autovalor entrópico y aparece como una raíz doble en el sistema de ecuaciones (Komissarov, 1999).

Por otro lado, la velocidad de las ondas de Alfvén son las raíces de la ecuación $\tilde{A} = 0$. Estas ondas son producidas a partir de la interacción de un fluido conductor y el campo magnético. Cuando se considera que el medio es un fluido con polarización magnética, las ondas de Alfvén se propagan con una velocidad que depende de la susceptibilidad del medio

$$\lambda_a^\pm = \frac{b^x \pm \sqrt{H} u^x}{b^0 \pm \sqrt{H} u^0}, \quad (75)$$

donde $H = b^2 + \eta/(1 - \chi)$. Ahora, con el fin de preservar el carácter real de los autovalores de Alfvén, y así garantizar la hiperbolicidad del sistema del sistema de ecuaciones, es necesario imponer la condición $H = \eta(1 + \chi_m) + b^2 \geq 0$, la cual restringe la susceptibilidad magnética al intervalo

$$\chi_m \geq -\left(1 + \frac{b^2}{\eta}\right). \quad (76)$$

Afortunadamente, los valores de χ_m para los materiales están dentro de este intervalo. Adicionalmente, se puede apreciar de (75) que cuando $\chi = 1$ las ondas de Alfvén viajan a la misma velocidad

que las ondas entrópicas; sin embargo, este valor para χ corresponde a una susceptibilidad magnética infinita.

Los valores propios restantes son soluciones de la ecuación $\tilde{N}_4 = 0$, y describen la velocidad de propagación de las ondas magnetosónicas. Desafortunadamente, esta ecuación da como resultado expresiones analíticas con raíces cúbicas dentro de raíces cuadráticas que conducen a errores numéricos asociados con la precisión de máquina. Errores similares se obtienen para factores de Lorentz altos ($W > 40$) al intentar calcular numéricamente los autovalores magnetosónicos por medio del método de Newton-Raphson (Leismann, 2004). Estos inconvenientes dan como resultado situaciones no físicas donde las señales en el fluido se propagan con velocidades superiores a la de la luz. Para resolver este problema Leismann *et. al.* calcula en (Leismann, T. et al., 2005) los flujos numéricos utilizando valores aproximados para las velocidades de las ondas magnetosónicas rápidas. Dichos valores se calculan haciendo $B^x = 0$ y $B^i v_i = 0$ y conducen a resultados que difieren en menos del 1 % con respecto a los obtenidos a partir de un algoritmo de Newton-Raphson. Únicamente cuando se tratan fluidos con factores de Lorentz cercanos a la unidad en campos magnéticos con $B^x \approx 0.1$ los errores son mayores al 1 %. El procedimiento propuesto por Leisman consiste básicamente en reescribir la ecuación $\tilde{N}_4 = 0$ como

$$\frac{\tilde{B}^2}{a^2} = -\frac{f_1}{f_4} \frac{a^2}{G} + \frac{f_2}{f_4} + \frac{f_3}{f_4} \frac{\tilde{B}^2}{G}. \quad (77)$$

y analizar la parte derecha de la ecuación, la cual debe ser positiva o cero. De esta manera, las velocidades magnetosónicas rápidas y lentas se calculan al igualar a cero la parte derecha de (77).

Cuando el fluido se encuentra magnéticamente polarizado estas velocidades toman la forma

$$\lambda_{bms}^{\pm} = \frac{a' \pm \alpha \sqrt{b'^2 + c' d'}}{c'}, \quad (78)$$

donde,

$$\begin{aligned} a' = & b^0 b^x q_4 \chi \alpha^2 - H[q_3 \chi \beta^x + q_2 W^2 (\alpha v^x - \beta^x)] \\ & + q_1 H[W^2 (\alpha v^x - \beta^x) + \beta^x] \Omega^2, \end{aligned} \quad (79)$$

$$b' = \alpha b^0 q_4 \chi (b^x + b^0 \beta^x) - H v^x W^2 (q_2 - \Omega^2 q_1), \quad (80)$$

$$c' = (b^0)^2 \alpha^2 \chi q_4 + H[\chi q_3 + q_1 (W^2 - 1) \Omega^2 - W^2 q_2], \quad (81)$$

$$\begin{aligned} d' = & H[q_2 (v^x)^2 W^2 + q_3 \chi \gamma^{xx} - q_1 \Omega^2 ((v^x)^2 W^2 + \gamma^{xx})] \\ & - \chi q_4 (b^x + b^0 \beta^x)^2, \end{aligned} \quad (82)$$

y las funciones q se definen en términos de la velocidad del sonido como

$$q_1 = C_s^2 - 1 + 2x, \quad (83)$$

$$q_2 = q_1 + \chi q_4, \quad (84)$$

$$q_3 = C_s^2 (1 + C_s^2), \quad (85)$$

$$q_4 = C_s^4 - 1. \quad (86)$$

Con la estructura de valores propios (λ_e , $\lambda_a^{\pm}$ y $\lambda_{bms}^{\pm}$) se pueden resolver las ecuaciones usando un

método numérico que sólo requiera información de la velocidad de propagación de las ondas en el fluido, como lo es el método aproximado de Riemann HLLE. Sin embargo, existen otros métodos no tan robustos, como el resolutor tipo Roe, que calcula la solución exacta del problema de Riemann para un sistema localmente linealizado, y por lo tanto requiere, tanto los autovalores, como el conjunto completo de autovectores (Antón et al., 2010). Estos últimos son importantes desde el punto de vista teórico, para determinar si los campos característicos son linealmente degenerados o genuinamente no lineales. Dicha clasificación esta relacionada con la naturaleza convexa o no convexa del sistema de ecuaciones y por lo tanto con el tipo de ondas que aparecen en la solución. La obtención y el análisis de los autovectores asociados a la matriz (58) serán motivo de estudio en un futuro trabajo.

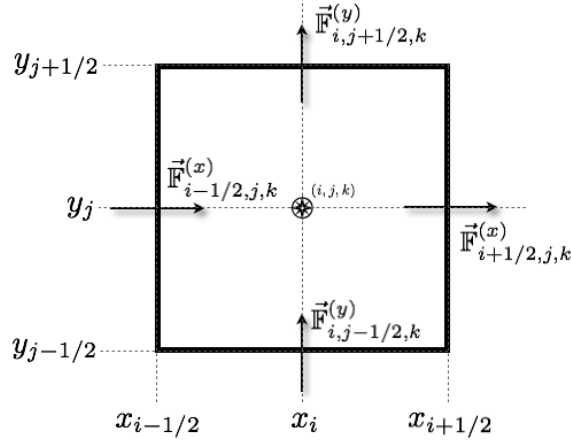
En la pr'oxima sección describiremos brevemente los métodos numéricos que fueron usados en este trabajo para resolver las ecuaciones de la GRMHD con polarización magnética.

1.3. Métodos numéricos

El sistema conservativo de ecuaciones de la GRMHD con polarización magnética (33), en la aproximación lineal donde $m^\mu = (\chi/\mu_0)b^\mu$, se resolverá con una nueva extensión del código CAFE, donde se implementaron los resultados teóricos de las secciones 1.1 y 1.2. La primera versión del código CAFE (Lora-Clavijo et al., 2015a) fué desarrollada para resolver las ecuaciones de la RMHD en tres dimensiones. La versión hidrodinamica del código ha sido utilizada para estudiar el cono de choque que se produce cuando un fluido relativista es acretado en un agujero negro rotante (Cruz-Orsorio et al., 2012), y cuando la acreción se produce en un agujero negro de Schwarzschild (Lora-Clavijo and Guzmán, 2013). Posteriormente, en una nueva versión de CAFE se incluyeron

las ecuaciones de Einstein para analizar el crecimiento del horizonte de eventos de un agujero negro semilla debido a la acreción de un fluido de radiación (Lora-Clavijo et al., 2013) y de un campo de materia oscura (Lora-Clavijo et al., 2014). Recientemente, CAFE ha sido usado para modelar la acreción de Bondi-Hoyle de un gas supersónico ideal con gradiente de velocidad (Cruz-Osorio and Lora-Clavijo, 2016) y con gradiente de densidad (Lora-Clavijo et al., 2015b). Finalmente, en (Cruz-Osorio et al., 2017) los autores también estudiaron la acreción de Bondi-Hoyle en un agujero negro estático cuando algunos cuerpos rígidos pequeños están distribuidos de manera aleatoria alrededor del objeto central.

CAFE esta diseñado para resolver el sistema de ecuaciones (33) por medio del método de líneas, el cual consiste en discretizar las derivadas espaciales y el término de fuentes, de manera que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales se convierta en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en cada punto de la malla que se pueda resolver mediante un algoritmo de Runge-Kutta (Schiesser, 2012). Debido a la no linealidad del sistema de ecuaciones y por consiguiente, a la aparición de discontinuidades en las variables de estado del fluido magnetizado, se discretiza (33) por medio del método de volúmenes finitos (Toro, 2013), el cual consiste en resolver un sistema de ecuaciones tipo conservación en su forma integral sobre un volumen o celda computacional I_{ijk}^n , de dimensiones espaciales $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ y en un intervalo de tiempo Δt , donde n caracteriza el paso de tiempo y los subíndices i, j, k definen la posición espacial de la celda en las direcciones x, y, z , respectivamente. En la Figura 1 se esquematiza dicha celda únicamente en el plano $x - y$ para facilitar la representación gráfica.

Figura 1.*Celda computacional*

Nota. Celda computacional I_{ijk} vista en el plano $x - y$. Los flujos numéricos $\vec{F}^{(x)}$, $\vec{F}^{(y)}$ se calculan en las interceldas, es decir, en las posiciones $x_{i\pm 1/2}$, $y_{j\pm 1/2}$ respectivamente

Aplicando el método de volúmenes finitos a la ecuación (33) se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}_{i,j,k}}{dt} = & -\frac{1}{\Delta x} \left(\vec{F}_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(x)} - \vec{F}_{i-\frac{1}{2},j,k}^{(x)} \right) - \frac{1}{\Delta y} \left(\vec{F}_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(y)} - \vec{F}_{i,j-\frac{1}{2},k}^{(y)} \right) \\ & - \frac{1}{\Delta z} \left(\vec{F}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{(z)} - \vec{F}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{(z)} \right) + \vec{S}_{i,j,k}, \end{aligned} \quad (87)$$

donde $\vec{U}_{i,j,k}^{(y)}$ es el promedio espacial del vector de variables conservativas, $\sqrt{\gamma} \vec{U}$, en la celda I_{ijk}^n , $\vec{S}_{i,j,k}$ es el promedio espacio-temporal del vector de fuentes, $\sqrt{-g} \vec{S}$ y finalmente, los flujos en las interceldas, $\vec{F}_{i\pm 1/2,j,k}^{(x)}$, $\vec{F}_{i,j\pm 1/2,k}^{(y)}$, $\vec{F}_{i,j,k\pm 1/2}^{(z)}$ (ver Figura 1) son promedios espacio-temporales de los vectores $\sqrt{-g} \vec{F}^i$ en cada dirección del espacio.

Para poder aplicar el método de Runge-Kutta a la ecuación (33), y de esta manera encontrar soluciones numéricas de las variables conservativas $\vec{U}$, primero se deben calcular los flujos en

las intercelas. Existen muchos métodos para calcular estos flujos, por ejemplo, el método Roe desarrollado en (Roe, 1981), el método HLLE (Harten et al., 1997; Einfeldt, 1988) y el HLLC (Toro et al., 1994), o el método Marquina que se presenta en (Marquina, 1994), entre otros. Sin embargo, uno de los más robustos y conocidos es el *resolvedor de Riemann aproximado HLLE*, por medio del cual, los flujos en las intercelas se aproximan como

$$\vec{\mathbb{F}}_{i+1/2,j,k} = \frac{\lambda^+ \vec{\mathbb{F}}_{i+1/2,j,k}^L - \lambda^- \vec{\mathbb{F}}_{i+1/2,j,k}^R + \lambda^+ \lambda^- \left(\vec{\mathbb{U}}_{i+1/2,j,k}^R - \vec{\mathbb{U}}_{i+1/2,j,k}^L \right)}{\lambda^- - \lambda^+}, \quad (88)$$

donde $\vec{\mathbb{U}}_{i+1/2,j,k}^L$ y $\vec{\mathbb{U}}_{i+1/2,j,k}^R$ son los valores reconstruidos de $\vec{\mathbb{U}}$ a izquierda y a derecha de la intercelas, λ^- y λ^+ son las velocidades de propagación mínima y máxima de las señales y $\vec{\mathbb{F}}_{i+1/2,j,k}^{L,R} = \vec{\mathbb{F}}(\vec{\mathbb{U}}_{i+1/2,j,k}^{L,R})$. Ahora bien, las velocidades máxima y mínima de propagación de las señales se calculan de la siguiente forma

$$\lambda^+ = \max(0, \lambda_{(i)}^R, \lambda_{(i)}^L), \quad (89)$$

$$\lambda^- = \min(0, \lambda_{(i)}^R, \lambda_{(i)}^L), \quad (90)$$

donde $\lambda_{(i)}^R$ y $\lambda_{(i)}^L$ son los valores propios a derecha e izquierda respectivamente.

Existen muchos métodos numéricos para reconstruir los valores de $\vec{\mathbb{U}}^{R,L}$. Unos de los más conocidos y robustos son los limitadores lineales por pedazos, los cuales aproximan la función por

medio de rectas. Un ejemplo de estos limitadores es la función MINMOD, la cual se define como

$$\text{MINMOD}(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } ab \leq 0, \\ a & \text{si } |a| < |b|, \\ b & \text{si } |a| > |b|, \end{cases} \quad (91)$$

y se encarga de escoger el menor entre dos números reales, a y b , o cero si uno de los números es menor o igual a cero y el otro mayor o igual a cero. De esta manera, las variables conservativas reconstruidas a izquierda y derecha de la intercelda son respectivamente,

$$\vec{\mathbb{U}}_{i+1/2,j,k}^L = \vec{\mathbb{U}}_{i,j,k} + \sigma_{i,j,k}(x_{i+1/2,j,k} - x_{i,j,k}), \quad (92)$$

$$\vec{\mathbb{U}}_{i+1/2,j,k}^R = \vec{\mathbb{U}}_{i+1,j,k} - \sigma_{i+1,j,k}(x_{i+1,j,k} - x_{i+1/2,j,k}), \quad (93)$$

donde,

$$\sigma_{i,j,k} = \text{MINMOD}(m_{i-1/2,j,k}, m_{i+1/2,j,k}), \quad (94)$$

$$\sigma_{i+1,j,k} = \text{MINMOD}(m_{i+1/2,j,k}, m_{i+3/2,j,k}), \quad (95)$$

y $m_{i+1/2,j,k}$ es la derivada de $\vec{\mathbb{U}}$ en dirección x , en la intercelda $x_{i+1/2,j,k}$, es decir

$$m_{i+1/2,j,k} = \frac{\vec{\mathbb{U}}_{i+1,j,k} - \vec{\mathbb{U}}_{i,j,k}}{x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k}}. \quad (96)$$

Por lo tanto, ya determinados los flujos numéricos según (88), se aplica el método de Runge-Kutta de cuarto orden a la ecuación (87) para encontrar las variables conservativas en todos los puntos de la malla numérica y a cada paso de tiempo, quedando de esta manera, resuelto numéricamente el sistema de ecuaciones conservativas (33).

Por otro lado, CAFE garantiza la condición de divergencia cero, dada en (32), por medio del método de transporte de flujo restringido (Yee, 1966), implementado por primera vez en un esquema con viscosidad artificial (Evans and Hawley, 1988) , y modificado posteriormente en (Balsara and Spicer, 1999) con el propósito de usar las formulas de los flujos numéricos que aparecen en los esquemas de alta resolución para la captura de choques o HRSC por sus siglas en inglés. Con este método, se evoluciona la forma integral de la ecuación de inducción para garantizar que si $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ a tiempo inicial, este valor se mantenga en los pasos de tiempo siguientes. El método de transporte de flujo restringido es bastante usado en MHD numérica ya que mantiene la divergencia del campo magnético a un orden de 1×10^{-12} y conserva el carácter fuertemente hiperbólico del sistema de ecuaciones (Schoepe et al., 2018; Hilditch and Schoepe, 2019).

Ahora, los métodos numéricos implementados en CAFE evolucionan en el tiempo el vector de estado $\vec{U}$, cuyas componentes son las variables conservativas. Sin embargo, los flujos se escriben en términos, tanto de $\vec{U}$, como de el conjunto de variables primitivas $\vec{\mathcal{W}} = [\rho, v^i, p, B^k]^T$, de manera que es necesario calcular, a cada paso de tiempo, las variables primitivas en términos de las conservativas. Desafortunadamente, a partir de las ecuaciones (40 - 42) no es posible encontrar explícitamente las funciones $\vec{\mathcal{W}}(\vec{U})$, por lo cual el código utiliza el método propuesto por Mignone y Bodo en (Mignone and Bodo, 2006), junto con un algoritmo híbrido que combina el Newton-

Raphson con el método de bisección (Press et al., 2007) para recuperar las variables primitivas en todos los puntos de la malla espacio-temporal. Debido a que el fluido se encuentra magnéticamente polarizado, es necesario modificar el método propuesto en (Mignone and Bodo, 2006) para incluir la susceptibilidad magnética del fluido.

El método que usa CAFE para escribir las variables primitivas en términos de las conservativas se basa en reducir el sistema algebraico (40 - 42), el cual tiene 5 ecuaciones y 5 incógnitas a una sólo ecuación en términos de la nueva variable $Z = \rho h W^2$. Considerando la relación constitutiva (37), calculamos el escalar $S^2 = \gamma^{ij} S_i S_j$ a partir de la ecuación (41). La expresión que resulta de este proceso toma la forma

$$S^2 = (Z + \tilde{\chi} B^2)^2 (1 - W^{-2}) - \tilde{\chi} (2Z + \tilde{\chi} B^2) \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{S}}{Z} \right)^2, \quad (97)$$

donde $\tilde{\chi} = 1 - \chi$. La variable conservativa τ también se puede escribir en términos de Z como

$$\tau = Z + \tilde{\chi} B^2 - p - D + \frac{1 - 2\tilde{\chi}}{2W^2} B^2 + \frac{1 - 2\tilde{\chi}}{2} \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{S}}{Z} \right)^2. \quad (98)$$

En estas últimas dos expresiones se consideró el hecho que $\alpha^2 (b^0)^2 = W^2 (\vec{B} \cdot \vec{S})^2 / Z^2$. Además, a partir de la ecuación de estado de un gas ideal, $p = \rho \varepsilon (\Gamma - 1)$, se puede remplazar la presión termodinámica en (98) por

$$p = \frac{Z - WD}{W^2} \frac{\Gamma - 1}{\Gamma}. \quad (99)$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones 5×5 se reduce a un par de ecuaciones para las variables

Z y W . Ahora bien, de (97) es posible obtener la siguiente expresión para el factor de Lorentz en función de Z y de las variables conservativas

$$W(Z) = \left[1 - \frac{(\vec{B} \cdot \vec{S})^2 \tilde{\chi} (2Z + \tilde{\chi} B^2) + S^2 Z^2}{(Z + \tilde{\chi} B^2)^2 Z^2} \right]^{-1/2}. \quad (100)$$

De esta manera, la ecuación (98), con p y W dadas en (99) y (100), respectivamente, se convierte en una ecuación no lineal para la función Z . CAFE resuelve esta ecuación por medio del algoritmo de Newton-Raphson, junto con el método de bisección, para encontrar las raíces de la función

$$f(Z) = Z + \tilde{\chi} B^2 - (D + \tau) - p + \frac{1 - 2\tilde{\chi}}{2W^2} B^2 + \frac{1 - 2\tilde{\chi}}{2} \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{S}}{Z} \right)^2 = 0. \quad (101)$$

Estas raíces corresponden a los valores de Z . Una vez hallada Z , es posible calcular el factor de Lorentz de (100), y de esta manera la densidad de masa se obtiene como $\rho = D/W$. Finalmente, la presión termodinámica se calcula de la ecuación de estado (99), y las componentes espaciales de la velocidad con la expresión

$$v^i = \frac{S^i + \tilde{\chi} (\vec{B} \cdot \vec{S}) B^i / Z}{Z + \tilde{\chi} B^2}, \quad (102)$$

la cual se obtiene de (41). Es importante mencionar que cuando la susceptibilidad magnética es cero, $\tilde{\chi} = 1$, y todas las expresiones se reducen a las de la GRMHD usual (Giacomazzo and Rezzolla, 2007).

1.4. Experimentos numéricos

Una vez obtenidas las ecuaciones de la GRMHD con polarización magnética en forma conservativa y su correspondiente estructura de autovalores, se puede implementar estos resultados en el código CAFE para llevar a cabo algunos experimentos numéricos físicamente relevantes. Los fluidos que se van a estudiar en todos los problemas de este trabajo obedecen la ecuación de estado de un gas ideal

$$p = \rho \varepsilon (\Gamma - 1), \quad (103)$$

donde ε es la energía interna específica y Γ es el índice adiabático. Esta relación entre las variables termodinámicas es apropiada para describir fluidos en los que la energía cinética de las partículas es mucho mayor que su energía potencial de interacción, y en los que el tamaño de las moléculas es insignificante en comparación con el espacio entre ellas. Estas características se cumplen en la mayoría de los plasmas astrofísicos, ya que estos se encuentran suficientemente diluidos y por lo tanto se pueden aproximar a un gas ideal (Biskamp, 1996).

1.4.1. Problemas de Riemann magnetizados en 1D con polarización magnética.

En esta subsección se presenta una primera aproximación para describir el efecto que produce la polarización magnética de la materia cuando interactúan dos fluidos relativistas en el espacio-tiempo de Minkowski. Para esto se usa un sistema de tubo de choque, en el cual se definen los bien conocidos problemas de Riemann (Toro, 2013). La configuración inicial de este tipo de problemas consiste en dos fluidos separados por una membrana o interface en la posición $x = 0$. Los fluidos

están caracterizados por variables de estado constantes pero diferentes a izquierda ($\vec{\mathcal{W}}_L$) y a derecha ($\vec{\mathcal{W}}_R$) de la interface. El subíndice L denota la región izquierda, es decir $x \leq 0$, mientras que el subíndice R representa la región derecha, $x > 0$. Además de esto, la polarización magnética de los fluidos está caracterizada en cada problema de Riemann por la susceptibilidad magnética, χ_m , la cual se asumirá constante e igual para ambos fluidos. Los dos primeros problemas que se consideran en esta subsección fueron propuestos por S. Komissarov (Komissarov, 1999). Estas simulaciones se llevaron a cabo en un dominio $x \in [-2, 2]$, con una resolución espacial $\Delta x = 1/800$, y un factor de Courant de 0.25. Posteriormente se presentan los problemas propuestos en (van Putten, 1993) y (Balsara, 2001), para los cuales se obtienen soluciones numéricas en un dominio $x \in [-0.5, 0.5]$, con una resolución espacial $\Delta x = 1/1600$ y un factor de Courant de 0.25. Finalmente, se presenta el problema de la onda genérica de Alfvén, para el cual se usa un dominio de $x \in [-0.5, 0.5]$, una resolución espacial de $\Delta x = 1/1600$ y un factor de Courant de 0.25. Los parámetros usados en los diferentes problemas de Riemann están dados en la tabla 1.

Cada uno de los problemas mencionados en el párrafo anterior se evolucionará numéricamente para diferentes valores de susceptibilidad magnética, de manera que sea posible determinar la diferencia entre la evolución de un material diamagnético ($\chi_m < 0$) y uno paramagnético ($\chi_m > 0$). Además, también se resuelven los problemas cuando $\chi_m = 0$ para comparar los resultados de este trabajo con el caso no polarizado que corresponde con la RMHD usual (Giacomazzo and Rezzolla, 2006). Las curvas obtenidas con el código CAFE en el caso $\chi_m = 0$ fueron validadas con los respectivos perfiles analíticos en (Lora-Clavijo et al., 2015a) y por lo tanto en las gráficas de este trabajo sólo se mostrarán los resultados numéricos. Las soluciones de los problemas de

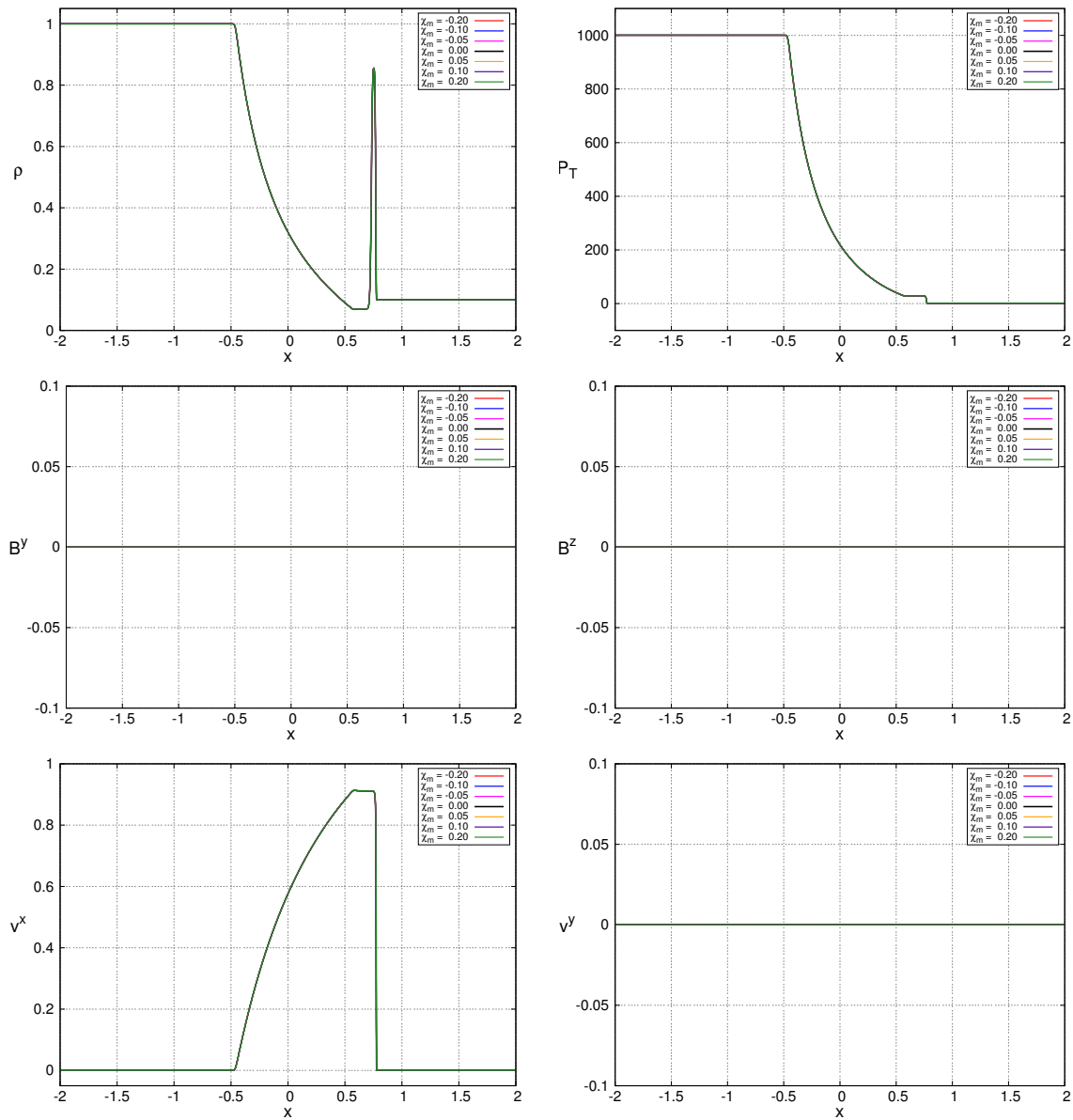
Tabla 1

Condiciones iniciales para los diferentes problemas de Riemann

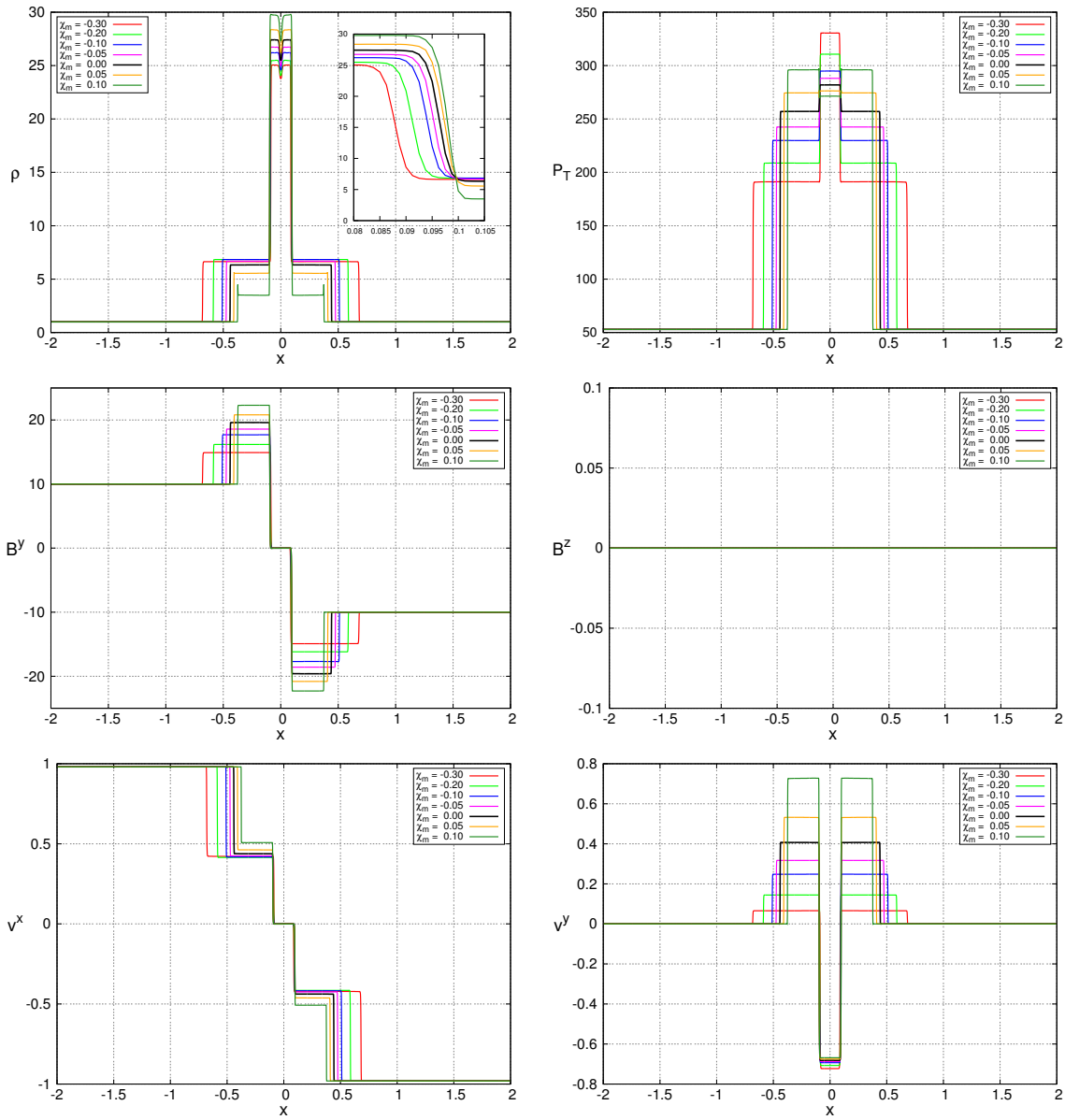
Prueba	Estado	Γ	ρ_0	p	v^x	v^y	v^z	B^x	B^y	B^z
Tubo de Choque de Komissarov	Izquierdo	4/3	1.0	1000.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
	Derecho	4/3	0.1	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
Colisión de Komissarov	Izquierdo	4/3	1.0	1.0	$5/\sqrt{26}$	0.0	0.0	10.0	10.0	0.0
	Derecho	4/3	1.0	1.0	$-5/\sqrt{26}$	0.0	0.0	10.0	-10.0	0.0
Balsara 1	Izquierdo	2	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0	0.0
	Derecho	2	0.125	0.1	0.0	0.0	0.0	0.5	-1.0	0.0
Balsara 2	Izquierdo	5/3	1.0	30.0	0.0	0.0	0.0	5.0	6.0	6.0
	Derecho	5/3	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0	5.0	0.7	0.7
Balsara 3	Izquierdo	5/3	1.0	1000.0	0.0	0.0	0.0	10.0	7.0	7.0
	Derecho	5/3	1.0	0.1	0.0	0.0	0.0	10.0	0.7	0.7
Balsara 4	Izquierdo	5/3	1.0	0.1	0.999	0.0	0.0	10.0	7.0	7.0
	Derecho	5/3	1.0	0.1	-0.999	0.0	0.0	10.0	-7.0	-7.0
Balsara 5	Izquierdo	5/3	1.08	0.95	0.4	0.3	0.2	2.0	0.3	0.3
	Derecho	5/3	1.0	1.0	-0.45	-0.2	0.2	2.0	-0.7	0.5
Onda Genérica de Alfven	Izquierdo	5/3	1.0	5.0	0.0	0.3	0.4	1.0	6.0	2.0
	Derecho	5/3	0.9	5.3	0.0	0.0	0.0	1.0	5.0	2.0

Riemann consisten en ondas que se propagan en el espacio. Las ondas de choque se caracterizan por un cambio abrupto, casi discontinuo, en las variables físicas del fluido. Las ondas de contacto son discontinuidades que se observan únicamente en la densidad de masa. Las ondas de rarefacción corresponden a disminuciones no discontinuas en la densidad de masa entre dos estados constantes, aunque también se observan en las otras variables del sistema. Las ondas compuestas estan formadas por un choque que se propaga junto con una rarefacción, y finalmente, las ondas de Alfvén son discontinuidades que se caracterizan porque a través de ellas la densidad y la presión son continuas.

