

Soluciones exactas de agujeros negros en la teoría generalizada de Proca

Sergio Manuel Cubides Pérez

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Director

Yeinzon Rodríguez García

Doctorado en Física

Co-Director

Fabio Duván Lora Clavijo

Doctorado en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2019

Tabla de Contenido

Introducción	11
1. Espaciotiempo estático y esféricamente simétrico	14
2. Espaciotiempo estático y esféricamente simétrico en Relatividad General	20
2.1. Solución de Schwarzschild	20
2.2. Solución de Reissner-Nordstrom	22
2.3. Agujero negro de Schwarzschild	27
3. Teoría generalizada de Proca	32
3.1. Acción generalizada de Proca	33
4. Formulación Lagrangiana de la teoría clásica de campos en espaciotiempo curvo	38
5. Ecuaciones de campo para la acción generalizada de Proca	43
5.1. Ecuaciones de campo gravitacionales	43
5.2. Ecuaciones de campo vectoriales	53
6. Agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos en la teoría generalizada de Proca	64
6.1. Solución de Reissner-Nordström en Relatividad General	67

6.2. Campo masivo de Proca	70
6.3. Soluciones exactas para el acoplamiento cuártico G_4	74
6.3.1. $A_1 \neq 0$	79
6.3.2. $A_1 = 0$	82
6.4. Soluciones exactas de agujeros negros para acoplamientos generales	85
6.4.1. Acoplamiento cúbico $G_3(X)$	85
6.4.2. Acoplamiento de quinto orden $G_5(X)$	89
6.4.3. Acoplamiento de sexto orden $G_6(X)$	92
6.4.4. Acoplamiento cuártico $g_4(X)$	95
6.4.5. Acoplamiento vectorial de quinto orden $g_5(X)$	97
7. Conclusiones	100
Referencias Bibliográficas	102
Apéndices	108

Lista de Figuras

- Figura 1. Cambios en los conos de luz para puntos en las inmediaciones de una agujero negro de Schwarzschild en las coordenadas que llevan el mismo nombre. 29
- Figura 2. Cambios en los conos de luz para puntos en las inmediaciones de una agujero negro de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein. 30

Lista de Tablas

Tabla 1. Acomplamientos y sus respectivas soluciones exactas de agujeros negros estáti- cos y esféricamente simétricos	99
---	----

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Evaluación del término $g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}) - g^{\mu\alpha}(\delta\Gamma_{\mu\gamma}^{\gamma})$	108

Resumen

Título: Soluciones exactas de agujeros negros en la teoría generalizada de Proca *

Autor: Sergio Manuel Cubides Pérez **

Palabras Clave: Agujeros negros, gravedad modificada, Teorías vector-tensor, ecuaciones de campo.

Descripción: Con el fin de restringir la teoría generalizada de Proca y de determinar su compatibilidad con las futuras observaciones en el ámbito astrofísico, se estudiaron soluciones de agujeros negros en el marco de esta teoría. Para ello, en primer lugar, se determinaron las ecuaciones de campo y de movimiento correspondientes a la acción generalizada de Proca para, posteriormente, obtener las ecuaciones de campo vectoriales y gravitacionales propias de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos. Finalmente se encontraron soluciones de las ecuaciones de campo para diferentes tipos de acoplamientos dentro de esta teoría las cuales, debido a las condiciones establecidas para las funciones métricas, difieren de las soluciones de Reissner-Nordström y de Schwarzschild únicamente en las funciones que describen al campo vectorial dependiendo del acoplamiento estudiado.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Yeinzon Rodríguez García, Doctorado en Física. Codirector: Fabio Duván Lora Clavijo, Doctorado en Física

Abstract

Title: Exact black hole solutions in Generalized Proca theory *

Author: Sergio Manuel Cubides Pérez **

Keywords: Black holes, modified gravity, vector-tensor theories, field equations.

Description: In order to constrain the generalized Proca theory and determine its compatibility with the future astrophysical observations, it was proposed to study black holes solutions predicted by this theory. For this, firstly, field and motion equations were determined from the variation of the generalized Proca action to subsequently obtain the gravitational and vector field equations corresponding to statical and spherically symmetric black holes. Finally, exact solutions were found for different couplings. These solutions are different from Schwarzschild and Reissner-Nordström solutions only in the functions which describe the vector field, depending on the studied coupling.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Yeinzon Rodríguez García, Doctorado en Física. Codirector: Fabio Duván Lora Clavijo, Doctorado en Física.

Introducción

Pese a que el modelo estándar cosmológico (Λ CDM- Λ materia oscura fría) es compatible con las observaciones (Aghanim et al., 2018), éste no logra darle una explicación física consistente a los problemas de la cosmología moderna como lo son: la actual expansión acelerada del universo (energía oscura)(Riess et al., 1998; Perlmutter et al., 1999) y la materia oscura(Bertone and Hooper, 2018). Debido a esto y en un intento por explicar físicamente el problemas de energía oscura, se han construido gran cantidad de teorías que modifican la gravedad. Una de las ramas más importantes de estas teorías es aquella que comprende todos los modelos en los cuales se asume la presencia de un campo acoplado de forma no mínima con la gravedad que puede ser escalar (Deffayet et al., 2011; Nicolis et al., 2009; Deffayet et al., 2009b,a; Horndeski, 1974; Deffayet and Steer, 2013; Gleyzes et al., 2015; Crisostomi et al., 2017; Achour et al., 2016), vectorial (Heisenberg, 2014; Tasinato, 2014b,a; Allys et al., 2016b,a; Jimenez and Heisenberg, 2016; Heisenberg et al., 2016; Kimura et al., 2017; Gómez and Rodríguez, 2019; Gallego and Rodríguez, 2019) o tensorial (de Rham et al., 2011; Hinterbichler, 2012; de Rham, 2014; Hassan and Rosen, 2012; Hinterbichler and Rosen, 2012). Además, este gran número de teorías existentes es, en sí, otro problema importante de la cosmología, lo cual hace imperativo discriminar entre ellas para así descartar las que no sean compatibles con las observaciones.

Uno de las alternativas usadas últimamente para intentar discriminar entre las diferentes teorías ha sido el estudio de las soluciones de agujeros negros, en razón de las recientes observaciones de ondas gravitacionales. Esto se debe a que las ondas gravitacionales contienen información

de los objetos que las producen lo que permite conocer más sobre la física de los agujeros negros y los alrededores de los mismos. Adicionalmente, con ello se abre la posibilidad de comparar las características de las ondas gravitacionales provenientes de las observaciones de agujeros negros con aquéllas predichas por las diferentes teorías de gravedad para los éstos objetos astrofísicos. Dicho enfoque ya ha sido recientemente explorado en las teorías escalar-tensor, mediante el análisis perturbativo de las soluciones de agujeros negros (Kobayashi et al., 2012, 2014; Ganguly et al., 2018) y el cálculo de los modos quasinormales de las ondas gravitacionales provenientes de éste tipo de objetos (Tattersall and Ferreira, 2018; Dong et al., 2017). También se ha explorado en las teorías vector-tensor, en especial en la teoría generalizada de Proca, en lo que refiere a la estabilidad de las respectivas soluciones (Kase et al., 2018; Heisenberg et al., 2018).

En este trabajo se encontró, como primera aproximación y con base en el trabajo de la Ref. (Heisenberg et al., 2017), soluciones exactas de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricas en la teoría generalizada de Proca mediante la correcta aplicación del método variacional. Ésto se llevó a cabo, en primer lugar, determinando las ecuaciones de campo y de movimiento de la teoría. Posteriormente se determinó el perfil de la métrica y del campo vectorial acoplado a la gravedad para cada acoplamiento presente en la acción generalizada de Proca. Finalmente se establecieron las condiciones necesarias para obtener soluciones exactas para cada tipo de acoplamiento.

A fin de exponer lo anterior, de manera detallada, se ha ordenado el presente documento comenzando, en el capítulo 1 por encontrar el perfil de la métrica para un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico para posteriormente, en el capítulo 3, determinar y estudiar las soluciones

de este espaciotiempo en Relatividad General (Schwarzschild y Reissner-Nordström). Seguidamente en el capítulo 3 se presenta la teoría generalizada de Proca. Luego, en el capítulo ?? se expone el método variacional en la teoría clásica de campos en espaciotiempo curvo, método que se usó en la teoría generalizada de Proca para obtener las ecuaciones de campo vectorial y gravitacional, lo cual se muestra en el capítulo 5. Finalmente, en el capítulo 6 se obtienen las soluciones exactas correspondientes a agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos para cada tipo de acoplamiento presente en la acción generalizada de Proca; además se determinan las condiciones que deben cumplir los acoplamientos para llegar a las soluciones presentadas.

1. Espaciotiempo estático y esféricamente simétrico

Sea el espaciotiempo el par $(\mathcal{M}, g)$, en donde $\mathcal{M}$ es una variedad 4-dimensional dotada con la métrica g , un tensor de tipo $(0, 2)$ que, escrito en términos de una base local coordenada $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$, se representa como

$$\mathbf{g} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta, \quad (1)$$

en donde $g_{\alpha\beta}$ son las componentes del tensor g en la base coordenada. Entonces, con el fin de caracterizar el espaciotiempo, se debe determinar las componentes del tensor métrico en una base determinada que en este caso es $\partial_{x^\mu} = \{\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi\}$ para lo cual se hace uso de los vectores de Killing (Nakahara, 2003).

Ahora, debido a que el espaciotiempo a considerar tiene simetría esférica, los vectores de Killing que dan cuenta de esto son (Frolov and Novikov, 1998)

$$\xi_{(1)}^\mu \partial_\mu = \partial_\phi, \quad (2)$$

$$\xi_{(2)}^\mu \partial_\mu = -\cos \phi \partial_\theta + \cot \theta \sin \phi \partial_\phi, \quad (3)$$

$$\xi_{(3)}^\mu \partial_\mu = \sin \phi \partial_\theta + \cot \theta \cos \phi \partial_\phi. \quad (4)$$

Además de esto y puesto que el espaciotiempo es estático, existe un vector de Killing en la direc-

ción ∂_t , es decir, $\xi_{(0)}^\mu \partial_\mu = \partial_t$. Esto implica que la condición de simetría

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{L}_{\partial_t} g)_{\mu\nu}, \\ &= \xi_{(0)}^\mu \partial_\mu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi_{(0)}^\mu g_{\mu\beta} + \partial_\beta \xi_{(0)}^\mu g_{\mu\alpha}, \\ 0 &= \partial_t(g_{\alpha\beta}), \end{aligned} \tag{5}$$

en donde $\mathcal{L}_{\vec{X}} Y = [\vec{X}, Y]$ es la derivada de Lie de Y en dirección $\vec{X}$, da como resultado que las componentes del tensor métrico deben ser explícitamente independientes de la coordenada t . De manera similar, el vector de Killing (2) lleva a que las componentes del tensor métrico sean independientes de la coordenada ϕ , lo que significa que, hasta el momento,

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(r, \theta). \tag{6}$$

Por otra parte, los vectores de Killing (3) y (4) conducen, respectivamente, a las condiciones de simetría

$$\begin{aligned} & -\cos\phi \partial_\theta(g_{\alpha\beta}) - \partial_\alpha(\cos\phi) g_{\theta\beta} + \partial_\alpha(\cot\theta \sin\phi) g_{\phi\beta} - \partial_\beta(\cos\phi) g_{\alpha\theta} \\ & + \partial_\beta(\cot\theta \sin\phi) g_{\phi\alpha} = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} & \sin\phi \partial_\theta(g_{\alpha\beta}) + \partial_\alpha(\sin\phi) g_{\theta\beta} + \partial_\alpha(\cot\theta \cos\phi) g_{\phi\beta} + \partial_\beta(\sin\phi) g_{\alpha\theta} \\ & + \partial_\beta(\cot\theta \cos\phi) g_{\phi\alpha} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

las cuales, con $\alpha = \beta = 0$, $\alpha = \beta = 1$ y $\alpha, \beta = 0, 1$, indican que

$$-\cos \phi \partial_{\theta}(g_{00}) = 0, \quad (9)$$

$$-\cos \phi \partial_{\theta}(g_{11}) = 0, \quad (10)$$

$$-\cos \phi \partial_{\theta}(g_{10}) = 0, \quad (11)$$

por tanto las componentes g_{00} , g_{11} y $g_{01} = g_{10}$ sean explícitamente independientes de la coordenada θ , es decir que $g_{00} = g_{00}(r)$, $g_{11} = g_{11}(r)$, $g_{01} = g_{01}(r)$ y $g_{10} = g_{10}(r)$.

Para $\alpha = 0$ y $\beta = 2$ se tiene, de las expresiones (7) y (8), que

$$\partial_{\theta}(g_{02}) + \csc^2 \theta \tan \phi g_{30} = 0, \quad (12)$$

$$\partial_{\theta}(g_{02}) - \csc^2 \theta \cot \phi g_{30} = 0. \quad (13)$$

Si se restan estas dos ecuaciones entre sí, se obtiene

$$\frac{\csc^2 \theta}{\cos \phi \sin \phi} g_{30} = 0. \quad (14)$$

Como esta ecuación debe ser válida para todo valor de θ y ϕ , entonces $g_{30} = g_{30} = 0$. Esto implica que las expresiones obtenidas de $\alpha = 0$ y $\beta = 3$ dan como resultado que $g_{02} = g_{20} = 0$.

Análogamente, si $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ se presentan las condiciones

$$\partial_{\theta}(g_{12}) + \csc^2 \theta \tan \phi g_{31} = 0, \quad (15)$$

$$\partial_{\theta}(g_{12}) - \csc^2 \theta \cot \phi g_{31} = 0. \quad (16)$$

Nuevamente, restando estas dos ecuaciones se obtiene como resultado que $g_{13} = g_{31} = 0$. De igual forma que para el caso anterior, si $\alpha = 1$ y $\beta = 3$, resulta que $g_{12} = g_{21} = 0$.

Examinando el caso para $\alpha = \beta = 2$, el cual da las condiciones

$$\partial_{\theta}(g_{22}) + 2 \csc^2 \theta \tan \phi g_{23} = 0, \quad (17)$$

$$\partial_{\theta}(g_{22}) - 2 \csc^2 \theta \cot \phi g_{23} = 0, \quad (18)$$

en donde la resta entre sí mismas establece que $g_{23} = 0$ y, por ende, g_{22} es independiente explícitamente de la coordenada θ , es decir que $g_{22} = g_{22}(r)$.

Por otra parte, si $\alpha = 2$ y $\beta = 3$ las condiciones de simetría son

$$\csc^2 \theta \tan \phi g_{33} - \tan \phi g_{22} = 0, \quad (19)$$

$$-\csc^2 \theta \cot \phi g_{33} + \cot \phi g_{22} = 0, \quad (20)$$

a partir de las cuales, se llega a la relación

$$g_{33} = g_{22} \sin^2 \theta. \quad (21)$$

Finalmente, si $\alpha = \beta = 3$, la expresión obtenida a partir de las condiciones de simetría es

$$\partial_\theta(g_{33}) - 2 \cot \theta g_{33} = 0, \quad (22)$$

en donde, al combinar con la ecuación (21), se satisface la expresión (22), lo que no arroja nada nuevo.

Teniendo en cuenta que la métrica es Lorentziana, llámese, sin pérdida de generalidad $-f(r)$ a $g_{00}(r)$. Por lo tanto, de todo lo anterior resulta que el tensor métrico para este tipo de espaciotiempo se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = & -f(r)dt \otimes dt + g_{01}(r)dt \otimes dr + g_{10}(r)dr \otimes dt + g_{11}(r)dr \otimes dr \\ & + g_{22}(r)d\theta \otimes d\theta + g_{22}(r)\sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi. \end{aligned} \quad (23)$$

Cabe tener en cuenta que, dada la ausencia de un sistema de referencia privilegiado, existe una libertad en la elección del sistema de coordenadas. Con esto en mente, la métrica (23) debería permanecer invariante ante el cambio de coordenadas

$$\tilde{t} = t + \Phi(r), \quad (24)$$

donde $\Phi(r)$ es tal que $\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{-g_{01}(r)}{f(r)}$ y llamando $m(r)$ a $\frac{(g_{01}(r))^2}{f(r)}$. Siendo así, la métrica queda

expresada como sigue:

$$\mathbf{g} = -f(r)d\tilde{t} \otimes d\tilde{t} + m(r)dr \otimes dr + g_{22}(r)d\theta \otimes d\theta + g_{22}(r)\sin^2\theta d\phi \otimes d\phi.. \quad (25)$$

Sea, por otra parte,

$$(\tilde{r})^2 = g_{22}(r), \quad (26)$$

definiendo la nueva función $h^{-1}(\tilde{r}) = \frac{4\tilde{r}^2 m(\tilde{r})}{(dg_{22}(r)/dr)^2}$ y quitando las tildes, el tensor métrico para un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico tiene la forma

$$\mathbf{g} = -f(r)dt \otimes dt + h^{-1}(r)dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2\theta d\phi \otimes d\phi \quad (27)$$

Por último, es oportuno notar que la ecuación (27) es independiente de la teoría de la gravedad y del contenido energético presente en el espaciotiempo. Ahora, hecha esta aclaración, en el siguiente capítulo se tendrá en cuenta a la relatividad general como teoría de la gravedad, por lo cual se hará uso de las ecuaciones de Einstein, en ausencia de la constante cosmológica,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{m_p^2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right), \quad (28)$$

en donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, $T_{\mu\nu}$ es el tensor momentum-energía, T es la traza de este último tensor ($T = T^\mu_\mu$) y m_p es la masa reducida de Planck ($m_p = 1/\sqrt{8\pi}$)(en unidades naturales

$[c = \hbar = k_B = \varepsilon = G = 1])$.

2. Espaciotiempo estático y esféricamente simétrico en Relatividad General

2.1. Solución de Schwarzschild

Considérese un campo gravitacional estático y esféricamente simétrico (27) en el vacío. Esto significa que el lado derecho de la ecuación (28) se anula y por lo tanto $R_{\mu\nu} = 0$. Dado a que el tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, es simétrico, se obtiene un sistema acoplado de 10 ecuaciones diferenciales independientes de las que, debido a la diagonalidad de la métrica, únicamente las ecuaciones asociadas a las componentes de la diagonal son no triviales. Estas ecuaciones son las siguientes

$$R_{00} = \frac{hf'}{r} - \frac{hf'^2}{4f} + \frac{1}{4}f'h' + \frac{1}{2}hf'' = 0, \quad (29)$$

$$R_{11} = \frac{f'^2}{4f^2} - \frac{h'}{hr} - \frac{f'h'}{4fh} - \frac{f''}{2f} = 0, \quad (30)$$

$$R_{22} = 1 - h - \frac{hrf'}{2f} - \frac{1}{2}rh' = 0, \quad (31)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}, \quad (32)$$

en donde las derivadas están dadas respecto a la coordenada r .

Multiplicando R_{00} por $(hf)^{-1}$ y sumando con R_{11} se obtiene

$$R_{00} \frac{1}{hf} + R_{11} = \frac{1}{r} \left(\frac{f'}{f} - \frac{h'}{h} \right) = -\frac{1}{r} \left(\frac{d \ln f}{dr} - \frac{d \ln h}{dr} \right) = 0. \quad (33)$$

A partir de esta última ecuación se llega a que

$$h = f + \text{const} \quad (34)$$

y dado que cuando $r \rightarrow \infty$ el espaciotiempo debe ser Minkowskiano debido a que se está considerando un espaciotiempo asintóticamente plano, las funciones métricas deben tener el comportamiento $f(r \rightarrow \infty) = h(r \rightarrow \infty) = 1$. Esto implica que la constante de integración de la ecuación (34) debe ser igual a uno. Por lo tanto se tiene que

$$h = f. \quad (35)$$

Sumado a esto, la ecuación para R_{22} y la condición (35) conducen a que

$$\begin{aligned} 1 - f - rf' &= 0, \\ 1 &= (rf)' \\ r &= rf + \text{const}. \end{aligned} \quad (36)$$

Es decir que, llamando a la constante de integración $2M$, las funciones métricas para un espaciotiempo de vacío, estático y esféricamente simétrico están dadas por

$$f = h = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (37)$$

Por lo tanto la métrica de este espaciotiempo es

$$\mathbf{g} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi), \quad (38)$$

en donde parece haber una singularidad en $r = 2M$ la cual es estudiada en el Capítulo 2.3.

