Dinámica de la polarización y la coherencia de fuentes de luz parcialmente polarizadas sobre la esfera de Poincaré.

Karol Vianney Salazar Ariza

Tesis para optar al título de Doctora en Física

Director

Rafael Ángel Torres Amarís

Doctorado en Ciencias Naturales-Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2021

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Lista de Apéndices

Resumen

Título: Dinámica de la polarización y la coherencia de fuentes de luz parcialmente polarizadas sobre la esfera de Poincaré. *

Autor: Karol Vianney Salazar Ariza **

Palabras Clave: Coherencia, polarización, esfera de Poincaré, fuentes de luz parcialmente polarizadas.

Descripción: La descripción matemática de la polarización de la luz está basada en el método de la matriz de coherencia-polarización, los parámetros de Stokes, el vector de Jones, los cuaterniones de Pellat-Finet y el método gráfico de la esfera de Poincaré. Recientemente, se ha introducido una nueva metodología para caracterizar la polarización, en función de las auto-correlaciones de los parámetros de Stokes, las cuales permiten obtener información adicional respecto a los parámetros de Stokes o la matriz de polarización. Este método puede diferenciar entre dos fuentes de luz con el mismo grado de polarización, pero con dinámica de polarización diferente, es decir, con diferentes estadísticas. La esfera de Poincaré es muy útil en el caso de fuentes de luz totalmente polarizadas, ya que permite una representación gráfica de los estados de polarización y sus transformaciones como se demuestra en esta investigación con la formulación de la Ley de los birrefringentes lineales. Además, tanto el método de Stokes-Mueller como los cuaterniones de Pellat-Finet constituyen un método algebraico adaptado a esta representación, lo que incrementa el interés de ésta. Por lo tanto, en esta tesis se explora una nueva metodología basada en el estudio estadístico de la polarización a través de la evolución temporal de los estados de polarización sobre la esfera de Poincaré. Estos estados son descritos mediante distribuciones de densidad de probabilidad de estados de polarización sobre la esfera de Poincaré, lo cual permite caracterizar las fuentes de luz parcialmente polarizada por medio de parámetros que se acoplan con el método gráfico de la esfera de Poincaré. De ahí, que se implementó la distribución de von Mises-Fisher para el estudio de dichas fuentes, permitiendo encontrar una relación entre el grado de polarización y los parámetros de Stokes normalizados con los parámetros de la distribución de von Mises-Fisher. Estos resultados se generalizaron a través de la distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré, logrando estudiar las correlaciones del vector de Stokes, y así obteniendo una expresión general para el grado de correlación que incluyen tanto las auto-correlaciones como las correlaciones cruzadas entre las componentes del vector de Stokes sobre la esfera de Poincaré. Todos estos resultados conllevan a demostrar la importancia de implementar el uso de las distribuciones de densidad de probabilidad sobre la esfera de Poincaré para describir la fluctuación del estado de polarización, así como la medición del grado de correlación entre las componentes de vector de Stokes logrando una caracterización completa de las fluctuaciones del estado de polarización propia de cada fuente de luz.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Dr. Rafael Torres, Doctorado en Ciencias Naturales-Física.

Abstract

Title: Dynamics of polarization and coherence of partially polarized light sources on the Poincaré sphere *

Author: Karol Vianney Salazar Ariza **

Keywords: Coherence, polarization, sphere Poincaré, partially polarized light sources.

Description: The mathematical description of light's polarization is based on the polarization matrix method, the Stokes parameters, the Jones vector, the Pellat-Finet quaternions, and the graphical method of the Poincaré sphere. A new methodology has recently been introduced to characterize polarization based on the auto-correlations Stokes parameters, which allow obtaining additional information regarding the Stokes parameters or the polarization matrix. This method can differentiate between two light sources with the same degree of polarization but with different polarization dynamics. The Poincaré sphere is very useful in the case of fully polarized light sources. It allows a graphical representation of the polarization states and their transformations, as demonstrated in this investigation with the formulation of linear birefringent law. Furthermore, both the Stokes method and the Pellat-Finet quaternions constitute an algebraic method adapted to this representation, which increases its interest. Therefore, in this thesis, A new methodology based on the statistical study of polarization is explored through the temporal evolution of polarization states on the Poincaré sphere. These states are described by probability density distributions of polarization states on the Poincaré sphere, which allows characterizing the light sources partially polarized through parameters that are coupled with the graphical method of the Poincaré sphere. Hence, the von Mises-Fisher distribution was implemented to study these sources, allowing to find a relationship between the degree of polarization P and the normalized Stokes parameters with the parameters of the von Mises-Fisher distribution. These results were generalized through the Kent distribution over the Poincaré sphere, achieving a study of the Stokes vector correlations, thus obtaining a general expression for the degree of correlation that includes both the auto-correlations and the cross-correlations between the components of the Stokes vector on the Poincaré sphere. All these results lead to demonstrate the importance of implementing the use of probability density distributions on the Poincaré sphere to describe the fluctuation of the polarization state, as well as the measurement of the degree of correlation between the Stokes vector components, achieving a complete characterization of the fluctuations in the polarization state of each light source.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Dr. Rafael Torres, Doctorado en Ciencias Naturales-Física.

Introducción

La naturaleza vectorial de la luz ha desempeñado un papel fundamental en la óptica estadística, siendo ampliamente estudiada con una estructura matemática basada en la teoría de procesos aleatorios, y con aplicaciones en diferentes áreas, entre las cuales se encuentra la interacción luz-materia, biofísica, nanofotónica, astronomía, astrofísica, estudios atmosféricos, telecomunicaciones ópticas, ingeniería química, medicina, biología, ciencias de los materiales, física del plasma, entre otras (Band, 2006; Brosseau, 1998; Rhee et al., 2009; Gompf et al., 2011; Xue et al., 1992; Rikken and Raupach, 1997; Gnauck et al., 2008; Fu et al., 2008; Dai et al., 2010; Gaskell et al., 2010; Koshiishi et al., 1996).

Las fuentes de luz naturales o de laboratorio exhiben hasta cierto grado fluctuaciones aleatorias en el vector campo eléctrico, en donde el estudio estadístico de estas fluctuaciones permite medir y caracterizar la polarización de la fuente. Esto conlleva a la extracción de información sobre las fuentes y los medios en los que se propaga la luz. Las fluctuaciones de la polarización han sido objeto de una serie de estudios experimentales y teóricos en áreas como: fibras ópticas (Gordon and Kogelnik, 2000; Dorosz and Romaniuk, 2014), telecomunicaciones (VanWiggeren and Roy, 2002), imágenes de radar polarimétricas (Hajnsek et al., 2003), dispersión de la radiación (Jakeman, 1995; Bates et al., 1997), láseres de emisión superficial con cavidad vertical (Sondermann et al., 2003), astrofísica (Kovac et al., 2002; Ade et al., 2014), en biomedicina para estudiar y caracterizar muestras de tejidos cancerosos y no cancerosos (Macdonald and Meglinski, 2011; Woliński, 2000), así como en la dispersiones múltiples en medios densos como en tejidos biológicos

(MacKintosh et al., 1989).

La estructura matemática que describe la polarización de la luz está basada en las formulaciones del cálculo de Jones (Jones, 1941), el formalismo de Stokes-Muller (Stokes, 1851; Goldstein, 2017), la matriz de coherencia (Mandel and Wolf, 1995), los cuaterniones de Pellat-Finet (Pellat-Finet, 1991a, 1990), y el método geométrico de la esfera de Poincaré (Brosseau, 1998). Las fuentes de luz parcialmente polarizadas o no polarizadas necesariamente requieren un tratamiento estadístico, siendo la base teórica para caracterizar este tipo de fuentes los parámetros de Stokes y la matriz de coherencia (Goldstein, 2017; Azzam and Bashara, 1987; Wolf, 2003). Una extensión significativa del formalismo de Stokes mediante distribuciones de densidad de probabilidad de los parámetros de Stokes y de los parámetros de Stokes normalizados fue dada por Barakat y colaboradores(Barakat, 1987a; Brosseau et al., 1991a; Brosseau, 1995a), así como los primeros dos momentos asociados a estas distribuciones de probabilidad. Esto con el fin de obtener información estadística más detallada de una fuente parcialmente polarizada, en comparación de los valores medios que se obtienen mediante los parámetros de Stokes.

Por otro lado, el estudio de las correlaciones de los parámetros de Stokes en (Ellis and Dogariu, 2004, 2005), ha permitido distinguir entre diferentes fuentes no polarizadas, demostrando que hay varios tipos de distribuciones aleatorias que conllevan a caracterizar estas fuentes. Más recientemente, Friberg y colaboradores estudiaron la evolución temporal del estado de polarización instantáneo sobre la esfera de Poincaré de fuentes parcialmente polarizadas mediante las autocorrelaciones del vector de Stokes (Set*älä* et al., 2008; Shevchenko et al., 2009, 2015, 2017). Estas correlaciones permiten obtener información estadística de la dinámica mediante el tiempo de polarización, un tiempo en que el estado de polarización no cambia (Shevchenko et al., 2009, 2017). Esta característica representa una medida directa de las fluctuaciones del estado de polarización de fuentes de luz no polarizadas.

La caracterización estadística de campos electromagnéticos aleatorios ha establecido una herramienta importante fundamentada en la teoría de los procesos estocásticos (Wolf, 2007; Korotkova, 2017). En esta dirección los parámetros de Stokes representan el método más estudiado y desarrollado hasta ahora (Brosseau, 1998; Korotkova, 2017). Sin embargo, hasta ahora el uso de la estadística direccional aplicada sobre la esfera de Poincaré no se ha formalizado como metodología alterna para el estudio de la dinámica de polarización de fuentes de luz aleatorias mediante distribuciones de densidad de probabilidad de variables angulares, y así mediante otro enfoque obtener información adicional de las propiedades de la polarización, lo cual evidencia la importancia de tratamientos estadísticos (Set*älä* et al., 2008; Shevchenko et al., 2009, 2015, 2017). Por lo tanto, el enfoque de esta tesis está en estudiar la polarización sobre la esfera de Poincaré, la cual se basa en el hecho de que las distribuciones de probabilidad sobre la esfera incluyen las medias angulares en el espacio, implicando conceptos estadísticos tridimensionales. De ahí que, en este trabajo de investigación consistió en formular, desarrollar y validar un método alterno mediante distribuciones con y sin simetría rotacional sobre la esfera de Poincaré para estudiar fuentes con un grado de polarización arbitrario. Este resultado permitió unificar el estudio de la polarización con la representación gráfica de la esfera de Poincaré, así como encontrar una cantidad medible general del grado de correlación sobre la esfera de Poincaré, que incluye todas las correlaciones entre las componentes del vector de Stokes. Esta es una característica de la dinámica de polarización propia de una fuente de luz no polarizada o parcialmente polarizada. La medida de todas las correlaciones entre las componentes del vector de Stokes en tiempo t y $t+\tau$ permite medir un tiempo de polarización general, proporcionando nueva información de interés sobre fuentes de luz naturales o artificiales y el medio de propagación.

