

LAS RELACIONES DE GREEN Y REPRESENTACIÓN DE SEMIGRUPOS
POLACOS

YESLI NATALI DELGADO MORALES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2025

LAS RELACIONES DE GREEN Y REPRESENTACIÓN DE SEMIGRUPOS
POLACOS

YESLI NATALI DELGADO MORALES

Trabajo de Grado para optar al título de
Magíster en Matemáticas

Director
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2025

AGRADECIMIENTOS

La autora expresa sus agradecimientos:

A Iohan, por su paciente apoyo.

A mi madre Marisol y mis hermanos Shirley y Daniel.

Al profesor Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

A los profesores Luis Ángel, Jerson Reina, María de Pilar Oyuela, Gloria Serrano y Sandra Solano.

A los doctores Natalia Jaramillo y Milton Salazar.

A mis perritos Migaja, Lenin, Pantera, Kira, Lottie y Sky.

CONTENIDO

	pág.
1. INTRODUCCIÓN	10
2. SEMIGRUPOS Y ESPACIOS POLACOS	16
2.1. ESPACIOS POLACOS	16
2.2. SEMIGRUPOS	20
2.2.1. El semigrupo $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	23
2.2.2. El semigrupo polaco $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	26
2.3. SEMIGRUPOS INVERSOS	27
2.3.1. El semigrupo inverso simétrico $I(\mathbb{N})$	32
2.4. REPRESENTACIÓN DE SEMIGRUPOS	34
2.4.1. Representación de semigrupos en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	36
2.4.2. Representación de semigrupos en $I(\mathbb{N})$	40
3. RELACIONES DE GREEN	42
3.1. PROPIEDADES BÁSICAS	42
3.2. LEMA DE GREEN	49
3.3. COMPLEJIDAD TOPOLÓGICA	53
3.4. CONTINUIDAD AUTOMÁTICA EN SEMIGRUPOS	56
4. CARACTERIZACIÓN DE LAS RELACIONES DE GREEN EN ALGUNOS SEMIGRUPOS	64
4.1. EL SEMIGRUPO INVERSO SIMÉTRICO $I(\mathbb{N})$	64
4.1.1. Complejidad topológica de la relaciones de Green	67
4.2. EL SEMIGRUPO $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	68

4.2.1. Complejidad topológica de las relaciones de Green	73
4.3. EL SEMIGRUPO $Iny(\mathbb{N})$	77
4.3.1. Complejidad topológica de las relaciones de Green	81
4.4. EL SEMIGRUPO $Sob(\mathbb{N})$	84
4.4.1. Complejidad topológica de las relaciones de Green	91
4.5. EL SEMIGRUPO DE FUNCIONES CRECIENTES	97
4.5.1. Complejidad topológica de las relaciones de Green	99
4.6. EL SEMIGRUPO DE FUNCIONES FINITA-A-UNO	100
4.6.1. Complejidad topológica de las relaciones de Green	103
BIBLIOGRAFÍA	104

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Jerarquía de Borel	19
Figura 2. Diagrama de Hasse de las relaciones de Green ordenadas por inclusión	45
Figura 3. Representacion de la demostracion del Teorema 3.4.5	61

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Caracterización de las relaciones de Green en algunos semigrupos	14
Tabla 2. Complejidad topológica de las relaciones de Green en algunos semigrupos	15
Tabla 3. Complejidad topológica de las relaciones de Green en un semigrupo Polaco y un semigrupo inverso Polaco	55
Tabla 4. Complejidad topológica de las relaciones de Green en $I(\mathbb{N})$	68
Tabla 5. Complejidad topológica de las relaciones de Green en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	77
Tabla 6. Complejidad topológica de las relaciones de Green en $Iny(\mathbb{N})$	84
Tabla 7. Complejidad topológica de las relaciones de Green en $Sob(\mathbb{N})$	97
Tabla 8. Complejidad topológica de las relaciones de Green en $Mon(\mathbb{N})$	99
Tabla 9. Complejidad topológica de las relaciones de Green en $FU(\mathbb{N})$	103

RESUMEN

TÍTULO: LAS RELACIONES DE GREEN Y REPRESENTACIÓN DE SEMIGRUPOS POLACOS *

AUTOR: YESLI NATALI DELGADO MORALES **

PALABRAS CLAVE: SEMIGRUPO, RELACIONES DE GREEN, COMPLEJIDAD TOPOLÓGICA, BORELIANOS, ANALÍTICOS, CONTINUIDAD AUTOMÁTICA.

DESCRIPCIÓN:

Un semigrupo es un conjunto con una operación asociativa; cuando el conjunto es un espacio topológico y la operación es continua, se le llama semigrupo topológico. Recientemente, ha habido un interés creciente en estudiar semigrupos polacos, es decir, semigrupos topológicos donde la topología es completamente metrizable y separable. Uno de los principales objetivos de este trabajos fue extender algunos resultados conocidos sobre los grupos polacos a los semigrupos polacos; por ejemplo, la continuidad automática.

Cada semigrupo tiene asociadas cinco relaciones de equivalencia llamadas relaciones de Green. Han sido ampliamente estudiados y han demostrado ser una herramienta esencial para estudiar la estructura de semigrupos. Cuando el semigrupo es polaco, las relaciones de Green resultan analíticas. En este trabajo, presentamos algunos resultados sobre la teoría descriptiva de conjuntos y las relaciones de Green.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Ph.D. en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: GREEN RELATIONS AND REPRESENTATION OF POLISH SEMIGROUPS *

AUTHOR: YESLI NATALI DELGADO MORALES **

KEYWORDS: SEMI-GROUP, GREEN RELATIONS, TOPOLOGICAL COMPLEXITY, BORELIANS, ANALYTICS, AUTOMATIC CONTINUITY.

DESCRIPTION: A semigroup is a set with an associative operation; when the set is a topological space and the operation is continuous, it is called a topological semigroup. Recently, there has been increasing interest in studying Polish semigroups, i.e., topological semigroups where the topology is completely metrizable and separable. One of the main purposes of these works was to extend some known results about Polish groups to Polish semigroups; for instance, automatic continuity.

Each semigroup has associated five equivalence relations called Green's relations. They have been extensively studied and shown to be an essential tool for studying the structure of semigroups. When the semigroup is Polish, Green's relations turn out to be analytic. In this text, we present some initial exploratory results about the descriptive set-theoretic properties of Green relations.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Ph.D. en Matemáticas.

1. INTRODUCCIÓN

El teorema clásico de Cayley afirma que todo grupo es isomorfo a un subgrupo de un grupo simétrico $S_\infty(X)$, que consiste de todas las biyecciones de X en X con la operación de composición de funciones, para algún X no vacío. Recordemos que un semigrupo es un conjunto con una operación asociativa. Un resultado análogo al teorema de Cayley también vale para los semigrupos. Todo semigrupo es isomorfo a un subsemigrupo de X^X (el semigrupo de todas las funciones de X en X , ver Teorema 2.2.12).

Análogamente a lo que ocurre con los grupos topológicos, cuando el semigrupo tiene una topología compatible con la operación algebraica se dice que el semigrupo es topológico. Recientemente ha crecido el interés en estudiar los semigrupos polacos (aquellos espacios cuya topología es métrica, completa y separable) con el objetivo de determinar qué resultados conocidos de los grupos polacos siguen válidos en los semigrupos ^{1,2,3,4,5,6}. Becker y Kechris ³ caracterizaron los grupos polacos isomorfos a subgrupos cerrados de $S_\infty(\mathbb{N})$ (ver Teorema 2.4.1).

¹ K. ARANA, PEREZ J. y UZCÁTEGUI C. "Pettis property for Polish inverse semigroups." En: *Applied General Topology* 24 (2023), págs. 455-467.

² S. BARDYLA et al. *Topological embeddings into transformation monoids*. 2023.

³ H. BECKER y KECHRIS A. "The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions". En: (*London Mathematical Society Lecture Note Series*). Cambridge: Cambridge University Press. (1996).

⁴ L. ELLIOTT et al. "Automatic continuity, unique Polish topologies, and Zariski topologies on monoids and clones." En: *Transactions of the American Mathematical Society* (2023).

⁵ J. PÉREZ y UZCÁTEGUI C. "On the Polishness of the inverse semigroup $\Gamma(X)$ on a compact metric space X ." En: *Aceptado para su publicación en European journal of mathematics* (2023).

⁶ J. PÉREZ y UZCÁTEGUI C. "Topologies on the symmetric inverse semigroup." En: *Semigroup Forum*. 104 (222), págs. 1-17.

Como dijimos más arriba, todo semigrupo es isomorfo a un subsemigrupo de X^X para algún conjunto X . La teoría descriptiva de conjuntos trata de espacios polacos, por esto, una pregunta natural es cuáles semigrupos se sumergen en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Un resultado de Elliott et al ⁴ caracteriza a los semigrupos que son isomorfos a un subsemigrupo de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (ver Teorema 2.4.4). Por otra parte, en ² caracterizaron a los subsemigrupos compactos de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Los semigrupos inversos son un tipo de semigrupos algebraicamente más parecidos a los grupos (ver Definición 2.3.2). El ejemplo más importante de semigrupo inverso es el semigrupo inverso simétrico, $I(X)$, que consiste de todas las biyecciones parciales entre subconjuntos de X . Este semigrupo es universal para la clase de los semigrupos inversos, pues un teorema de Vagner-Preston afirma que todo semigrupo inverso es isomorfo a un subsemigrupo de $I(X)$, para algún conjunto X no vacío (ver Teorema 2.3.9). Especialmente importante para nuestro trabajo es el caso X numerable, pues sabemos que $I(\mathbb{N})$ admite una única topología que lo hace semigrupo inverso polaco ⁶, ⁴. Elliott et al ⁴ caracterizaron los subsemigrupos inversos de $I(\mathbb{N})$, y adicionalmente en ² estudiaron los subsemigrupos compactos de $I(\mathbb{N})$.

El documento está dividido en 3 capítulos. En el Capítulo 2, se presentan definiciones y resultados conocidos en la literatura que son útiles para una comprensión adecuada del contenido del trabajo. En la Sección 2.1 damos a conocer los preliminares sobre espacios polacos y teoría descriptiva de conjuntos. En la Sección 2.2 presentamos algunas propiedades de semigrupos, al igual que en la Sección 2.3 con los semigrupos inversos y en la Sección 2.4 presentamos algunos resultados de representación de semigrupos en algunos semigrupos universales como $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $I(\mathbb{N})$.

Al estudiar la estructura algebraica de un semigrupo es usual encontrarse con el concepto de ideal, esto es, dado un semigrupo S , decimos que $T \subseteq S$ es un ideal a izquierda en S si es cerrado bajo multiplicación a izquierda, es decir si $ST \subseteq T$;

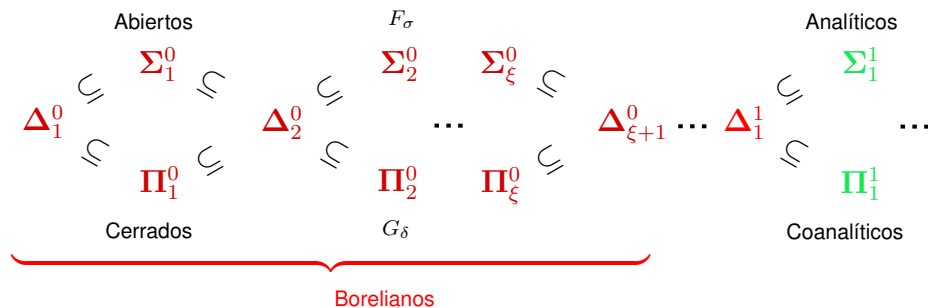
similarmente, definimos ideal a derecha e ideal bilátero. Una de las herramientas fundamentales para comprender un semigrupo son sus relaciones de Green, las cuales dan información sobre la estructura del semigrupo y cómo interactúan sus elementos dependiendo de los ideales principales que estos generan. En un semigrupo hay cinco relaciones de Green: \mathcal{H} , \mathcal{L} , \mathcal{R} , \mathcal{D} y \mathcal{J} que definimos a continuación (ver Capítulo 3):

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathcal{L} &\iff S^1x = S^1y, \\(x, y) \in \mathcal{R} &\iff xS^1 = yS^1, \\(x, y) \in \mathcal{J} &\iff S^1xS^1 = S^1yS^1, \\(x, y) \in \mathcal{H} &\iff (x, y) \in \mathcal{L} \cap \mathcal{R}, \\(x, y) \in \mathcal{D} &\iff (x, y) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}.\end{aligned}$$

Aquí $\mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ se entiende como la composición usual de relaciones de equivalencia, y $S^1 = S \cup \{1_S\}$ es el semigrupo que surge al adicionar a S un elemento que funcionará como la identidad.

En el Capítulo 3 presentamos las relaciones de Green, algunas propiedades básicas de estas y damos introducción al Lema de Green para poder estudiar su versión topológica. Recordemos que si $\varphi : G \rightarrow T$ es un homomorfismo entre grupos polacos, un resultado conocido afirma que si φ es Baire-medible, entonces es automáticamente continua (ver Teorema 3.4.1). Esta propiedad de los grupos polacos llamada continuidad automática ha sido extendida a algunos semigrupos polacos (ver ^{1, 4}). En la Sección 3.4 mostramos una conexión entre las \mathcal{H} -clases de un semigrupo y la continuidad automática. Para ello, nos apoyamos en el Lema de Green y en el hecho conocido de que las \mathcal{H} -clases que contienen idempotentes resultan ser grupos (ver Teorema 3.2.5). Esta sección es una de las más importantes de esta investigación. El resultado principal es el siguiente (ver el Teorema 3.4.6): Suponga que S y T son semigrupos polacos tal que cada \mathcal{H} -clase de S es G_δ . Si $\varphi : S \rightarrow T$ es un

homomorfismo medible Borel, entonces $\varphi|_H$ es continua para toda \mathcal{H} -clase H en S . Uno de los objetivos de esta tesis fue determinar la complejidad topológica de las relaciones de Green para un semigrupo polaco (como subconjuntos de $S \times S$). Para explicar qué se entiende por complejidad topológica necesitamos recordar algunos conceptos de la teoría descriptiva de conjuntos. Esta teoría estudia varias clases de conjuntos de un espacio Polaco X , tales como la clase de los borelianos $\mathcal{B}(X)$, que es la σ -álgebra más pequeña que contiene a los abiertos de X ; los analíticos, que son las proyecciones de los borelianos de $X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y, la clase de los coanalíticos, que son los complementos de los analíticos. Estas tres clases permiten hacer una clasificación de los subconjuntos de un espacio métrico X que refleja la complejidad topológica (ver Sección 2.1). Cuando nos referimos a complejidad de un subconjunto boreliano de un espacio polaco, nos referimos a su posición dentro de la jerarquía de Borel. Podemos visualizar un poco esa jerarquía en el siguiente diagrama:



En primer lugar, mostramos que todas las relaciones de Green son analíticas, pero eso solo indica una cota superior de la complejidad de esas relaciones. Por otro lado, para los semigrupos inversos Polacos, mostramos que las relaciones \mathcal{L} , \mathcal{R} y \mathcal{H} son cerradas. Por ese resultado nos centramos en semigrupos que no son inversos. Una condición mucho menos restrictiva que la de ser inverso es la regularidad (ver Definición 2.2.6). Mostramos que el semigrupo $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es un semigrupo regular (ver Proposición 2.2.15) pero sus relaciones \mathcal{L} , \mathcal{R} y \mathcal{H} no son todas cerradas (ver Tabla 5). De esta manera surge naturalmente la siguiente pregunta:

- ¿En qué semigrupos regulares las relaciones de Green \mathcal{L} , \mathcal{R} y \mathcal{H} son cerradas?

En el Capítulo 4 estudiamos caracterizaciones de las relaciones de Green que permitan determinar su complejidad topológica. Lo primero que hicimos fue caracterizar las relaciones de Green de $I(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y de algunos subsemigrupos importantes de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, como el subsemigrupo $Iny(\mathbb{N})$ de las funciones inyectivas, el subsemigrupo $Sob(\mathbb{N})$ de las funciones sobreyectivas, el subsemigrupo $Mon(\mathbb{N})$ de las funciones monótonas y el subsemigrupo $FU(\mathbb{N})$ de las funciones finita a uno, es decir, aquellas donde la preimagen de cada elemento es un conjunto finito. Este último es el único semigrupo de los estudiados en esta tesis que no es polaco como subespacio de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Una pregunta que quedó abierta es la caracterización de la relación \mathcal{J} en el semigrupo $Sob(\mathbb{N})$. Este semigrupo resalta en nuestra investigación, puesto que a pesar de no tener una caracterización para la relación \mathcal{J} en este semigrupo, mostramos un ejemplo de dos funciones que no están en \mathcal{D}^{Sob} , pero sí están en \mathcal{J}^{Sob} (ver Proposición 4.4.5). Lo que muestra que es el único semigrupo de los que estudiamos en donde las relaciones \mathcal{D} y \mathcal{J} no son iguales. La Tabla 1 presenta de forma resumida los resultados obtenidos.

Tabla 1. Caracterización de las relaciones de Green en algunos semigrupos

Semigrupo	Relaciones de Green			
	$(f, g) \in \mathcal{L}$	$(f, g) \in \mathcal{R}$	$(f, g) \in \mathcal{D}$	$(f, g) \in \mathcal{J}$
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	$Ker(f) = Ker(g)$	$Im(f) = Im(g)$	$ Im(f) = Im(g) $	$ Im(f) = Im(g) $
$Iny(\mathbb{N})$	$ \mathbb{N} \setminus Im(f) = \mathbb{N} \setminus Im(g) $	$Im(f) = Im(g)$	$ \mathbb{N} \setminus Im(f) = \mathbb{N} \setminus Im(g) $	$ \mathbb{N} \setminus Im(f) = \mathbb{N} \setminus Im(g) $
$Sob(\mathbb{N})$	$Ker(f) = Ker(g)$	$\forall n \in \mathbb{N} f^{-1}(n) = g^{-1}(n) $	$\forall r \in \mathbb{N} M_r^f = M_r^g $?
$FU(\mathbb{N})$	$Ker(f) = Ker(g)$	$Im(f) = Im(g)$	$FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})$	$FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})$
$Mon(\mathbb{N})$	$f = g$	$f = g$	$f = g$	$f = g$
$I(\mathbb{N})$	$Dom(f) = Dom(g)$	$Im(f) = Im(g)$	$ Im(f) = Im(g) $	$ Im(f) = Im(g) $

Con esas caracterizaciones a la mano ya pudimos calcular la complejidad topológica de las relaciones de Green respecto a la topología polaca de cada semigrupo. Los resultados obtenidos los presentamos en la Tabla 2.

Tabla 2. Complejidad topológica de las relaciones de Green en algunos semigrupos

Semigrupo	Inverso	Polaco	Complejidad Topológica				
			\mathcal{L}	\mathcal{R}	\mathcal{H}	\mathcal{D}	\mathcal{J}
S	\times	\checkmark	Σ_1^1	Σ_1^1	Σ_1^1	Σ_1^1	Σ_1^1
S	\checkmark	\checkmark	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0	Σ_1^1	Σ_1^1
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	\times	\checkmark	Π_1^0	G_δ	G_δ	Δ_3^0	Δ_3^0
$Inv(\mathbb{N})$	\times	\checkmark	Δ_4^0	G_δ	G_δ	Δ_4^0	Δ_4^0
$Sob(\mathbb{N})$	\times	\checkmark	G_δ	Π_3^0	Π_3^0	Π_4^0	?
$FU(\mathbb{N})$	\times	\times	Π_1^0	G_δ	G_δ	Π_1^0	Π_1^0
$Mon(\mathbb{N})$	\times	\checkmark	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0
$I(\mathbb{N})$	\checkmark	\checkmark	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0	Δ_3^0	Δ_3^0

Note que en los ejemplos específicos que tomamos la complejidad topológica de todas las relaciones de Green es Boreliana. Así surge la siguiente pregunta

- ¿Existe un semigrupo polaco tal que alguna de sus relaciones de Green no sea boreliana?

2. SEMIGRUPOS Y ESPACIOS POLACOS

En este capítulo se presentan definiciones y resultados conocidos en la literatura que son útiles para una comprensión adecuada del contenido del trabajo.

2.1. ESPACIOS POLACOS

En esta sección definiremos las nociones básicas de los espacios polacos. Usaremos ⁷ y ³ como referencia general para la fundamentación teórica.

Definición 2.1.1. *Un espacio topológico (X, τ) es **completamente metrizable**, si existe una métrica d completa compatible con la topología τ , es decir, tal que $\tau_d = \tau$.*

Definición 2.1.2. *Un espacio topológico X es **polaco** si es separable y completamente metrizable.*

Ejemplo 2.1.3. *Algunos espacios que son polacos son dados por:*

- \mathbb{N} con la topología discreta.
- Los espacios compactos metrizables.

Teorema 2.1.4. *El producto de una colección numerable de espacios polacos es polaco con la topología producto.*

De esta manera, es posible obtener más ejemplos de espacios polacos como lo son \mathbb{R}^n , Cantor $2^{\mathbb{N}}$, el cubo de Hilbert $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ y el espacio de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

⁷ C. DI PRISCO y UZCÁTEGUI C. *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Ediciones Uniandes, Bogotá, 2020.

Otro concepto fundamental para el estudio de los espacios polacos son los conjuntos borelianos que definiremos a continuación. Diremos que Ω es una clase de conjuntos si todo $A \in \Omega$ es un subconjunto de algún espacio polaco. Si X es un espacio polaco, denotaremos por $\Omega(X)$ a la colección $\Omega \cap \mathcal{P}(X)$.

Por otro lado, sea Ω un conjunto no vacío. Llamamos σ -álgebra sobre Ω a una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ no vacía que verifique:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.
3. Si $A_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Definición 2.1.5. La clase de los **borelianos de X** , que denotaremos por $\mathcal{B}(X)$, es la menor σ -álgebra de subconjuntos de X que contiene a los abiertos. Un conjunto perteneciente a esta clase se llama un conjunto boreliano.

Si Ω es una clase de subconjuntos de un espacio polaco X , denotaremos por $\sigma\Omega$ a la clase de uniones numerables de conjuntos en Ω , por $\delta\Omega$ denotamos la colección de intersecciones numerables de elementos de Ω , y $c\Omega$ denota la clase de complementos de conjuntos en Ω .

Definición 2.1.6. Sea X un conjunto, definimos $\Sigma_1^0(X)$ como la clase de los abiertos de X , $\Pi_1^0(X)$ la clase de los cerrados de X y

$$\Delta_1^0(X) = \Sigma_1^0(X) \cap \Pi_1^0(X).$$

Inductivamente, para $\alpha < \omega_1$ (donde ω_1 es el primer ordinal no numerable)

$$\Sigma_\alpha^0(X) := \sigma \left(\bigcup \{ \Pi_\zeta^0(X) : \zeta < \alpha \} \right),$$

$$\Pi_\alpha^0(X) := c\Sigma_\alpha^0(X),$$

$$\Delta_\alpha^0(X) := \Sigma_\alpha^0(X) \cap \Pi_\alpha^0(X).$$

Proposición 2.1.7. *Sea X un espacio polaco. Entonces para $\alpha < \omega_1$ (donde ω_1 es el primer ordinal no numerable) tenemos que*

- a. $\Delta_\alpha^0(X)$ es cerrada bajo uniones finitas e intersecciones finitas.
- b. $\Sigma_\alpha^0(X)$ es cerrada bajo uniones numerables.
- c. $\Pi_\alpha^0(X)$ es cerrado bajo intersecciones numerables.