2.2. Solución de Reissner-Nordstrom

Ahora considérese un espaciotiempo esféricamente simétrico producido por un objeto esférico con una carga eléctrica Q . Antes de continuar cabe recordar que el tensor momentum-energía, $T_{\mu\nu}$, se puede expresar como

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_{mat}}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{mat}, \quad (39)$$

en donde la densidad lagrangiana de materia, $\mathcal{L}_{mat}$, para el campo electromagnético está dada como

$$\mathcal{L}_{mat} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (40)$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ siendo el tensor de esfuerzos del campo electromagnético, en donde $A_\mu = \{\varphi, A_i\}$ es el cuadripotencial.

Prosiguiendo con el objetivo de este capítulo, si se remplace el $\mathcal{L}_{mat}$ en la ecuación (39), se obtiene que el tensor momentum-energía para el campo electromagnético es

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta})}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \\ &= \frac{1}{2} \left(g_{\nu\beta} F_{\mu\alpha} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

y por tanto las ecuaciones de Einstein (28) adoptan la forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2m_p^2} \left(g_{\nu\beta} F_{\mu\alpha} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (42)$$

Obsérvese ahora que, debido a la simetría esférica y a la estaticidad el espaciotiempo, solo puede haber campo eléctrico, E_r , en dirección de la coordenada r . De esta manera el tensor del campo electromagnético, en su representación matricial, presenta la forma

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 & 0 \\ -E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

lo que lleva a que el primer y segundo término del lado derecho de la ecuación (42) sean, respectivamente

$$F_{\mu\alpha} F^{\alpha}_{\nu} = g_{0\nu} F_{\mu 1} + g_{11} F_{\mu 0} F^{10}, \quad (44)$$

$$-\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} F_{01} F^{01}. \quad (45)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de campo son,

$$R_{00} = \frac{1}{m_p^2} \left[-g_{00}F_{01}F^{01} - g_{10}F_{00}F^{10} + \frac{1}{2}g_{00}F_{01}F^{01} \right], \quad (46)$$

$$R_{11} = \frac{1}{m_p^2} \left[-g_{01}F_{11}F^{01} - g_{11}F_{10}F^{10} + \frac{1}{2}g_{11}F_{01}F^{01} \right], \quad (47)$$

$$R_{22} = \frac{1}{m_p^2} \left[-g_{02}F_{02}F^{01} - g_{12}F_{20}F^{10} + \frac{1}{2}g_{22}F_{01}F^{01} \right], \quad (48)$$

$$R_{33} = \frac{1}{m_p^2} \left[-g_{03}F_{03}F^{01} - g_{13}F_{30}F^{10} + \frac{1}{2}g_{33}F_{01}F^{01} \right]. \quad (49)$$

Dado que las únicas componentes no cero del tensor del campo electromagnético son F_{01} y F_{10} , las ecuaciones adoptan la forma

$$R_{00} = \frac{1}{m_p^2} \left[\frac{f}{2}F_{01}F^{10} \right] = \frac{f}{2m_p^2}F_{01}F^{01}, \quad (50)$$

$$R_{11} = \frac{1}{m_p^2} \left[\frac{1}{h^2}F_{10}F^{10} \right] = -\frac{1}{2m_p^2 h}F_{01}F^{01}, \quad (51)$$

$$R_{22} = \frac{1}{m_p^2} \left[\frac{r^2}{2}F_{01}F^{10} \right] = \frac{r^2}{2m_p^2}F_{10}F^{10}, \quad (52)$$

$$R_{33} = \frac{1}{m_p^2} \left[\frac{r^2 \sin^2 \theta}{2}F_{01}F^{10} \right] = \frac{r^2}{2m_p^2}F_{10}F^{10} \sin^2 \theta, \quad (53)$$

en donde las componentes del tensor de Ricci, $R_{00}, \dots, R_{33}$, están dadas por las ecuaciones (29)-(32).

De manera análoga a la sección anterior, si se multiplica a la ecuación para R_{00} por $(fh)^{-1}$

y se suma con la ecuación de R_{11} se obtiene, también, que

$$f = h. \quad (54)$$

Además, al reemplazar esta expresión en la ecuación de la componente R_{22} , la expresión que resultante es

$$\begin{aligned} -1 + rf' + f &= \frac{r^2}{m_p^2} F_{10} F^{10} \\ -1 + (rf)' &= \frac{r^2}{m_p^2} F_{10} F^{10}. \end{aligned} \quad (55)$$

Se procede ahora a determinar la expresión para la componente F_{10} del tensor electromagnético en términos de la carga eléctrica Q del objeto en cuestión. Para ello se hace uso de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = 0, \quad (56)$$

en donde ∇_β es la derivada covariante, las cuales para el problema que se está considerando son

$$0 = \partial_0 F^{\alpha 0} + \partial_1 F^{\alpha 1} + \Gamma_{10}^0 F^{\alpha 1} + \Gamma_{11}^1 F^{\alpha 1}, \quad (57)$$

en donde Γ son los símbolos de Christoffel.

Si $\alpha = 0$ se obtiene la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
 (F^{10})' + \Gamma_{01}^0 F^{01} + \Gamma_{11}^1 F^{01} + \Gamma_{21}^2 F^{01} + \Gamma_{31}^2 3F^{01} &= 0, \\
 (F^{01})' + \frac{2}{r} F^{01} &= 0, \\
 (rF^{01})' + F^{01} &= 0, \\
 \frac{dF^{01}}{F^{01}} &= -2 \frac{dr}{r},
 \end{aligned} \tag{58}$$

la cual se satisface si

$$F^{01} = \frac{const.}{r^2}. \tag{59}$$

Por otra parte, ya que $F_{10} = E_r$, entonces,

$$F^{01} = -g^{00} g^{11} F_{10} = E_r \tag{60}$$

y, por tanto, usando la Ley de Gauss del campo eléctrico para una configuración de carga esféricamente simétrica, se llega a que la componente F_{01} del tensor electromagnético es

$$E_r = F_{01} = \frac{Q}{r^2} = F^{10}, \tag{61}$$

Debido a esto, la expresión (55) adopta la forma

$$-1 + (rA)' = \frac{r^2}{2m_p^2} \frac{Q^2}{r^4} \tag{62}$$

cuya solución es

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (63)$$

en la cual $2M$ es la constante de integración. Por lo tanto, la métrica que describe un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico con carga eléctrica (espaciotiempo de Reissner-Nordström) es

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = & - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2} \right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2} \right)^{-1} dr \otimes dr \\ & + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi). \end{aligned} \quad (64)$$

2.3. Agujero negro de Schwarzschild

Después de todo lo anterior es necesario comprender la geometría del espaciotiempo. En este caso se tendrá en consideración el espaciotiempo descrito por la métrica (38). Para lo anterior se procede a estudiar su estructura causal, la cual está definida por los conos de luz (Carroll, 2004). Por lo tanto se consideran las curvas radiales nulas, es decir, las curvas para las que el elemento de línea,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (65)$$

es igual a cero. A partir de esto y dado que el elemento de línea para el espaciotiempo de Schwarzschild (38) es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (66)$$

se obtiene la siguiente condición para las curvas radiales nulas

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (67)$$

Se puede observar que esta expresión describe la pendiente de los conos de luz en un diagrama de t vs. r (ver figura 1). Cuando $r \rightarrow \infty$ la pendiente (67) tiende a 1, lo que llevaría a un espaciotiempo de Minkowski, mientras que cuando $r \rightarrow 2M$ la pendiente tiende a ∞ , es decir que el cono de luz se “cierra”.

Por lo tanto un rayo de luz que se aproxima a la superficie $r = 2M$ nunca alcanzaría la misma, lo que marca una asíntota para la superficie en cuestión. Este fenómeno parece ser un problema de las coordenadas usadas ya que el avance en la dirección r se hace cada vez más lento respecto a la coordenada t . La manera de resolver este problema es reemplazando t por una nueva coordenada que se mueva más lentamente a lo largo de las geodésicas radiales nulas. Para ello se caracterizan estas curvas resolviendo la rama positiva de la condición (67) y obteniendo que

$$t = r + 2GM \ln \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right) + \text{const.} \quad (68)$$

Se define entonces la nueva coordenada llamada coordenada tortuga, la cual se expresa en términos de la coordenada r como

$$r^* = r + 2GM \ln \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right) + \text{const.} \quad (69)$$

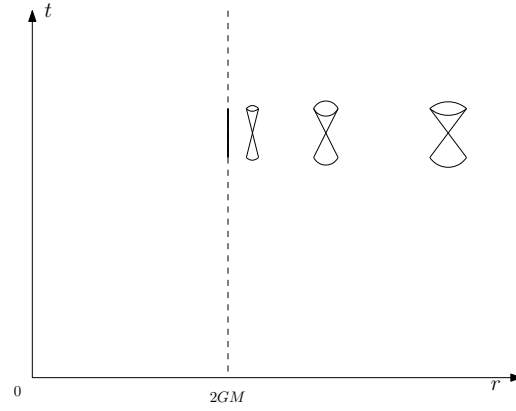


Figura 1. Cambios en los conos de luz para puntos en las inmediaciones de una agujero negro de Schwarzschild en las coordenadas que llevan el mismo nombre.

En términos de esta nueva coordenada, la métrica de Schwarzschild adopta la forma

$$\mathbf{g} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (-dt \otimes dt + dr^* \otimes dr^*) + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi), \quad (70)$$

en donde r es una función de r^{*2} . Esto hace que la superficie $r = 2GM$ sea llevada a $-\infty$.

Una vez realizado esto, se definen unas nuevas coordenadas que se adaptan naturalmente a las geodésicas nulas:

$$v = t + r^*, \quad (71)$$

$$u = t - r^*, \quad (72)$$

donde $v = \text{const}$ define geodésicas nulas radiales “entrantes” y $u = \text{const}$ define geodésicas nulas radiales “salientes”. Dejando la coordenada r y reemplazando la coordenada t por v se llega a las coordenadas de Eddington-Finkelstein (Eddington, 1924; Finkelstein, 1958) en la cual la métrica

(66) se expresa como

$$\mathbf{g} = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv \otimes dv + dv \otimes dr + dr \otimes dv + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi). \quad (73)$$

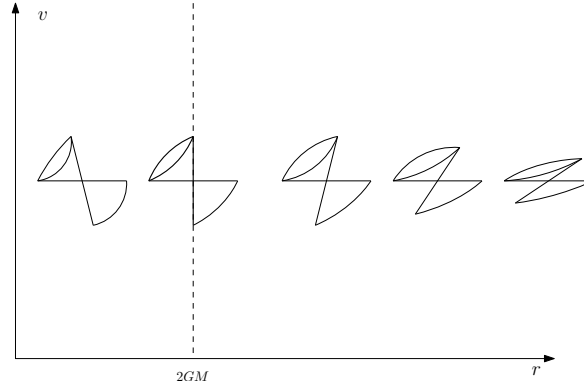


Figura 2. Cambios en los conos de luz para puntos en las inmediaciones de una agujero negro de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein.

Aunque $g_{\mu\nu}$ se hace cero en $r = 2GM$, no hay degeneración real; ya que en este caso el determinante de la métrica, $g = \det g_{\mu\nu}$, es

$$g = -r^4 \sin^2 \theta \neq 0, \quad (74)$$

el cual es perfectamente regular en $r = 2GM$. Por lo tanto, la métrica es invertible y se puede ver que $r = 2GM$ es una singularidad de coordenadas en el sistema (t, r, θ, ϕ) .

En las coordenadas de Eddington-Finkelstein la condición para las curvas radiales nulas se

resuelve debido a que la condición (67) se transforma en

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0, \\ 2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \end{cases} \quad (75)$$

En este sistema de coordenadas los conos de luz permanecen bien comportados en la superficie $r = 2GM$ la cual está en un valor de coordenada finito. Por otra parte, aunque en estas coordenadas los conos de luz no se cierran, estos se inclinan de tal manera que para $r < 2GM$ todos los caminos hacia el futuro están en dirección de r decreciente (ver figura 2), es decir que la superficie $r = 2GM$ funciona como un punto de no retorno - una vez que se atraviesa la superficie, en dirección $-\hat{r}$, es imposible salir de ella. Entonces se puede definir el horizonte de eventos como una superficie más allá de la cual las partículas no pueden escapar hacia el infinito; dicha superficie, para el espaciotiempo de Schwarzschild, está ubicada en $r = 2M$ y, aunque el horizonte está localizado en una coordenada radial fija, éste es una superficie nula, en lugar de una tipo tiempo; por lo tanto, es la estructura causal del espaciotiempo mismo lo que hace imposible cruzar el horizonte de eventos en dirección saliente (Carroll, 2004).

Además, ya que nada puede escapar del horizonte de eventos, es imposible ver al interior del mismo desde un punto fuera de él - por esta razón se llama agujero negro. Por todo lo anterior, un agujero negro se define como una región del espaciotiempo separada del infinito por un horizonte de eventos (Carroll, 2004; Frolov and Novikov, 1998).

3. Teoría generalizada de Proca

La estructura de una acción que modifique la gravedad debe ser construida de tal manera que; primero, se definan los campos contenidos dentro de la misma; segundo, se establezcan las simetrías que debe satisfacer la acción y, por último, se debe evitar la presencia de patologías como la inestabilidad de Ostrogradski (Ostrogradski, 1850) en la cual el estado de un sistema realiza transiciones a niveles de energía cada vez más bajos debido a que el Hamiltoniano no está acotado inferiormente. Lo anterior llevaría a consecuencias inconsistentes tanto a nivel clásico como a nivel cuántico (Woodard, 2015, 2007). Entonces, para evitar esta patología, en tanto la acción no esté degenerada, ecuaciones de movimiento de orden mayor a dos no pueden estar presentes en la teoría, ya que éstas implican que el Hamiltoniano de la misma no esté acotado inferiormente (Woodard, 2015, 2007). Con este fin, se han construido acciones generales, en la presencia de un campo escalar que lleva a ecuaciones de movimiento a lo más de segundo orden. Dicho campo se denomina Galileón escalar debido a que la acción del mismo en el espaciotiempo plano posee una simetría galileana, $\pi \rightarrow \pi + b_\mu x^\mu + c$ (en donde π es el campo escalar y b_μ y c son un cuadrivector y un escalar constantes, respectivamente), cuyas ecuaciones de movimiento son de orden no mayor a dos (Nicolis et al., 2009; Rodríguez and Navarro, 2017). La generalización del Galileón destruye la simetría galileana pero permite derivadas menores a segundo orden en las ecuaciones de movimiento tanto en espaciotiempo plano como en espaciotiempo curvo (Deffayet and Steer, 2013; Deffayet et al., 2011).

Por otra parte, en el caso de los campos vectoriales, Horndeski ya había estudiado el llama-

do Galileon vectorial Abeliano (Horndeski, 1976) el cual es un campo vectorial que es invariante bajo el grupo de simetrías $U(1)$. En el espaciotiempo plano la única posibilidad es la acción de Einstein-Hilbert-Maxwell (Deffayet et al., 2014), pero en un espaciotiempo curvo, las cosas cambian (Horndeski, 1976). Ésto puede evitarse relajando la invarianza de Gauge mediante la generalización de la acción de Proca,

$$S = \int \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \right] d^4x. \quad (76)$$

3.1. Acción generalizada de Proca

En primer lugar, considérese un espaciotiempo plano. Es sabido que cualquier vector, debido al teorema de Helmholtz, puede expresarse como la suma de una parte sin divergencia y una sin rotacional de la siguiente manera:

$$A_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu \pi, \quad (77)$$

con $\mathcal{A}_\mu$ siendo la parte sin divergencia y π siendo un campo escalar el cual es el grado de libertad longitudinal asociado a A_μ . Entonces, si se desea que las ecuaciones de movimiento, tanto para A_μ como para su componente longitudinal π no sean de orden superior a dos, la acción del campo vectorial puede incluir, únicamente, al campo mismo y a sus primeras derivadas espaciotemporales $\partial_\mu A_\nu$ (Rodríguez and Navarro, 2017).

Para construir la acción Galileana (Rodríguez and Navarro, 2017; Heisenberg, 2014; Jime-

nez and Heisenberg, 2016; Allys et al., 2016b,a; Tasinato, 2014b,a), en primer lugar, se deben identificar todos los posibles invariantes de Lorentz contruidos a partir de la contracción de campos vectoriales y derivadas espaciotemporales de primer orden con los invariantes primitivos del grupo de Lorentz ($SO(3,1)$): tensores métricos y, cuando mucho, un tensor de Levi-Civita; lo anterior debido a que el producto de dos tensores de Levi-Civita puede expresarse como una combinación lineal de productos de tensores métricos. En segundo lugar, se agrupan todos estos términos en combinaciones lineales generales. En tercer lugar, se establecen relaciones entre los coeficientes de las combinaciones lineales de tal manera que no se propaguen más de tres grados de libertad, lo cual se establece mediante la condición Hessiana $\mathcal{H}^{0\nu} = 0$ (Heisenberg, 2014; Errasti et al., 2019a,b), en donde

$$\mathcal{H}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)(\partial_0 A_\nu)}. \quad (78)$$

Por último, se realiza el reemplazo $A_\mu \rightarrow \partial_\mu \pi$ y se remueven los términos cuya acción resultante no corresponda a la de un Galileón escalar.

De todo lo anterior resulta que la acción para el Galileón vectorial que generaliza la acción Abelian de Proca es

$$S = \int \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^2 + \sum_{N=2}^6 \mathcal{L}_{N,A}^{Gal} \right] d^4x, \quad (79)$$

donde (Jimenez and Heisenberg, 2016; Allys et al., 2016a)

$$\mathcal{L}_{2,A}^{Gal} = f_2(A_\mu, F_{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu}) = f_2[A^2, F^2, F \cdot \tilde{F}, (A \cdot \tilde{F})^2], \quad (80)$$

$$\mathcal{L}_{3,A}^{Gal} = f_3(A^2) S^\mu{}_\mu, \quad (81)$$

$$\mathcal{L}_{4,A}^{Gal} = f_4(A^2) \left[(S^\mu{}_\mu)^2 - S_\rho{}^\sigma S_\sigma{}^\rho \right], \quad (82)$$

$$\mathcal{L}_{5,A}^{Gal} = f_5(A^2) \left[(S^\mu{}_\mu)^3 - 3(S^\mu{}_\mu) S_\rho{}^\sigma S_\sigma{}^\rho + 2S_\rho{}^\sigma S_\sigma{}^\gamma S_\gamma{}^\rho \right] + g_5(A^2) \tilde{F}^{\alpha\mu} \tilde{F}_\mu{}^\beta S_{\alpha\beta}, \quad (83)$$

$$\mathcal{L}_{6,A}^{Gal} = g_6(A^2) \tilde{F}^{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} S_{\alpha\mu} S_{\beta\nu}, \quad (84)$$

siendo $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ y $S_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$,

La versión para espacio tiempo curvo se obtiene reemplazando las derivadas parciales por derivadas covariantes y añadiendo los contratérminos requeridos para evitar la aparición de derivadas de orden mayor a dos en las ecuaciones de movimiento (Deffayet et al., 2009b).