Esta tesis esta organizada de la siguiente manera: en el capítulo 1 se revisan los fundamentos generales y los métodos algebraicos ya establecidos para estudiar la polarización. Por su parte, en el capítulo 2 se presenta una caracterización del comportamiento teórico-experimental de la interacción entre una fuente de luz polarizada y un retardador lineal sobre la esfera de Poincaré. Siendo este estudio el punto de partida para presentar un formalismo estadístico alterno que describe la polarización parcial de haces electromagnéticos estacionarios. Así, el capítulo 3 contiene la adaptación de la estadística direccional al estudio de la polarización sobre la esfera de Poincaré mediante la distribución de von Mises-Fisher. Estos resultados fueron validados experimentalmente, y además son generalizados a través de las distribuciones de Kent en el capítulo 4. Estas distribuciones incluyen las funciones de auto-correlación y correlación cruzada del vector de Stokes a diferencia de las distribuciones de von Mises-Fisher, lo cual permitió formular una expresión general del grado de correlación sobre la esfera de Poincaré. En el capítulo 5 se estudia la estadística del vector de Stokes sobre los ejes de la esfera de la Poincaré en el caso que las variables angulares sean estadísticamente independientes. Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las principales conclusiones de este trabajo de investigación.

1. Fundamentos de la polarización de la luz

En este capítulo se presentan las propiedades de la polarización de la luz, así como los principios generales y teóricos utilizados para caracterizar haces electromagnéticos estadísticamente estacionarios en el dominio del tiempo. Posteriormente se presentan los métodos más utilizados para describir y estudiar la polarización, así como la definición de parámetros como el grado de polarización y el grado de correlación de Poincaré.

1.1. Elipse de polarización

La radiación producida por los átomos o moléculas de fuentes de luz natural y de la mayoría de otras fuentes que emiten en el rango del visible es incoherente, en donde cada una de las ondas polarizadas que contiene la radiación oscila rápidamente de manera que su polarización es completamente impredecible. Estas variaciones típicas de la polarización son imposibles de medir, ya que el tiempo de respuesta de un detector de luz es demasiado largo (alrededor del orden de 10 ps). Por lo tanto, el detector promediará sobre muchas oscilaciones monocromáticas (Wolf, 2007; Korotkova, 2017).

Para describir la polarización de una oscilación monocromática se debe estudiar su amplitud y su fase de propagación, cuyo plano de polarización está determinado por el campo eléctrico que vibra en un plano perpendicular a la dirección de propagación, en donde se toma como referencia el sistema de coordenadas cartesianas (x, y), de manera que el estado de polarización, en el punto

r, se define a partir de las variables

$$E_x(t) = E_{0x}\cos(\kappa z - \omega t + \delta_x)\,, \tag{1}$$

$$E_y(t) = E_{0y}\cos(\kappa z - \omega t + \delta_y)\,, \tag{2}$$

las cuales trazan una sección cónica definida de la forma

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_xE_y}{E_{0x}E_{0y}}\cos\delta = \sin^2\delta, \tag{3}$$

en donde E_{0x} y E_{0y} son las amplitudes instantáneas del campo eléctrico y $\delta = \delta_y - \delta_x$ corresponde a la diferencia de fase entre las componentes del campo (Brosseau, 1998; Mandel and Wolf, 1995). La ecuación general de la elipse 3 describe la polarización de la luz y se conoce como elipse de polarización. Esta ecuación está en el plano fijo (x,y) perpendicular a la dirección de propagación de la luz (z), en donde el radio vector campo eléctrico en un punto fijo en el espacio traza una elipse como se esquematiza en la figura 1, y cuya orientación (derecha o izquierda) se caracteriza convencionalmente por el ángulo χ dado por (Goldstein, 2017; Kumar and Ghatak, 2011)

$$\tan 2\chi = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}. \tag{4}$$

Por otra parte, la ecuación 3 se reduce a la ecuación de un círculo cuando $\delta = \pm\pi/2$ y $E_{0x} = E_{0y}$, y se conoce como estado de polarización circular. En el caso que $\delta = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ la ecuación degenera en una línea recta; $E_y = \pm(E_{0y}/E_{0x})E_x$ siendo $\pm E_{0y}/E_{0x}$ la pendiente de la recta, la cual se conoce como polarización lineal, que a su vez puede tomar las siguientes formas particulares:

- Polarización lineal vertical, cuando $E_{0x} = 0$
- Polarización lineal horizontal, cuando $E_{0y} = 0$
- Polarización lineal a 45, cuando $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y $\delta = 0$
- Polarización lineal a -45, cuando $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ y $\delta = \pi$

Finalmente, la polarización elíptica que corresponde al estado general de polarización de la luz se presenta cuando las componentes del vector campo eléctrico no son iguales, y también cuando la diferencia de fase $\delta \neq \pm\pi/2$. Es importante resaltar, que los casos particulares de estados de polarización (circulares y lineales) se tiene el poder de generarlos en laboratorios mediante polarizadores lineales o circular. Además, recientemente se ha presentando una teoría general para el diseño y fabricación de polarizadores elípticos (Tu et al., 2017). Sin embargo, se puede obtener un estado de polarización arbitrario mediante retardadores media y cuarto de onda al interactuar con una fuente de luz polarizada.

1.1.1. Los parámetros α y χ de la elipse de polarización. Como ya se ha indicado, la figura 1 esquematiza la elipse de polarización, la cual se encuentra rotada con respecto al sistema no primado. El parámetro α es el ángulo que hace el eje positivo E_x con el eje mayor E'_x de la elipse y $\chi = \arctan(\pm B/A)$ es el ángulo elipticidad.

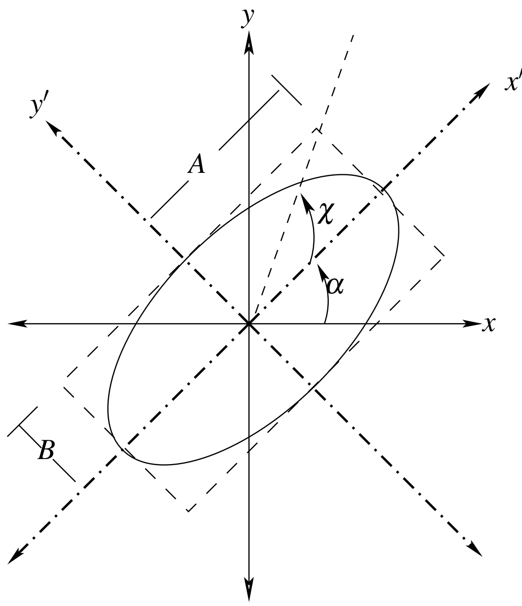


Figura 1. Representación gráfica sobre un plano (E_x, E_y) de los parámetros que caracterizan la elipse de polarización de una onda electromagnética plana y armónica que se propaga en dirección z. La longitud del semieje mayor y menor de la elipse está determinada por los parámetros A y B, respectivamente. El parámetro α es el ángulo que hace el semieje mayor con el eje positvo E_x, y χ es el ángulo que mide la elipticidad.

Con respecto al sistema de coordenadas primado, la ecuación 3 se escribe de manera simplificada como

$$\frac{|E'_x|^2}{A^2} + \frac{|E'_y|^2}{B^2} = 1. \tag{5}$$

La relación entre las componentes del campo eléctrico en los sistemas de referencia primado y no primado se define mediante la matriz de rotación de la forma

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

De acuerdo a las ecuaciones anteriores 5, 6 y la ecuación 3 se obtiene: (Goldstein, 2017)

$$\cos 2\alpha \cos 2\chi = \frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}, \tag{7}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\chi = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \cos \delta, \tag{8}$$

$$\sin 2\chi = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} \sin \delta. \tag{9}$$

Estas últimas tres ecuaciones determinan la relación entre los parámetros de la elipse que describe el radio vector campo eléctrico en el plano de onda, y las propiedades de la onda: amplitud y fase.

1.2. Esfera de Poincaré

Para caracterizar el estado de polarización de una onda electromagnética plana y armónica son necesarios los parámetros E_{0x}, E_{0y} y δ (ver ecuación 3), los cuales en sección anterior son relacionados matemáticamente con los parámetros de una elipse α y χ mediante las ecuaciones 7, 8 y 9 (Brosseau, 1998; Goldstein, 2017). Estas tres ecuaciones, constituyen un punto sobre una esfera de radio unitario llamada la esfera de Poincaré, cuyas coordenadas están definidas por los ángulos 2χ y 2α como se ilustra en la figura 2 (Pellat-Finet, 1990; Poincaré, 1892; Collett, 2005; Schott and of Photo-optical Instrumentation Engineers, 2009). Algunas de las propiedades de la esfera de Poincaré son:

- Los estados con polarización lineal se encuentran sobre el ecuador $(\chi = 0)$.

- En el polo norte y sur se encuentran los estados de polarización circular derecha ($\chi = \pi/4$) e izquierda, respectivamente.

- En el resto de la esfera se encuentran todas las polarizaciones elípticas, en donde los paralelos tienen la misma elipticidad, pero varían su orientación, mientras que en los meridianos su orientación se mantiene constante y varia su elipticidad.

- En los hemisferios norte y sur están los estados de polarización a derecha e izquierda, respectivamente.

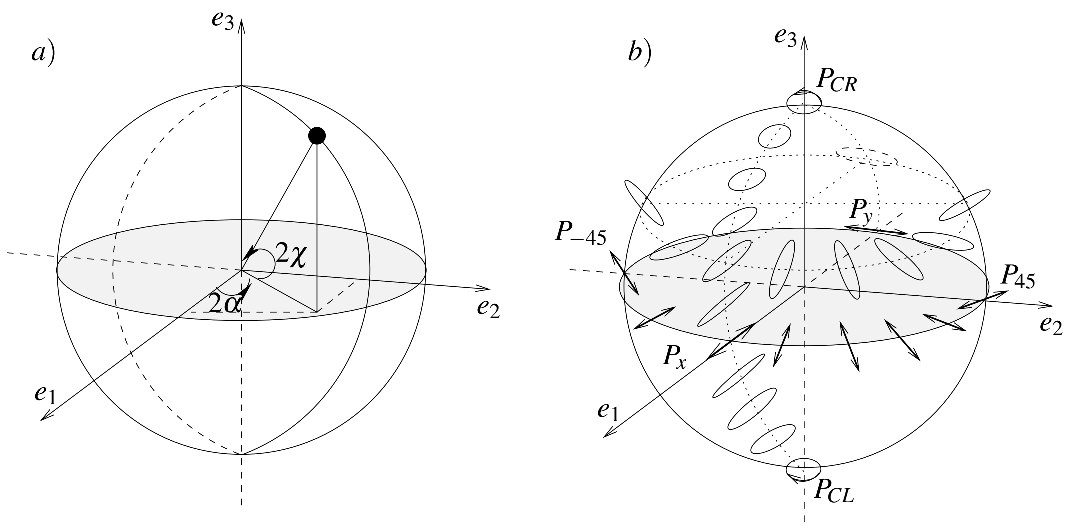


Figura 2. En la figura a) se representa mediante un punto de longitud 2α y de latitud 2χ sobre la esfera el estado de polarización de una onda electromagnética plana y armónica. En la figura b) se esquematizan algunos estados de polarización sobre la esfera de Poincaré. Los estados de polarización sobre el ecuador son lineales. En el polo norte y sur se encuentran las polarizaciones circulares a derecha e izquierda, respectivamente, y los estados de polarización elíptica están representados en todo lo que queda de la esfera.