Proposición 2.1.8. *Sea X un espacio polaco y $G \subseteq X$ un boreliano de X . Entonces $\mathcal{B}(G) = \{A \cap G : A \in \mathcal{B}(X)\}$.*

A continuación definiremos los conjuntos analíticos, que son una clase de conjuntos que extiende propiamente a los borelianos. Si $A \subset X \times Y$, entonces

$$Pr_X(A) = \{x \in X : \exists y \in Y, (x, y) \in A\}.$$

Definición 2.1.9. *Sea X un espacio polaco.*

$$\Sigma_1^1(X) := \{Pr(A) : A \in \mathcal{B}(X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}})\},$$

$$\Pi_1^1(X) := c\Sigma_1^1(X),$$

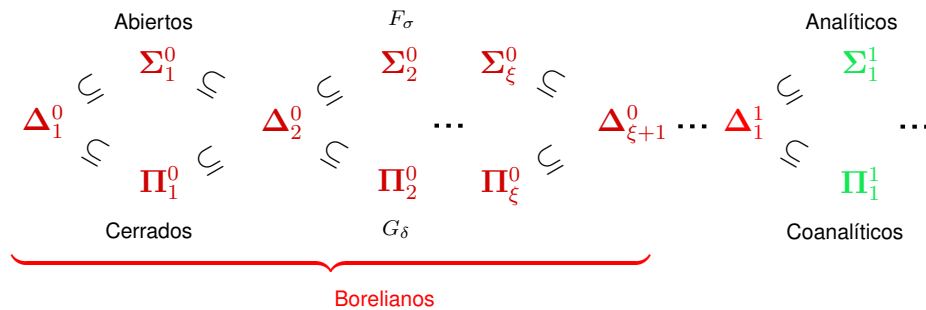
$$\Delta_1^1(X) := \Sigma_1^1(X) \cap \Pi_1^1(X).$$

Un conjunto se llama **analítico** si pertenece a la clase Σ_1^1 , y un conjunto es **coanalítico** si pertenece a la clase Π_1^1 .

Es fácil ver que todo boreliano pertenece a Δ_1^1 . El siguiente teorema muestra el recíproco y es un resultado fundamental de la teoría descriptiva (ver ⁷).

Teorema 2.1.10. (Suslin) *Sea X un espacio polaco no numerable. Entonces $\Delta_1^1(X) = \mathcal{B}(X)$.*

Figura 1. Jerarquía de Borel



Definición 2.1.11. *Sea X polaco. Entonces:*

- $A \subseteq X$ es **nunca denso** si $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$.
- $A \subseteq X$ es **magro** si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, con A_n es nunca denso para cada $n \in \mathbb{N}$.
- $A \subseteq X$ tiene la **propiedad de Baire o la PB** si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $A \Delta U$ es magro.

Un teorema bastante conocido que nos será de gran utilidad más adelante es el siguiente (ver ⁷).

Teorema 2.1.12. *Todo conjunto analítico o coanalítico tiene la propiedad de Baire.*

Definición 2.1.13. *Sean X, Y espacios polacos. Entonces*

- $\varphi : X \rightarrow Y$ es **medible Borel**, si para cada $U \subseteq Y$ boreliano, se tiene que $\varphi^{-1}(U)$ es boreliano.

b. $\varphi : X \rightarrow Y$ es **medible Baire**, si para cada $U \subseteq Y$ abierto, se tiene que $\varphi^{-1}(U)$ tiene la PB.

Proposición 2.1.14. *Toda función medible Borel es medible Baire.*

Finalizamos la sección con los siguientes dos resultados conocidos sobre espacios topológicos y funciones continuas.

Lema 2.1.15. $f : X \rightarrow \{0, 1\}^Z$ es continua si, y solo si, para cada $z \in Z$ el conjunto $\{x \in X : f(x)(z) = 0\}$ es abierto-cerrado.

Lema 2.1.16. Sean X, Y espacios topológicos Hausdorff y $\varphi : X \rightarrow Y$ continua. Entonces $\{(x, y) \in X \times X : \varphi(x) = \varphi(y)\}$ es cerrado.

2.2. SEMIGRUPOS

En esta sección se darán las nociones básicas de semigrupos. Usaremos como referencia general para la teoría de semigrupos los libros ⁸ y ⁹.

Definición 2.2.1. Un **semigrupo** es un conjunto S no vacío con una operación binaria asociativa \cdot .

Sea (S, \cdot) un semigrupo, se dice que S tiene identidad si existe $e \in S$ tal que $e \cdot s = s \cdot e = s$ para todo $s \in S$. En este caso, S es llamado **monoide**.

Definición 2.2.2. Sea $(S, *)$ un semigrupo sin identidad, $S^1 = S \cup \{1\}$ es un semigrupo, donde $1 \notin S$ y la operación binaria \cdot en S^1 se define como sigue: 1 es la identidad y $s \cdot a = s * a$ para todos $s, a \in S$.

Cuando el semigrupo S tenga un elemento identidad se define $S^1 = S$.

⁸ J. CAIN ALAN. *Nine Chapters on the Semigroup Art*. AJC Porto & Lisbon, 2020.

⁹ J. M. HOWIE. *Fundamentals of Semigroup Theory*. Clarendon Press, Oxford, 1995.

Ejemplo 2.2.3. Sea X un conjunto. El conjunto X^X de todas las funciones $f : X \rightarrow X$ es un semigrupo con la composición de funciones. Note que la función identidad $1_X \in X^X$ corresponde a la identidad del semigrupo.

Definición 2.2.4. Un **subsemigrupo** de un semigrupo (S, \cdot) es un conjunto no vacío $A \subseteq S$ tal que $xy \in A$ si $x, y \in A$.

Definición 2.2.5. Sean S un semigrupo y $x \in S$. Si $x \in S$ y $x^2 = x$ entonces decimos que x es un elemento **idempotente** de S . Denotaremos por $E(S)$ al conjunto de los idempotentes de S .

Definición 2.2.6. Sean S un semigrupo y $x \in S$. Si existe $z \in S$ tal que $xzx = x$, entonces diremos que x es **regular**. Si todo elemento de S es regular, entonces S es un **semigrupo regular**.

Un concepto interesante de analizar son las funciones entre semigrupos que conservan las operaciones: los homomorfismos de semigrupos.

Definición 2.2.7. Sean (S_1, \cdot) y $(S_2, *)$ dos semigrupos y $f : S_1 \rightarrow S_2$ una función. Se dice que f es un **homomorfismo** entre S_1 y S_2 si para todos $x, y \in S_1$ se verifica que

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

Definición 2.2.8. Un **monomorfismo** o **inmersión de semigrupo** es un homomorfismo inyectivo. Un **epimorfismo** es un homomorfismo sobreyectivo. Finalmente, un **isomorfismo** es un homomorfismo biyectivo.

Cuando existe un isomorfismo entre los semigrupos S_1 y S_2 diremos que son semigrupos isomorfos y lo denotaremos por $S_1 \cong S_2$.

Sean S un semigrupo y $s \in S$. Dos funciones que usaremos continuamente a lo largo de este trabajo son las funciones λ_s **multiplicación a izquierda** y ρ_s **multiplicación a derecha** definidas de la siguiente manera:

$\lambda_s : S \rightarrow S$ dada por $\lambda_s(x) = sx$ y $\rho_s : S \rightarrow S$ dada por $\rho_s(x) = xs$.

Definición 2.2.9. Sean S un semigrupo y τ una topología sobre S . Diremos que τ es **semitopológica a izquierda** en S si para todo $s \in S$ la función λ_s de multiplicación a izquierda es continua. Si para todo $s \in S$ la función ρ_s de multiplicación a derecha es continua, entonces decimos que τ es **semitopológica a derecha** en S . Si τ es semitopológica a izquierda y a derecha en S , entonces decimos que τ es **semitopológica** en S .

Definición 2.2.10. Sea τ una topología en un semigrupo (S, \cdot) . Si la multiplicación $\cdot : S \times S \rightarrow S$ dada por $\cdot(a, b) = a \cdot b$ es continua, llamamos a S un **semigrupo topológico**.

Ejemplo 2.2.11. Considere \mathbb{N} con la topología discreta. El espacio $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto es conocido como el espacio de Baire. Sea $\circ : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dada por $\circ(f, g) = f \circ g$ esta operación es continua, luego obtenemos que $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \circ)$ es un semigrupo topológico.

El teorema de Cayley para grupos establece que todo grupo es isomorfo a un subgrupo de un grupo simétrico. El siguiente resultado es el análogo para semigrupos y muestra que cada semigrupo es isomorfo a un subsemigrupo de un semigrupo de transformaciones (ver ⁸).

Teorema 2.2.12. Sean S un semigrupo. Existe un conjunto X y un monomorfismo $\phi : S \rightarrow X^X$.

Demostración. Considere $X = S^1 = S \cup \{1_S\}$ y $\phi : S \rightarrow X^X$, dada por $\phi(x) = \lambda_x$. Veamos que ϕ es monomorfismo. Sean $x, y \in S$ tales que $\phi(x) = \phi(y)$ entonces $\lambda_x = \lambda_y$. Luego, $\lambda_x(1_S) = \lambda_y(1_S)$. Por lo que, $x1_S = y1_S$ es decir, $x = y$. Así ϕ es inyectiva. Por otro lado, sea $s \in S$ note que $\phi(y) \cdot \phi(x)(s) = \lambda_y \circ \lambda_x(s) = \lambda_y(\lambda_x(s)) = \lambda_y(xs) = yxs = \lambda_{xy}(s) = \phi(xy)(s)$. De esta manera ϕ es homomorfismo y por tanto, concluimos que ϕ es monomorfismo.

□

2.2.1. El semigrupo $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Como mencionamos anteriormente, un semigrupo muy importante es el semigrupo $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dado que es universal entre los semigrupos numerables. La idea en esta sección es mostrar algunas propiedades y resultados conocidos sobre este semigrupo como lo es su regularidad y su topología.

Recordemos que si S es un semigrupo, el conjunto $E(S)$ hace referencia a los elementos de S que son idempotentes, es decir, aquellos que cumplen que $x \cdot x = x$.

Proposición 2.2.13. $E(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(n) = n \text{ para cada } n \in \text{Im}(f)\}$.

Demostración. Sea $f \in \{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : g(n) = n \text{ para cada } n \in \text{Im}(g)\}$. Entonces $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x)$. Luego, $E(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \subseteq \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(n) = n \text{ para cada } n \in \text{Im}(f)\}$. Por otro lado sea $f \in E(S)$. Considere $x \in \text{Im}(f)$, luego existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $f(y) = x$. Como $f(y) = f(f(y))$, tenemos que $x = f(y) = f(x)$.

□

El siguiente resultado es estándar, pero incluimos su demostración por completitud.

Lema 2.2.14. Sea $f : A \rightarrow B$ una función.

- Si f es inyectiva si y sólo si existe $g : B \rightarrow A$ sobreyectiva tal que $g \circ f = 1_A$.
- Si f es sobreyectiva si y sólo si existe $h : B \rightarrow A$ inyectiva tal que $f \circ h = 1_B$.

Demostración. a. (\Rightarrow) Sea f inyectiva. Fije $d \in A$. Defina $g : B \rightarrow A$ por

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{si } y \in \text{Im}(f) \text{ y } f(x) = y; \\ d & \text{si } y \notin \text{Im}(f). \end{cases}$$

Note que por la inyectividad de f tenemos que g está bien definida. Ahora, veamos que g es sobreyectiva. Para ello, sea $y \in A$. Luego, existe $x \in B$ tal que $f(y) = x$. De esta manera, $g(x) = y$. Así, g es sobreyectiva. Además, note que $f(x) \in \text{Im}(f)$, luego $g(f(x)) = x$. Como la anterior igualdad se tiene para cada $x \in A$, concluimos que $g \circ f = 1_A$.

(\Leftarrow) Sean f, g funciones tales que g es sobreyectiva y $g \circ f = 1_A$. Veamos que f es inyectiva. Sean $x, y \in A$ tales que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow x = y.$$

b. (\Rightarrow) Sean f sobreyectiva y $y \in B$, defina

$$X_y = \{x \in A : f(x) = y\}.$$

Como f es sobreyectiva, cada $X_y \neq \emptyset$. Note que $A = \bigcup_{y \in B} X_y$. Además, si $x \neq y$ entonces $X_x \cap X_y = \emptyset$. Ahora, para cada $y \in B$ fije $z_y \in X_y$. Defina $h : B \rightarrow A$ por

$$h(y) = z_y.$$

Es fácil ver que h está bien definida. Veamos que h es inyectiva. Sean $x, y \in B$ tales que $h(x) = h(y)$. Es decir, $z_x = z_y$. Entonces $z_x \in X_x \cap X_y$. Por tanto $x = y$. Finalmente, sea $x \in B$ entonces

$$f \circ h(x) = f(h(x)) = f(z_x) = x.$$

De esta manera, $f \circ h = 1_B$.

(\Leftarrow) Sean f, h funciones tales que h es inyectiva y $f \circ h = 1_B$. Veamos que f es sobreyectiva. Para ello, sea $y \in B$. Note que $f(h(y)) = y$. Por tanto, f es

sobreyectiva.

□

La siguiente proposición, aunque está enunciada en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, también vale para X^X .

Proposición 2.2.15. *El semigrupo $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es regular.*

Demostración. Sea $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Considere $f' : \mathbb{N} \rightarrow \text{Im}(f)$, tal que $f(x) = f'(x)$, para cada $x \in \mathbb{N}$. Como f' es sobreyectiva, por el Lema 2.2.14, existe $g' : \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f' \circ g' = 1_{\mathbb{N}}$. Entonces

$$f' \circ g' \circ f' = 1_{\mathbb{N}} \circ f' = f' \implies f \circ g' \circ f = f.$$

Ahora, considere $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como sigue

$$g(x) = \begin{cases} g'(x) & \text{si } x \in \text{Im}(f); \\ 0 & \text{si } x \notin \text{Im}(f). \end{cases}$$

Note que como para cada $x \in \text{Im}(f)$ tenemos que $g(x) = g'(x)$. Entonces, $f \circ g \circ f = f$. Por tanto, f es regular.

□

La siguiente proposición muestra que se puede factorizar cualquier función como la composición entre una sobreyectiva y una inyectiva. Aunque está enunciada para $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ también es válida en X^X cuando X es un conjunto infinito.

Proposición 2.2.16. *Para cada $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existen $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ inyectiva y $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sobreyectiva tales que $f = g \circ h$.*

Demostración. Sea $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $k : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una biyección. Defina $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por

$$h(x) = k((x, f(x))).$$

Note que h está bien definida y es inyectiva. Por otro lado, defina $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de la siguiente manera sea $y \in \mathbb{N}$ entonces como k es sobreyectiva existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $y = k((a, b))$. De esta manera, definimos

$$g(y) = b$$

Veamos que g es sobreyectiva. Sea $z \in \mathbb{N}$. Note que $k((0, z)) = m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Así, $g(m) = z$. Finalmente, sea $x \in \mathbb{N}$. Note que

$$g \circ h(x) = g(h(x)) = g(k((x, f(x)))) = f(x).$$

□

2.2.2. El semigrupo polaco $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ Ahora, la idea es dotar de una topología a este semigrupo de manera que resulte semigrupo polaco, esta topología es definida a continuación.

Definición 2.2.17. *El espacio de Baire es el conjunto $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto que resulta de dotar a \mathbb{N} de la topología discreta.*

Proposición 2.2.18. *Sea $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ y*

$$U_s = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(i) = s(i), \forall i < |s|\}.$$

La colección $\{U_s : s \in \mathbb{N}^{<\omega}\}$ es una base de abiertos-cerrados para el espacio de Baire.

Una subbase de este espacio que usaremos mucho a lo largo del escrito es dada por la siguiente proposición.

Proposición 2.2.19. Sean $x, y \in \mathbb{N}$. Defina

$$u(x, y) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(x) = y\}.$$

La colección $\{u(x, y) : x, y \in \mathbb{N}\}$ es una subbase de abiertos-cerrados para el espacio de Baire.

Proposición 2.2.20. Sea $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Se tiene que (α_i) converge a α si, y solo si, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_k(n) = \alpha(n)$ para todo $k \geq m$.

Teorema 2.2.21. El semigrupo $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \circ)$ es semigrupo polaco.

La topología mostrada anteriormente es la única topología que hace al semigrupo $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ un semigrupo polaco (ver 4).

2.3. SEMIGRUPOS INVERSOS

En esta sección presentaremos los semigrupos inversos, los cuales son algebraicamente más parecidos a los grupos.

Definición 2.3.1. Sean S un semigrupo y $x \in S$. Si existe $y \in S$ tal que $x = xyx$ y $y = yxy$ decimos que y es un inverso de x .

Definición 2.3.2. Un **semigrupo inverso** S es un semigrupo donde para cada $s \in S$ existe un único $t \in S$ tal que t es inverso de s . En este caso, denotaremos $s^{-1} = t$.

Definición 2.3.3. Sea S un semigrupo inverso. Si S es semigrupo topológico y la función $i : S \rightarrow S$, dada por $i(s) = s^{-1}$ es continua, diremos que S es un **semigrupo inverso topológico**.

El siguiente teorema es una caracterización de los semigrupos inversos ⁸.

Teorema 2.3.4. Sea S un semigrupo. La siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) S es un semigrupo inverso;

b) Cada elemento de S tiene un inverso único;

c) S es regular y sus idempotentes conmutan.

Proposición 2.3.5. Sea $x \in S$. Entonces x tiene inverso, si y solo si, x es regular.

Demostración. Note que si x tiene un inverso y , entonces $xyx = x$, así x es regular. Ahora, supongamos que x es regular. Luego existe $y \in S$ tal que $xyx = x$. Considere $x' = yxy \in S$. Note que

$$xx'x = x(yxy)x = (xyx)yx = (x)yx = xyx = x.$$

$$x'xx' = (yxy)x(yxy) = y(xyx)yxy = y(x)yxy = y(xyx)y = y(x)y = yxy = x'.$$

Por tanto, x' es inverso de x . □

Recordemos que si S es un semigrupo, $E(S)$ hace referencia al conjunto de los idempotentes de S .

Proposición 2.3.6. Sea S un semigrupo regular y $x \in S$. Si y es un inverso de x , entonces $xy, yx \in E(S)$.

El siguiente lema es de gran utilidad pues describe algunas propiedades de los idempotentes en un semigrupo inverso.

Lema 2.3.7. Sea S un semigrupo inverso.

a. Para cada $e, f \in E(S)$, si $eS = fS$, entonces $e = f$.

b. Para cada $e, f \in E(S)$, tenemos que $eS \cap fS = efS$.

c. Para cada $x \in S$, se cumple que $xS = xx^{-1}S$.

d. Para $x \in S$ y $e \in E(S)$, el elemento $f = x^{-1}ex \in E(S)$ y $ex = xf$.

Demostración. a. Sean $e, f \in E(S)$. Note que $e = e^2 \in eS = fS$. Así, existe $x \in S$ tal que $e = fx$. Entonces

$$fe = f(fx) = (ff)x = fx = e.$$

Análogamente, $ef = f$. Ahora, como S es semigrupo inverso por el Teorema 2.3.4 $e = fe = ef = f$.

b. Note que $efS \subseteq eS$. Nuevamente por el Teorema 2.3.4 $ef = fe$. Entonces $efS = feS \subseteq fS$. Por tanto, $efS \subseteq eS \cap fS$. Ahora, sea $x \in eS \cap fS$. Luego, $x = ew$ y $x = fz$ con $w, z \in S$. Así,

$$x = fz = (ff)z = f(fz) = fx = f(ew) = (fe)w.$$

Por lo que, $x \in feS = efS$. Por lo tanto, $eS \cap fS = efS$.

c. Note que $xx^{-1}S \subseteq xS$. Ahora, $xS = xx^{-1}xS \subseteq xx^{-1}S$. Luego, $xS = xx^{-1}S$.

d. Como xx^{-1} es idempotente y los idempotentes conmutan, entonces

$$f^2 = (x^{-1}ex)(x^{-1}ex) = x^{-1}e(xx^{-1})ex = (x^{-1}xx^{-1})(ee)x = x^{-1}ex = f.$$

Luego $f \in E(S)$. Además,

$$ex = e(xx^{-1}x) = e(xx^{-1})x = (xx^{-1})ex = x(x^{-1}ex) = xf.$$

□

Similarmente tenemos el resultado anterior para la multiplicación a derecha.

Lema 2.3.8. Sea S un semigrupo inverso.

a. Para cada $e, f \in E(S)$, si $Se = Sf$ entonces $e = f$.

b. Para cada $e, f \in E(S)$, tenemos que $Se \cap Sf = Sef$.

c. Para cada $x \in S$, se cumple que $Sx = Sx^{-1}x$.

d. Para $x \in S$ y $e \in E(S)$, el elemento $f = xex^{-1} \in E(S)$ y $xe = fx$.

El siguiente resultado muestra que el semigrupo $I(X)$ es universal entre los semigrupos inversos (ver ⁸).

Teorema 2.3.9. (Vagner – Preston) *Para cualquier semigrupo inverso S existe un conjunto X y un monomorfismo $\varphi : S \rightarrow I(X)$. Por tanto cualquier semigrupo inverso es isomorfo a algún subsemigrupo inverso de $I(X)$.*

Demostración. Sea $X = S$. Para cada $x \in S$ definamos $\tau_x = \lambda_x|_{x^{-1}S}$ donde $\tau_x(y) = xy$. Note que $Im(\tau_x) = x(x^{-1}S) = xS$ por el Lema 2.3.7. Veamos que $\tau_x \in I(X)$. Sean $y, z \in x^{-1}S$. Luego existen $p, q \in S$ con $y = x^{-1}p$ y $z = x^{-1}q$ tales que

$$\tau_x(y) = \tau_x(z) \Rightarrow xy = xz.$$

$$x(x^{-1}p) = x(x^{-1}q).$$

$$(x^{-1})xx^{-1}p = (x^{-1})xx^{-1}q.$$

$$(x^{-1}xx^{-1})p = (x^{-1}xx^{-1})q.$$

$$(x^{-1})p = (x^{-1})q.$$

$$y = z.$$

Luego, τ_x es inyectiva, concluimos que $\tau_x \in I(X)$. Sea $z \in dom\tau_x = x^{-1}S$. Entonces

$$\tau_x \circ \tau_{x^{-1}} \circ \tau_x(z) = \tau_x(\tau_{x^{-1}}(\tau_x(z)))$$

$$= x(x^{-1}(xz)).$$

$$= (xx^{-1}x)z.$$

$$= xz.$$

$$= \tau_x(z).$$

Sea $z \in \text{dom}\tau_{x^{-1}} = xS$. Entonces

$$\begin{aligned}\tau_{x^{-1}} \circ \tau_x \circ \tau_{x^{-1}}(z) &= \tau_{x^{-1}} \circ \tau_x \circ \tau_{x^{-1}}(z). \\ &= x^{-1}(x(x^{-1}z)). \\ &= (x^{-1}xx^{-1})z. \\ &= x^{-1}z. \\ &= \tau_{x^{-1}}(z).\end{aligned}$$

Así, $(\tau_x)^{-1} = \tau_{x^{-1}}$. Ahora, defina $\varphi : S \rightarrow I(X)$ dada por $\varphi(x) = \tau_x$. Sean $x, y \in S$ tales que

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \tau_x = \tau_y.$$

$$\text{dom}\tau_x = \text{dom}\tau_y.$$

$$x^{-1}S = y^{-1}S.$$

$$x^{-1}xS = y^{-1}yS. \quad \text{Lema 2.3.7 (c).}$$

$$x^{-1}x = y^{-1}y. \quad \text{Lema 2.3.7 (a).}$$

$$\tau_x(x^{-1}x) = \tau_y(y^{-1}y). \quad \tau_x = \tau_y.$$

$$x(x^{-1}x) = y(y^{-1}y).$$

$$x = y.$$

Luego φ es inyectiva. Ahora, sean $x, y \in S$. Luego,

$$\begin{aligned}
\text{dom}(\tau_x \circ \tau_y) &= \tau_y^{-1}(\text{Im}\tau_y \cap \text{dom}\tau_x). \\
&= \tau_y^{-1}(y(y^{-1}S) \cap x^{-1}S). \\
&= \tau_y^{-1}(yy^{-1}S \cap x^{-1}xS). && \text{Lema 2.3.7 (c).} \\
&= \tau_y^{-1}((yy^{-1})(x^{-1}x)S). && \text{Lema 2.3.7 (b).} \\
&= \tau_{y^{-1}}(yy^{-1}x^{-1}xS) && \tau_x^{-1} = \tau_{x^{-1}} \\
&= \tau_{y^{-1}}(x^{-1}xy(y^{-1}S)) && \text{Teorema 2.3.4 (c).} \\
&= \tau_{y^{-1}}(x^{-1}xy(y^{-1}yS)) && \text{Lema 2.3.7 (c).} \\
&= y^{-1}(x^{-1}xyy^{-1}yS). \\
&= y^{-1}yy^{-1}x^{-1}xyS. && \text{Teorema 2.3.4 (c).} \\
&= y^{-1}x^{-1}xyS. \\
&= (y^{-1}x^{-1})xyS. \\
&= (xy)^{-1}xyS. \\
&= (xy)^{-1}S. && \text{Lema 2.3.7 (c).} \\
&= \text{dom}(\tau_{xy}).
\end{aligned}$$

Ahora, sea $z \in \text{dom}(\tau_{xy})$. Entonces, $\tau_x \circ \tau_y(z) = xyz = \tau_{xy}(z)$. Por tanto, $\varphi(x) \circ \varphi(y) = \varphi(xy)$. Por ende, φ es monomorfismo.