De tal forma, se tiene que (Heisenberg, 2014; Tasinato, 2014b,a; Allys et al., 2016b,a; Jimenez and Heisenberg, 2016; Rodríguez and Navarro, 2017)

$$S = \int \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^2 + \sum_{N=2}^6 \mathcal{L}_{N,A}^{Gal} + \mathcal{L}_{Curv,A}^{Gal} \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (85)$$

en donde $A^2 = A_\mu A^\mu$ usando la notación $f_{i,A^2} = \partial f_i / \partial A^2$,

$$\mathcal{L}_{Curv,A}^{Gal} = f^{Curv} G_{\mu\nu} A^\mu A^\nu, \quad (86)$$

$$\mathcal{L}_{2,A}^{Gal} = f_2(A_\mu, F_{\mu\nu}, \tilde{F}_{\mu\nu}) = f_2[A^2, F^2, F \cdot \tilde{F}, (A \cdot \tilde{F})^2], \quad (87)$$

$$\mathcal{L}_{3,A}^{Gal} = f_3(A^2) S^\mu{}_\mu, \quad (88)$$

$$\mathcal{L}_{4,A}^{Gal} = f_4(A^2) R + \frac{1}{2} f_{4,A^2} [(S^\mu{}_\mu)^2 - S_\rho{}^\sigma S_\sigma{}^\rho], \quad (89)$$

$$\mathcal{L}_{5,A}^{Gal} = f_5(A^2) G_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + \frac{1}{24} f_{5,A^2} [(S^\mu{}_\mu)^3 - 3(S^\mu{}_\mu) S_\rho{}^\sigma S_\sigma{}^\rho + 2S_\rho{}^\sigma S_\sigma{}^\gamma S_\gamma{}^\rho] \quad (90)$$

$$+ \frac{1}{2} g_5(A^2) \tilde{F}^{\alpha\mu} \tilde{F}_\mu{}^\beta S_{\alpha\beta}, \quad (91)$$

$$\mathcal{L}_{6,A}^{Gal} = g_6(A^2) L_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} + \frac{1}{4} g_{6,A^2} \tilde{F}^{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} S_{\alpha\mu} S_{\beta\nu}, \quad (92)$$

donde f^{Curv} es un escalar constante y $L_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor de Riemann doble dual

$$L^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\rho\sigma\gamma\delta}. \quad (93)$$

Finalmente, en el presente trabajo se tiene en consideración la acción (85) re-escrita de la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(F + \sum_{i=2}^6 \mathcal{L}_i \right), \quad (94)$$

en donde $F = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ y

$$\mathcal{L}_2 = G_2(X, F, Y), \quad (95)$$

$$\mathcal{L}_3 = G_3(X) \nabla_\mu A^\mu, \quad (96)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(X) R + G_{4,X}(X) \left[(\nabla_\mu A^\mu)^2 - \nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A^\mu \right], \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & G_5(X) G_{\mu\nu} \nabla^\mu A^\nu - \frac{1}{6} G_{5,X}(X) \left[(\nabla_\mu A^\nu)^3 - 3 \nabla_\mu A^\mu \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho + 2 \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\nu A^\rho \nabla^\sigma A_\nu \right] \\ & + g_5(X) \tilde{F}^{\alpha\mu} \tilde{F}^\beta_\mu \nabla_\alpha A_\beta, \end{aligned} \quad (98)$$

$$\mathcal{L}_6 = G_6(X) L^{\mu\nu\alpha\beta} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\alpha A_\beta + \frac{1}{2} G_{6,X}(X) \tilde{F}^{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\alpha A_\mu \nabla_\beta A_\nu, \quad (99)$$

con $X = -A_\mu A^\mu/2$, $Y = A^\mu A^\nu F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha}$ y $G_{i,X} = \partial G_i / \partial X$. Las funciones $G_{3,4,5,6}$ y g_5 dependen solamente de X ; mientras que G_2 depende de F , X y Y además de términos como $G_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$.

4. Formulación Lagrangiana de la teoría clásica de campos en espaciotiempo curvo

Sea $\mathcal{L}$ la densidad lagrangiana que es una función escalar de los campos a estudiar, de las derivadas covariantes de los mismos, de la métrica y de las coordenadas. Uno obtiene las ecuaciones de campo bajo el requerimiento de que la acción

$$S = \int_D \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \Psi_{(i)}, \nabla_\mu \Psi_{(i)}, x^\mu) \sqrt{-g} d^4x, \quad (100)$$

sea estacionaria bajo las variaciones de los campos en el interior de una región cuatridimensional compacta D , es decir que la variación de la acción S sea cero, $\delta S = 0$. Adicionalmente se postula que en la frontera de la región D los campos no evolucionan, es decir que en la superficie que encierra a la región las condiciones de contorno son fijas.

Por tanto, a partir de esto, y considerando que el cambio en la acción S sea inducido por una variación de la métrica, los campos y las coordenadas, se obtiene que

$$\delta S = \int_D d^4x' \mathcal{A}(g'_{\mu\nu}, \Psi'_{(i)}, \nabla_\mu \Psi'_{(i)}, x^{\mu'}) - \int_D d^4x \mathcal{A}(g_{\mu\nu}, \Psi_{(i)}, \nabla_\mu \Psi_{(i)}, x^\mu), \quad (101)$$

en donde $\mathcal{A} = \mathcal{L} \sqrt{-g}$. La variación acción se produce al hacer una traslación infinitesimal en el espaciotiempo, es decir,

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu. \quad (102)$$

Derivando la expresión respecto a las coordenadas x^μ se tiene

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\lambda} = \delta_\lambda^\mu + \partial_\lambda(\delta x^\mu). \quad (103)$$

Entonces

$$J^{(x'/_x)} = \det\left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\lambda}\right) = 1 + \partial_\mu(\delta x^\mu). \quad (104)$$

Por lo tanto

$$d^4x' = [1 + \partial_\mu(\delta x^\mu)] d^4x. \quad (105)$$

Ésto lleva a que la variación se exprese como

$$\delta S = \int_D d^4x (\delta \mathcal{A} + \mathcal{A} \partial_\mu(\delta x^\mu)), \quad (106)$$

lo que en términos de $\mathcal{L}$ es

$$\delta S = \int_D d^4x \delta \sqrt{-g} \mathcal{L} + \int_D d^4x \sqrt{-g} \delta \mathcal{L} + \int_D d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \partial_\mu(\delta x^\mu). \quad (107)$$

Ya que la densidad lagrangiana depende de la métrica, de los campos, de las derivadas de los campos y de las coordenadas, la variación adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int_D d^4x \left(\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta x^\mu} \delta x^\mu \right) \mathcal{L} \\
& + \int_D d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi_{(i)}} \delta \Psi_{(i)} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\nabla_\mu \Psi_{(i)})} \delta (\nabla_\mu \Psi_{(i)}) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x^\mu} \delta x^\mu \right] \\
& + \int_D d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu).
\end{aligned} \tag{108}$$

Reordenando la expresión se tiene

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int_D d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi_{(i)}} \delta \Psi_{(i)} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\nabla_\mu \Psi_{(i)})} \delta (\nabla_\mu \Psi_{(i)}) \right) \\
& + \int_D d^4x \left(\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L} + \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} \\
& + \int_D d^4x \left(\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta x^\mu} \delta x^\mu \mathcal{L} + \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta x^\mu} \delta x^\mu + \sqrt{-g} \mathcal{L} \partial_\mu (\delta x^\mu) \right).
\end{aligned} \tag{109}$$

Aplicando la regla de Leibniz en la primera y tercera integral de la expresión (3.88), dado que la variación de la derivada es igual a la derivada de la variación y sabiendo que el primer término de la segunda integral es

$$\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \tag{110}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int_D d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi_{(i)}} \delta \Psi_{(i)} + \nabla_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\nabla_\mu \Psi_{(i)})} \delta \Psi_{(i)} \right) - \nabla_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\nabla_\mu \Psi_{(i)})} \right) \delta \Psi_{(i)} \right] \\
& + \int_D d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} \\
& + \int_D d^4x \partial_\mu (\mathcal{A} \delta x^\mu).
\end{aligned} \tag{111}$$

Reorganizando la expresión y aplicando el teorema de Gauss ésta toma la forma

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int_D d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi_{(i)}} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\nabla_\mu \Psi_{(i)})} \right) \right] \delta \Psi_{(i)} \\
& + \int_D \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} \\
& + \oint_{\partial D} d^4x \mathcal{A} \delta x^\mu d\sigma_\mu \\
& + \oint_{\partial D} \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\nabla_\mu \Psi_{(i)})} \delta \Psi_{(i)} d\sigma_\mu,
\end{aligned} \tag{112}$$

en donde $d\sigma_\mu$ son vectores normales a la superficie ∂D que encierra a la región D . Debido a que los campos no evolucionan sobre la superficie ∂D y que $\delta x^\mu = 0$ sobre la misma, las dos últimas integrales de la ecuación (3.91) se anulan. Adicionalmente, como $\delta S = 0$ y $\delta \Psi_{(i)}$, $\delta g^{\mu\nu}$

son arbitrarios, las ecuaciones obtenidas a partir de la variación sería

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi_{(i)}} - \nabla_{\mu} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\nabla_{\mu} \Psi_{(i)})} \right) = 0 \quad (\text{Ecuaciones del campo escalar (vectorial,...)}) \quad \text{y} \quad (113)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L} = 0 \quad (\text{Ecuaciones del campo gravitacional}). \quad (114)$$

La última ecuación sería correcta en caso de que la densidad lagrangiana, $\mathcal{L}$, no tenga ningún término superficial. De lo contrario se debe saber la expresión de la misma para la teoría a estudiar con el fin encontrar los términos son superficiales y, de esta manera, obtener las ecuaciones de campo correspondientes.

5. Ecuaciones de campo para la acción generalizada de Proca

5.1. Ecuaciones de campo gravitacionales

Dicho todo lo anterior, se procede a determinar las ecuaciones de campo para la acción (94) a partir del método variacional. Para esto, en primer lugar, se realiza la variación de la misma respecto a la métrica, para obtener las ecuaciones del campo gravitacional, por lo cual se parte de la expresión

$$0 = \int_D d^4x (\delta\sqrt{-g}) \left[F + \sum_{i=2}^6 \mathcal{L}_i \right] + \int_D d^4x \sqrt{-g} \left[\delta F + \sum_{i=2}^6 \delta \mathcal{L}_i \right] \quad (115)$$

que al re-escribirse, usando la ecuación (110), de la forma

$$\begin{aligned} 0 = & \int_D d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F + \delta F \right] + \int_D d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{L}_2 + \delta \mathcal{L}_2 \right] \\ & + \int_D d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{L}_3 + \delta \mathcal{L}_3 \right] + \int_D d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{L}_4 + \delta \mathcal{L}_4 \right] \\ & + \int_D d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{L}_5 + \delta \mathcal{L}_5 \right] + \int_D d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \mathcal{L}_6 + \delta \mathcal{L}_6 \right], \quad (116) \end{aligned}$$

permite realizar la variación de la acción, δS_i , correspondiente a cada densidad lagrangiana, $\mathcal{L}_i$, de manera separada, de tal forma que $\delta S = \sum_i \delta S_i = 0$.

Ahora, por lo tanto, se procede con la variación de cada una de las densidades lagrangianas. Entonces, se inicia con la variación de la acción correspondiente al término de Einstein-Maxwell,

F ,

$$\delta S_1 = \int_D d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F + \delta F \right]. \quad (117)$$

Con este fin, es necesario hallar la variación del término F respecto a la métrica, es decir, δF . Esta variación se expresada de la siguiente manera

$$\delta F = -\delta \left(\frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha}{}^{\nu} \delta g^{\mu\alpha} - \frac{1}{4} F_{\nu}{}^{\alpha} F_{\alpha\beta} \delta g^{\nu\beta} = -\frac{1}{2} F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^{\alpha} \delta g^{\mu\nu}. \quad (118)$$

lo que lleva a

$$\delta S_1 = \int_D d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} (g_{\mu\nu} F + F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^{\alpha}) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (119)$$

Ahora, continuando con la segunda integral de la ecuación (116), se determina la expresión para el término $\delta \mathcal{L}_2$, el cual está dado por

$$\delta \mathcal{L}_2 = G_{2,X} \delta X + G_{2,F} \delta F + G_{2,Y} \delta Y, \quad (120)$$

en donde

$$\delta X = \delta \left(-\frac{1}{2} A_\mu A^\mu \right) = -\delta \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \right) = -\frac{1}{2} A_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu} \quad \text{y} \quad (121)$$

$$\begin{aligned} \delta Y &= \delta (A^\mu A^\nu F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha}) \\ &= \delta (g^{\mu\lambda} g^{\nu\gamma} g^{\alpha\beta} A_\lambda A_\gamma F_{\mu\beta} F_{\nu\alpha}) \\ &= A_\lambda A^\nu F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha} \delta g^{\mu\lambda} + A^\mu A_\gamma F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha} \delta g^{\nu\gamma} + A^\mu A^\nu F_{\mu\beta} F_{\nu\alpha} \delta g^{\alpha\beta} \\ &= (A_\nu A^\sigma F_\mu^\alpha F_{\sigma\alpha} + A^\sigma A_\nu F_\sigma^\alpha F_{\mu\alpha} - A^\alpha A^\beta F_{\beta\nu} F_{\mu\alpha}) \delta g^{\mu\nu} \\ &= (2A^\sigma A_{(\mu} F_{\nu)}^\alpha F_{\sigma\alpha} - A^\alpha A^\beta F_{\beta\nu} F_{\mu\alpha}) \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (122)$$

Antes de continuar, es indispensable aclarar que todos los términos de la forma $M_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}$, mientras $M_{\alpha\beta}$ no sea simétrico, se llevarán, debido a la simetría del tensor métrico, a la expresión

$$M_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} M_{\beta\alpha} \delta g^{\alpha\beta} = M_{(\alpha\beta)} \delta g^{\alpha\beta}, \quad (123)$$

en donde $M_{(\alpha\beta)}$ es la simetrización del tensor $M_{\alpha\beta}$ la cual se ha definido como

$$M_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} [M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}]. \quad (124)$$

Dicho esto se tiene que la segunda integral adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned} \delta S_2 = \int_D d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_2 - \frac{1}{2} G_{2,X} A_\mu A_\nu - \frac{1}{2} G_{2,F} F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha \right. \\ \left. + G_{2,Y} (2A^\sigma A_{(\mu} F_{\nu)}{}^\alpha F_{\sigma\alpha} - A^\alpha A^\beta F_{\beta\nu} F_{\mu\alpha}) \right] \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (125)$$

Siguiento con la tercera integral, se tiene que la variación de la densidad lagrangiana, $\delta \mathcal{L}_3$, es

$$\delta \mathcal{L}_3 = G_{3,X} \nabla_\mu A^\mu \delta X + G_3 \delta(\nabla_\mu A^\mu), \quad (126)$$

en donde

$$\begin{aligned} \delta(\nabla_\mu A^\mu) &= \delta(g^{\mu\nu} \nabla_\mu A_\nu) = \nabla_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (-\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda) \\ &= \nabla_{(\mu} A_{\nu)} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (2\nabla_\gamma (\delta g^{\lambda\gamma}) - g_{\mu\nu} \nabla^\lambda (\delta g^{\mu\nu})) A_\lambda. \end{aligned} \quad (127)$$

Las variaciones correspondientes a los símbolos de Christoffel y a términos que incluyan a los mismos han sido calculados en el Apéndice 1. Por otra parte se descartan los términos que, debido al teorema de la divergencia, lleven a términos superficiales, es decir, términos que sean integrales sobre la superficie que encierra a D , ya que en ésta los campos no evolucionan. Por lo tanto, se

tiene

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_3 &= G_{3,X} \nabla_\mu A^\mu \delta X + G_3 \delta(\nabla_\mu A^\mu) \\
&= -\frac{1}{2} G_{3,X} A_\mu A_\nu \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\mu\nu} + G_3 \nabla_{(\mu} A_{\nu)} \delta g^{\mu\nu} + G_3 \nabla_\gamma (\delta g^{\lambda\gamma}) A_\lambda \\
&\quad - \frac{1}{2} G_3 g_{\mu\nu} \nabla^\lambda (\delta g^{\mu\nu}) A_\lambda \\
&= -\frac{1}{2} G_{3,X} A_\mu A_\nu \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\mu\nu} + G_3 \nabla_{(\mu} A_{\nu)} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\gamma \left[G_3 A_\lambda \delta g^{\lambda\gamma} \right] - A_\lambda \nabla_\gamma G_3 \delta g^{\gamma\lambda} \\
&\quad - G_3 \nabla_\gamma A_\lambda \delta g^{\gamma\lambda} - \frac{1}{2} \nabla_\lambda \left[G_3 g_{\mu\nu} A^\lambda \delta g^{\mu\nu} \right] + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A^\lambda \nabla_\lambda G_3 \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_3 \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\mu\nu} \\
&= \left[-\frac{1}{2} G_{3,X} A_\mu A_\nu \nabla_\alpha A^\alpha + G_3 (\nabla_{(\mu} A_{\nu)} - \nabla_{(\mu} A_{\nu)}) - A_{(\mu} \nabla_{\nu)} G_3 + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_3 \nabla_\alpha A^\alpha \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A^\alpha \nabla_\alpha G_3 \right] \delta g^{\mu\nu},
\end{aligned}$$

en donde

$$\nabla_\alpha G_i = G_{i,X} \left(-\frac{1}{2} \nabla_\alpha (A_\beta A^\beta) \right) = -G_{i,X} A^\beta \nabla_\alpha A_\beta. \quad (128)$$

De esta manera, la variación $\delta \mathcal{L}_3$ queda expresada de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_3 &= \left[-\frac{1}{2} G_{3,X} A_\mu A_\nu \nabla_\alpha A^\alpha + G_{3,X} A_{(\mu} A^{\alpha} \nabla_{\nu)} A_\alpha + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_3 \nabla_\alpha A^\alpha \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_{3,X} A^\alpha A^\beta \nabla_\alpha A_\beta \right] \delta g^{\mu\nu}, \quad (129)
\end{aligned}$$

lo que lleva a que la tercera integral de la ecuación (116) adopte la forma

$$\delta S_3 = \int_D d^4x \sqrt{-g} G_{3,X} \left[-\frac{1}{2} A_\mu A_\nu \nabla_\alpha A^\alpha + A^\alpha \left(A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A_\alpha - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A^\beta \nabla_\alpha A_\beta \right) \right]. \quad (130)$$

La variación $\delta \mathcal{L}_4$ de la cuarta integral de la ecuación (116) se expresa como

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_4 = & G_4 \delta R + G_{4,X} [R \delta X + \delta (\nabla_\mu A^\mu)^2 - \delta (\nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A^\mu)] + G_{4,XX} [(\nabla_\mu A^\mu)^2 \\ & - \nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A^\mu] \delta X, \end{aligned} \quad (131)$$

en donde

$$\begin{aligned} \delta (\nabla_\alpha A^\alpha)^2 = & 2 \nabla_\alpha A^\alpha \delta (g^{\mu\nu} \nabla_\mu A_\nu) \\ = & 2 \nabla_\alpha A^\alpha \left[\nabla_{(\mu} A_{\nu)} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (2 \nabla_\gamma (\delta g^{\lambda\gamma}) - g_{\mu\nu} \nabla^\lambda (\delta g^{\mu\nu})) A_\lambda \right], \end{aligned} \quad (132)$$

$$\delta (\nabla_\alpha A_\beta \nabla^\beta A^\alpha) = 2 \delta g^{\mu\nu} \nabla_\beta A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\beta - 2 \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda A_\lambda \nabla^\beta A^\alpha, \quad (133)$$

y, dado que, el tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$ es

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \quad (134)$$

su variación puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} = & \partial_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \partial_\nu (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha + \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \delta \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \\ = & \nabla_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha). \end{aligned} \quad (135)$$

Por lo tanto la variación del escalar de Ricci es:

$$\begin{aligned}\delta R &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} [\nabla_\alpha (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha)] \\ &= R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\alpha (g^{\mu\nu} (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - g^{\mu\alpha} (\delta \Gamma_{\mu\gamma}^\gamma)).\end{aligned}\tag{136}$$