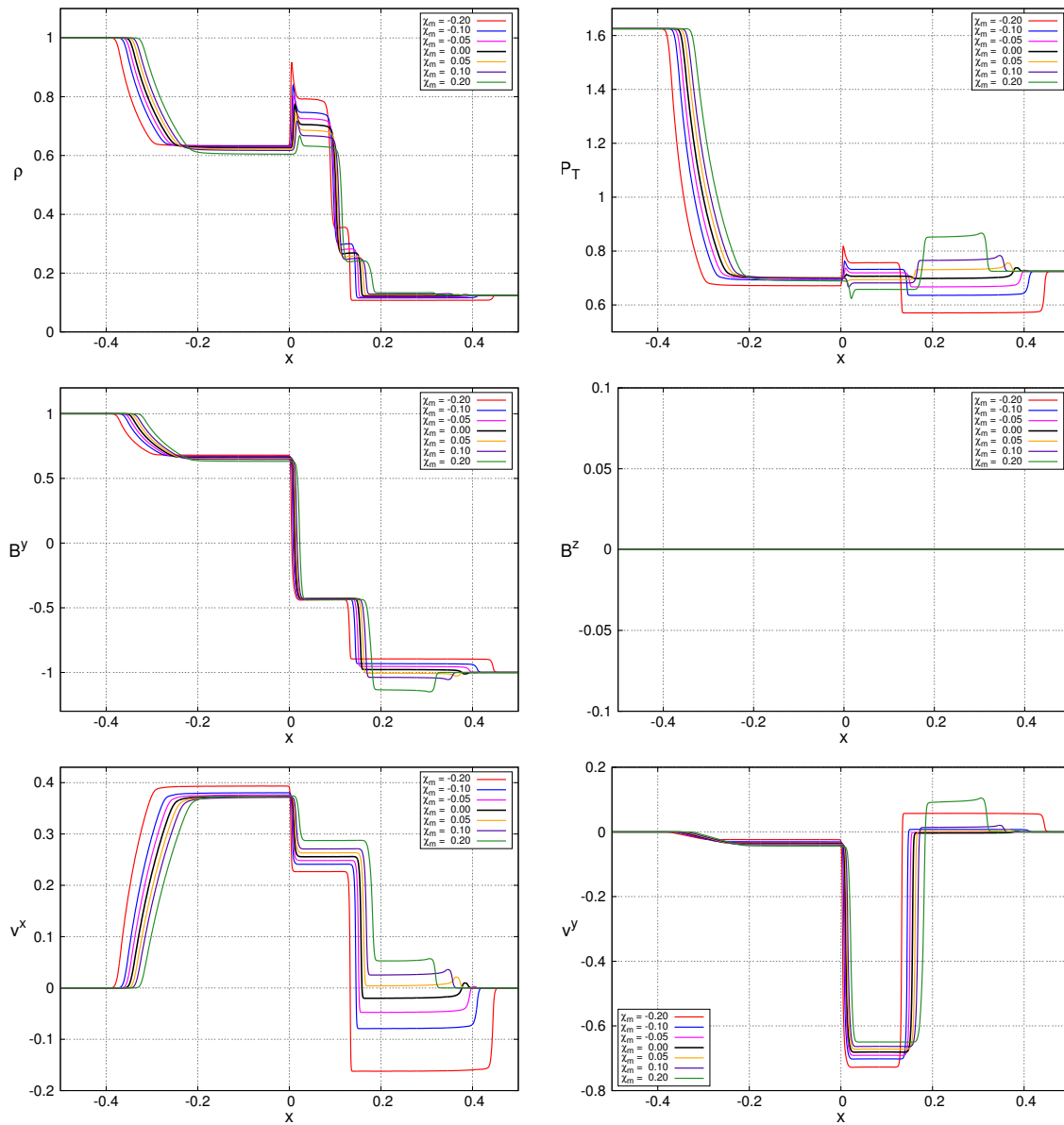
1.4.1.1. Tubo de choque de Komissarov. El primer problema de Riemann consiste en dos fluidos con $\Gamma = 4/3$, inicialmente en reposo, y con un campo magnético constante, el cual es normal a la discontinuidad inicial en $x = 0$. La densidad de masa en reposo y la presión en el fluido de la izquierda son diferentes a los del fluido de la derecha. Sin embargo, la principal característica de este problema es que la presión izquierda es 10^3 veces más grande que la presión a la derecha. Tal gradiente produce un cascarón delgado en la densidad que se mueve con una velocidad relativista de aproximadamente 0.9 veces la velocidad de la luz. Este comportamiento se muestra en la figura 2 a un tiempo $t = 0.8$, para las susceptibilidades magnéticas $\chi_m = -0.20, -0.10, -0.05, 0.00, 0.05, 0.10, 0.20$. También se puede distinguir una discontinuidad de contacto y una onda de choque, ambas moviéndose hacia la derecha, y una zona de rarefacción en la región central del dominio. Este problema es muy interesante porque el campo magnético es normal a la discontinuidad inicial, y por lo tanto, como se menciona en (Komissarov, 1999), la solución es puramente hidrodinámica, es decir, el campo magnético no tiene un efecto dinámico

Figura 2.*Tubo de choque de Komissarov a tiempo $t = 0.8$* 

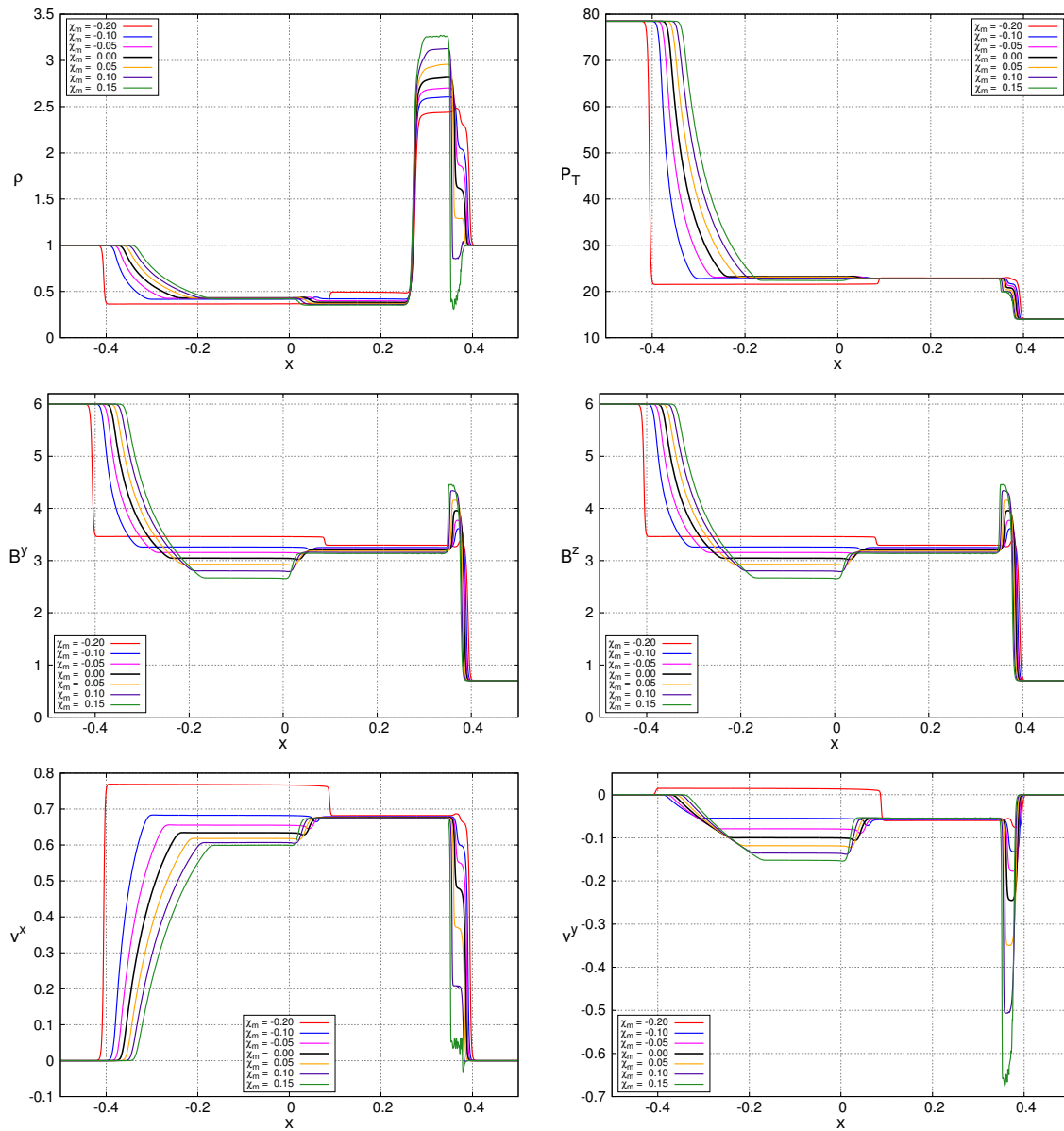
Nota. Simulación realizada con una resolución espacial $\Delta x = 1/800$ y un factor de Courant de 0.25.

Figura 3.*Colisión de Komissarov a tiempo $t = 0.8$* 

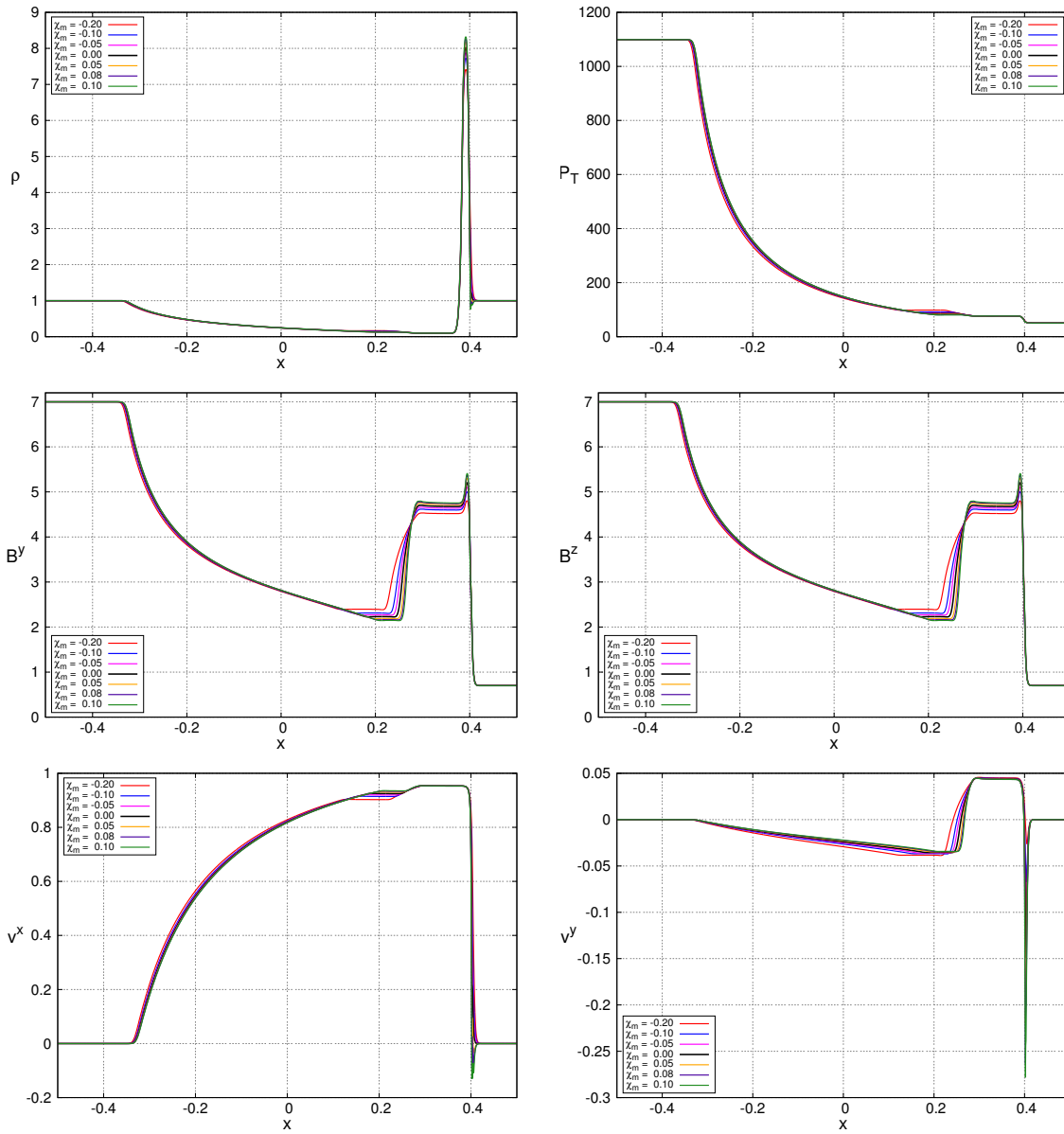
Nota. Simulación realizada con una resolución espacial $\Delta x = 1/800$ y un factor de Courant de 0.25.

Figura 4.*Balsara 1 a tiempo $t = 0.4$* 

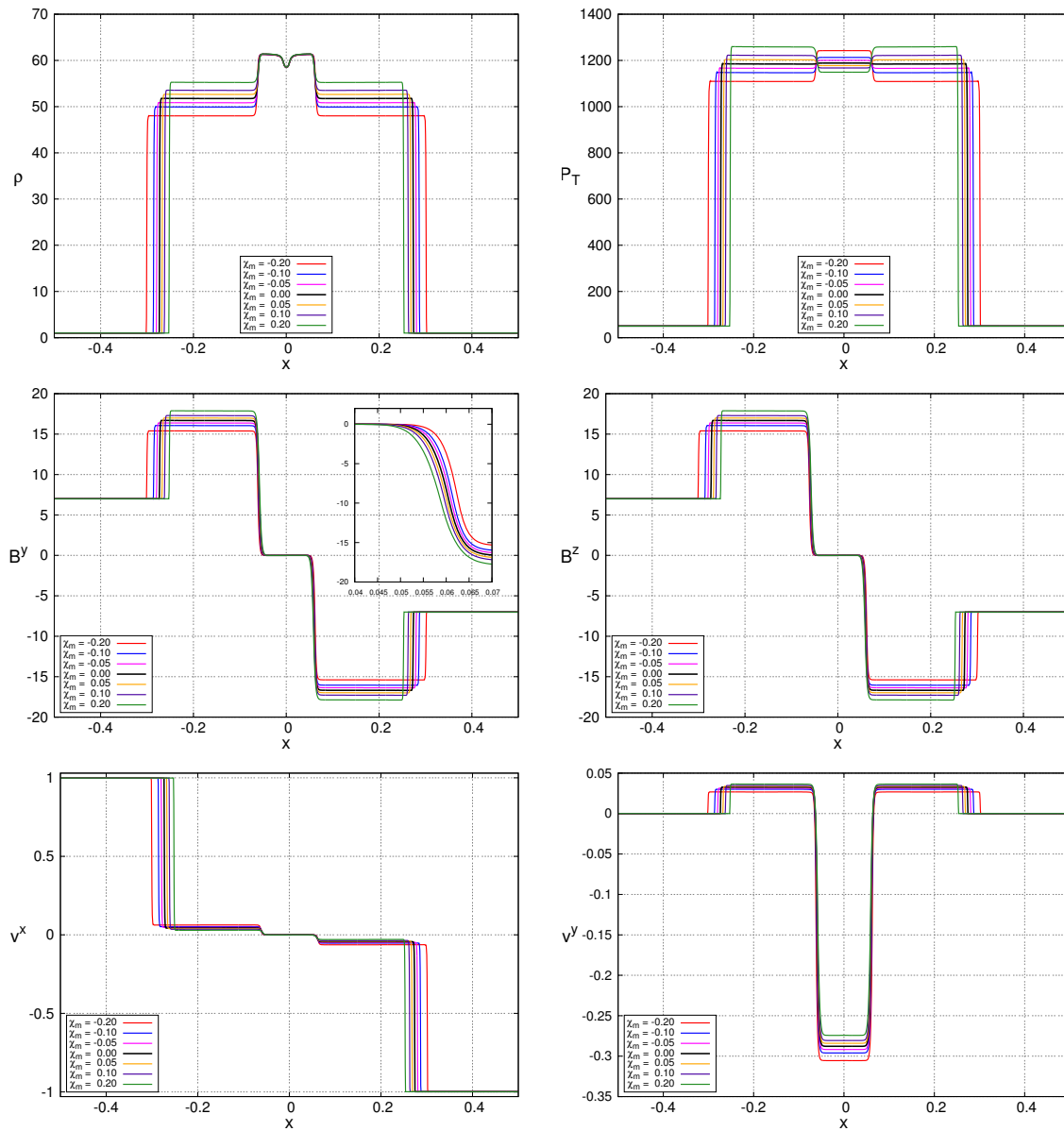
Nota. Simulación realizada con una resolución espacial $\Delta x = 1/1600$ y un factor de Courant de 0.25.

Figura 5.*Balsara 2 a tiempo $t = 0.4$* 

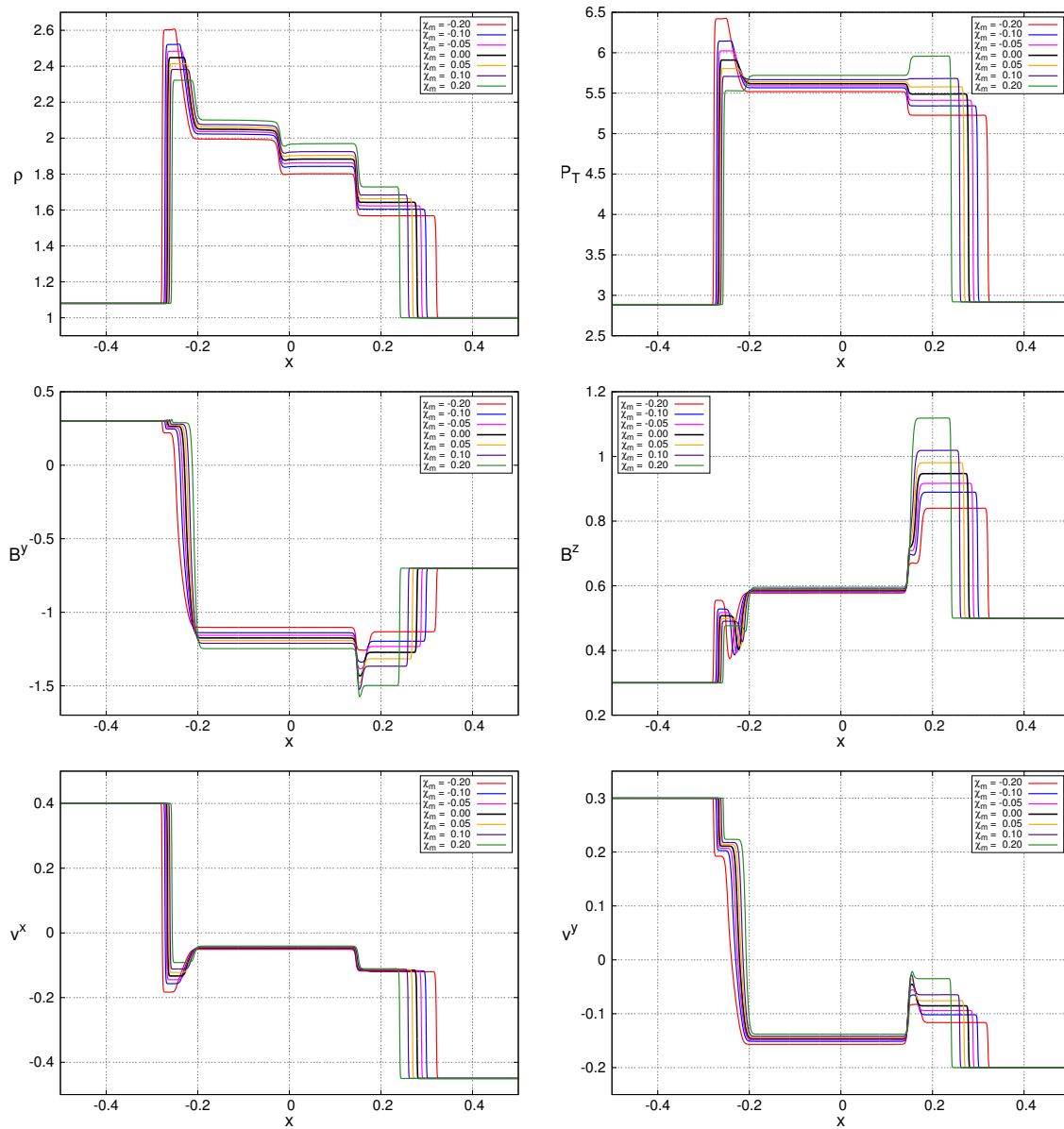
Nota. Simulación realizada con una resolución espacial $\Delta x = 1/1600$ y un factor de Courant de 0.25.

Figura 6.*Balsara 3 a tiempo $t = 0.4$* 

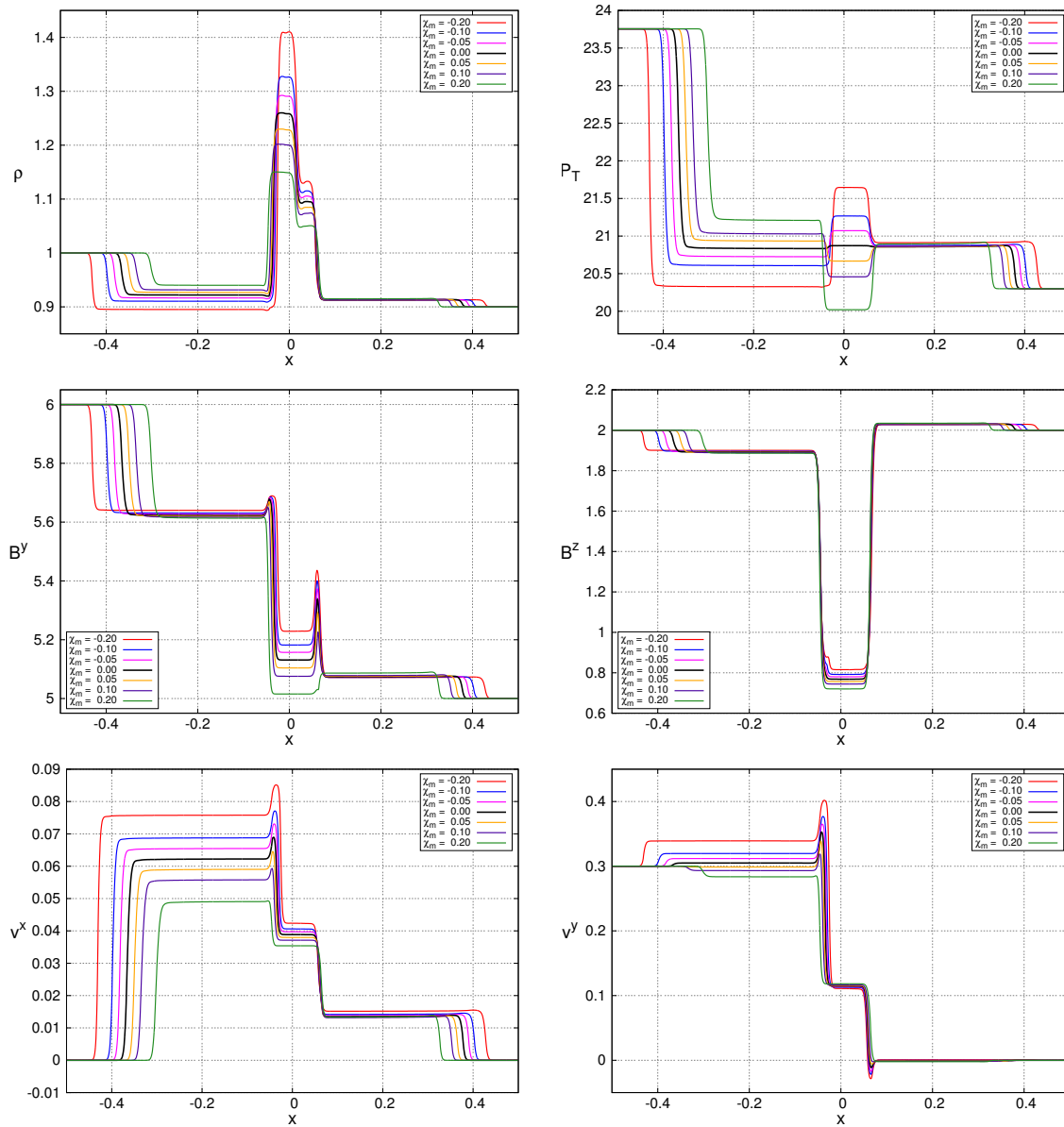
Nota. Simulación realizada con una resolución espacial $\Delta x = 1/1600$ y un factor de Courant de 0.25.

Figura 7.*Balsara 4 a tiempo $t = 0.4$* 

Nota. Simulación realizada con una resolución espacial $\Delta x = 1/1600$ y un factor de Courant de 0.25.

Figura 8.*Balsara 5 a tiempo $t = 0.4$* 

Nota. Simulación realizada con una resolución espacial $\Delta x = 1/1600$ y un factor de Courant de 0.25.

Figura 9.*Onda genérica de Alfvén a tiempo $t = 0.4$* 

Nota. Simulación realizada con una resolución espacial $\Delta x = 1/1600$ y un factor de Courant de 0.25.

en la evolución. Como consecuencia de este hecho, la solución mostrada en la figura 2 no cambia con la susceptibilidad magnética.

1.4.1.2. Colisión de Komissarov. El segundo experimento numérico describe la colisión frontal de dos fluidos con las mismas densidades de masa en reposo y las mismas presiones. Ambos fluidos, caracterizados por un índice adiabático de $\Gamma = 4/3$, colisionan a una velocidad $v^x = 0.98058$ en la posición $x = 0$. Además, las componentes tangenciales del campo magnético, B^y , en ambos estados tienen direcciones opuestas. La solución numérica de este problema se presenta en la figura 3 a tiempo $t = 0.8$, para las susceptibilidades $\chi_m = -0.30, -0.20, -0.10, -0.05, 0.00, 0.05, 0.10$. Se pueden observar dos choques rápidos que se mueven en direcciones opuestas, junto con dos choques lentos. Las soluciones para diferentes susceptibilidades magnéticas muestran que los choques rápidos se mueven a una mayor velocidad en fluidos diamagnéticos, y que los choques lentos son ligeramente más rápidos en los paramagnéticos.

Debido a la simetría de la colisión, el campo magnético tangencial y la velocidad normal se anulan entre los choques (Komissarov, 1999), independientemente del valor de χ_m . Sin embargo, cuando la susceptibilidad magnética del fluido cambia, los estados constantes entre las ondas de choques toman valores diferentes. Por ejemplo, el valor máximo de la densidad de masa aumenta con χ_m , el campo magnético transversal cambia considerablemente en comparación con la solución magnetohidrodinámica usual ($\chi_m = 0$), y el gradiente espacial de la presión total a través de los choques lentos invierte su sentido después de ciertos valores positivos de χ_m . Finalmente, vale la pena mencionar que los casos paramagnéticos desarrollan flujos transversales (en la dirección y) de carácter relativista. Este tipo de flujos entre los choques rápidos y lentos tiende a desaparecer

cuando se consideran fluidos diamagnéticos.

1.4.1.3. Balsara 1. Esta prueba numérica es la generalización relativista del problema clásico de Brio-Wu en magnetohidrodinámica newtoniana (Brio and Wu, 1988). El dato inicial consiste en dos fluidos caracterizados por un índice adiabático $\Gamma = 2$. A ambos lados del diafragma los fluidos se encuentran inicialmente en reposo, pero con diferentes densidades de masa y presiones. Además de esto, el campo magnético transversal o tangencial en $x < 0$ tiene sentido opuesto al campo en $x > 0$. La figura 4 muestra la estructura de la solución en $t = 0.4$ para los diferentes valores de susceptibilidad magnética $\chi_m = -0.20, -0.10, -0.05, 0.00, 0.05, 0.10, 0.20$. En cada caso se obtiene una solución que consiste en una onda de rarefacción rápida que viaja hacia la izquierda, una onda compuesta que se mueve hacia la izquierda, una discontinuidad de contacto, un choque lento hacia la derecha y una onda de rarefacción rápida hacia la derecha. Estas ondas son las mismas que se obtienen en las simulaciones magnetohidrodinámicas relativistas usuales (Lora-Clavijo et al., 2015a; Giacomazzo and Rezzolla, 2007). Sin embargo, cuando se considera la susceptibilidad magnética de los fluidos, las ondas de rarefacción se mueven considerablemente más rápido en fluidos diamagnéticos, mientras que la onda compuesta, la de contacto, y los choques lentos se mueven a una menor velocidad en materiales diamagnéticos que en paramagnéticos.

Por otro lado, el gradiente de densidad de masa en reposo a través de los choques se vuelve más grande cuando el carácter diamagnético del fluido se incrementa. Además, la solución para la presión total muestra que la polarización magnética tiende a incrementar el gradiente de esta variable de estado a través de las ondas. En particular, se obtiene un comportamiento interesante a través de los choques lentos, ya que a partir de ciertos valores positivos de χ_m , el gradiente

de presión total cambia de signo, de manera que la dinámica del fluido se vuelve diferente. Por ejemplo, cuando $\chi_m \leq 0$, el fluido entre los choques se mueve en dirección opuesta al resto del sistema, pero en los casos paramagnéticos todo el fluido se mueve en la misma dirección. También es interesante ver que entre el choque y la onda de rarefacción que viajan hacia la derecha, cualquier polarización tiende a generar un flujo transversal en la dirección opuesta al resto del fluido. Por último, la magnitud del campo magnético se incrementa en fluidos paramagnéticos, especialmente en los estados constantes entre los choques y la onda de rarefacción derecha.