□

2.3.1. El semigrupo inverso simétrico $I(\mathbb{N})$ Como mencionamos anteriormente, entre los semigrupos inversos hay uno que es universal, el cual definiremos a continuación.

Definición 2.3.10. *El semigrupo inverso simétrico en \mathbb{N} se define de la siguiente*

manera:

$$I(\mathbb{N}) = \{f : A \rightarrow B \mid A, B \subseteq \mathbb{N} \text{ y } f \text{ es biyectiva}\}.$$

Si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva denotaremos, como es usual, por $Dom(f)$ y $Im(f)$ el dominio y contradominio de f . La operación en $I(\mathbb{N})$ es la composición habitual, es decir, dadas $f, g \in I(X)$, $f \circ g$ se define haciendo

$$Dom(f \circ g) = g^{-1}(Dom(f) \cap Im(g))$$

y definiendo $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, si $x \in Dom(f \circ g)$.

Las **identidades parciales** son las funciones $1_A : A \rightarrow A$ dadas por $1_A(x) = x$ para todo $x \in A$, con $A \subseteq \mathbb{N}$. Observe que 1_\emptyset es la función vacía que también pertenece a $I(\mathbb{N})$. Las funciones 1_A son los idempotentes de $I(\mathbb{N})$. Observe que $f^{-1} \circ f = 1_{Dom(f)}$ y $f \circ f^{-1} = 1_{Im(f)}$.

El semigrupo inverso simétrico $I(\mathbb{N})$ admite una topología que lo hace semigrupo inverso polaco. En esta sección presentaremos esa topología que fue definida en ⁶, ⁴.

Definición 2.3.11. Para $x, y \in \mathbb{N}$, sea

$$v(x, y) = \{f \in I(\mathbb{N}) \mid x \in Dom(f) \text{ y } f(x) = y\},$$

$$w_1(x) = \{f \in I(\mathbb{N}) \mid x \notin Dom(f)\},$$

$$w_2(y) = \{f \in I(\mathbb{N}) \mid y \notin Im(f)\}.$$

La topología generada por estos tres conjuntos es llamada la **topología producto parcial** y será denotada por τ_{pp} .

Teorema 2.3.12. ⁶, ⁴ $(I(\mathbb{N}), \tau_{pp})$ es un semigrupo inverso polaco.

De hecho, Elliot et al. en ⁴ mostraron que esta topología es la única topología que hace al semigrupo $I(\mathbb{N})$ un semigrupo inverso polaco.

2.4. REPRESENTACIÓN DE SEMIGRUPOS

En cierto sentido cada grupo es un grupo de permutaciones, ya que cada grupo es isomorfo a un subgrupo del grupo simétrico $S_\infty(X)$ para algún conjunto X . Para grupos polacos un resulta más preciso es el siguiente:

Teorema 2.4.1. ³ *Sea G un grupo polaco. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. G es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de S_∞ .
2. G admite una base numerable de 1_G que consta de subgrupos abiertos.
3. G admite una base numerable \mathcal{B} tal que, si $U \in \mathcal{B}$ y $g \in G$, entonces $gU \in \mathcal{B}$.

Esto sugiere un pregunta similar para los semigrupos. Ya comentamos que cada semigrupo se puede ver como un subsemigrupo de X^X para algún conjunto X (ver Teorema 2.2.12). Cuando X es un espacio topológico, X^X tiene una topología de semigrupo canónica (la producto), por lo tanto es natural preguntar qué semigrupos topológicos son topológicamente isomorfos a algún subsemigrupo de X^X con la topología producto. Esta pregunta fue parcialmente resuelta por Elliott et al en ² para los semigrupos compactos.

Recordemos que un espacio topológico X es totalmente desconexo si los únicos subconjuntos conexos de X son los conjuntos unitarios. El siguiente teorema es una caracterización de los subsemigrupos compactos de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Teorema 2.4.2. ² *Sea S un semigrupo topológico compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i. S es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;
- ii. S es topológicamente isomorfo a un subsemigrupo de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;

iii. S es metrizable y totalmente desconexo.

En ², los autores mostraron que no todo semigrupo topológico numerable se puede sumergir topológicamente en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Es natural preguntarse cuáles semigrupos polacos numerables pueden sumergirse topológicamente en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ o $I(\mathbb{N})$. Por otra parte, también es interesante estudiar los subsemigrupos cerrados (polacos) de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Los subsemigrupos inversos compactos de $I(\mathbb{N})$ se caracterizan de la siguiente manera.

Teorema 2.4.3. ² *Sea S un semigrupo topológico inverso compacto. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i. S es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;

ii. S es topológicamente isomorfo a un subsemigrupo inverso de $I(\mathbb{N})$;

iii. S es metrizable y totalmente desconexo.

Otra manera de representar a los semigrupos que ha sido estudiada usa congruencias. Sea S es un semigrupo y ρ una relación de equivalencia sobre S . Diremos que ρ es una

1. **Congruencia a izquierda** si para todo $x, y, z \in S$ se tiene que

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (zx, zy) \in \rho.$$

2. **Congruencia a derecha** si para todo $x, y, z \in S$ se tiene que

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (xz, yz) \in \rho.$$

Las clases de equivalencia respecto a una relación ρ las denotaremos como se indica:

$$[m]_{\rho} = \{x \in X : (m, x) \in \rho\}.$$

2.4.1. Representación de semigrupos en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Teorema 2.4.4. ⁴

Si S es un semigrupo semitopológico a derecha T_0 , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Hay una sucesión $\{\rho_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de congruencias a izquierda de S , cada una con cantidad numerable de clases, tal que $\{[m]_{\rho_i} : m \in S, i \in \mathbb{N}\}$ es una subbase para S ;
2. Hay una sucesión $\{\sigma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de congruencias a izquierda de S , cada una con cantidad numerable de clases, tal que $\{[m]_{\sigma_i} : m \in S, i \in \mathbb{N}\}$ es una base para S ;
3. S es topológicamente isomorfo a un subsemigrupo de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (con topología producto y la composición como operación).

Demostración. Veamos que $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 3$.

($3 \Rightarrow 2$) Supongamos que S es un subsemigrupo de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Defina

$$\rho_i = \{(f, g) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(i) = g(i)\}$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Es fácil notar que, para cada $i \in \mathbb{N}$, ρ_i es relación de equivalencia. Sean $f, g, h \in S$ tales que $(f, g) \in \rho_i$ entonces

$$f(i) = g(i) \Rightarrow h(f(i)) = h(g(i)) \Rightarrow h \circ f(i) = h \circ g(i).$$

Luego, $(hf, hg) \in \rho_i$ y por tanto ρ_i es congruencia a izquierda. Ahora, para $f \in S$ tenemos que

$$[f]_{\rho_i} = \{g \in S : (f, g) \in \rho_i\} = \{g \in S : f(i) = g(i) = n\}.$$

Así, $\{[f]_{\rho_i} : f \in S\}$ es numerable para cada $i \in \mathbb{N}$. Ahora, veremos que $\{[f]_{\rho_i} : f \in S, i \in \mathbb{N}\}$ es una subbase de S . Para ello, note que

$$[f]_{\rho_i} = \{g \in S : f(i) = g(i)\} = \Pi_i^{-1}(\{f(i)\}) \cap S.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\sigma_n = \bigcap_{i \leq n} \rho_i$. Una vez más, note que σ_n es una relación de equivalencia. Sean $f, g, h \in S$ con $(f, g) \in \sigma_n$. Tenemos que para cada $i \leq n$

$$\begin{aligned} f(i) = g(i) &\Rightarrow h(f(i)) = h(g(i)). \\ &\Rightarrow h \circ f(i) = h \circ g(i). \\ &\Rightarrow (h \circ f, h \circ g) \in \sigma_n. \end{aligned}$$

Por tanto, σ_n es congruencia a izquierda. Ahora, note que

$$\begin{aligned} [f]_{\sigma_n} &= \{g \in S : g(i) = f(i) \forall i \leq n\}. \\ &= \{g \in S : g \in U_{\langle f(0), \dots, f(n) \rangle} \cap S\}. \\ &= U_{\langle f(0), \dots, f(n) \rangle} \cap S. \end{aligned}$$

Luego, $\{[f]_{\sigma_n} : f \in S\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base numerable de S .

(2 \Rightarrow 1) Esta implicación es directa de la definición de base y subbase de un espacio topológico.

(1 \Rightarrow 3) Sea $S^1 = S \cup \{1\}$ la unión disjunta topológica. Si ρ es una congruencia a izquierda en S , entonces note que $\rho \cup \{(1, 1)\}$ es congruencia a izquierda en S^1 . Así, considere $\{\sigma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de congruencias a izquierda en S cuyas clases $\{[m]_{\sigma_i} : m \in S\}_{i \in \mathbb{N}}$ forman una subbase para S . De esta manera, $\{\sigma_i \cup \{(1, 1)\}\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una familia de congruencias a izquierda en S^1 . Denotemos $\sigma'_i =$

$\sigma_i \cup \{(1, 1)\}$. Note que

$$A = \{[m]_{\sigma'_i} : m \in S^1, i \in \mathbb{N}\} = \{[m]_{\sigma_i} : m \in S, i \in \mathbb{N}\} \cup \{[(1, 1)]_{\sigma'_i} : i \in \mathbb{N}\}.$$

De esta manera, vemos que A es subbase de S^1 . De las hipótesis tenemos que A es numerable. Considere en siguiente conjunto,

$$X = \{([m]_{\sigma'_i}, i) : m \in S^1, i \in \mathbb{N}\}.$$

Veamos que S^1 es topológicamente isomorfo a un subsemigrupo de X^X con la topología producto. Note que X es numerable y defina $\varphi : S^1 \rightarrow X^X$ como sigue

$$\varphi(m)(([n]_{\sigma'_i}, i)) = ([mn]_{\sigma'_i}, i).$$

Veamos que φ está bien definida. Sean $m \in S^1$ y $(a, b) \in \sigma'_i$. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi(m)(([a]_{\sigma'_i}, i)) &= ([ma]_{\sigma'_i}, i). \\ &= ([mb]_{\sigma'_i}, i), \quad \text{pues } \sigma'_i \text{ es congruencia a izquierda.} \\ &= \varphi(m)(([b]_{\sigma'_i}, i)). \end{aligned}$$

Luego, cada clase tiene una única imagen. Veamos que φ es inyectiva. Para ello, sean $m, n \in S^1$ tales que $\varphi(m) = \varphi(n)$ entonces para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(m)(([1]_{\sigma'_i}, i)) &= \varphi(n)(([1]_{\sigma'_i}, i)). \\ \Rightarrow [m]_{\sigma'_i} &= [n]_{\sigma'_i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(m, n) \in \sigma'_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, es decir, $(m, n) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \sigma'_i$. Ahora, note

que como σ'_i es reflexiva entonces

$$\{(x, x) : x \in S^1\} \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \sigma'_i.$$

Sea $(x, y) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \sigma'_i$, es decir, para todo $i \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in \sigma'_i$. Supongamos que $x \neq y$, como $S^1 = S \cup \{1\}$ es T_0 y A es subbase, existe $m \in S^1$ tal que para algún $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $x \in [m]_{\sigma'_i}$ y $y \notin [m]_{\sigma'_i}$. Por tanto, $(x, y) \notin \sigma'_i$. Lo que contradice el hecho de que $(x, y) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \sigma'_i$. De esta manera $y = x$, por tanto,

$$\{(x, x) : x \in S^1\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \sigma'_i.$$

Así, como $(m, n) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \sigma'_i$ concluimos que $m = n$. Luego, φ es inyectiva. Veamos ahora que φ es homomorfismo. Considere $m, n, a \in S^1$ y $j \in \mathbb{N}$ luego,

$$\begin{aligned} \varphi(n) \circ \varphi(m)(([a]_{\sigma'_i}, i) &= \varphi(n)(\varphi(m)(([a]_{\sigma'_i}, i))). \\ &= \varphi(n)([ma]_{\sigma'_i}, i). \\ &= [nma]_{\sigma'_i}, i). \\ &= [(nm)a]_{\sigma'_i}, i). \\ &= \varphi(mn)([a]_{\sigma'_i}, i). \end{aligned}$$

De esta manera, φ es monomorfismo. Ahora veamos que φ es continua. Para ello, sea \mathcal{B} una subbase de X^X que consiste de los conjuntos de la siguiente forma,

$$V(\alpha, \beta) = \{f \in X^X : f(\alpha) = \beta\}.$$

Donde $\alpha, \beta \in X$. Supongamos que $V(\alpha, \beta) \in \mathcal{B}$. Note que existen $i, j \in \mathbb{N}$ y $a, b \in S^1$ tales que $\alpha = [a]_{\sigma'_i}$ y $\beta = [b]_{\sigma'_j}$. De esta manera, si $V(\alpha, \beta) \cap \varphi(S^1) = V([a]_{\sigma'_i}, [b]_{\sigma'_j}) \cap \varphi(S^1) \neq \emptyset$. Entonces existe $m \in S^1$ tal que $\varphi(m)([a]_{\sigma'_i}) = [ma]_{\sigma'_i} = [b]_{\sigma'_j}$. De manera

que $i = j$. Así,

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(V(\alpha, \beta)) &= \{m \in S^1 : \varphi(m)(\alpha) = \beta.\} \\
&= \{m \in S^1 : \varphi(m)([a]_{\sigma'_i}) = [b]_{\sigma'_i}.\} \\
&= \{m \in S^1 : [ma]_{\sigma'_i} = [b]_{\sigma'_i}.\} \\
&= \{m \in S^1 : ma \in [b]_{\sigma'_i}.\} \\
&= \{m \in S^1 : \rho_a(m) \in [b]_{\sigma'_i}.\} \\
&= \rho_a^{-1}([b]_{\sigma'_i}).
\end{aligned}$$

De esta manera, como S es semigrupo topológico y $\{1\}$ es punto aislado, tenemos que S^1 es topológico, por lo que ρ_a es continua y como $[b]_{\sigma'_i}$ es subbásico de S^1 entonces $\rho_a^{-1}([b]_{\sigma'_i})$ es abierto. Luego, φ es continua. Finalmente, veamos que φ es abierta. Sean $i \in \mathbb{N}$ y $m \in S^1$

$$\begin{aligned}
\varphi([m]_{\sigma'_i}, i) &= \{\varphi(n) : n \in [m]_{\sigma'_i}\} \\
&= \{\varphi(n) : \varphi(n)([1]_{\sigma'_i}) = [m]_{\sigma'_i}\} \\
&= V([1]_{\sigma'_i}, [m]_{\sigma'_i}) \cap S.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ es abierta y de esta manera es homeomorfismo. Por lo que S^1 es topológicamente isomorfo a un subsemigrupo de X^X , por ende también lo es S .

□

2.4.2. Representación de semigrupos en $I(\mathbb{N})$

Definición 2.4.5. Si S es un monoide inverso cuya identidad es 1_S y ρ es una congruencia a derecha, entonces decimos que ρ es **Vagner-Preston** si para cada $s \in S$, alguno de los siguientes casos se cumple

- Si $t \in [s]_\rho$ entonces $[t^{-1}t]_\rho = [1_S]_\rho$ o;

- Para todo $t \in S$ tenemos que $[ts]_\rho = [s]_\rho$.

Teorema 2.4.6. ⁴ Si S es un monoide inverso topológico T_0 , entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Existe una sucesión $\{\rho_i : i \in \mathbb{N}\}$ de congruencias a izquierda de Vagner-Preston en S , cada una con cantidad numerable de clases, tal que el conjunto

$$\{[s]_{\rho_i}, [s]_{\rho_i}^{-1} : s \in S, i \in \mathbb{N}\}$$

es una subbase para la topología en S ;

2. S es topológicamente isomorfo a un subsemigrupo inverso de $I(\mathbb{N})$ con la topología τ_{pp} ;
3. S es topológicamente isomorfo a un submonoide inverso de $I(\mathbb{N})$ con la topología τ_{pp} .

Una pregunta que naturalmente surge es como se caracterizan los subsemigrupos cerrados (polacos) de $I(\mathbb{N})$.

3. RELACIONES DE GREEN

Las relaciones de Green surgen del estudio de los ideales principales generados por los elementos de un semigrupo, estas relaciones dan información sobre la estructura del semigrupo y cómo interactúan sus elementos dependiendo de los ideales principales que estos generan. La idea con este capítulo es introducir las relaciones de Green y algunas propiedades relacionadas a éstas que seguiremos usando a lo largo del escrito. Por otro lado, la idea también es mostrar una conexión que hay entre las relaciones de Green y la continuidad automática de semigrupos, esto motivado de propiedades conocidas de las relaciones de Green y de la continuidad automática en grupos, que trata sobre las condiciones suficientes para que un homomorfismo entre grupos polacos sea automáticamente continuo (ver Teorema 3.4.1). Usaremos como referencias bibliográficas los libros ⁸ y ⁹.

3.1. PROPIEDADES BÁSICAS

Sean ρ, σ relaciones de equivalencia en S entonces definimos

$$\rho \vee \sigma = \bigcap \{ \alpha \subseteq S \times S : \alpha \text{ es relación de equivalencia y } \rho \cup \sigma \subseteq \alpha \}.$$

De la misma manera, definimos

$$\rho \wedge \sigma = \rho \cap \sigma.$$

Ahora, dadas dos relaciones de equivalencia ρ, σ sobre S tenemos que

$$\rho \circ \sigma = \{ (x, y) \in S \times S : (\exists z \in S)(x, z) \in \rho \text{ y } (z, y) \in \sigma \}.$$

La siguiente proposición muestra una conexión entre $\rho \vee \sigma$ con la composición $\rho \circ \sigma$ (Ver ⁸).

Proposición 3.1.1. *Sea S un conjunto y ρ, σ relaciones de equivalencia en S . Si $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$ entonces $\rho \vee \sigma = \rho \circ \sigma$.*

Definición 3.1.2. *Sea S un semigrupo. Definimos \mathcal{L}, \mathcal{R} y \mathcal{J} como sigue:*

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathcal{L} &\iff S^1x = S^1y, \\(x, y) \in \mathcal{R} &\iff xS^1 = yS^1, \\(x, y) \in \mathcal{J} &\iff S^1xS^1 = S^1yS^1.\end{aligned}$$

Note que si S es un semigrupo regular, entonces para cada $x \in S$ tenemos que $x = xyx$, para algún $y \in S$. De manera que $x = (xy)x \in Sx$ y $x = x(yx) \in xS$. De esta manera, para definir las relaciones de Green en un semigrupo regular podemos trabajar con S , en lugar de S^1 .

La siguiente proposición nos da otra forma de ver las relaciones de Green definidas anteriormente, la cual usaremos a lo largo del escrito. ⁸

Proposición 3.1.3. *Sea S un semigrupo, entonces*

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathcal{L} &\iff (\exists p, q \in S^1)(x = py) \wedge (y = qx), \\(x, y) \in \mathcal{R} &\iff (\exists p, q \in S^1)(x = yp) \wedge (y = xq), \\(x, y) \in \mathcal{J} &\iff (\exists p, q, r, s \in S^1)(x = pyq) \wedge (y = rxs).\end{aligned}$$

Definición 3.1.4. *Sean S un semigrupo y \mathcal{L}, \mathcal{R} las relaciones definidas anteriormente. Definimos la relaciones \mathcal{D} y \mathcal{H} por*

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{L} \cap \mathcal{R}, \\ \mathcal{D} &= \mathcal{L} \vee \mathcal{R}.\end{aligned}$$

Proposición 3.1.5. *Sea S un semigrupo, entonces $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.*

Demostración. Sea $(x, y) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$. Entonces existe $z \in S$ tal que $(x, z) \in \mathcal{L}$ y $(z, y) \in \mathcal{R}$. Según la Proposición 3.1.3, existen $p, q, r, s \in S^1$ tales que $x = pz$, $z = qx$, $z = ys$ y $y = zr$.

Sea $z' = pZR$. Entonces $xr = pZr = z'$ y $z's = pZrs = pYs = pz = x$. Así, $(x, z') \in \mathcal{R}$. Por otro lado, $py = pZr = z'$ y $qz' = qpZr = qxr = zr = y$. Luego, $(z', y) \in \mathcal{L}$. Por tanto $(x, y) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. De manera similar $\mathcal{R} \circ \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$.

□

Corolario 3.1.6. *Sea S un semigrupo, entonces $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$.*

De la Definición 3.1.4 es vemos que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}$, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{R}$, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$ y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}$. La siguiente proposición muestra que la relación de Green \mathcal{J} es la mas grande de todas respecto a la inclusión de conjuntos.

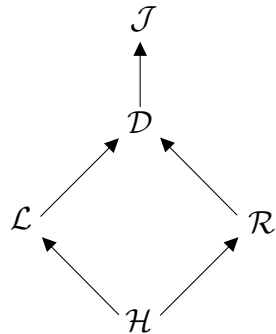
Proposición 3.1.7. *Sea S un semigrupo, entonces $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$ y $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$.*

Demostración. Sea $(x, y) \in \mathcal{L}$ entonces existen $p, q \in S^1$ tales que $x = py$ y $y = qx$. Ahora, note que como $1_S \in S^1$ cumple que para cada $w \in S^1$, $(1_S)w = w(1_S) = w$. Así, tenemos que $x = (py)1_S$ y $y = (qx)1_S$. Luego, $(x, y) \in \mathcal{J}$. Por tanto, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$. Con un argumento simétrico vemos que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$.

□

Corolario 3.1.8. *Sea S un semigrupo, entonces $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$.*

Figura 2. Diagrama de Hasse de las relaciones de Green ordenadas por inclusión



Si S es un semigrupo, una relación de equivalencia ρ sobre S es

1. **Congruencia a izquierda** si para todo $x, y, z \in S$ se tiene que

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (zx, zy) \in \rho.$$

2. **Congruencia a derecha** si para todo $x, y, z \in S$ se tiene que

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (xz, yz) \in \rho.$$

3. **Compatible** si para todo $x, y, z, t \in S$ se tiene que

$$(x, y) \in \rho \text{ y } (z, t) \in \rho \Rightarrow (xz, yt) \in \rho.$$

Proposición 3.1.9. *Sea S un semigrupo. Entonces*

1. \mathcal{L} es congruencia a derecha.
2. \mathcal{R} es congruencia a izquierda.

Si $x \in S$, denotaremos por L_x, R_x, H_x, D_x y J_x a las respectivas clases de x en cada una de las relaciones de Green definidas anteriormente.

Proposición 3.1.10. *Sea $e \in S$ un idempotente. Entonces*

1. $ex = x$ para cada $x \in R_e$.
2. $xe = x$ para cada $x \in L_e$.

Demostración. Sea $b \in L_e$ entonces $b = ye$ para algún $y \in S^1$. Así,

$$be = (ye)e = y(ee) = y(e) = b.$$

Sea $a \in R_e$ entonces $a = ex$ para algún $x \in S^1$. Luego,

$$ea = e(ex) = (ee)x = ex = a.$$

□

La siguiente proposición es útil para garantizar la existencia de idempotentes en semigrupos regulares. (Ver ⁸)

Proposición 3.1.11. *Sean S un semigrupo y $x \in S$. Si x es regular, entonces L_x y R_x contienen un idempotente.*

Como todo semigrupo inverso es un semigrupo regular, de la proposición anterior, obtenemos que en un semigrupo inverso cada \mathcal{L} -clase y cada \mathcal{R} -clase contienen un idempotente. El siguiente teorema es una caracterización de los semigrupos inversos, garantizando no solo la existencia de idempotentes en las \mathcal{L} -clases y \mathcal{R} -clases sino también su unicidad (ver ⁸).