Finalmente, la variación de $\mathcal{L}_4$ se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L}_4 &= G_4 \delta R + G_{4,X} [R \delta X + \delta (\nabla_\mu A^\mu)^2 - \delta (\nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A^\mu)] \\ &\quad + G_{4,XX} [(\nabla_\mu A^\mu)^2 - \nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A^\mu] \delta X \\ &= G_4 R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + G_4 \nabla_\rho (\nabla_\gamma (\delta g^{\rho\gamma}) - g_{\mu\nu} \nabla^\rho (\delta g^{\mu\nu})) + G_{4,X} \left[-\frac{1}{2} R A_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu} \right. \\ &\quad + 2 \nabla_\alpha A^\alpha \nabla_{(\mu} A_{\nu)} \delta g^{\mu\nu} + 2 \nabla_\alpha A^\alpha \nabla_\gamma (\delta g^{\lambda\gamma}) A_\lambda - \nabla_\alpha A^\alpha g_{\mu\nu} \nabla^\lambda (\delta g^{\mu\nu}) A_\lambda \\ &\quad \left. - 2 \delta g^{\mu\nu} \nabla_\beta A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\beta + 2 \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda A_\lambda \nabla^\beta A^\alpha \right] - \frac{1}{2} G_{4,XX} A_\mu A_\nu [(\nabla_\alpha A^\alpha)^2 \\ &\quad - \nabla_\alpha A_\beta \nabla^\beta A^\alpha] \delta g^{\mu\nu},\end{aligned}$$

en donde, aplicando la regla de Leibniz para encontrar los términos superficiales, se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= G_4 R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\rho (G_4 \nabla_\gamma (\delta g^{\rho\gamma})) - \nabla_\rho G_4 \nabla_\gamma (\delta g^{\rho\gamma}) - \nabla_\rho (g_{\mu\nu} G_4 \nabla^\rho (\delta g^{\mu\nu})) \\
&\quad + g_{\mu\nu} \nabla_\rho G_4 \nabla^\rho (\delta g^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} G_{4,X} R A_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu} + 2 G_{4,X} \nabla_\alpha A^\alpha \nabla_{(\mu} A_{\nu)} \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + 2 \nabla_\gamma (G_{4,X} \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\lambda\gamma} A_\lambda) - 2 A_\lambda \nabla_\gamma G_{4,X} \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\lambda\gamma} - 2 G_{4,X} \nabla_\gamma A_\lambda \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\lambda\gamma} \\
&\quad - 2 G_{4,X} A_\lambda \nabla_\gamma \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\lambda\gamma} - \nabla_\lambda (g_{\mu\nu} G_{4,X} A^\lambda \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\mu\nu}) + g_{\mu\nu} A^\lambda \nabla_\lambda G_{4,X} \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + g_{\mu\nu} G_{4,X} (\nabla_\alpha A^\alpha)^2 \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} G_{4,X} A^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\mu\nu} - 2 G_{4,X} \nabla_\beta A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\beta \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad - G_{4,X} [g_{\alpha\gamma} \nabla_\beta (\delta g^{\lambda\gamma}) + g_{\beta\gamma} \nabla_\alpha (\delta g^{\lambda\gamma}) - g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \nabla^\lambda (\delta g^{\mu\nu})] A_\lambda \nabla^\beta A^\alpha \\
&\quad - \frac{1}{2} G_{4,XX} A_\mu A_\nu \left[(\nabla_\alpha A^\alpha)^2 - \nabla_\alpha A_\beta \nabla^\beta A^\alpha \right] \delta g^{\mu\nu} \\
0 &= G_4 R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\gamma (\nabla_\rho G_4 \delta g^{\rho\gamma}) + \nabla_\mu \nabla_\nu G_4 \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\rho (g_{\mu\nu} \nabla^\rho G_4 \delta g^{\mu\nu}) - g_{\mu\nu} \square G_4 \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{2} G_{4,X} R A_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu} + 2 G_{4,X} \nabla_\alpha A^\alpha \nabla_{(\mu} A_{\nu)} \delta g^{\mu\nu} - 2 A_{(\mu} \nabla_{\nu)} G_{4,X} \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad - 2 G_{4,X} \nabla_{(\mu} A_{\nu)} \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\mu\nu} - 2 G_{4,X} A_{(\mu} \nabla_{\nu)} \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} A^\lambda \nabla_\lambda G_{4,X} \nabla_\alpha A^\alpha \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad + g_{\mu\nu} G_{4,X} (\nabla_\alpha A^\alpha)^2 \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} G_{4,X} A_\beta \nabla^\beta \nabla_\alpha A^\alpha - 2 G_{4,X} \nabla_\alpha A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\alpha \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad - \nabla_\beta (g_{\alpha\gamma} G_{4,X} A_\lambda \nabla^\beta A^\alpha \delta g^{\lambda\gamma}) + A_\lambda \nabla_\beta G_{4,X} \nabla^\beta A_\gamma \delta g^{\lambda\gamma} + G_{4,X} \nabla_\beta (A_\lambda \nabla^\beta A_\gamma) \delta g^{\lambda\gamma} \\
&\quad - \nabla_\alpha (g_{\beta\gamma} G_{4,X} A_\lambda \nabla^\beta A^\alpha \delta g^{\lambda\gamma}) + A_\lambda \nabla_\alpha G_{4,X} \nabla_\gamma A^\alpha \delta g^{\lambda\gamma} + G_{4,X} \nabla_\alpha (A_\lambda \nabla_\gamma A^\alpha) \delta g^{\lambda\gamma} \\
&\quad + \nabla_\lambda (G_{4,X} A^\lambda \nabla_\nu A_\mu \delta g^{\mu\nu}) - A^\lambda \nabla_\lambda G_{4,X} \nabla_\nu A_\mu \delta g^{\mu\nu} - G_{4,X} \nabla_\lambda (A^\lambda \nabla_\nu A_\mu) \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad - \frac{1}{2} G_{4,XX} A_\mu A_\nu \left[(\nabla_\alpha A^\alpha)^2 - \nabla_\alpha A_\beta \nabla^\beta A^\alpha \right] \delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Se obtiene así que la variación de la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_4$ respecto a la métrica es

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_4 = & \left\{ G_4 R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu G_4 - g_{\mu\nu} \square G_4 + G_{4,X} \left[-\frac{1}{2} R A_\mu A_\nu - 2 A_{(\mu} \nabla_{\nu)} \nabla_\alpha A^\alpha + g_{\mu\nu} (\nabla_\alpha A^\alpha)^2 \right. \right. \\ & + g_{\mu\nu} A_\beta \nabla^\beta \nabla^\alpha A_\alpha - 2 \nabla_\alpha A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\alpha + \nabla_\alpha (A_{(\mu} \nabla^\alpha A_{\nu)} + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\alpha - A^\alpha \nabla_{(\mu} A_{\nu)}) \left. \right] \\ & - 2 A_{(\mu} \nabla_{\nu)} G_{4,X} \nabla_\alpha A^\alpha + g_{\mu\nu} A^\beta \nabla_\beta G_{4,X} \nabla_\alpha A^\alpha + \nabla_\alpha G_{4,X} (A_{(\mu} \nabla^\alpha A_{\nu)} + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\alpha \\ & \left. - A^\alpha \nabla_{(\mu} A_{\nu)}) \right\} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (137)$$

Realizando las derivadas covariantes faltantes se tiene que la expresión para la variación de la densidad lagrangiana $\delta \mathcal{L}_4$ con respecto a la métrica es la siguiente:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_4 = & \left\{ G_4 R_{\mu\nu} + \frac{1}{4} G_{4,XX} \nabla_\mu A^2 \nabla_\nu A^2 - \frac{1}{2} G_{4,X} \nabla_\mu \nabla_\nu A^2 - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G_{4,XX} \nabla^\alpha A^2 \nabla_\alpha A^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_{4,X} \square A^2 + G_{4,X} \left[-\frac{1}{2} R A_\mu A_\nu - 2 A_{(\mu} \nabla_{\nu)} \nabla_\alpha A^\alpha + g_{\mu\nu} (\nabla_\alpha A^\alpha)^2 \right. \\ & + g_{\mu\nu} A_\beta \nabla^\beta \nabla^\alpha A_\alpha - 2 \nabla_\alpha A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\alpha + \nabla_\alpha (A_{(\mu} \nabla^\alpha A_{\nu)} + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\alpha \\ & \left. \left. - A^\alpha \nabla_{(\mu} A_{\nu)}) \right] + G_{4,XX} A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^2 \nabla_\alpha A^\alpha - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_{4,XX} A^\beta \nabla_\beta A^2 \nabla_\alpha A^\alpha \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} G_{4,XX} \nabla_\alpha A^2 (A_{(\mu} \nabla^\alpha A_{\nu)} + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\alpha - A^\alpha \nabla_{(\mu} A_{\nu)}) \right\} \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (138)$$

en donde, al re-organizar se tiene

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_4 = & \left\{ G_4 R_{\mu\nu} + G_{4,X} \left[g_{\mu\nu} (\nabla_\alpha A^\alpha) - 2A_{(\mu} \nabla_{\nu)} \nabla_\alpha A^\alpha + g_{\mu\nu} A_\beta \nabla^\beta \nabla^\alpha A_\alpha \right. \right. \\
& - 2\nabla_\alpha A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\alpha + \nabla_\alpha (A_{(\mu} \nabla^\alpha A_{\nu)}) + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^2 - A^\alpha \nabla_{(\mu} A_{\nu)}) \\
& \left. - \frac{1}{2} (RA_\mu A_\nu + \nabla_\mu \nabla_\nu A^2 - g_{\mu\nu} \square A^2) \right] + G_{4,XX} \left[\frac{1}{4} \nabla_\mu A^2 \nabla_\nu A^2 \right. \\
& - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha A^2 \nabla_\alpha A^2 + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^2 \nabla_\alpha A^\alpha - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A^\beta \nabla_\beta A^2 \nabla_\alpha A^\alpha \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \nabla_\alpha A^2 (A_{(\mu} \nabla^\alpha A_{\nu)}) + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\alpha - A^\alpha \nabla_{(\mu} A_{\nu)}) \right] \right\} \delta g^{\mu\nu}. \quad (139)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la cuarta integral de la ecuación (116) es

$$\begin{aligned}
\delta S_4 = & \int_D d^4x \sqrt{-g} \left\{ G_4 G_{\mu\nu} + G_{4,X} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla_\alpha A^\alpha)^2 - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha A_\beta \nabla^\beta A^\alpha \right. \right. \\
& - 2A_{(\mu} \nabla_{\nu)} \nabla_\alpha A^\alpha + g_{\mu\nu} A_\beta \nabla^\beta \nabla^\alpha A_\alpha + \nabla_\alpha (A_{(\mu} \nabla^\alpha A_{\nu)}) + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^2 \\
& - A^\alpha \nabla_{(\mu} A_{\nu)}) - 2\nabla_\alpha A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\alpha - \frac{1}{2} (RA_\mu A_\nu + \nabla_\mu \nabla_\nu A^2 - g_{\mu\nu} \square A^2) \left. \right] \\
& + G_{4,XX} \left[\frac{1}{4} \nabla_\mu A^2 \nabla_\nu A^2 - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha A^2 \nabla_\alpha A^2 + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^2 \nabla_\alpha A^\alpha \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A^\beta \nabla_\beta A^2 \nabla_\alpha A^\alpha - \frac{1}{2} \nabla_\alpha A^2 (A_{(\mu} \nabla^\alpha A_{\nu)}) + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^\alpha - A^\alpha \nabla_{(\mu} A_{\nu)}) \right] \right\} \delta g^{\mu\nu}. \quad (140)
\end{aligned}$$

Debido a la gran extensión en la variación de las dos últimas integrales, de alrededor de 400 términos entre ambas, se optó por usar el paquete *xAct* del software *Mathematica* (Martin-Garcia, 2019) para poder obtener las variaciones de los mismos, las cuales será presentadas en el capítulo 6 para las ecuaciones de campo implementando ya la configuración esféricamente simétrica del

campo y de la métrica.

Por último, es claro que en la expresión final de la ecuación (116), la variación de la métrica, $\delta g_{\mu\nu}$ será factor común de todo el integrando. Por lo tanto, dado que esta variación es arbitraria para que se satisfaga la condición de que la acción sea estacionaria todo el factor que acompaña a $\delta g_{\mu\nu}$ debe ser cero. Así se obtienen las ecuaciones de campo gravitacional, las cuales son:

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{2} (g_{\mu\nu} F + F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} G_2 - \frac{1}{2} G_{2,X} A_{\mu} A_{\nu} - \frac{1}{2} G_{2,F} F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} \\
& + G_{2,Y} (2A^{\sigma} A_{(\mu} F_{\nu)}^{\alpha} F_{\sigma\alpha} - A^{\alpha} A^{\beta} F_{\beta\nu} F_{\mu\alpha}) + G_{3,X} \left[-\frac{1}{2} A_{\mu} A_{\nu} \nabla_{\alpha} A^{\alpha} \right. \\
& \left. + A^{\alpha} \left(A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A_{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A^{\beta} \nabla_{\alpha} A_{\beta} \right) \right] + G_4 G_{\mu\nu} + G_{4,X} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla_{\alpha} A^{\alpha})^2 \right. \\
& - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_{\alpha} A_{\beta} \nabla^{\beta} A^{\alpha} - 2A_{(\mu} \nabla_{\nu)} \nabla_{\alpha} A^{\alpha} + g_{\mu\nu} A_{\beta} \nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} A_{\alpha} \\
& \left. + \nabla_{\alpha} (A_{(\mu} \nabla^{\alpha} A_{\nu)} + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^2 - A^{\alpha} \nabla_{(\mu} A_{\nu)}) \right. \\
& \left. - 2\nabla_{\alpha} A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^{\alpha} - \frac{1}{2} (R A_{\mu} A_{\nu} + \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} A^2 - g_{\mu\nu} \square A^2) \right] \\
& + G_{4,XX} \left[\frac{1}{4} \nabla_{\mu} A^2 \nabla_{\nu} A^2 - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \nabla^{\alpha} A^2 \nabla_{\alpha} A^2 + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^2 \nabla_{\alpha} A^{\alpha} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A^{\beta} \nabla_{\beta} A^2 \nabla_{\alpha} A^{\alpha} - \frac{1}{2} \nabla_{\alpha} A^2 (A_{(\mu} \nabla^{\alpha} A_{\nu)} + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^{\alpha} - A^{\alpha} \nabla_{(\mu} A_{\nu)}) \right] + \dots \quad (141)
\end{aligned}$$

5.2. Ecuaciones de campo vectoriales

En esta sección se calcularán las ecuaciones de campo vectoriales correspondientes a la variación de la acción (94) respecto a los campos usando la expresión (113), en donde $\Psi_{(i)} = A_{\alpha}$

de la siguiente manera

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\alpha} - \nabla_\beta \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} \right) = 0, \quad (142)$$

en donde $\mathcal{L}$ es el integrando de la acción mencionada.

Por lo tanto, se comienza calculando el primer término de la ecuación (142) para cada densidad lagrangiana de la acción (94). Entonces, para el término de Maxwell, F , dado que el tensor de Faraday depende únicamente de derivadas covariantes, la variación respecto al campo vectorial A_α es

$$\frac{\delta F}{\delta A_\alpha} = -\frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta A_\alpha} \left(g^{\mu\nu} g^{\beta\gamma} F_{\nu\gamma} F_{\mu\beta} \right) = 0. \quad (143)$$

Ahora, la variación de $\mathcal{L}_2$ respecto al campo vectorial A_α es la siguiente

$$\frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta A_\alpha} = G_{2,X} \frac{\delta X}{\delta A_\alpha} + G_{2,F} \frac{\delta F}{\delta A_\alpha} + G_{2,Y} \frac{\delta Y}{\delta A_\alpha}, \quad (144)$$

en donde

$$\frac{\delta X}{\delta A_\alpha} = -\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta A_\alpha} (g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu) = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \delta_\mu^\alpha A_\nu - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} A_\mu \delta_\nu^\alpha = -A^\alpha, \quad (145)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta Y}{\delta A_\alpha} &= \frac{\delta}{\delta A_\alpha} (g^{\mu\omega} g^{\nu\theta} A_\omega A_\theta g^{\lambda\sigma} F_{\mu\sigma} F_{\nu\lambda}) \\
&= g^{\mu\omega} g^{\nu\theta} \delta_\omega^\alpha A_\theta F_{\mu\lambda} F_{\nu}{}^\lambda + g^{\mu\omega} g^{\nu\theta} A_\omega \delta_\theta^\alpha F_{\mu\lambda} F_{\nu}{}^\lambda \\
&= A^\nu F_{\lambda}{}^\alpha F_{\nu}{}^\lambda + A^\mu F_{\mu\lambda} F^{\alpha\lambda} \\
&= 2A^\mu F_{\mu\lambda} F^{\alpha\lambda}
\end{aligned} \tag{146}$$

e introduciendo el resultado (143) la variación queda expresada de la siguiente manera:

$$\delta \mathcal{L}_2 = -G_{2,X} A^\alpha + 2G_{2,Y} A^\mu F_{\mu\lambda} F^{\alpha\lambda}. \tag{147}$$

Seguidamente, la variación de $\mathcal{L}_3$ respecto al campo vectorial A_α es

$$\frac{\delta \mathcal{L}_3}{\delta A_\alpha} = -G_{3,X} A^\alpha \nabla_\mu A^\mu. \tag{148}$$

y las variaciones de $\mathcal{L}_4$, $\mathcal{L}_5$ y $\mathcal{L}_6$ con respecto al campo vectorial A_α son, respectivamente,

$$\frac{\delta \mathcal{L}_4}{\delta A_\alpha} = -G_{4,X} A^\alpha R - G_{4,XX} A^\alpha [(\nabla_\mu A^\mu)^2 - \nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A^\mu], \tag{149}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}_5}{\delta A_\alpha} &= -G_{5,X} A^\alpha G_{\mu\nu} \nabla^\mu A^\nu + \frac{1}{6} G_{5,XX} A^\alpha [(\nabla_\mu A^\mu)^3 - 3\nabla_\mu A^\mu \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho \\
&\quad + 2\nabla_\rho A_\sigma \nabla^\nu A^\rho \nabla^\sigma A_\nu] + g_{5,X} A^\alpha \tilde{F}^{\gamma\mu} \tilde{F}^\beta{}_\mu \nabla_\gamma A_\beta
\end{aligned} \tag{150}$$

y

$$\frac{\delta \mathcal{L}_6}{\delta A_\alpha} = -G_{6,X} A^\alpha L^{\mu\nu\gamma\beta} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\gamma A_\beta - \frac{1}{2} G_{6,XX} A^\alpha \tilde{F}^{\gamma\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\gamma A_\mu \nabla_\beta A_\nu. \quad (151)$$

Luego de lo anterior se calcula la variación de cada densidad lagrangiana respecto a la derivada covariante del campo vectorial, $\nabla_\beta A_\alpha$, entonces, para el término F se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} &= -\frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} (g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu} F_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma}) \\ &= -\frac{1}{4} g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu} \frac{\delta}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu) F_{\lambda\sigma} \\ &\quad - \frac{1}{4} g^{\lambda\mu} g^{\sigma\nu} F_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} (\nabla_\lambda A_\sigma - \nabla_\sigma A_\lambda) \\ &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta) - \frac{1}{4} F^{\lambda\sigma} (\delta_\lambda^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\alpha \delta_\lambda^\beta) \\ &= -F^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (152)$$

Posteriormente, para la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_2$, la variación respecto a la derivada covariante del campo vectorial es

$$\frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} = G_{2,F} \frac{\delta F}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} + G_{2,Y} \frac{\delta Y}{\delta \nabla_\beta A_\alpha}, \quad (153)$$

en donde¹

$$\begin{aligned}
\frac{\delta Y}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} &= A^\mu A^\nu \frac{\delta}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} (g^{\lambda\sigma} F_{\mu\sigma} F_{\nu\lambda}) \\
&= A^\mu A^\nu g^{\lambda\sigma} (\delta_\mu^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\alpha \delta_\mu^\beta) F_{\nu\lambda} + A^\mu A^\nu g^{\lambda\sigma} F_{\mu\sigma} (\delta_\nu^\alpha \delta_\lambda^\beta - \delta_\lambda^\alpha \delta_\nu^\beta) \\
&= A^\alpha A^\nu F_\nu{}^\beta - A^\beta A^\nu F_\nu{}^\alpha + A^\mu A^\alpha F_\mu{}^\beta - A^\mu A^\beta F_\mu{}^\alpha \\
&= 4A^\nu A^{[\alpha} F_\nu{}^{\beta]}
\end{aligned} \tag{154}$$

es decir que dicha variación queda escrita como sigue

$$\frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} = -G_{2,F} F^{\beta\alpha} + 4G_{2,Y} A^\nu A^{[\beta} F_\nu{}^{\alpha]}, \tag{155}$$

y la divergencia de esta expresión es

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta \left(\frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} \right) &= -\nabla_\beta G_{2,F} F^{\beta\alpha} - G_{2,F} \nabla_\beta F^{\beta\alpha} + 4\nabla_\beta G_{2,Y} A^\nu A^{[\beta} F_\nu{}^{\alpha]} \\
&\quad + 4G_{2,Y} (\nabla_\beta A^\nu) A^{[\beta} F_\nu{}^{\alpha]} + 4G_{2,Y} A^\nu \nabla_\beta A^{[\beta} F_\nu{}^{\alpha]} + 4G_{2,Y} A^\nu A^{[\beta} \nabla_\beta F_\nu{}^{\alpha]}. \tag{156}
\end{aligned}$$

Por otra parte la variación de la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_3$ respecto a la derivada covariante

¹ La antisimetrización se encuentra normalizada: $M_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(M_{\mu\nu} - M_{\nu\mu})$.

del campo vectorial es

$$\frac{\delta \mathcal{L}_3}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} = G_3 g^{\mu\nu} \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha = G_3 g^{\beta\alpha} \quad (157)$$

y la divergencia de la misma es

$$\nabla_\beta \left(\frac{\delta \mathcal{L}_3}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} \right) = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta G_3 = -\frac{1}{2} G_{3,X} \nabla^\alpha A^2. \quad (158)$$

Ahora, para el caso de la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_4$ se tiene que su variación respectiva es