La esfera de Poincaré es un método gráfico que presenta la información de forma visual y no númerica. Además, este método no sólo representa el estado de polarización de una fuentes de luz sino su transformación al interaccionar con uno o varios dispositivos ópticos lo que lo hace una herramienta útil y un complemento de los métodos algebraicos (Goldstein, 2017; Salazar-Ariza and Torres, 2018; Ortega-Quijano et al., 2017). Los cuaterniones y el álgebra de Stokes-Mueller se pueden asociar con la esfera con el fin de obtener cálculos explícitos en situaciones que involucren fuentes totalmente polarizadas (Goldstein, 2017; Kliger and Lewis, 2012; Cabrera et al., 1993). Recientemente, se ha introducido el grado de correlación de Poincaré que mide el tiempo que tarda la fuente de luz de estar en un estado de polarización antes de cambiar a otro estado. Resultado que representa una medida directa de las fluctuaciones del estado de polarización de una fuente de luz (Shevchenko et al., 2017). Estos métodos son descritos a continuación.

1.3. Cálculo matricial de Jones

Jones en (Jones, 1941), desarrolló un método útil y práctico para describir el estado de polarización de la luz y su interacción a través de sistemas ópticos. De acuerdo con el método, las componentes del campo eléctrico independiente del tiempo asociado a una onda monocromática se puede escribir como un vector bidimensional,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\delta_x} \\ E_{0y}e^{i\delta_y}. \end{bmatrix} \tag{10}$$

Los valores reales de la fase δ_y y δ_x de las componentes del vector campo eléctrico en sí mismas no determinan el estado de polarización, de manera que el vector 10 se puede escribir en función de la diferencia de fase como

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \\ \sin\theta e^{i\delta} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

en donde $\delta = \delta_y - \delta_x$, y

$$\cos\theta = \frac{E_{0x}}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}}, \quad \sin\theta = \frac{E_{0y}}{\sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}}. \tag{12}$$

En el caso que $\delta = 0$ o módulo de π, se tienen los estados de polarización lineal

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \tag{13}$$

entre los cuales se destacan

$$\mathbf{E}_{PLH} = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{PLV} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{PL+45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{PL-45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

la polarización lineal horizontal (PLH), vertical (PLV), a $+45$ ($PL+45$), y a -45 ($PL-45$) desde el eje x, respectivamente. Por otra parte, en el caso que las amplitudes del campo eléctrico sean iguales $E_{0x} = E_{0y}$ y la diferencia de fase $\delta = \pm\pi/2$, se tienen los estados de polarización circular a derecha (*PCD*) e izquierda (*PCL*) definidos por los vectores

$$\mathbf{E}_{PCD} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ +i \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}_{PCL} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \tag{15}$$

respectivamente. De manera general, los estados de polarización elípticos a derecha e izquierda son descritos por la ecuación 11.

En el cálculo de Jones los dispositivos ópticos lineales se describen mediante matrices 2×2 (Goldstein, 2017; Jones, 1948, 1942). De manera que la transformación se escribe en forma matricial

$$\begin{bmatrix} E_x' \\ E_y{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \tag{16}$$

en donde las componentes del campo eléctrico primado y no primado corresponden a los estados

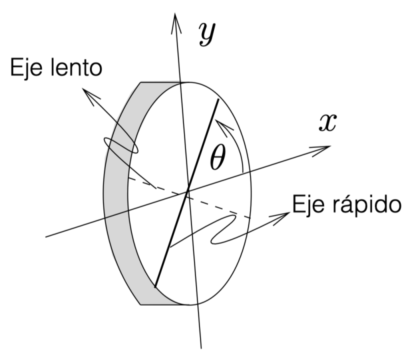


Figura 3. Representación de un retardador lineal, en donde su eje rápido hace un ángulo θ con respecto a la dirección x positiva del sistema de referencia.

de polarización emergente e incidente, respectivamente. La matriz 2×2 describe el medio óptico. Los retardadores por ejemplo convierten cualquier forma de oscilación del campo eléctrico en otra;

ya que al propagarse la onda a través de este medio divide el campo eléctrico en dos componentes e introduce una diferencia de fase entre ellas que se caracteriza por la matriz de Jones

$$J_R(\varphi) = \begin{bmatrix} e^{+i\varphi/2}\cos^2\theta + e^{-i\varphi/2}\sin^2\theta & (e^{+i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2})\sin\theta\cos\theta \\ \\ (e^{+i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2})\sin\theta\cos\theta & e^{+i\varphi/2}\sin^2\theta + e^{-i\varphi/2}\cos^2\theta \end{bmatrix}. \tag{17}$$

El ángulo θ es el ángulo que hace el eje rápido del retardador con respecto al eje x positivo como se muestra en la figura 3, y el ángulo φ corresponde a la diferencia de fase que introduce el retardador entre las componentes del campo eléctrico. Entre los retardadores más comunes se encuentran el retardador cuarto de onda $\varphi = \pi/2$ y media onda $\varphi = \pi$ (Goldstein, 2017; Azzam and Bashara, 1987).

1.4. Representación cuaterniónica de la luz polarizada

Los cuaterniones fueron creados por Hamilton como una extensión de los números complejos y son una herramienta matemática que permite representar las orientaciones y rotaciones en el espacio mediante cálculos más cortos y eficaces a diferencia de los ángulos de rotación de Euler (Shoemake, 1985; Pletinckx, 1989; Dam et al., 1998). Esta herramienta fue utilizada por Pierre Pellat-Finet como método algebraico para describir haces polarizados (método PPF), con la ventaja de poder representar tanto los estados de polarización como los operadores de polarización (medios ópticos) mediante un cuaternión (Pellat-Finet, 1991a, 1990, 1991b; Pellat-Finet and Bausset, 1992).

Un cuaternión complejo $q \in \mathbb{C}^4$ se define de la manera

$$q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \,, \tag{18}$$

la cantidad real q_0 representa la parte escalar, y los otros tres términos son el vector complejo, en donde q_1, q_2 y q_3 son cantidades complejas. Además, el cuaternión complejo puede ser representado mediante una matriz compleja 2×2, de la forma

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 - iq_1 & -q_3 - iq_2 \\ q_3 - iq_2 & q_0 + iq_1 \end{bmatrix} . \tag{19}$$

El determinante de la matrix $\mathbf{q}$ es igual a la norma del norma del cuaternión q (ver ecuación 18), debido a que el álgebra de las matrices complejas 2×2 es isomorfa al álgebra de los cuaterniones complejos (Hanson, 2005).

Por otra parte, la matriz compleja $\mathbf{q}$ se puede expresar de la forma

$$\mathbf{q} = q_0 \sigma_0 - i[q_1 \sigma_1 + q_2 \sigma_2 + q_3 \sigma_3] \,, \tag{20}$$

la cual está en función de las matrices de Pauli (σ_1,σ_2,σ_3) y la matriz identidad (σ_0). Esta ecuación muestra una correspondencia con los parámetros de Stokes para un haz polarizado (S_0, S_1, S_2, S_3), a partir de la representación de la polarización obtenida a través de la matriz de coherencia (Wolf, 2007). Tal correspondencia fue lo que llevó a Pellat-Finet a describir haces polarizadas mediante el cuaternión complejo definido de la forma

$$q_0 = [E_x\overline{E_x} + E_y\overline{E_y}], \tag{21}$$

$$q_1 = [E_x\overline{E_x} - E_y\overline{E_y}], \tag{22}$$

$$q_2 = [E_x\overline{E_y} + E_y\overline{E_x}], \tag{23}$$

$$q_3 = i[E_x\overline{E_y} - E_y\overline{E_x}], \tag{24}$$

en donde las componentes del campo eléctrico son deterministas. La parte escalar q_0 representa la intensidad total de la onda, y la parte vectorial compleja (q_1, q_2 y q_3) caracteriza el estado de polarización de la fuente. Además, las componentes del vector complejo están relacionadas de la siguiente manera

$$\frac{q_1^2}{q_o^2} + \frac{q_2^2}{q_o^2} + \frac{q_3^2}{q_o^2} = 1\,. \tag{25}$$

Representando la ecuación de una esfera con centro en el origen y radio unitario, dando como resultado la representación sobre la esfera de Poincaré de la parte vectorial de un cuaternión.

Por otro lado, la interacción entre la fuente polarizada y el medio óptico se define como

$$X' = uXu^*, \tag{26}$$

en donde el producto es una multiplicación cuaterniónica (ver apéndice 1), y los estados de polarización represntrados por los cuaterniones X' y X describen el estado de la onda emergente e incidente, respectivamente. El dispositivo óptico también es representado mediante un cuaternión y se denota por la letra u (Pellat-Finet, 1990). Por ejemplo, en el caso del cuaternión que describe un retardador (ver apéndice 2) lineal con birrefringencia ϕ y eje e_n

$$e^{e_n\phi/2} = \cos\phi/2 + e_n \sin\phi/2, \tag{27}$$

en donde el ángulo ϕ representa la rotación alrededor del eje e_n, el cual se define como

$$e_n = e_1 \cos 2\theta + e_2 \sin 2\theta. \tag{28}$$

El eje e_n es un vector unitario en la dirección del eje rápido del retardador (ver figura 3). Este eje pasa por un punto del ecuador de la esfera de Poincaré, siendo θ el ángulo que hace el eje rápido del retardador con el eje x, y sobre la esfera de Poincaré θ es el ángulo que hace el eje de la esfera e_1 con el eje e_n como se indica en la figura 4.

Pellat-Finet formula para los retardadores el cambio de estado de polarización de un haz

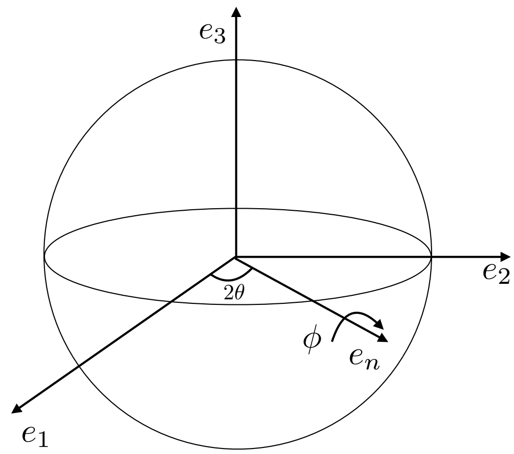


Figura 4. Esquematización del eje rápido del retardador sobre la esfera de Poincaré e_n. Este eje pasa por un punto del ecuador de la esfera de Poincaré, y hace un ángulo 2θ con el eje e_1. La birrefringencia del retardador sobre la esfera se traduce por una rotación de ángulo ϕ alrededor de eje e_n que pasa por los puntos representativos de las vibraciones propios del retardador.

incidente como

$$U'(2\alpha', 2\chi') = e^{e_n\phi/2} U(2\alpha, 2\chi) e^{-e_n\phi/2}, \tag{29}$$

en donde U' y U son los estados de polarización incidente y emergente, respectivamente. Los ángulos 2α y 2χ son los parámetros asociados con la esfera de Poincaré (ver sección 1.2).

1.5. Matriz de polarización

Hasta ahora se ha considerado la descripción de fuentes de luz totalmente polarizada. Sin embargo, en la naturaleza las fuentes de luz; por ejemplo como el sol, el estado de polarización varía aleatoriamente sin que ningún estado sea más probable que otro. Esto debido a que los átomos que emiten la fuente no tiene una orientación definida y por ende no está correlacionada con los fotones emitidos por otros átomos. En el caso que la forma de la elipse de polarización cambie, pero no de manera totalmente aleatoria, es decir algunos estados de polarización son más probables que otros, se dice que la fuente de luz está parcialmente polarizada (Brosseau, 1998; Goldstein, 2017; Korotkova, 2017). Esto conlleva a introducir una descripción adecuada para estudiar las propiedades de polarización de segundo orden de las ondas electromagnéticas basada en el concepto de matriz de coherencia. Esta describe la auto-correlación y correlación cruzada de las componentes de campo en el espacio y el tiempo (Wiener et al., 1930; Wolf, 1959).