1.4.1.4. Balsara 2. El segundo problema de Balsara consiste en un fluido con $\Gamma = 5/3$ inicialmente en reposo, en el cual, la presión de la izquierda es 30 veces la presión a la derecha, y el campo magnético transversal o tangencial es discontinuo en $x = 0$. La solución numérica de este problema se presenta en la figura 5 para $\chi_m = -0.20, -0.10, -0.05, 0.00, 0.05, 0.10, 0.15$, a tiempo $t = 0.4$. Las diferentes curvas muestran una onda de rarefacción rápida que se mueve hacia la izquierda, una onda de rarefacción lenta hacia la derecha y una discontinuidad de contacto moviéndose hacia la derecha junto con dos ondas de choque. Como se puede ver, todas las ondas en esta solución se mueven más rápido en materiales diamagnéticos que en paramagnéticos, aunque las ondas de rarefacción presentan las diferencias más significativas.

En este problema es importante mencionar que las zonas de rarefacción se reducen cuando el fluido es diamagnético y que los cambios más relevantes en las variables de estado se presentan entre las ondas de rarefacción y los choques. En particular, el carácter relativista del flujo en la dirección x aumenta cuando el diamagnetismo está presente en el sistema, mientras que en dirección transversal solo se genera una capa delgada de fluido que se mueve a altas velocidades

cuando posee propiedades paramagnéticas. También se puede observar un flujo transversal que se mueve en dirección opuesta al resto del fluido cuando $\chi_m = -0.2$. A partir de las gráficas se puede ver que es más difícil evolucionar numéricamente fluidos paramagnéticos, ya que la solución con $\chi_m = 0.15$ presenta oscilaciones debido a errores numéricos localizados entre los choques. Una posible explicación para estas oscilaciones es la inestabilidad que se produce en la propagación de un choque lento. Como se explica en (Quirk, 1997), a medida que el choque se mueve relativo a la malla numérica, su perfil se dobla, perturbando de esta manera los campos característicos. Este doblamiento se puede apreciar en el choque lento que se mueve hacia la derecha en la figura 5. Ahora bien, debido a que la velocidad de Alfvén en un fluido magnéticamente polarizado toma la forma $v_A^2 = b^2 / [\rho h(1 + \chi_m) + b^2]$, se espera que en fluidos paramagnéticos ($\chi_m > 0$), la velocidad de propagación de las perturbaciones en el campo magnético tienda a reducirse. Este hecho puede promover la aparición de oscilaciones numéricas en las simulaciones paramagnéticas de este problema de Riemann.

1.4.1.5. Balsara 3. El estado inicial del tercer problema propuesto por Balsara es muy similar al del tubo de choque anterior, la principal diferencia radica en que la presión del fluido que se encuentra a la izquierda es 10^4 veces mayor que la del fluido de la derecha. Con este gradiente de presión, el rango de valores de susceptibilidad magnética que se pueden tratar con el código se reduce. Los valores utilizados para este problema son, $\chi_m = -0.20, -0.10, -0.05, 0.00, 0.05, 0.08, 0.10$. La estructura de ondas de la solución, mostrada en la figura 6 a tiempo $t = 0.4$, es la misma que en Balsara 2. Sin embargo, debido a que el gradiente de presión es grande, resulta difícil capturar los verdaderos estados constantes entre los choques (Giacomazzo and Rezzolla, 2007) con la reso-

lución que se ha estado empleando. Otra consecuencia de la alta presión en el estado izquierdo es que la susceptibilidad magnética no produce cambios significativos en la solución, en comparación con el problema de Balsara 2. El efecto principal es el incremento de la zona de rarefacción lenta cuando se consideran fluidos diamagnéticos.

1.4.1.6. Balsara 4. El cuarto problema planteado por Balsara es la colisión frontal de dos fluidos con $\Gamma = 5/3$, y un campo magnético con dirección opuesta a ambos lados de la interface. Este problema es similar a la colisión de Komissarov, pero con un índice adiabático diferente y con los fluidos moviéndose con una velocidad normal a la interface de 0.999, es decir, una velocidad muy cercana a la de la luz. En la figura 7, se muestra la solución numérica a tiempo $t = 0.4$ para los valores $\chi_m = -0.20, -0.10, -0.05, 0.00, 0.05, 0.10, 0.20$. En las soluciones se observan las mismas ondas de choque que se obtenían con el estado inicial de Komissarov. Nuevamente los choques rápidos se desplazan a una mayor velocidad en fluidos diamagnéticos que en paramagnéticos. Sin embargo, los choques lentos presentan un comportamiento diferente, ya que ellos se mueven más despacio en materiales con $\chi_m > 0$. Finalmente, el valor máximo de la densidad de masa en reposo no presenta cambios apreciables cuando se varía la susceptibilidad magnética.

1.4.1.7. Balsara 5. El último tubo de choque propuesto por Balsara es una colisión de dos fluidos con índice adiabático $\Gamma = 5/3$, pero en este caso, con componentes transversales de campo magnético y velocidad distintas a ambos lados de la interface (véase tabla 1). La solución a este problema, a tiempo $t = 0.4$, se muestra en la figura 8 para diferentes valores de susceptibilidad magnética; más específicamente, para $\chi_m = -0.20, -0.10, -0.05, 0.00, 0.05, 0.10, 0.20$. Dichas soluciones están compuestas por cuatro ondas que se mueven hacia la izquierda: un choque

rápido, una discontinuidad de Alfvén, una rarefacción lenta y una discontinuidad de contacto; y cuatro ondas que se mueven a la derecha: un choque lento, una discontinuidad de Alfvén y un choque rápido (Giacomazzo and Rezzolla, 2007).

Las soluciones numéricas con diferentes estados de polarización magnética muestran que los choques rápidos, la rarefacción rápida y las discontinuidades de Alfvén se mueven nuevamente más rápido en fluidos diamagnéticos. En adición, los valores máximos de densidad de masa y de presión se incrementan cuando se reduce el valor de χ_m , es decir, cuando se hace más negativo. Finalmente, como en casos anteriores, se observa que a partir de un cierto valor de χ_m , el gradiente de presión total cambia de signo a través de la onda de rarefacción y del choque lento que se desplaza hacia la derecha.

1.4.1.8. Onda genérica de Alfvén. En este último experimento numérico se tiene una configuración inicial similar a la propuesta por Balsara (prueba 5), es decir, las componentes transversales de la velocidad y del campo magnético son diferentes en ambos fluidos. Sin embargo, en este caso el fluido a la derecha se encuentra inicialmente en reposo, mientras que el de la izquierda posee un movimiento puramente transversal. La discontinuidad en el campo magnético (magnitud y dirección) es, a su vez, más grande en este problema que en el anterior. Las soluciones que se muestran en la figura 9 corresponden a un tiempo $t = 0.4$ y a los valores de susceptibilidad $\chi_m = -0.20, -0.10, -0.05, 0.00, 0.05, 0.10, 0.20$. Estas soluciones consisten en tres ondas hacia la izquierda: una rarefacción rápida, una discontinuidad de Alfvén y un choque lento, y cuatro ondas hacia la derecha: una onda de contacto, un choque lento, una onda de Alfvén y un choque rápido.

Las soluciones para diferentes valores de susceptibilidad magnética exhiben un comporta-

miento similar al del problema anterior, aunque en este caso las ondas de Alfvén parecen viajar a la misma velocidad, independientemente del valor de χ_m . Además de esto, el estado constante entre la onda de Alfvén izquierda y el choque lento en esta misma dirección tiende a ocupar más dominio en x en fluidos diamagnéticos. Como comentario final, es más difícil capturar numéricamente las ondas de Alfvén en materiales paramagnéticos que en aquellos con propiedades diamagnéticas. De los resultados numéricos se observa que los estados constantes entre los choques lentos y las ondas de Alfvén parecen tomar valores menores y ocupar menos zonas numéricas en los fluidos paramagnéticos que en los diamagnéticos. Esto puede explicar la dificultad que se presenta para capturar este tipo de discontinuidades en nuestras simulaciones, sin embargo, para establecer la naturaleza física de este comportamiento es necesario un análisis teórico más detallado del comportamiento de estas ondas. Dicho análisis será parte de los objetivos de un futuro trabajo.

1.4.2. Acreción esférica magnetizada de un fluido perfecto con polarización magnética.

En esta subsección se analizará la habilidad del código para mantener la solución estacionaria que describe la acreción esférica de un fluido perfecto magnetizado y con polarización magnética en un agujero negro de Schwarzschild. En (De Villiers and Hawley, 2003), los autores mostraron que la solución puramente hidrodinámica, obtenida por Michel en 1972 (Michel, 1972), seguía siendo la misma cuando se agregaba un campo magnético radial al sistema. Esta solución magnetizada, a pesar de no poder representar un sistema físico real (Antón et al., 2006a), resulta ser de gran utilidad para probar códigos que resuelvan las ecuaciones de la magnetohidrodinámica relativista. Ahora bien, siguiendo el mismo procedimiento que se presenta en (De Villiers and Hawley, 2003), es posible mostrar que la solución de Michel con campo magnético radial tampoco se ve alterada por

la polarización magnética del fluido, cuando ésta se modela por medio de la relación constitutiva lineal (37). Para probar este resultado, se calcula la componente mixta

$$T_t^r = [\rho h + b^2(1 - \chi)]u^r u_t - b^r b_t(1 - \chi), \quad (104)$$

del tensor de momento-energía, ya que es la única que interviene en la conservación del flujo de energía, $\nabla_r T_t^r = 0$. A partir de la ecuación (20), se puede demostrar que $b^r b_t = b^2 u^r u_t$, y por lo tanto, que los términos con campo magnético y susceptibilidad magnética se cancelan. Debido a este resultado es posible utilizar la solución de Michel magnetizada para estimar el orden de convergencia global del código CAFE cuando el fluido se encuentra magnéticamente polarizado.

El dato inicial para este problema es el conjunto de variables primitivas $\vec{\mathcal{W}} = [\rho, v^r, p, B^r]^T$, donde la densidad de masa en reposo y la presión están relacionadas por una ecuación de estado politrópica, $p = K\rho^\Gamma$, con un índice adiabático $\Gamma = 4/3$. Las primeras tres variables están dadas por la solución de Michel, mientras que el campo magnético se calcula a partir de la ley de Gauss (32). La solución hidrodinámica se calcula a partir de las ecuaciones,

$$r^2 \rho u^r = C_1, \quad (105)$$

$$r^2 \rho h u^r u_t = C_2, \quad (106)$$

donde las constantes C_1 y C_2 se obtienen una vez se especifique el radio crítico, r_c , y la densidad de masa en reposo crítica, $\rho_c = \rho(r_c)$. Este radio marca la posición en la cual el fluido pasa de

ser subsónico a supersónico. Para llevar a cabo las simulaciones, se usan los mismos parámetros de (Giacomazzo and Rezzolla, 2007), los cuales corresponden a $r_c = 8$ (asumiendo que $M_{BH} = 1$) y $\rho_c = 6.35 \times 10^{-2}$. Además, se usan coordenadas de Eddington-Finkelstein, con las cuales se remueve la singularidad de coordenadas en el horizonte de eventos ($r = 2$), y por lo tanto es posible escoger un dominio espacial $r \in [1.9, 20.9]$, con $N = 50$ zonas radiales. Por otro lado, el campo magnético B^r , que satisface la condición de divergencia cero a tiempo inicial, se obtiene como,

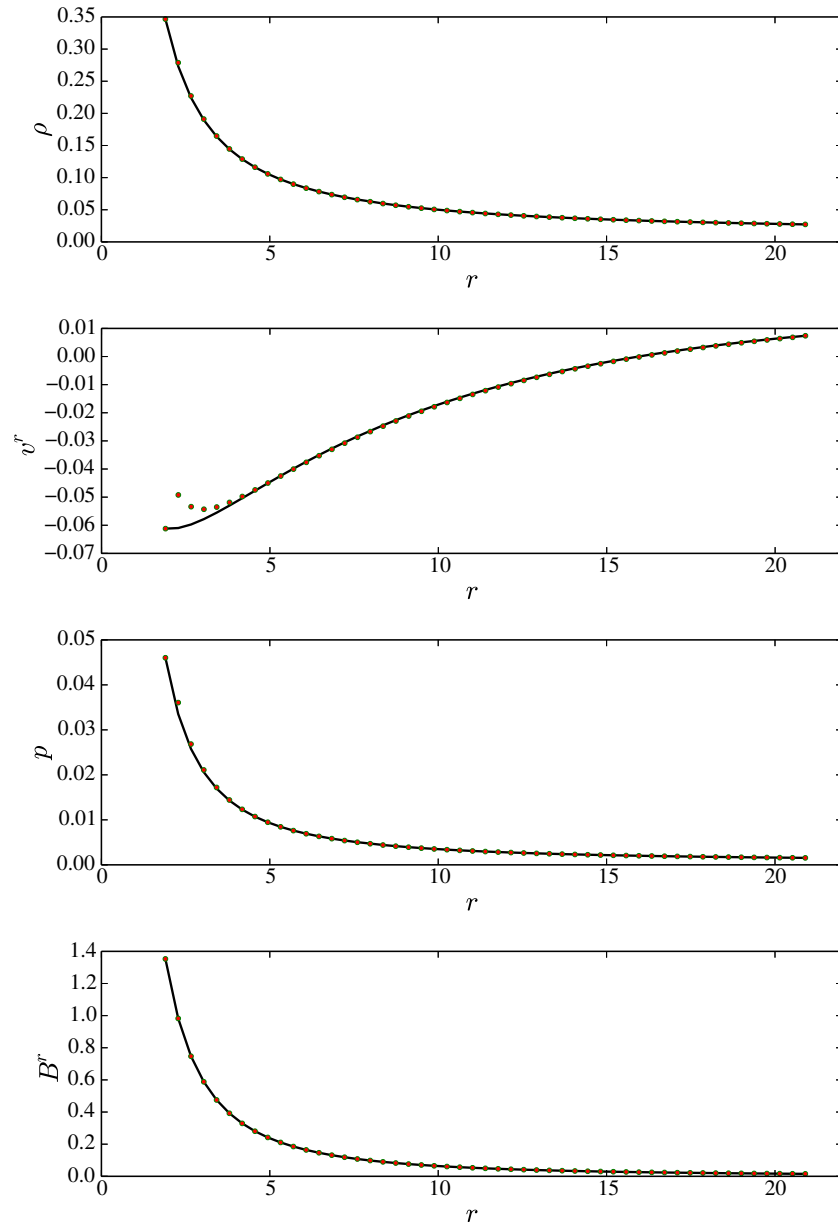
$$B^r = \frac{C_{EH}}{\sqrt{g_{rr}}r^2}, \quad (107)$$

donde $C_{EH} = 4\sqrt{\rho_{EH}\beta_{EH}}$. De manera que para definir el campo magnético sólo es necesario especificar el parámetro $\beta_{EH} = b^2/\rho$, ya que la densidad de masa en el horizonte de eventos, ρ_{EH} , se calcula con la solución de Michel.

En las simulaciones se utilizaron únicamente los valores positivos de susceptibilidad magnética, $\chi_m = 0.000, 0.001, 0.005, 0.008$, debido a que los fluidos paramagnéticos resultan más difíciles de evolucionar numéricamente que los diamagnéticos. Para cada uno de estos valores de χ_m se calculó la norma L_1 del error

$$L_1 = \frac{\sum_i |\rho(r_i) - \rho_{exact}(r_i)|}{\sum_i \rho_{exact}(r_i)}, \quad (108)$$

en la densidad de masa en reposo para diferentes valores de β_{EH} . Los valores de intensidad de campo magnético que se usaron fueron $\beta_{EH} = 1, 10, 25$, los cuales equivalen a una razón entre

Figura 10.*Variables físicas para la acreción esférica*

Nota. Perfiles de densidad (ρ), velocidad radial (v^r), presión (p) y campo magnético radial (B^r) en función de la coordenada r para un fluido con $\chi_m = 0.001$ y $\beta_{EH} = 10$. Las curvas continuas de color negro representan la solución exacta, mientras que los puntos corresponden a la solución a tiempo $t = 200$.

la presión magnética y la hidrodinámica de $p_m/p = 3.88, 38.80, 97.00$, respectivamente. En la figura (10), se muestra la densidad de masa (ρ), la velocidad radial (v^r), la presión (p) y el campo magnético radial (B^r) en función de la distancia radial r para un fluido con $\chi_m = 0.001$ inmerso en un campo magnético con $\beta_{EH} = 10$. Las curvas continuas de color negro muestran la solución analítica, mientras que los puntos corresponden a la solución numérica cuando el tiempo es 200 veces la masa del agujero negro M_{BH} , es decir en $t = 200$ (asumiendo $M_{BH} = 1$). En esta figura se puede observar que el código es capaz de mantener en el tiempo la solución estacionaria que describe la acreción esférica de un fluido con polarización magnética. Sin embargo, la velocidad radial se desvia de la solución exacta cerca al horizonte de eventos. Como se menciona en (Duez et al., 2005), las fuerzas magnéticas se cancelan en el límite continuo, pero en un esquema de diferencias finitas esto no sucede exactamente. Como consecuencia, los errores producto de la discretización hacen que la solución numérica no sea exactamente igual a la analítica (Shibata and Sekiguchi, 2005). En particular, los errores más grandes se presentan en los puntos de la malla cercanos a $r = 2$, es decir, cerca al horizonte de eventos (Giacomazzo and Rezzolla, 2007), lo cual hace que los perfiles numéricos (especialmente el de velocidad) difieran de los teóricos en esta región. Estos errores aumentan con la intensidad del campo magnético, y por lo tanto también lo hacen con la susceptibilidad magnética.

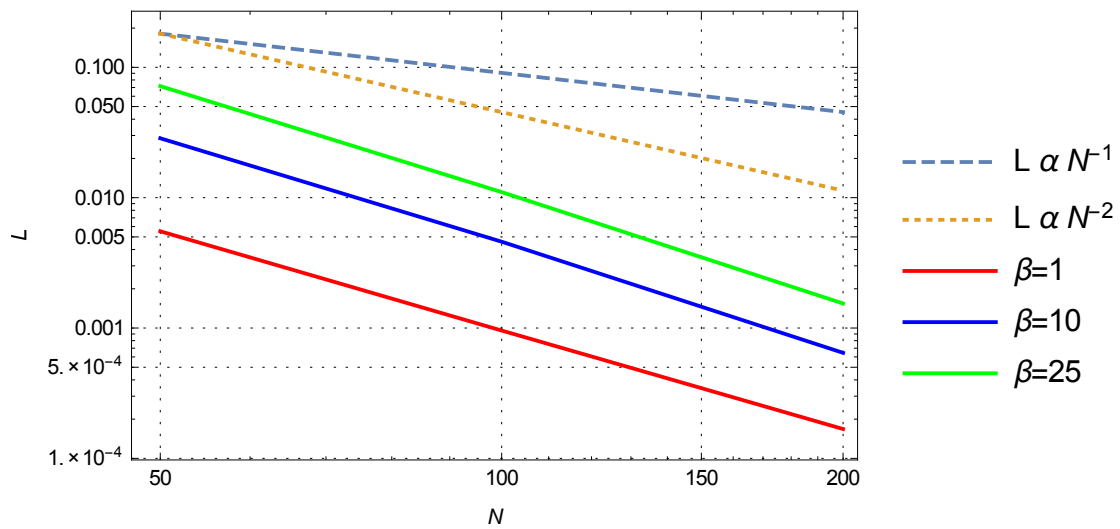
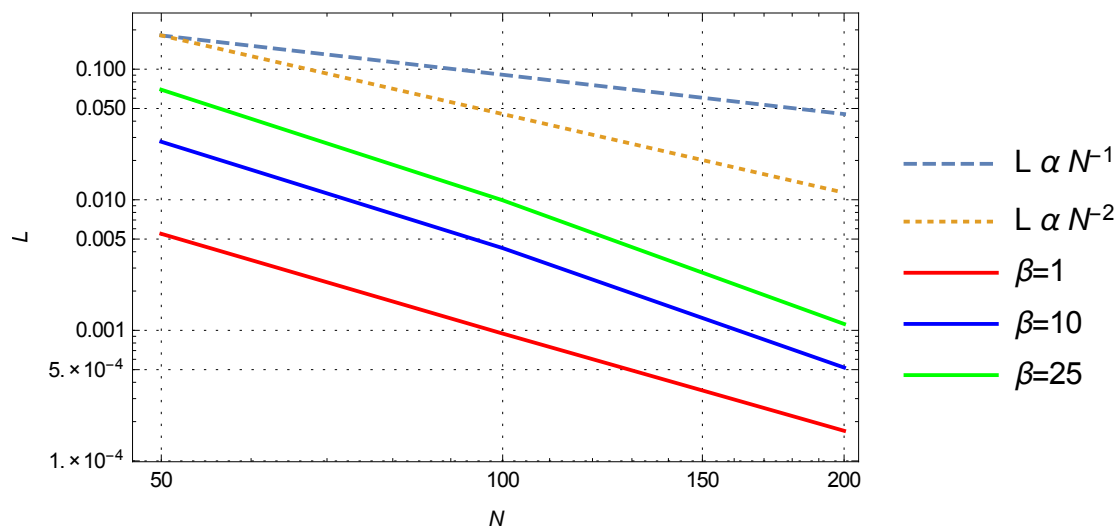
Ahora, con el objetivo de estimar el orden de convergencia, se presenta en la figura ?? la norma L_1 del error para la densidad de masa en reposo como función del número de zonas radiales N , a tiempo $t = 200$. La figura 12(a) corresponde a las evoluciones sin susceptibilidad magnética ($\chi_m = 0$) para tres valores de β_{EH} . De esta gráfica se puede apreciar que el orden de convergencia

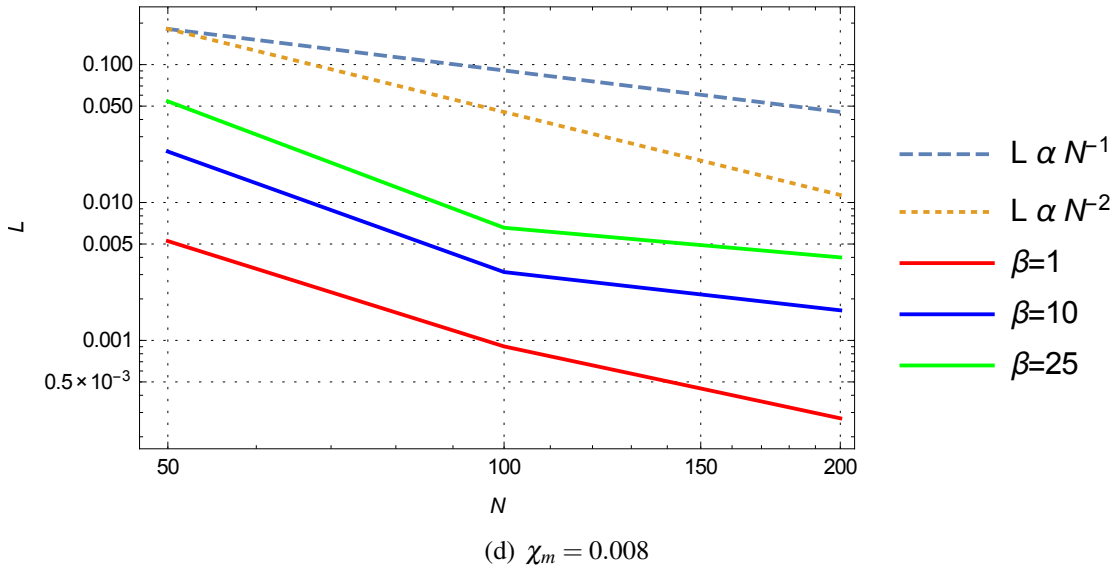
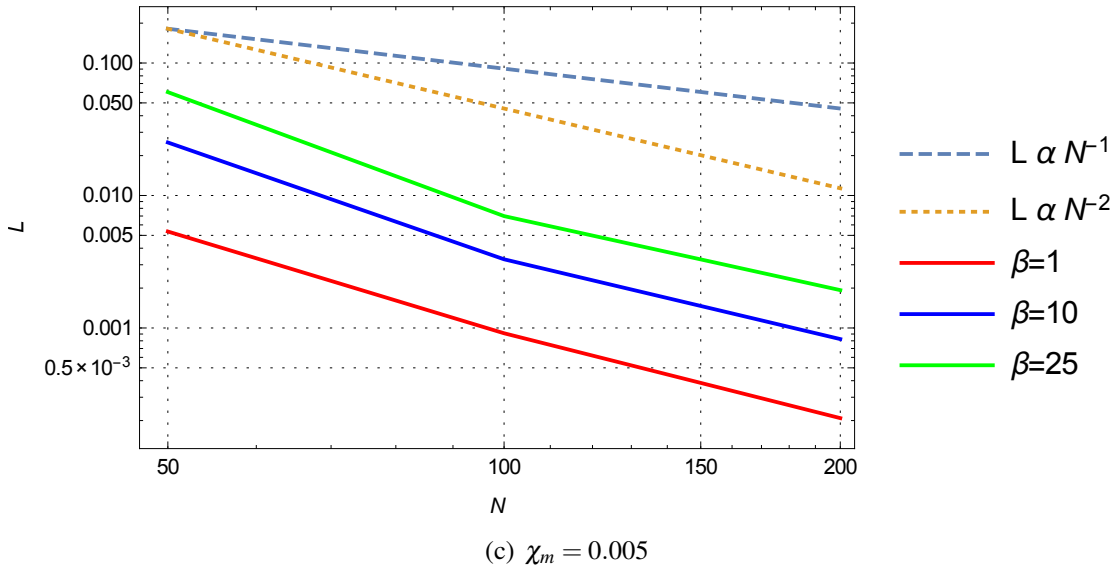
es ligeramente mayor que 2 para las intensidades de campo magnético consideradas. Un resultado similar se obtiene cuando se evoluciona la solución de Michel magnetizada con una susceptibilidad magnética de 0.001 (ver figura 12(b)). Sin embargo, en la figura 12(c), es decir cuando $\chi_m = 0.005$, la convergencia se reduce a segundo orden para todos los valores de β_{EH} . Las gráficas de la figura 12(d) muestran que con una susceptibilidad magnética de 0.008, el orden de convergencia se reduce considerablemente en los casos con $\beta_{EH} = 10$ y $\beta_{EH} = 25$. Estos resultados son consistentes con los métodos numéricos usados ya que todos ellos son de segundo orden, y por lo tanto se espera un orden global de convergencia ≈ 2 .

Se puede concluir que la habilidad del código para evolucionar fluidos polarizados en campos magnéticos y gravitacionales intensos, no sólo depende de la razón entre la presión magnética y la presión del gas, sino también de la susceptibilidad magnética asociada a las sustancias que están siendo acretadas al agujero negro. Adicionalmente se concluye que la convergencia de CAFE es $\gtrsim 2$ para $\chi_m \lesssim 0.005$ y para todas las intensidades de campo magnético consideradas en estas simulaciones. No obstante, cuando $\chi_m = 0.008$ la convergencia global del código se reduce a un valor que está entre primer y segundo orden para $\beta_{EH} = 10$ y $\beta_{EH} = 25$. Estos resultados son interesantes porque una intensidad de tan sólo $\beta_{EH} \approx 4$ corresponde a un campo magnético de $\approx 10^{19}$ G (Giacomazzo and Rezzolla, 2007). Además, los valores típicos de susceptibilidad magnética en los materiales están alrededor de 10^{-5} . Por lo tanto, con CAFE se puede estudiar la polarización magnética de sistemas reales en presencia de campos gravitacionales en el límite de campo fuerte.

Finalmente, en (Lora-Clavijo et al., 2015a) se mostró que el código CAFE preserva la condición de divergencia nula del campo magnético al orden de la precisión de la maquina. Sin embargo,

al incluir la polarización magnética del fluido no es evidente que esta condición se siga cumpliendo, ya que fue necesario modificar el método para recuperar las variables primitivas (ver sección 1.3). Para mostrar esta propiedad, se presenta en la figura (12) el valor máximo de la divergencia del campo, $\text{div}(\vec{B}) = \partial_i(\sqrt{\gamma}B^i)$, a cada paso de tiempo durante la acreción esférica de un fluido magnéticamente polarizado con $\chi_m = 0.008$ y en un campo magnético con $\beta_{EH} = 25$. En esta figura se observa que la divergencia de $\vec{B}$ oscila entre 7×10^{-15} y 1×10^{-14} , por lo tanto se puede asegurar que durante la simulación no aparecen monopolos magnéticos que generen comportamientos no físicos en el sistema.

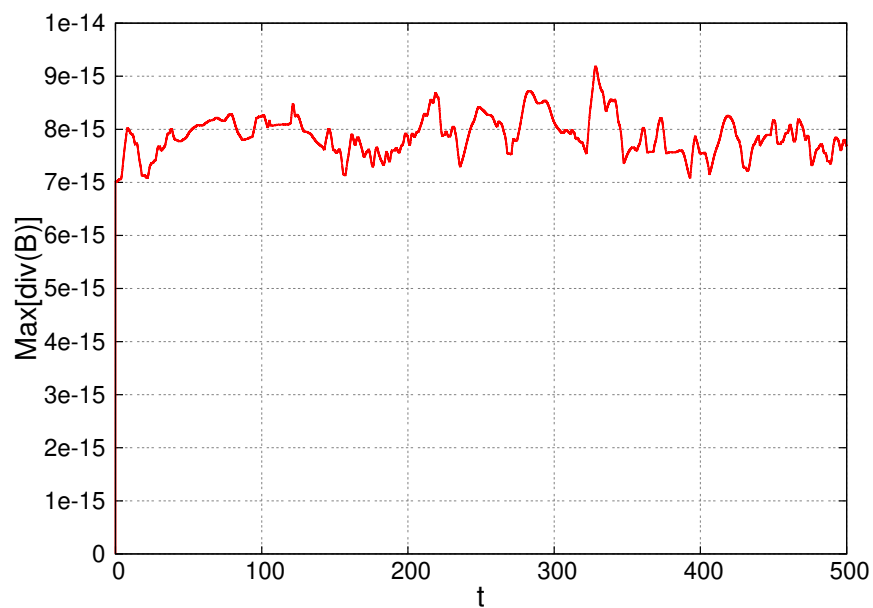
Figura 11.*Norma L_1 del error relativo para la densidad de masa en la acreción esférica*(a) $\chi_m = 0.000$ (b) $\chi_m = 0.001$



Nota. Norma L_1 del error relativo para la densidad de masa como función de el número de zonas radiales N , para diferentes valores de intensidad de campo magnético β en el horizonte de eventos. Cada panel corresponde a un valor distinto de susceptibilidad magnética χ_m . Las líneas punteadas indican el primer y segundo orden de convergencia global. Se observa que la convergencia del código es $\gtrsim 2$ para $\chi_m \lesssim 0.005$ y para todas las intensidades de campo magnético que se consideraron. Cuando $\chi_m = 0.008$ y $\beta \geq 10$ la convergencia se reduce a un valor entre primer y segundo orden. Para los valores de β y χ_m observados en la naturaleza la convergencia es de segundo orden, lo cual es consistente con los métodos numéricos empleados en CAFE.

Figura 12.

Valor máximo de la divergencia del campo magnético en la acreción esférica



Nota. Valor máximo de la divergencia del campo magnético, $\text{div}(\vec{B}) = \partial_i(\sqrt{\gamma}B^i)$, a cada paso de tiempo durante la evolución de la acreción esférica de un fluido magnéticamente polarizado con $\chi_m = 0.008$ en un campo magnético con $\beta_{EH} = 25$. La condición de divergencia nula para $\vec{B}$ se satisface numéricamente al orden de la precisión de maquina durante toda la evolución.

2. Inestabilidad de Kelvin-Helmholtz relativista con polarización magnética

Una vez obtenida la estructura teórica y numérica necesaria para resolver al sistema de ecuaciones de la RMHD con polarización magnética, es posible abordar un problema de relevancia en la astrofísica. Este es el caso de la KHI, la cual se puede generar cuando existe una velocidad relativa entre dos corrientes de un fluido, o entre dos fluidos. Este cizallamiento en el campo de velocidades se produce con facilidad en diferentes escenarios, desde la atmósfera solar Li et al. (2018), hasta los núcleos activos de galaxias, en donde los jets extragalácticos se mueven con una velocidad diferente a la del medio que los rodea Perucho and Lobanov (2008). La KHI es importante en astrofísica ya que es un mecanismo para acelerar partículas, transformar la energía cinética del fluido en energía magnética, y por último generar turbulencia Zhang et al. (2009). Por consiguiente, es un mecanismo viable para explicar la presencia de algunos campos magnéticos intensos en el universo. Debido a su relevancia, en este capítulo se estudiará analítica y numéricamente el efecto que introduce la polarización magnética de la materia en la generación de la KHI y su transición al régimen turbulento.