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_4}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} &= G_{4,X} \left[2 \nabla_\mu A^\mu g^{\lambda\nu} \delta_\lambda^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha \nabla^\nu A^\mu - g^{\theta\nu} g^{\mu\omega} \nabla_\mu A_\nu \delta_\theta^\beta \delta_\omega^\alpha \right] \\ &= 2 G_{4,X} (g^{\alpha\beta} \nabla_\mu A^\mu - \nabla^\alpha A^\beta) \end{aligned} \quad (159)$$

y la divergencia de esta expresión adopta la forma

$$\begin{aligned} \nabla_\beta \left(\frac{\delta \mathcal{L}_4}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} \right) &= -2 \nabla_\beta G_{4,X} (g^{\alpha\beta} \nabla_\mu A^\mu - \nabla^\alpha A^\beta) + 2 G_{4,X} (\nabla^\alpha \nabla_\beta A^\beta - \nabla_\beta \nabla^\alpha A^\beta) \\ &= -G_{4,XX} \nabla_\beta A^2 (g^{\alpha\beta} \nabla_\mu A^\mu - \nabla^\alpha A^\beta) - 2 G_{4,X} R^{\alpha\beta} A_\beta. \end{aligned} \quad (160)$$

Luego de esto se prosigue con la variación de $\mathcal{L}_5$ la cual viene expresada como

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}_5}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} = & G_5 G_{\mu\nu} g^{\mu\omega} g^{\nu\theta} \delta_\omega^\beta \delta_\omega^\alpha - \frac{1}{6} G_{5,X} \left[3(\nabla_\mu A^\mu)^2 g^{\beta\alpha} - 2g^{\mu\nu} \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho \right. \\
& - 3\nabla_\mu A^\mu \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\alpha \nabla^\sigma A^\rho - 3\nabla_\mu A^\mu \nabla_\rho A_\sigma g^{\sigma\lambda} g^{\rho\gamma} \delta_\lambda^\beta \delta_\gamma^\alpha + 2\delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\alpha \nabla^\nu A^\rho \nabla^\sigma A_\nu \\
& + 2\nabla_\rho A_\sigma g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \delta_\mu^\beta \delta_\lambda^\alpha \nabla^\sigma A_\nu + 2\nabla_\rho A_\sigma \nabla^\alpha A^\rho g^{\sigma\lambda} \delta_\lambda^\beta \delta_\nu^\alpha \left. \right] - \frac{g_5}{2} \eta^{\lambda\mu\delta\gamma} (\delta_\delta^\beta \delta_\gamma^\alpha - \delta_\gamma^\beta \delta_\delta^\alpha) \\
& \times \tilde{F}_\mu^\sigma \nabla_\lambda A_\sigma - \frac{g_5}{2} \tilde{F}^{\lambda\mu} g_{\mu\omega} \eta^{\sigma\omega\delta\gamma} (\delta_\delta^\beta \delta_\gamma^\alpha - \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta) \nabla_\lambda A_\sigma - g_5 \tilde{F}^{\lambda\sigma} \tilde{F}_\mu^\sigma \delta_\lambda^\beta \delta_\sigma^\alpha \\
& G_5 G^{\alpha\beta} - \frac{1}{6} \left[3(\nabla_\mu A^\mu)^2 g^{\alpha\beta} - 3g^{\alpha\beta} \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho - 3\nabla_\mu A^\mu \nabla^\alpha A^\beta + 2\nabla^\nu A^\beta \nabla^\alpha A_\nu \right. \\
& + 2\nabla^\alpha A_\sigma \nabla^\sigma A^\beta + 2\nabla_\rho A^\beta \nabla^\alpha A^\rho \left. \right] - \frac{g_5}{2} \eta^{\lambda\mu\beta\alpha} \tilde{F}_\mu^\sigma \nabla_\lambda A_\sigma + \frac{g_5}{2} \eta^{\lambda\mu\alpha\beta} \tilde{F}_\mu^\sigma \nabla_\lambda A_\sigma \\
& - \frac{g_5}{2} \tilde{F}^\lambda_\omega \eta^{\sigma\omega\beta\alpha} \nabla_\lambda A_\sigma + \frac{g_5}{2} \tilde{F}^\lambda_\omega \eta^{\sigma\omega\alpha\beta} \nabla_\lambda A_\sigma - g_5 \tilde{F}^{\beta\mu} \tilde{F}_\mu^\alpha,
\end{aligned}$$

que de manera reducida termina adoptando la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}_5}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} = & G_5 G^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} G_{5,X} (\nabla_\mu A^\mu)^2 g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} G_{5,X} g^{\alpha\beta} \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho + G_{5,X} \nabla_\mu A^\mu \nabla^\alpha A^\beta \\
& - G_{5,X} \nabla^\nu A^\beta \nabla^\alpha A_\nu + 2g_5 \tilde{F}_\mu^\sigma \eta^{\lambda\mu\alpha\beta} \nabla_{(\lambda} A_{\sigma)} - g_5 \tilde{F}^{\beta\mu} \tilde{F}_\mu^\alpha. \tag{161}
\end{aligned}$$

Además, la divergencia de la misma da como resultado

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta \left(\frac{\delta \mathcal{L}_5}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} \right) = & -\frac{1}{2} G_{5,X} \nabla_\beta A^2 G^{\beta\alpha} + \frac{1}{4} G_{5,XX} \nabla^\alpha A^2 (\nabla_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2} G_{5,X} \nabla_\mu A^\mu \nabla^\alpha \nabla_\beta A^\beta \\
& - \frac{1}{4} G_{5,XX} \nabla^\alpha A^2 \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho + \frac{1}{2} G_{5,X} \nabla^\alpha (\nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho) \\
& - \frac{1}{2} G_{5,XX} \nabla_\beta A^2 \nabla_\mu A^\mu \nabla^\alpha A^\beta + G_{5,X} \nabla_\beta (\nabla_\mu A^\mu \nabla^\alpha A^\beta) \\
& + \frac{1}{2} G_{5,XX} \nabla_\beta A^2 \nabla^\nu A^\beta \nabla^\alpha A_\nu - G_{5,XX} \nabla_\beta (\nabla^\nu A^\beta \nabla^\alpha A_\nu) \\
& - g_{5,X} \tilde{F}^\sigma_\mu \eta^{\lambda\mu\alpha\beta} \nabla_{(\lambda} A_{\sigma)} + 2g_5 \nabla \tilde{F}^\sigma_\mu \eta^{\lambda\mu\alpha\beta} \nabla_{(\lambda} A_{\sigma)} \\
& + 2g_5 \tilde{F}^\sigma_\mu \nabla_\beta \eta^{\lambda\mu\alpha\beta} \nabla_{(\lambda} A_{\sigma)} + 2g_5 \tilde{F}^\sigma_\mu \eta^{\lambda\mu\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_{(\lambda} A_{\sigma)} \\
& + \frac{1}{2} g_{5,X} \nabla_\beta A^2 \tilde{F}^{\beta\mu} \tilde{F}^\alpha_\mu - g_5 \nabla_\beta \tilde{F}^{\beta\mu} \tilde{F}^\alpha_\mu - g_5 \tilde{F}^{\beta\mu} \nabla_\beta \tilde{F}^\alpha_\mu. \tag{162}
\end{aligned}$$

Por último, para el caso de la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_6$ se tiene que su variación respectiva es

$$\frac{\delta \mathcal{L}_6}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} = -G_{6,X} A^\alpha L^{\mu\nu\gamma\beta} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\gamma A_\beta - \frac{1}{2} G_{6,XX} A^\alpha \tilde{F}^{\gamma\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\gamma A_\mu \nabla_\beta A_\nu, \tag{163}$$

la cual toma la forma

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}_6}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} = & 2G_6 L^{\beta\alpha\gamma\sigma} \nabla_\gamma A_\sigma + G_{6,X} \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\gamma A_\mu \nabla_\sigma A_\nu \\
& + G_{6,X} \tilde{F}^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \nabla_\mu A_\gamma \nabla_\nu A_\sigma + G_{6,X} \tilde{F}^{\gamma\beta} \nabla_\gamma A_\nu \tag{164}
\end{aligned}$$

y en donde su divergencia es

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta \left(\frac{\delta \mathcal{L}_6}{\delta \nabla_\beta A_\alpha} \right) = & -G_{6,X} \nabla_\beta A^2 L^{\beta\alpha\gamma\sigma} \nabla_\gamma A_\sigma + 2G_6 \nabla_\beta L^{\beta\alpha\gamma\sigma} \nabla_\gamma A_\sigma + 2G_6 L^{\beta\alpha\gamma\sigma} \nabla_\beta \nabla_\gamma A_\sigma \\
& - \frac{1}{2} G_{6,XX} \nabla_\beta A^2 \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\gamma A_\mu \nabla_\sigma A_\nu + G_{6,X} \nabla_\beta \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\gamma A_\mu \nabla_\sigma A_\nu \\
& + G_{6,X} \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \nabla_\beta \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\gamma A_\mu \nabla_\sigma A_\nu + G_{6,X} \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \tilde{F}^{\mu\nu} (\nabla_\beta \nabla_\gamma A_\mu) \nabla_\sigma A_\nu \\
& + G_{6,X} \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\gamma A_\mu \nabla_\beta \nabla_\sigma A_\nu - \frac{1}{2} G_{6,XX} \nabla_\beta A^2 \tilde{F}^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \nabla_\mu A_\gamma \nabla_\nu A_\sigma \\
& + G_{6,X} \nabla_\beta \tilde{F}^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \nabla_\mu A_\gamma \nabla_\nu A_\sigma + G_{6,X} \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\beta \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \nabla_\mu A_\gamma \nabla_\nu A_\sigma \\
& + G_{6,X} \tilde{F}^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} (\nabla_\beta \nabla_\mu A_\gamma) \nabla_\nu A_\sigma + G_{6,X} \tilde{F}^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \nabla_\mu A_\gamma \nabla_\beta \nabla_\nu A_\sigma \\
& - \frac{1}{2} G_{6,XX} \nabla_\beta A^2 \tilde{F}^{\gamma\beta} \tilde{F}^{\mu\alpha} \nabla_\gamma A_\mu + G_{6,X} \nabla_\beta \tilde{F}^{\gamma\beta} \tilde{F}^{\mu\alpha} \nabla_\gamma A_\mu \\
& + G_{6,X} \tilde{F}^{\gamma\beta} \nabla_\beta F^{\mu\alpha} \nabla_\gamma A_\mu + G_{6,X} \tilde{F}^{\gamma\beta} \tilde{F}^{\mu\alpha} \nabla_\beta \nabla_\gamma A_\mu.
\end{aligned} \tag{165}$$

Por lo tanto las ecuaciones de campo vectoriales, usando la expresión (142) quedan escritas

de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
0 = & \nabla_\beta F^{\alpha\beta} - G_{2,X} A^\alpha + \nabla_\beta G_{2,F} F^{\beta\alpha} + G_{2,F} \nabla_\beta F^{\beta\alpha} - 4 \nabla_\beta G_{2,Y} A^\nu A^{[\beta} F_\nu^{\alpha]} \\
& - 2 G_{2,Y} \left[A^\mu F_{\mu\lambda} F^{\alpha\lambda} + 2 (\nabla_\beta A^\nu) A^{[\beta} F_\nu^{\alpha]} - 2 A^\nu \nabla_\beta A^{[\beta} F_\nu^{\alpha]} - 2 A^\nu A^{[\beta} \nabla_\beta F_\nu^{\alpha]} \right] \\
& + G_{3,X} \left(\frac{1}{2} \nabla^\alpha A^2 - A^\alpha \nabla_\mu A^\mu \right) + 2 G_{4,X} G^{\beta\alpha} A_\beta - G_{4,XX} \left[A^\alpha (\nabla_\mu A^\mu)^2 \right. \\
& \left. - A^\alpha \nabla_\mu A_\nu \nabla^\nu A^\mu - \nabla_\beta A^2 (g^{\alpha\beta} \nabla_\mu A^\mu - \nabla^\alpha A^\beta) \right] + G_{5,X} \left[\frac{1}{2} \nabla_\beta A^2 G^{\beta\alpha} \right. \\
& \left. - A^\alpha G_{\mu\nu} \nabla^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \nabla_\mu A^\mu \nabla^\alpha \nabla_\beta A^\beta - \nabla_\beta (\nabla_\mu A^\mu \nabla^\alpha A^\beta) - \frac{1}{2} \nabla^\alpha (\nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho) \right] \\
& + G_{5,XX} \left\{ \frac{1}{6} A^\alpha \left[(\nabla_\mu A^\mu)^3 - 3 \nabla_\mu A^\mu \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho + 2 \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\nu A^\rho \nabla^\sigma A_\nu \right] \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} \left[\nabla^\alpha A^2 (\nabla_\mu A^\mu)^2 + \nabla^\alpha A^2 \nabla_\rho A_\sigma \nabla^\sigma A^\rho + 2 \nabla_\beta A^2 \nabla_\mu A^\mu \nabla^\alpha A^\beta \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \nabla_\beta A^2 \nabla^\nu A^\beta \nabla^\alpha A_\nu + 4 A^2 \nabla_\beta (\nabla^\nu A^\beta \nabla^\alpha A_\nu) \right] \right\} + g_5 \left[\nabla_\beta \tilde{F}^{\beta\mu} \tilde{F}^\alpha_\mu + \tilde{F}^{\beta\mu} \nabla_\beta \tilde{F}^\alpha_\mu \right. \\
& \left. - 2 \nabla \tilde{F}^\sigma_\mu \eta^{\lambda\mu\alpha\beta} \nabla_{(\lambda} A_{\sigma)} - 2 \tilde{F}^\sigma_\mu \nabla_\beta \eta^{\lambda\mu\alpha\beta} \nabla_{(\lambda} A_{\sigma)} - 2 \tilde{F}^\sigma_\mu \eta^{\lambda\mu\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_{(\lambda} A_{\sigma)} \right] \\
& + g_{5,X} \left[A^\alpha \tilde{F}^{\gamma\mu} \tilde{F}^\beta_\mu \nabla_\gamma A_\beta + \tilde{F}^\sigma_\mu \eta^{\lambda\mu\alpha\beta} \nabla_{(\lambda} A_{\sigma)} - \frac{1}{2} \nabla_\beta A^2 \tilde{F}^{\beta\mu} \tilde{F}^\alpha_\mu \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2G_6 \left[\nabla_\beta L^{\beta\alpha\gamma\sigma} \nabla_\gamma A_\sigma + L^{\beta\alpha\gamma\sigma} \nabla_\beta \nabla_\gamma A_\sigma \right] + G_{6,X} \left[\nabla_\beta A^2 L^{\beta\alpha\gamma\sigma} \nabla_\gamma A_\sigma \right. \\
& - \nabla_\beta \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\gamma A_\mu \nabla_\sigma A_\nu - \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \nabla_\beta \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\gamma A_\mu \nabla_\sigma A_\nu - \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \tilde{F}^{\mu\nu} (\nabla_\beta \nabla_\gamma A_\mu) \nabla_\sigma A_\nu \\
& - \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\gamma A_\mu \nabla_\beta \nabla_\sigma A_\nu - A^\alpha L^{\mu\nu\gamma\beta} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\gamma A_\beta - \nabla_\beta \tilde{F}^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \nabla_\mu A_\gamma \nabla_\nu A_\sigma \\
& - \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\beta \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \nabla_\mu A_\gamma \nabla_\nu A_\sigma - \tilde{F}^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} (\nabla_\beta \nabla_\mu A_\gamma) \nabla_\nu A_\sigma - \tilde{F}^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \nabla_\mu A_\gamma \nabla_\beta \nabla_\nu A_\sigma \\
& \left. - \nabla_\beta \tilde{F}^{\gamma\beta} \tilde{F}^{\mu\alpha} \nabla_\gamma A_\mu - \tilde{F}^{\gamma\beta} \nabla_\beta \tilde{F}^{\mu\alpha} \nabla_\gamma A_\mu - G_{6,X} \tilde{F}^{\gamma\beta} \tilde{F}^{\mu\alpha} \nabla_\beta \nabla_\gamma A_\mu \right] \\
& + \frac{1}{2} G_{6,XX} \left[\nabla_\beta A^2 \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\gamma A_\mu \nabla_\sigma A_\nu - A^\alpha \tilde{F}^{\gamma\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} \nabla_\gamma A_\mu \nabla_\beta A_\nu \right. \\
& \left. + \nabla_\beta A^2 \tilde{F}^{\mu\nu} \eta^{\gamma\sigma\beta\alpha} \nabla_\mu A_\gamma \nabla_\nu A_\sigma + \nabla_\beta A^2 \tilde{F}^{\gamma\beta} \tilde{F}^{\mu\alpha} \nabla_\gamma A_\mu \right]. \tag{166}
\end{aligned}$$

6. Agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos en la teoría generalizada de Proca

Para estudiar agujeros negros en un fondo estático y esféricamente simétrico se toma la métrica (27) en donde $f(r)$ y $h(r)$ son funciones de la coordenada radial r de tal manera que $f(r) > 0$ y $h(r) > 0$ fuera del horizonte de eventos $r > r_h$. r_h es la posición en la cual $f(r_h) = h(r_h) = 0$. Además, el campo vectorial a tener en cuenta debe ser compatible con la simetría puesta en consideración, por lo tanto es de esperar que éste sea invariante al desplazarse sobre las direcciones correspondientes a los vectores de Killing (2), (3), (4) y ∂_t . Por lo tanto, la derivada de Lie del campo vectorial con respecto a cada uno de estos vectores debe ser cero, es decir,

$$\mathcal{L}_{\xi_{(i)}^\mu} \mathbf{A} = [\xi_{(i)}^\mu \partial_\mu, \mathbf{A}] = 0, \quad (167)$$

en donde, usando coordenadas esféricas, $\mathbf{A} = A_0 dt + A_1 dr + A_2 d\theta + A_3 d\phi$. Entonces, usando el vector de Killing ∂_t se tiene que, a partir de la condición

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\partial_t} \mathbf{A})^\alpha &= \xi_{(0)}^\mu \partial_\mu A^\alpha - A^\mu \partial_\mu \xi_{(0)}^\alpha = 0, \\ \partial_t A^\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (168)$$

las componentes del campo son independientes de la coordenada temporal t . Así mismo, el vector de Killing (2) implica que, debido a la condición de arriba, las componentes del campo son independientes de la coordenada angular azimutal ϕ .

En la dirección de los vectores de Killing (3) y (4) se tiene que las condiciones sobre la derivada de Lie adoptan la forma

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_{\xi_{(2)}^\mu} \mathbf{A})^\alpha &= \xi_{(2)}^\mu \partial_\mu A^\alpha - A^\mu \partial_\mu \xi_{(2)}^\alpha = 0 \\
 -\cos \phi \partial_\theta A^\alpha + \cot \theta \sin \phi \partial_\phi A^\alpha - A^\mu \partial_\mu \xi_{(2)}^\alpha &= 0 \\
 -\cos \phi \partial_\theta (g^{\alpha\beta} A_\beta) - g^{\mu\nu} A_\nu \partial_\mu \xi_{(2)}^\alpha &= 0.
 \end{aligned} \tag{169}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_{\xi_{(3)}^\mu} \mathbf{A})^\alpha &= \xi_{(3)}^\mu \partial_\mu A^\alpha - A^\mu \partial_\mu \xi_{(3)}^\alpha = 0 \\
 \sin \phi \partial_\theta A^\alpha + \cot \theta \cos \phi \partial_\phi A^\alpha - A^\mu \partial_\mu \xi_{(3)}^\alpha &= 0 \\
 \sin \phi \partial_\theta (g^{\alpha\beta} A_\beta) - g^{\mu\nu} A_\nu \partial_\mu \xi_{(3)}^\alpha &= 0.
 \end{aligned} \tag{170}$$

Si $\alpha = 0$ se tiene de la condición de los vectores de Killing 3 y 4 que

$$-\cos \phi \partial_\theta (g^{00} A_0) = 0. \tag{171}$$

Dado que g^{00} es independiente de la coordenada θ , la componente A_0 es independiente de dicha coordenada, por lo tanto, $A_0 = A_0(r)$. Si $\alpha = 1$ se tiene la expresión trivial $0 = 0$. En el caso de

$\alpha = 2$ se llega a las expresiones

$$\begin{aligned} -\cos \phi \partial_{\theta}(r^{-2}A_2) + g^{\mu\nu}A_{\nu}\partial_{\mu}(\cos \phi) &= 0 \\ -r^{-2}\cos \phi \partial_{\theta}A_2 + r^{-2}\sin^{-2}\theta A_3\partial_{\phi}\cos \phi &= 0 \\ \partial_{\theta}A_2 - A_3\sin^{-2}\theta \tan \phi &= 0, \end{aligned} \quad (172)$$

$$\begin{aligned} \sin \phi \partial_{\theta}(r^{-2}A_2) - g^{\mu\nu}A_{\nu}\partial_{\mu}(\sin \phi) &= 0 \\ -r^{-2}\sin \phi \partial_{\theta}A_2 - r^{-2}\sin^{-2}\theta A_3\partial_{\phi}\sin \phi &= 0 \\ \partial_{\theta}A_2 + A_3\sin^{-2}\theta \cot \phi &= 0 \end{aligned} \quad (173)$$

las cuales al sustraerlas entre sí llevan a que la componente A_3 sea igual a cero. Finalmente, para $\alpha = 3$ se obtienen las siguientes expresiones

$$r^{-2}A_2 \csc^2 \theta \sin \phi = 0, \quad (174)$$

$$r^{-2}A_2 \csc^2 \theta \cos \phi = 0 \quad (175)$$

de las cuales se llega a que $A_2 = 0$ y, por tanto, el perfil del campo vectorial, compatible con el espaciotiempo a considerar, es

$$\mathbf{A} = A_0(r)dt + A_1(r)dr \quad (176)$$

6.1. Solución de Reissner-Nordström en Relatividad General

Como preparación, en primer lugar se usará el acomplamiento

$$G_4 = \frac{m_p^2}{2}, \quad G_2 = G_3 = G_5 = g_5 = G_6 = 0 \quad (177)$$

el cual lleva a las siguientes ecuaciones de campo vectoriales y gravitacionales, respectivamente,

$$0 = \nabla_\beta F^{\alpha\beta}, \quad (178)$$

$$\frac{m_p^2}{2} G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (179)$$

en donde el tensor antisimétrico $F_{\mu\nu}$, para el perfil estático esféricamente simétrico, es el siguiente

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (180)$$

$$F_{01} = \partial_0 \pi - \partial_1 A_0 = -A'_0 = -F_{10}. \quad (181)$$

con las demás componentes iguales cero.