Teorema 3.1.12. *S es un semigrupo inverso si, y solo si, cada \mathcal{L} -clase y \mathcal{R} -clase de S tienen un único idempotente.*

Si $U \subseteq S$ es un subsemigrupo de un semigrupo S , denotamos por $\mathcal{L}^U, \mathcal{R}^U, \mathcal{H}^U, \mathcal{D}^U$ y \mathcal{J}^U a las relaciones de Green de U . El siguiente teorema describe las relaciones de

Green \mathcal{L} , \mathcal{R} y \mathcal{H} de un subsemigrupo regular de S en términos de las relaciones de S (⁹).

Teorema 3.1.13. *Sea U un subsemigrupo regular de un semigrupo S . Entonces*

$$\mathcal{L}^U = \mathcal{L}^S \cap (U \times U),$$

$$\mathcal{R}^U = \mathcal{R}^S \cap (U \times U),$$

$$\mathcal{H}^U = \mathcal{H}^S \cap (U \times U).$$

Demostración. (\subseteq) Es fácil ver que $\mathcal{L}^U \subseteq \mathcal{L}^S \cap (U \times U)$, pues

$$\mathcal{L}^U = \{(x, y) \in U \times U : \exists p, q \in U^1 \text{ tales que } x = py \text{ y } y = qx\}.$$

$$\subseteq \{(x, y) \in U \times U : \exists p, q \in S^1 \text{ tales que } x = py \text{ y } y = qx\}.$$

(\supseteq) Sea $(a, b) \in \mathcal{L}^S \cap (U \times U)$, en particular $(a, b) \in U \times U$ y como U es regular, entonces a y b son regulares. Así, existen $a', b' \in U$ tales que

$$aa'a = a \text{ y } bb'b = b.$$

Considere $x = a'aa'$ y $y = b'bb'$. Por la demostración de la Proposición 2.3.5 tenemos que x es inverso de a y y es inverso de b . Ahora, note que como $x = x(ax)$ y $a = (ax)a$ entonces

$$(xa, x) \in \mathcal{L}^U \subseteq \mathcal{L}^S.$$

Como $(a, b) \in \mathcal{L}^S$, por transitividad tenemos que $(xa, yb) \in \mathcal{L}^S$. Por otro lado,

$$(xa)^2 = (xa)(xa) = (xax)a = xa.$$

$$(yb)^2 = (yb)(yb) = (yby)y = yb.$$

Luego xa y yb son idempotentes. Por la Proposición 3.1.10 xa y yb son identidades a derecha en $L_{xa}^S = L_{yb}^S$. En particular,

$$(xa)by = xa \text{ y } (yb)(xa) = yb \Rightarrow (xa, yb) \in \mathcal{L}^U.$$

Como $(a, xa), (xa, yb), (yb, b) \in \mathcal{L}^U$ entonces $(a, b) \in \mathcal{L}^U$. Por tanto, $\mathcal{L}^U = \mathcal{L}^S \cap (U \times U)$.

Con un argumento simétrico, mostramos que $\mathcal{R}^U = \mathcal{R}^S \cap (U \times U)$ y $\mathcal{H}^U = \mathcal{H}^S \cap (U \times U)$.

□

Lema 3.1.14. *Sea S un semigrupo inverso y $x, y \in S$. Entonces*

a. $(x, y) \in \mathcal{L} \iff x^{-1}x = y^{-1}y.$

b. $(x, y) \in \mathcal{R} \iff xx^{-1} = yy^{-1}.$

Demostración. Veamos que (b) se cumple:

(\Rightarrow) Sea $(x, y) \in \mathcal{R}$, de la Definición 3.1.2 tenemos que $xS^1 = yS^1$. Note que del Lema 2.3.7(c) tenemos que $xx^{-1}S^1 = xS^1 = yS^1 = yy^{-1}S^1$. De esta manera, tenemos que $xx^{-1} \in L_{yy^{-1}}$. Pero, note que de la Proposición 2.3.6 tenemos que yy^{-1} y xx^{-1} son idempotentes. Así, por el Teorema 3.1.12 obtenemos que $xx^{-1} = yy^{-1}$.

(\Leftarrow) Sean $x, y \in S$ tales que $xx^{-1} = yy^{-1}$. Luego, $xx^{-1}S = yy^{-1}S$. Ahora, note que del Lema 2.3.7(c) tenemos que $xx^{-1}S^1 = xS^1 = yS^1 = yy^{-1}S^1$. Por tanto, $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Con un argumento por simetría tenemos que (a) se cumple.

□

3.2. LEMA DE GREEN

Un resultado muy conocido al estudiar las relaciones de Green es el Lema de Green o también conocido como "egg-box". Este resultado permite movernos entre las clases de equivalencia generadas por las relaciones de Green por medio de biyecciones que preservan clases de equivalencia. El objetivo de esta sección es estudiar una versión topológica del lema de Green que es la clave para los resultados sobre continuidad automática en semigrupos, presentados en el Capítulo 3.4.

Definición 3.2.1. Sean S un semigrupo y $f : S \rightarrow S$ una función. Decimos que f **preserva \mathcal{L} -clases** si $(f(x), x) \in \mathcal{L}$ para cada $x \in S$. Análogamente, f **preserva \mathcal{R} -clases** si $(f(x), x) \in \mathcal{R}$ para cada $x \in S$.

Proposición 3.2.2. Sea S un semigrupo. Entonces, S es semigrupo inverso si y solo si cada \mathcal{L} -clase y \mathcal{R} -clase de S contiene exactamente un idempotente.

Recordemos que si $x \in S$ tenemos que $\lambda_x : S \rightarrow S$ es la función multiplicación a izquierda por x , es decir, para $s \in S$ tenemos que $\lambda_x(s) = xs$. Análogamente, $\rho_x : S \rightarrow S$ es la función multiplicación a derecha por x , es decir, si $s \in S$ entonces $\rho_x(s) = sx$. El siguiente resultado habla de estas funciones, el cual será de gran importancia en secciones posteriores y es conocido como el Lema de Green.⁸

Lema 3.2.3. (Lema de Green) Sean S un semigrupo y $x, y \in S$.

a) Si $(x, y) \in \mathcal{L}$ y $p, q \in S^1$ tales que $qy = x$ y $px = y$. Entonces:

- i. Las funciones $\lambda_p|_{R_x}$ y $\lambda_q|_{R_y}$ son biyecciones mutuamente inversas entre R_x y R_y .
- ii. $\lambda_p|_{R_x}$ y $\lambda_q|_{R_y}$ preservan \mathcal{L} -clases.
- iii. $\lambda_p|_{H_x}$ y $\lambda_q|_{H_y}$ son biyecciones mutuamente inversas entre H_x y H_y .

b) Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $p, q \in S^1$ tal que $yq = x$ y $xp = y$. Entonces:

- i. Las funciones $\rho_p|_{L_x}$ y $\rho_q|_{L_y}$ son biyecciones mutuamente inversas entre L_x y L_y .
- ii. $\rho_p|_{L_x}$ y $\rho_q|_{L_y}$ preservan \mathcal{R} -clases.
- iii. $\rho_p|_{H_x}$ y $\rho_q|_{H_y}$ son biyecciones mutuamente inversas entre H_x y H_y .

Demostración. Sea $(x, y) \in \mathcal{L}$. Luego existen $p, q \in S^1$ tales que $qy = x$ y $px = y$.

Si $z \in R_x$, entonces $(x, z) \in \mathcal{R}$. Así, de la proposición 3.1.9 $(px, pz) \in \mathcal{R}$. Es decir, $(y, pz) \in \mathcal{R}$. Luego, $pz \in R_y$. De esta manera, $\lambda_p(z) = pz \in R_y$, para cada $z \in R_x$. Por lo que $\lambda_p|_{R_x} : R_x \rightarrow R_y$. Similarmente, si $w \in R_y$, entonces $\lambda_q(w) = qw \in R_x$. Entonces, $\lambda_q|_{R_y} : R_y \rightarrow R_x$.

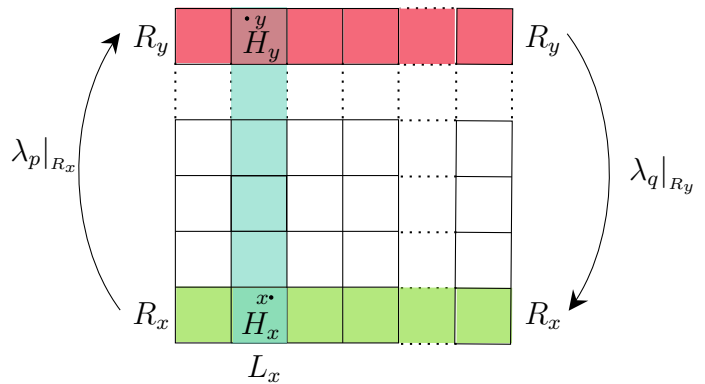
Ahora veamos que $\lambda_p|_{R_x}$ y $\lambda_q|_{R_y}$ son inyectivas. Sean $u, v \in R_x$ tales que

$$\begin{aligned} \lambda_p(u) &= \lambda_p(v). \\ pu &= pv. \\ qpu &= qpv. \end{aligned}$$

Note como $u, v \in R_x$ que existen $r, s \in S^1$ tales que $xr = u$ y $xs = v$.

De esta forma,

$$\begin{aligned} qpu &= qp(xr) = qp(xs) = qpv. \\ q(px)r &= p(qx)s. \\ qyr &= qys. \\ xr &= xs. \\ u &= v. \end{aligned}$$



Ahora, sean $z \in R_x$ y $u \in R_y$. Luego, existen $r, s \in S^1$ tales que $z = xr$ y $u = ys$. De esta manera

$$\begin{aligned}
\lambda_q|_{R_y} \circ \lambda_p|_{R_x}(z) &= qpz. & \lambda_p|_{R_x} \circ \lambda_q|_{R_y}(u) &= pq u. \\
&= qp(xr). & &= pq(ys). \\
&= qyr. & &= pxs. \\
&= xr. & &= ys. \\
&= z. & &= u.
\end{aligned}$$

De esta manera, $\lambda_q|_{R_y} \circ \lambda_p|_{R_x} = 1_{R_x}$ y $\lambda_p|_{R_x} \circ \lambda_q|_{R_y} = 1_{R_y}$. Luego, estas dos funciones son mutuamente inversas. Veamos que preservan \mathcal{L} - clases. Sea $z \in S^1$ tal que $z = \lambda_p|_{R_x}(t)$. Entonces $z = pt$ y $(\lambda_p|_{R_x})^{-1}(z) = t$. Note que como $pz = t$, entonces $t = qz$ luego $(z, t) \in \mathcal{L}$, es decir, $(t, \lambda_p|_{R_x}(t)) \in \mathcal{L}$ y $(z, \lambda_q|_{R_y}(z)) \in \mathcal{L}$. Ahora, considere $\lambda_p|_{H_x}$ note que si $z \in H_x = L_x \cap R_x$, por lo que existen $r, s \in S^1$ tales que $z = rx = xs$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lambda_p|_{H_x}(z) &= pz \\
&= p(xs) = (px)s. \\
&= ys \in R_y.
\end{aligned}$$

Como $(x, y) \in \mathcal{L}$, tenemos que $L_x = L_y$. Así, $pz = \lambda_p|_{H_x}(z) \in H_y$. Finalmente, sea $z \in H_x$, entonces existen $r, s \in S^1$ tales que $z = rx = xs$. De esta manera:

$$\begin{aligned}
\lambda_q|_{H_y} \circ \lambda_p|_{H_x}(z) &= qpz. \\
&= qp(xs). \\
&= qys. \\
&= xs. \\
&= z.
\end{aligned}$$

Luego, $\lambda_q|_{H_y} \circ \lambda_p|_{H_x} = 1_{H_x}$. Similarmente probamos que $\lambda_p|_{H_x} \circ \lambda_q|_{H_y} = 1_{H_y}$.

□

La siguiente proposición es la versión topológica del Lema de Green, lo usaremos en algunos resultados de la Sección 2.3.

Proposición 3.2.4. *Sea S un semigrupo topológico y $x, y \in S$.*

a) *Si $(x, y) \in \mathcal{L}$ y $p, q \in S^1$ tales que $qy = x$ y $px = y$. Entonces:*

i. *Las funciones $\lambda_p|_{R_x}$ y $\lambda_q|_{R_y}$ son homeomorfismos entre R_x y R_y .*

ii. *$\lambda_p|_{H_x}$ y $\lambda_q|_{H_y}$ son homeomorfismos entre H_x y H_y .*

b) *Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ y $p, q \in S^1$ tal que $yq = x$ y $xp = y$. Entonces:*

i. *Las funciones $\rho_p|_{L_x}$ y $\rho_q|_{L_y}$ son homeomorfismos entre L_x y L_y .*

ii. *$\rho_p|_{H_x}$ y $\rho_q|_{H_y}$ son homeomorfismos entre H_x y H_y .*

Demostración. Como S es semigrupo topológico, tenemos que la operación multiplicación \cdot es continua, de manera que es fácil ver que para todo $x \in S$, λ_x y ρ_x son funciones continuas. Por otro lado, si $(x, y) \in \mathcal{L}$. Del lema de Green, tenemos que si $qy = x$ y $px = y$ entonces $\lambda_p|_{R_x}$ y $\lambda_q|_{R_y}$ son biyecciones mutuamente inversas, luego $\lambda_p|_{R_x}$ y $\lambda_q|_{R_y}$ son homeomorfismos entre R_x y R_y .

□

El siguiente resultado es bien conocido (ver por ejemplo ⁸)

Teorema 3.2.5. *Sea S un semigrupo y $x \in S$. Sea H_x una \mathcal{H} -clase de S . Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) $H_x^2 \cap H_x \neq \emptyset$;

ii) H_x contiene un idempotente (es decir, existe $e \in H_x$ tal que $e^2 = e$);

iii) $H_x^2 = H_x$;

iv) H_x es un subsemigrupo de S ;

v) H_x es un subgrupo de S .

La siguiente proposición es una caracterización de las \mathcal{H} -clases que contienen idempotentes. (ver ⁸).

Proposición 3.2.6. *Los subgrupos maximales de S son justamente las \mathcal{H} -clases que tienen idempotentes.*

Corolario 3.2.7. *Una \mathcal{H} -clase contiene a lo más un idempotente.*

3.3. COMPLEJIDAD TOPOLÓGICA

En esta sección calcularemos la complejidad topológica de las relaciones de Green para un semigrupo S polaco arbitrario.

Proposición 3.3.1. *Sea S un semigrupo polaco. Entonces los siguientes conjuntos son cerrados.*

$$\mathcal{O} = \{(x, y, p, q) \in (S^1)^4 : (x = py) \wedge (y = qx)\}.$$

$$\mathcal{A} = \{(x, y, p, q) \in (S^1)^4 : (x = yp) \wedge (y = xq)\}.$$

$$\mathcal{P} = \{(x, y, p, q, r, s) \in (S^1)^6 : (x = ry) \wedge (y = sx) \wedge (x = yq) \wedge (y = xp)\}.$$

$$\mathcal{Z} = \{(x, y, z, p, q, r, s) \in (S^1)^7 : (x = rz) \wedge (z = sx) \wedge (z = yq) \wedge (y = zp)\}.$$

$$\mathcal{Q} = \{(x, y, p, q, r, s) \in (S^1)^6 : (x = ryp) \wedge (y = sxq)\}.$$

Demostración. Sean $(x_n, y_n, p_n, q_n) \in \mathcal{O}$ tal que $(x_n, y_n, p_n, q_n) \rightarrow (x, y, p, q)$. Es decir, $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y, p_n \rightarrow p$ y $q_n \rightarrow q$. Como $(x_n, y_n, p_n, q_n) \in \mathcal{O}$ sabemos que

$$x_n = p_n y_n \quad \text{y} \quad y_n = q_n x_n.$$

Pero note que $p_n y_n \rightarrow py$ y $q_n x_n \rightarrow qx$. Así, $x_n \rightarrow py$ y $y_n \rightarrow qx$. Luego, por la unicidad del límite tenemos que $x = py$ y $y = qx$. Por tanto $(x, y, p, q) \in \mathcal{O}$.

De manera análoga obtenemos que \mathcal{A} , \mathcal{P} , \mathcal{Q} y \mathcal{Z} son cerrados.

□

Proposición 3.3.2. *Si S es un semigrupo polaco, entonces todas las relaciones de Green son analíticas.*

Demostración. Sean \mathcal{O} , \mathcal{A} , \mathcal{P} , \mathcal{Z} y \mathcal{Q} los conjuntos definidos en la Proposición 3.3.1.

Así,

$$(x, y) \in \mathcal{L} \iff \exists p, q \in S^1 \text{ tal que } (x, y, p, q) \in \mathcal{O}.$$

De la Proposición 3.3.1 tenemos que \mathcal{O} es cerrado. Por tanto \mathcal{O} es boreliano de $(S^1)^4$. Ahora, note que $\mathcal{L} = \text{Proy}_{S^1 \times S^1} \mathcal{O}$. Luego \mathcal{L} es Σ_1^1 . De manera análoga podemos ver que $\mathcal{R} = \text{Proy}_{S^1 \times S^1} \mathcal{A}$, $\mathcal{H} = \text{Proy}_{S^1 \times S^1} \mathcal{P}$, $\mathcal{D} = \text{Proy}_{S^1 \times S^1} \mathcal{Z}$ y $\mathcal{J} = \text{Proy}_{S^1 \times S^1} \mathcal{Q}$. Por tanto, \mathcal{R} , \mathcal{H} , \mathcal{D} y \mathcal{J} son Σ_1^1 .

□

Corolario 3.3.3. *Si S es un semigrupo polaco y $x \in S$, entonces las clases de x bajo cada una de las relaciones de Green son analíticas.*

Demostración. Sea $x \in S$ tenemos que $L_x = \text{Proy}_{S^1} \mathcal{O}$, $R_x = \text{Proy}_{S^1} \mathcal{A}$, $L_x = \text{Proy}_{S^1} \mathcal{P}$, $D_x = \text{Proy}_{S^1} \mathcal{Z}$ y $J_x = \text{Proy}_{S^1} \mathcal{Q}$.

□

El siguiente teorema nos permite acotar la complejidad topológica de tres de las cinco relaciones de Green en cualquier semigrupo inverso Polaco.

Teorema 3.3.4. *Sea S un semigrupo inverso Polaco, entonces \mathcal{L} , \mathcal{R} y \mathcal{H} son cerradas.*

Demostración. Note que del Lema 3.1.14 tenemos que

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in S \times S : x^{-1}x = y^{-1}y\}.$$

Sea $(x_n, y_n) \in \mathcal{L}$, tal que $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. Ahora, como $(x_n, y_n) \in \mathcal{L}$, tenemos que $x_n^{-1}x_n = y_n^{-1}y_n$. Note que como $x_n \rightarrow x$ y $y_n \rightarrow y$ entonces $x_n^{-1}x_n \rightarrow x^{-1}x$ y $y_n^{-1}y_n \rightarrow y^{-1}y$. Por tanto, $x^{-1}x = y^{-1}y$. Luego, $(x, y) \in \mathcal{L}$. De manera que \mathcal{L} es cerrada.

Debido a que del Lema 3.1.14 tenemos que $\mathcal{R} = \{(x, y) \in S \times S : xx^{-1} = yy^{-1}\}$. Por un argumento por simetría al anterior obtenemos que \mathcal{R} es cerrada. Finalmente, como $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$, entonces \mathcal{H} es cerrada.

□

Tabla 3. Complejidad topológica de las relaciones de Green en un semigrupo Polaco y un semigrupo inverso Polaco

Semigrupo	Regular	Inverso	Polaco	Complejidad Topológica				
				\mathcal{L}	\mathcal{R}	\mathcal{H}	\mathcal{D}	\mathcal{J}
S	\times	\times	\checkmark	Σ_1^1	Σ_1^1	Σ_1^1	Σ_1^1	Σ_1^1
S	\times	\checkmark	\checkmark	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0	Σ_1^1	Σ_1^1

Dado que hay una similitud entre semigrupos regulares y semigrupos inversos. Una de las preguntas que nos resultó de esta sección fue si era posible acotar la complejidad topológica de las relaciones \mathcal{R} , \mathcal{L} y \mathcal{H} de un semigrupo regular, sin embargo posteriormente, mostramos ejemplos de semigrupos regulares en los cuales las dichas relaciones no son cerradas, por tanto la pregunta que nos queda es:

Pregunta 3.3.5. *¿En qué tipo de semigrupos polacos regulares las relaciones \mathcal{R} , \mathcal{L} y \mathcal{H} son cerradas?*

3.4. CONTINUIDAD AUTOMÁTICA EN SEMIGRUPOS

Una propiedad bastante conocida para grupos topológicos es la continuidad automática enunciada a continuación.

Teorema 3.4.1. *(Continuidad automática en grupos) Sean G y T grupos locales y $\varphi : G \rightarrow T$ un homomorfismo de grupos. Si φ es medible Baire, entonces φ es continua.*

Una prueba de este teorema puede ser consultada en ³. La idea de esta sección es mostrar una conexión entre las \mathcal{H} -clases de un semigrupo y la continuidad automática. Para ello, nos apoyamos en el Lema de Green y en el hecho conocido de que las \mathcal{H} -clases que contienen idempotentes resultan ser grupos (ver Teorema 3.2.5). Esta sección es una de las más importantes de esta investigación.

Dado que las relaciones de Green se definen a partir de la estructura de un semigrupo, tenemos que estas se preservan bajo homomorfismos.

Proposición 3.4.2. *Sean S, T semigrupos y $\varphi : S \rightarrow T$ homomorfismo. Sea $x \in S$ entonces*

a. $\varphi(L_x^S) = L_{\varphi(x)}^T$.

b. $\varphi(R_x^S) = R_{\varphi(x)}^T$.

c. $\varphi(H_x^S) = H_{\varphi(x)}^T$.

c. $\varphi(D_x^S) = D_{\varphi(x)}^T$.

c. $\varphi(J_x^S) = J_{\varphi(x)}^T$.

Demostración. Sea $y \in \varphi(L_x^S)$. Entonces $y = \varphi(z)$ para algún $z \in L_x^S$. Así, $(x, z) \in \mathcal{L}^S$ de manera que, existen $p, q \in S$ tales que $x = pz$ y $z = qx$. Por tanto,

$$y = \varphi(z) = \varphi(qx) = \varphi(q)\varphi(x).$$

Además, note que

$$\varphi(x) = \varphi(pz) = \varphi(p)\varphi(z) = \varphi(p)z.$$

Luego, $(y, \varphi(x)) \in \mathcal{L}^T$. Entonces $y \in L_{\varphi(x)}^T$. De manera análoga vemos las otras igualdades para el resto de relaciones de Green.

□

Ahora presentaremos condiciones suficientes para obtener una versión parcial del teorema de continuidad automática para semigrupos. El resultado principal es que la restricción de un homomorfismo Baire medible a una \mathcal{H} -clase resulta continuo (bajo ciertas condiciones).

El problema técnico que encontramos es el siguiente. Sea X un espacio polaco y $Z \subseteq X$ un subespacio de X . Si $A \subseteq X$ tiene la PB en X , ¿bajo qué condiciones $A \cap Z$ tiene la PB en Z ? Un caso especial es cuando A es Boreliano de X y Z es polaco (i.e. G_δ), la respuesta es claramente positiva. Pero no tenemos una respuesta general. Ese problema lo conseguimos al restringir un homomorfismo a una H -clase por eso introducimos el siguiente concepto.

Sean S y T semigrupos polacos. Un homomorfismo $\varphi : S \rightarrow T$ es **\mathcal{H} -localmente medible Baire**, si $\varphi|_{H_e^S}$ es medible Baire para todo idempotente e de S .