2.1. Ecuaciones basicas y configuración inicial

La evolución de un fluido magnéticamente polarizado que interactúa con un campo magnético se puede describir en el espacio-tiempo de Minkowski por medio de las ecuaciones conservativas

$$\partial_t \vec{U} + \partial_i \vec{F}^i = 0, \quad (109)$$

más la condición que prohíbe la existencia de monopolos magnéticos, $\partial_i B^i = 0$. La ecuación (109) se deduce directamente de (33) cuando se asume que el campo gravitacional es cero, es decir, cuando las componentes de la métrica son $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y por consiguiente los términos de curvatura se hacen cero. De esta manera, el vector de variables conservativas se reduce a

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} D \\ S_j \\ \tau \\ B^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho h^* W^2 v_j - \frac{1}{\mu_0} (1 - \chi) b^t b_j \\ \rho h^* W^2 - p^* - \frac{1}{\mu_0} (1 - \chi) (b^t)^2 - \rho W \\ B^k \end{bmatrix}, \quad (110)$$

y el vector de flujos a

$$\vec{F}^i = \begin{bmatrix} D v^i \\ S_j v^i + p^* \delta_j^i - \frac{b_j B^i}{\mu_0 W} (1 - \chi) \\ \tau v^i + p^* v^i - \frac{b^t B^i}{\mu_0 W} (1 - \chi) \\ v^i B^k - v^k B^i \end{bmatrix}. \quad (111)$$

Adicionalmente, las relaciones entre la velocidad y el campo magnético en el marco comovil con las mismas cantidades en el marco en reposo toman la forma

$$u^\mu = (W, W v^i), \quad b^\mu = \left[W B^i v_i, \frac{B^j}{W} + W (B^i v_i) v^j \right]. \quad (112)$$

La configuración inicial que se usará para determinar el efecto de χ_m en la inestabilidad de KH consiste en un flujo magnéticamente polarizado en el plano xy que se mueve en la dirección x . En la región $y > 0$ el fluido se mueve con una velocidad $\vec{v} = V_0 \hat{i}$, mientras que en $y < 0$ la velocidad es $\vec{v} = -V_0 \hat{i}$, de manera que la interface entre los fluidos se encuentra en $y = 0$. Además, se asume que ambos fluidos tienen densidades y presiones iguales y uniformes, y que los dos interactúan con un campo magnético constante de la forma $\vec{B} = B_x \hat{i}$. Para estas variables físicas se adoptan los mismos valores numéricos que se usan en Bucciantini and Del Zanna (2006), ya que están motivados en las condiciones locales observadas en las nebulosas de vientos de pulsar o PWNe por sus siglas en inglés, y por lo tanto son de relevancia astrofísica. En particular, se asume que $V_0 = 0.25$, $p/\rho = 20$ (con $\rho = 1$) y $\Gamma = 4/3$, los cuales son apropiados para un plasma relativista. Finalmente, se considera que la susceptibilidad magnética, χ_m , es constante en todo el espacio y durante toda la evolución del sistema.

El sistema descrito en el párrafo anterior es inestable bajo ciertas condiciones de densidad, presión, campo magnético, etc. En la naturaleza, los movimientos aleatorios en los fluidos excitan algunos modos inestables que crecen en el tiempo y conducen a un estado turbulento. La rapidez con que crecen estos modos se puede calcular analíticamente en la fase lineal, de manera que es posible determinar el efecto de χ_m en los estados iniciales de la inestabilidad de KH. Este es precisamente el objetivo de la siguiente sección.

2.2. Análisis lineal de la inestabilidad

La rapidez con la que crece la inestabilidad de KH en un fluido magnéticamente polarizado se puede obtener siguiendo el procedimiento presentado en Osmanov et al. (2008). En este trabajo

los autores escriben las ecuaciones de la MHD relativista en los marcos de referencia comoviles a los fluidos, ya que en ellos la relación de dispersión toma una forma más sencilla. Ahora, el sistema está descrito por el conjunto de variables físicas $\tilde{\Psi}_{\pm} = (\tilde{\rho}_{\pm}, \tilde{p}_{\pm}, \tilde{v}_{\pm}^i, \tilde{B}_{\pm}^i)$, donde las tildes indican que las cantidades están medidas en el marco de referencia comovil, el signo $+$ corresponde al fluido en $y > 0$ y el $-$ al fluido en $y < 0$. Ahora bien, al estado inicial, $\tilde{\Psi}_{0\pm}$, se agrega una perturbación $\delta\tilde{\Psi}_{\pm}$, de manera que el nuevo estado se puede escribir como la superposición

$$\tilde{\Psi}_{\pm} = \tilde{\Psi}_{0\pm} + \delta\tilde{\Psi}_{\pm}. \quad (113)$$

La dependencia espacio-temporal de la perturbación se asume como

$$\delta\tilde{\Psi}_{\pm} \propto \exp [i(\tilde{k}_{\pm}\tilde{x} + \tilde{l}_{\pm}\tilde{y} + \tilde{m}_{\pm}\tilde{z} - \tilde{\omega}_{\pm}\tilde{t})], \quad (114)$$

donde $\tilde{k}_{\pm}$, $\tilde{l}_{\pm}$, $\tilde{m}_{\pm}$ son los números de onda en cada una de las direcciones y $\tilde{\omega}_{\pm}$ es la frecuencia. Estas cantidades en el marco comovil están relacionadas con las medidas en el marco euleriano mediante las transformaciones de Lorentz

$$\tilde{\omega}_{\pm} = W(\omega \mp kV_0), \quad (115)$$

$$\tilde{k}_{\pm} = W(k \mp \omega V_0), \quad (116)$$

$$\tilde{l}_{\pm} = l_{\pm}, \quad \tilde{m}_{\pm} = m, \quad (117)$$

siendo $W = 1/\sqrt{1-v^2}$ el factor de Lorentz. Debido a la manera en que se escoge la perturbación (114), los modos inestables tienen frecuencias complejas, y es precisamente la parte imaginaria de ω la que describe la rapidez de crecimiento de la inestabilidad.

Por otro lado, la relación de dispersión se obtiene por medio de la ecuación característica (66)

$$(\rho h)^{-1} a^2 A^2 N_4 Q = 0, \quad (118)$$

donde

$$A = [\rho h + (1 - \chi)b^2]a^2 - (1 - \chi)B^2, \quad (119)$$

$$N_4 = f_1 a^4 - f_2 a^2 G - f_3 a^2 B^2 + f_4 B^2 G, \quad (120)$$

$$Q = b^4 \chi^2 - b^2(b^2 + 2\rho h)\chi + \rho h(\rho h + b^2), \quad (121)$$

y $a = u^\mu \phi_\mu$, $B = b^\mu \phi_\mu$, $G = \phi_\mu \phi^\mu$. El término N_4 se define por medio de las funciones

$$f_1 = (e'_p - 1)\rho h + (e'_p + 1)\chi b^2, \quad (122)$$

$$f_2 = \rho h + (1 - 2\chi)b^2 e'_p - \chi b^2, \quad (123)$$

$$f_3 = (e'_p + 1)\chi, \quad (124)$$

$$f_4 = 1 - \chi. \quad (125)$$

Esta ecuación describe las velocidades de propagación de las ondas en el fluido, las cuales se calculan haciendo cero las funciones a , A y N_4 .

Ahora bien, las velocidades que resultan de (118) se pueden obtener de manera sencilla en el marco comovil donde $u^0 = 1$, $u^i = 0$, $b^0 = 0$ y $b^i = B^i$. Por lo tanto, para una onda que se propaga en general con $\phi_\mu = (-\tilde{\omega}, \tilde{k}, \tilde{l}, \tilde{m})$ se encuentra que $a = u^\mu \phi_\mu = -\tilde{\omega}$, $B = b^\mu \phi_\mu = B_0 \tilde{k}$ y $G = \phi^\mu \phi_\mu = -\tilde{\omega}^2 + \tilde{k}^2 + \tilde{l}^2 + \tilde{m}^2$. De esta manera, a partir de $\tilde{A} = 0$ (cfr. 67) se obtiene la ecuación $\tilde{\omega}_\pm^2 - \tilde{V}_A^2 \tilde{k}_\pm^2 = 0$, donde

$$\tilde{V}_A^2 = \frac{(1 - \chi)B_0^2}{\eta + (1 - \chi)B_0^2} \quad (126)$$

es la velocidad de Alfvén. Esto implica que las frecuencias asociadas a los modos de Alfvén en un fluido polarizado son reales y que no contribuyen a la inestabilidad de KH. Por el contrario, los modos magnetoacústicos, que son soluciones a la ecuación $\tilde{N}_4 = 0$ (cfr. 120), pueden ser reales o imaginarios, y por consiguiente, contribuyen a la inestabilidad. En el marco comovil la ecuación

de estos modos se reduce a

$$\frac{\tilde{\omega}_{\pm}^4}{(\tilde{k}_{\pm}^2 + \tilde{l}_{\pm}^2 + \tilde{m}_{\pm}^2)^2} - \tilde{\mu}_{\pm} \frac{\tilde{\omega}_{\pm}^2}{\tilde{k}_{\pm}^2 + \tilde{l}_{\pm}^2 + \tilde{m}_{\pm}^2} + \tilde{v}_{\pm}^2 = 0, \quad (127)$$

donde

$$\tilde{\mu}_{\pm} = C_s^2 + V_A^2 - V_A^2 [C_s^2 + (1 + C_s^2)\chi_m] \frac{\tilde{l}_{\pm}^2 + \tilde{m}_{\pm}^2}{\tilde{k}_{\pm}^2 + \tilde{l}_{\pm}^2 + \tilde{m}_{\pm}^2}, \quad (128)$$

$$\tilde{v}_{\pm}^2 = V_a^2 C_s^2 \frac{\tilde{k}_{\pm}^2}{\tilde{k}_{\pm}^2 + \tilde{l}_{\pm}^2 + \tilde{m}_{\pm}^2}, \quad (129)$$

siendo $C_s = \sqrt{\Gamma p_0 / \rho_0 h_0}$ la velocidad del sonido.

Ahora bien, además de la ecuación (127), es necesario imponer condiciones de continuidad o juntura sobre la interface, localizada en $y = 0$. En este plano la presión total debe ser continua, es decir, $p_{t+} = p_{t-}$, siendo $p_t = p + (1 - 2\chi)(b^2/2\mu_0)$. Adicionalmente, los desplazamientos de los fluidos deben coincidir Bodo et al. (2004), lo cual se cumple si

$$\frac{\delta v_{y+}}{\omega - kV_0} = \frac{\delta v_{y-}}{\omega + kV_0}. \quad (130)$$

Finalmente, al introducir en (109) la dependencia espacio-temporal dada en (114), y despreciar los términos cuadráticos o de orden superior, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones a primer

orden en las perturbaciones

$$(1 - \chi)B_{x_0} \frac{\tilde{k}_\mp}{W_0} \delta B_{y_\pm} + [(1 - \chi)\omega B_{x_0}^2 + \rho_0 h_0 W_0^2 \tilde{\omega}_\mp] \delta v_{y_\pm} -$$

$$- [\delta p_\pm + (1 - 2\chi)B_{x_0} \delta B_{x_\pm}] m = 0, \quad (131)$$

$$(1 - \chi)B_{x_0} \frac{\tilde{k}_\mp}{W_0} \delta B_{z_\pm} + [(1 - \chi)\omega B_{x_0}^2 + \rho_0 h_0 W_0^2 \tilde{\omega}_\mp] \delta v_{z_\pm} -$$

$$- [\delta p_\pm + (1 - 2\chi)B_{x_0} \delta B_{x_\pm}] m = 0, \quad (132)$$

$$(\omega \mp kV_0) \delta B_{x_\pm} - B_{x_0} (l_\pm \delta v_{y_\pm} + m \delta v_{z_\pm}) = 0, \quad (133)$$

$$(\omega \mp kV_0) \delta B_{y_\pm} + k B_{x_0} \delta v_{y_\pm} = 0, \quad (134)$$

$$(\omega \mp kV_0) \delta B_{z_\pm} + k B_{x_0} \delta v_{z_\pm} = 0, \quad (135)$$

siendo las dos primeras ecuaciones las que describen el flujo de momentum en dirección y y z respectivamente, mientras que (133-135) son las ecuaciones linealizadas de inducción de Faraday.

A partir de las ecuaciones de inducción se puede escribir $\delta B_{i_\pm}$ en términos de $\delta v_{i_\pm}$. Esto permite definir la perturbación en la presión total como

$$\delta p_{t_\pm} = \delta p_\pm + (1 - 2\chi) \frac{l_\pm B_{x_0}^2 \delta v_{y_\pm}}{\omega \mp kV_0}. \quad (136)$$

Por lo tanto, a partir de las condiciones de juntura y usando las ecuaciones (131) y (132) se obtiene

$$\frac{l_+}{l_-} = \frac{\rho_0 h_0 W_0^2 (\omega - kV_0)^2 + (\omega^2 - k^2)(1 - \chi)B_{x_0}^2}{\rho_0 h_0 W_0^2 (\omega + kV_0)^2 + (\omega^2 - k^2)(1 - \chi)B_{x_0}^2}. \quad (137)$$

Además, de (127) se despeja $l_{\pm}^2$, dando como resultado

$$l_{\pm}^2 = -m^2 + \frac{\tilde{\omega}_{\pm}^2 [(C_s^2 + V_A^2)\tilde{k}_{\pm}^2 - \tilde{\omega}_{\pm}^2] - C_s^2 V_A^2 \tilde{k}_{\pm}^4}{C_s^2 V_A^2 [\tilde{k}_{\pm}^2 + (1 + \chi_m)\tilde{\omega}_{\pm}^2] - [C_s^2 + (1 - \chi_m)V_A^2] \tilde{\omega}_{\pm}^2}. \quad (138)$$

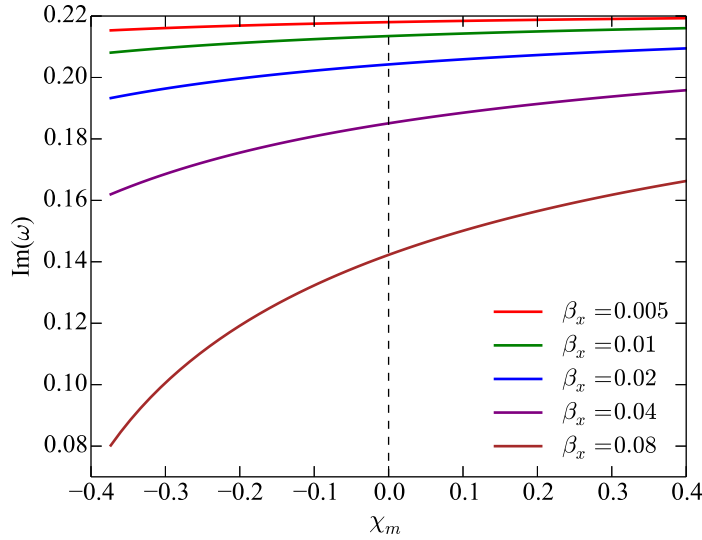
Esta expresión se combina con (137) para calcular una relación de dispersión de la cual se puede despejar numéricamente $\text{Im}(\omega)$ en términos de los números de onda k y m , del campo magnético B_{x0} , y de la susceptibilidad magnética de los fluidos χ_m , mientras que los otros parámetros físicos son los que se definen en la sección (2.1).

Ahora bien, a pesar de que el desarrollo admite también perturbaciones en cualquier dirección de la interfase, se restringirá el análisis al caso $m = 0$. Esto quiere decir que sólo se estudiarán perturbaciones paralelas al plano $x - y$. Además, siguiendo a Bucciantini and Del Zanna (2006) se analizará la estabilidad del modo con la mayor longitud de onda posible, es decir con $k = 1$, lo cual indica que en todo el dominio hay una sólo longitud de onda. Esto se debe a que el interés principal de este estudio está en las características a gran escala del fluido.

Una vez definido el vector de onda es posible caracterizar la rapidez con la que crece la perturbación en términos de la susceptibilidad magnética y del campo magnético. En la figura (13) se muestra $\text{Im}(\omega)$ en función de χ_m para diferentes valores del parámetro de magnetización $\beta_x = B_{x0}^2/2p$, el cual corresponde a la razón entre la presión magnética y la presión del gas. Como se puede observar, el diamagnetismo ($\chi_m < 0$) tiende a estabilizar la interface entre los fluidos, pero cuando el paramagnetismo está presente ($\chi_m > 0$), la inestabilidad crece más rápidamente que en el caso usual sin susceptibilidad magnética, el cual está representado por la línea punteada

Figura 13.

Rapidez de crecimiento $Im(\omega)$ en función de la susceptibilidad magnética χ_m para diferentes valores de β_x



Nota. De acuerdo con el análisis lineal, los fluidos diamagnéticos son más estables que los paramagnéticos.

vertical. Este comportamiento se vuelve cada vez más importante entre mayor es el parámetro de magnetización. Por lo tanto, en los casos con $\beta_x = 0.005$ y $\beta_x = 0.01$ la susceptibilidad magnética de los fluidos no produce cambios significativos en el régimen lineal, respecto al caso con $\chi_m = 0$. Para valores de β_x más grandes, la susceptibilidad comienza a afectar la evolución de la inestabilidad, y en particular se observa que las desviaciones respecto al caso sin susceptibilidad son más pronunciadas para los fluidos diamagnéticos que para los paramagnéticos.

Por otro lado, en algunas ocasiones es interesante analizar la inestabilidad en términos del

número de Mach relativista

$$M_r = \frac{V_0/\sqrt{1-V_0^2}}{C_s/\sqrt{1-C_s^2}}, \quad (139)$$

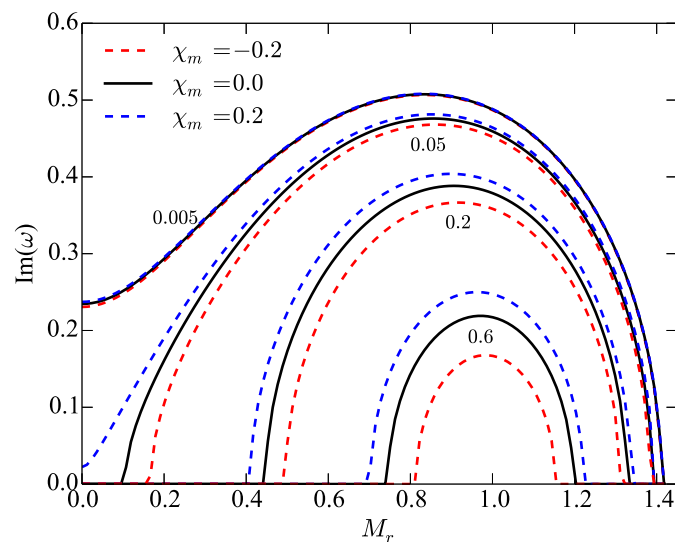
ya que éste indica que tan importante es la velocidad V_0 de los fluidos en comparación con la velocidad del sonido. En el caso sin polarización magnética, para cada valor de β_x hay un intervalo de M_r en el cual el sistema es inestable. El ancho de este intervalo se reduce cuando se considera un campo magnético más grande ya que éste genera una especie de tensión superficial que estabiliza la interfase Chandrasekhar (2013). En la figura (14) se muestra el efecto que tiene la susceptibilidad magnética sobre el intervalo de valores de M_r con $\text{Im}(\omega) \neq 0$. Las curvas negras corresponden al caso usual con $\chi_m = 0$, las líneas discontinuas azules son para fluidos paramagnéticos y las líneas discontinuas rojas son para los casos diamagnéticos. Junto a cada conjunto de curvas se muestra el valor de β_x correspondiente.

Cuando el parámetro de magnetización es pequeño la susceptibilidad magnética no produce cambios significativos en la rapidez de crecimiento de la inestabilidad, pero cuando $\beta_x = 0.05, 0.02, 0.06$, la susceptibilidad cambia apreciablemente los valores de $\text{Im}(\omega)$. Este cambio es bastante evidente cuando M_r se aproxima al primer valor con una rapidez de crecimiento diferente de cero. En particular, el paramagnetismo en la materia tiende a desestabilizar el sistema al incrementar el intervalo de valores de M_r , para el cual aparece la inestabilidad de KH. Por el contrario, el diamagnetismo estabiliza la interfase al reducir el intervalo de M_r .

En la siguiente sección se usarán simulaciones numéricas para probar los resultados analíticos del análisis lineal y para obtener la evolución no lineal de la inestabilidad, la cual está asociada

Figura 14.

Rapidez de crecimiento $\text{Im}(\omega)$ en función de el número de Mach relativista M_r para diferentes valores de β_x



Nota. A cada valor de β_x le corresponden tres casos diferentes: la curva roja discontinua representa el caso diamagnético con $\chi_m = -0.2$, la azul discontinua el caso paramagnético con $\chi_m = 0.2$ y la curva negra es la solución MHD usual, es decir, con $\chi_m = 0$. En los fluidos diamagnéticos se reduce el intervalo de valores de M_r para los cuales el sistema es inestable.

con la amplificación del campo magnético, el estado de saturación y el régimen turbulento.

2.3. Evolución no lineal

Con el objetivo de hacer un estudio numérico de la inestabilidad de KH en un fluido magnéticamente polarizado, se asume que el perfil de velocidad varia en la dirección y y de acuerdo con la ecuación

$$v_x = -V_0 \tanh(y/\bar{a}), \quad (140)$$

donde $\bar{a}$ es una constante que determina el ancho de la transición entre el fluido en $y < 0$ y el fluido en $y > 0$. Este perfil reproduce apropiadamente la configuración inicial usada para el análisis lineal, de manera que es posible comparar los resultados numéricos de esta sección con los resultados analíticos de la anterior. Ahora, para generar la inestabilidad se introduce la perturbación

$$v_y = v_{y0} \sin(kx) \exp[-(y/\sigma)^2], \quad (141)$$

al perfil de velocidad inicial del flujo. En la expresión anterior v_{y0} es la amplitud de la perturbación y σ es un parámetro que define el ancho de la función en dirección y . El valor de la amplitud de la perturbación es tal que $v_{y0} \ll V_0$.

La configuración inicial perturbada evoluciona de acuerdo a las ecuaciones no lineales y dependientes del tiempo presentadas en (109-111). Este sistema de ecuaciones se resuelve numéricamente con el código CAFE en un dominio de tamaño $D = 2\pi/k$ en dirección x y $2D$ en y , sobre el cual se define una malla numérica con $N_x = 180$ y $N_y = 360$, siendo N_x y N_y el número de puntos en ambas direcciones espaciales. El perfil de velocidad inicial y su perturbación se fijan con los

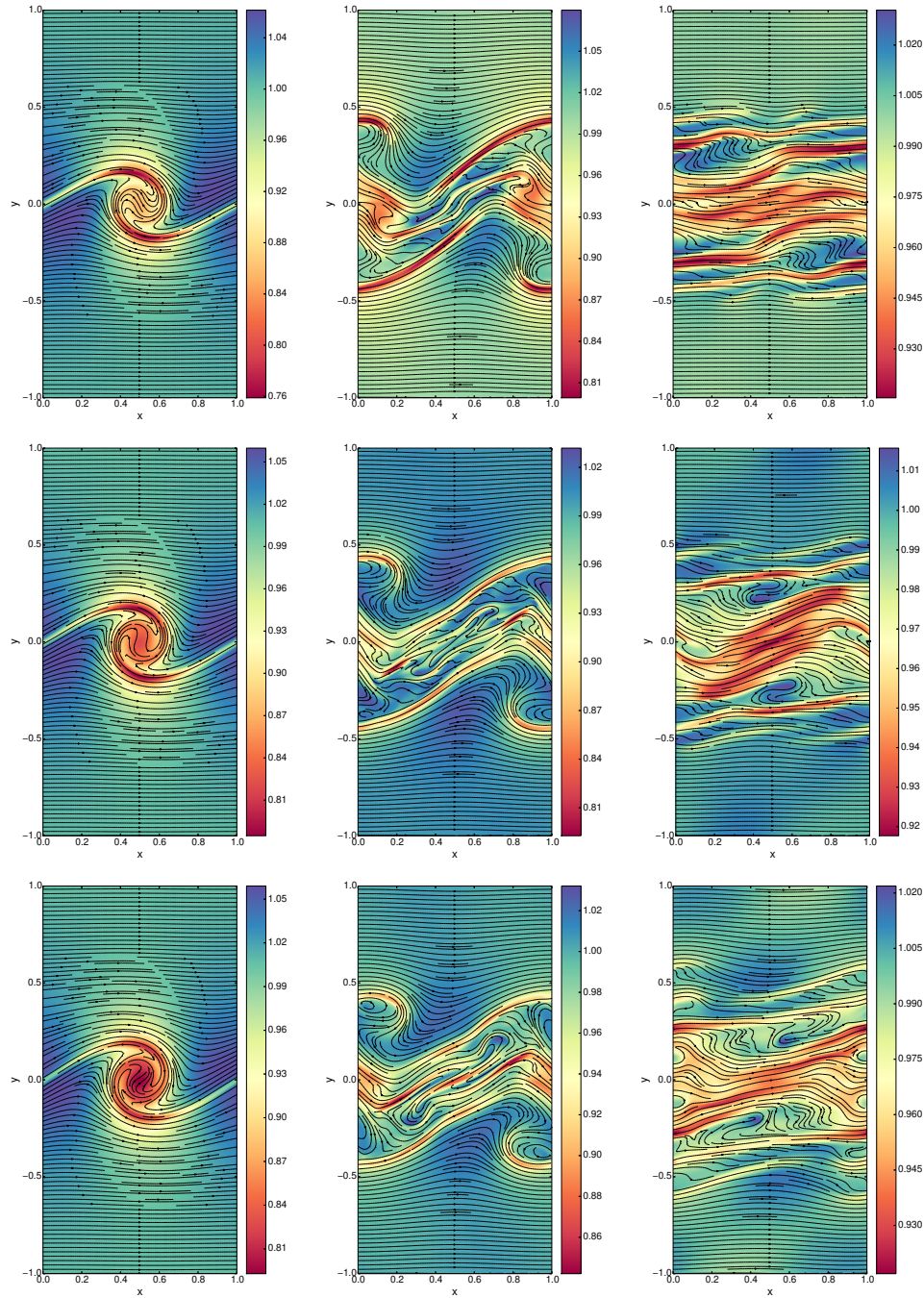
parámetros $\bar{a} = D/100$, $\beta = D/10$ y $v_{y0} = 0.01V_0$. Ahora, si se reescalan las distancias espaciales con D y el tiempo con D/c , el dominio espacial queda definido como $[0, 1] \times [-1, 1]$. Finalmente, como en Malagoli et al. (1996), se usan condiciones de frontera periódicas en $x = 0$ y $x = 1$, y condiciones de flujo saliente en $y = \pm 1$.

Con el dato inicial y las condiciones de frontera bien definidas se evoluciona numéricamente el sistema para obtener la distribución espacial de las variables físicas a cada paso de tiempo. En la figura (15) se presenta la evolución de la densidad de masa en reposo (en la escala de colores) y de las líneas de campo magnético para tres simulaciones diferentes, todas con $\beta_x = 0.02$. La fila superior corresponde al caso diamagnético con $\chi_m = -0.2$, la fila del medio es la evolución de la inestabilidad sin susceptibilidad magnética, y la fila inferior es el caso paramagnético con $\chi_m = 0.2$. Las tres columnas de la gráfica representan tiempos distintos de la evolución. La columna de la derecha es a tiempo $t = 5$, es decir, cuando esta a punto de terminar la fase lineal de la inestabilidad. En este tiempo se presenta una disminución de la densidad de masa en el centro de los vórtices que depende de la susceptibilidad magnética del fluido, siendo el caso paramagnético el que presenta una mayor disminución de ρ . La columna del medio corresponde a $t = 10$ y la de la derecha a $t = 20$. En el último tiempo que se muestra, el sistema ha alcanzado un estado cuasi-estacionario caracterizado por la formación de una región turbulenta en donde los fluidos se encuentran mezclados. Como se puede observar, la morfología de la inestabilidad es muy similar en los tres casos con diferente χ_m , sin embargo, la distribución de las variables físicas cambia en los casos diamagnéticos y paramagnéticos en comparación del caso con $\chi_m = 0$.

Para realizar un análisis más detallado del desarrollo de la inestabilidad de KH se siguió la

Figura 15.

Evolución de la densidad de masa en reposo y de las líneas de campo magnético en la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz



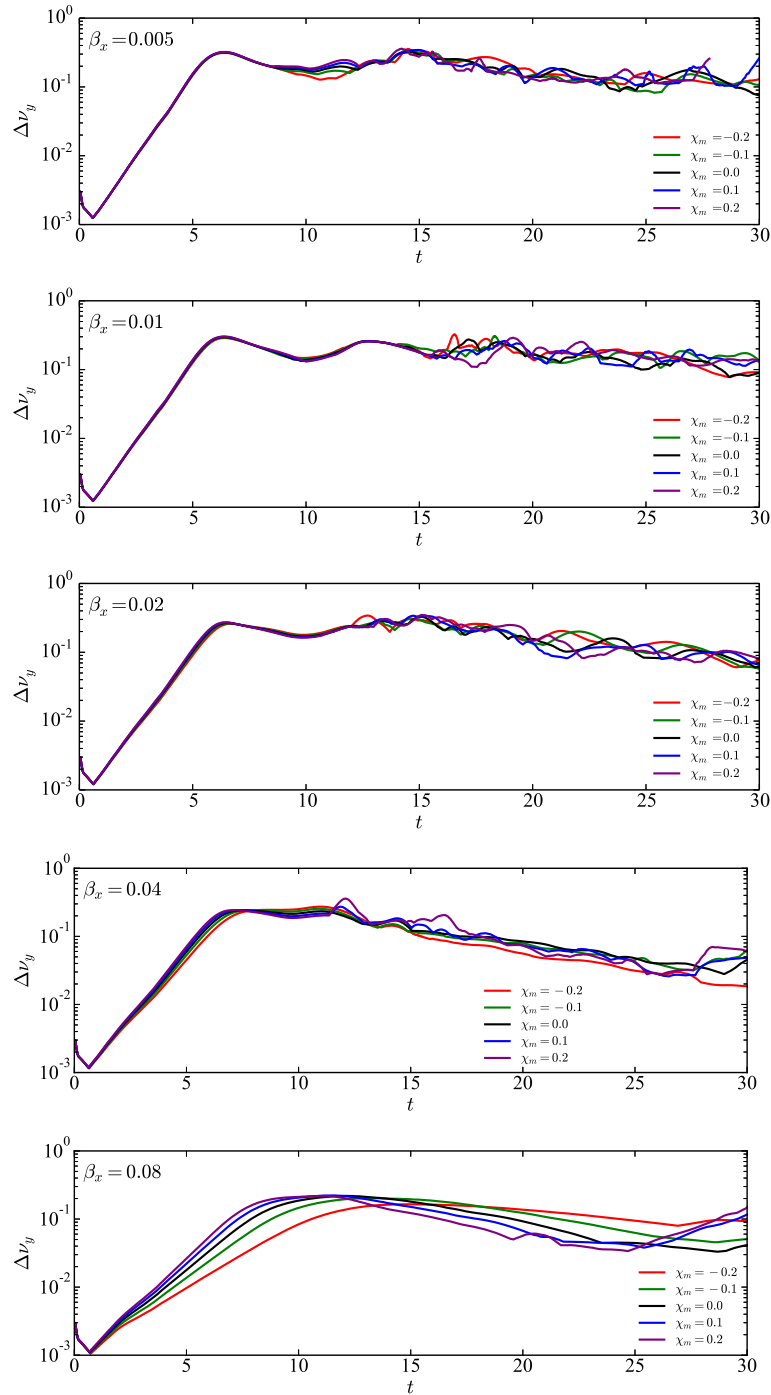
Nota. Evolución de la densidad de masa en reposo (colores) y de las líneas de campo magnético para tres estados de polarización magnética diferentes cuando $\beta_x = 0.02$. La fila superior es el caso diamagnético ($\chi_m = -0.2$), la del medio es el caso con $\chi_m = 0$ y la inferior es el caso paramagnético ($\chi_m = 0.2$). La columna izquierda es la evolución en $t = 5$, la del medio en $t = 10$ y la derecha en $t = 20$.

evolución temporal de la perturbación como se hace en Malagoli et al. (1996) o en Bucciantini and Del Zanna (2006). En la figura (16) se grafica la amplitud de la perturbación, $\Delta v_y = 0.5(v_{y_{\max}} - v_{y_{\min}})$, en función del tiempo para diferentes valores del parámetro de magnetización, siendo $v_{y_{\max}}$ y $v_{y_{\min}}$ los valores máximo y mínimo de la velocidad en dirección perpendicular a la interface. En cada gráfica se cambia la susceptibilidad magnética de los fluidos, de manera que para cada β_x se evolucionan dos fluidos diamagnéticos, dos paramagnéticos y uno con $\chi_m = 0$. El dominio temporal más interesante en esta gráfica es el que corresponde a la evolución lineal, ya que el comportamiento de la inestabilidad en esta región se puede comparar con los resultados del análisis lineal. Más específicamente, las pendientes de las gráficas en esta región corresponden a la rapidez de crecimiento de la inestabilidad, $\text{Im}(\omega)$.