Las ecuaciones de campo no triviales que se obtienen son

$$-\frac{h}{fr}A'_0 + \frac{hfA'_0}{4f^2} - \frac{h'A'_0}{4f} - \frac{hA''_0}{2f} = 0 \quad (\alpha = 0) \quad (182)$$

$$\frac{m_p^2}{2r^2}f - \frac{m_p^2fh}{2r^2} - \frac{1}{4}hA_0'^2 - \frac{m_p^2fh'}{2r} = 0 \quad (\mu, \nu) = (0, 0) \quad (183)$$

$$\frac{m_p^2}{2r^2} - \frac{m_p^2}{2hr^2} + \frac{A_0'^2}{4f} + \frac{m_p^2f'}{2fr} = 0 \quad (\mu, \nu) = (1, 1) \quad (184)$$

$$\begin{aligned} & \frac{m_p^2rh'}{4} - \frac{hr^2A_0'^2}{4f} + \frac{m_p^2hf'r}{4f} - \frac{m_p^2hf'^2r^2}{8f^2} \\ & - \frac{m_p^2f'h'r^2}{8f} + \frac{m_p^2hf''r^2}{4f} = 0 \quad (\mu, \nu) = (2, 2). \end{aligned} \quad (185)$$

Si se multiplica la ecuación (183) por $(hf)^{-1}$ y se suma a la ecuación (184) se obtiene como resultado que

$$\frac{m_p^2}{2r} \left(\frac{f'}{f} - \frac{h'}{h} \right) = 0$$

$$\partial_r(\ln f) = \partial_r(\ln h)$$

$$\ln f = \ln h + \text{const.}$$

$$f = \text{const} * h \quad (186)$$

y, al considerarse un comportamiento asintóticamente plano es claro que $f(r) = h(r) = 1$ cuando $r \rightarrow \infty$, por lo tanto $\text{const.} = 1$ y

$$f = h. \quad (187)$$

Posteriormente, al reemplazar (187) en la expresión (182) se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{A'_0}{r} + \frac{A''_0}{2} = 0 \quad (188)$$

la cual tiene como solución

$$A''_0 r + A'_0 = -A'_0$$

$$\partial_r(A'_0 r) = -A'_0$$

$$A'_0 r = -A_0 + Q$$

$$A_0 r = P r + Q$$

$$A_0 = P + \frac{Q}{r}, \quad (189)$$

en donde P y Q son constantes de integración. Luego, sustituyendo las ecuaciones (187) y (189)

en la ecuación (183) se obtiene que la función métrica f es

$$Q^2 - 2m_p^2 r^2 + 2m_p^2 r^2 (f + r f') = 0$$

$$Q^2 - 2m_p^2 r^2 + 2m_p^2 r^2 (f r)' = 0$$

$$(f r)' = -\frac{Q^2}{2m_p^2 r^2} + 1$$

$$f r = \frac{Q^2}{2m_p^2 r} + r - 2M$$

$$f = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2} \quad (190)$$

en donde Q es la carga que origina el campo y $-2M$ es la constante de integración que al llevar al límite Newtoniano se identifica como la masa del agujero negro. Por lo tanto se tiene la solución de Reissner-Nordström

$$f = h = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2} \quad (191)$$

$$A_0 = P + \frac{Q}{r}, \quad (192)$$

la cual concuerda con cálculo realizado en la sección (2.2).

Estas soluciones satisfacen también la ecuación (185), ya que usando la condición (187) y posteriormente las soluciones (191) y (236) se tiene la ecuación

$$rA_0'^2 - 2m_p^2(2f'r + f'') = 0 \quad (193)$$

la cual se convierte en la expresión trivial $0 = 0$.

Sumado a todo lo anterior, cabe resaltar que la componente longitudinal A_1 corresponde a un modo de gauge no físico, ya que este valor está indeterminado por las ecuaciones (182)-(185). Asimismo la constante P es una constante arbitraria sin significado físico alguno.

6.2. Campo masivo de Proca

También cabe revisar el campo masivo de Proca en Relatividad General, el cual está dado por las funciones

$$G_4 = \frac{m_p^2}{2}, \quad G_2 = \mu^2 X, \quad G_3 = G_5 = g_5 = G_6 = 0. \quad (194)$$

Así pues, para la presente configuración de los acoplamientos las ecuaciones de campo, tanto vectoriales como gravitacionales, son

$$\mu^2 A^\alpha = \nabla_\beta F^{\alpha\beta}, \quad (195)$$

$$\frac{m_p^2}{2} G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_{\mu\alpha} F_\nu{}^\alpha \right) + \frac{1}{2} \mu^2 A_\mu A_\nu + \frac{1}{2} \mu^2 X, \quad (196)$$

las cuales llevan al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales para el perfil de la métrica y el campo vectorial que se están teniendo en consideración:

$$\frac{\mu^2}{f} A_0 - \frac{h}{rf} A'_0 - \frac{h}{2f} A''_0 - \frac{h'}{4f} A'_0 + \frac{hf'}{4f^2} A'_0 = 0 \quad (\alpha = 0) \quad (197)$$

$$-\mu^2 A_1 h = 0 \quad (\alpha = 1) \quad (198)$$

$$\frac{m_p^2 f}{2r^2} - \frac{m_p^2 f h}{2r^2} - \frac{m_p^2 f h'}{2r} - \frac{1}{4} h A_0'^2 - \frac{1}{4} \mu^2 A_0^2 - \frac{1}{4} \mu^2 f h A_1^2 = 0 \quad (\mu, \nu) = (0, 0) \quad (199)$$

$$-\frac{m_p^2 f}{2r^2} + \frac{m_p^2}{fh} + \frac{m_p^2 h f'}{2r} + \frac{1}{4} h A_0'^2 - \frac{1}{4} \mu^2 A_0^2 - \frac{1}{2} \mu f h A_1^2 = 0 \quad (\mu, \nu) = (1, 1) \quad (200)$$

$$-\frac{m_p^2 h f'^2 r^2}{8f^2} + \frac{m_p^2 h f' r}{4f} + \frac{1}{4} m_p^2 h' r + \frac{m_p^2 f' h' r^2}{8f} + \frac{m_p^2 h f'' r^2}{4f} - \frac{hr^2}{4f} A_0'^2 - \frac{\mu^2 r^2}{4f} A_0^2 + \frac{1}{4} \mu^2 h r^2 A_1^2 = 0 \quad (\mu, \nu) = (2, 2) \quad (201)$$

$$-\frac{1}{2} \mu^2 A_0 A_1 = 0 \quad (\mu, \nu) = (0, 1). \quad (202)$$

A partir de la ecuación (198), pidiendo que $\mu \neq 0$, se tiene que $A_1 = 0$, lo cual anula, además, la ecuación (202). Reemplazando esto en las ecuaciones (199) y (200) y sumándolas mutuamente

se llega a la expresión

$$m_p^2(f'h - fh') = \mu^2 A_0^2 r \quad (203)$$

que al multiplicar por h^{-2} se convierte en

$$m_p^2 \frac{(f'h - fh')}{h^2} = \frac{\mu^2 A_0^2 r}{h^2} \quad (204)$$

$$\left(\frac{f}{h}\right)' = \frac{\mu^2 A_0^2 r}{m_p^2 h^2} \quad (205)$$

Analizando el comportamiento asintótico del lado izquierdo de esta expresión se sabe que con el fin de que r_h sea el horizonte de eventos (como se ve al comienzo del presente capítulo) $f \rightarrow 0$ y $h \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow r_h$ y que, también, $f(r) > 0$ y $h(r) > 0$ para $r > r_h$ con el objetivo de que la métrica sea Lorentziana. Además, debido a esto, las funciones métricas se pueden expandir alrededor del horizonte de la forma

$$f = \sum_{i=1} f_i (r - r_h)^i, \quad h = \sum_{i=1} h_i (r - r_h)^i, \quad (206)$$

por lo tanto, si $r \rightarrow r_h$, el factor $r - r_h$ se hace infinitesimal, por lo que solo se consideran los términos a primer orden en $r - r_h$ ya que se considera que ambas funciones tienden a cero mientras $r \rightarrow r_h$ y por consiguiente el lado izquierdo llega a tener un valor finito en tal límite asintótico. Asimismo, al analizar el lado derecho en el límite $r \rightarrow r_h$, para que éste sea consistente con lo anterior, su límite debe ser finito y debido a que $h(r \rightarrow r_h) \rightarrow 0$, A_0 debe tender a cero cuando r tiende a r_h .

Por otra parte, al estudiar el comportamiento asintótico para $r \rightarrow \infty$, se sabe que en este

límite $f = h = 1$. De esta manera la expresión (204) lleva a

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{f'h - fh'}{h^2} \right) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu^2 A_0^2 r}{m_p^2 h^2} \right) \\ 0 &= \frac{\mu^2 A_0(\infty)^2 r}{m_p^2} \end{aligned} \quad (207)$$

y siendo $\mu \neq 0$ se concluye que cuando $r \rightarrow \infty$, $A_0 \rightarrow 0$.

Ahora, para ver el comportamiento predicho por la ecuación (197) para valores de $r \gg r_h$ se reescribe ésta ecuación y se usa la expresión (205) para obtener

$$-h \left(\frac{A_0''}{2} + \frac{A_0'}{r} \right) + \frac{\mu^2 A_0^2 A_0'}{4m_p^2 f} + \mu^2 A_0 = 0. \quad (208)$$

Ya que A_0 se hace muy pequeño para $r \gg r_h$ se descartan los términos cuadráticos de éste y así se obtiene la ecuación diferencial

$$-\frac{A_0''}{2} - \frac{A_0'}{r} + \mu^2 A_0 = 0 \quad (209)$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}
 -A_0''r - 2A_0' + 2r\mu^2 A_0 &= 0, \\
 -(A_0r)'' + 2\mu^2(A_0r) &= 0, \\
 A_0(r) &= c_1 \frac{e^{-\sqrt{2}\mu r}}{r} + c_2 \frac{e^{\sqrt{2}\mu r}}{r}.
 \end{aligned} \tag{210}$$

Ya que la ecuación (207) predice que $A_0(r \rightarrow \infty) = 0$, entonces la ecuación 209 llevaría a que

$$A_0 \propto \frac{e^{\mu r}}{r}. \tag{211}$$

Este comportamiento comienza a ser dominante cuando $r > \frac{1}{\mu}$. Además debido a que se debe tener que si $r \rightarrow \infty$, $A_0 \rightarrow 0$, entonces $\mu = 0$ para que esto se satisfaga. Por lo tanto no hay solución de agujero negro estático y esféricamente simétrico para un campo vectorial de Proca debido a que dicha solución se da solamente si $\mu = 0$, lo cual lleva a la solución de Reissner-Nordström.

6.3. Soluciones exactas para el acoplamiento cuártico G_4

Se considera en primer lugar el acoplamiento

$$G_4 = \frac{m_p^2}{2} + \frac{X}{4} \tag{212}$$

el cual reduce las ecuaciones de campo a las expresiones

$$\begin{aligned} \frac{m_p^2}{2} G_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \left[F_{\mu\alpha} F_{\nu}{}^{\alpha} - \frac{F^2}{4} g_{\mu\nu} \right] - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla_{\alpha} A^{\alpha})^2 - 2A_{(\mu} \nabla_{\nu)} \nabla_{\alpha} A^{\alpha} - 2\nabla_{\alpha} A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^{\alpha} \right. \\ & + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_{\alpha} A_{\beta} \nabla^{\beta} A^{\alpha} + \nabla_{\alpha} (A_{(\mu} \nabla^{\alpha} A_{\nu)}) + A_{(\mu} \nabla_{\nu)} A^{\alpha} - A^{\alpha} \nabla_{(\mu} A_{\nu)} \\ & \left. + g_{\mu\nu} A_{\beta} \nabla^{\beta} \nabla^{\alpha} A_{\alpha} - \frac{1}{2} (A_{\mu} A_{\nu} R - A^2 G_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square A^2 + \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} A^2) \right] \end{aligned} \quad (213)$$

$$\nabla_{\beta} F^{\beta\alpha} = -\frac{1}{2} G^{\beta\alpha} A_{\beta} \quad (214)$$

cuya forma explícita, para la configuración del campo y métrica que se está estudiando, es la siguiente:

$$0 = -2A_0 f(-1 + h + rh') + r [A'_0 (hrf' - f(4h + rh')) - 2fhrA''_0] \quad (\alpha = 0) \quad (215)$$

$$0 = A_1 h(f(h-1) + hrf') \quad (\alpha = 1) \quad (216)$$

$$\begin{aligned} 0 = & -2hr^2 A_0'^2 + A_0^2(-1 + h + rh') - f [A_1 h^2 (A_1 + 4rA'_1) + 4m_p^2 (rh' - 1) \\ & + h(4m_p^2 + A_1^2(1 + 3rh'))] \quad (\mu, \nu) = (0, 0) \end{aligned} \quad (217)$$

$$\begin{aligned} 0 = & 4A_0 A'_0 fhr + A_0^2 [f(h-1) - hrf'] + f [-4m_p^2 + (4m_p^2 - A_1^2)h + 3A_1^2 h^2] \\ & + hr(2rA_0'^2 + (4m_p^2 + 3A_1^2 h)f') \quad (\mu, \nu) = (1, 1) \end{aligned} \quad (218)$$

$$\begin{aligned}
0 = & 4A_0f \left[-2hf'rA'_0 + f(rA'_0h' + 2h(A'_0 + rA''_0)) \right] + A_0^2 \left[3hf'^2r + 2f^2h' \right. \\
& \left. - f(rf'h' + 2h(f' + rf'')) \right] + f \left[4A_1fh^2A'_1(2f + rf') + 4m_p^2(-hrf'^2 + 2f^2h' \right. \\
& \left. + f(rf'h' + 2h(f' + rf'')) \right] + A_1^2h \left[-hrf'^2 + 6f^2h' \right. \\
& \left. + f(2rf'h' + 2h(f' + rf'')) \right]
\end{aligned} \tag{219}$$

$$0 = A_0A_1 \left[f(h - 1) + hrf' \right] \quad (\mu, \nu) = (0, 1). \tag{220}$$

La ecuación (220) admite en primer lugar una solución en donde $A_0 = 0$ o $A_1 = 0$, lo cual anula la ecuación (215). A su vez, considerando $A_1 \neq 0$, la ecuación (216) establece la relación, entre las funciones métricas,

$$h = \frac{f}{f + f'r}. \tag{221}$$

Entonces, al reemplazar esta relación en la ecuación (218) esta última se reduce a lo siguiente:

$$0 = A_1^2 f^2, \tag{222}$$

lo que inevitablemente lleva a que la componente longitudinal del campo se anule y por consiguiente, se tenga una solución de Schwarzschild. En segundo lugar, si se considera la rama $A_1 = 0$ de (220), el sistema de ecuaciones diferencial tiene solución únicamente si $A_0 = 0$, lo que resulta, de nuevo, en la solución de Schwarzschild.

Ahora, considerando la rama en la cual A_0 y A_1 son diferentes de cero, de la ecuación (220) se obtiene la relación (221). Reemplazando esta relación y su derivada en la ecuación (218) se tiene

que

$$A_1 = \pm \frac{\sqrt{r^2(A_0 A_0' f - f r A_0'^2 + A_0^2 f')}}{f}. \quad (223)$$

Al reemplazar esta expresión de A_1 en las ecuaciones (215) y (217) y al resolver el sistema, se obtiene las siguiente soluciones

$$A_0 = P + \frac{Q}{r} \quad (224)$$

$$f = C - \frac{2M}{r} \quad (225)$$

en donde P , $2M$ y Q son las constantes de integración. Y dado que, en el límite $r \rightarrow \infty$ se debe alcanzar el comportamiento Minkowskiano, entonces $C = 1$. Insertando estas expresiones en (221) y (223) se obtiene finalmente que la solución para este tipo de acoplamiento es

$$h = f = 1 - \frac{2M}{r} \quad (226)$$

$$A_0 = P + \frac{Q}{r} \quad (227)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2P(MP + Q)r + Q^2}}{r - 2M}. \quad (228)$$

Por consiguiente, las soluciones para el presente acoplamiento cumplen las siguientes con-

diciones

$$f = h, \quad (229)$$

$$X = -\frac{A_\mu A^\mu}{2} = X_c, \quad (230)$$

con X_c constante, las cuales serán usadas de aquí en adelante con el fin de encontrar soluciones exactas. Esta última condición se traduce en que

$$A_1 = \pm \frac{\sqrt{A_0^2 - 2fX_c}}{f} \quad (231)$$

Para un acoplamiento general $G_4 = G_4(X)$ las ecuaciones de campo vectorial son

$$\begin{aligned} 0 = & 8A_0 \left\{ G_{4,XX} A_1^2 h^2 f' r + f \left[G_{4,X} + h(-G_{4,X} + G_{4,XX} A_1 h(A_1 + 2rA_1')) \right] \right. \\ & \left. + (-G_{4,X} + G_{4,XX} A_1^2 h) r h' \right\} + r \left[A_0'^2 (h f' r - f(4h + r h')) - 2f h r A_0'' \right] \end{aligned} \quad (232)$$

$$\begin{aligned} 0 = & A_1 \left\{ -f \left[f(G_{4,X} - G_{4,X} h + G_{4,XX} A_1^2 h^2) + 2G_{4,XX} A_0 h A_0' r \right] \right. \\ & \left. + h \left[G_{4,XX} A_0^2 + f(G_{4,X} - G_{4,XX} A_1^2 h) \right] r f' \right\}. \end{aligned} \quad (233)$$

Para la última ecuación existen dos posibilidades, $A_1 = 0$ y $A_1 \neq 0$, que, a continuación, serán estudiadas de manera separada.