Proposición 3.4.3. *Sean S y T semigrupos polacos. Suponga que para toda \mathcal{H}^S -clase H y todo abierto $W \subseteq S$, $W \cap H$ no es nunca denso en S , siempre que $H \cap W \neq \emptyset$. Si $\varphi : S \rightarrow T$ es un homomorfismo medible Baire entre S y T , entonces φ es \mathcal{H} -localmente medible Baire.*

Demostración. Sean $\varphi : S \rightarrow T$ un homomorfismo medible Baire y $e \in E(S)$. Note que como φ es homomorfismo, entonces por la Proposición 3.4.2 tenemos que $\varphi|_{H_e^S} : H_e^S \rightarrow H_{\varphi(e)}^T$. Veamos que $\varphi|_{H_e^S}$ es medible Baire. Sea $U \subseteq H_{\varphi(e)}^T$ abierto. Queremos ver que $\varphi|_{H_e^S}^{-1}(U)$ tiene la propiedad de Baire en H_e^S . Note que $U = V \cap H_{\varphi(e)}^T$ para algún V abierto de T . Note que

$$\varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(V) \cap \varphi^{-1}(H_{\varphi(e)}^T) = \varphi^{-1}(V) \cap H_e^S.$$

Ahora, del Corolario 3.3.3 tenemos que H_e^T es analítico. Luego por el Teorema 2.1.12 sabemos que $H_{\varphi(e)}^T$ tiene la propiedad de Baire. Así, $\varphi^{-1}(U)$ tiene la propiedad de Baire en S , pues φ es medible Baire. Por tanto, existe $W \subseteq S$ abierto en S tal que $\varphi^{-1}(U) \Delta W$ es magro en S . Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una colección de conjuntos nunca densos en S tales que

$$\varphi^{-1}(U) \Delta W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Afirmamos que $\varphi^{-1}(U) \Delta (W \cap H_e^S)$ es magro en H_e^S . En efecto, note que como $\varphi^{-1}(U) \subseteq H_e^S$ entonces

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(U) \Delta (W \cap H_e^S) &= (\varphi^{-1}(U) \cap H_e^S) \Delta (W \cap H_e^S). \\ &= (\varphi^{-1}(U) \Delta W) \cap H_e^S. \\ &= \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \cap H_e^S. \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap H_e^S). \end{aligned}$$

Ahora mostraremos que $H_e^S \cap A_n$ es nunca denso en H_e^S , para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que

$$\begin{aligned} \text{cl}_{H_e^S}(H_e^S \cap A_n) &= \text{cl}_S(H_e^S \cap A_n) \cap H_e^S. \\ &\subseteq \text{cl}_S(H_e^S) \cap \text{cl}_S(A_n) \cap H_e^S. \\ &\subseteq \text{cl}_S(A_n) \cap H_e^S. \end{aligned}$$

Supongamos que $\text{int}_{H_e^S}(H_e^S \cap \text{cl}_S(A_n)) \neq \emptyset$. Es decir, existe $W \subseteq S$ abierto en S tal que $W \cap H_e^S \neq \emptyset$ y $W \cap H_e^S \subseteq \text{cl}_S(A_n) \cap H_e^S \subseteq \text{cl}_S(A_n)$. Como $\text{cl}_S(A_n)$ es nunca denso en S , entonces $W \cap H_e^S$ también es nunca denso en S , lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, $\varphi^{-1}(U) \Delta (W \cap H_e^S)$ es magro en H_e^S . Lo que implica que $\varphi^{-1}(U)$ tiene la propiedad de Baire en H_e^S y por ende $\varphi|_{H_e^S}$ es medible Baire. □

Proposición 3.4.4. *Sean S y T semigrupos polacos tal que cada \mathcal{H} -clase de S es G_δ . Entonces, todo homomorfismo medible Borel entre S y T es \mathcal{H} -localmente medible Baire.*

Demostración. Sean $\varphi : S \rightarrow T$ un homomorfismo medible Borel y $e \in E(S)$. Note que como φ es homomorfismo, entonces por la Proposición 3.4.2 tenemos que $\varphi|_{H_e^S} : H_e^S \rightarrow H_{\varphi(e)}^T$. Veamos que $\varphi|_{H_e^S}$ es medible Baire.

Sea $U \subseteq H_{\varphi(e)}^T$ abierto. Queremos ver que $\varphi|_{H_e^S}^{-1}(U)$ tiene la propiedad de Baire en H_e^S . Note que $U = V \cap H_{\varphi(e)}^T$ para algún V abierto de T . Además,

$$\varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(V) \cap H_e^S.$$

Ahora, como φ es medible Borel, entonces $\varphi^{-1}(V)$ es boreliano en X . Luego, como H_e^S es G_δ , tenemos que $\varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(V) \cap H_e^S$ es boreliano en H_e^S (ver 2.1.8) y por lo tanto tiene la propiedad de Baire en el espacio polaco H_e^S . □

Teorema 3.4.5. *Sean S y T semigrupos polacos regulares tales que toda \mathcal{H} -clase es G_δ . Sea $\varphi : S \rightarrow T$ un homomorfismo \mathcal{H} -localmente medible Baire. Entonces $\varphi|_H$ es continua, para toda \mathcal{H} -clase H en S .*

Demostración. Sea $x \in S$, luego x es regular. Así, por la Proposición 3.1.11 tenemos que existe $e \in E(S)$ tal que $e \in L_x^S$. Es decir, $(x, e) \in \mathcal{L}^S$. Luego, existen $p, q \in S^1$ tales que $e = px$ y $x = qe$. Por el Lema 3.2.3 tenemos que las funciones

$$\lambda_p|_{H_x^S} : H_x^S \rightarrow H_e^S \quad \text{y} \quad \lambda_q|_{H_e^S} : H_e^S \rightarrow H_x^S$$

son biyecciones mutuamente inversas. Ahora, como $e \in E(S)$, por el Teorema 3.2.5 tenemos que H_e^S es un grupo.

Ahora, como φ es homomorfismo y $(x, e) \in \mathcal{L}^S$, por la Proposición 3.4.2 tenemos que $(\varphi(x), \varphi(e)) \in \mathcal{L}^T$. Además, note que

$$\varphi(e) = \varphi(px) = \varphi(p)\varphi(x),$$

$$\varphi(x) = \varphi(qe) = \varphi(q)\varphi(e).$$

Luego, por el Lema 3.2.3 tenemos que las funciones

$$\lambda_{\varphi(p)}|_{H_{\varphi(x)}^T} : H_{\varphi(x)}^T \rightarrow H_{\varphi(e)}^T \quad \text{y} \quad \lambda_{\varphi(q)}|_{H_{\varphi(e)}^T} : H_{\varphi(e)}^T \rightarrow H_{\varphi(x)}^T.$$

son biyecciones mutuamente inversas. Note que si $z \in H_x^S$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\varphi(q)} \circ \varphi|_{H_e^S} \circ \lambda_p(z) &= \lambda_{\varphi(q)}(\varphi|_{H_e^S}(pz)) \\
 &= \lambda_{\varphi(q)}(\varphi(pz)) \\
 &= \varphi(q)\varphi(pz) \\
 &= \varphi(q)\varphi(p)\varphi(z) \\
 &= \lambda_{\varphi(q)} \circ \lambda_{\varphi(p)}(\varphi(z)) \\
 &= \varphi(z).
 \end{aligned}$$

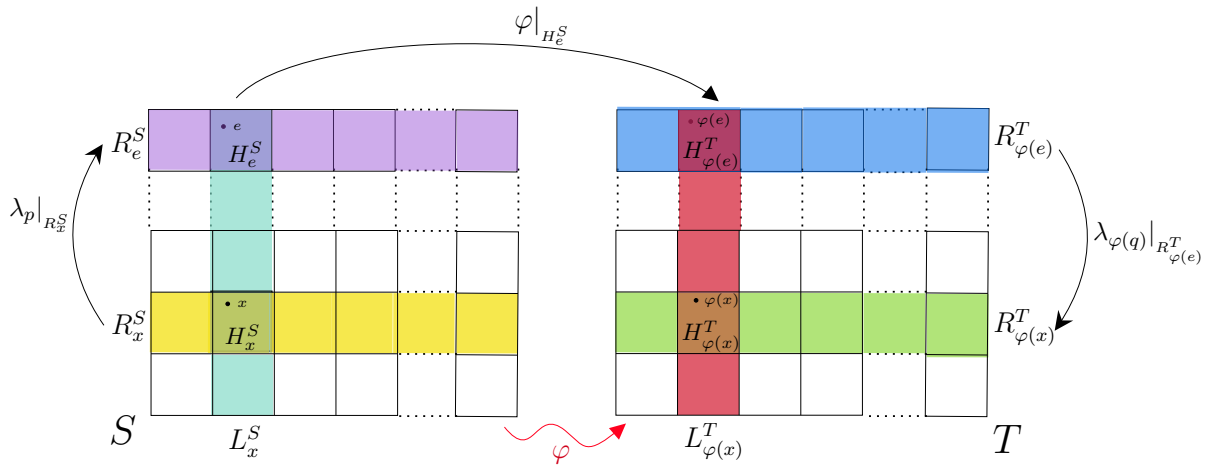
Por lo tanto,

$$\varphi|_{H_x^S}(z) = \lambda_{\varphi(q)} \circ \varphi|_{H_e^S} \circ \lambda_p(z).$$

Ahora, note que $\lambda_{\varphi(q)}$ y λ_p son continuas pues S y T son semigrupos polacos. Resta ver que $\varphi|_{H_e^S}$ es continua. Por hipótesis, φ es \mathcal{H} -localmente medible Baire, entonces $\varphi|_{H_e^S}$ es medible Baire. Finalmente, dado que H_e^S y $H_{\varphi(e)}^T$ son G_δ tenemos que ambos son grupos polacos. Luego del Teorema 3.4.1 concluimos que $\varphi|_{H_e^S}$ es continua. Por tanto, $\varphi|_H$ es continua, para toda \mathcal{H} -clase H .

□

Figura 3. Representación de la demostración del Teorema 3.4.5



Corolario 3.4.6. Sean S, T semigrupos polacos tal que cada \mathcal{H} -clase de S es G_δ . Si $\varphi : S \rightarrow T$ es un homomorfismo medible Borel, entonces $\varphi|_H$ es continua para toda \mathcal{H} -clase H en S .

Aunque el Teorema 3.4.5 resuelve la pregunta sobre las condiciones suficientes para obtener continuidad automática en las \mathcal{H} -clases de un semigrupo, surge la siguiente pregunta:

Pregunta 3.4.7. ¿Qué semigrupos cumplen con las hipótesis del Teorema 3.4.5?

Lema 3.4.8. Sean S, T semigrupos polacos y $\varphi : S \rightarrow T$ un homomorfismo. Sean $x \in S, H_x^S$ su \mathcal{H} -clase. Entonces $\varphi|_{H_x^S}$ es continua si y solo si $\varphi|_{H_x^S}$ es continua en x .

Demostración. Sean $x \in S$ y $g \in H_x^S$. Así, existen $h, j, m, n \in S^1$ tales que

$$g = hx \quad \wedge \quad g = xm \quad \wedge \quad x = jg \quad \wedge \quad x = gn.$$

Sea $U \subseteq H_{\varphi(x)}^T$ abierto tal que $\varphi(g) \in U$, es decir $\varphi(h)\varphi(x) = \varphi(hx) = \varphi(g) \in U$. Note que $\lambda_{\varphi(h)}$ es continua, pues T es semigrupo polaco. De esta manera, existe $U_1 \subseteq T$ vecindad abierta de $\varphi(x)$ tal que $\varphi(h)(U_1) \subseteq U$. Como φ es continua en x , existe B_1 una vecindad abierta de x tal que

$$\varphi(x) \in \varphi(B_1) \subseteq U_1.$$

Ahora, de la Proposición 3.2.4 tenemos que $\lambda_h|_{H_x^S}$ es abierta, entonces $\lambda_h|_{H_x^S}(B_1) = hB_1$ es vecindad abierta de g . Por tanto,

$$\varphi(g) \in \varphi(hB_1) = \varphi(h)\varphi(B_1) \subseteq \varphi(h)U_1 \subseteq U.$$

Luego, $\varphi|_{H_x^S}$ es continua.

Para la otra dirección, sabemos que si $\varphi|_{H_x^S}$ es continua entonces es continua en x .

□

4. CARACTERIZACIÓN DE LAS RELACIONES DE GREEN EN ALGUNOS SEMIGRUPOS

En este Capítulo 4 caracterizamos las relaciones de Green de $I(\mathbb{N})$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y de algunos subsemigrupos importantes de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, como el subsemigrupo $Inv(\mathbb{N})$ de las funciones inyectivas, el subsemigrupo $Sob(\mathbb{N})$ de las funciones sobreyectivas, el subsemigrupo $Mon(\mathbb{N})$ de las funciones monótonas y el subsemigrupo $FU(\mathbb{N})$ de las funciones finita a uno, es decir, aquellas donde la preimagen de cada elemento es un conjunto finito. Este último es el único semigrupo de los estudiados en esta tesis que no es polaco como subespacio de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Con esas caracterizaciones a la mano pudimos calcular la complejidad topológica de las relaciones de Green respecto a la topología polaca de cada semigrupo. Este es uno de los capítulos más importantes de nuestra investigación, pues es donde se encuentran mayormente resultados propios.

4.1. EL SEMIGRUPO INVERSO SIMÉTRICO $I(\mathbb{N})$

Proposición 4.1.1. Sean $f, g \in I(\mathbb{N})$. Entonces

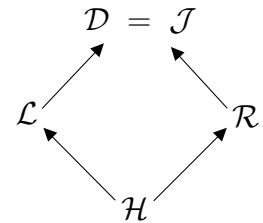
a. $(f, g) \in \mathcal{L}^{I(\mathbb{N})} \iff Dom(f) = Dom(g).$

b. $(x, y) \in \mathcal{R}^{I(\mathbb{N})} \iff Im(f) = Im(g).$

c. $(x, y) \in \mathcal{H}^{I(\mathbb{N})} \iff Dom(f) = Dom(g) \text{ y } Im(f) = Im(g).$

d. $(f, g) \in \mathcal{D}^{I(\mathbb{N})} \iff |Im(f)| = |Im(g)|.$

e. $(f, g) \in \mathcal{J}^{I(\mathbb{N})} \iff |Im(f)| = |Im(g)|.$



Demostración. a. (\Rightarrow) Sean $f, g \in I(\mathbb{N})$ tales que $(f, g) \in \mathcal{L}$. Entonces existen

$h, k \in I(\mathbb{N})$ tales que $f = h \circ g$ y $g = k \circ f$. Así, $Dom(f) = Dom(g)$.

(\Leftarrow) Sean $f, g \in I(\mathbb{N})$ tales que $Dom(f) = Dom(g)$. Considere la función $h = f \circ g^{-1}$. Note que h es biyectiva, pues f y g lo son y así $h \in I(\mathbb{N})$. Ahora, note que

$$\begin{aligned} h \circ g &= (f \circ g^{-1}) \circ g \\ &= f \circ (g^{-1} \circ g) \\ &= f \circ 1_{Dom(g)} \\ &= f \circ 1_{Dom(f)} = f. \end{aligned}$$

Análogamente, hallamos $k \in I(\mathbb{N})$ tal que $g = k \circ f$. Y por ende, $(f, g) \in \mathcal{L}$.

b. (\Rightarrow) Sean $f, g \in I(\mathbb{N})$ tales que $(f, g) \in \mathcal{R}$. Entonces existen $h, k \in I(\mathbb{N})$ tales que $f = g \circ h$ y $g = f \circ k$. De esta manera, $Im(f) \subseteq Im(g)$, y análogamente $Im(g) \subseteq Im(f)$. Por tanto, $Im(f) = Im(g)$.

(\Leftarrow) Sean $f, g \in I(\mathbb{N})$ tales que $Im(f) = Im(g)$. Considere la función $h = g^{-1} \circ f$. Note que h es biyectiva, pues f y g lo son. Así $h \in I(\mathbb{N})$. Ahora, note que

$$\begin{aligned} g \circ h &= g \circ (g^{-1} \circ f) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ f \\ &= 1_{Im(g)} \circ f \\ &= 1_{Im(f)} \circ f = f. \end{aligned}$$

Análogamente, hallamos $k \in I(\mathbb{N})$ tal que $g = f \circ k$. Y por ende, $(f, g) \in \mathcal{R}$.

c. Se sigue de a y b pues $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$.

d. (\Rightarrow) Sean $f, g \in I(\mathbb{N})$, tales que $(f, g) \in \mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$. Luego existe $h \in I(\mathbb{N})$ tal que $(f, h) \in \mathcal{L}$ y $(h, g) \in \mathcal{R}$. Luego, $Dom(f) = Dom(h)$ e $Im(h) =$

$Im(g)$. Como h es biyectiva, tenemos que $|Dom(h)| = |Im(h)|$. Luego, $|Dom(f)| = |Dom(g)|$.

(\Leftarrow) Ahora, sean $f, g \in I(\mathbb{N})$, tales que $|Dom(f)| = |Dom(g)|$. Luego, existe $j : Dom(f) \rightarrow Dom(g)$ biyectiva. Como $|Dom(f)| = |Dom(g)| = |Im(g)|$ existe $k : Dom(f) \rightarrow Im(g)$ biyectiva. Así, note que $(f, k) \in \mathcal{L}$ pues $Dom(f) = Dom(k)$ y $(k, g) \in \mathcal{R}$ pues $Im(g) = Im(k)$. Por lo tanto, $(f, g) \in \mathcal{D}$.

e. (\Rightarrow) Sea $(f, g) \in \mathcal{J}$, luego existen $h, j, k, m \in I(\mathbb{N})$ tales que

$$f = h \circ g \circ j \quad \text{y} \quad g = k \circ f \circ m.$$

Así, $|Dom(f)| \leq |Dom(j)| \leq |Dom(g)| = |Im(g)|$ y $|Dom(g)| \leq |Dom(m)| \leq |Dom(f)| = |Im(f)|$. Luego, $|Im(f)| = |Im(g)|$.

(\Leftarrow) Sean $f, g \in I(\mathbb{N})$ tales que $|Im(f)| = |Im(g)|$. Luego existe $h : Im(g) \rightarrow Im(f)$ biyectiva. Considere $k = g^{-1} \circ h^{-1} \circ f$. Note que $k \in I(\mathbb{N})$. Ahora,

$$\begin{aligned} h \circ g \circ k &= h \circ g \circ (g^{-1} \circ h^{-1} \circ f) \\ &= h \circ 1_{Im(g)} \circ h^{-1} \circ f \\ &= h \circ h^{-1} \circ f \\ &= 1_{Im(h)} \circ f = 1_{Im(f)} \circ f \\ &= f. \end{aligned}$$

Análogamente, encontramos $m, t \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tales que $g = m \circ f \circ t$. Luego, $(f, g) \in \mathcal{J}$.

□

4.1.1. Complejidad topológica de las relaciones de Green Del Teorema 3.3.4 tenemos que $\mathcal{L}^{I(\mathbb{N})}$, $\mathcal{R}^{I(\mathbb{N})}$ y $\mathcal{H}^{I(\mathbb{N})}$ son cerrados. Veamos la complejidad topológica de las otras dos relaciones.

Lema 4.1.2. *Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ finito, entonces $X(A) = \{f \in I(\mathbb{N}) : \text{Im}(f) = A\}$ es Δ_2^0 en $I(\mathbb{N})$.*

Demostración. Note que

$$\begin{aligned} X(A)' &= \{f \in I(\mathbb{N}) : A \subseteq \text{Im}(f)\} = \bigcap_{a \in A} \{f \in I(\mathbb{N}) : a \in \text{Im}(f)\}. \\ &= \bigcap_{a \in A} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} v(k, a). \end{aligned}$$

Luego, como A es finito, tenemos que $X(A)'$ es abierto en $I(\mathbb{N})$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} X(A)'' &= \{f \in I(\mathbb{N}) : \text{Im}(f) \subseteq A\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in A} \{f \in I(\mathbb{N}) : f(n) = a\}. \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in A} v(n, a). \end{aligned}$$

Luego, como A es finito, tenemos que $X(A)''$ es cerrado en $I(\mathbb{N})$. Por tanto $X(A) = X(A)' \cap X(A)''$ es Δ_2^0 en $I(\mathbb{N})$. \square

Proposición 4.1.3. $\mathcal{D}^{I(\mathbb{N})}$ y $\mathcal{J}^{I(\mathbb{N})}$ son Δ_3^0 en $I(\mathbb{N})$.

Demostración. Note que de la Proposición 4.1.1 tenemos que $\mathcal{D}^{I(\mathbb{N})} = \mathcal{J}^{I(\mathbb{N})}$. De esta manera, sabemos que

$$\begin{aligned} (f, g) \in \mathcal{D}^{I(\mathbb{N})} &\iff |\text{Im}(f)| = |\text{Im}(g)|. \\ &\iff ((\exists k \in \mathbb{N})(|\text{Im}(f)| = |\text{Im}(g)| = k)) \vee (|\text{Im}(f)| = |\text{Im}(g)| = \infty) \end{aligned}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, considere el conjunto $C_n = \{f \in I(\mathbb{N}) : |\text{Im}(f)| = n\}$. Ahora, como $[\mathbb{N}]^n = \{B \subseteq \mathbb{N} : |B| = n\}$ es numerable, fijemos una enumeración $[\mathbb{N}]^n = \{F_i^n\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} C_n &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{f \in I(\mathbb{N}) : \text{Im}(f) = F_i^n\}. \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X(F_i^n). \end{aligned}$$

Luego, como F_i es finito, del Lema 4.2.6, $X(F_i^n)$ es Δ_2^0 en $I(\mathbb{N})$. Por tanto C_n es Σ_2^0 en $I(\mathbb{N})$. Por otro lado, note que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I(\mathbb{N}) \setminus C_n = \{f \in I(\mathbb{N}) : \text{Im}(f) \text{ es infinito}\}$$

Por tanto, $\{f \in I(\mathbb{N}) : \text{Im}(f) \text{ es infinito}\}$ es Π_2^0 en $I(\mathbb{N})$. De esta manera, como

$$\mathcal{D}^{I(\mathbb{N})} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n^2 \right) \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (I(\mathbb{N}) \setminus C_n) \right)^2.$$

Entonces $\mathcal{D}^{I(\mathbb{N})}$ es la unión de un Π_2^0 y un Σ_2^0 . Por tanto, $\mathcal{D}^{I(\mathbb{N})}$ es Δ_3^0 en $I(\mathbb{N})$. □

Tabla 4. Complejidad topológica de las relaciones de Green en $I(\mathbb{N})$

Espacio	Polaco	Complejidad Topológica				
		\mathcal{L}	\mathcal{R}	\mathcal{H}	\mathcal{D}	\mathcal{J}
$I(\mathbb{N})$	✓	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0	Δ_3^0	Δ_3^0

4.2. EL SEMIGRUPO $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

En esta sección calcularemos las relaciones de Green del semigrupo $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y su complejidad topológica.

Definición 4.2.1. Sea $f \in X^X$, definimos el Kernel de f , denotado por $\text{Ker}(f)$, al

siguiente conjunto:

$$Ker(f) = \{(x, y) \in X \times X : f(x) = f(y)\}.$$

Sea $f \in X^X$ y considere \sim_f dada por

$$x \sim_f y \iff f(x) = f(y).$$

Es fácil ver que \sim_f es una relación de equivalencia en $X \times X$. Además, note que $Ker(f) = \{(x, y) : x \sim_f y\}$.