Primero que todo es importante resaltar que las simulaciones que se realizaron con CAFE reproducen las pendientes del caso magnetohidrodinámico usual Ferrari et al. (1980); Osmanov et al. (2008), es decir, con $\chi_m = 0$ (curvas de color negro). De esta manera, el análisis de los resultados se enfoca únicamente en el efecto de introducir χ_m en la inestabilidad. Como se menciona en Bucciantini and Del Zanna (2006), los casos con $\beta_x = 0.005$ y $\beta_x = 0.01$ presentan un comportamiento casi hidrodinámico en el régimen lineal ya que la presión magnética es suficientemente pequeña en comparación con la del gas. Como consecuencia, la susceptibilidad magnética no contribuye significativamente en la rapidez de crecimiento de la inestabilidad. Este resultado está de acuerdo con el análisis lineal como se muestra en las curvas roja y verde de la figura (13). Sin embargo, a partir de $\beta_x = 0.02$, se puede apreciar que las pendientes para diferentes valores de χ_m se empiezan a separar. En particular, el caso con $\beta_x = 0.08$ muestra claramente las diferencias entre

las evoluciones diamagnéticas y las paramagnéticas. Cuando los fluidos presentan diamagnetismo, la rapidez con la que crece la inestabilidad se reduce considerablemente en comparación con el caso sin susceptibilidad magnética. Así, con base en el análisis lineal y en las simulaciones se puede concluir que el diamagnetismo incrementa el efecto del campo magnético, estabilizando la interfase entre los fluidos, mientras que el paramagnetismo desestabiliza el sistema. Sorprendentemente, el comportamiento de $\text{Im}(\omega)$ no es simétrico respecto al caso $\chi_m = 0$, es decir, la rapidez de crecimiento cambia más rápidamente hacia $\chi_m < 0$ que hacia los valores positivos. Este comportamiento también se predijo en el análisis lineal, y es bastante evidente en la curva para $\beta_x = 0.08$ de la figura (13), donde las pendientes son más inclinadas en $\chi_m < 0$ que en $\chi_m > 0$. Las simulaciones presentadas en esta sección sugieren que el comportamiento de la amplitud de la perturbación en el régimen no lineal es estadísticamente independiente de la susceptibilidad magnética, sin embargo, es necesario realizar un análisis más detallado en esta dirección.

Otro fenómeno interesante es la amplificación de la energía magnética E_{mag} Miura (1984). El proceso de amplificación se describe detalladamente en Malagoli et al. (1996), y se basa en el hecho de que las líneas de campo están atadas al fluido en la aproximación de la MHD ideal donde se considera un fluido altamente conductor. Debido a esto, el movimiento del fluido, producto de su vorticidad, estira las líneas mientras que el campo magnético se concentra y amplifica en los filamentos estrechos que se observan en la figura (15). La amplificación termina cuando las escalas del gradiente del campo son del orden de la resolución de la malla numérica. En este momento comienza a actuar la resistividad numérica (disipación), produciendo eventos de reconexión magnética Malagoli et al. (1996).

Figura 16.*Amplitud de la perturbación Δv_y en función del tiempo*

Nota. En cada gráfica se presentan los resultados para dos fluidos diamagnéticos con $\chi_m = -0.1, -0.2$, dos fluidos paramagnéticos con $\chi_m = 0.1, 0.2$, y para un fluido sin susceptibilidad magnética ($\chi_m = 0$). El comportamiento de la rapidez de crecimiento de la inestabilidad en estas simulaciones es consistente con los resultados que se presentan en las gráficas (13) y (14)

En la figura (17) tiene una estructura similar a la figura (16) pero en este caso se presenta la amplificación de la energía magnética, $E_{\text{mag}}(t)/E_{\text{mag}}(0)$, en función del tiempo, donde

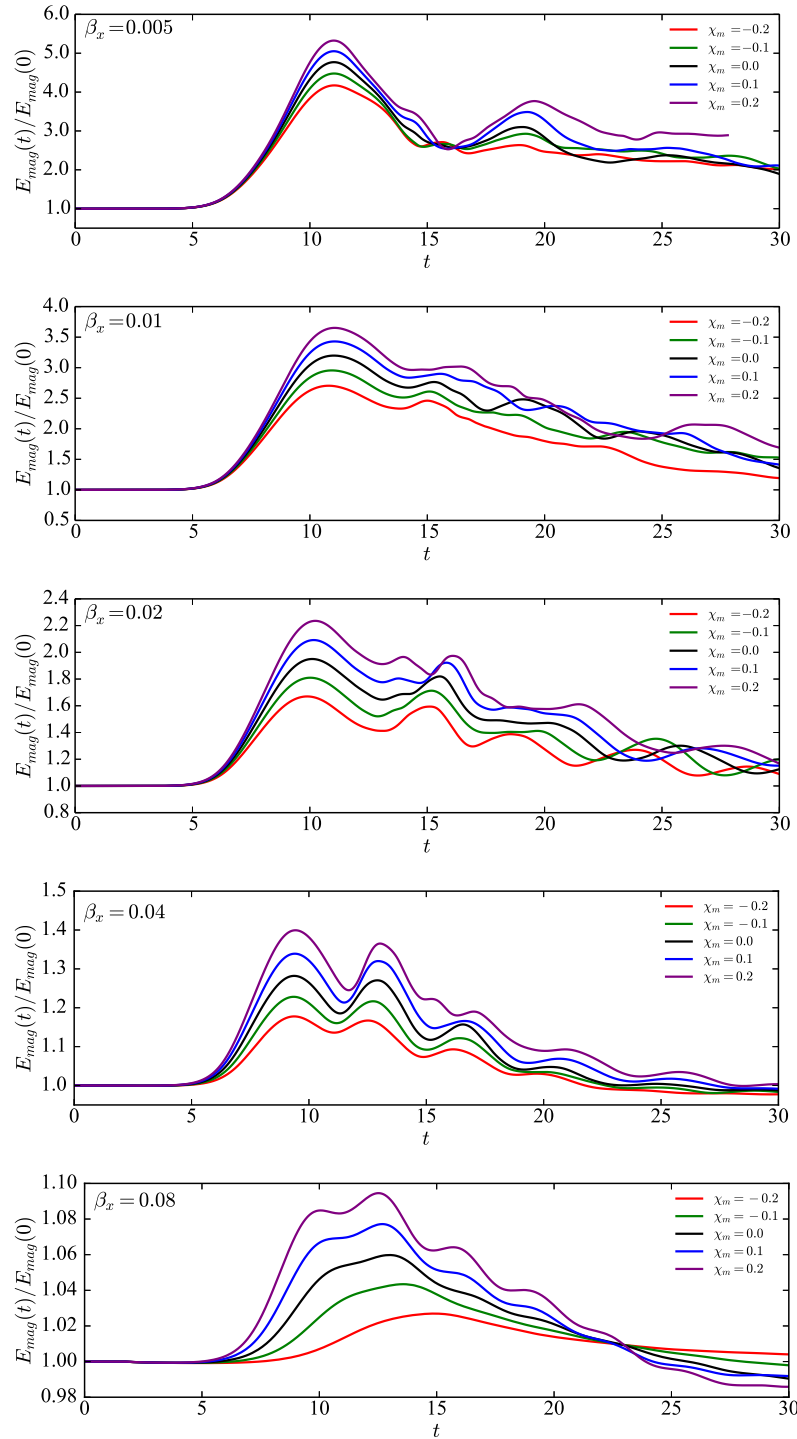
$$E_{\text{mag}}(t) = \frac{1}{2} \int B(t)^2 dA, \quad (142)$$

es la energía magnética total en el dominio numérico 2D. En esta figura se observa que E_{mag} se amplifica más cuando la inestabilidad ocurre entre fluidos paramagnéticos. Este comportamiento es interesante porque, aun en el caso aproximadamente hidrodinámico donde $\beta_x = 0.005$, la amplificación de la energía magnética es considerablemente afectada por la susceptibilidad χ_m . El máximo de amplificación se obtiene en la fase no lineal y coincide con la primera reconexión en los casos con $\beta_x \leq 0.04$, aunque en el último caso con $\beta_x = 0.08$, el máximo de amplificación se obtiene en la segunda reconexión. Si en la simulación existiera algún tipo de mecanismo de dínamo sería posible que la energía magnética se mantuviera e inclusive se amplificara aún más, sin embargo, en dos dimensiones no es posible que exista un proceso de dínamo Moffatt (1978). Por el contrario, en simulaciones 3D se observa un rápido crecimiento de la energía magnética que se mantiene debido a un dínamo macroscópico generado por la inestabilidad de KH Zhang et al. (2009). Debido a estos resultados, es posible que la susceptibilidad magnética de los fluidos haga que la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz sea un mecanismo más efectivo y eficiente para amplificar campos magnéticos semilla de lo que actualmente es.

Con base en lo dicho en el párrafo anterior, es importante estudiar más detenidamente qué tanto se puede amplificar la energía magnética cuando se varía χ_m . Para esto se muestra en la

Figura 17.

Amplificación de la energía magnética $E_{mag}(t)/E_{mag}(0)$ en función del tiempo



Nota. Cada gráfica muestra los resultados de la simulación para diferentes valores de χ_m . La energía magnética se amplifica más en los fluidos paramagnéticos que en los diamagnéticos.

figura (18) el máximo de amplificación en función de la susceptibilidad para cada valor de β_x . Los puntos corresponden a los valores obtenidos de la simulación y las líneas son los mejores ajustes calculados a partir de la expresión

$$\text{Max} \left[\frac{E_{\text{mag}}(t)}{E_{\text{mag}}(0)} \right] = \frac{m_1 \beta_x^2 \chi_m}{(m_2^2 + \beta_x^2)^{\kappa_1}} + \frac{m_3}{\beta_x^{\kappa_2}}, \quad (143)$$

donde $m_1 = 0.0085469$, $m_2 = 0.00506871$, $m_3 = 0.183125$, $\kappa_1 = 1.65678$, y $\kappa_2 = 0.615124$. En esta figura se observa claramente que χ_m afecta más la amplificación del campo cuando los valores de β_x son pequeños ($\beta_x = 0.005$ y $\beta_x = 0.01$), ya que las pendientes de estas rectas son mayores que en los casos con β_x más grandes.

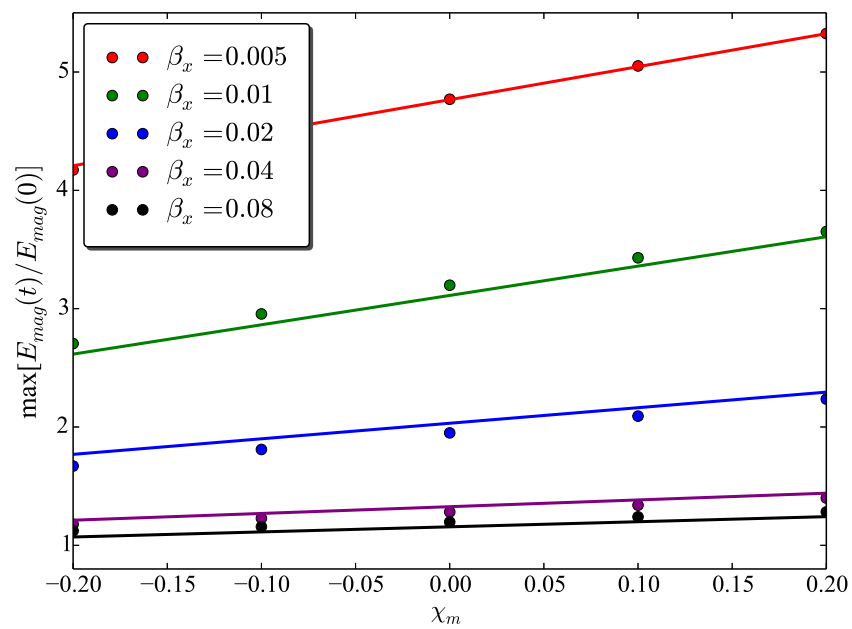
Finalmente, en la figura (19) se presenta el perfil integrado de velocidad, que muestra el promedio de velocidad del fluido en dirección x , $\langle v_x \rangle$, para cada valor de y . Cada panel en la figura corresponde a un valor de β_x diferente y se calcula a tiempo $t = 25$, es decir, cuando ya se ha formado completamente la capa de mezclado. Como se puede observar, dicha capa que separa los fluidos aun con velocidades $V_0 = \pm 0.25$ es aproximadamente independiente de la susceptibilidad magnética.

2.4. Diferencias entre la RMHD con un campo magnético renormalizado y la RMHD con susceptibilidad magnética

De acuerdo con los resultados de las secciones (2.2) y (2.3), es posible pensar que el único efecto de χ_m es incrementar o reducir la intensidad del campo magnético. De hecho, en el tensor de

Figura 18.

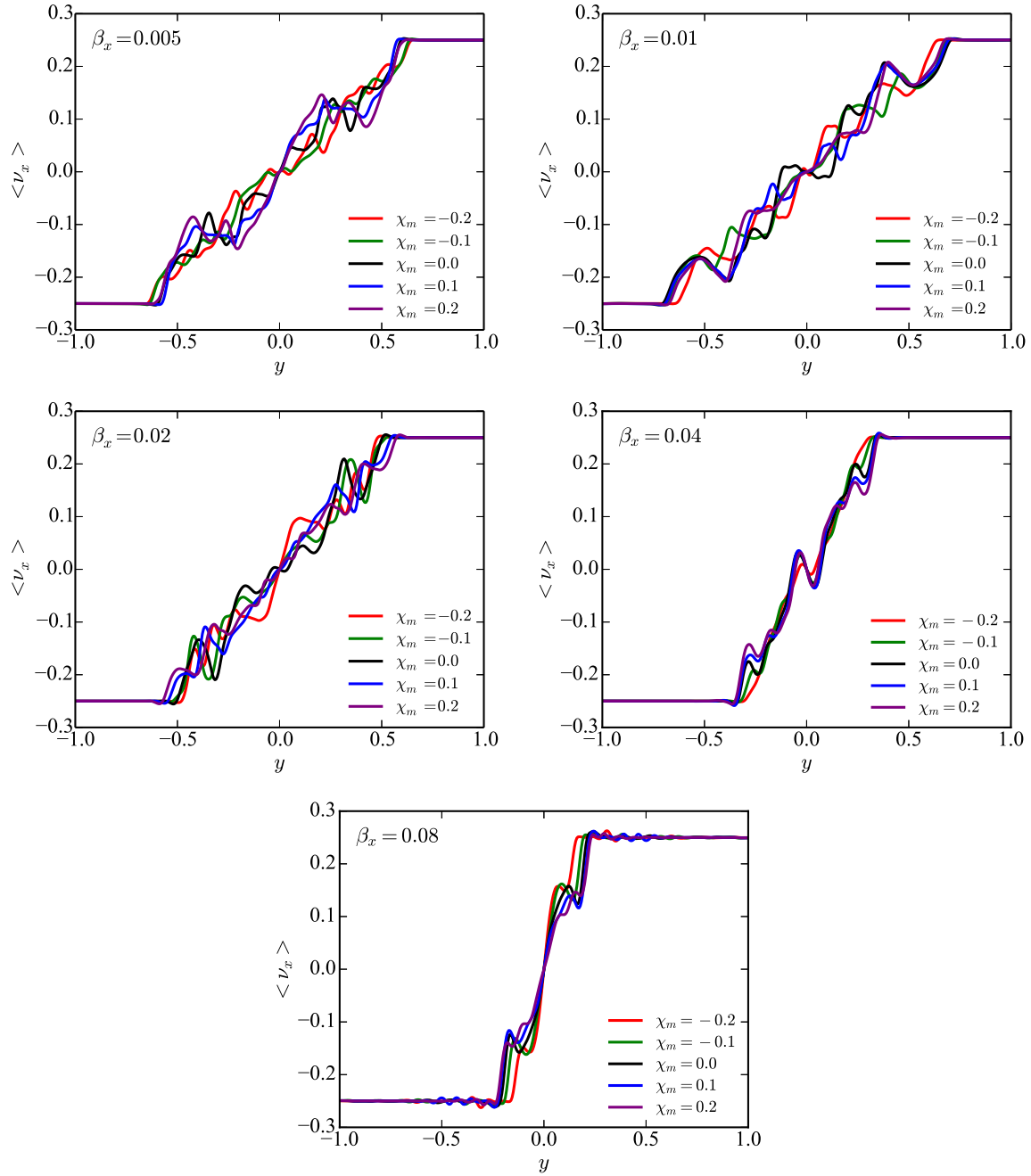
Máximo de amplificación magnética en función de χ_m para diferentes valores de β_x



Nota. Máximo de amplificación magnética en función de χ_m para diferentes valores de β_x . Las líneas corresponden a el mejor ajuste dado por la ecuación (143). El efecto de la susceptibilidad magnética en el máximo de amplificación es mayor cuando β_x es pequeño.

Figura 19.

Perfil integrado de velocidad a tiempo $t = 25$ en función de y para diferentes valores de β_x y χ_m



Nota. En este tiempo el sistema alcanza un estado cuasi-estacionario caracterizado por la formación de una capa que en la que los fluidos se mezclan. El grosor de dicha capa es aproximadamente independiente de la susceptibilidad magnética.

momento-energía (38) se podría tratar de renormalizar el campo magnético como

$$b^\mu \rightarrow \sqrt{1 - \chi} b^\mu, \quad (144)$$

con el objetivo de incluir χ_m en el nuevo campo y de esta manera usar los códigos RMHD que existen en la actualidad, así como el análisis lineal descrito en Osmanov et al. (2008), para determinar el efecto de la susceptibilidad magnética en la inestabilidad de KH. Sin embargo, dicha renormalización no se puede realizar debido al coeficiente $1 - 2\chi$ en la presión p^* . Este coeficiente es particularmente importante en los modos magnetoacústicos que se obtienen de (127), los cuales son precisamente los que producen la inestabilidad de KH. En esta sección se presentarán las diferencias entre la RMHD usual con un campo magnético renormalizado según (144) y la RMHD con susceptibilidad magnética, la cual incluye la forma completa de $T^{\mu\nu}$ que se muestra en (38).

A partir de la teoría lineal descrita en la sección (2.2) se calcula la rapidez de crecimiento de la inestabilidad en función de la susceptibilidad magnética para un parámetro de magnetización $\beta_x = 0.1$. El resultado de este ejercicio, que se muestra en la curva continua de color negro de la figura (20), describe el efecto completo de la susceptibilidad magnética en la inestabilidad de KH, ya que para obtenerlo se usó el tensor de momento-energía (38). Se puede observar que para $\chi_m \lesssim -0.331$ la inestabilidad desaparece debido a un incremento en la presión magnética, producto de la polarización del fluido. Por otro lado, haciendo $\chi_m = 0$ en todas las expresiones de la sección (2.2) se recupera el análisis lineal usual en RMHD. Si además de hacer $\chi_m = 0$, se trata de reproducir el efecto de la susceptibilidad magnética por medio de la renormalización (144), entonces la rapidez

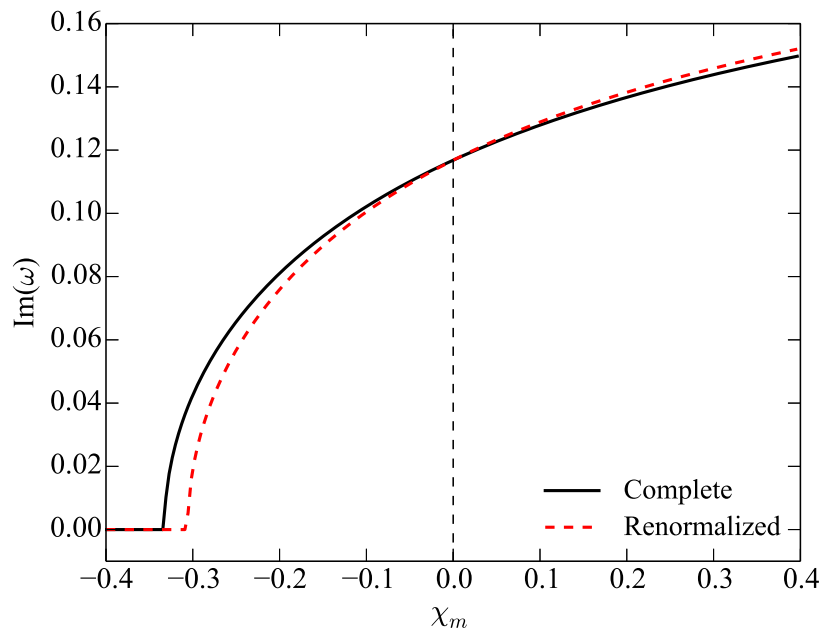
de crecimiento para el caso $\beta_x = 0.1$ se comporta como la curva discontinua de color rojo en la figura (20). En este caso, la inestabilidad de KH desaparece cuando $\chi_m \lesssim -0.305$, de manera que existe un intervalo de χ_m para el cual la RMHD con un campo magnético renormalizado predice estabilidad, mientras que la RMHD con susceptibilidad magnética (curva negra) predice lo contrario. De hecho, las diferencias más significativas entre los dos casos ocurren en el límite de estabilidad.

El error absoluto de la rapidez de crecimiento de la inestabilidad, teniendo en cuenta que la RMHD con χ_m predice los valores verdaderos de $\text{Im}(\omega)$, se presenta en la figura (21) para diferentes parámetros de magnetización. En el caso de fluidos diamagnéticos, los errores crecen cuando β_x se reduce, pero las diferencias más grandes sólo se observan para valores de χ_m suficientemente pequeños. Por el contrario, en un sistema con un parámetro de magnetización grande, las mayores diferencias se pueden observar con una susceptibilidad magnética relativamente pequeña. En los fluidos paramagnéticos el error se incrementa con β_x pero es en general menor que en los casos diamagnéticos.

Además del análisis lineal, se obtuvo la evolución no lineal de la inestabilidad de KH con $\beta_x = 0.04$ y $\chi_m = -0.6$, de manera que el error en $\text{Im}(\omega)$ no es tan grande como el que se puede obtener en el límite de estabilidad, pero es comparable con el error esperado en los casos paramagnéticos (ver figura 21). En la figura (22) se graficó la amplitud de la perturbación y la amplificación de la energía magnética en función del tiempo. La curva negra nuevamente corresponde a la RMHD con polarización magnética y la curva roja discontinua corresponde a la RMHD con un campo magnético renormalizado. Se observa que la inestabilidad crece más rápido cuando se

Figura 20.

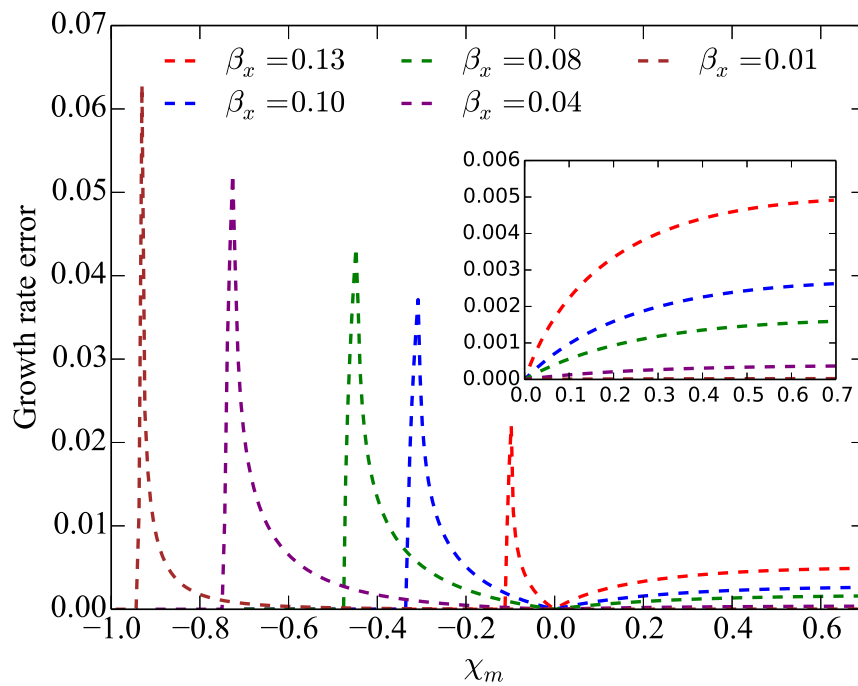
Rapidez de crecimiento de la inestabilidad: diferencias entre la RMHD con un campo magnético renormalizado y la RMHD con susceptibilidad magnética



Nota. Comparación entre la rapidez de crecimiento de la inestabilidad que se obtiene de la RMHD con susceptibilidad magnética y la que se calcula con la RMHD usual más un campo magnético renormalizado según (144). Las curvas corresponden a un parámetro de magnetización $\beta_x = 0.1$. Las diferencias más significativas se obtienen para fluidos diamagnéticos en el límite de estabilidad.

Figura 21.

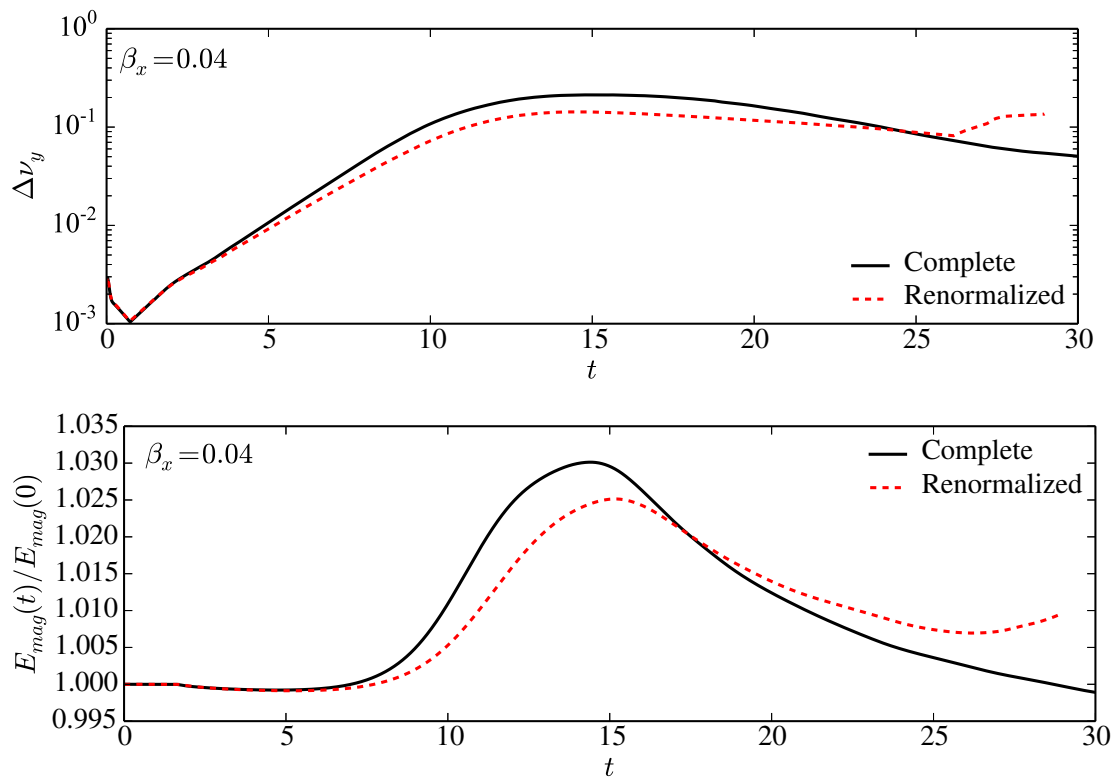
Error absoluto en la rapidez de crecimiento de la inestabilidad entre la RMHD con susceptibilidad magnética y la RMHD usual con un campo magnético renormalizado



Nota. Error absoluto en la rapidez de crecimiento de la inestabilidad, $\text{Im}(\omega)$, entre la RMHD con susceptibilidad magnética y la RMHD usual con un campo magnético renormalizado. Se presentan diferentes curvas de error para diferentes parámetros de magnetización. En los fluidos diamagnéticos el error en el límite de estabilidad crece cuando β_x se reduce, mientras que en los fluidos paramagnéticos el error crece con β_x .

Figura 22.

Amplitud de la perturbación y amplificación de la energía magnética: diferencias entre la RMHD con un campo magnético renormalizado y la RMHD con susceptibilidad magnética



Nota. Amplitud de la perturbación Δv_y (gráfica superior) y amplificación de la energía magnética $E_{mag}(t)/E_{mag}(0)$ (gráfica inferior) en función del tiempo para $\beta_x = 0.04$ y $\chi_m = -0.6$. Las curvas negras corresponden a la simulación realizada a partir de la RMHD con susceptibilidad magnética, mientras que las curvas rojas discontinuas corresponden a la RMHD con un campo magnético renormalizado.

resuelven las ecuaciones de la RMHD con el tensor de momento-energía dado en (38). Este resultado es consistente con el análisis lineal y muestra que para obtener la evolución real del sistema es necesario considerar el tensor de momento-energía con todas las contribuciones asociadas a la susceptibilidad magnética, ya que para ciertos valores de β_x y χ_m no se pueden obtener los valores correctos de $\text{Im}(\omega)$ sólo renormalizando el campo magnético.

Ahora, a pesar de que la inestabilidad parece saturarse aproximadamente al mismo tiempo en ambos casos, el máximo de amplificación de la energía magnética se reduce y se alcanza en un tiempo posterior en el caso del campo magnético renormalizado. El error relativo entre ambos casos es $\approx 0.48\%$, sin embargo, si se reduce el parámetro de magnetización a 0.01, el error relativo se incrementa considerablemente a $\approx 3.36\%$ para un fluido paramagnético con $\chi_m = 0.4$. Este resultado es interesante ya que, de acuerdo con el análisis lineal, para $\beta_x = 0.01$ y $\chi_m = 0.4$ el error en $\text{Im}(\omega)$ es aproximadamente cero (ver figura 21). Esto sugiere que es necesario estudiar la inestabilidad de KH en fluidos magnéticamente polarizados usando la RMHD con susceptibilidad magnética inclusive para los valores de β_x y χ_m donde el análisis lineal no predice diferencias significativas.