6.3.1. $A_1 \neq 0$. Al proponer que la segunda derivada del acoplamiento G_4 evaluada en X_c cumpla la condición

$$G_{4,XX}(X_c) = 0, \quad (234)$$

de la ecuación (233) aparece que las funciones métricas h y f cumplen la siguiente relación

$$h = \frac{f}{f + f'r} \quad (235)$$

la cual, debido a que usaremos las condiciones (229), se obtiene que la solución para las funciones métricas es

$$\begin{aligned} f &= \frac{f}{f'r + f} \\ f + f'r &= 1 \\ (fr)' &= 1 \\ f &= 1 - \frac{2M}{r}. \end{aligned} \quad (236)$$

Dicha solución lleva a que la ecuación (232) se reduzca a la expresión

$$2A'_0 + rA''_0 = 0 \quad (237)$$

cuya solución ya fue calculada previamente. Esta solución es

$$A_0 = P + \frac{Q}{r} \quad (238)$$

de la cual, a causa de la condición (230), lleva a que la componente longitudinal del campo tenga la siguiente solución

$$A_1 = \pm \frac{\sqrt{-2X_c \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \left(P + \frac{Q}{r}\right)^2} r}{r - 2M}. \quad (239)$$

Insertando las expresiones de f , h , A_0 y A_1 en la ecuación de campo gravitacional de la componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$,

$$\begin{aligned} 0 = & hr^2 A_0'^2 - 4G_{4,X}(-1 + h + rh') + 4f [G_{4,X} A_1 h^2 (A_1 + 2rA_1') + G_4(rh' - 1) \\ & + h(G_4 + 2G_{4,X} A_1^2 rh')] , \end{aligned} \quad (240)$$

se tiene que

$$G_{4,X}(X_c) = \frac{1}{4}. \quad (241)$$

Además, realizando el mismo procedimiento anterior en la ecuación de la componente $(\mu, \nu) = (1, 1)$,

$$\begin{aligned} 0 = & 4f^2 [-G_4 + (G_4 - G_{4,X} A_1^2)h + 2G_{4,X} A_1^2 h^2] - 4G_{4,X} A_0^2 h f' r + fhr [8G_{4,X} A_0 A_0' \\ & + rA_0'^2 + 4(G_4 + 2G_{4,X} A_1^2 h)f'] , \end{aligned} \quad (242)$$

y reemplazando (241) en la misma, se logra determinar el valor de X_c en términos de las constantes de integración. Éste valor es

$$X_c = \frac{P^2}{2}. \quad (243)$$

El mismo indica que la función que describe a la componente longitudinal del campo está dada por

$$A_1 = \frac{\sqrt{Q^2 + 2P(MP + Q)}r}{r - 2M}. \quad (244)$$

De lo anterior se infiere que la función $G_4(X)$ que obedece a las condiciones (234) y (241) está dada por

$$G_4(X) = G_4(X_c) + \frac{1}{4}(X - X_c) + \sum_{n=3} b_n(X - X_c), \quad (245)$$

en donde $X_c = P^2/2$ y todas las b_n son constantes. El modelo $G_4(X) = m_p^2/2 + X/4$ es el caso especial de la última expresión (245), es decir, $G_4(X_c) = m_p^2/2 + X_c/4$ y todos los $b_n = 0$ para $n \geq 3$. La solución de arriba es una solución de Schwarzschild con componente vectorial longitudinal no cero.

Aunque la carga P en un espaciotiempo de Reisner-Nordström no tiene significado físico, en este caso es una carga que controla el perfil longitudinal $A_1(r)$, aunque no su geometría. Notese que se puede apagar la carga Q y dejar la carga P , caracterizando un perfil longitudinal no trivial, encendida en presencia de un agujero negro masivo.

En este sentido, P representa una carga adicional para la configuración además de la masa y la carga eléctrica. Sin embargo esta carga no es vista aplicando la ley de Gauss -ya que el campo

no contribuye a $F_{\mu\nu}$ - por lo tanto estrictamente esta configuración no viola la conjetura de no-pelo

6.3.2. $A_1 = 0$. Continuando con la otra posibilidad $A_1 = 0$ e imponiendo la condición (230), se tiene que $A_0^2 = 2fX_c$ a partir de (231). Bajo la condición (229), la ecuación (233) se anula y la ecuación (232) se reduce a

$$8G_{4,X}(X_c)(f - f^2 - frf') + \left(\frac{1}{2}r^2 f'^2 - fr^2 f'' - 2ff'r \right) = 0. \quad (246)$$

Si se toma $1 - f - rf' = 0$, la solución a esto,

$$f = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (247)$$

no satisface la ecuación (246). Entonces supóngase que

$$\frac{1}{2}r^2 f'^2 - f''fr^2 - 2rff' = 0, \quad (248)$$

con $G_{4,X}(X_c)$ Escribiendo a la función métrica f como

$$f(r) = e^{\lambda(r)} \quad (249)$$

su primera y segunda derivada son, respectivamente,

$$f'(r) = \lambda'(r)e^{\lambda(r)}, \quad (250)$$

$$f''(r) = \lambda''(r)e^{\lambda(r)} + \lambda'^2(r)e^{\lambda(r)}. \quad (251)$$

Entonces la ecuación (248), se transforma en una nueva ecuación diferencial para la función $\lambda(r)$, la cual es

$$4\lambda' + r\lambda'^2 + 2r\lambda'' = 0. \quad (252)$$

Multiplicando ésta expresión por r , se tiene esta ecuación

$$4r\lambda' + r^2\lambda'^2 + 2r^2\lambda'' = 0, \quad (253)$$

la cual, usando regla de Leibniz entre el primer y tercer término, se puede reescribir como

$$r^2\lambda'^2 + 2(\lambda'r^2)' = 0 \quad (254)$$

y cuya solución es, $\forall M < r$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2} + \frac{2(\lambda' r^2)'}{(\lambda' r^2)^2} &= 0 \\ (r^2 \lambda)^{-1} &= -\frac{1}{2r} + M \\ \lambda' &= \frac{2}{-r + 2C_1 r^2} = \frac{4C_1}{2C_1 r - 1} - \frac{2}{r} \\ \lambda &= 2 \ln(1 - C_1 r) - 2 \ln r + \ln C_2 = \ln \left(\frac{C_2 - Cr}{r} \right)^2,\end{aligned}\tag{255}$$

en donde C_1 , C_2 y C son constantes.

Como consecuencia la función f queda representada por la siguiente expresión

$$f = \left(C - \frac{M}{r} \right)^2,\tag{256}$$

en donde $M = C_2$. Además, $C = 1$, ya que el límite cuando $r \rightarrow \infty$ la función métrica debe ser igual a 1. Entonces

$$f = \left(1 - \frac{M}{r} \right)^2.\tag{257}$$

Con todo lo anterior, al usar la ecuación de campo gravitacional para la componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$ se tiene que

$$G_4(X_c) = \frac{X_c}{2}.\tag{258}$$

Esto además hace que las ecuaciones de campo resultantes se anulen. Finalmente, se tiene que un

acoplamiento, $G_4(X)$ que cumpla todo lo anterior debe ser de la siguiente forma

$$G_4(X) = \frac{X_c}{2} + \sum_{n=2} b_n (X - X_c)^n. \quad (259)$$

Entonces, la solución exacta resultante es

$$\begin{aligned} f = h &= \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2, \\ A_0 &= P - \frac{MP}{r}, \\ A_1 &= 0, \end{aligned} \quad (260)$$

en donde $P = \pm \sqrt{2X_c}$. Esto corresponde a una solución de agujero de Reissner-Nordström con una carga eléctrica igual a la masa del agujero negro.

6.4. Soluciones exactas de agujeros negros para acoplamientos generales

Se procede ahora con la derivación de soluciones exactas de agujeros negros en la presencia de los acoplamientos $G_3(X)$, $G_5(X)$, $G_6(X)$, $g_5(X)$ y $G_2(X, F) = -2g_4(X)F$. Para este análisis se toma en cuenta el término de Einstein-Hilbert $m_p^2/2$ en $G_4(X)$. De manera similar a las secciones anteriores, se imponen las condiciones (229) y (230) en el desarrollo siguiente.

6.4.1. Acoplamiento cúbico $G_3(X)$. Para este caso, la ecuación de campo vectorial de la componente $\alpha = 1$ es

$$G_{3,X} (A_0 r (2fA'_0 - A_0 f') + A_1^2 f^2 (4f + r f')) = 0, \quad (261)$$

la cual da paso a dos posibilidades , $G_{3,X}(X_c) = 0$ y $G_{3,X}(X_c) \neq 0$, que se estudian cada una por separado.

$$(i) \ G_{3,X}(X_c) = 0$$

Para la primera posibilidad las ecuaciones para el campo vectorial A_0 y las de campo gravitacional de las componentes $(\mu, \nu) = (0, 0)$ y $(\mu, \nu) = (2, 2)$ son, respectivamente

$$0 = \frac{A'_0}{r} + \frac{A''_0}{2}, \quad (262)$$

$$0 = -2m_p^2 + r^2 A_0'^2 + 2m_p^2(f + rf'), \quad (263)$$

$$0 = -r^2 A_0'^2 + m_p^2(2rf' + r^2 f''), \quad (264)$$

ya que la ecuación de la componente $(\mu, \nu) = (1, 1)$ es igual a la de la componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$ y las demás son triviales.

A partir de la ecuación (262), la cual ya se ha resuelto en secciones anteriores, se tiene que la componente en dirección temporal del campo está dada por

$$A_0 = P + \frac{Q}{r}, \quad (265)$$

en donde P y Q son constantes de integración. Adicionalmente, si inserta este resultado en la ecuación (263) se obtiene la expresión

$$0 = -2m_p^2 + \frac{Q^2}{r^2} + 2m_p^2(f + rf') \quad (266)$$

cuya solución, para f , es

$$\begin{aligned}(rf)' &= 1 - \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2} \\ rf &= r + \frac{Q^2}{2m_p^2 r} - 2M \\ f &= 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2}.\end{aligned}\tag{267}$$

Por lo tanto, para este caso, se tiene una solución de Reissner-Nordström con la componente longitudinal del campo diferente de cero, la cual se obtiene por la condición (230) y es la siguiente

$$A_1 = \pm \frac{2m_p^2 r \sqrt{m_p^2 (P^2 - 2X_c) r^2 + 2m_p^2 (PQ + 2MX_c) r + Q^2 (m_p^2 - X_c)}}{2m_p^2 (r^2 - 2Mr) + Q^2}.\tag{268}$$

Por consiguiente, una función que lleve a esta solución debe estar dada por

$$G_3(X) = G_3(X_c) + \sum_{n=2} b_n (X - X_c)^n\tag{269}$$

en donde todo b_n es una constante.

$$(ii) \ G_{3,X}(X_c) \neq 0$$

Usando las condiciones (229) y (230) la ecuación (261) se tiene

$$f' = \frac{rA_0 A_0' + 2A_0^2 - 4fX_c}{X_c r}.\tag{270}$$

Sustituyendo esto en la ecuación de campo vectorial para $\alpha = 0$ se obtiene $rA_0'' + 2A_0' = 0$, lo cual lleva a la solución $A_0 = P + Q/r$ con dos constantes P y Q . Entonces, insertando esto en la ecuación (270) se obtiene

$$\begin{aligned}
 f' &= -\frac{4f}{r} + \frac{Q^2}{X_c r^3} + \frac{2PQ}{X_c r^2} + \frac{2P^2}{X_c r} \\
 4fr^3 + r^4 f' &= \frac{Q^2 r}{X_c} + \frac{2PQ r^2}{X_c} + \frac{2P^2 r^3}{X_c} \\
 (r^4 f)' &= \frac{Q^2 r}{X_c} + \frac{2PQ r^2}{X_c} + \frac{2P^2 r^3}{X_c} \\
 r^4 f &= \frac{Q^2 r^2}{2X_c} + \frac{2PQ r^2}{3X_c} + \frac{P^2 r^4}{2X_c} + C \\
 f &= \frac{1}{X_c} \left(P + \frac{Q}{r} \right)^2 + \frac{C}{r^4}
 \end{aligned} \tag{271}$$

en donde C es una constante. Para satisfacer que la métrica sea asintóticamente plana, $f \rightarrow 1$, en $r \rightarrow \infty$ se recupera que $P^2 = 2X_c$. Con eso, las ecuaciones de campo gravitacional se satisfacen únicamente si $C = 0$ y $P = \sqrt{2}m_p$. Además, de la ecuación de la componente $(\mu, \nu) = (0, 1)$ se tiene que $A_1 = 0$. Entonces, para $M = \pm Q/(\sqrt{2}m_p)$ se obtiene la solución (257), con el modo A_1 igual a cero.

6.4.2. Acoplamiento de quinto orden $G_5(X)$. Para este acoplamiento, se tiene que

las ecuaciones de campo vectoriales para la componente $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$ son

$$0 = A_0 r + \frac{1}{2} A_0'' r^2 + \frac{1}{f} G_{5,X} A_0 \left(-(-1+f) f A_1' + A_1 (1-2f) f' \right) + G_{5,XX} A_0 A_1^2 (f A_1' + A_1 f') \quad (272)$$

$$0 = \frac{1}{f^2} G_{5,X} \left(-2A_0 (f-1) f A_0' + A_0^2 (f-1) f' + A_1^2 (1-3f) f^2 f' \right) + G_{5,XX} A_1^2 \left(2A_0 A_0' f + (A_1^2 f^2 - A_0^2) f' \right) \quad (273)$$

Aplicando la condición (230) en ambas ecuaciones, multiplicando la ecuación (272) por $2A_1 f$ y restándola con la ecuación (273) multiplicada por A_0 , se obtiene la ecuación diferencial

$$0 = 2A_0' + r A_0'' \quad (274)$$

Acontece además que la ecuación (273) bajo la condición (230) adopta la siguiente forma

$$0 = -G_{5,X}(X_c) \left[A_0 A_0' (f-1) - f' (X_c + A_0^2 - 3X_c f) \right] + G_{5,XX}(X_c) (A_0^2 - 2X_c f) (A_0 A_0' - X_c f'). \quad (275)$$

De la ecuación (274) se obtiene, por supuesto, que $A_0 = P + Q/r$, con P y Q constantes. Si

$$G_{5,X}(X_c) = 0, \quad (276)$$

la ecuación (275) se satisface para (i) $A_0 A'_0 = X_c f'$ o (ii) $A_0^2 = 2f X_c$.

Para la primera rama se tiene la expresión

$$f' = \frac{A_0 A'_0}{X_c} = -\frac{(Pr + Q)Q}{X_c r^3}, \quad (277)$$

cuya integración da como resultado

$$f = h = C - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2X_c r^2} \quad (278)$$

con $M = -PQ/(2X_c)$. En el límite asintótico cuando $r \rightarrow \infty$, se debe tener que $f = h = 1$, lo cual indica que $C = 1$

Se tiene que las ecuaciones de campo gravitacionales para las componentes $(\mu, \nu) = (0, 0)$, $(\mu, \nu) = (1, 1)$ y $(\mu, \nu) = (2, 2)$ son, respectivamente,

$$0 = \frac{1}{2fr^2} \{ -m_p^2(-1 + rf' + f) - r^2 A_0'^2 \} + \frac{1}{4r^2} G_{5,XX} a_1^2 \{ 2f [A_0 A_1 A'_0 + (A_0^2 - A_1^2 f^2) A'_1] \\ + A_1 (A_0^2 - A_1^2 f^2) f' \}, \quad (279)$$

$$0 = \frac{f}{2r} \{ m_p^2(-1 + rf' + f) + r^2 A_0'^2 \} + \frac{1}{4r^2} G_{5,XX} A_1^3 f^2 [2A_0 A'_0 f + (-A_0^2 + A_1^2 f^2) f'], \quad (280)$$

$$0 = -2r A_0'^2 + m_p^2(2f' + rf''). \quad (281)$$

Insertando la solución para A_0 y para f en la ecuación de la componente $(\mu, \nu) = (2, 2)$ se obtiene

que

$$X_c = m_p^2. \quad (282)$$

Lo que lleva a que, se anulen las ecuaciones de las componentes $(\mu, \nu) = (0, 0)$ y $(\mu, \nu) = (1, 1)$. Por lo tanto las soluciones para este tipo de acoplamiento son

$$f = h = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2} \quad (283)$$

$$A_0 = -\frac{2Mm_p^2}{Q} + \frac{Q}{r} \quad (284)$$

y usando la condición (230) se tiene que

$$A_1 = \pm \frac{2m_p^2 \sqrt{2(2M^2 m_p^2 - Q)} r^2}{Q [2m_p^2 r(2M - r) - Q^2]}. \quad (285)$$

La existencia de esta solución requiere que $2M^2 m_p^2 > Q^2$.

A partir de la ecuación (230) la opción (ii) corresponde a $A_1 = 0$. Reemplazando esto en la ecuación (272), se tiene

$$-r^2 f'^2 + 2f(2rf' + r^2 f'') = 0, \quad (286)$$

la cual es la misma ecuación diferencial (248), cuya solución es

$$f = h = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2. \quad (287)$$

Por otra parte, de la ecuación (281), se tiene que

$$X_c = m_p^2, \quad (288)$$

lo que indica que la expresión para la componente temporal del campo vectorial, A_0 , es la siguiente

$$A_0 = \sqrt{2} \left(-m_p + \frac{Mm_p}{r} \right), \quad (289)$$

con la relación particular $Q^2 = 2M^2m_p^2$. De hecho, este caso puede ser visto como el caso de las soluciones de la rama anterior con la componente radial del campo siendo nula.

Un modo concreto de obtener las soluciones de arriba es mediante un acoplamiento $G_5(X)$ que esté dado mediante la siguiente expresión

$$G_5(X) = G_5(X_c) + \sum_{n=2} b_n (X - X_c)^2, \quad (290)$$

en donde $X_c = m_p^2$.

6.4.3. Acoplamiento de sexto orden $G_6(X)$. En presencia del acoplamiento general G_6 , la ecuación de la componente $\alpha = 1$ del campo vectorial se reduce a

$$A_1 A_0'^2 [G_{6,X} (3f - 1) - G_{6,XX} A_1^2 f^2] = 0, \quad (291)$$

para la cual se buscarán soluciones que satisfagan que $A_1 = 0$ o $A_0' = 0$.

$$(i)A'_0 = 0$$

En este caso se tiene que

$$A_0 = P = \text{const.} \quad (292)$$

lo que anula las ecuaciones para la componente $\alpha = 0$ del campo vectorial y para la componente $(\mu, \nu) = (0, 1)$ del campo gravitacional.

De esta manera, las ecuaciones para las componentes $(\mu, \nu) = (0, 0)$ y $(\mu, \nu) = (1, 1)$ del campo gravitacional llevan a la ecuación diferencial

$$-1 + f + rf' = 0 \quad (293)$$

cuya solución, como ya se obtuvo previamente, es

$$f = h = 1 - \frac{2M}{r} \quad (294)$$

la cual también anula la ecuación de la componente $(\mu, \nu) = (2, 2)$. Por lo tanto, usando la condición (230) se obtiene que el modo longitudinal del campo vectorial es el siguiente

$$A_1 = \pm \frac{\sqrt{r(P^2 r + 4MX_c - 2rX_c)}}{r - 2M}. \quad (295)$$

Ya que cuando $r \rightarrow \infty$ la componente longitudinal $A_1 \rightarrow \pm \sqrt{P^2 - 2X_c}$ se tiene que para la existencia de la solución $P^2 > 2X_c$.

$$(ii)A_1 = 0$$

Para este caso, en primer lugar, se anula la ecuación de campo gravitacional de la componente $(\mu, \nu) = (0, 1)$. Además, debido a la condición (230), $A_0^2 = 2fX_c$. Esto lleva a que las ecuaciones de campo gravitacional de las componentes $(\mu, \nu) = (0, 0)$ y $(\mu, \nu) = (1, 1)$ se reduzcan a, respectivamente,

$$\frac{m_p^2}{2}f(rf'' + 2f') - \frac{X_c}{4}rf'^2 - X_cff'f''G_6 = 0 \quad (296)$$

$$2rf(rf'' + 2f') - r^2f'^2 - 2[2f^2f'' + f(f'^2 - 2f'') + f'^2]G_6 + 2X_c(f - 1)f'^2G_{6,X} = 0. \quad (297)$$

Para obtener soluciones exactas se tomarán las condiciones

$$G_6(X_c) = 0, \quad y \quad G_{6,X}(X_c) = 0. \quad (298)$$

De la ecuación (297) se obtiene la solución de Reissner-Nordström cuya carga es igual a la masa del agujero negro, es decir,

$$f = h = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2, \quad (299)$$

que al reemplazar en la ecuación (296) da como resultado que $X_c = m_p^2$. Además, la componente temporal del campo vectorial es $A_0 = P + Q/r$ en donde $P = \pm\sqrt{2}m_p$ y $Q = \sqrt{2}Mm_p$. Esto es equivalente a la solución obtenida para el acoplamiento de quinto orden $G_5(X)$ de la rama $A_0^2 = 2fX_c$.

Un modelo concreto que lleve a la solución obtenida para este caso debe ser de la forma

$$G_6(X) = \sum_{n=2} b_n(X - X_c), \quad (300)$$

en donde $X_c = m_p^2$.