Proposición 4.2.2. Sea $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Entonces

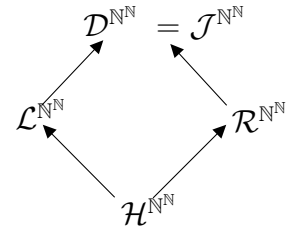
a. $(f, g) \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \iff Ker(f) = Ker(g).$

b. $(f, g) \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \iff Im(f) = Im(g).$

c. $(f, g) \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \iff Ker(f) = Ker(g) \text{ y } Im(f) = Im(g).$

d. $(f, g) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \iff |Im(f)| = |Im(g)|.$

e. $(f, g) \in \mathcal{J}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \iff |Im(f)| = |Im(g)|.$



Demostración. a. (\Rightarrow) Sean $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tales que $(f, g) \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$. Entonces existen $h, k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tales que $f = h \circ g$ y $g = k \circ f$. Así,

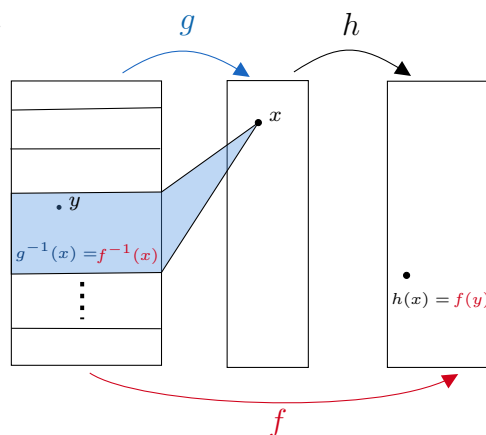
$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : f(x) = f(y)\} \\ &\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : k \circ f(x) = k \circ f(y)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : g(x) = g(y)\} \\ &= Ker(g). \end{aligned}$$

Con un argumento por simetría, obtenemos que $Ker(g) \subseteq Ker(f)$. De esta manera, $Ker(f) = Ker(g)$.

(\Leftarrow) Sean $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tales que $Ker(f) = Ker(g)$. Defina $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ como

$$h(x) = \begin{cases} f(y) & \text{si } x \in Im(g) \text{ y } y \in g^{-1}(x); \\ f(x) & \text{si } x \notin Im(g). \end{cases}$$

Veamos que h está bien definida. Sean $x, z, w \in \mathbb{N}$ tales que $x \in Im(g)$, $h(x) = z$ y $h(x) = w$. De esta manera, existen $y_1, y_2 \in g^{-1}(x)$ para los cuales $z = f(y_1)$ y $w = f(y_2)$. Entonces $g(y_1) = x = g(y_2)$. Por tanto, $(y_1, y_2) \in Ker(g) = Ker(f)$. Así, $z = f(y_1) = f(y_2) = w$.



Ahora veamos que $f = h \circ g$. Sea $x \in \mathbb{N}$. Como $g(x) \in Im(g)$, elija $y \in g^{-1}(g(x))$. Por tanto $h(g(x)) = f(y)$. Ahora, como $y \in g^{-1}(g(x))$, entonces $g(x) = g(y)$ y como $Ker(f) = Ker(g)$ tenemos que $f(x) = f(y)$. Luego, $h(g(x)) = f(x)$.

Análogamente, hallamos $k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $g = k \circ f$. Y por ende, $(f, g) \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$.

- b. (\Rightarrow) Sean $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tales que $(f, g) \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$. Entonces existen $h, k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tales que $f = g \circ h$ y $g = f \circ k$. De esta manera, como $f = g \circ h$ entonces $Im(f) \subseteq Im(g)$, de igual manera como $g = f \circ k$ tenemos que $Im(g) \subseteq Im(f)$. Por tanto, $Im(f) = Im(g)$.

(\Leftarrow) Sean $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tales que $Im(f) = Im(g)$. Defina $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ por

$$h(x) = y \quad \text{donde} \quad f(x) = g(y).$$

Note que h esta bien definida, ya que $Im(f) = Im(g)$, de ahí, para $x \in \mathbb{N}$, existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) = g(y)$. Veamos que $f = g \circ h$. Sea $x \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(y) = f(x).$$

Análogamente, definimos $k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $g = f \circ k$. Y por ende, $(f, g) \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$.

c. Se sigue de a y b pues $\mathcal{H}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} = \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \cap \mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$.

d. (\Rightarrow) Sean $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, tales que $(f, g) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} = \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \circ \mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$. Luego existe $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $(f, h) \in \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ y $(h, g) \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$. Luego, $Ker(f) = Ker(h)$ y $Im(h) = Im(g)$. Considere $j : Im(f) \rightarrow Im(g)$ dada por

$$j(x) = h(y) \quad \text{si} \quad y \in f^{-1}(x).$$

Note que j esta bien definida, pues si $x \in Im(f)$ entonces $\emptyset \neq f^{-1}(x) = h^{-1}(w)$, para algún $w \in \mathbb{N}$ ya que $Ker(f) = Ker(h)$. Veamos que j es biyectiva.

Sean $x, y \in Im(f)$ tales que $j(x) = j(y)$. Sea $z \in f^{-1}(x)$ y $w \in f^{-1}(y)$. Entonces $j(x) = h(z) = h(w) = j(y)$. Luego, $(z, w) \in Ker(h) = Ker(f)$. Por lo que, $x = f(z) = f(w) = y$.

Ahora veremos que j es sobreyectiva. Sea $y \in Im(g) = Im(h)$. Luego, existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $h(x) = y$. Note que $x \in h^{-1}(y)$ como $Ker(h) = Ker(f)$ entonces existe $z \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^{-1}(z)$. Por tanto, $j(z) = h(x) = y$.

Así, $|Im(f)| = |Im(g)|$.

(\Leftarrow) Sean $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, tales que $|Im(f)| = |Im(g)|$. Luego, existe $j : Im(f) \rightarrow Im(g)$ biyectiva. Defina $h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ por

$$h(x) = j(f(x)).$$

Note que h está bien definida pues $f(x) \in Dom(j)$. Note, además que que $Im(h) \subseteq Im(g)$. Sea $x \in Im(g)$, entonces existe $y \in Im(f)$ tal que $j(y) = x$. Como $y \in Im(f)$, existe $z \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) = y$. De esta manera, $h(z) = j(f(z)) = j(y) = x$. Por lo que, $Im(g) \subseteq Im(h)$. Así, $(h, g) \in \mathcal{R}$. Ahora,

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : f(x) = f(y)\} \\ &\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : j(f(x)) = j(f(y))\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : h(x) = h(y)\} \\ &= Ker(h). \end{aligned}$$

Por tanto, $Ker(f) \subseteq Ker(h)$. Ahora, sea $(x, y) \in Ker(h)$ entonces $h(x) = h(y)$, luego, $j(f(x)) = j(f(y))$. De esta manera, por la inyectividad de j , tenemos que $f(x) = f(y)$. Es decir, $(x, y) \in Ker(f)$. Luego $(f, h) \in \mathcal{L}$. Por tanto, $(f, g) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$.

e. (\Rightarrow) Sea $(f, g) \in \mathcal{J}$, luego existen $h, j, k, m \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tales que

$$f = h \circ g \circ j \quad \text{y} \quad g = k \circ f \circ m.$$

Así, $Im(f) \subseteq Im(h)$ y $Im(g) \subseteq Im(k)$. Supongamos que $|Im(g)| < |Im(f)|$. Como $|h(Im(g))| \leq |Im(g)|$, entonces $|h(Im(g))| < |Im(f)|$. Lo que implica que

$$|h(g(Im(j)))| \leq |h(Im(g))| < |Im(f)|.$$

Lo que contradice que $h \circ g \circ j = f$. Así, $|Im(g)| \leq |Im(f)|$. Análogamente, si suponemos que $|Im(f)| < |Im(g)|$. Llegamos a contradecir que $g = k \circ f \circ m$. Luego, $|Im(f)| = |Im(g)|$.

(\Leftarrow) Sean $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tales que $|Im(f)| = |Im(g)|$. De esta manera, $(f, g) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$. Así, de la Proposición 3.1.8 tenemos que $\mathcal{D}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \subseteq \mathcal{J}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$, entonces $(f, g) \in \mathcal{J}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$.

□

4.2.1. Complejidad topológica de las relaciones de Green

Proposición 4.2.3. *La función $Ker : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ es continua.*

Demostración. Considere $\Pi_{(n,m)} : \{0, 1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}$ dada por

$$\Pi_{(n,m)}(A) = \chi_A(n, m).$$

De esta manera, tenemos que

Ker es continua $\iff (\forall (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N})(\Pi_{(n,m)} \circ Ker : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\})$ es continua.

Note que del Lema 2.1.15 tenemos que

$(\Pi_{(n,m)} \circ Ker : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\})$ es continua $\iff \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (n, m) \in Ker(f)\}$ es abierto-cerrado.

Sea $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y considere el conjunto

$$\begin{aligned} F &= \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(n) = f(m)\} = \bigcup_k \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(n) = k\} \cap \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(m) = k\} \\ &= \bigcup_k (u(n, k) \cap u(m, k)). \end{aligned}$$

De esta manera, F es abierto. Veamos que F es cerrado.

Sea $(f_k)_k \in F$ una sucesión tal que $(f_k)_k \rightarrow f$. Luego, $f_k(n) = f_k(m)$. Luego, existen $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ tales que para cada $t \geq s_1$ y $r \geq s_2$ tenemos que $f_t(n) = f(n)$ y $f_r(m) = f(m)$. Considere $s = \max\{s_1, s_2\}$, note que para cada $t \geq s$ se tiene que

$$f_t(n) = f(n) \text{ y } f_t(m) = f(m).$$

Pero, $f_t(m) = f_t(n)$. Entonces para todo $f(m) = f(n)$. Por tanto, $f \in F$. De esta manera, Ker es continua. □

Proposición 4.2.4. $\mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ es cerrado en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Note que como Ker es continua, por el lema 4.3.4 tenemos que $\{(f, g) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : Ker(f) = Ker(g)\} = \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ es cerrado. □

Lema 4.2.5. $\mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ es G_δ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Note que

$$\begin{aligned} (f, g) \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} &\iff Im(f) = Im(g). \\ &\iff (\forall m)(m \in Im(f) \iff m \in Im(g)). \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_m &= \{(f, g) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : m \in Im(f) \iff m \in Im(g)\} \\ &= \{(f, g) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (m \in Im(f) \cap Im(g)) \vee (m \in (\mathbb{N} \setminus (Im(f) \cap Im(g)))\}. \end{aligned}$$

De esta manera, note que

$$\mathcal{O}'_m = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : m \in Im(f)\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(k) = m\} = \bigcup_k u(k, m).$$

Como cada $u(k, m)$ es abierto, tenemos que \mathcal{O}'_m también es abierto. Además, note que

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{O}'_m = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : m \notin \text{Im}(f)\}.$$

De esta manera,

$$\mathcal{O}_m = (\mathcal{O}'_m \times \mathcal{O}'_m) \cup (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{O}'_m \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{O}'_m).$$

Así \mathcal{O}_m es la unión de un abierto con un cerrado, luego, \mathcal{O}_m es Δ_2^0 . Por tanto, $\mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} = \bigcap_m \mathcal{O}_m$ es G_δ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

□

Note que como $\mathcal{H}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} = \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \cap \mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ tenemos entonces que $\mathcal{H}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ es G_δ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Lema 4.2.6. *Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, entonces*

- a. *Si A es finito, entonces $Y_A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \text{Im}(f) = A\}$ es Δ_2^0 en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*
- b. *Si A es infinito, entonces $Y_A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \text{Im}(f) = A\}$ es G_δ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Note que

$$Y'_A = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : A \subseteq \text{Im}(f)\} = \bigcap_{a \in A} \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : a \in \text{Im}(f)\}.$$

Además, como para cada $a \in A$ tenemos que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} u(k, a) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : a \in \text{Im}(f)\}$ entonces,

$$Y'_A = \bigcap_{a \in A} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} u(k, a).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} Y_A'' &= \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \text{Im}(f) \subseteq A\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in A} \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(n) = a\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in A} u(n, a). \end{aligned}$$

Caso 1 Si A es finito, entonces Y_A' es abierto y Y_A'' es cerrado. Luego, $Y_A = Y_A' \cap Y_A''$ es Δ_2^0 .

Caso 2 Si A es infinito, entonces Y_A' y Y_A'' son G_δ . Por tanto, $Y_A = Y_A' \cap Y_A''$ es G_δ .

□

Proposición 4.2.7. $\mathcal{D}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ y $\mathcal{J}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ son Δ_3^0 en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Note que

$$\begin{aligned} (f, g) \in D^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} &\iff |\text{Im}(f)| = |\text{Im}(g)|. \\ &\iff ((\exists k \in \mathbb{N})(|\text{Im}(f)| = |\text{Im}(g)| = k)) \vee (|\text{Im}(f)| = |\text{Im}(g)| = \infty) \end{aligned}$$

Considere el conjunto $C_n = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : |\text{Im}(f)| = n\}$. Ahora, como $[\mathbb{N}]^n = \{B \subseteq \mathbb{N} : |B| = n\}$ es numerable, fijemos una enumeración $[\mathbb{N}]^n = \{F_i^n\}_{i \in \mathbb{N}}$. De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} C_n &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \text{Im}(f) = F_i^n\} \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_{F_i^n}. \end{aligned}$$

Luego, como F_i^n es finito, del Lema 4.2.6, $Y_{F_i^n}$ es Δ_2^0 en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Por tanto C_n es Σ_2^0 en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Por otro lado, note que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus C_n = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \text{Im}(f) \text{ es infinito}\}$$

Por tanto, $\{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \text{Im}(f) \text{ es infinito}\}$ es Π_2^0 en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. De esta manera, como

$$\mathcal{D}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n^c \right) \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus C_n) \right)^2.$$

Luego $\mathcal{D}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ es Δ_3^0 en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

□

Tabla 5. Complejidad topológica de las relaciones de Green en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Espacio	Polaco	Complejidad Topológica				
		\mathcal{L}	\mathcal{R}	\mathcal{H}	\mathcal{D}	\mathcal{J}
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	✓	Π_1^0	G_δ	G_δ	Δ_3^0	Δ_3^0

4.3. EL SEMIGRUPO $\text{Iny}(\mathbb{N})$

Consideremos el siguiente semigrupo:

$$\text{Iny}(\mathbb{N}) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f \text{ es inyectiva}\}.$$

Proposición 4.3.1. *Los elemento regulares de $\text{Iny}(\mathbb{N})$ son las funciones biyectivas, por lo tanto $\text{Iny}(\mathbb{N})$ no es regular.*

Demostración. Sea $f \in \text{Iny}(\mathbb{N})$ regular. Mostraremos que f es biyectiva. Por la regularidad, existe $g \in \text{Iny}(\mathbb{N})$ tal que

$$f \circ g \circ f = f.$$

Ahora, como f es inyectiva, por el Lema 2.2.14, existe h sobreyectiva tal que $h \circ f = 1_{\mathbb{N}}$. De esta manera,

$$f \circ g \circ f = f \Rightarrow h \circ f \circ g \circ f = h \circ f.$$

$$1_{\mathbb{N}} \circ g \circ f = 1_{\mathbb{N}}.$$

$$g \circ f = 1_{\mathbb{N}}.$$

Entonces g es sobreyectiva. Luego, g es biyección. Así

$$f = g^{-1} \circ 1_{\mathbb{N}}.$$

Por lo que, f es biyectiva. En particular, $\text{Iny}(\mathbb{N})$ no es regular. □

Proposición 4.3.2. Sea $f, g \in \text{Iny}(\mathbb{N})$. Entonces

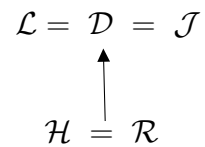
a. $(f, g) \in \mathcal{L}^{\text{Iny}} \iff |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)| = |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(g)|.$

b. $(x, y) \in \mathcal{R}^{\text{Iny}} \iff \text{Im}(f) = \text{Im}(g).$

c. $(x, y) \in \mathcal{H}^{\text{Iny}} \iff \text{Im}(f) = \text{Im}(g).$

d. $(f, g) \in \mathcal{D}^{\text{Iny}} \iff |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)| = |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(g)|.$

e. $(f, g) \in \mathcal{J}^{\text{Iny}} \iff |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)| = |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(g)|.$



Demostración. a. (\Rightarrow) Sea $(f, g) \in \mathcal{L}^{\text{Iny}}$, luego existen $h, j \in \text{Iny}(\mathbb{N})$ tales que $f = h \circ g$ y $g = j \circ f$. Note que $h(g(\mathbb{N})) = f(\mathbb{N})$ y $j(f(\mathbb{N})) = g(\mathbb{N})$. Como h, j son inyectivas, entonces

$$h(\mathbb{N} \setminus \text{Im}(g)) \subseteq \mathbb{N} \setminus \text{Im}(f).$$

$$j(\mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)) \subseteq \mathbb{N} \setminus \text{Im}(g).$$

Luego, $|\mathbb{N} \setminus \text{Im}(g)| \leq |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)|$ y $|\mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)| \leq |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(g)|$. Por tanto, $|\mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)| = |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(g)|$.

(\Leftarrow) Sean $f, g \in \text{Iny}(\mathbb{N})$ tales que $|\mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)| = |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(g)|$. Luego, existe $h_1 : \mathbb{N} \setminus \text{Im}(g) \rightarrow \mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)$ biyectiva. Defina $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como sigue

$$h(y) = \begin{cases} f(x) & \text{si } y \in \text{Im}(g) \text{ y } g(x) = y.; \\ h_1(y) & \text{si } y \notin \text{Im}(g). \end{cases}$$

Note que h esta bien definida pues g y h_1 son inyectivas. Ahora, veamos que h es inyectiva. Sean $x, y \in \mathbb{N}$, consideremos los siguientes casos

Caso 1. Si $x, y \in \text{Im}(g)$. Supongamos que $h(x) = h(y)$. Entonces, $f(x) = f(y)$.
Luego, $x = y$.

Caso 2. Si $x, y \notin \text{Im}(g)$. Supongamos que $h(x) = h(y)$. Entonces, $h_1(x) = h_1(y)$. Luego, $x = y$.

Caso 3. Si $x \in \text{Im}(g)$ y $y \notin \text{Im}(g)$. Entonces, $h(x) = f(x)$ y $h(y) = h_1(y)$.
Luego, $h(x) \neq h(y)$.

Finalmente, sea $x \in \mathbb{N}$, entonces $h \circ g(x) = h(g(x)) = f(x)$. Análogamente podemos definir $k \in \text{Iny}(\mathbb{N})$ tal que $g = k \circ f$. Por tanto, $(f, g) \in \mathcal{L}^{\text{Iny}}$.

b. (\Rightarrow) Sean $(f, g) \in \mathcal{R}^{\text{Iny}}$. Luego, existen $h, j \in \text{Iny}(\mathbb{N})$ tales que $f = g \circ h$ y $g = f \circ j$. De esta manera $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$.

(\Leftarrow) Sean $f, g \in \text{Iny}(\mathbb{N})$ tales que $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$. Defina $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como

$$h(y) = g^{-1}(f(y)).$$

Note que h esta bien definida pues $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$, además como g es inyectiva, entonces $g^{-1}(x)$ es único.

Veamos que h es inyectiva. Sean $x, y \in \mathbb{N}$ tales que $h(x) = h(y)$, entonces $g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(f(y))$. Así como g es función $f(x) = f(y)$ y por f inyectiva, tenemos que $x = y$.

Ahora mostraremos que $(f, g) \in \mathcal{R}$. Sea $x \in \mathbb{N}$ entonces

$$g \circ h(x) = g(g^{-1}(f(x))) = 1_{Im(g)} \circ f(x) = 1_{Im(f)} \circ f(x) = f(x).$$

Análogamente, definimos $k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $g = f \circ k$. Por tanto, $(f, g) \in \mathcal{R}^{Iny}$.

c. Veamos que $\mathcal{R}^{Iny} \subseteq \mathcal{L}^{Iny}$. Sea $(f, g) \in \mathcal{R}^{Iny}$. Luego $Im(f) = Im(g)$. De esta manera, $\mathbb{N} \setminus Im(f) = \mathbb{N} \setminus Im(g)$, por tanto $|\mathbb{N} \setminus Im(f)| = |\mathbb{N} \setminus Im(g)|$. Así, $(f, g) \in \mathcal{L}^{Iny}$. De esta manera, como $\mathcal{H}^{Iny} = \mathcal{L}^{Iny} \cap \mathcal{R}^{Iny}$, entonces $\mathcal{H}^{Iny} = \mathcal{R}^{Iny}$.

d. Como $\mathcal{D}^{Iny} = \mathcal{L}^{Iny} \circ \mathcal{R}^{Iny}$ y $\mathcal{R}^{Iny} \subseteq \mathcal{L}^{Iny}$, tenemos que $\mathcal{D}^{Iny} = \mathcal{L}^{Iny}$.

e. (\Rightarrow) Sean $(f, g) \in \mathcal{J}^{Iny}$. Luego existen $h, j, k, m \in Iny(\mathbb{N})$ tales que $f = h \circ g \circ j$ y $g = k \circ f \circ m$. De esta manera, $Im(f) = h(g(Im(j)))$. Entonces, como h es inyectiva

$$h(\mathbb{N} \setminus (g(Im(j)))) \subseteq \mathbb{N} \setminus Im(f).$$

Note que $g(Im(j)) \subseteq Im(g)$, de manera que $\mathbb{N} \setminus Im(g) \subseteq \mathbb{N} \setminus g(Im(j))$. Entonces,

$$h(\mathbb{N} \setminus Im(g)) \subseteq h(\mathbb{N} \setminus g(Im(j))).$$

Por tanto, $h(\mathbb{N} \setminus (Im(g))) \subseteq \mathbb{N} \setminus Im(f)$. Luego,

$$|\mathbb{N} \setminus Im(g)| = |h(\mathbb{N} \setminus Im(g))| \leq |\mathbb{N} \setminus Im(f)|.$$

Análogamente, podemos mostrar que

$$|\mathbb{N} \setminus Im(f)| = |k(\mathbb{N} \setminus Im(f))| \leq |\mathbb{N} \setminus Im(g)|.$$

Por tanto, $|\mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)| = |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(g)|$.

(\Leftarrow) Sean $f, g \in \text{Iny}(\mathbb{N})$ tales que $|\mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)| = |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(g)|$. De esta manera, $(f, g) \in \mathcal{D}^{\text{Iny}}$. Así, de la proposición 3.1.8 tenemos que $\mathcal{D}^{\text{Iny}} \subseteq \mathcal{J}^{\text{Iny}}$, entonces $(f, g) \in \mathcal{J}^{\text{Iny}}$.

□

4.3.1. Complejidad topológica de las relaciones de Green

Proposición 4.3.3. *El semigrupo $\text{Iny}(\mathbb{N})$ es cerrado en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\text{Iny}(\mathbb{N})$ tal que $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow f$. Sean $x, y \in \mathbb{N}$ tales que $f(x) = f(y)$.

Como $f_i \rightarrow f$, por la Proposición 2.2.20, existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$f_k(x) = f(x) \text{ para todo } k \geq m_0.$$

$$f_k(y) = f(y) \text{ para todo } k \geq m_1.$$

Considere $m = \text{máx}\{m_0, m_1\}$. Note que para cada $k \geq m$

$$f_k(x) = f(x) \text{ y } f_k(y) = f(y).$$

Entonces, como $f(x) = f(y)$ tenemos que

$$f_k(x) = f_k(y) \text{ para todo } k \geq m.$$

Por lo que $x = y$. Así, $f \in \text{Iny}(\mathbb{N})$.

□

Lema 4.3.4. *Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ finito, entonces el conjunto $C(A) = \{f \in \text{Iny}(\mathbb{N}) : \mathbb{N} \setminus \text{Im}(f) = A\}$ es G_δ en $\text{Iny}(\mathbb{N})$.*

Demostración. Note que

$$\begin{aligned}
C(A)' &= \{f \in \text{Iny}(\mathbb{N}) : A \subseteq \mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)\} \\
&= \bigcap_{a \in A} \{f \in \text{Iny}(\mathbb{N}) : a \notin \text{Im}(f)\} \\
&= \bigcap_{a \in A} \{f \in \text{In}(\mathbb{N}) : (\forall k \in \mathbb{N})(f(k) \neq a)\} \\
&= \bigcap_{a \in A} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (u(k, a))^c \cap \text{Iny}(\mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Donde $(u(k, a))^c$ es el complemento del abierto básico $u(k, a)$. Por tanto, $C(A)'$ es cerrado en $\text{Iny}(\mathbb{N})$. Ahora, note que

$$\begin{aligned}
C_A'' &= \{f \in \text{Iny}(\mathbb{N}) : \mathbb{N} \setminus \text{Im}(f) \subseteq A\} \\
&= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f \in \text{Iny}(\mathbb{N}) : (n \notin (\text{Im}(f))^c) \vee (n \in A)\} \\
&= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f \in \text{Iny}(\mathbb{N}) : (n \in \text{Im}(f)) \vee (n \in A)\} \\
&= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} u(k, n) \cap \text{Iny}(\mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Así, $C(A)''$ es G_δ en $\text{Iny}(\mathbb{N})$ y por tanto $C(A) = C(A)' \cap C(A)''$ es G_δ en $\text{Iny}(\mathbb{N})$.