3. Toros magnetizados con polarización magnética alrededor de agujeros negros de Kerr

Como se mencionó en el capítulo anterior, las ecuaciones que describen la dinámica relativista de un fluido de prueba magnéticamente polarizado alrededor de un objeto compacto son la conservación del número bariónico, (1), la conservación del momento y la energía, (2), donde $T^{\mu\nu}$ está dado por (13), y las ecuaciones de Maxwell relevantes, (7), las cuales describen el campo electromagnético en el límite de la magnetohidrodinámica ideal. Obtener soluciones analíticas generales

a estas ecuaciones es bastante complicado debido a su naturaleza no lineal y multidimensional. Sin embargo, siguiendo algunos trabajos como el de Abramowicz Abramowicz et al. (1978), o el de Komissarov Komissarov (2006), y considerando ciertas aproximaciones para las variables de estado y el campo gravitacional, es posible obtener soluciones físicamente relevantes que describan fluidos discoidales no autogravitantes con susceptibilidad magnética alrededor de agujeros negros rotantes. Construir estos modelos es el objetivo principal del presente capítulo.

3.1. Ecuaciones magnetohidrodinámicas con polarización magnética

El tensor de momento-energía para un fluido perfecto, cuyo vector de magnetización esta dado en la aproximación lineal (37), toma la forma

$$T^{\mu\nu} = [w + b^2(1 - \chi)] u^\mu u^\nu + \left[p + \frac{1}{2} b^2(1 - 2\chi) \right] g^{\mu\nu} - (1 - \chi) b^\mu b^\nu, \quad (145)$$

donde $w = \rho h$ es la entalpía específica. Ahora, siguiendo algunos trabajos previos Komissarov (2006); Wielgus et al. (2015); Gimeno-Soler and Font (2017), se asume la aproximación de fluido de prueba y el campo gravitacional dado por la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist (t, ϕ, r, θ) . También se asume que el fluido es axialmente simétrico y estacionario, de manera que las variables de estado no dependen ni del ángulo azimutal, ϕ , ni del tiempo. Finalmente, se restringe el movimiento del fluido de manera que $u^r = u^\theta = 0$, y se considera que la topología del campo magnético es puramente toroidal, es decir, $b^r = b^\theta = 0$. Con estas consideraciones se satisfacen idénticamente las ecuaciones de Maxwell (7) y la conservación del número barionico (1). Por consiguiente, la estructura de equilibrio del toro se obtiene únicamente de las ecuaciones de

Euler $h^\gamma_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, donde $h^\gamma_\nu = \delta^\gamma_\nu + u^\gamma u_\nu$ es el tensor de proyección, con el cual se obtiene la imagen de cualquier tensor sobre el plano espacial perpendicular al vector u^α . Al realizar la proyección mencionada anteriormente se obtienen las siguientes ecuaciones de Euler que describen la estructura radial y vertical del fluido toroidal

$$\left[w + (1 + \chi)b^2 \right] u_\alpha u^\alpha_{,i} + \left[p + \frac{1}{2}(1 - 2\chi)b^2 \right]_{,i} - (1 - \chi)b_\alpha b^\alpha_{,i} + \frac{1}{2}(1 - \chi)b^2_{,i} = 0, \quad (146)$$

donde $i = r, \theta$. Estas ecuaciones se obtienen teniendo presente que, dadas las simetrías del sistema, cualquier suma de la forma $u^\alpha f_{,\alpha}$ o $b^\alpha f_{,\alpha}$ se anula. En estos términos, $f_{,\alpha}$ es la derivada parcial de una variable física arbitraria, f .

En la teoría de discos de acreción es más útil describir la estructura de los fluidos en términos del momento angular l , la velocidad angular Ω y la presión magnética p_m , ya que estas cantidades están directamente asociadas con la generación de inestabilidades en el disco. Por esta razón se reescribirá (146) en términos de

$$l = -\frac{u_\phi}{u_t} = -\frac{g_{\phi t} + \Omega g_{\phi\phi}}{g_{tt} + \Omega g_{t\phi}} \quad \text{y} \quad \Omega = \frac{u^\phi}{u^t} = -\frac{g_{\phi t} + l g_{tt}}{g_{\phi\phi} + l g_{t\phi}}. \quad (147)$$

Para cumplir este objetivo se parte de la condición de normalización, $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$, la cual permite escribir u^t como

$$(u^t)^2 = \frac{1}{(u_t)^2 (1 - l\Omega)^2}. \quad (148)$$

Adicionalmente, debido a que $b^\alpha u_\alpha = 0$, entonces $b^t = lb^\phi$ y $b_t = -\Omega b_\phi$. De esta manera,

$$b_\phi = \frac{b^2}{b^\phi(1-l\Omega)}. \quad (149)$$

A partir de las ecuaciones (148) y (149) se puede demostrar que

$$u_\alpha u^\alpha_{,i} = (\ln|u_t|)_{,i} - \frac{\Omega}{1-l\Omega}, \quad (150)$$

$$b_\alpha b^\alpha_{,i} = b^2(\ln|b^\phi|)_{,i} - \frac{\Omega b^2}{1-l\Omega} l_{,i}. \quad (151)$$

Con estas expresiones las ecuaciones de Euler toman la forma

$$w \left[(\ln|u_t|)_{,i} - \frac{\Omega}{1-l\Omega} l_{,i} \right] + (1-\chi)b^2 \left(\ln \left| \frac{u_t}{b^\phi} \right| \right)_{,i} + p_{,i} + [(1-\chi)b^2]_{,i} - \frac{1}{2}\chi b^2_{,i} = 0. \quad (152)$$

En este punto aún no es posible apreciar con claridad cómo los diferentes elementos del sistema contribuyen al equilibrio del fluido. Para esto es necesario realizar unos procedimientos adicionales.

La condición de normalización de la velocidad, antes mencionada, conduce a la siguiente expresión

$$(u^t)^2 = -(g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2)^{-1}. \quad (153)$$

Combinando (148) y (153), se puede escribir la componente u_t en términos de el momento angular

$$(u_t)^2 = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{A}}, \quad (154)$$

donde $\mathcal{L} = g_{t\phi}g_{t\phi} - g_{tt}g_{\phi\phi}$ y $\mathcal{A} = g_{\phi\phi} + 2lg_{t\phi} + l^2g_{tt}$. Por otro lado, debido a que $b^2 = g_{tt}(b^t)^2 + 2g_{t\phi}b^tb^\phi + g_{\phi\phi}(b^\phi)^2$, entonces se puede demostrar fácilmente que,

$$(b^\phi)^2 = \frac{b^2}{\mathcal{A}}. \quad (155)$$

De esta manera, con base en las ecuaciones (154) y (155), se obtiene

$$\left(\ln \left| \frac{u_t}{b^\phi} \right| \right)_{,i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{L}_{,i}}{\mathcal{L}} - \frac{b^2_{,i}}{b^2} \right). \quad (156)$$

Finalmente, con el resultado anterior las ecuaciones de Euler toman la forma

$$(\ln |u_t|)_{,i} - \frac{\Omega}{1 - l\Omega} l_{,i} + \frac{p_{,i}}{w} - \frac{(\chi p_m)_{,i}}{w} + \frac{[(1 - \chi)\mathcal{L}p_m]_{,i}}{\mathcal{L}w} = 0, \quad (157)$$

donde $p_m = b^2/2$ es la presión magnética. En esta ecuación se pueden apreciar las contribuciones que aportan los diferentes campos al equilibrio del fluido. El primer término describe la interacción gravitacional entre el agujero negro y el disco de acreción, el segundo término es la fuerza centrífuga que actúa sobre el disco debido a su movimiento de rotación, el tercer término es la fuerza asociada con el gradiente espacial de presión, y los últimos dos términos están asociados con la fuerza magnética. Como se puede observar, la susceptibilidad del fluido modifica la contribución

magnética en las ecuaciones de Euler. Es importante mencionar que cuando $\chi = 0$, es decir, cuando la susceptibilidad es cero, las ecuaciones (157) se reducen al caso de Komissarov Komissarov (2006), en el cual los discos no están magnéticamente polarizados.

3.2. Condiciones de integrabilidad de las ecuaciones de Euler

En esta sección se presentan las condiciones de integrabilidad suficientes para resolver las ecuaciones que determinan el equilibrio radial y vertical del disco con polarización magnética. Para escribir los primeros tres términos de la ecuación (157) como un diferencial exacto, se sigue el procedimiento usado en Komissarov (2006), donde el fluido obedece una ecuación de estado barotrópica de la forma $w = w(p)$, y las superficies de Ω y l constantes coinciden, de manera que $\Omega = \Omega(l)$ Abramowicz et al. (1978). Con estas dos suposiciones las ecuaciones de Euler se pueden reescribir como

$$d \left(\ln |u_t| + \int_0^p \frac{dp}{w} - \int_0^l \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega} \right) + \mathcal{J} = 0, \quad (158)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= -\frac{d(\chi p_m)}{w} + \frac{d[(1 - \chi)\mathcal{L} p_m]}{\mathcal{L} w} \\ &= \frac{1 - 2\chi}{w} dp_m + (1 - \chi) \frac{p_m}{\mathcal{L} w} d\mathcal{L} - \frac{2p_m}{w} d\chi. \end{aligned} \quad (159)$$

Es importante mencionar que en la ecuación anterior se asume que χ es una función arbitraria de las coordenadas. Sin embargo, con el objetivo de escribir $\mathcal{J}$ como un diferencial exacto, se asume

que $\chi = \chi(\mathcal{L})$. Así, $d\chi = (d\chi/d\mathcal{L})d\mathcal{L}$ y por consiguiente, (159) se reduce a

$$\mathcal{J} = \frac{1-2\chi}{w} dp_m + (1-\chi-2\chi'\mathcal{L}) \frac{p_m}{w\mathcal{L}} d\mathcal{L}, \quad (160)$$

donde $\chi' = \partial\chi/\partial\mathcal{L}$. Ahora bien, si existe una función $z = z(p_m, \mathcal{L})$ que satisfaga las siguientes derivadas,

$$\frac{\partial z}{\partial p_m} = \frac{1-2\chi}{w}, \quad (161)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mathcal{L}} = (1-\chi-2\chi'\mathcal{L}) \frac{p_m}{w\mathcal{L}}, \quad (162)$$

tal que $\mathcal{J} = (\partial z/\partial p_m)dp_m + (\partial z/\partial \mathcal{L})d\mathcal{L}$, entonces la ecuación (160) se puede escribir como un diferencial exacto $\mathcal{J} = dz$.

Para calcular la función $z(p_m, \mathcal{L})$ se comienza por integrar (162) respecto a $\mathcal{L}$. Con este procedimiento se obtiene,

$$z(p_m, \mathcal{L}) = p_m \int_{\mathcal{L}_0}^{\mathcal{L}} \frac{1-\chi-2\chi'\mathcal{L}}{w\mathcal{L}} d\mathcal{L} + z(p_m, \mathcal{L}_0). \quad (163)$$

Posteriormente, se reemplaza (163) en la ecuación (162) y se integra el resultado respecto a p_m . Con esto se puede determinar que

$$z(p_m, \mathcal{L}_0) = (1-2\chi) \int_{p_{m_0}}^{p_m} \frac{dp_m}{w} - \left(p_m \int_{\mathcal{L}_0}^{\mathcal{L}} \frac{1-\chi-2\chi'\mathcal{L}}{w\mathcal{L}} d\mathcal{L} \right) \Bigg|_{p_{m_0}}^{p_m} + C_0, \quad (164)$$

donde C_0 es una constante de integración. El problema entonces se reduce a encontrar una relación entre w , p_m y $\mathcal{L}$ que satisfaga (164). Afortunadamente, esta condición se puede transformar en la siguiente ecuación diferencial parcial para la entalpía

$$(1 - 2\chi)\mathcal{L} \frac{\partial w}{\partial \mathcal{L}} - p_m(1 - \chi - 2\chi'\mathcal{L}) \frac{\partial w}{\partial p_m} + (1 - \chi)w = 0, \quad (165)$$

si se deriva (164), primero respecto a p_m , y luego respecto a $\mathcal{L}$. Ahora, por medio del método de las características se obtiene que

$$w = \mathcal{L}^{-1/2} e^{-\phi} f[(1 - 2\chi)p_m \mathcal{L}^{1/2} e^{\phi}] \quad (166)$$

es solución a la ecuación (165), siendo

$$\phi = \int_{\mathcal{L}_0}^{\mathcal{L}} \frac{d\mathcal{L}}{2\mathcal{L}(1 - 2\chi)}, \quad (167)$$

y f una función arbitraria de su argumento, de manera que se pueden hallar diferentes soluciones dependiendo de la elección de f .

Con el objetivo de encontrar soluciones que describan toros magnéticamente polarizados y que reduzcan a la solución de Komissarov cuando $\chi = 0$, se asume que

$$f = \tilde{K}_m \left[(1 - 2\chi)p_m \mathcal{L}^{1/2} e^{\phi} \right]^{1/\eta}, \quad (168)$$

donde $\tilde{K}_m$ y η son constantes arbitrarias. Partiendo de esta forma particular para f , se despeja la presión magnética de (166),

$$p_m = \frac{K_m}{1-2\chi} \mathcal{L}^{(\eta-1)/2} e^{(\eta-1)\phi} w^\eta, \quad (169)$$

siendo $K_m = \tilde{K}_m^{-\eta}$. Adicionalmente, es necesario especificar la relación entre χ y $\mathcal{L}$ para poder resolver la integral (167), y así determinar completamente p_m . Entonces, para resolver (167) y además analizar discos con diferentes estados de magnetización, se adopta la relación

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 \mathcal{L}^\alpha, \quad (170)$$

donde χ_0 , χ_1 , y α son constantes. En consecuencia, dependiendo de los valores de estas constantes se obtiene un perfil de susceptibilidad magnética diferente para el disco. Cuando $\chi_1 \neq 0$ la susceptibilidad es función de las coordenadas espaciales, cuando $\chi_1 = 0$, el disco es de susceptibilidad constante, y cuando $\chi_0 = \chi_1 = 0$ la solución se reduce a la de Komissarov.

Una vez definida la función $\chi(\mathcal{L})$, la presión magnética toma la forma

$$p_m = K_m \mathcal{L}^{\tilde{\lambda}} w^\eta \tilde{f}, \quad (171)$$

donde,

$$\tilde{\lambda} = \frac{1-\chi_0}{1-2\chi_0}(\eta-1), \quad \tilde{f} = (1-2\chi)^{\frac{1-\eta}{2\alpha(1-2\chi_0)}-1}. \quad (172)$$

Finalmente, con la entalpía dada en la ecuación (166), se resuelven las integrales que definen la función $z(p_m, \mathcal{L})$ en (163-164) y se obtiene,

$$z = (1 - 2\chi) \frac{\eta}{\eta - 1} \frac{p_m}{w}, \quad (173)$$

como una solución particular de (161-162), ya que como se ha visto, se escogió una forma específica de f en (168) y de χ en (170). La libertad para escoger la función f es interesante en el caso $\chi = 0$, ya que implica que la solución de Komissarov tampoco es única y que es posible construir otras soluciones analíticas estacionarias de toros magnetizados axialmente simétricos con campos magnéticos toroidales. Con (173) se escribe (159) como un diferencial exacto y por consiguiente, la ecuación de Euler se resuelve como

$$\ln |u_t| + \int_0^p \frac{dp}{w} - \int_0^l \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega} + (1 - 2\chi) \frac{\eta}{\eta - 1} \frac{p_m}{w} = \text{Constante}, \quad (174)$$

donde las integrales se resuelven asumiendo una forma particular para la función $\Omega(l)$ y para la ecuación de estado $w(p)$. Por último, debido a que el primer y tercer término de la ecuación anterior representan la interacción gravitacional y la fuerza centrífuga, respectivamente, es útil definir con ellos el potencial efectivo

$$W = \ln |u_t| + \int_l^{l_\infty} \frac{\Omega dl}{1 - l\Omega}, \quad (175)$$

ya que de esta manera, (174) se reduce a

$$W - W_{\text{in}} + \int_0^p \frac{dp}{w} + (1 - 2\chi) \frac{\eta}{\eta - 1} \frac{p_m}{w} = 0, \quad (176)$$

siendo W_{in} el potencial efectivo en el borde interno del disco, donde a su vez, $p_{\text{in}} = p_{m_{\text{in}}} = 0$.

3.3. Toros polítropos con momento angular constante

Las integrales en las ecuaciones (175) y (176) se resuelven asumiendo, como en Komissarov (2006), que el momento angular del fluido toma un valor constante l_0 , y que el disco obedece la ecuación de estado

$$p = K w^\kappa, \quad (177)$$

donde K es la constante politrópica y κ es el índice adiabático. Con estas dos suposiciones, la ecuación (176) queda completamente definida como

$$W - W_{\text{in}} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{w} + (1 - 2\chi) \frac{\eta}{\eta - 1} \frac{p_m}{w} = 0, \quad (178)$$

donde $W = \ln|u_t| = (1/2) \ln|\mathcal{L}/\mathcal{A}|$. Estas nuevas soluciones tienen los siguientes parámetros libres: el potencial en el borde interno del disco W_{in} , el momento angular del fluido l_0 , los exponentes de las presiones κ y η , los parámetros que definen la susceptibilidad magnética χ_0 , χ_1 y α , y finalmente, la entalpía y el parámetro de magnetización en el centro del disco, w_c y $\beta_c = p_c/p_{m_c}$, respectivamente. El centro del disco, r_c , se define como uno de los puntos donde el gradiente de presión se hace cero, de manera que el momento angular l_0 iguale al momento angular Kepleriano,

$$l_k = \frac{r^2 - 2ar^{1/2} + a^2}{r^{3/2} - 2r^{1/2} + a}, \quad (179)$$

donde a es el momento angular del agujero negro. En la formula anterior y en los modelos analíticos de discos toroidales que se presentan en este trabajo se escogió $M = 1$, es decir, las masas se normalizan con la del agujero negro.

El procedimiento para construir la solución consiste en encontrar la presión del gas y la presión magnética en el centro del disco por medio de las ecuaciones

$$p_c = w_c(W_{in} - W_c) \left(\frac{\kappa}{\kappa - 1} + \frac{\eta}{\eta - 1} \frac{1 - 2\chi_c}{\beta_c} \right)^{-1}, \quad (180)$$

$$p_{m_c} = \frac{p_c}{\beta_c}, \quad (181)$$

que se obtienen de (178), y a partir de las cuales se pueden calcular las constantes K y K_m . Posteriormente, con la ecuación (176) se calcula la entalpía en función de las coordenadas, y con esta última se obtiene la presión del gas y la presión magnética a partir de (177) y (171), respectivamente. Las componentes del campo magnético se calculan con la ecuación (155), dando como resultado

$$b^\phi = \pm \sqrt{\frac{2p_m}{\mathcal{A}}}, \quad b^t = l_0 b^\phi. \quad (182)$$

Por último, las componentes de la velocidad se hallan como

$$u^t = -\frac{1}{u_t(1 - l_0\Omega)}, \quad u^\phi = \Omega u^t. \quad (183)$$

De esta manera, los modelos quedan completamente definidos a partir de los parámetros libres.

Ahora bien, una vez contruidos los nuevos modelos de toros magnetizados con susceptibilidad magnética, el objetivo es analizar la contribución de $\chi_m(r, \theta)$ a las variables físicas, y por consiguiente, al estado del equilibrio del fluido. Para esto se comparan las nuevas soluciones con el modelo A propuesto por Komissarov en Komissarov (2006), donde los discos tienen un momento angular constante $l_0 = 2.8$ y un potencial efectivo en el borde interno de $W_{\text{in}} = -0.030$. Estos parámetros, junto con el espín del agujero negro, $a = 0.9$, corresponden a un disco con radio exterior finito, cuyo centro se localiza en $r_c = 4.62$. Finalmente, en el modelo de Komissarov, $\kappa = \eta = 4/3$, $\beta_c = 0.1$ y $w_c = 1$. Los tres parámetros restantes, χ_0 , χ_1 y α determinan el estado de polarización magnética del disco, y serán analizados en las siguientes dos subsecciones. La primera de ellas está dedicada a toros magnetizados con susceptibilidad constante, mientras que en la segunda subsección se discute el efecto de un perfil de χ_m no constante sobre el estado de equilibrio del sistema.

3.3.1. Discos con susceptibilidad magnética constante.

En esta sección se asume que las variaciones espaciales de la susceptibilidad magnética del fluido son muy pequeñas, de manera que su estado de magnetización se puede determinar a través de una constante. A partir de los modelos que se presentan en este capítulo se puede obtener un disco con dicha aproximación haciendo $\chi_1 = 0$, lo que implica que $\chi = \chi_0$. De esta manera, se construyeron dos discos diamagnéticos con $\chi_m = -0.2, -0.4$, los cuales corresponden a $\chi_0 \approx -0.25, -0.67$, y dos discos paramagnéticos con $\chi_m = 0.2, 0.4$, es decir, con $\chi_0 \approx 0.17, 0.29$. Estos modelos se compararán con la solución de Komissarov, que se obtiene haciendo $\chi_0 = 0$ ($\chi_m = 0$).

En la figura 23 se presenta el comportamiento espacial de la densidad de masa para diferentes valores de susceptibilidad magnética. La gráfica superior izquierda muestra el perfil radial de ρ en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, mientras que las gráficas central izquierda e inferior izquierda muestran el comportamiento angular de la misma variable física en $r = 3$, es decir, cerca al borde interior del disco, y en $r = 10$, respectivamente. En estos tres paneles la curva negra corresponde a la solución de Komissarov. Por otro lado, la columna derecha muestra la distribución espacial de la densidad de masa en el plano meridional del disco cuando este es diamagnético, con $\chi_m = -0.4$, y paramagnético, con $\chi_m = 0.4$. Además, también se grafica el disco de Komissarov con propósitos comparativos.

En la columna izquierda de figura 23 se puede apreciar que la susceptibilidad magnética modifica la manera en que se distribuye la materia en el disco. Más específicamente, los toros paramagnéticos son más densos que los toros sin polarización magnética en la región comprendida entre el borde interno y el centro del disco. Por el contrario, los discos diamagnéticos son menos densos que la solución de Komissarov en esta región. Sin embargo, en $r > r_c$, la densidad de masa en reposo es mayor en los discos diamagnéticos que en aquellos con propiedades paramagnéticas. En conclusión, los toros paramagnéticos son más compactos que el disco con $\chi_m = 0$, y aún más compactos que los diamagnéticos.

Por otro lado, en la figura 24 se muestra el parámetro de magnetización $\beta = p/p_m$ para diferentes valores de susceptibilidad magnética. La gráfica superior describe el comportamiento de β en el plano ecuatorial, mientras que las gráficas inferior izquierda e inferior derecha describen el parámetro de magnetización en $r = 3$ y $r = 10$, respectivamente. Adicionalmente, las líneas

punteadas verticales muestran la posición de los bordes del disco, las cuales se calculan de la ecuación $W = W_{\text{in}}$. Esta figura muestra que cuando el carácter diamagnético del fluido se incrementa, los discos se vuelven más magnetizados en la región $r < r_c$ y menos magnetizados en $r > r_c$, en comparación con la solución de Komissarov. Los toros paramagnéticos presentan el comportamiento opuesto: son menos magnetizados en $r < r_c$ y más magnetizados en $r > r_c$ que los discos sin susceptibilidad magnética.

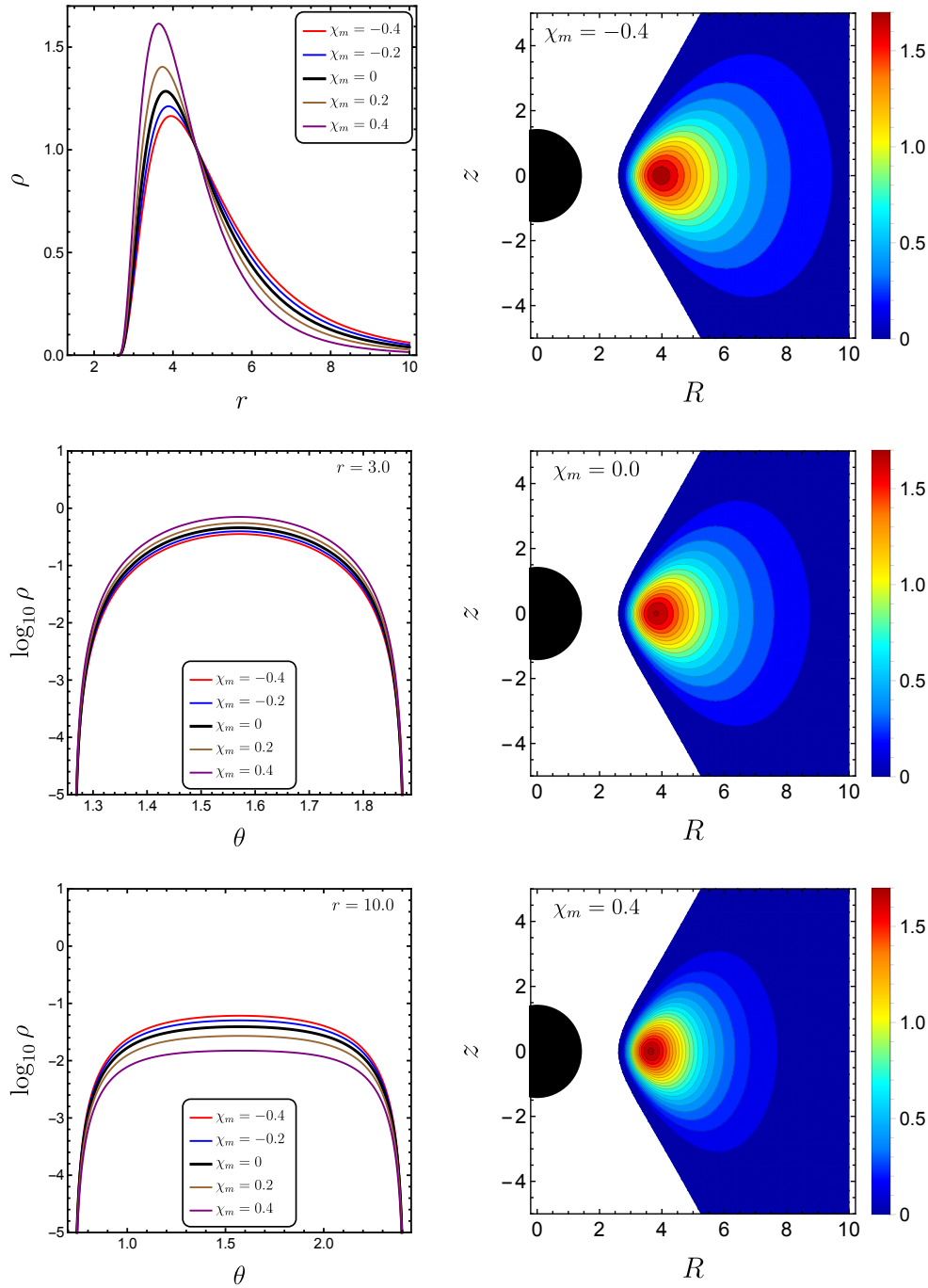
3.3.2. Discos con susceptibilidad magnética no constante.

Las variaciones espaciales de χ_m pueden afectar el estado estacionario del disco, por lo tanto, también es interesante considerar un fluido con susceptibilidad magnética no constante. Este tipo de sistemas tienen su motivación en algunos fenómenos físicos, por ejemplo, la dependencia que tiene χ_m de la temperatura en materiales paramagnéticos Gabold et al. (2018), la disminución repentina de la susceptibilidad en una transición de fase ferromagnética a paramagnética Arajs and Colvin (1964); Chevalier et al. (2002), y la interacción entre el espín de una partícula y el campo gravitacional. Este último efecto se describe por medio de las ecuaciones de Mathisson-Papapetrou-Dixon Papapetrou (1951); Dixon (1970), las cuales ya han sido estudiadas en un espacio-tiempo de Kerr Saijo et al. (1998); Semerak (1999) y se ha mostrado que el espín de la partícula de prueba puede modificar considerablemente su trayectoria alrededor del agujero negro.

Para analizar el estado estacionario de un fluido con una susceptibilidad magnética no constante se construyen dos modelos diamagnéticos M1 y M2, y dos modelos paramagnéticos M3 y M4. En la tabla 2 se presentan los parámetros χ_0 , χ_1 y α que definen la susceptibilidad magnética en cada modelo según la ecuación (170). El comportamiento radial y angular de χ_m en el disco se

Figura 23.

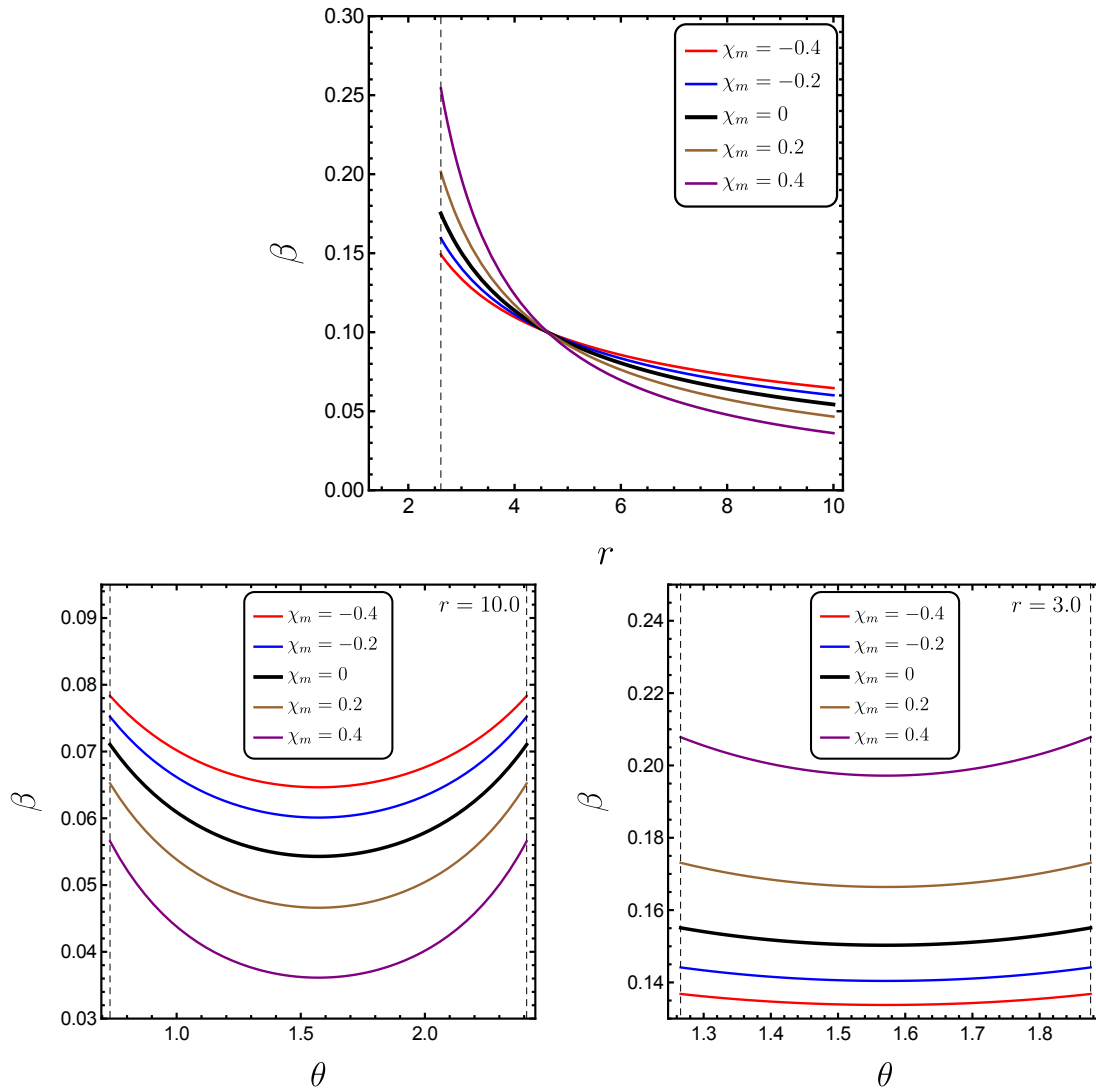
Densidad de masa ρ de discos de acreción con diferentes valores de χ_m



Nota. La gráfica superior izquierda corresponde a $\rho(r, \pi/2)$, mientras que la central izquierda e inferior izquierda muestran la dependencia angular de ρ en $r = 3.0$ y $r = 10.0$, respectivamente. La columna derecha muestra la densidad de masa en el plano z - R para $\chi_m = -0.4, 0.0, 0.4$. Los discos paramagnéticos son más compactos que los diamagnéticos.