La matriz de coherencia se define como el promedio de ensamble del producto tensorial del vector Jones por su transpuesta conjugada de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= \langle \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \otimes \overline{\mathbf{E}(\mathbf{r},t)} \rangle \\ &= \begin{bmatrix} \langle E_x(\mathbf{r},t)\overline{E_x(\mathbf{r},t)} \rangle & \langle E_x(\mathbf{r},t)\overline{E_y(\mathbf{r},t)} \rangle \\ \langle E_y(\mathbf{r},t)\overline{E_x(\mathbf{r},t)} \rangle & \langle E_y(\mathbf{r},t)\overline{E_y(\mathbf{r},t)} \rangle \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{30}$$

Esta matriz contiene toda la información estadística medible del estado de polarización en el caso de fuentes de luz con intensidad y perfil espectral Gaussiano, ya que el valor esperado y los momentos de segundo orden determinan completamente los momentos de mayor orden. Sin embargo, de manera general la matriz de polarización sólo contiene información de segundo orden (Wolf, 2007; Korotkova, 2013). La traza de la matriz representa la intensidad total de la fuente y el determinante de la matriz corresponde al estado de polarización de la fuente de luz. Los términos que están fuera de la diagonal miden que tanto están correlacionadas las componentes del campo eléctrico. Esta correlación se puede describir mediante el coeficiente normalizado definido como

$$\gamma_{xy} = \frac{\langle E_x(\mathbf{r},t)\overline{E_y(\mathbf{r},t)}\rangle}{\sqrt{\langle E_x(\mathbf{r},t)\overline{E_x(\mathbf{r},t)}\rangle\langle E_y(\mathbf{r},t)\overline{E_y(\mathbf{r},t)}\rangle}}, \tag{31}$$

el cual caracteriza la fuente en función de su estado de polarización. En el caso de una fuente totalmente polarizada, el grado de correlación entre las componentes del campo eléctrico alcance su valor máximo $|\gamma_{xy}| = 1$, y a su vez $\det\Gamma = 0$. La despolarización total de la fuente se caracteriza por no tener correlación entre las componentes del campo eléctrico $|\gamma_{xy}| = 0$. Finalmente, en los casos que $0 < |\gamma_{xy}| < 1$ describirá fuentes parcialmente polarizadas (Mandel and Wolf, 1995).

1.6. Grado de polarización

La matriz de la ecuación 30 que describe una fuente de luz con un estado de polarización arbitrario puede expresarse mediante la suma de dos matrices, en donde una de ellas no está polarizada y la otra está completamente polarizada, es decir,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \overline{\Gamma_{12}} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = \Gamma^{\mathrm{nopol}} + \Gamma^{\mathrm{pol}} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & D \\ \overline{D} & C \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Las cantidades A, B y C son reales y no negativas. La cantidad $|D|^2$ cumple con la condición $D\overline{D} = BC$, debido a que el $\det\Gamma^{\mathrm{pol}} = 0$. La intensidad total para la fuente de luz no polarizada es $\mathrm{Tr}(\Gamma^{\mathrm{nopol}}) = 2A$, y para la fuente polarizada es $\mathrm{Tr}(\Gamma^{\mathrm{pol}}) = B + C$. A partir de las relaciones obtenidas para la intensidad se define el grado de polarización como

$$P = \frac{\mathrm{tr}\Gamma^{\mathrm{pol}}}{\mathrm{tr}\Gamma} = \frac{B+C}{2A+B+C} = \left[1 - \frac{4\det\Gamma}{(\mathrm{tr}\Gamma)^2}\right]^{1/2}. \tag{33}$$

La expresión anterior implica que el grado de polarización es independiente de la dirección en que vibra el campo eléctrico del haz, ya que está en función de dos invariantes de rotación que son el determinante y la traza de la matriz. El grado de polarización puede tomar valores entre cero y uno $0 \leq P \leq 1$. Fuentes totalmente polarizadas su grado de polarización es $P = 1$, es decir $\det\Gamma = 0$, en el otro extremo $P = 0$ describirá haces no polarizados, y por ende $\det\Gamma = 1$, respectivamente. Los demás valores corresponden a una onda parcialmente polarizada (Ellis et al., 2005; Wolf, 2008).

La relación entre el grado de coherencia cruzada y el grado de polarización está dada por:

$$0 \leq |\gamma_{xy}| \leq P, \tag{34}$$

la cual se obtiene a partir de la ecuación 33. Esta relación muestra que el grado de polarización fija un límite superior al grado de coherencia cruzada, es decir el valor máximo que puede tomar el grado de correlación simpre será igual al grado de polarización de la onda.

1.7. Álgebra de Stokes-Mueller

Una representación matemática para estudiar la polarización de fuentes de luz con grado de polarización arbitrario en términos de observables fue propuesta por Stokes (Goldstein, 2017; Collett, 2005). Estos observables caracterizan el estado de polarización mediante cuatro parámetros llamados los parámetros de Stokes, y se describen en un vector de la forma

$$\begin{pmatrix} \langle s_0 \rangle \\ \\ \langle s_1 \rangle \\ \\ \langle s_2 \rangle \\ \\ \langle s_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle E_x(t_0)\overline{E_x(t_0)}\rangle + \langle E_y(t_0)\overline{E_y(t_0)}\rangle \\ \\ \langle E_x(t_0)\overline{E_x(t_0)}\rangle - \langle E_y(t_0)\overline{E_y(t_0)}\rangle \\ \\ \langle E_x(t_0)\overline{E_y(t_0)}\rangle + \langle E_y(t_0)\overline{E_x(t_0)}\rangle \\ \\ i(\langle E_y(t_0)\overline{E_x(t_0)}\rangle - \langle E_x(t_0)\overline{E_y(t_0)}\rangle) \end{pmatrix} . \tag{35}$$

Los parámetros son combinaciones de las amplitudes E_{0x} y E_{0y} y la fase relativa δ de las componentes del vector campo eléctrico. El primer parámetro determina la intensidad, y los otros tres especifican el estado de polarización de la fuente (Stokes, 1851; Goldstein, 2017; Korotkova, 2013). Estos cuatro parámetros de Stokes se relacionan satisfaciendo la relación:

$$\langle s_0^2 \rangle \geq \langle s_1^2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle + \langle s_3^2 \rangle \,. \tag{36}$$

En el caso que la ecuación anterior corresponda a la igualdad, los parámetros describirán fuentes polarizadas. El vector de Stokes de los estados de polarización más conocidos se definen como

$$s_{PLH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s_{PLV} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s_{PL+45} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{PL-45} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s_{PCD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s_{PCL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

La transformación del estado de polarización de una fuente caracterizada por los parámetros de Stokes (ver ecuación 35) al interactuar con dispositivos ópticos se describe matemáticamente mediante la relación matricial

$$\vec{s}' = M\vec{s}, \tag{38}$$

en donde el vector de Stokes primado y no primado describen el estado de polarización emergente e incidente, respectivamente, y M es la matriz de Mueller 4×4, que representa el medio óptico (Goldstein, 2017; Walker, 1954). La matriz de Mueller, por ejemplo de un retardador lineal se define de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \cos\phi & (1-\cos\phi)\sin 2\theta \cos 2\theta & \sin 2\theta \sin\phi \\ 0 & (1-\cos\phi)\sin 2\theta \cos 2\theta & \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta \cos\phi & -\cos 2\theta \sin\phi \\ 0 & -\sin 2\theta \sin\phi & \cos 2\theta \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \tag{39}$$

en donde la birrefringencia está dada por el ángulo ϕ y θ es el ángulo que hace el eje rápido con el eje x, como se muestra en la figura 4.

Por otra parte, los parámetros de Stokes están relacionados con la matriz de coherencia (ver sección 1.5) de la siguiente manera

$$\Gamma = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} s_0 + s_1 & s_2 - is_3 \\ s_2 + is_3 & s_0 - s_1 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Relación que se obtiene mediante las matrices de Pauli y la matriz de identidad (Korotkova, 2017; Perez and Ossikovski, 2016).

1.8. Parámetros de Stokes y la esfera de Poincaré

Los valores instantáneos de los cuatro parámetros de Stokes contiene toda la información del estado de polarización de la fuente. Estos valores se obtienen mediante promedios de ensambles (ver ecuación 35). La definición de los parámetros de Stokes en función de las amplitudes y fase de las componentes del vector campo eléctrico (ver ecuaciones 1 y 2) de una fuente de luz totalmente polarizada se obtiene mediante la ecuación de elipse de polarización (ver ecuación 3) al transformar en el dominio de la intensidad tomando un promedio de ensamble de las componentes del campo eléctrico cuadrático,

$$\left(\frac{\langle E_x(t)\rangle}{E_{0x}}\right)^2+\left(\frac{\langle E_y(t)\rangle}{E_{0y}}\right)^2-2\frac{\langle E_x(t)E_y(t)\cos\delta(t)\rangle}{E_{0x}E_{0y}}=\langle\sin^2\delta(t)\rangle\,. \tag{41}$$

Teniendo que,

$$\langle E_i(t)E_j(t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}E_i(t)E_j(t)\rho(E_i,E_j)dE_idE_j \quad (i,j=x,y)\,, \tag{42}$$

en donde $\rho(E_i,E_j)$ representa la distribución de densidad de probabilidad conjunta. En el caso particular en que las amplitudes del vector campo eléctrico sean valores constantes pero fase fluctúa de manera que la diferencia $\delta=\delta_x-\delta_y$ es constante, y mediante las ecuaciones 1 y 2, se obtienen los valores promedios a través de la ecuación 42.

$$\langle E_x^2\rangle=\frac{E_{0x}^2}{2} \qquad \text{y} \qquad \langle E_y^2\rangle=\frac{E_{0y}^2}{2} \tag{43}$$

Reemplazando los resultados de la ecuación 43 en la ecuación 41, se llega a:

$$\langle E_xE_y\rangle=\frac{E_{0x}E_{0y}\cos\delta}{2}\,. \tag{44}$$

Finalmente, reemplazando lo obtenido en las ecuaciones 43 y 44 en la ecuación 36 para una fuente de luz polarizada, se llega a

$$s_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \tag{45}$$

$$s_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2, \tag{46}$$

$$s_2 = 2E_{0x}E_{0y}\cos\delta, \tag{47}$$

$$s_3 = 2E_{0x}E_{0y}\sin\delta\,, \tag{48}$$

a la relación entre los cuatro parámetros de Stokes y las amplitudes de las componentes del vector campo eléctrico y la diferencia de fase entre ellas (Brosseau, 1998; Goldstein, 2017). Además, normalizando a uno la intensidad total de la fuente determinada por el parámetro s_0, se tiene

$$S_1 = \frac{s_1}{s_0} = \frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}, \tag{49}$$

$$S_2 = \frac{s_2}{s_0} = \frac{2E_{0x}E_{0y}\cos\delta}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}, \tag{50}$$

$$S_3 = \frac{s_3}{s_0} = \frac{2E_{0x}E_{0y}\sin\delta}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}\,. \tag{51}$$

Estas tres ecuaciones representan el vector de Stokes en coordenadas cartesianas (x, y, z), el cual define el estado de polarización normalizado de la fuente. Además, comparando estas tres ecuaciones con las ecuaciones 7, 8 y 9 (ver la sección 1.1) se llega a la relación con los parámetros 2α y 2χ de la elipse, que a su vez corresponden a las coordenadas de un punto sobre la esfera de Poincaré. Por lo tanto, la esfera de Poincaré es una representación gráfica de la parte vectorial del vector de Stokes como se indica en la figura 5(a). La longitud vector de Stokes sobre la esfera de Poincaré corresponde al grado de polarización de la fuente, y en el caso de una fuente de luz polarizada la longitud es el radio unitario de la esfera de Poincaré ($P = 1$) (Walker, 1954; Theocaris, 1979; Tedjojuwono et al., 1989; Collett and Schaefer, 2008a,b).