□

Proposición 4.3.5. \mathcal{L}^{Iny} , \mathcal{D}^{Iny} y \mathcal{J}^{Iny} son Δ_4^0 en $\text{Iny}(\mathbb{N})$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
(f, g) \in \mathcal{L}^{\text{Iny}} &\iff |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)| = |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(g)| \\
&\iff (\exists n \in \mathbb{N})(|\mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)| = |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(g)| = n) \vee (|\mathbb{N} \setminus \text{Im}(f)| = |\mathbb{N} \setminus \text{Im}(g)| = \infty).
\end{aligned}$$

Considere el conjunto $Z = \{f \in \text{Iny}(\mathbb{N}) : \mathbb{N} \setminus \text{Im}(f) \text{ es finito}\}$. De esta manera

tenemos que

$$Z = \bigcup_{A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}} \{f \in \text{Iny}(\mathbb{N}) : \mathbb{N} \setminus \text{Im}(f) = A\} = \bigcup_{A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}} C_A.$$

Del Lema 4.3.4 tenemos que C_A es G_δ en $\text{Iny}(\mathbb{N})$. Por tanto Z es Σ_3^0 en $\text{Iny}(\mathbb{N})$. Ahora, considere el conjunto

$$\begin{aligned} K &= \{f \in \text{Iny}(\mathbb{N}) : \mathbb{N} \setminus \text{Im}(f) \text{ es infinito}\} \\ &= \{f \in \text{Iny}(\mathbb{N}) : (\forall m \in \mathbb{N})(\exists n > m)(n \in \mathbb{N} \setminus \text{Im}(f))\} \\ &= \{f \in \text{Iny}(\mathbb{N}) : (\forall m \in \mathbb{N})(\exists n > m)(\forall k \in \mathbb{N})(f(k) \neq n)\} \\ &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n > m} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (u(k, n))^c. \end{aligned}$$

Por tanto, K es Π_3^0 en $\text{Iny}(\mathbb{N})$. De esta manera, $\mathcal{L}^{\text{Iny}} = (Z \times Z) \cup (K \times K)$ es Δ_4^0 en $\text{Iny}(\mathbb{N})$.

□

Proposición 4.3.6. \mathcal{R}^{Iny} y \mathcal{H}^{Iny} son G_δ en $\text{Iny}(\mathbb{N})$.

Demostración. De la Proposición 4.3.2 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\text{Iny}} = \mathcal{R}^{\text{Iny}} &= \{(f, g) \in \text{Iny}(\mathbb{N}) \times \text{Iny}(\mathbb{N}) : \text{Im}(f) = \text{Im}(g)\} \\ &= \{(f, g) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \text{Im}(f) = \text{Im}(g)\} \cap (\text{Iny}(\mathbb{N}) \times \text{Iny}(\mathbb{N})) \\ &= \mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \cap (\text{Iny}(\mathbb{N}) \times \text{Iny}(\mathbb{N})). \end{aligned}$$

Por la Proposición 4.2.5, $\mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ es G_δ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Tenemos que \mathcal{R}^{Iny} es G_δ en $\text{Iny}(\mathbb{N})$.

□

Tabla 6. Complejidad topológica de las relaciones de Green en $\text{Iny}(\mathbb{N})$

Semigrupo	Polaco	Complejidad Topológica				
		\mathcal{L}	\mathcal{R}	\mathcal{H}	\mathcal{D}	\mathcal{J}
$\text{Iny}(\mathbb{N})$	✓	Δ_4^0	G_δ	G_δ	Δ_4^0	Δ_4^0

4.4. EL SEMIGRUPO $\text{Sob}(\mathbb{N})$

Consideremos el siguiente semigrupo.

$$\text{Sob}(\mathbb{N}) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f \text{ es sobreyectiva}\}.$$

Proposición 4.4.1. *El semigrupo $\text{Sob}(\mathbb{N})$ no es semigrupo regular.*

Demostración. Sea $f \in \text{Sob}(\mathbb{N})$ un elemento regular. Mostraremos que f es biyectiva y en particular, $\text{Sob}(\mathbb{N})$ no es regular. Sea $g \in \text{Sob}(\mathbb{N})$ tal que $f \circ g \circ f = f$. como f es sobreyectiva, por el Lema 2.2.14 existe h inyectiva tal que $f \circ h = 1_{\mathbb{N}}$. De esta manera,

$$\begin{aligned} f \circ g \circ f = f &\Rightarrow f \circ g \circ f \circ h = f \circ h \\ f \circ g \circ 1_{\mathbb{N}} &= 1_{\mathbb{N}} \\ f \circ g &= 1_{\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Entonces g es inyectiva. Luego, g es biyección. Por lo que existe g^{-1} biyectiva. Así $f = 1_{\mathbb{N}} \circ g^{-1}$. Por lo que, f es biyectiva. \square

La prueba de la proposición anterior es similar a la prueba de la Proposición 4.3.1. Además, podemos concluir el siguiente resultado.

Corolario 4.4.2. *Sea $f \in \text{Sob}(\mathbb{N})$ entonces f es regular si y solo si f es biyectiva.*

La siguiente definición será de utilidad para la caracterización de las relaciones de Green en $\text{Sob}(\mathbb{N})$.

Definición 4.4.3. Sean $r \in \mathbb{N}$ y $f \in \text{Sob}(\mathbb{N})$. Definimos

$$M_r^f = \{n \in \mathbb{N} : |f^{-1}(n)| = r\}$$

$$M_0^f = \{n \in \mathbb{N} : f^{-1}(n) \text{ es infinito}\}.$$

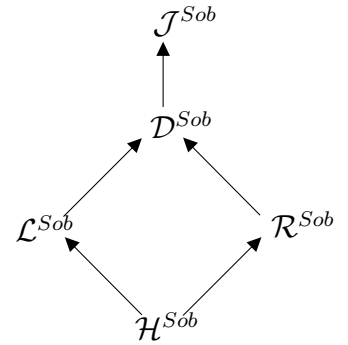
En la siguiente proposición caracterizamos las relaciones $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$ y \mathcal{D} en $\text{Sob}(\mathbb{N})$. Sin embargo, nos queda la pregunta de la caracterización de la relación \mathcal{J} en este semigrupo. Este semigrupo resalta en nuestra investigación, debido a que es el único semigrupo de los que estudiamos en donde las relaciones \mathcal{D} y \mathcal{J} no son iguales.

Teorema 4.4.4. Sea $f, g \in \text{Sob}(\mathbb{N})$. Entonces

a. $(f, g) \in \mathcal{L}^{\text{Sob}} \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(g).$

b. $(f, g) \in \mathcal{R}^{\text{Sob}} \iff \forall n \in \mathbb{N} |f^{-1}(n)| = |g^{-1}(n)|.$

c. $(f, g) \in \mathcal{D}^{\text{Sob}} \iff \forall r \in \mathbb{N} |M_r^f| = |M_r^g|.$



Demostración. a. (\Rightarrow) Sea $(f, g) \in \mathcal{L}^{\text{Sob}}$ entonces existen $h, j \in \text{Sob}(\mathbb{N})$ tales que $f = h \circ g$ y $g = j \circ f$. Note que

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : f(x) = f(y)\}. \\ &\subseteq \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : h \circ f(x) = h \circ f(y)\}. \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : g(x) = g(y)\}. \\ &= \text{Ker}(g). \end{aligned}$$

Con un argumento por simetría, obtenemos que $\text{Ker}(g) \subseteq \text{Ker}(f)$. De esta manera, $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$.

(\Leftarrow) Ahora, sean $f, g \in \text{Sob}(\mathbb{N})$ tales que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$. Defina $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

como sigue

$$h(x) = f(y) \text{ donde } y \in g^{-1}(x).$$

Note que h está bien definida, ya que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ y $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) \neq \emptyset$, pues $f, g \in \text{Sob}(\mathbb{N})$. Veamos que $h \in \text{Sob}(\mathbb{N})$. Sea $z \in \mathbb{N}$, como f es sobreyectiva, existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $f(y) = z$. Ahora, como g es función tenemos que $g(y) \in \mathbb{N}$. Considere $x = g(y)$, note que $y \in g^{-1}(g(y)) = g^{-1}(x)$. De esta manera, $h(x) = h(g(y)) = f(y) = z$. Por tanto, $h \in \text{Sob}(\mathbb{N})$.

Ahora veamos que $f = h \circ g$. Sea $x \in \mathbb{N}$. Como $g(x) \in \text{Im}(g)$, elija $y \in g^{-1}(g(x))$. Por tanto

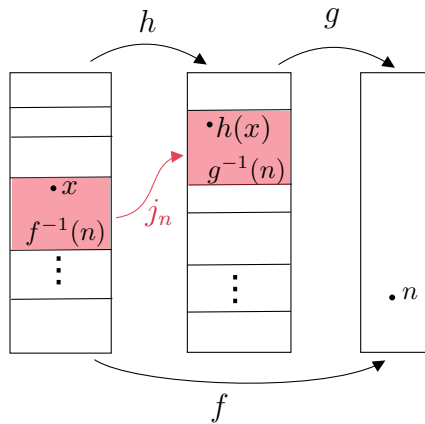
$$h \circ g(x) = h(g(x)) = f(y).$$

Como $y \in g^{-1}(g(x))$, entonces $g(x) = g(y)$, es decir, $(x, y) \in \text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ de esta manera tenemos que $f(x) = f(y)$. Luego, $h \circ g(x) = f(x)$. Análogamente, hallamos $k \in \text{Sob}(\mathbb{N})$ tal que $g = k \circ f$. Y por ende, $(f, g) \in \mathcal{L}^{\text{Sob}}$.

b. (\Rightarrow) Sean $(f, g) \in \mathcal{R}^{\text{Sob}}$, luego existen $h, k \in \text{Sob}(\mathbb{N})$ tales que $f = g \circ h$ y $g = f \circ k$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $T = f^{-1}(n)$. Como $f = g \circ h$. Entonces, $h(T) \subseteq g^{-1}(n)$. Ahora como h es sobreyectiva tenemos que $|g^{-1}(n)| \leq |f^{-1}(n)|$. Con un argumento simétrico, tenemos que $|f^{-1}(n)| \leq |g^{-1}(n)|$.

(\Leftarrow) Sean $f, g \in \text{Sob}(\mathbb{N})$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f^{-1}(n)| = |g^{-1}(n)|$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $j_n : f^{-1}(n) \rightarrow g^{-1}(n)$ biyectiva. Defina $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de la siguiente manera

$$h(x) = j_n(x) \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in f^{-1}(n).$$



Note que h está bien definida pues f es sobreyectiva. Veamos que $h \in Sob(\mathbb{N})$. Sea $z \in \mathbb{N}$, note que como $g \in Sob(\mathbb{N})$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $z \in g^{-1}(m)$. Ahora, considere j_m , como esta función es sobreyectiva, existe $x \in f^{-1}(m)$ tal que $j_m(x) = z$. De esta manera, $h(x) = j_m(x) = z$ y por tanto, $h \in Sob(\mathbb{N})$.

Finalmente, veamos que $f = g \circ h$. Sea $x \in \mathbb{N}$, y $n = f(x)$, entonces

$$g \circ h(x) = g(h(x)) = g(j_n(x)).$$

Note que $Im(j_n) = g^{-1}(n)$, lo que implica que $j_n(x) \in g^{-1}(n)$ es decir,

$$g \circ h(x) = g(h(x)) = g(j_n(x)) = n = f(x).$$

Por tanto, $f = g \circ h$.

Análogamente hallamos $k \in Sob(\mathbb{N})$ tal que $g = f \circ k$. Por lo tanto $(f, g) \in \mathcal{R}^{Sob}$.

- c. (\Rightarrow) Sean $f, g \in Sob(\mathbb{N})$ tales que $(f, g) \in \mathcal{D}^{Sob} = \mathcal{L}^{Sob} \circ \mathcal{R}^{Sob}$. Entonces existe $h \in Sob(\mathbb{N})$ tal que $(f, h) \in \mathcal{L}^{Sob}$ y $(h, g) \in \mathcal{R}^{Sob}$. Es decir,

$$Ker(f) = Ker(h) \text{ y } |h^{-1}(n)| = |g^{-1}(n)| \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Supongamos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $|M_r^f| \neq |M_r^g|$.

Caso 1. $|M_r^f| < |M_r^g|$.

Como $Ker(f) = Ker(h)$, entonces $|M_r^f| = |M_r^h|$. De esta manera $|M_r^h| < |M_r^g|$. Así, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r = |g^{-1}(n)| \neq |h^{-1}(n)|$. Lo que

contradice que $(g, h) \in \mathcal{R}^{Sob}$.

Caso 2. $|M_r^g| < |M_r^f|$.

Como $Ker(f) = Ker(h)$, entonces $|M_r^f| = |M_r^h|$. De esta manera $|M_r^g| < |M_r^h|$. Así, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $r = |g^{-1}(m)| \neq |h^{-1}(m)|$. Lo que contradice que $(g, h) \in \mathcal{R}^{Sob}$.

Por tanto, $|M_r^f| = |M_r^g|$.

(\Leftarrow) Sean $f, g \in Sob(\mathbb{N})$ tales que para todo $r \in \mathbb{N}$, $|M_r^f| = |M_r^g|$. Sea $r \in \mathbb{N}$, considere

$$A_r^f = \{f^{-1}(n) : n \in M_r^f\}.$$

Note que $|A_r^f| = |M_r^f| = |M_r^g|$. Luego existe $j_r : A_r^f \rightarrow M_r^g$ biyectiva. Defina $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como sigue

$$h(a) = j_r(f^{-1}(b)), \quad \text{si } a \in f^{-1}(b) \text{ y } |f^{-1}(b)| = r.$$

Note que h está bien definida pues como $f \in Sob(\mathbb{N})$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f^{-1}(n) \neq \emptyset$. Ahora, note que $n \in M_{|f^{-1}(n)|}^f$, por tanto $M_{|f^{-1}(n)|}^g \neq \emptyset$.

Veamos que h es sobreyectiva. Sea $z \in \mathbb{N}$ como $g \in Sob(\mathbb{N})$ existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $g(x) = z$. Luego, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $z \in M_r^g$. Ahora, como j_r es biyectiva tenemos que $j_r(f^{-1}(n)) = z$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, considere $a \in f^{-1}(n)$ note que $h(a) = z$. Así, $h \in Sob(\mathbb{N})$.

Ahora veamos que $(f, h) \in \mathcal{L}^{Sob}$. Para ello veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $r = |f^{-1}(n)|$ tenemos que

$$f^{-1}(n) = h^{-1}(j_r(f^{-1}(n))).$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Note que

$$x \in h^{-1}(j_r(f^{-1}(n))) \iff h(x) = j_r(f^{-1}(n)) \iff x \in f^{-1}(n).$$

Luego, $f^{-1}(n) = h^{-1}(j_r(f^{-1}(n)))$. Por tanto $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(h)$. Finalmente, veamos que $(g, h) \in \mathcal{R}^{\text{Sob}}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, Note que como $h \in \text{Sob}(\mathbb{N})$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = j_r(f^{-1}(m))$ donde $r = |f^{-1}(m)|$. Entonces por definición de j_r tenemos que $n \in M_r^g$. Luego, $r = |g^{-1}(n)|$. Veamos que $f^{-1}(m) = h^{-1}(n)$.

$$x \in h^{-1}(n) \iff n = h(x) = j_r(f^{-1}(m)) \iff x \in f^{-1}(m).$$

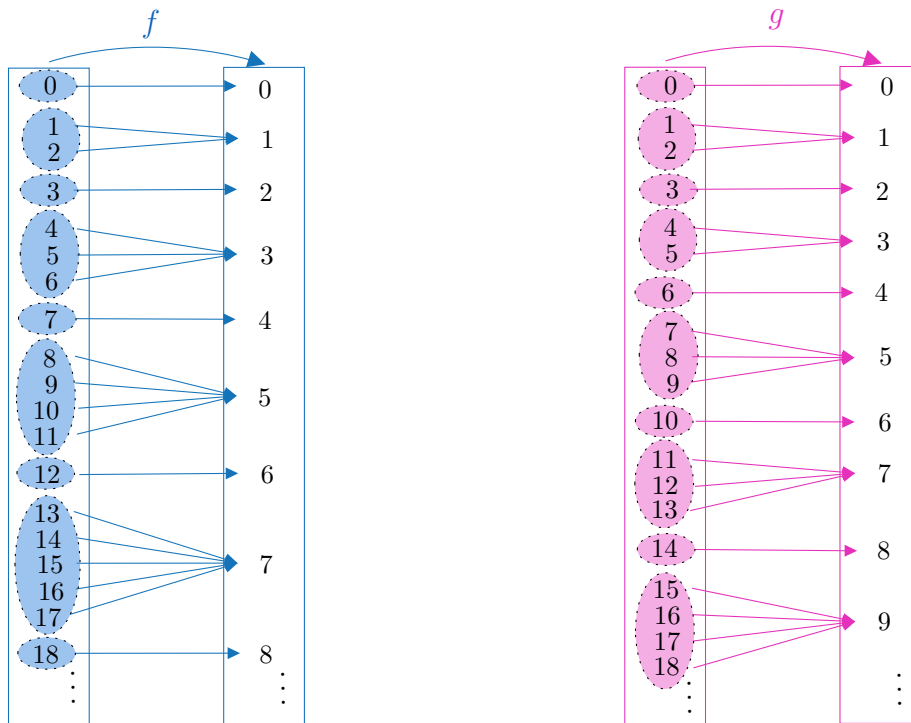
Por tanto, $|h^{-1}(n)| = |f^{-1}(m)| = |g^{-1}(n)|$. Luego, $(g, h) \in \mathcal{R}^{\text{Sob}}$.

□

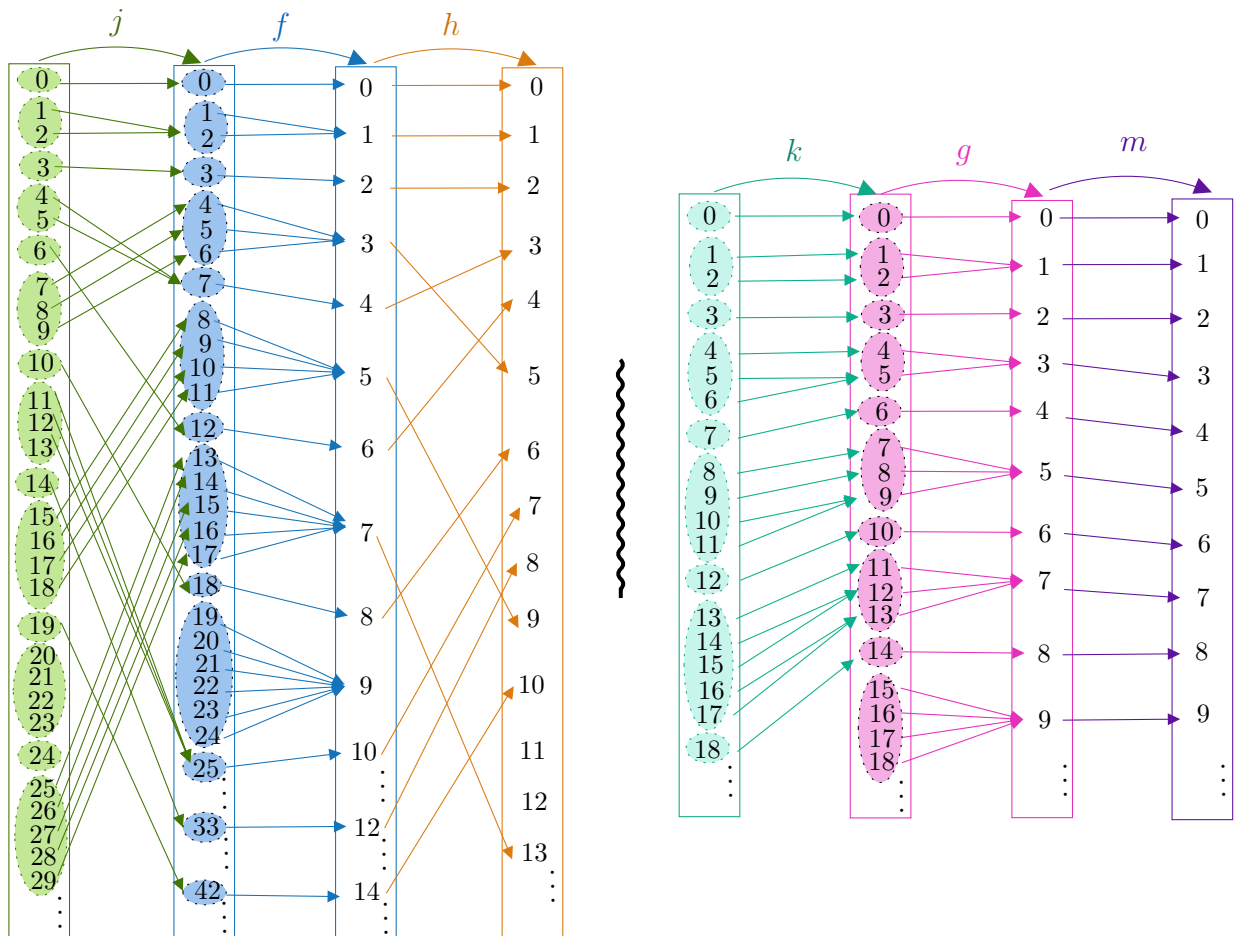
A pesar de no tener una caracterización para la relación \mathcal{J} en este semigrupo, en la siguiente proposición mostramos un ejemplo de dos funciones que no están en \mathcal{D}^{Sob} , pero si están en \mathcal{J}^{Sob} .

Proposición 4.4.5. $\mathcal{D}^{\text{Sob}} \neq \mathcal{J}^{\text{Sob}}$.

Demostración. Considere las siguientes funciones



Note que $|M_2^f| = 1 \neq 2 = |M_2^g|$. Luego $(f, g) \notin \mathcal{D}^{Sob}$. Sin embargo, observe que



De esta manera, note que $f = m \circ g \circ k$ y $g = h \circ f \circ j$. Por tanto, $(f, g) \in \mathcal{J}^{Sob}$.

□

4.4.1. Complejidad topológica de las relaciones de Green

Proposición 4.4.6. *El semigrupo $Sob(\mathbb{N})$ es un G_δ de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Note que $Sob(\mathbb{N}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in \mathbb{N}} u(a, n)$.

□

Proposición 4.4.7. \mathcal{L}^{Sob} es G_δ en $Sob(\mathbb{N})$.

Demostración. Del Teorema 4.4.4 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{Sob} &= \{(f, g) \in Sob(\mathbb{N}) \times Sob(\mathbb{N}) : Ker(f) = Ker(g)\}. \\ &= \{(f, g) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : Ker(f) = Ker(g)\} \cap (Sob(\mathbb{N}) \times Sob(\mathbb{N})). \\ &= \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \cap (Sob(\mathbb{N}) \times Sob(\mathbb{N})).\end{aligned}$$

Como $Sob(\mathbb{N})$ es G_δ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ es cerrada en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (por la Proposición 4.2.4), tenemos que \mathcal{L}^{Sob} es G_δ en $Sob(\mathbb{N})$.

□

Lema 4.4.8. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq \mathbb{N}$ finito. Entonces el conjunto

$$T(A, n) = \{f \in Sob(\mathbb{N}) : f^{-1}(n) = A\}$$

es Δ_2^0 en $Sob(\mathbb{N})$.