Figura 24.

Parámetro de magnetización β de discos de acreción con diferentes valores de susceptibilidad magnética χ_m



Nota. La gráfica superior describe la dependencia radial de β en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$). Las gráficas inferior izquierda e inferior derecha muestran la dependencia angular de β en la posición $r = 3.0$ y $r = 10.0$, respectivamente. Las líneas punteadas verticales representan las fronteras de los discos. El diamagnetismo aumenta la magnetización de los discos cerca al agujero negro, ya que la razón $\beta = p/p_m$ se reduce cerca al borde interior.

Tabla 2

Parámetros que definen el estado de polarización de los modelos de discos con χ_m no constante. El perfil de susceptibilidad magnética está dado por la ecuación (170).

	M1	M2	A	M3	M4
χ_0	-0.67	-1×10^{-5}	0	1×10^{-4}	0.287
χ_1	1.6	-1.6	0	0.6	-0.6
α	-1	-1	1	-1	-1

muestra en la fila superior de la figura 25. Como se puede observar, en los cuatro modelos que se proponen la susceptibilidad cambia considerablemente rápido con la coordenada radial, especialmente en la región comprendida entre el borde interno y el centro del disco. Por el contrario, χ_m permanece aproximadamente constante en $r > 10$, donde su comportamiento se asemeja al de los discos con susceptibilidad constante $\chi_m = -0.4, 0.4$ de la sección 3.3.1.

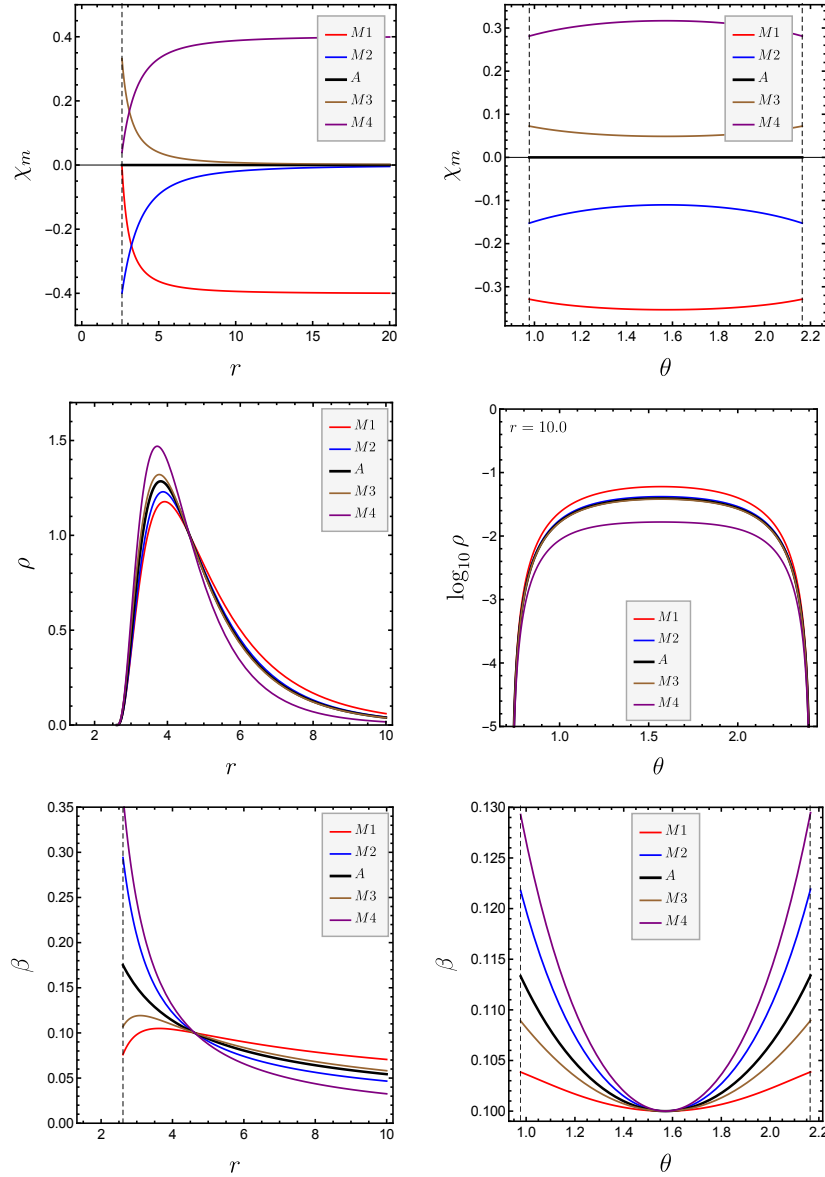
En los modelos diamagnéticos, M1 y M2, la densidad de masa se reduce en la región interna del disco ($r \lesssim 5$) y crece en la región exterior, en comparación con el modelo de Komissarov, que se denota con la letra A en la figura 25. Por el contrario, los modelos paramagnéticos M3 y M4 presentan el comportamiento opuesto, siendo estos últimos más densos cerca al agujero negro que los diamagnéticos. Este comportamiento radial y angular de la densidad es similar al que presentan los discos con χ_m constante, específicamente en la figura 23. Por otro lado, a partir de fila inferior de la figura 25, se puede concluir que los gradientes de susceptibilidad magnética determinan el estado de magnetización del disco. Esto se observa particularmente entre el borde interno y el centro del disco, donde los cambios espaciales de χ_m son grandes. En esta región, cuando $\partial\chi_m/\partial r < 0$,

como en los modelos M1 y M3, los discos incrementan su grado de magnetización, mientras que cuando $\partial\chi_m/\partial r > 0$, es decir, en los modelos M2 y M4, los discos reducen su magnetización. En otras palabras, cuando el material repentinamente pierde su diamagnetismo, o se vuelve más paramagnético, el disco aumenta considerablemente su grado de magnetización. Dichos procesos pueden tener lugar en un choque, donde los gradientes espaciales de las variables físicas (incluida la temperatura) son grandes, o en una transición de fase ferromagnética a paramagnética.

3.4. Acreción de discos toroidales con susceptibilidad constante

Recientemente, en Wielgus et al. (2015) los autores demostraron que los discos de Komissarov son inestables bajo perturbaciones no axiales, es decir, cuando la componente azimutal del vector de onda de dicha perturbación es diferente de cero. Además, lograron demostrar que la disipación de energía y el transporte de momento angular en el disco son consecuencias de la inestabilidad magnetorrotacional o MRI. Estos resultados son interesantes, ya que abren la posibilidad de estudiar el proceso de acreción del plasma cuando los campos magnéticos son intensos. Ahora bien, dado que las soluciones obtenidas en este capítulo son generalizaciones de los toros de Komissarov, entonces también deben ser susceptibles a la MRI, es decir, se pueden usar como dato inicial para analizar la acreción cuando el fluido esta magnéticamente polarizado.

Con el objetivo de simular el proceso de acreción de un disco toroidal con susceptibilidad magnética, se deben resolver las ecuaciones (33) en el espacio-tiempo de Kerr. Esta integración se realizó en el código *Cosmos++*, el cual utiliza el método de volúmenes finitos en mallas adaptativas estructuradas y no estructuradas para resolver las ecuaciones de la GRMHD escritas en una formulación en donde se conserva la energía y el flujo de energía Anninos et al. (2005). Para llevar

Figura 25.*Propiedades físicas de discos con susceptibilidad magnética no constante*

Nota. Susceptibilidad magnética χ_m (fila superior), densidad de masa en reposo ρ (fila del medio), y parámetro de magnetización β (fila inferior) como función de las coordenadas espaciales (r, θ) para los modelos M1, M2, M3, M4, y para la solución de Komissarov, denotada con la letra A. La columna de la izquierda muestra el comportamiento radial de χ_m , ρ , y β en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, y la columna de la derecha muestra la dependencia angular de las mismas variables físicas en el centro del disco $r = r_c$, excepto para la densidad de masa, cuyo comportamiento angular se muestra en $r = 10.0$. Las líneas punteadas verticales corresponden a las fronteras del disco.

a cabo estas simulaciones se modificó el código *Cosmos++* al incluir la susceptibilidad magnética en la estalpía específica, la presión total y el término proporcional a $b^\mu b^\nu$ del tensor de momento-energía (38). Además, se generalizó el método para obtener las variables primitivas en términos de las conservativas y las expresiones para los valores propios de acuerdo con los resultados de la sección (1.2). Estas modificaciones se validaron mediante las pruebas en una dimensión de la sección (1.4) y al comprobar numéricamente el carácter estacionario de los modelos de toros con susceptibilidad constante de la sección (3.3.1).

En primer lugar, se mapean los discos de la sección (3.3.1) en una malla de tres dimensiones con $126 \times 128 \times 32$ zonas. Los detalles de la simulación se mencionan a continuación. La coordenada radial es espaciada logarítmicamente de acuerdo con $x_1 = 1 + \ln(r/r_g)$, entre las fronteras $r_{\min} = 0.98r_{\text{BH}}$ y $r_{\max} = 50$, siendo $r_{\text{BH}} = 1 + \sqrt{1 - a^2}$ el radio del agujero negro. La coordenada vertical es descrita por la ecuación $\theta = \pi/2[1 + (1 - \varepsilon)(2x_2 - 1) + \varepsilon(2x_2 - 1)^n]$, con $\varepsilon = 0.7$ y $n = 29$ Noble et al. (2010). Estas funciones para r y θ permiten una mayor resolución espacial cerca del agujero negro, donde la dinámica es más intensa, y en las proximidades del plano ecuatorial, donde se encuentra el disco. Debido al costo computacional que implican estas simulaciones, solamente se evoluciona un cuarto del dominio, es decir, la región $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Finalmente, en dirección radial se usan condiciones de frontera de flujo saliente, en dirección vertical condiciones de frontera reflejantes y en dirección azimutal condiciones de frontera periódicas.

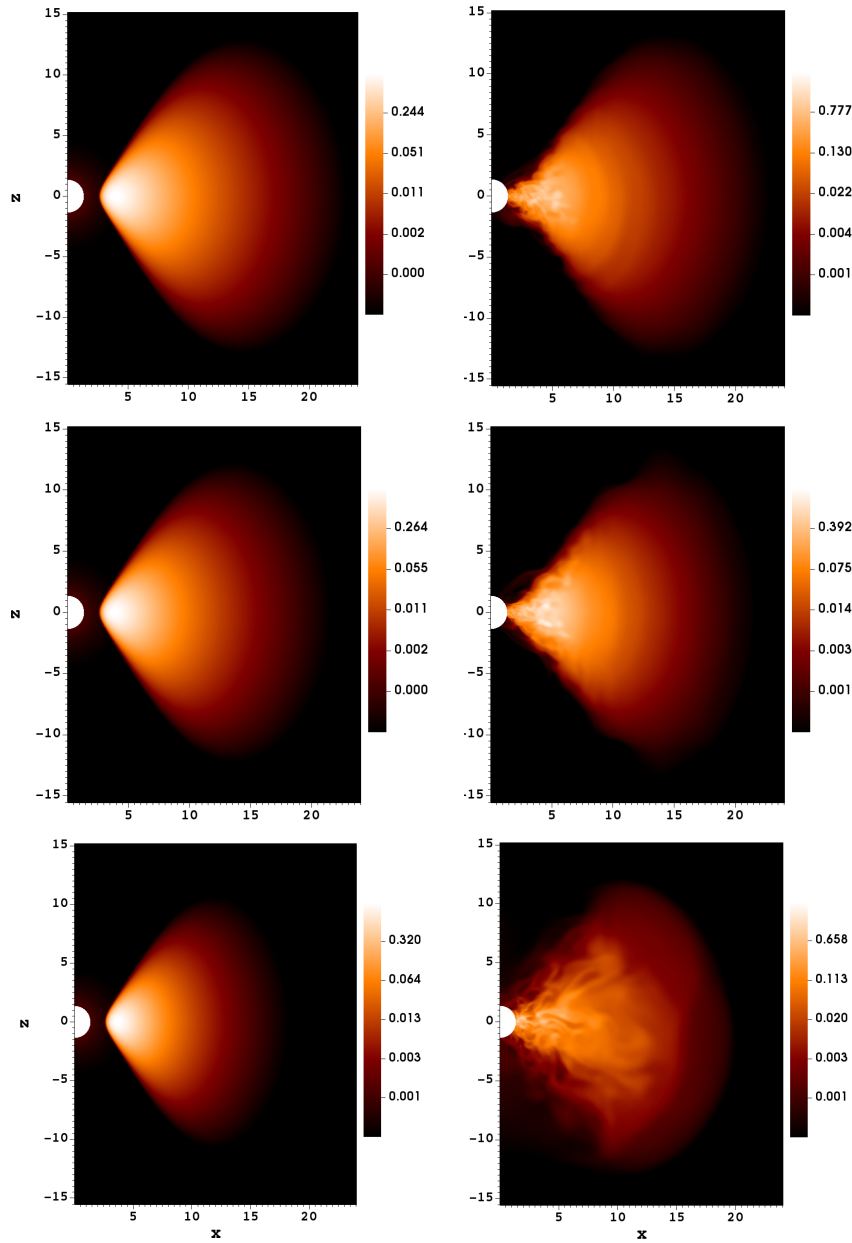
Ahora, para generar la MRI se agrega una perturbación aleatoria del 2% a la velocidad del fluido. Esta perturbación excita los modos inestables que crecen hasta generar turbulencia en el disco. Dicha turbulencia actúa como una viscosidad efectiva que disipa energía, transporta momento

angular y como consecuencia, genera la acreción de materia en el agujero negro. En la figura (26), se muestra la densidad del disco en el plano meridional para tres estados de polarización magnética diferentes. Las dos gráficas superiores corresponden a un toro diamagnético con $\chi_m = -0.8$, las gráficas del medio corresponden al disco de Komissarov ($\chi_m = 0$), y las gráficas inferiores a un toro paramagnético con $\chi_m = 0.4$. La columna de la izquierda muestra los datos a tiempo inicial, mientras que la columna de la derecha muestra el proceso de acreción en el tiempo $t = 350$. Con base en esta figura se puede decir que la MRI es más efectiva cuando el fluido es paramagnético que cuando $\chi_m = 0$. Por el contrario, los discos diamagnéticos parecen ser más estables que los discos de Komissarov.

Una cantidad importante para la disipación de energía en el disco es el tensor de esfuerzos en dirección $r\phi$, ya que es la componente de $T_{\mu\nu}$ responsable del transporte de momento angular. Este está compuesto por dos términos: el tensor de Reynolds, $R_{r\phi}$ y el tensor de Maxwell, $M_{r\phi}$, los cuales se pueden calcular directamente de (9) y (12), respectivamente. De esta manera, el esfuerzo total en el marco de referencia comovil se escribe como $T_{\hat{r}\hat{\phi}} = R_{\hat{r}\hat{\phi}} + M_{\hat{r}\hat{\phi}}$, donde los gorros en los subíndices representan las componentes en el marco comovil. Debido a que la polarización magnética modifica el comportamiento magnético del disco, en la figura (27) se presenta la evolución temporal del perfil radial de $M_{\hat{r}\hat{\phi}}$. Inicialmente el esfuerzo de Maxwell responsable del transporte de momento angular es muy pequeño, sin embargo, a medida que las perturbaciones crecen en el disco, comienza a aparecer campo magnético en dirección radial y con el se generan esfuerzos en dirección $\hat{r}\hat{\phi}$. De acuerdo con esta figura, los esfuerzos se originan cerca del agujero negro y tienden a propagarse por el resto del disco. La intensidad de $M_{\hat{r}\hat{\phi}}$ y la eficiencia con que se propaga

Figura 26.

Densidad de masa en $t = 0$ y $t = 250$ para un disco diamagnético, uno paramagnético y uno con $\chi_m = 0$



Nota. Densidad de masa en $t = 0$ (columna izquierda) y en $t = 250$ (columna derecha) para un disco diamagnético con $\chi_m = -0.8$ (fila superior), un disco sin polarización magnética, es decir, con $\chi_m = 0$ (fila del medio) y para un disco paramagnético con $\chi_m = 0.4$ (fila inferior). En los discos paramagnéticos la MRI es más efectiva que en los diamagnéticos.

en el disco dependen de la susceptibilidad magnética. En el caso diamagnético los esfuerzos son pequeños y se concentran cerca del agujero negro. Por el contrario, en el caso paramagnético el esfuerzo de Maxwell es significativamente más grande que en los casos anteriores y se propaga rápidamente en el disco. Por esta razón, en el toro paramagnético de la figura (26) se observa turbulencia en casi todo el dominio espacial, mientras que en los casos con $\chi_m = 0$ y $\chi_m = -0.8$ la turbulencia parece estar más localizada cerca al agujero negro.

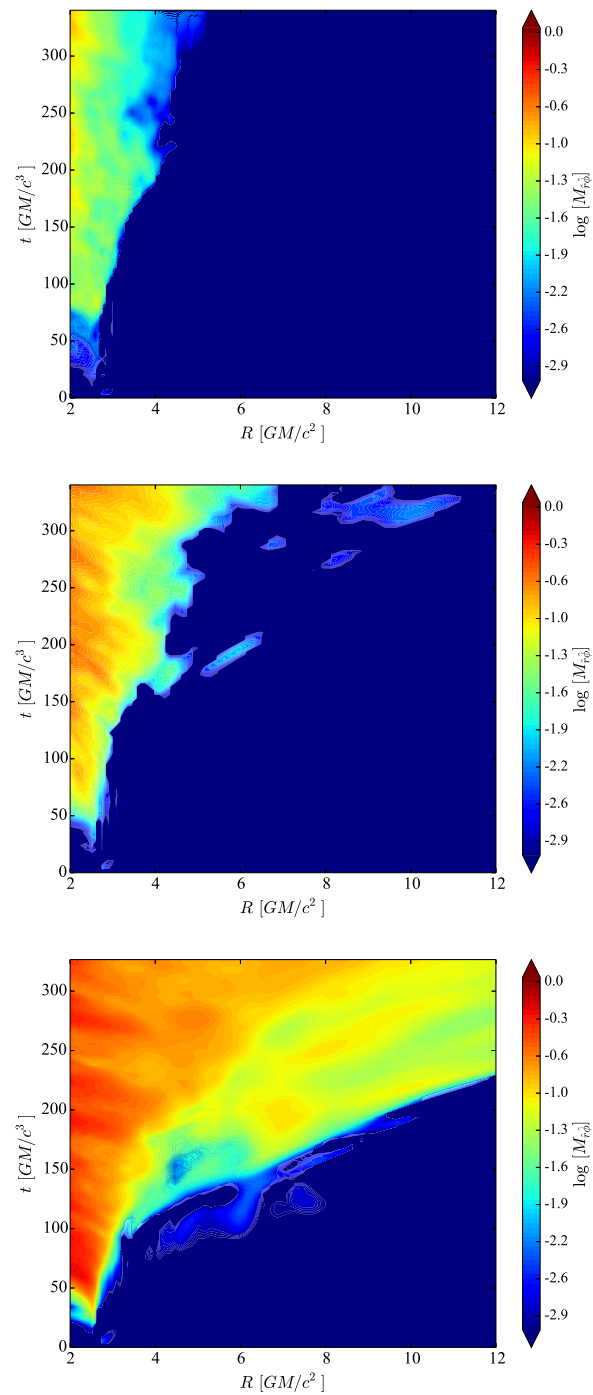
Como se había mencionado antes, la MRI genera turbulencia que actúa como una viscosidad efectiva en el disco, esta viscosidad produce la disipación de energía necesaria para la acreción de materia. Dicha viscosidad se puede describir por medio el parámetro alpha de viscosidad, el cual está motivado en la teoría cinética de la turbulencia, y fue propuesto por Shakura y Sunayev en Shakura and Sunyaev (1973). Este parámetro se escribe por medio del tensor de esfuerzos como

$$\alpha = \frac{R_{\hat{r}\hat{\phi}} + M_{\hat{r}\hat{\phi}}}{p + (1 + 2\chi)b^2/2}. \quad (184)$$

Las observaciones sugieren que α debe tener un valor alrededor de 0.1 King et al. (2007), sin embargo en las simulaciones MHD de discos α toma valores cercanos a 0.02 Hawley et al. (2011). En la figura (28) se presenta el promedio espacial del parámetro alpha de viscosidad en función del tiempo para diferentes estados de polarización magnética del disco. Como se esperaba de las figuras anteriores, α es muy pequeño en el caso diamagnético, mientras que en el disco de Komissarov ($\chi_m = 0$) α toma valores muy cercanos a las simulaciones de discos de acreción que se encuentran en la literatura. Por el contrario, en el disco con $\chi_m = 0.4$ el parámetro alpha toma

Figura 27.

Diagramas espacio-temporales de la componente del tensor de esfuerzos de Maxwell que genera la MRI



Nota. La gráfica superior corresponde al disco diamagnético ($\chi_m = -0.8$), la del medio al disco de Komissarov, en el cual $\chi_m = 0$, y la inferior al disco paramagnético ($\chi_m = 0.4$).

valores alrededor de 0.02, para después crecer rápidamente hasta $\alpha \approx 0.12$.

Es importante resaltar que el resultado que se presenta en el párrafo anterior se obtiene a partir de modelos con algunas limitaciones físicas. Por ejemplo, las soluciones de discos toroidales obtenidas en este capítulo poseen un momento angular constante, sin embargo, existen en la literatura toros magnetizados con momento angular variable Qian et al. (2009); Wielgus et al. (2015); Gimeno-Soler and Font (2017), que son más próximos a la realidad y por lo tanto son un punto de partida para obtener soluciones magnéticamente polarizadas más realistas. Otro aspecto que limita los modelos son los valores altos de χ_m . Este es un aspecto crucial en el trabajo y para determinar la relevancia astrofísica de los resultados obtenidos es necesario entender cómo es la susceptibilidad magnética en plasmas calientes ($T \gtrsim 10^5$ K) de baja densidad ($\rho < 10^2$ g cm⁻³). Sin embargo, estos serán temas de futuros trabajos.

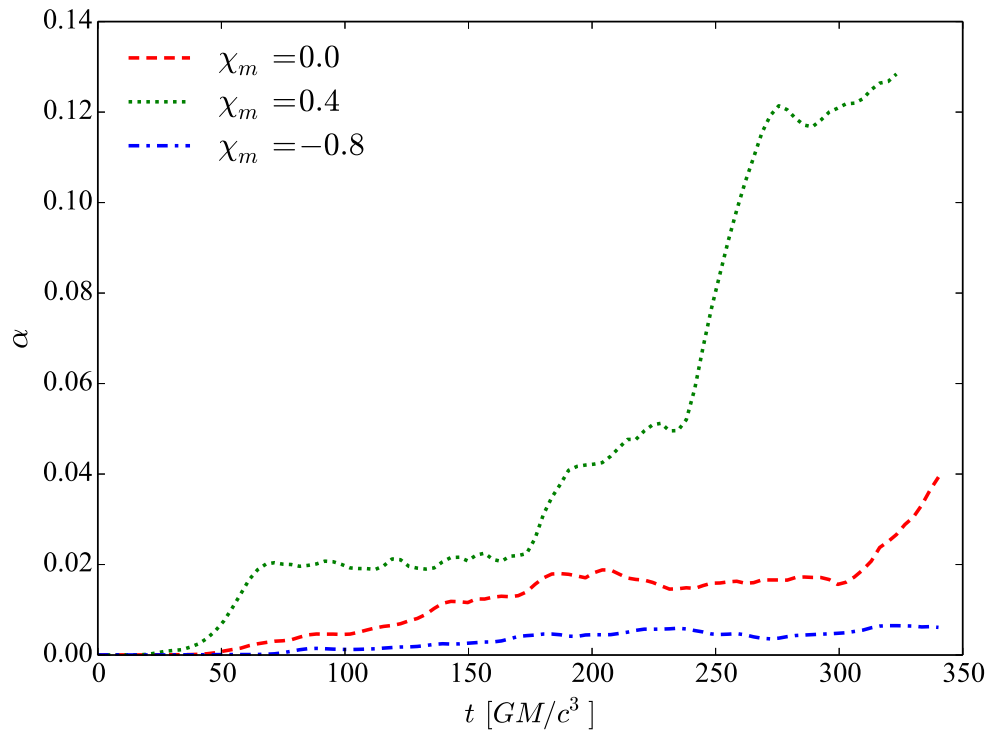
Finalmente, en la figura (29) se muestra la evolución temporal de la rapidez con la que se acreta la materia del disco en el agujero negro. Esta cantidad se calcula mediante la integral

$$\dot{M} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho u^r \sqrt{-g} d\theta d\phi, \quad (185)$$

evaluada en el horizonte de eventos. Evidentemente el disco paramagnético posee las tasas de acreción más grandes, mientras que en el disco diamagnético la acreción de materia es muy lenta. Los resultados obtenidos en esta sección son acordes con la descripción general de la teoría de discos de acreción Shakura and Sunyaev (1973). Por lo tanto, se puede concluir que la inestabilidad magnetorrotacional es más efectiva cuando el fluido del disco posee propiedades paramagnéticas que

Figura 28.

Promedio espacial del parámetro de viscosidad α en función del tiempo para discos con polarización magnética



Nota. Promedio espacial del parámetro de viscosidad α en función del tiempo para un disco diamagnético con $\chi_m = -0.8$, un disco paramagnético con $\chi_m = 0.4$ y un disco con $\chi_m = 0.0$. En el disco paramagnético, α crece rápidamente desde 0.02 hasta un valor ≈ 0.12 , el cual es consistente con los valores estimados de las observaciones.

cuando domina el diamagnetismo. En otras palabras, los discos paramagnéticos son más inestables que los diamagnéticos. Con base en la discusión desarrollada en esta sección, sería interesante determinar si es posible que la polarización magnética de la materia contribuya a los valores de α estimados de las observaciones. Sin embargo, esta y otras cuestiones serán abordadas en un trabajo que se encuentra actualmente en preparación.

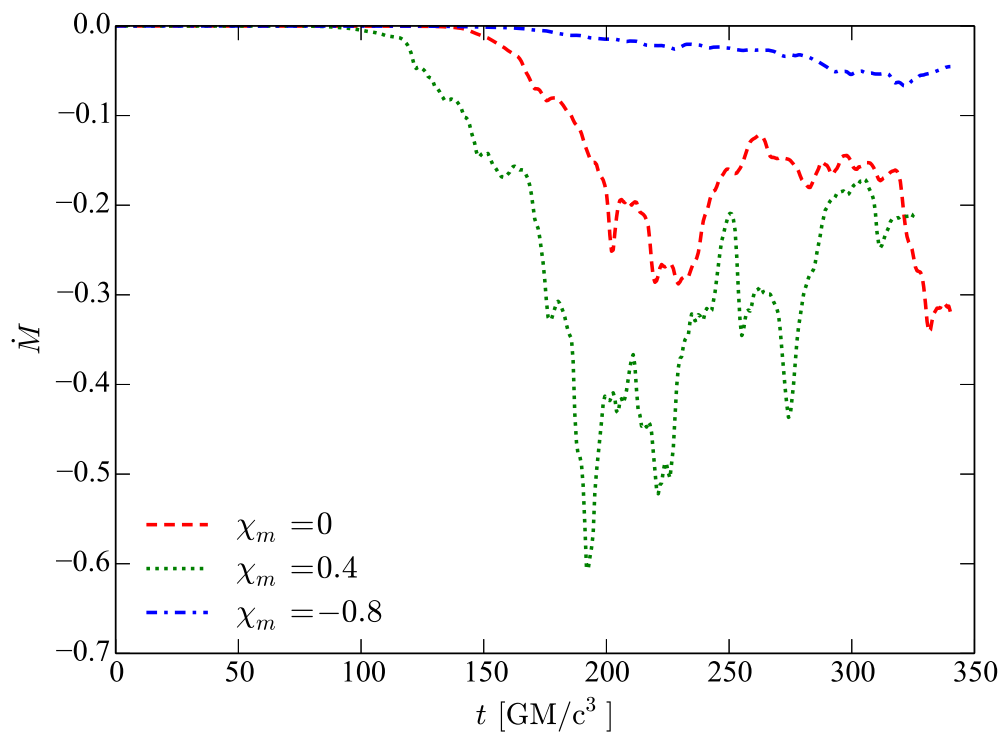
4. Conclusiones

La materia magnéticamente polarizada en el universo puede ser importante en sistemas astrofísicos con campos magnéticos intensos, como es el caso de los pulsares, las estrellas de neutrones, los discos de acreción, entre otros. Con el objetivo de estudiar el efecto de la polarización magnética en los procesos físicos que ocurren en este tipo de escenarios, se presentó por primera vez la forma conservativa de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica relativista para un fluido con un vector de magnetización diferente de cero. A partir de estas ecuaciones se calcularon las velocidades de propagación de las ondas en el medio, es decir, se obtuvo la estructura característica asociada al sistema de ecuaciones. Estos resultados hicieron posible la creación de un módulo numérico para el código CAFE que se ha utilizado para describir procesos astrofísicos reales, como es el caso de las inestabilidades en los plasmas magnetizados y sus posibles consecuencias astrofísicas. De esta manera, CAFE se convierte en el primer código numérico que incluye los efectos del diamagnetismo y el paramagnetismo en la evolución de un fluido de prueba cuya dinámica tiene lugar en la vecindad de un objeto compacto como un agujero negro o una estrella de neutrones.

A partir de la estructura característica se encontró que, en el caso particular donde el vector de polarización magnética es paralelo al campo magnético, la velocidad de las ondas materiales

Figura 29.

Flujo de masa promedio en el horizonte de eventos en función del tiempo para discos con polarización magnética



Nota. Flujo de masa promedio en el horizonte de eventos en función del tiempo para un disco diamagnético con $\chi_m = -0.8$, un disco paramagnético con $\chi_m = 0.4$ y un disco con $\chi_m = 0.0$.

no cambia respecto al caso MHD usual y por lo tanto es independiente de la susceptibilidad magnética, χ_m . Sin embargo, las ondas de Alfvén y las magneto-acústicas se modifican al incluir la susceptibilidad magnética del material, lo cual tiene sentido ya que ambas dependen del estado de magnetización del medio. Con el sistema de ecuaciones en forma conservativa y las expresiones para las velocidades de propagación de las ondas en el fluido, se generalizó el código CAFE para incluir la polarización magnética.

Como una primera aplicación se realizaron simulaciones de tubos de choque en 1D y se encontraron marcadas diferencias cuando $\chi_m \neq 0$ respecto al caso RMHD usual con $\chi_m = 0$. Por ejemplo, la velocidad de propagación de las ondas más rápidas en las soluciones es mayor en materiales diamagnéticos que en los paramagnéticos. Este comportamiento es interesante porque al parecer no depende del estado inicial del sistema. Otro resultado notable es que la susceptibilidad magnética incrementa considerablemente el carácter relativista de los flujos en algunos problemas, tales como la colisión de Komissarov o la prueba de Balsara 2. Esto puede ser potencialmente aplicable a la aceleración de electrones relativistas y a la generación de radiación sincrotrón en jets extragalácticos. Por otro lado, en las pruebas de Balsara 2 y Balsara 3 se observó que la polarización magnética puede invertir la dirección de los flujos en comparación con el caso $\chi_m = 0$. Algo similar sucede con el gradiente de presión el caso de Balsara 4 y en la onda genérica de Alfvén, ya que este se puede invertir a través de las ondas debido al carácter paramagnético del fluido. Todas estas diferencias con el caso RMHD usual son más evidentes cuando la presión magnética domina sobre la presión del gas. Además, como se pudo observar, la habilidad del código para evolucionar materiales paramagnéticos se reduce al incrementar χ_m .