Por otro lado, las fuentes de luz parcialmente polarizadas el estado de polarización fluctúa en el tiempo y su representación sobre la esfera corresponde a una distribución de puntos, la cual está limitada por el grado de polarización de la fuente como se muestra en la figura 5(b). Para este tipo de fuentes el álgebra de Stokes como método no se puede asociar al método gráfico de la esfera Poincaré, ya que el grado de polarización, definido por

$$P = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, \tag{52}$$

estará entre $0 < P < 1$, y cuya representación es un punto dentro de la esfera de Poincaré, como se muestra en la figura 5(b).

Finalmente en el caso de fuentes no polarizadas el grado de polarización es cero y por lo tanto, corresponde a un punto en el centro de coordenadas de la esfera de Poincaré (ver figura 5(c))

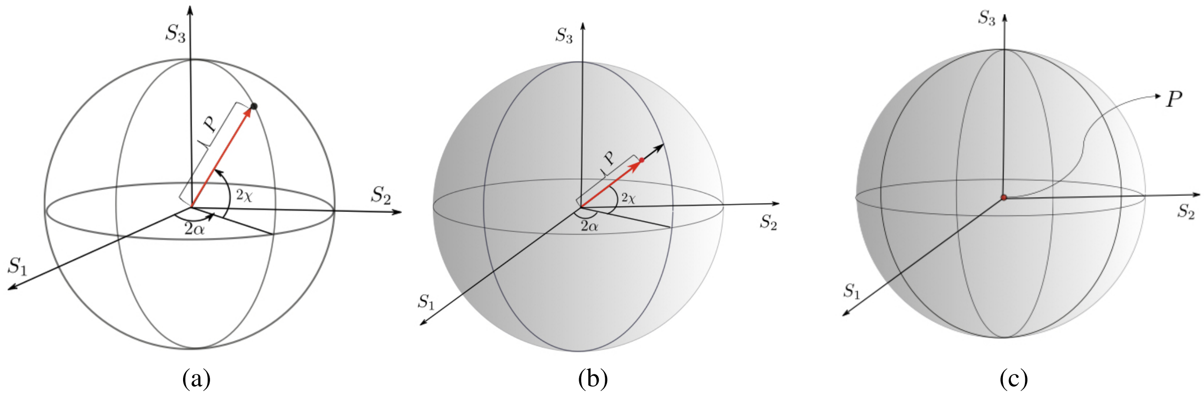


Figura 5. Representación gráfica sobre la esfera de Poincaré de fuentes de luz: a) polarizadas, b) parcialmente polarizadas y c) no polarizadas.

(Fujiwara, 2007; Perlicki, 2005).

1.8.1. Función de distribución de densidad de Eliyahu-Brosseau. Las fluctuaciones del vector campo eléctrico caracterizadas mediante las variables de los parámetros de Stokes sobre los ejes coordenados de la esfera de Poincaré fueron estudiadas en (Eliyahu, 1994; Brosseau, 1995b). Las distribuciones de densidad de probabilidad de las variables de Stokes se pueden expresar como un conjunto de fórmulas analíticas para describir fuentes de luz parcialmente polarizada con estadística Gaussiana, cuya fase y amplitud del vector de campo eléctrico son estadísticamente independientes.

La función de distribución de probabilidad de Eliyahu-Brosseau del parámetro de Stokes normalizado S_1, tiene la siguiente forma

$$p_{S_1}(S_1) = \frac{(1-P^2)}{2}\left\{\frac{1-S_1\omega_1}{[(1-S_1\omega_1)^2-(1-S_1^2)(P^2-\omega_1^2)]^{3/2}}\right\}, \tag{53}$$

en donde S_1 es el parámetro de Stokes ($-1 \leq |S_1| \leq 1$), P es el grado de polarización y ω_1 representa el valor esperado de S_1. La función de densidad de probabilidad $p_{S_2}(S_2)$ y $p_{S_3}(S_3)$ se evalúa a partir de la expresión de $p_{S_1}(S_1)$ haciendo uso de la transformación de simetría (Brosseau et al., 1991b),

$$S_1 \xrightarrow{\mathbf{R}_2} S_2 \;\text{ con }\; \mathbf{R}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{54}$$

$$S_1 \xrightarrow{\mathbf{R}_3} S_3 \;\text{ con }\; \mathbf{R}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \tag{55}$$

en donde $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$ son matrices unitarias. Por otra parte, la relación de los parámetros de Stokes con la matriz de polarización (ver la ecuación 30) se define como

$$S_i = tr(\mathbf{\Gamma}\sigma_i), \;\; con \;\; i \in (0,1,2,3)\,. \tag{56}$$

Los valores de σ_i son la matriz identidad y las matrices de Pauli

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{57}$$

La operación con la matriz de polarización es una transformación $\mathbf{\Gamma} \rightarrow R_j \mathbf{\Gamma} R_j^{-1}$ con $j \in (2,3)$, dejando sus valores propios invariantes, es decir la intensidad total del campo y el grado de polarización. Por ejemplo, si se quiere obtener S_2 a partir de S_1,

$$S_2 = tr(R_2 \boldsymbol{\Gamma} R_2^{-1} \sigma_1)\,. \tag{58}$$

Lo anterior corresponde a un cambio $S_1 \rightarrow S_2$ y de $\omega_1 \rightarrow \omega_2$ en la ecuación 53, de manera que

$$p_{S_2}(S_2) = \frac{(1-P^2)}{2} \left\{ \frac{1 - S_2\omega_2}{[(1-S_2\omega_2)^2 - (1-S_2^2)(P^2-\omega_2^2)]^{3/2}} \right\}, \tag{59}$$

De manera análoga se obtiene la función de distribución de probabilidad $p_{S_3}(S_3)$

$$p_{S_3}(S_3) = \frac{(1-P^2)}{2} \left\{ \frac{1 - S_3\omega_3}{[(1-S_3\omega_3)^2 - (1-S_3^2)(P^2-\omega_3^2)]^{3/2}} \right\}, \tag{60}$$

del parámetro de Stokes normalizado S_3, lo cual corresponde a un cambio $S_1 \rightarrow S_3$ y de $\omega_1 \rightarrow \omega_3$ en la ecuación 53.

1.8.2. Grado de correlación de los parámetros de Stokes sobre la esfera de Poincaré. Recientemente se ha presentado un interés por estudiar la dinámica de las fluctuaciones de la polarización, la cual permite diferenciar entre dos fuentes de luz con diferentes estadísticas pero con el mismo grado de polarización. En este sentido en (Set*älä* et al., 2008; Shevchenko et al., 2009, 2015, 2017), se ha estudiado tanto teóricamente como experimentalmente la dinámica de la polarización mediante la función de la correlación sobre la esfera de Poincaré definido como

$$\gamma_p^2(\tau) = \frac{\sum_{n=1}^{3} \langle S_n(t) S_n(t+\tau) \rangle}{\langle S_0(t) S_0(t+\tau) \rangle}, \tag{61}$$

en donde $\langle S_n(t) S_n(t+\tau) \rangle$ representa las funciones de correlación de los parámetros de Stokes. Esta función permite medir el tiempo de polarización, es decir el tiempo en el que se supone que el estado de polarización no cambia.

En el caso particular que $\tau = 0$, en (Tervo et al., 2003) obtienen una relación entre el grado de correlación sobre la esfera de Poincaré (ver ecuación 61) con el grado de polarización mediante la siguiente la relación

$$\gamma_p^2(0) = \frac{1}{2}(P^2 + 1), \tag{62}$$

en donde el parámetro P representa el grado de polarización de la fuente de luz. De modo que, el grado de correlación sobre la esfera de Poincaré $1/\sqrt{2} \leq \gamma(0) \leq 1$, implicando que cuando el haz es polarizado, es decir $P = 1$, y $\gamma(0) = 1$. Sin embargo, en el caso que un haz no este polarizado $P = 0$, el grado de correlación de Poincaré es igual $\gamma(0) = 1/\sqrt{2}$. Este resultado trae el hecho de que $\gamma(0)$ no sea igual a cero para las fuentes de luz no polarizadas. Implicando que luz no polarizada no siempre corresponde a una fuente de luz totalmente incoherente incluyendo $\tau = 0$.

1.9. Conclusiones

Se han presentando los fundamentos teóricos para estudiar la polarización . En la Sección 1.2, se presentó el concepto de la esfera de Poincaré, y la caracterización de fuentes de luz mediante la representación de los estados de polarización. En las Secciones 1.3-1.7, se revisan los métodos algebraico para el estudio de la polarización de la luz. Así como la representación vectorial del vector de Stokes sobre la esfera de Poincaré para el caso de fuentes de luz totalmente polarizada en la sección 1.8. Además, se presenta el estudio de fuentes de luz con un grado de polarización arbitrario a partir del comportamiento estadístico de las distribuciones marginales de Eliyahu-Brosseau, y el grado de correlación sobre la esfera de Poincaré para medir el tiempo de polarización de la fuente.

En el siguiente capítulo se demostrará la importancia de la esfera de Poincaré como método gráfico, ya que permitió caracterizar las trayectorias que se obtienen sobre la esfera de la interacción entre una fuente de luz polarizada y un retardador lineal rotante. Siendo este resultado la base de la investigación de está tesis de la teoría de distribuciones de densidad de probabilidad sobre la esfera de Poincaré para estudiar fuentes parcialmente polarizadas.

2. Estudio de la luz polarizada y su interacción con un retardador lineal rotante

El estado de polarización de una fuente de luz se puede controlar y transformar mediante elementos de polarización, los cuales se clasifican en función del cambio de las amplitudes, de la fase o coherencia de la luz en: polarizadores, retardadores y despolarizadores (Goldstein, 2017; Chipman et al., 2018). Por ejemplo, los retardadores se utilizan para transformar un estado de polarización en otro de forma controlada, mediante un cambio de fase entre la componente de polarización proyectado a lo largo del eje rápido y la componente proyectada a lo largo del eje lento (Goldstein, 2017; Shurcliff, 2013; Roberts and Lin, 2012; Yu et al., 2012), convirtiéndose en un componente importante para el estudio y desarrollo de aplicaciones en diferentes áreas como en la optimización de polarímetros basados en retardadores rotantes, como se muestra en los trabajos de Ambirajan y Look (Ambirajan and Look, 1995; Amrit Ambirajan, 1995), en la mejora en la relación señal/ruido mediante un retardador rotante con retardo de 132 (Tyo et al., 2006; Sabatke et al., 2000). Por otra parte, en medicina y biología para la caracterización de células y tejidos (Bickel et al., 1976; Yasui et al., 2004; Sankaran et al., 2002; Ladd et al., 2009), en procesos industriales (Browne and Zerban, 1941; Williams, 1999), así como en el estudio de las propiedades ópticas de los materiales (De Feijter et al., 1978; Xu et al., 1995; Richter et al., 1995; Sato et al., 2007; Lopez-Téllez et al., 2016).