Demostración. Note que

$$\begin{aligned}T(A, n)^* &= \{f \in Sob(\mathbb{N}) : A \subseteq f^{-1}(n)\}. \\ &= \bigcap_{a \in A} \{f \in Sob(\mathbb{N}) : f(a) = n\} \\ &= \bigcap_{a \in A} u(a, n) \cap Sob(\mathbb{N}).\end{aligned}$$

Por tanto, como A es finito, entonces $T(A, n)^*$ es abierto en $Sob(\mathbb{N})$. Ahora, note que

$$\begin{aligned}
T(A, n)^{**} &= \{f \in Sob(\mathbb{N}) : f^{-1}(n) \subseteq A\} \\
&= \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in A} \{f \in Sob(\mathbb{N}) : (f(j) = n) \Rightarrow (j = a)\}. \\
&= \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in A} \{f \in Sob(\mathbb{N}) : (j = a) \vee (f(j) \neq n)\} \\
&= \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in A} \{f \in Sob(\mathbb{N}) : f \notin u(j, n)\} \cup \{f \in Sob(\mathbb{N}) : j = a\}. \\
&= \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{a \in A} ((u(j, n))^c \cap Sob(\mathbb{N})) \cup \{f \in Sob(\mathbb{N}) : j = a\}.
\end{aligned}$$

Así, $T(A, n)^{**}$ es cerrado en $Sob(\mathbb{N})$ y por tanto $T(A, n) = T(A, n)^* \cap T(A, n)^{**}$ es Δ_2^0 en $Sob(\mathbb{N})$.

□

Teorema 4.4.9. \mathcal{R}^{Sob} es Π_3^0 en $Sob(\mathbb{N})$.

Demostración. Sean $f, g \in Sob(\mathbb{N})$ note que

$$\begin{aligned}
(f, g) \in \mathcal{R}^{Sob} &\iff (\forall n \in \mathbb{N})(|f^{-1}(n)| = |g^{-1}(n)|). \\
&\iff (\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(|f^{-1}(n)| = |g^{-1}(n)| = k) \vee (|f^{-1}(n)| = |g^{-1}(n)| = \infty).
\end{aligned}$$

Sean $n, k \in \mathbb{N}$. Defina

$$\begin{aligned}
F(n, k) &= \{f \in Sob(\mathbb{N}) : |f^{-1}(n)| = k\}. \\
&= \bigcup_{A \in [\mathbb{N}]^k} \{f \in Sob(\mathbb{N}) : f^{-1}(n) = A\}. \\
&= \bigcup_{A \in [\mathbb{N}]^k} T(A, n).
\end{aligned}$$

De esta manera, por el Lema 4.4.8, $T(A, n)$ es Δ_2^0 en $Sob(\mathbb{N})$. Luego $F(n, k)$ es Σ_2^0

en $Sob(\mathbb{N})$. Por otro lado, sea $C(n) = \{f \in Sob(\mathbb{N}) : f^{-1}(n) \text{ es infinito}\}$, entonces

$$\begin{aligned} C(n) &= \{f \in Sob(\mathbb{N}) : (\forall m \in \mathbb{N})(\exists s > m)(m \in f^{-1}(n) \Rightarrow s \in f^{-1}(n))\}. \\ &= \{f \in Sob(\mathbb{N}) : (\forall m \in \mathbb{N})(\exists s > m)(m \notin f^{-1}(n) \vee (s \in f^{-1}(n)))\}. \\ &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{s > m} (u(s, n) \cup (u(m, n))^c) \cap Sob(\mathbb{N}). \end{aligned}$$

Entonces C_n es G_δ en $Sob(\mathbb{N})$. Finalmente, tenemos que

$$\mathcal{R}^{Sob} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (F(n, k) \times F(n, k)) \right) \cup (C(n) \times C(n)) \right).$$

Note que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (F(n, k) \times F(n, k))$ es Σ_2^0 en $Sob(\mathbb{N})$. Por tanto, \mathcal{R}^{Sob} es Π_3^0 en $Sob(\mathbb{N})$. □

Corolario 4.4.10. \mathcal{H}^{Sob} es Π_3^0 en $Sob(\mathbb{N})$.

Lema 4.4.11. Sea $r \in \mathbb{N}$ y $A \subseteq \mathbb{N}$ finito, entonces el conjunto

$$E(A, r) = \{f \in Sob(\mathbb{N}) : M_r^f = A\}$$

es Δ_3^0 en $Sob(\mathbb{N})$.

Demostración. Definamos por $E(A, r)^*$ al siguiente conjunto

$$\begin{aligned}
E(A, r)^* &= \{f \in Sob(\mathbb{N}) : A \subseteq M_r^f\}. \\
&= \bigcap_{a \in A} \{f \in Sob(\mathbb{N}) : a \in M_r^f\}. \\
&= \bigcap_{a \in A} \{f \in Sob(\mathbb{N}) : |f^{-1}(a)| = r\}. \\
&= \bigcap_{a \in A} \bigcup_{B \in [\mathbb{N}]^r} \{f \in Sob(\mathbb{N}) : f^{-1}(a) = B\}. \\
&= \bigcap_{a \in A} \bigcup_{B \in [\mathbb{N}]^r} T(B, a).
\end{aligned}$$

Del Lema 4.4.8 tenemos que $T(B, a)$ es Δ_2^0 en $Sob(\mathbb{N})$ y como A es finito entonces $E(A, r)^*$ es Σ_2^0 en $Sob(\mathbb{N})$. Ahora, sea $E(A, r)^{**} = \{f \in Sob(\mathbb{N}) : M_r^f \subseteq A\} = \{f \in Sob(\mathbb{N}) : A^c \subseteq (M_r^f)^c\}$, donde X^c es el complemento del conjunto X . Tenemos que

$$\begin{aligned}
E(A, r)^{**} &= \bigcap_{a \in A^c} \{f \in Sob : a \notin M_r^f\}. \\
&= \bigcap_{a \in A^c} \{f \in Sob : |f^{-1}(a)| \neq r\}. \\
&= \bigcap_{a \in A^c} (\{f \in Sob(\mathbb{N}) : |f^{-1}(a)| = r\})^c \\
&= \bigcap_{a \in A^c} \left(\bigcup_{B \subseteq [\mathbb{N}]^r} \{f \in Sob(\mathbb{N}) : f^{-1}(a) = B\} \right)^c \\
&= \bigcap_{a \in A^c} \left(\bigcup_{B \subseteq [\mathbb{N}]^r} T(B, a) \right)^c.
\end{aligned}$$

Así, del Lema 4.4.8 tenemos que $T(B, a)$ es Δ_2^0 en $Sob(\mathbb{N})$, entonces $E(A, r)^{**}$ es Π_2^0 en $Sob(\mathbb{N})$. Por tanto $E(A, r) = E(A, r)^* \cap E(A, r)^{**}$ es Δ_3^0 en $Sob(\mathbb{N})$. \square

Teorema 4.4.12. \mathcal{D}^{Sob} es Π_4^0 en $Sob(\mathbb{N})$.

Demostración.

$$\begin{aligned} (f, g) \in \mathcal{D}^{Sob} &\iff (\forall r \in \mathbb{N})(|M_r^f| = |M_r^g|). \\ &\iff (\forall r \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(|M_r^f| = |M_r^g| = k) \vee (|M_r^f| = |M_r^g| = \infty). \end{aligned}$$

Sean $r, k \in \mathbb{N}$. Defina

$$\begin{aligned} P_r^k &= \{f \in Sob(\mathbb{N}) : |M_r^f| = k\}. \\ &= \bigcup_{A \in [\mathbb{N}]^k} \{f \in Sob(\mathbb{N}) : M_r^f = A\}. \\ &= \bigcup_{A \in [\mathbb{N}]^k} E(A, r). \end{aligned}$$

De esta manera, del Lema 4.4.11 $E(A, r)$ es Δ_3^0 en $Sob(\mathbb{N})$ entonces P_r^k es Σ_3^0 en $Sob(\mathbb{N})$. Por otro lado, sea $Q_r = \{f \subseteq Sob(\mathbb{N}) : M_r^f \text{ es infinito}\}$ entonces

$$\begin{aligned} Q_r &= \{f \in Sob(\mathbb{N}) : (\forall m \in \mathbb{N})(\exists s > m)(m \in M_r^f \Rightarrow s \in M_r^f)\}. \\ &= \{f \in Sob(\mathbb{N}) : (\forall m \in \mathbb{N})(\exists s > m)(m \notin M_r^f \vee (s \in M_r^f))\}. \\ &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{s > m} \{f \in Sob(\mathbb{N}) : m \notin M_r^f\} \cup \{f \in Sob(\mathbb{N}) : s \in M_r^f\}. \\ &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{s > m} \left(\{f \in Sob(\mathbb{N}) : m \in M_r^f\}^c \cup \left(\bigcup_{B \in [\mathbb{N}]^r} \{f \in Sob(\mathbb{N}) : f^{-1}(s) = B\} \right) \right). \\ &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{s > m} \left(\bigcup_{B \in [\mathbb{N}]^r} \{f \in Sob(\mathbb{N}) : f^{-1}(m) = B\} \right)^c \cup \left(\bigcup_{B \in [\mathbb{N}]^r} T(B, s) \right). \\ &= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{s > m} \left(\bigcup_{B \in [\mathbb{N}]^r} T(B, m) \right)^c \cup \left(\bigcup_{B \in [\mathbb{N}]^r} T(B, s) \right) \end{aligned}$$

Del Lema 4.4.8 tenemos que $T(B, s)$ es Δ_2^0 en $Sob(\mathbb{N})$ entonces

$$Q_r = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{s > m} \left(\underbrace{\bigcup_{B \in [\mathbb{N}]^r} T(B, m)}_{\Pi_2^0} \right)^c \cup \underbrace{\left(\bigcup_{B \in [\mathbb{N}]^r} T(B, s) \right)}_{\Sigma_2^0}.$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\Delta_3^0}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\Sigma_3^0}$$

De esta manera obtenemos que Q_r es Π_4^0 en $Sob(\mathbb{N})$. Finalmente, tenemos que

$$\mathcal{D}^{Sob} = \bigcap_{r \in \mathbb{N}} \left(\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (P_r^k \times F_r^k) \right) \cup (Q_r \times Q_r) \right).$$

Por tanto, \mathcal{D}^{Sob} es Π_4^0 en $Sob(\mathbb{N})$.

□

Tabla 7. Complejidad topológica de las relaciones de Green en $Sob(\mathbb{N})$

Espacio	Polaco	Complejidad Topológica				
		\mathcal{L}	\mathcal{R}	\mathcal{H}	\mathcal{D}	\mathcal{J}
$Sob(\mathbb{N})$	✓	G_δ	Π_3^0	Π_3^0	Π_4^0	?

4.5. EL SEMIGRUPO DE FUNCIONES CRECIENTES

Considere el siguiente conjunto.

$$Mon(\mathbb{N}) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f \text{ es creciente}\}.$$

Proposición 4.5.1. *El conjunto $Mon(\mathbb{N})$ es un cerrado en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $Mon(\mathbb{N})$ con $f_k \rightarrow f$ en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Sean $n < m$ en \mathbb{N} . Entonces $f_k(n) \leq f_k(m)$ para todo k . Luego $f(n) \leq f(m)$ pues la convergencia

de f_k a f es puntual. Por lo tanto, $f \in Mon(\mathbb{N})$. □

Proposición 4.5.2. *El conjunto $Mon(\mathbb{N})$ es un subsemigrupo de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. La composición de funciones crecientes es creciente. □

Proposición 4.5.3. *El semigrupo $Mon(\mathbb{N})$ no es regular.*

Demostración. Sea $f \in Mon(\mathbb{N})$ inyectiva, tal que $f \neq 1_{\mathbb{N}}$. Supongamos que existe $g \in Mon(\mathbb{N})$ tal que $f \circ g \circ f = f$. Como f es inyectiva, por el Lema 2.2.14 existe $h \in Sob$ tal que

$$\begin{aligned} h \circ f = 1_{\mathbb{N}} &\Rightarrow h \circ f \circ g \circ f = g \circ f. \\ g \circ f &= 1_{\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Luego, $g \in Sob(\mathbb{N})$ y por tanto $g = 1_{\mathbb{N}}$. Así tenemos que

$$1_{\mathbb{N}} \circ f = 1_{\mathbb{N}} \Rightarrow f = 1_{\mathbb{N}}.$$

Lo que contradice que $f \neq 1_{\mathbb{N}}$. Así, $Mon(\mathbb{N})$ no es regular.

Proposición 4.5.4. *Sea $f, g \in Mon(\mathbb{N})$. Entonces*

a. $(f, g) \in \mathcal{L}^{Mon} \iff f = g.$

b. $(f, g) \in \mathcal{R}^{Mon} \iff f = g.$

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} = \mathcal{H} = \mathcal{R}$$

c. $(f, g) \in \mathcal{H}^{Mon} \iff f = g.$

d. $(f, g) \in \mathcal{D}^{Mon} \iff f = g.$

e. $(f, g) \in \mathcal{J}^{Mon} \iff f = g.$

Demostración. Para ello veamos e.

(\Rightarrow) $(f, g) \in \mathcal{J}^{Mon}$. Luego existen $h, j, k, m \in Mon(\mathbb{N})$ tales que $f = h \circ g \circ j$ y $g = k \circ f \circ m$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $n \leq m(n)$. Así, $n \leq f(n) \leq f(m(n))$. Por tanto,

$$f(n) \leq k(f(n)) \leq k(f(m(n))) = g(n).$$

De esta manera, $f(n) \leq g(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Análogamente obtenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ $g(n) \leq f(n)$. Así, $f = g$.

(\Leftarrow) Sea $f \in Mon(\mathbb{N})$. Como J^{Mon} es reflexiva tenemos que $(f, f) \in J^{Mon}$.

De esta manera como J^{Mon} contiene a todas las relaciones de Green obtenemos a, b, c y d . □

4.5.1. Complejidad topológica de las relaciones de Green

Corolario 4.5.5. \mathcal{L}^{Mon} es cerrado en $Mon(\mathbb{N})$.

Demostración. Note que

$$\mathcal{L}^{Mon} = \{(f, f) : f \in Mon(\mathbb{N})\}.$$

Como $Mon(\mathbb{N})$ es Hausdorff, tenemos $\{(f, f) : f \in Mon(\mathbb{N})\}$ es cerrado, entonces \mathcal{L}^{Mon} es cerrado. □

Tabla 8. Complejidad topológica de las relaciones de Green en $Mon(\mathbb{N})$

Espacio	Polaco	Complejidad Topológica				
		\mathcal{L}	\mathcal{R}	\mathcal{H}	\mathcal{D}	\mathcal{J}
$Mon(\mathbb{N})$	✓	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0	Π_1^0

4.6. EL SEMIGRUPO DE FUNCIONES FINITA-A-UNO

Considere ahora el conjunto

$$FU(\mathbb{N}) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : (\forall x \in \mathbb{N})(f^{-1}(x) \text{ es finito})\}.$$

Proposición 4.6.1. *El conjunto $FU(\mathbb{N})$ es un subsemigrupo Π_3^0 de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sean $f, g \in FU(\mathbb{N})$ entonces

$$(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x) = g^{-1}(f^{-1}(x))$$

Como $g^{-1}(f^{-1}(x))$ es finito, entonces $f \circ g \in FU(\mathbb{N})$. Ahora, observe que $K_x = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f^{-1}(x) \text{ es finito}\}$ es F_σ para todo $x \in \mathbb{N}$. Por tanto, $FU(\mathbb{N}) = \bigcap_{x \in \mathbb{N}} K_x$ es Π_3^0 en $FU(\mathbb{N})$.

□

Proposición 4.6.2. *El semigrupo $FU(\mathbb{N})$ es regular.*

Demostración. Sea $f \in FU(\mathbb{N})$, veamos que f es regular. Considere $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{si } y \in \text{Im}(f) \text{ y } x = \text{mín}[f^{-1}(y)]; \\ y & \text{si } y \notin \text{Im}(f). \end{cases}$$

Veamos que $g \in FU(\mathbb{N})$. Para ello sea $x \in \mathbb{N}$ y sea $z \in g^{-1}(x)$ entonces consideraremos dos casos.

Caso 1. Si $z \in \text{Im}(f)$. Luego existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $f(y) = z$. Note que

$$g(z) = x = \text{mín}[f^{-1}(z)] \Rightarrow x \in f^{-1}(z) \Rightarrow f(x) = z.$$

Caso 2. Si $x \notin \text{Im}(f)$. Note que $g(z) = z = x$.

De lo anterior tenemos que $g^{-1}(x) \subseteq \{x, f(x)\}$. Luego, $g \in FU(\mathbb{N})$.

Finalmente, veamos que $f \circ g \circ f = f$. Sea $x \in \mathbb{N}$, entonces

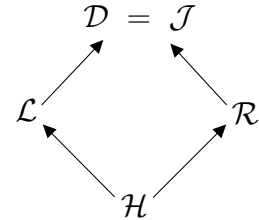
$$\begin{aligned} f \circ g \circ f(x) &= f(g(f(x))). \\ &= f(y) \quad \text{tal que } y = \text{mín}[f^{-1}(f(x))] \Rightarrow y \in f^{-1}(f(x)). \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Por tanto f es regular.

□

Proposición 4.6.3. Sea $f, g \in FU(\mathbb{N})$. Entonces

- a. $(f, g) \in \mathcal{L}^{FU} \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$.
- b. $(f, g) \in \mathcal{R}^{FU} \iff \text{Im}(f) = \text{Im}(g)$.
- c. $(f, g) \in \mathcal{H}^{FU} \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(g) \text{ y } \text{Im}(f) = \text{Im}(g)$.
- d. $(f, g) \in \mathcal{D}^{FU} \iff (f, g) \in FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})$.
- e. $(f, g) \in \mathcal{J}^{FU} \iff (f, g) \in FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})$.



Demostración. Note que como $FU(\mathbb{N})$ es semigrupo regular, del Teorema 3.1.13 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{FU(\mathbb{N})} &= \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \cap (FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})), \\ \mathcal{R}^{FU(\mathbb{N})} &= \mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \cap (FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})), \\ \mathcal{H}^{FU(\mathbb{N})} &= \mathcal{H}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \cap (FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})). \end{aligned}$$

De esta manera tenemos que

$$\mathcal{L}^{FU(\mathbb{N})} = \{(f, g) \in FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N}) : Ker(f) = Ker(g)\},$$

$$\mathcal{R}^{FU(\mathbb{N})} = \{(f, g) \in FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N}) : Im(f) = Im(g)\},$$

$$\mathcal{H}^{FU(\mathbb{N})} = \{(f, g) \in FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N}) : Ker(f) = Ker(g) \text{ y } Im(f) = Im(g)\}.$$

Así, hemos probado a, b y c.

d. (\Rightarrow) Obviamente $\mathcal{D}^{FU} \subseteq FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})$.

(\Leftarrow) Sean $f, g \in FU(\mathbb{N})$. Luego $X = \{f^{-1}(x) : x \in \mathbb{N}\}$ es infinito numerable y $Im(g)$ es un subconjunto infinito de \mathbb{N} . Así, existe $j : X \rightarrow Im(g)$ biyectiva. Defina $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ como sigue

$$h(x) = j(f^{-1}(y)) \text{ si } x \in f^{-1}(y).$$

Es fácil notar que h está bien definida.

Ahora, veamos que $h \in FU(\mathbb{N})$. Sea $z \in \mathbb{N}$ y $h(x) = z$. Entonces $z = j(f^{-1}(f(x)))$. Así $h^{-1}(z) = f^{-1}(x)$.

Por otro lado, sea $z \in \mathbb{N}$ note que

$$x \in h^{-1}(z) \iff h(x) = z = j(f^{-1}(y)) \iff x \in f^{-1}(y).$$

Por tanto, $Ker(f) = Ker(h)$, es decir, $(f, h) \in \mathcal{L}^{FU}$.

Finalmente, claramente $Im(h) \subseteq Im(j) = Im(g)$. Por otra parte, sea $z \in Im(g)$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $z = j(f^{-1}(k))$ pues j es biyección. Luego, sea $x \in f^{-1}(k)$ entonces $h(x) = z$. Por tanto, $z \in Im(h)$. Así, $Im(g) = Im(h)$, es decir, $(f, h) \in \mathcal{R}^{FU}$. Luego, $(f, h) \in \mathcal{D}^{FU}$.

e. Note que $FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N}) = \mathcal{D}^{FU} \subseteq \mathcal{J}^{FU} \subseteq FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})$. Por tanto, $\mathcal{J}^{FU} =$

$$FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N}).$$

□

4.6.1. Complejidad topológica de las relaciones de Green

Teorema 4.6.4. \mathcal{L}^{FU} , \mathcal{D}^{FU} y \mathcal{J}^{FU} son Π_1^0 en FU y \mathcal{R}^{FU} , \mathcal{H}^{FU} son G_δ en FU .

Demostración. De la Proposición 4.6.3 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{FU} &= \{(f, g) \in FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N}) : Ker(f) = Ker(g)\}. \\ &= \{(f, g) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : Ker(f) = Ker(g)\} \cap (FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})). \\ &= \mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \cap (FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ es cerrada (por la Proposición 4.2.4), tenemos que \mathcal{L}^{FU} es cerrada en $FU(\mathbb{N})$. Similarmente, vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{FU} &= \{(f, g) \in FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N}) : Im(f) = Im(g)\}. \\ &= \{(f, g) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : Im(f) = Im(g)\} \cap (FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})). \\ &= \mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \cap (FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{R}^{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ es G_δ entonces \mathcal{R}^{FU} es G_δ en $FU(\mathbb{N})$. De manera que \mathcal{H}^{FU} es G_δ en $FU(\mathbb{N})$.

Finalmente, como $\mathcal{D}^{FU} = \mathcal{J}^{FU} = FU(\mathbb{N}) \times FU(\mathbb{N})$ sabemos que \mathcal{D}^{FU} y \mathcal{J}^{FU} son Π_1^0 en $FU(\mathbb{N})$. □

Tabla 9. Complejidad topológica de las relaciones de Green en $FU(\mathbb{N})$

Espacio	Polaco	Complejidad Topológica				
		\mathcal{L}	\mathcal{R}	\mathcal{H}	\mathcal{D}	\mathcal{J}
$FU(\mathbb{N})$	X	Π_1^0	G_δ	G_δ	Π_1^0	Π_1^0

BIBLIOGRAFÍA

- ARANA, K., PEREZ J. y UZCÁTEGUI C. “Pettis property for Polish inverse semi-groups.” En: *Applied General Topology* 24 (2023), págs. 455-467 (vid. págs. 10, 12).
- BARDYLA, S. et al. *Topological embeddings into transformation monoids*. 2023 (vid. págs. 10, 11, 34, 35).
- BECKER, H. y KECHRIS A. “The Descriptive Set Theory of Polish Group Actions”. En: (*London Mathematical Society Lecture Note Series*). Cambridge: Cambridge University Press. (1996) (vid. págs. 10, 16, 34, 56).
- CAIN ALAN, J. *Nine Chapters on the Semigroup Art*. AJC Porto & Lisbon, 2020 (vid. págs. 20, 22, 27, 30, 42, 43, 46, 49, 52, 53).
- DI PRISCO, C. y UZCÁTEGUI C. *Una introducción a la teoría descriptiva de conjuntos*. Ediciones Uniandes, Bogotá, 2020 (vid. págs. 16, 19).
- ELLIOTT, L. et al. “Automatic continuity, unique Polish topologies, and Zariski topologies on monoids and clones.” En: *Transactions of the American Mathematical Society* (2023) (vid. págs. 10-12, 27, 33, 36, 41).
- HOWIE, J. M. *Fundamentals of Semigroup Theory*. Clarendon Press, Oxford, 1995 (vid. págs. 20, 42, 47).
- PÉREZ, J. y UZCÁTEGUI C. “On the Polishness of the inverse semigroup $\Gamma(X)$ on a compact metric space X .”. En: *Aceptado para su publicación en European journal of mathematics* (2023) (vid. pág. 10).

PÉREZ, J. y UZCÁTEGUI C. "Topologies on the symmetric inverse semigroup." En:
Semigroup Forum. 104 (222), págs. 1-17 (vid. págs. 10, 11, 33).