Con el objetivo de probar el código en el régimen de campo fuerte, se presentó por primera vez la acreción de Michel magnetizada de un fluido con polarización magnética. Se demostró que en el caso donde la magnetización y el campo magnético son paralelos, la solución de Michel no se ve afectada, y por lo tanto se puede usar para probar el código. A partir de estas simulaciones se encontró que la solución se mantiene en el tiempo ($t > 4000$) y que la convergencia global del código es a segundo orden para $\chi_m \lesssim 0.005$ y para todas las intensidades de campo magnético, β , que se consideraron. Sin embargo, cuando $\chi_m = 0.008$ y $\beta \geq 10$, la convergencia global se reduce a un valor entre primer y segundo orden. Este resultado es interesante porque inclusive los campos magnéticos intensos observados en los magnetares se encuentran dentro del intervalo $\beta \leq 4$ Zhang and Meszaros (2001), y los valores típicos de la susceptibilidad magnética en los materiales están alrededor de 10^{-5} .

En el capítulo 3 se estudió el efecto de la susceptibilidad magnética en la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz entre dos fluidos uniformes que se mueven con velocidades opuestas. Los fluidos se separan por una interfase plana localizada en $y = 0$. Además se asume que el campo magnético es uniforme en todo el espacio y es paralelo a la velocidad del fluido. El análisis lineal se desarrolló para una perturbación con vector de onda arbitrario, aunque los resultados se obtuvieron para una propagación paralela al plano $x - y$. Se obtuvo la relación de dispersión en términos de la susceptibilidad magnética y se encontró que los modos de Alfvén no contribuyen con la inestabilidad, únicamente los modos magneto-acústicos desestabilizan la interfase.

A partir de la relación de dispersión se encontró que la interfase plana entre fluidos diamagnéticos es más estable que el caso original sin susceptibilidad magnética. Por el contrario, cuando

el paramagnetismo está presente en el sistema, la KHI crece más rápido que en los casos anteriores ($\chi_m = 0$ and $\chi_m < 0$). Este efecto es mayor cuando la presión magnética domina sobre la presión del gas. Adicionalmente, se demostró que el intervalo de valores del número de Mach relativista que desestabilizan la interfase se hace más grande en fluidos paramagnéticos. Las mayores diferencias entre los casos con $\chi_n \neq 0$ y el caso con $\chi_m = 0$ se obtienen en los límites de estabilidad.

Posteriormente, se usó el código CAFE para probar los resultados analíticos mencionados en el párrafo anterior y para obtener la evolución no lineal de la inestabilidad. Simulando la inestabilidad para diferentes susceptibilidades magnéticas se encontró que la energía magnética se amplifica a valores más grandes en los fluidos paramagnéticos que en los diamagnéticos. Sorprendentemente, el efecto de χ_m en la amplificación del campo es más grande en los casos con β_x pequeño. Esto sugiere que la amplificación de campos magnéticos semilla en la MHD KHI puede ser mas efectiva y eficiente si los fluidos presentan propiedades paramagnéticas. A partir de las simulaciones se obtuvo una expresión para la amplificación de la energía magnética en términos de χ_m y del valor inicial de β_x que puede ser útil para estudiar la amplificación del campo en simulaciones 3D donde operan procesos de dínamo. Finalmente, se mostró que el ancho de la capa de mezclado de los fluidos es casi independiente de la susceptibilidad magnética.

Por otro lado, en el capítulo 4 se calcula por primera vez una familia de soluciones estacionarias y axialmente simétricas para un toro magnetizado con polarización magnética alrededor de un agujero negro de Kerr. El disco se construyó siguiendo el proceso de Komissarov Komissarov (2006), es decir, se asume una ecuación de estado barotrópica, un momento angular constante y un campo magnético puramente toroidal. Ahora, la polarización magnética se introduce asumiendo

una relación constitutiva lineal, en la cual el vector de magnetización y el campo magnético están relacionados por la susceptibilidad magnética. Los nuevos modelos de discos polarizados reducen a la solución de Komissarov cuando $\chi_m = 0$, y por consiguiente permiten determinar fácilmente las diferencias entre los discos no polarizados y los toros diamagnéticos y paramagnéticos.

Debido a la forma en que se construyeron los modelos, es posible analizar dos tipos de discos magnéticamente polarizados: los que tienen susceptibilidad magnética constante y los que tienen susceptibilidad variable, es decir, en donde $\chi_m = \chi_m(r, \theta)$. En los modelos con χ_m constante se encontró que los discos paramagnéticos son más compactos que los diamagnéticos, ya que la materia está más concentrada en la región comprendida entre el borde interno y el centro del disco. Sin embargo, en $r < r_c$, los toros diamagnéticos presentan una mayor magnetización que los casos con $\chi_m = 0$ y $\chi_m > 0$. El comportamiento del parámetro de magnetización es opuesto en la región $r > r_c$, donde los toros paramagnéticos son los más magnetizados.

En los modelos con χ_m no constante se encontró que la densidad de masa no cambia su comportamiento cualitativo respecto a los discos con χ_m constante. Por lo tanto, la manera en que se distribuye la materia en el disco únicamente depende de si el fluido es diamagnético o paramagnético. Sin embargo, el estado de magnetización de los toros sí depende de los cambios espaciales de la susceptibilidad. En particular, cuando $\partial\chi_m/\partial r < 0$ (Modelos M1 y M3), los toros alcanzan mayores magnetizaciones, en la región $r < r_c$, que en la solución de Komissarov, mientras que cuando $\partial\chi_m/\partial r > 0$ (modelos M2 y M4), los toros pierden considerablemente su magnetización en la misma región del disco. Todos estos efectos son más apreciables cuando los gradientes de χ_m son grandes.

En el último capítulo se obtuvo el proceso de acreción de los toros con susceptibilidad constante y se encontró que la MRI es más efectiva cuando el fluido es paramagnético que cuando es diamagnético. Para analizar un poco más a fondo el proceso, se calculó el tensor de esfuerzos de Maxwell y se determinó que el crecimiento y la propagación de estos esfuerzos en el disco depende fuertemente de la susceptibilidad magnética. Cuando $\chi_m > 0$, los esfuerzos de Maxwell son notoriamente más grandes y se propagan con mayor rapidez en el espacio que en el caso diamagnético y con $\chi_m = 0$. Además de esto, se encontró que el parámetro alpha de viscosidad crece en los discos paramagnéticos hasta $\alpha \approx 0.12$, lo cual esta cerca a los valores que se estiman de las observaciones ($\alpha \approx 0.1$). Este resultado puede estar limitado por algunas restricciones de los modelos obtenidos en este trabajo, tales como el momento angular constante o los altos valores de χ_m , sin embargo, es un resultado que motiva a la construcción de soluciones que se adapten más a la realidad. Por último, se calculó la tasa de acreción de masa, $\dot{M}$ y se encontró que en los discos diamagnéticos la acreción de masa es menos eficiente que en los paramagnéticos.

Ahora bien, como se había mencionado antes, la susceptibilidad magnética en las sustancias es del orden de 10^{-5} . Por lo tanto, una de las preguntas cruciales que queda por resolver es qué tan relevantes son los resultados obtenidos en escenarios físicos reales. En el marco de la teoría de discos de acreción, es importante entender cómo es χ_m en plasmas calientes ($T \gtrsim 10^5$ K) de baja densidad ($\rho < 10^2$ g cm $^{-3}$). Sin embargo, otra alternativa por medio de la cual la polarización magnética puede ser importante en procesos de acreción nace de algunos trabajos analíticos Goodman and Xu (1994); Pessah (2010) que intentan comprender la saturación de la MRI mediante la presencia de inestabilidades parásitas, como por ejemplo la inestabilidad de KH. Los resultados

obtenidos en el capítulo 3 muestran que el aporte de χ_m a la amplificación de la energía magnética en esta inestabilidad es favorecido por campos magnéticos iniciales pequeños, y ya que un campo magnético débil de cualquier intensidad puede generar la MRI Balbus and Hawley (1991), es posible que la susceptibilidad magnética pueda tener un efecto relevante en el estado de saturación de un disco de acreción. Esta última posibilidad será analizada con mayor detalle en un trabajo futuro.

Esta tesis representa una primera aproximación al estudio de la polarización magnética y sus consecuencias astrofísicas. En el se observó que la susceptibilidad magnética de los fluidos puede generar más fácilmente una inestabilidad magnetohidrodinámica, hacer de ésta un mecanismo más efectivo para amplificar la energía magnética, o hacer más eficiente un proceso astrofísico, como es el caso de la MRI en los discos de acreción. Debido a estos resultados, un siguiente trabajo que ya se encuentra en preparación intenta analizar detalladamente la manera en que la susceptibilidad magnética afecta los modos inestables que dan origen a la MRI y como dichas modificaciones se pueden apreciar en las escalas de turbulencia durante el proceso de acreción. De manera paralela se esta realizando otro trabajo en el que se pretende estudiar la evolución del campo magnético y la formación de plasmoides a partir de la reconexión del campo magnético en fluidos magneticamente polarizados. Dicha reconexión es muy importante en astrofísica ya que es un mecanismo para acelerar partículas y producir la radiación no térmica que se observa en los núcleos activos de galaxias.

En un trabajo futuro se evolucionará un disco con un perfil de susceptibilidad descrito por la ley de Curie, lo cual implica que χ_m ya no será constante en el tiempo, sino que cambiará con el perfil de temperatura. Esto permitirá definir el tipo de sustancia que hay en el disco y brindará

una descripción más realista del proceso de acreción. Por otro lado, debido a que la naturaleza de los campos magnéticos en el universo es una pregunta abierta en astrofísica, es interesante incluir la polarización magnética en la descripción de los procesos de dínamo, y en particular, aquel que incluye el efecto magnético quiral, ya que este puede explicar el origen de los campos magnéticos primordiales Del Zanna and Bucciantini (2018). Además, el dínamo-quiral puede operar en el plasma de quarks y gluones que se forma en las colisiones de iones pesados, y que se ha encontrado posee propiedades paramagnéticas Levkova and DeTar (2014).

Estos y otros trabajos futuros darán continuidad al estudio de la polarización magnética en escenarios astrofísicos.

Referencias Bibliográficas

- Abramowicz, M., Jaroszynski, M., and Sikora, M. (1978). Relativistic, accreting disks. *A&A*, 63:221–224.
- Abramowicz, M. A. and Fragile, P. C. (2013). Foundations of Black Hole Accretion Disk Theory. *Living Rev. Relativ.*, 16:1.
- Anile, A. M. (2005). *Relativistic fluids and magneto-fluids: With applications in astrophysics and plasma physics*. Cambridge University Press.
- Anninos, P., Fragile, P. C., and Salmonson, J. D. (2005). Cosmos++: Relativistic Magnetohydrodynamics on Unstructured Grids with Local Adaptive Refinement. *ApJ*, 635(1):723–740.
- Antón, L., Miralles, J. A., Martí, J. M., Ibáñez, J. M., Aloy, M. A., and Mimica, P. (2010). Relativistic magnetohydrodynamics: renormalized eigenvectors and full wave decomposition riemann solver. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 188(1):1.
- Antón, L., Zanotti, O., Miralles, J. A., Martí, J. M., Ibáñez, J. M., Font, J. A., and Pons, J. A. (2006a). Numerical 3+ 1 general relativistic magnetohydrodynamics: a local characteristic approach. *ApJ*, 637(1):296.
- Antón, L., Zanotti, O., Miralles, J. A., Martí, J. M., Ibáñez, J. M., Font, J. A., and Pons, J. A. (2006b). Numerical 3+ 1 general relativistic magnetohydrodynamics: a local characteristic approach. *The Astrophysical Journal*, 637(1):296.

- Arajs, S. and Colvin, R. V. (1964). Ferromagnetic-Paramagnetic Transition in Iron. *J. Appl. Phys.*, 35:2424–2426.
- Baiotti, L. and Rezzolla, L. (2017). Binary neutron star mergers: a review of einsteins richest laboratory. *Reports on Progress in Physics*, 80(9):096901.
- Balbus, S. A. and Hawley, J. F. (1991). A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution. *ApJ*, 376:214–233.
- Balsara, D. (2001). Total Variation Diminishing Scheme for Relativistic Magnetohydrodynamics. *ApJS*, 132:83–101.
- Balsara, D. S. and Spicer, D. S. (1999). A Staggered Mesh Algorithm Using High Order Godunov Fluxes to Ensure Solenoidal Magnetic Fields in Magnetohydrodynamic Simulations. *J. Comput. Phys*, 149:270–292.
- Banyuls, F., Font, J. A., Ibáñez, J. M., Martí, J. M., and Miralles, J. A. (1997). Numerical $\{3+1\}$ general relativistic hydrodynamics: A local characteristic approach. *The Astrophysical Journal*, 476(1):221.
- Baumgarte, T. W. and Shapiro, S. L. (2010). *Numerical relativity: solving Einstein's equations on the computer*. Cambridge University Press.
- Beckwith, K., Hawley, J. F., and Krolik, J. H. (2008). The Influence of Magnetic Field Geometry on the Evolution of Black Hole Accretion Flows: Similar Disks, Drastically Different Jets. *ApJ*, 678:1180–1199.

- Biskamp, D. (1996). Magnetic reconnection in plasmas. *Ap&SS*, 242(1-2):165–207.
- Blandford, R. D. and Hernquist, L. (1982). Magnetic susceptibility of a neutron star crust. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 15:6233–6243.
- Blandford, R. D. and Payne, D. G. (1982). Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets. *MNRAS*, 199:883–903.
- Blandford, R. D. and Znajek, R. L. (1977). Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes. *MNRAS*, 179:433–456.
- Bodo, G., Mignone, A., and Rosner, R. (2004). Kelvin-Helmholtz instability for relativistic fluids. *Phys. Rev. E*, 70(3):036304.
- Brio, M. and Wu, C. C. (1988). An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys*, 75:400–422.
- Bucciantini, N. and Del Zanna, L. (2006). Local Kelvin-Helmholtz instability and synchrotron modulation in Pulsar Wind Nebulae. *A&A*, 454:393–400.
- Bugli, M., Guilet, J., Muller, E., Del Zanna, L., Bucciantini, N., and Montero, P. J. (2018). Papaloizou-Pringle instability suppression by the magnetorotational instability in relativistic accretion discs. *MNRAS*, 475:108–120.
- Caproni, A., Abraham, Z., Livio, M., and Mosquera Cuesta, H. J. (2007). Is the Bardeen-Petterson effect responsible for the warping and precession in NGC4258? *MNRAS*, 379:135–142.

Chandrasekhar, S. (2013). *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Corporation.

Chatterjee, D., Elghozi, T., Novak, J., and Oertel, M. (2015). Consistent neutron star models with magnetic-field-dependent equations of state. *MNRAS*, 447:3785–3796.

Chevalier, B., Kahn, M. L., Bobet, J.-L., Pasturel, M., and Etourneau, J. (2002). LETTER TO THE EDITOR: Occurrence of ferromagnetic transition on hydrogen insertion in the ternary indide CeNiIn. *J. Phys. Condens. Matter*, 14:L365–L368.

Cruz-Osorio, A. and Lora-Clavijo, F. D. (2016). Non-axisymmetric relativistic wind accretion with velocity gradients on to a rotating black hole. *MNRAS*, 460:3193–3201.

Cruz-Osorio, A., Lora-Clavijo, F. D., and Guzmán, F. S. (2012). Is the flip-flop behaviour of accretion shock cones on to black holes an effect of coordinates? *MNRAS*, 426:732–738.

Cruz-Osorio, A., Sánchez-Salcedo, F. J., and Lora-Clavijo, F. D. (2017). Relativistic Bondi-Hoyle-Lyttleton accretion in the presence of small rigid bodies around a black hole. *MNRAS*, 471:3127–3134.

De Villiers, J.-P. and Hawley, J. F. (2003). A Numerical Method for General Relativistic Magnetohydrodynamics. *ApJ*, 589:458–480.

De Villiers, J.-P., Hawley, J. F., Krolik, J. H., and Hirose, S. (2005). Magnetically Driven Accretion in the Kerr Metric. III. Unbound Outflows. *ApJ*, 620:878–888.

- Del Zanna, L. and Bucciantini, N. (2018). Covariant and 3 + 1 equations for dynamo-chiral general relativistic magnetohydrodynamics. *MNRAS*, 479(1):657–666.
- Del Zanna, L., Zanotti, O., Bucciantini, N., and Londrillo, P. (2007). ECHO: a Eulerian conservative high-order scheme for general relativistic magnetohydrodynamics and magnetodynamics. *A&A*, 473(1):11–30.
- Dixon, W. G. (1970). Dynamics of extended bodies in general relativity. i. momentum and angular momentum. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 314(1519):499–527.
- Duez, M. D., Liu, Y. T., Shapiro, S. L., and Stephens, B. C. (2005). Relativistic magnetohydrodynamics in dynamical spacetimes: Numerical methods and tests. *Physical Review D*, 72(2):024028.
- Einfeldt, B. (1988). On godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(2):294–318.
- Evans, C. R. and Hawley, J. F. (1988). Simulation of magnetohydrodynamic flows - A constrained transport method. *ApJ*, 332:659–677.
- Ferrari, A., Trussoni, E., and Zaninetti, L. (1979). Magnetohydrodynamic instabilities and electron acceleration in extended extragalactic radio sources. *A&A*, 79:190–196.
- Ferrari, A., Trussoni, E., and Zaninetti, L. (1980). Magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz instabilities in astrophysics. I - Relativistic flows - plane boundary layer in vortex sheet approximation. *MNRAS*, 193:469–486.

- Ferrari, A., Trussoni, E., and Zaninetti, L. (1981). Magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz instabilities in astrophysics. II Cylindrical boundary layer in vortex sheet approximation. *MNRAS*, 196:1051–1066.
- Font, J. A. (2008). Numerical Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics in General Relativity. *Living Rev. Relativ.*, 11:7.
- Fragile, P. C., Blaes, O. M., Anninos, P., and Salmonson, J. D. (2007). Global General Relativistic Magnetohydrodynamic Simulation of a Tilted Black Hole Accretion Disk. *ApJ*, 668:417–429.
- Fragile, P. C. and Sadowski, A. (2017). On the decay of strong magnetization in global disc simulations with toroidal fields. *MNRAS*, 467:1838–1843.
- Frank, J., King, A., and Raine, D. (2002). *Accretion power in astrophysics*. Cambridge university press.
- Gabold, H., Luan, Z., Paul, N., Opel, M., Müller-Buschbaum, P., Law, M., and Paul, A. (2018). Structural and magnetic properties of cobalt iron disulfide ($\text{Co}_x\text{Fe}_{1-x}\text{S}_2$) nanocrystals. *Sci. Rep.*, 8(1):4835.
- Gammie, C. F., McKinney, J. C., and Tóth, G. (2003). HARM: A Numerical Scheme for General Relativistic Magnetohydrodynamics. *ApJ*, 589:444–457.
- Giacomazzo, B. and Rezzolla, L. (2006). The exact solution of the Riemann problem in relativistic magnetohydrodynamics. *J. Fluid Mech.*, 562:223–259.

- Giacomazzo, B. and Rezzolla, L. (2007). WhiskyMHD: a new numerical code for general relativistic magnetohydrodynamics. *Class. Quantum Grav.*, 24:S235–S258.
- Gimeno-Soler, S. and Font, J. A. (2017). Magnetised Polish doughnuts revisited. *A&A*, 607:A68.
- Goodman, J. and Xu, G. (1994). Parasitic instabilities in magnetized, differentially rotating disks. *The Astrophysical Journal*, 432:213–223.
- Gourgoulhon, E. (2012). *3+1 formalism in general relativity: bases of numerical relativity*, volume 846. Springer Science & Business Media.
- Groot, S. R. d. and Sutter, L. G. (1972). *Foundations of electrodynamics*. Noord-Hollandische UM.
- Harten, A., Lax, P. D., and van Leer, B. (1997). *On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*, pages 53–79. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- Hawley, J. F., Guan, X., and Krolik, J. H. (2011). Assessing Quantitative Results in Accretion Simulations: From Local to Global. *ApJ*, 738:84.
- Hilditch, D. and Schoepe, A. (2019). Hyperbolicity of divergence cleaning and vector potential formulations of general relativistic magnetohydrodynamics. *Physical Review D*, 99(10):104034.
- Huang, X.-G., Huang, M., Rischke, D. H., and Sedrakian, A. (2010). Anisotropic hydrodynamics,

- bulk viscosities, and r-modes of strange quark stars with strong magnetic fields. *Phys. Rev. D*, 81(4):045015.
- Johnson, M. D., Fish, V. L., Doeleman, S. S., Marrone, D. P., Plambeck, R. L., Wardle, J. F. C., Akiyama, K., Asada, K., Beaudoin, et al. (2015). Resolved magnetic-field structure and variability near the event horizon of Sagittarius A*. *Science*, 350:1242–1245.
- King, A. R., Pringle, J. E., and Livio, M. (2007). Accretion disc viscosity: how big is α ? *MNRAS*, 376:1740–1746.
- Komissarov, S. S. (1999). A Godunov-type scheme for relativistic magnetohydrodynamics. *MNRAS*, 303:343–366.
- Komissarov, S. S. (2005). Observations of the Blandford-Znajek process and the magnetohydrodynamic Penrose process in computer simulations of black hole magnetospheres. *MNRAS*, 359:801–808.
- Komissarov, S. S. (2006). Magnetized tori around Kerr black holes: analytic solutions with a toroidal magnetic field. *MNRAS*, 368:993–1000.
- Laskar, T., Alexander, K. D., Gill, R., Granot, J., Berger, E., Mundell, C. G., Barniol Duran, R., Bolmer, J., Duffell, P., van Eerten, H., Fong, W.-f., Kobayashi, S., Margutti, R., and Schady, P. (2019). ALMA Detection of a Linearly Polarized Reverse Shock in GRB 190114C. *ApJ*, 878(1):L26.

- Leismann, T. (2004). *Relativistic Magnetohydrodynamic Simulations of Extragalactic Jets*. PhD thesis, Max-Planck-Institut für Astrophysik.
- Leismann, T., Antón, L., Aloy, M. A., Müller, E., Martí, J. M., Miralles, J. A., and Ibáñez, J. M. (2005). Relativistic mhd simulations of extragalactic jets. *A&A*, 436(2):503–526.
- Levkova, L. and DeTar, C. (2014). Quark-Gluon Plasma in an External Magnetic Field. *Phys. Rev. Lett.*, 112(1):012002.
- Li, X., Zhang, J., Yang, S., Hou, Y., and Erdelyi, R. (2018). Observing Kelvin-Helmholtz instability in solar blowout jet. *Sci. Rep.*, 8:8136.
- Lii, P., Romanova, M., and Lovelace, R. (2012). Magnetic launching and collimation of jets from the disc-magnetosphere boundary: 2.5D MHD simulations. *MNRAS*, 420:2020–2033.
- Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Osorio, A., and Guzmán, F. S. (2015a). CAFE: A New Relativistic MHD Code. *ApJS*, 218:24.
- Lora-Clavijo, F. D., Cruz-Osorio, A., and Moreno Mendez, E. (2015b). Relativistic Bondi-Hoyle-Lyttleton Accretion onto a Rotating Black Hole: Density Gradients. *ApJS*, 219:30.
- Lora-Clavijo, F. D., Gracia-Linares, M., and Guzmán, F. S. (2014). Horizon growth of supermassive black hole seeds fed with collisional dark matter. *MNRAS*, 443:2242–2251.
- Lora-Clavijo, F. D. and Guzmán, F. S. (2013). Axisymmetric Bondi-Hoyle accretion on to a Schwarzschild black hole: shock cone vibrations. *MNRAS*, 429:3144–3154.

- Lora-Clavijo, F. D., Guzmán, F. S., and Cruz-Osorio, A. (2013). PBH mass growth through radial accretion during the radiation dominated era. *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 12:015.
- Lorrain, P. and Corson, D. (1970). *Electromagnetic fields and waves*. Freeman.
- Mach, P., Gimeno-Soler, S., Font, J. A., Odrzywołek, A., and Piróg, M. (2019). Self-gravitating magnetized tori around black holes in general relativity. *Physical Review D*, 99(10):104063.
- Malagoli, A., Bodo, G., and Rosner, R. (1996). On the Nonlinear Evolution of Magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz Instabilities. *ApJ*, 456:708.
- Marquina, A. (1994). Local piecewise hyperbolic reconstruction of numerical fluxes for nonlinear scalar conservation laws. *SIAM J. Sci. Comput.*, 15(4):892–915.
- Maugin, G. A. (1978). On the Covariant Equations of the Relativistic Electrodynamics of Continua. 1 General Equations. *J. Math. Phys.*, 19:1198–1205.
- McKinney, J. C. (2005). Total and Jet Blandford-Znajek Power in the Presence of an Accretion Disk. *ApJ*, 630:L5–L8.
- Michel, F. C. (1972). Accretion of Matter by Condensed Objects. *Ap&SS*, 15:153–160.
- Mignone, A. and Bodo, G. (2006). An HLLC Riemann solver for relativistic flows - II. Magnetohydrodynamics. *MNRAS*, 368:1040–1054.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. (2017). *Gravitation*. Princeton University Press.

- Miura, A. (1984). Anomalous transport by magnetohydrodynamic Kelvin-Helmholtz instabilities in the solar wind-magnetosphere interaction. *J. Geophys. Res.*, 89:801–818.
- Moffatt, H. K. (1978). Field generation in electrically conducting fluids. *Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne*, 2:5–1.
- Narayan, R. and McClintock, J. E. (2012). Observational evidence for a correlation between jet power and black hole spin. *MNRAS*, 419:L69–L73.
- Nishikawa, K. I., Hardee, P. E., Dutan, I., Niemiec, J., Medvedev, M., Mizuno, Y., Meli, A., Sol, H., Zhang, B., and Pohl, M. (2014). Magnetic Field Generation in Core-sheath Jets via the Kinetic Kelvin-Helmholtz Instability. *ApJ*, 793(1):60.
- Noble, S. C., Krolik, J. H., and Hawley, J. F. (2010). Dependence of Inner Accretion Disk Stress on Parameters: The Schwarzschild Case. *ApJ*, 711:959–973.
- Osmanov, Z., Mignone, A., Massaglia, S., Bodo, G., and Ferrari, A. (2008). On the linear theory of Kelvin-Helmholtz instabilities of relativistic magnetohydrodynamic planar flows. *A&A*, 490:493–500.
- Papapetrou, A. (1951). Spinning Test-Particles in General Relativity. I. *Proc. R. Soc. A*, 209:248–258.
- Perucho, M. and Lobanov, A. P. (2008). Kelvin-Helmholtz Modes Revealed by the Transversal Structure of the Jet in 0836+710. In Rector, T. A. and De Young, D. S., editors, *Extragalactic*

- Jets: Theory and Observation from Radio to Gamma Ray*, volume 386 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 381.
- Pessah, M. E. (2010). Angular momentum transport in protoplanetary and black hole accretion disks: the role of parasitic modes in the saturation of mhd turbulence. *The Astrophysical Journal*, 716(2):1012.
- Pimentel, O. M., Lora-Clavijo, F. D., and González, G. A. (2016). The energy-momentum tensor for a dissipative fluid in general relativity. *Gen. Relativ. Gravit.*, 48:124.
- Pimentel, O. M., Lora-Clavijo, F. D., and González, G. A. (2017). Ideal magnetohydrodynamics with radiative terms: energy conditions. *Class. Quantum Gravity*, 34(7):075008.
- Pimentel, O. M., Lora-Clavijo, F. D., and González, G. A. (2018). Numerical General Relativistic MHD with Magnetically Polarized Matter. *ApJ*, 861:115.
- Poisson, E. (2004). *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press.
- Porth, O., Chatterjee, K., Narayan, R., Gammie, C. F., Mizuno, Y., Anninos, P., Baker, J. G., Bugli, M., Chan, C.-k., Davelaar, J., et al. (2019). The Event Horizon General Relativistic Magnetohydrodynamic Code Comparison Project. *ApJS*, 243(2):26.
- Porth, O., Olivares, H., Mizuno, Y., Younsi, Z., Rezzolla, L., Moscibrodzka, M., Falcke, H., and Kramer, M. (2017). The black hole accretion code. *CompAC*, 4(1):1.

- Potekhin, A. Y. and Yakovlev, D. G. (2012). Comment on “Equation of state of a dense and magnetized fermion system”. *Phys. Rev. C*, 85(3):039801.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (2007). *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*. Cambridge university press.
- Pringle, J. E. and King, A. (2007). *Astrophysical flows*. Cambridge University Press.
- Pu, Z.-Y. and Kivelson, M. G. (1983). Kelvin-Helmholtz instability at the magnetopause. I - Solution for compressible plasmas. II - Energy flux into the magnetosphere. *J. Geophys. Res.*, 88:841–861.
- Qian, L., Abramowicz, M. A., Fragile, P. C., Horák, J., Machida, M., and Straub, O. (2009). The polish doughnuts revisited-i. the angular momentum distribution and equipressure surfaces. *Astronomy & Astrophysics*, 498(2):471–477.
- Quirk, J. J. (1997). A contribution to the great riemann solver debate. In *Upwind and High-Resolution Schemes*, pages 550–569. Springer.
- Roe, P. L. (1981). Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes. *J. Comput. Phys*, 43:357–372.
- Ruggeri, Tommaso, S. A. (1981). Main field and convex covariant density for quasi-linear hyperbolic systems : relativistic fluid dynamics. *Annales de l’I.H.P. Physique théorique*, 34(1):65–84.

- Saijo, M., Maeda, K.-I., Shibata, M., and Mino, Y. (1998). Gravitational waves from a spinning particle plunging into a Kerr black hole. *Phys. Rev. D*, 58(6):064005.
- Schiesser, W. E. (2012). *The numerical method of lines: integration of partial differential equations*. Elsevier.
- Schoepe, A., Hilditch, D., and Bugner, M. (2018). Revisiting hyperbolicity of relativistic fluids. *Physical Review D*, 97(12):123009.
- Semerak, O. (1999). Spinning test particles in a Kerr field I. *MNRAS*, 308(3):863–875.
- Shakura, N. I. and Sunyaev, R. A. (1973). Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, 24:337–355.
- Shibata, M. and Sekiguchi, Y.-I. (2005). Magnetohydrodynamics in full general relativity: Formulation and tests. *Phys. Rev. D*, 72(4):044014.
- Shibata, M. and Shapiro, S. L. (2002). Collapse of a rotating supermassive star to a supermassive black hole: Fully relativistic simulations. *The Astrophysical Journal Letters*, 572(1):L39.
- Siegel, D. M. and Metzger, B. D. (2017). Three-Dimensional General-Relativistic Magnetohydrodynamic Simulations of Remnant Accretion Disks from Neutron Star Mergers: Outflows and r -Process Nucleosynthesis. *Phys. Rev. Lett.*, 119(23):231102.
- Stone, J. M., Gardiner, T. A., Teuben, P., Hawley, J. F., and Simon, J. B. (2008). Athena: A New Code for Astrophysical MHD. *ApJS*, 178:137–177.

- Suh, I.-S. and Mathews, G. J. (2010). Magnetic Domains in Magnetar Matter as an Engine for Soft Gamma-ray Repeater and Anomalous X-ray Pulsars. *ApJ*, 717:843–848.
- Synge, J. L. (1960). *Relativity: the general theory*. North-Holland Publishing Company Amsterdam.
- Toro, E. F. (2013). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media.
- Toro, E. F., Spruce, M., and Speares, W. (1994). Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, 4:25–34.
- van Putten, M. H. P. M. (1993). A numerical implementation of MHD in divergence form. *J. Comput. Phys*, 105:339–353.
- Wang, Z., Lu, G., Zhu, C., and Wu, B. (2016). The Diamagnetic Phase Transition of Dense Electron Gas: Astrophysical Applications. *PASP*, 128(10):104201.
- Wielgus, M., Fragile, P. C., Wang, Z., and Wilson, J. (2015). Local stability of strongly magnetized black hole tori. *MNRAS*, 447:3593–3601.
- Yee, K. (1966). Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14:302–307.
- Zhang, B. and Meszaros, P. (2001). Gamma-Ray Burst Afterglow with Continuous Energy Injection: Signature of a Highly Magnetized Millisecond Pulsar. *ApJ*, 552:L35–L38.

Zhang, W., MacFadyen, A., and Wang, P. (2009). Three-Dimensional Relativistic Magnetohydrodynamic Simulations of the Kelvin-Helmholtz Instability: Magnetic Field Amplification by a Turbulent Dynamo. *ApJ*, 692:L40–L44.