La esfera de Poincaré representa el estado de polarización de un haz de luz y su transformaciones cuando se propaga a través de dispositivos ópticos. Las coordenadas de un punto sobre la esfera de Poincaré son los tres parametros de Stokes normalizados que describen el estado de polarización (Goldstein, 2017; Shurcliff, 2013). La evolución continua del estado de polarización se puede representar como trayectorias sobre la esfera de Poincaré. Las trayectorias que se forman en la esfera de Poincaré debido a la interacción de haces monocromáticos polarizados y un retardador cuarto de onda rotante han sido estudiadas por Reddy et al. en (Reddy et al., 2016). Una de estas trayectorias ha sido caracterizada por Azzam en (Azzam, 2000), correspondiendo al caso de haces linealmente polarizados que pasan a través de un retardador rotante cuarto de onda, como la intersección de la esfera de Poincaré con un cilindro. La caracterización de estas trayectorias es útil, ya que de antemano nos permite conocer todos los estados de polarización emergentes para un haz polarizado que pasa a través de un retardador lineal rotante. Sin embargo, en los casos en que los estados de polarización de entrada sean en general elípticos o circulares, y pasan a través de un retardador lineal rotante, los estados de polarización emergentes producen trayectorias que no corresponden a la intersección propuesta por Azzam.

Este capítulo está dedicado al estudio y caracterización de las trayectorias que describen los estados de polarización emergentes sobre la esfera de Poincaré de la interacción de un haz con estado de polarización arbitrario y un retardador lineal rotante. Se comenzará con darle una nueva interpretación geométrica a las trayectorias que se forman sobre la esfera de Poincaré.

2.1. Formulación de las trayectorias sobre la esfera de Poincaré

El cálculo de Stokes-Mueller describe matemáticamente la interacción entre fuentes de luz representadas por el vector de Stokes con dispositivos ópticos deterministas, lineales y sin formación de imágenes en un sólo punto; tales como: polarizadores, absorbentes y retardadores, utilizando matrices 4×4 (Perez and Ossikovski, 2016). El cambio de estado de polarización de la fuente cuando se propaga a través de un elemento óptico, se define como:

$$\mathbf{s}' = M\mathbf{s}, \tag{63}$$

en donde M representa la matriz de Mueller, $\mathbf{s}$ y $\mathbf{s}'$ son los vectores de Stokes asociados al estado de polarización de la fuente de luz de entrada y salida, respectivamente. En el caso, que el dispositivo óptico sea un retardador lineal, su correspondiente matriz de Mueller se escribe como:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \cos\delta & \cos 2\theta \sin 2\theta \,(1-\cos\delta) & \sin 2\theta \sin\delta \\ 0 & \cos 2\theta \sin 2\theta \,(1-\cos\delta) & \cos^2 2\theta \cos\delta + \sin^2 2\theta & -\cos 2\theta \sin\delta \\ 0 & -\sin 2\theta \sin\delta & \cos 2\theta \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix}, \tag{64}$$

en donde δ es la diferencia de fase entre los ejes rápido y lento, y θ es el ángulo del eje rápido del retardador con respecto a la horizontal de un sistema de referencia. Por lo tanto, el estado de polarización emergente que se obtiene de remplazar la matriz de Mueller dada por la ecuación 64 y el estado de polarización del haz de entrada totalmente polarizado $\mathbf{s}(2\alpha, 2\chi) = (1, \cos 2\alpha \cos 2\chi, \sin 2\alpha \cos 2\chi, \sin 2\chi)$; determinado por las variables angulares 2χ y 2α de la esfera de Poincaré, en la ecuación 63, se tiene

$$\begin{pmatrix} s_0' \\ \\ s_1' \\ \\ s_2' \\ \\ s_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \cos 2\chi \cos 2\alpha + [\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta)(1-\cos\delta) + \sin 2\chi \sin\delta] \sin 2\theta \\ \\ \cos 2\chi \sin 2\alpha - [\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta)(1-\cos\delta) + \sin 2\chi \sin\delta] \cos 2\theta \\ \\ \sin\delta \cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta) + \sin 2\chi \cos\delta \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Entonces, dependiendo del estado de polarización de entrada, el cual se propaga a través del retardador lineal que rota de 0° a 180°, el estado emergente $\mathbf{s}' = (s_0', s_1', s_2', s_3')$, ecuación 65, forma diferentes e interesantes trayectorias sobre la esfera de Poincaré. Estas trayectorias, como se mostrará en la siguiente sección, se caracterizan por la intersección de la esfera Poincaré con un cono.

2.2. Interpretación geométrica: intersección de la esfera de Poincaré y un cono.

En (Azzam, 2000), Azzam muestra que la trayectoria que describen los estados de polarización emergentes, cuando una fuente de luz con estado de polarización lineal pasa a través de un retardador lineal cuarto de onda rotante, corresponde a la curva de intersección entre la esfera de Poincaré y un cilindro. Sin embargo, las curvas de intersección entre una esfera con un cono, llamado cono de Monge (Monge, 1798; Ferr*é*ol and Mandonnet, 2016), son de mayor interés para nuestro estudio, porque como se mostrará más adelante, esta curva de intersección caracteriza todas las trayectorias sobre la esfera de Poincaré de un haz con un estado de polarización arbitrario que pasa a través de un retardador lineal rotante.

Teorema 1 *El lugar geométrico de todos los puntos formados por los estados de polarización* *emergentes a partir de la interacción de un haz polarizado con un retardador lineal rotante, corresponde a la curva de intersección de la esfera de Poincaré con un cono.*

Demostración 1 *La ecuación de la esfera de Poincaré centrada en el origen es*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,, \tag{66}$$

y la ecuación de un cono orientado alrededor de un eje paralelo al eje z, con el vértice en (a,b,c), se escribe

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \tan\left(\frac{\delta'}{2}\right)^2 (z-c)^2\,, \tag{67}$$

en donde δ' es el ángulo del cono. Usando la identidad de la tangente del ángulo medio, se obtiene

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2 (z-c)^2\,. \tag{68}$$

Se debe cumplir que $a^2+b^2+c^2 = 1$, es decir, el vértice del cono está sobre la esfera de Poincaré.

La curva de intersección entre la esfera y el cono se obtiene a partir de la parametrización de la variable x

$$x = a + \left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)(z-c)\sin 2t\,, \tag{69}$$

y la variable y

$$y = b - \left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)(z-c)\cos 2t\,. \tag{70}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la ecuación 66, y mediante cálculos algebraicos (ver *apéndice 3), se encuentra*

$$
\begin{aligned}
& c^2\left[\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2-1\right]+2c\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)(b\cos 2t-a\sin 2t) \\
& -2z\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\left[b\cos 2t-a\sin 2t+c\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\right] \\
& +z^2\left[1+\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2\right]=0, \qquad (71)
\end{aligned}
$$

una ecuación cuadrática para la variable z. Definiendo

$$C=c^2\left[\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2-1\right]+2c\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)(b\cos 2t-a\sin 2t), \qquad (72)$$

$$B=-2\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\left[b\cos 2t-a\sin 2t+c\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\right], \qquad (73)$$

y,

$$A=\left[1+\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2\right]. \qquad (74)$$

Las soluciones de la variable z se definen por la ecuación

$$z_{\pm}=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}. \qquad (75)$$

El vértice del cono está representado por un punto sobre la esfera de Poincaré con coordenadas

$$\langle a,b,c\rangle = \langle \cos 2\alpha' \cos 2\chi', \sin 2\alpha' \cos 2\chi', \sin 2\chi'\rangle\,, \tag{76}$$

en donde $0 \leq \alpha < \pi$, *y* $-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4$.

Reemplazando la ecuación anterior en la ecuación 75 y mediante cálculos algebraicos (ver apéndice 224), se obtiene

$$\begin{aligned} z_{\pm} = {} & \frac{2\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\left[\cos 2\chi' \sin(2\alpha'-2t) + \sin 2\chi' \left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\right]}{2\left(1+\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2\right)} \\ & \pm \frac{2\left[\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\cos 2\chi' \sin(2\alpha'-2t) - \sin 2\chi'\right]}{2\left(1+\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2\right)}\,. \end{aligned} \tag{77}$$

Una de las soluciones es

$$z_{-} = \sin 2\chi'\,, \tag{78}$$

Reemplazando la solución anterior en las ecuaciones 69 y 70, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$x_{-} = \cos 2\chi' \cos 2\alpha' \tag{79}$$

y

$$y_{-} = \cos 2\chi' \sin 2\alpha'\,. \tag{80}$$

Estas últimas tres ecuaciones corresponden al vertice del cono. La otra solución para la variable z está dada por

$$z_{+} = \sin\delta' \cos 2\chi' \sin(2\alpha' - 2t) - \sin 2\chi' \cos\delta' \,, \tag{81}$$

Reemplazando de la solución anterior en las ecuaciones 69 y 70, se obtienen las siguientes ecuaciones para las variables

$$x_{+} = \cos 2\chi' \cos 2\alpha' + [\cos 2\chi' \sin(2\alpha' - 2t)(1 - \cos\delta') - \sin 2\chi' \sin\delta'] \sin 2t \,, \tag{82}$$

y,

$$y_{+} = \cos 2\chi' \sin 2\alpha' - [\cos 2\chi' \sin(2\alpha' - 2t)(1 - \cos\delta') - \sin 2\chi' \sin\delta'] \cos 2t \,. \tag{83}$$

Las últimas tres ecuaciones constituyen las ecuaciones paramétricas con $0 \leq t \leq \pi$*, las cuales se obtienen de la curva de intersección entre la esfera de Poincaré y un cono. De modo, que este resultado corresponde con los parámetros de Stokes del estado de polarización emergente* (S_1', S_2', S_3') *de la ecuación 65, cuando* $2\alpha' = 2\alpha$*,* $2\chi' = -2\chi$*, y el ángulo del cono es igual a la fase entre la componente de polarización proyectado a lo largo del eje rápido y la componente proyectado a lo largo del eje lento* $\delta' = \delta$*. Q.E.D*

El vértice del cono está ubicado en el estado de polarización $\mathbf{S}(2\alpha, -2\chi)$. Este resultado implica que el vértice del cono tiene la misma elipticidad y orientación del estado de entrada pero gira en sentido opuesto, razón por la que se le acuña el término de estados *enantiógiros* (del griego antiguo $\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\acute{\iota}o\varsigma$, enantíos–opuesto–y $\gamma\tilde{\upsilon}\rho o\varsigma$, gyrus, –giros–), por medio de la siguiente definición:

Definición 1 (Estados de polarización enantiógiros) *Dos estados de polarización se definen como enantiógiros, si tienen la misma orientación y elipticidad, pero giran en sentidos opuestos. Entonces, para un estado de polarización* $\boldsymbol{S}(2\alpha, 2\chi)$ *su estado enantiógiro se define por* $\boldsymbol{S}'(2\alpha, -2\chi)$. *Este resultado es esquematizado en la figura 6, en donde los estados enantiógiros son representados por* p *y* p'.

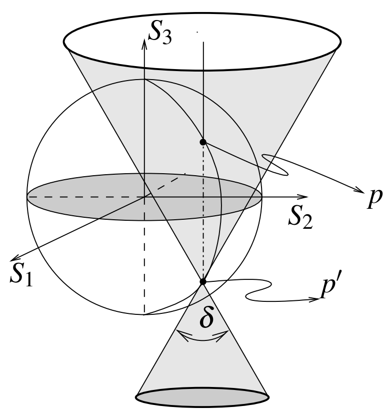


Figura 6. Representación de los estados enantiógiros p y p', los cuales definen el eje de simetría del cono, en donde p representa el estado de polarización del haz de entrada y su estado enantiógiro p' corresponde al estado asociado con el vértice del cono. En el caso particular que $p = p'$ el estado de polarización de entrada debe ser lineal.