6.4.4. Acoplamiento cuártico $g_4(X)$. Considérese el acoplamiento dado por

$$G_2(X, F) = -2g_4(X)F, \quad (301)$$

en donde $g_4(X)$ es una función de X . De esta manera, la ecuación de campo vectorial de la componente $\alpha = 1$, usando las condiciones (229) y (230), es

$$g_{4,X}A_1A_0'^2 = 0. \quad (302)$$

Considérese el caso en el cual se satisface la relación

$$g_{4,X}(X_c) = 0. \quad (303)$$

Por lo tanto la ecuación de campo vectorial de la componente $\alpha = 0$ y la ecuación de campo gravitacional de la componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$ son, respectivamente,

$$rA_0'' + 2A_0' = 0 \quad (304)$$

$$2m_p^2(1 - f - rf') + (1 - 2g_4)r^2A_0'^2 = 0. \quad (305)$$

A partir de la primera ecuación, la componente temporal del campo vectorial es

$$A_0 = P + \frac{Q}{r}, \quad (306)$$

la cual, al reemplazar en la segunda ecuación, lleva a que

$$f = h = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2} [1 - 2g_4(X_c)], \quad (307)$$

con el modo longitudinal del campo dado por la expresión (231). Esto equivale a una solución de Reissner-Nordström con carga efectiva $Q_{eff} = Q\sqrt{1 - 2g_4(X_c)}$ que es diferente de Q a menos que $g_4(X_c) = 0$.

Un acoplamiento que lleve a estas soluciones está dado por

$$g_4(X) = g_4(X_c) + \sum_{n=2} b_n(X - X_c). \quad (308)$$

Si $g_4(X_c) = 1/2$, entonces se obtiene la solución de Schwarzschild $f = h = 1 - 2M/r$ con

A_0 indeterminado. Por otra parte la ecuación (302) también se satisface si (i) $A_1 = 0$ o (ii) $A'_0 = 0$.

Para la rama (i) las ecuaciones para la componente $\alpha = 0$ y la componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$ son, respectivamente,

$$2A_0(f + g_{4,X}A_0A'_0r) + fA''_0r = 0 \quad (309)$$

$$2g_{4,X}A_0^2A_0'^2r^2 - f[2m_p^2(rf' + f - 1) + (1 - 2g_4)A_0'^2r^2]. \quad (310)$$

Hay una solución exacta bajo las condiciones $g_{4,X}(X_c) = 0$ y $g_4(X_c) = 1/2$. Esto da como solución

$$f = h = 1 - \frac{2M}{r}, \quad A_0 = \pm \sqrt{2 \left(1 - \frac{2M}{r} X_c\right)} \quad A_1 = 0. \quad (311)$$

Esta solución existe para la función (308) con $g_4(X_c) = 1/2$.

Para la otra rama, $A'_0 = 0$ se obtiene la solución de Schwarzschild $f = h = 1 - 2M/r$ con $A_0 = \text{const.}$ y A_1 dado por la ecuación (231) para acoplamientos generales $g_4(X)$.

6.4.5. Acoplamiento vectorial de quinto orden $g_5(X)$. Finalmente se se busca la solución exacta para el acoplamiento de quinto orden $g_5(X)$. Para este acoplamiento, la ecuación de campo vectorial de la componente $\alpha = 0$ es la siguiente

$$A_0'^2(g_5 - g_{5,X}(A_0^2 - 2fX_c)) = 0. \quad (312)$$

Para la rama $A'_0 = 0$ se obtiene la solución de Schwarzschild $f = h = 1 - 2M/r$ seguida del modo longitudinal del campo dado por la ecuación (231), con $A_0 = \text{const.}$, para acoplamientos $g_5(X)$

generales.

Para la otra rama $fg_5 = (A_0^2 - 2fX_c)g_{5,X}$ existe solución exacta bajo la condición

$$g_{5,X} = 0. \quad (313)$$

Esto lleva a que la ecuación de campo vectorial de la componente $\alpha = 0$ y la ecuación de campo gravitacional de la componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$ sean las que están presentes en la sección (6.1). De esta manera se obtiene la solución de Reissner-Nordström con A_1 dado por la ecuación (231). Ya que $g_5(X_c) = 0$ en este caso el acoplamiento de quinto orden de la forma

$$g_5(X) = \sum_{n=2} b_n (X - X_c)^n \quad (314)$$

da como resultado la solución de Reissner-Nordström con el modo longitudinal diferente de cero.

Tabla 1

Acomplamientos y sus respectivas soluciones exactas de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos

Acoplamiento	$f = h$	A_0	A_1
$G_4 = \frac{m_p^2}{2}$	$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2}$	$A_0 = P + \frac{Q}{r}$	<i>ind.</i>
$G_4 = \frac{m_p^2}{2}, G_2 = \mu^2 X$	No sol.	No sol.	No sol.
$G_4 = \frac{m_p^2}{2} + \frac{X}{4}$	$f = 1 - \frac{2M}{r}$	$A_0 = P + \frac{Q}{r}$	$A_1 = \pm \frac{\sqrt{2P(MP+Q)+Q^2}}{r-2M}$
$G_4(X) = G_4(P^2/2) + \frac{1}{4}(X - P^2/2)$ $+ \sum_{n=3} b_n(X - P^2/2)^n$	$f = 1 - \frac{2M}{r}$	$A_0 = P + \frac{Q}{r}$	$A_1 = \pm \frac{\sqrt{2P(MP+Q)+Q^2}}{r-2M}$
$G_4(X) = \frac{P^2}{4} + \sum_{n=2} b_n(X - P^2)^n$	$f = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2$	$A_0 = P - \frac{MP}{r}$	$A_1 = 0$
$G_3(X) = G_3(X_c) + \sum_{n=2} b_n(X - X_c)^n$	$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2}$	$A_0 = P + \frac{Q}{r}$	$A_1 = \pm \frac{\sqrt{A_0^2 - 2fX_c}}{f}$
$G_5(X) = G_5(m_p^2) + \sum_{n=2} b_n(X - m_p^2)^n$	$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2}$	$A_0 = -\frac{2Mm_p^2}{Q} + \frac{Q}{r}$	$A_1 = \pm \frac{2m_p^2 \sqrt{2(2M^2 m_p^2 - Q)} r^2}{Q[2m_p^2 r(2M-r) - Q^2]}$
$G_5(X) = G_5(m_p^2) + \sum_{n=2} b_n(X - m_p^2)^n$	$f = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2$	$A_0 = \sqrt{2} \left(-m_p + \frac{Mm_p}{r}\right)$	$A_1 = 0$
$G_6(X) = \sum_{n=2} b_n(X - m_p^2)^n$	$f = 1 - \frac{2M}{r}$	$A_0 = P$	$A_1 = \pm \frac{\sqrt{r(P^2 r + 4MX_c - 2rX_c)}}{r-2M}$
$G_6(X) = \sum_{n=2} b_n(X - m_p^2)^n$	$f = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2$	$A_0 = \sqrt{2} \left(m_p + \frac{Mm_p}{r}\right)$	$A_1 = 0$
$g_4(X) = g_4(X_c) + \sum_{n=2} b_n(X - X_c)^n$	$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2} [1 - 2g_4(X_c)]$	$A_0 = P + \frac{Q}{r}$	$A_1 = \pm \frac{\sqrt{A_0^2 - 2fX_c}}{f}$
$g_5(X)$	$f = 1 - \frac{2M}{r}$	$A_0 = P$	$A_1 = \pm \frac{\sqrt{P^2 - 2X_c(r-2M)}}{r-2M}$
$g_5(X) = \sum_{n=2} b_n(X - X_c)^n$	$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{2m_p^2 r^2}$	$A_0 = P + \frac{Q}{r}$	$A_1 = \pm \frac{2m_p^2 \sqrt{2(2M^2 m_p^2 - Q)} r^2}{Q[2m_p^2 r(2M-r) - Q^2]}$

7. Conclusiones

En este trabajo se tomó la acción (85) y a partir del método variacional se obtuvieron las ecuaciones de campo gravitacionales y vectoriales de la teoría generalizada de Proca. Posterior a esto se determinaron los perfiles del campo y del tensor métrico propios de un espaciotiempo estático y con simetría esférica. Con ello se establecieron condiciones para las funciones métricas y las funciones componentes del campo vectorial con el fin de obtener soluciones exactas. También se calculó la forma que deben tener los acoplamientos para llegar a dichas soluciones.

En primer lugar al usar el acoplamiento $G_4 = m_p^2/2$ se recuperó Relatividad General para un espaciotiempo de electrovacío. En éste se obtuvo la solución de Reissner-Nördstrom. Por otra parte, se corroboró la inexistencia de soluciones en el caso de Proca masivo. La inexistencia aparece como consecuencia de que la solución para el campo vectorial es incompatible con el comportamiento asintótico que deben tener las funciones métricas, tanto en el horizonte de eventos ($f(r_h) = h(r_h) = 0$) como en el infinito ($f(r \rightarrow \infty) = h(r \rightarrow \infty) = 1$). La incompatibilidad desaparece cuando la masa del campo μ es nula, el cual es un espaciotiempo de Reissner-Nordström.

Seguidamente se encontró la solución para el acoplamiento $G_4 = m_p^2/2 + X/4$. En esta se cumplen las condiciones $f = h$ y $X = X_c = \text{const.}$, las cuales se usaron para encontrar soluciones exactas correspondientes a cada tipo de acoplamiento usado. En general, las soluciones obtenidas para todos los acoplamientos considerados en este documento no difieren de soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström salvo en las funciones componentes del campo vectorial. Esto, en efecto, aparece a causa de las restricciones usadas con el objetivo de encontrar soluciones exac-

tas. Entonces, al aliviar las condiciones se pueden encontrar soluciones más generales mediante métodos iterativos, por ejemplo. Además en varias de las soluciones encontradas en este trabajo (ver tabla ??) el modo longitudinal del campo vectorial era diferente de cero, en donde aparece una nueva carga P la cual no rompe estrictamente la conjetura de no pelo, debido esta carga no puede 'verse' al aplicar la ley de Gauss.

Por lo tanto, al usar una teoría y obtener resultados que ya son predichos por una teoría más simple, se tiene mayor preferencia por la teoría más simple. En este caso al usar la teoría generalizada de Proca, que es de mayor complejidad que la Relatividad General, se obtiene soluciones exactas que ya son predichas por esta última. Por consiguiente, en el marco de las soluciones exactas de agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos, la teoría de Einstein predomina por sobre la teoría generalizada de Proca.

Finalmente, al comparar con las soluciones presentadas en el documento (Heisenberg et al., 2017), no hubo diferencia alguna entre aquellas y las obtenidas en este trabajo. Todo esto pese al uso incorrecto del método variacional en el documento mencionado (Ellis et al., 2012), lo que pudo deberse a la simetría del espaciotiempo considerado.

Referencias Bibliográficas

- Achour, B., Langlois, J., and Noui, D. (2016). Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski and disformal transformations. *Phys. Rev. D*, 93:124005.
- Aghanim, N. et al. (2018). Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters.
- Allys, E., Beltran, J. P., Peter, P., and Rodríguez, Y. (2016a). On the 4D generalized Proca action for an Abelian vector field. *JCAP*, 1609:026.
- Allys, E., Peter, P., and Rodríguez, Y. (2016b). Generalized Proca action for an Abelian vector field. *JCAP*, 1602:004.
- Bertone, G. and Hooper, D. (2018). History of dark matter. *Rev. Mod. Phys.*, 90:045002.
- Carroll, S. (2004). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley.
- Crisostomi, M., Klein, R., and Roest, D. (2017). Higher derivative field theories: degeneracy conditions and classes. *JHEP*, 1706:124.
- de Rham, C. (2014). Massive Gravity. *Living Rev. Relativ.*, 17:7.
- de Rham, C., Gabadadze, G., and Tolley, A. J. (2011). Resummation of Massive Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 106:231101.

- Deffayet, C., Esposito-Farèse, G., and Deser, C. (2009a). Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress tensors. *Phys. Rev. D*, 80:064015.
- Deffayet, C., Esposito-Farèse, G., and Vikman, A. (2009b). Covariant Galileon. *Phys. Rev. D*, 79:084003.
- Deffayet, C., Gao, X., Steer, D. A., and Zahariade, G. (2011). From k -essence to generalized Galileons. *Phys. Rev. D*, 84:064039.
- Deffayet, C., Gümrukçüoğlu, A. E., Mukohyama, S., and Wang, Y. (2014). A no-go theorem for generalized vector Galileons on flat spacetime. *JHEP*, 1404:082.
- Deffayet, C. and Steer, D. (2013). A formal introduction to Horndeski and Galileon theories and their generalizations. *Class. Quantum Grav.*, 30:214006.
- Dong, R., Sakstein, J., and Stojkovic, D. (2017). Quasinormal modes of black holes in scalar-tensor theories with nonminimal derivative couplings. *Phys. Rev. D*, 96:064048.
- Eddington, A. S. (1924). A comparison of Whitehead's and Einstein's formulæ. *Nature*, 113:192.
- Ellis, G., Maartens, R., and MacCallum, M. (2012). *Relativistic cosmology*. Cambridge University Press.
- Errasti, V., Gording, B., Méndez-Zavaleta, J. A., and Schmidt-May, A. (2019a). The complete theory of maxwell and proca fields.

- Errasti, V., Gording, B., Méndez-Zavaleta, J. A., and Schmidt-May, A. (2019b). The maxwell-proca theory: definition and construction.
- Finkelstein, D. (1958). Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. *Phys. Rev.*, 110:965.
- Frolov, V. and Novikov, I. (1998). *Black Hole Physics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.
- Gallego, A. and Rodríguez, Y. (2019). A systematic procedure to build the beyond generalized proca field theory. *Physics Letters B*, 798:134958.
- Ganguly, A. et al. (2018). Black hole stability under odd-parity perturbations in Horndeski gravity. *Class. Quantum Grav.*, 35:145008.
- Gleyzes, J., Langlois, D., Piazza, F., and Vernizzi, F. (2015). New Class of Consistent Scalar-Tensor Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 114:211101.
- Gómez, L. G. and Rodríguez, Y. (2019). Stability conditions in the generalized $su(2)$ proca theory. *Phys. Rev. D*, 100:084048.
- Hassan, S. F. and Rosen, R. A. (2012). Bimetric gravity from ghost-free massive gravity. *JHEP*, 1202:126.
- Heisenberg, L. (2014). Generalization of the Proca action. *JCAP*, 1405:015.

- Heisenberg, L., Kase, R., Minamitsuji, M., and Tsujikawa, S. (2017). Black holes in vector-tensor theories. *JCAP*, 1708:024.
- Heisenberg, L., Kase, R., and Tsujikawa, S. (2016). Beyond generalized Proca theories. *Phys. Lett. B*, 760:617.
- Heisenberg, L., Kase, R., and Tsujikawa, S. (2018). Odd-parity stability of hairy black holes in $u(1)$ gauge-invariant scalar-vector-tensor theories. *Phys. Rev. D*, 97:124043.
- Hinterbichler, K. (2012). Theoretical aspects of massive gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 84:671.
- Hinterbichler, K. and Rosen, R. A. (2012). Interacting spin-2 fields. *JHEP*, 1207:047.
- Horndeski, G. W. (1976). Conservation of charge and the Einstein–Maxwell field equations. *J. Math. Phys.*, 17:1980.
- Horndeski, H. W. (1974). Second-order-scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 10:363–384.
- Jimenez, J. B. and Heisenberg, L. (2016). Derivative self-interactions for a massive vector field. *Phys. Lett B*, 757:405.
- Kase, R., Minamitsuji, M., Tsujikawa, S., and Zhang, Y. (2018). Black hole perturbations in vector-tensor theories: the odd-mode analysis. *JCAP*, 1802:048.
- Kimura, R., Naruko, A., and Yoshida, D. (2017). Extended vector-tensor theories. *JCAP*, 1701:002.

- Kobayashi, T., Motohashi, H., and Suyama, T. (2012). Black hole perturbation in the most general scalar-tensor theory with second-order field equations: The odd-parity sector. *Phys. Rev. D*, 85:084025.
- Kobayashi, T., Motohashi, H., and Suyama, T. (2014). Black hole perturbation in the most general scalar-tensor theory with second-order field equations. II. The even-parity sector. *Phys. Rev. D*, 89:084042.
- Martin-Garcia, J. (2019). xact: Efficient tensor computer algebra for the wolfram language.
- Nakahara, M. (2003). *Geometry, topology and physics*. CRC Press.
- Nicolis, A., Rattazzi, R., and Trincherini, E. (2009). Galileon as a local modification of gravity. *Phys. Rev. D*, 79:064036.
- Ostrogradski, M. (1850). Memoires sur les equations differentielles relatives au probleme des isoperimetres. *Mem. Ac. St. Petersburg VI*, 4:385.
- Perlmutter, S. et al. (1999). Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *Astrophys. J*, 517:565–586.
- Riess, A. G. et al. (1998). Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *Astronom. J*, 116:1009.
- Rodríguez, Y. and Navarro, A. (2017). Scalar and vector Galileons. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 831:012004.

Tasinato, G. (2014a). A small cosmological constant from Abelian symmetry breaking. *Class. Quantum Grav.*, 31:225004.

Tasinato, G. (2014b). Cosmic acceleration from Abelian symmetry breaking. *JHEP*, 1404:067.

Tattersall, O. J. and Ferreira, P. G. (2018). Quasinormal modes of black holes in Horndeski gravity. *Phys. Rev. D*, 97:104047.

Woodard, R. (2007). Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity. *Lec. Notes Phys.*, 720:403.

Woodard, R. P. (2015). Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, 10:32243.

Apéndices

Apéndice A. Evaluación del término $g^{\mu\nu}(\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha) - g^{\mu\alpha}(\delta\Gamma_{\mu\gamma}^\gamma)$

En primer lugar, la variación de los símbolos de Christoffel se puede escribir como

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\beta} [\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}] + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} [\partial_\mu(\delta g_{\beta\nu}) + \partial_\nu(\delta g_{\mu\beta}) - \partial_\beta(\delta g_{\mu\nu})]. \quad (315)$$

Debido a que la derivada covariante de la variación de la métrica es

$$\nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu} = \partial_\alpha(\delta g_{\mu\nu}) - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \delta g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda \delta g_{\mu\lambda} \quad (316)$$

la expresión (315) se puede reescribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\beta} [\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}] + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \left[\nabla_\mu(\delta g_{\beta\nu}) + \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \delta g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta g_{\beta\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \nabla_\mu(\delta g_{\mu\beta}) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta g_{\lambda\beta} + \Gamma_{\beta\nu}^\lambda \delta g_{\mu\lambda} - \nabla_\beta(\delta g_{\mu\nu}) - \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \delta g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \delta g_{\mu\lambda} \right] \\ &= \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\beta} [\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}] + g^{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta g_{\beta\lambda} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} [\nabla_\mu(\delta g_{\beta\nu}) + \nabla_\nu(\delta g_{\mu\beta}) \\ &\quad - \nabla_\beta(\delta g_{\mu\nu})] \\ &= \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\beta} [\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}] - \delta g^{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\beta} + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} [\nabla_\mu(\delta g_{\beta\nu}) + \nabla_\nu(\delta g_{\mu\beta}) \\ &\quad - \nabla_\beta(\delta g_{\mu\nu})] \\ \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} [\nabla_\mu(\delta g_{\beta\nu}) + \nabla_\nu(\delta g_{\mu\beta}) - \nabla_\beta(\delta g_{\mu\nu})], \end{aligned} \quad (317)$$

lo que también puede representarse como

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} [-g_{\beta\gamma}g_{\nu\sigma}\nabla_{\mu}(\delta g^{\gamma\sigma}) - g_{\beta\gamma}g_{\mu\sigma}\nabla_{\nu}(\delta g^{\sigma\gamma}) + g_{\mu\gamma}g_{\nu\sigma}\nabla_{\beta}(\delta g^{\gamma\sigma})] \\ \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} &= \frac{1}{2} [-g_{\nu\sigma}\nabla_{\mu}(\delta g^{\alpha\sigma}) - g_{\mu\sigma}\nabla_{\nu}(\delta g^{\alpha\sigma}) + g_{\mu\gamma}g_{\nu\sigma}\nabla^{\alpha}(\delta g^{\gamma\sigma})].\end{aligned}\quad (318)$$

Entonces, el término $g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ está dado por la expresión

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = -\nabla_{\lambda}(\delta g^{\alpha\lambda}) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}(\delta g^{\mu\nu}).\quad (319)$$

Por otra parte la contracción $\delta\Gamma_{\mu\gamma}^{\gamma}$ queda de la forma

$$\delta\Gamma_{\mu\gamma}^{\gamma} = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\nabla_{\mu}(\delta g^{\alpha\beta})\quad (320)$$

Finalmente se tiene que

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\mu\gamma}^{\gamma} &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}(\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\mu}(\delta g^{\alpha\mu}) + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}(\delta g^{\mu\nu}) \\ &= g_{\mu\nu}\nabla^{\alpha}(\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_{\mu}(\delta g^{\alpha\mu})\end{aligned}\quad (321)$$