En la práctica, los retardadores más utilizados son $\delta = \pi/2$ y $\delta = \pi$, los cuales se emplean para ilustrar los resultados anteriores.

2.3. Retardador cuarto de onda rotante

Para determinar las trayectorias que describen los estados de polarización emergentes de un haz polarizado monocromático que pasa a través de una placa de cuarto de onda que se rota de $0°$

a 180°, el estado de salida se escribe como

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} 1 \\ (\cos 2\chi \cos 2\alpha + [\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta) + \sin 2\chi] \sin 2\theta) \\ (\cos 2\chi \sin 2\alpha - [\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta) + \sin 2\chi] \cos 2\theta) \\ \cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta) \end{pmatrix} \tag{84}$$

El estado emergente $\mathbf{S}'$, forma interesantes trayectorias sobre la esfera de Poincaré (Reddy et al., 2016). Entre estas trayectorias se encuentran cinco casos que merecen un estudio especial.

2.3.1. Caso 1. Lugar geométrico para el estado de polarización lineal de entrada con $\chi = 0$.

Si el haz de entrada $\mathbf{S}(2\alpha, 0)$ está polarizado linealmente, los estados de polarización emergentes están determinados por

$$\mathbf{S}'(2\alpha, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(2\alpha - 2\theta) \cos 2\theta \\ \cos(2\alpha - 2\theta) \sin 2\theta \\ \sin(2\alpha - 2\theta) \end{pmatrix}. \tag{85}$$

La parte vectorial corresponde a la curva de Viviani (Oprea, 2007; Abbena et al., 2006). Esta curva también se puede obtener a partir de la intersección de un cilindro con la esfera de Poincaré como lo muestra Azzam en (Azzam, 2000).

En la figura 7 se representa gráficamente la ecuación 85 para $0 \leq \theta \leq \pi$, dando como resultado una trayectoria en forma de ocho simétrico sobre la esfera de Poincaré. El punto de intersección corresponde al estado de polarización lineal de la entrada haz, lo que indica que es un estado propio del retardador lineal. Además, para $2\alpha - 2\theta = \pm\pi/2$ los estados de polarización emergentes son circulares a derecha e izquierda, respectivamente.

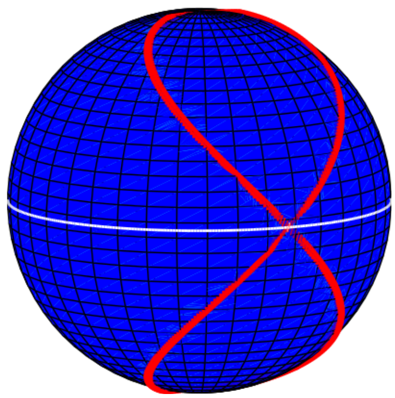


Figura 7. Simulación computacional de la ecuación 84. La trayectoria de color rojo describe el lugar geométrico de los estados de polarización emergentes a partir de un haz de entrada linealmente polarizado que pasa a través de un retardador cuarto de onda.

2.3.2. Caso 2. Lugar geométrico para el estado de entrada con $0 < |2\chi| < \pi/4$.

Los estados de polarización emergentes determinados por la ecuación 84, describen trayectorias en forma de ocho asimétricos, como se muestra en la figura 8.

A continuación se estudiará en detalle este caso para entender las características de estas trayectorias, la cual se tomará como estudio de referencia para cualquier birrefringente lineal con retardo $0 < \delta < \pi$.

2.3.2.1. Estados de polarización emergentes en el mismo meridiano que el estado del haz de entrada. En la curva en forma de ocho asimétrica (ver figura 8), algunos estados de

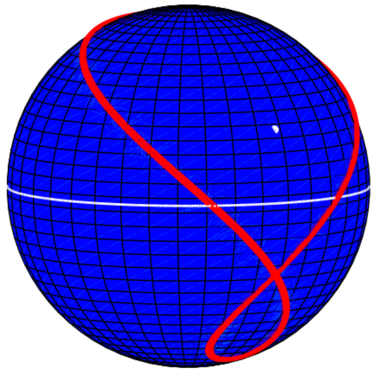


Figura 8. La trayectoria en forma de ocho asimétrico describe el lugar geométrico de los estados de polarización emergentes a partir de un haz de entrada polarizado con $0 < |2\chi| < \pi/4$, el cual pasa a través de un retardador cuarto de onda. El estado de entrada es representando por el punto blanco.

polarización emergentes $\mathbf{S}(2\alpha', 2\chi')$ están en el mismo meridiano que el estado del haz de entrada $\mathbf{S}_{entrada}(2\alpha, 2\chi)$, es decir, $2\alpha' = 2\alpha$ o $2\alpha' = 2\alpha + \pi \mod (2\pi)$; se definen estos estados como $\mathbf{S}_{superior}(2\alpha', 2\chi')$, $\mathbf{S}_{cruzado}(2\alpha', 2\chi')$ y $\mathbf{S}_{inferior}(2\alpha', 2\chi')$ como se muestra en la figura 9.

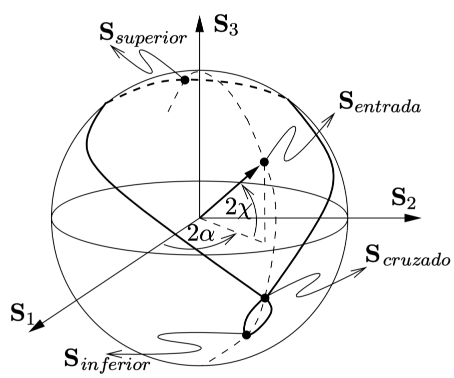


Figura 9. Esquematización de la curva en forma de ocho asimétrico, para un estado de entrada $\mathbf{S}_{entrada}$, los estados de salida en el mismo meridiano son $\mathbf{S}_{superior}$, $\mathbf{S}_{cruzado}$, y $\mathbf{S}_{inferior}$.

Para encontrar estos estados de polarización, primero calculamos el ángulo θ usando la ecuación 84, que mantiene el meridiano invariante. En donde, el $\cos(2\alpha + \pi) = -\cos 2\alpha$, y $\sin(2\alpha + \pi) = -\sin 2\alpha$, se tiene

$$\pm\cos 2\chi' \cos 2\alpha \quad = \quad \cos 2\chi \cos 2\alpha + [\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta) + \sin 2\chi] \sin 2\theta \,, \tag{86}$$

$$\begin{aligned} \pm\cos 2\chi' \sin 2\alpha \quad &= \quad \cos 2\chi \sin 2\alpha \\ &\quad -[\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta) + \sin 2\chi] \cos 2\theta \,, \end{aligned} \tag{87}$$

y,

$$\sin 2\chi' = \cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta) \,. \tag{88}$$

Resolviendo las ecuaciones 86 y 87 para $\cos 2\chi'$, e igualando se tiene

$$[\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta) + \sin 2\chi] \cos(2\theta - 2\alpha) = 0 \,. \tag{89}$$

Entonces, para la variable θ se obtienen las siguientes cuatro soluciones

$$2\theta_1 = 2\alpha - \arcsin(-\tan 2\chi) \,, \tag{90}$$

$$2\theta_2 = 2\alpha + \arcsin(-\tan 2\chi) - \pi \,, \tag{91}$$

$$2\theta_{-} = 2\alpha - \pi/2\,, \tag{92}$$

$$2\theta_{+} = 2\alpha + \pi/2\,. \tag{93}$$

Estas ecuaciones determinan los cuatro puntos de la trayectoria que cruza el meridiano correspondiente al estado de polarización del haz de entrada, los cuales se estudiaran a continuación.

2.3.2.2. Estado de polarización cruzado. Reemplazando las ecuaciones 90 y 91 de las variables θ_1 y θ_2 en la ecuación 84 (ver apéndice 5), se obtiene como resultado el mismo estado de polarización emergente que resulta en

$$\mathbf{S}_{cruzado}(2\alpha, 2\chi) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\chi \cos 2\alpha \\ \cos 2\chi \sin 2\alpha \\ -\sin 2\chi \end{pmatrix}. \tag{94}$$

La ecuación anterior corresponde al punto de intersección de la trayectoria sobre la esfera de Poincaré. Por lo tanto, si el estado de entrada es $\mathbf{S}_{entrada} = \mathbf{S}(2\alpha, 2\chi)$, entonces el estado de intersección es $\mathbf{S}_{cruzado} = \mathbf{S}(2\alpha, -2\chi)$, lo que significa que el estado en el punto de intersección y el estado del haz de entrada son estados de polarización enantiógiros (ver figura 9).

2.3.2.3. Estados de polarización superior e inferior. Reemplazando en la ecuación 84 las otras dos soluciones θ_- y θ_+ de las ecuaciones 92 y 93, se obtiene como resultado el valor mínimo y máximo del parámetro $2\chi'$ para el estado de polarización emergente (ver el apéndice 6). Es importante tener en cuenta, que debido a la simetría de la trayectoria sobre esfera de Poincaré, se va a discutir aquí solamente el caso en que el estado de polarización de entrada se encuentre en hemisferio norte de la esfera, es decir, $\chi > 0$.

El estado de polarización emergente con el valor mínimo de $2\chi'$, es decir, para θ_-, es

$$\mathbf{S}_{inferior}(2\alpha', 2\chi') = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin 2\chi \cos 2\alpha \\ \sin 2\chi \sin 2\alpha \\ -\cos 2\chi \end{pmatrix}, \tag{95}$$

en donde se observa que $2\chi' = 2\chi - \pi/2$, y $2\alpha' = 2\alpha$. Por otra parte, el estado de polarización emergente con un valor máximo de $2\chi'$, es decir, para θ_+, es

$$\mathbf{S}_{superior}(2\alpha', 2\chi') = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin 2\chi \cos 2\alpha \\ -\sin 2\chi \sin 2\alpha \\ \cos 2\chi \end{pmatrix}, \tag{96}$$

por tanto $2\chi' = \pi/2 - 2\chi$, y $2\alpha' = 2\alpha + \pi$. Así que, se escribe

$$\mathbf{S}_{superior} = \mathbf{S}(2\alpha + \pi,\, \pi/2 - 2\chi)\,, \tag{97}$$

y el punto más bajo está dado por

$$\mathbf{S}_{inferior} = \mathbf{S}(2\alpha,\, 2\chi - \pi/2)\,, \tag{98}$$

lo que significa que $\mathbf{S}_{superior}$ y $\mathbf{S}_{inferior}$ son diametralmente opuestos. Por lo tanto, son estados de polarización ortogonales como se muestra en la figura 10.

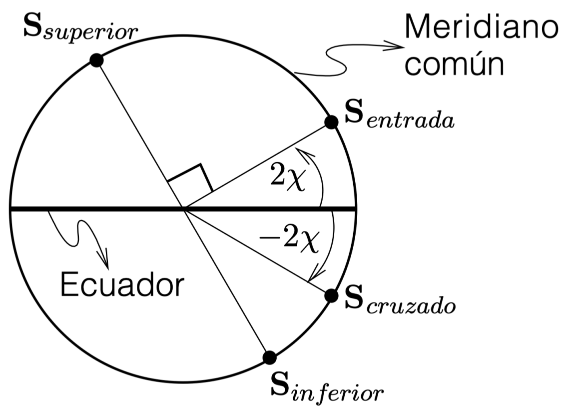


Figura 10. Esquematización del plano meridiano, y de los estados de polarización $\mathbf{S}_{entrada} = \mathbf{S}(2\alpha, 2\chi)$, $\mathbf{S}_{superior} = \mathbf{S}(2\alpha + \pi, \pi/2 - 2\chi)$, $\mathbf{S}_{inferior} = \mathbf{S}(2\alpha, 2\chi - \pi/2)$ y $\mathbf{S}_{cruzado} = \mathbf{S}(2\alpha, -2\chi)$. Los estados $\mathbf{S}_{superior}$ y $\mathbf{S}_{inferior}$ son diametralmente opuestos.

De acuerdo a lo anterior, la elipticidad del haz de salida está limitada por $|2\chi'| \leq \pi/2 - |2\chi|$, en donde χ es la elipticidad del haz de entrada.

Observación 1 *Los estados de polarización sobre la esfera de Poincaré que están por debajo del* *punto más bajo, o por encima del punto más alto, son estados a los que no se puede acceder mediante la combinación de los retardadores cuarto de onda y media onda a partir de un estado de entrada elíptico arbitrario.*

2.3.3. Caso 3. Estado de polarización de entrada con elipticidad $2\chi = \pm\pi/4$.

En el caso de que el haz de entrada tenga un estado de polarización con elipticidad $2\chi = \pm\pi/4$, los estados de polarización emergente están determinados por

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos 2\alpha + (\sin(2\alpha - 2\theta) + 1)\sin 2\theta] \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[\sin 2\alpha - (\sin(2\alpha - 2\theta) + 1)\cos 2\theta] \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(2\alpha - 2\theta) \end{pmatrix}. \tag{99}$$

Esta ecuación describe una trayectoria que ya no tiene una forma ocho asimétrica sobre la esfera de Poincaré, como se muestra en la figura 11.

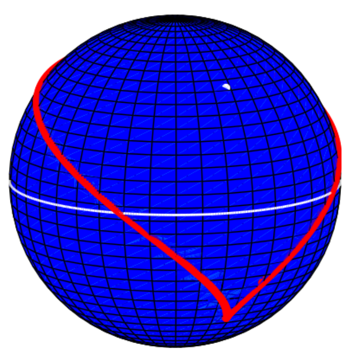


Figura 11. Los estados emergentes; para un haz polarizado de entrada con elipticidad $2\chi = \pi/4$, describen una trayectoria que ya no tiene una forma ocho asimétrica sobre la esfera de Poincaré. El estado de entrada es representando por el punto blanco.

2.3.4. Caso 4. Estado de polarización de entrada con elipticidad $\pi/4 < |2\chi| < \pi/2$.

Cuando el estado de polarización del haz de entrada es elíptico $\pi/4 < 2\chi < \pi/2$, los estados emergentes se obtienen por la ecuación 84. Estos estados describen una trayectoria en la esfera de Poincaré sin punto de intersección, como se muestra en la figura 12.

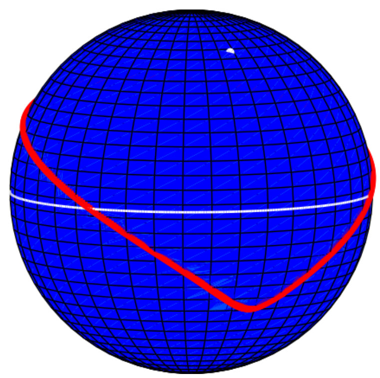


Figura 12. La trayectoria sobre la esfera de Poincaré describe los estados de polarización emergente cuando el haz polarizado de entrada tiene elipticidad $\pi/4 < 2\chi < \pi/2$. El estado de entrada es representando por el punto blanco.

En estos casos, el estado enantiógiro del estado del haz de entrada no es un estado de polarización del haz emergente, es decir, no es un punto de la trayectoria en la esfera de Poincaré, ya que las ecuaciones 90 y 91 no tienen solución.

2.3.5. Caso 5. Estado de polarización circular de entrada $|2\chi| = \pi/2$. En el caso que el haz de entrada está polarizado circularmente y pasa a través de un retardador cuarto de onda rotante, los estados de polarización emergentes están determinados por

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{100}$$

formando una distribución de puntos sobre el ecuador de la esfera de Poincaré, es decir, todos los estados de polarización de salida están polarizados linealmente.

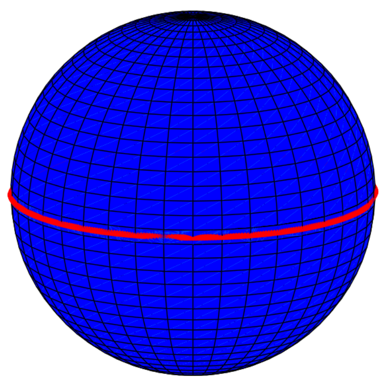


Figura 13. La trayectoria sobre la esfera de Poincaré describe los estados de polarización emergente cuando el haz de entrada tiene un estado de polarización circular $|2\chi| = \pi/2$.

2.3.6. Proyección sobre el plano de coordenadas (S_1, S_2)**.** Una caracterización de las diferentes trayectorias sobre la esfera de Poincaré estudiadas en las secciones anteriores es tomar sus proyecciones en el plano ecuatorial (S_1, S_2), como se muestra en la figura 14. Estas proyecciones corresponden a los Limaçon de Pascal (los caracoles de Pascal) (Lawrence, 1972).

Preposición 1 *La proyección en el plano ecuatorial de las trayectorias que describen los estados* *de polarización emergentes, a partir de la interacción de un retardador cuarto de onda rotante y un haz de luz polarizado corresponden a* Limaçon *de Pascal orientados según el estado de polarización de entrada.*

Demostración 2 *A partir de la parte vectorial de la ecuación general 84, la cual describen las trayectorias sobre la esfera de Poincaré, las proyecciones sobre el plano (S_1, S_2) corresponden a tomar la componente $\mathbf{S}_3$ igual a cero, luego*

$$\begin{aligned}(S_1,S_2) =&(\cos 2\chi \cos 2\alpha + \cos 2\chi \sin 2\alpha \cos 2\theta \sin 2\theta - \cos 2\chi \cos 2\alpha \sin^2 2\theta \\ &+ \sin 2\chi \sin 2\theta, \cos 2\chi \sin 2\alpha + \cos 2\chi \sin 2\alpha \cos^2 2\theta \\ &- \cos 2\chi \cos 2\alpha \sin 2\theta \cos 2\theta + \sin 2\chi \cos 2\theta)\,. \end{aligned} \tag{101}$$

Definiendo $a = \cos 2\chi \cos 2\alpha$, $b = \cos 2\chi \sin 2\alpha$ y $c = \sin 2\chi$, se tiene

$$\begin{aligned}(S_1,S_2) =&(a + b\cos 2\theta \sin 2\theta - a\sin^2 2\theta + c\sin 2\theta \\ &, b - b\cos^2 2\theta + a\sin 2\theta \cos 2\theta - c\cos 2\theta)\,, \end{aligned} \tag{102}$$

simplificando

$$\begin{aligned}(S_1,S_2) = &\left(a + \frac{b\sin 4\theta}{2} - a\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right) + c\sin 2\theta \right. \\ &\left. , b - b\left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) + \frac{a\sin 4\theta}{2} - c\cos 2\theta \right)\,. \end{aligned} \tag{103}$$

Finalmente, se obtienen

$$S_1 = \frac{a}{2}+\frac{b\sin 4\theta}{2}+\frac{a\cos 4\theta}{2}+c\sin 2\theta\,, \tag{104}$$

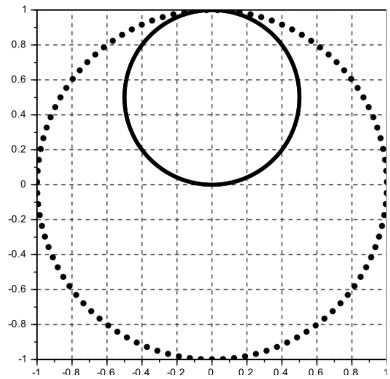
$$S_2 = \frac{b}{2}-\frac{b\cos 4\theta}{2}+\frac{a\sin 4\theta}{2}-c\cos 2\theta\,, \tag{105}$$

las ecuaciones paramétricas generalizadas de Limaçon *de Pascal, en donde* 2α *determina la orientación de* limaçon*, y* 2χ *caracteriza las diferentes curvas que surgen como casos especiales.*

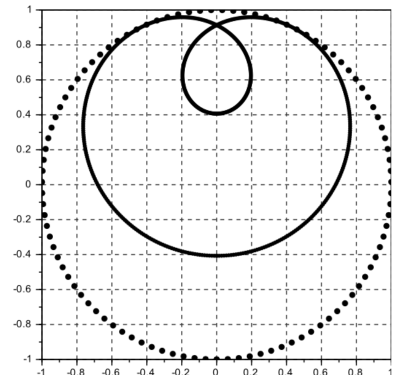
En la figura 14(a), se muestra la proyección de la trayectoria sobre la esfera de Poincaré en forma de ocho simétrico (ver figura 7), la curva de Viviani. Desde aquí, se puede observar que esta trayectoria se puede interpretar como la intersección de un cilindro y una esfera de diámetro igual a uno.

Las proyecciones en las figuras 14(b), 14(c) y 14(d), corresponden a los limaçon de Pascal, tomando $\alpha = \pi/4$. En la figura 14(b) el limaçon es un trisectriz, en la figura 14(c) el limaçon se degenera en un cardioide, y en la figura 14(d) el limaçon es cóncavo. Es importante tener en cuenta, que a medida que el estado del haz de entrada se acerca al polo, las proyecciones asociadas a las trayectorias que forman los estados emergentes, es decir, los limaçon de Pascal se vuelven convexos.

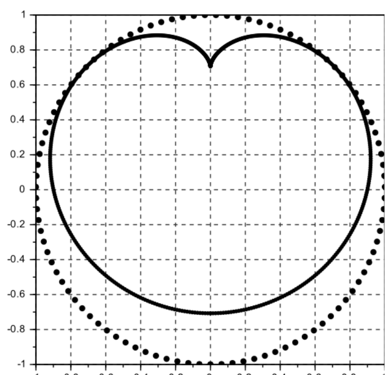
Observación 2 *Se puede observar en las figuras 8, 11 y 12, que estas trayectorias y sus proyecciones (ver la figura 14) no pueden adaptarse a la intersección entre una esfera de radio unitario y un cilindro.*



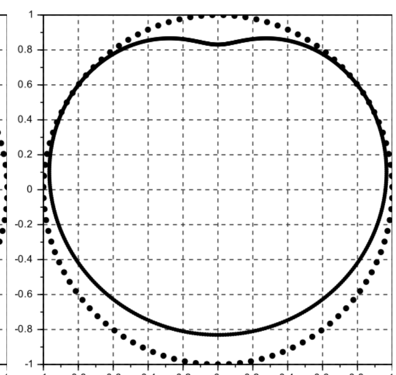
(a) Círculo.



(b) Caracol de Pascal con lazo interior.



(c) Cardioide de Pascal.



(d) Caracol de Pascal con concavidad.

Figura 14. Proyecciones sobre el plano (S_1, S_2) correspondientes a las trayectorias sobre la esfera de Poincaré de las figuras a) 7, b) 8, c) 11, y d) 12, respectivamente.

2.4. Retardador media onda rotante

En el caso de que un haz polarizado pase a través de un retardador media onda rotante, la ecuación del cono (ver ecuación 68) se degenera en la ecuación de un plano $z = -\sin 2\chi$. La curva de intersección entre el plano y la esfera de Poincaré es un círculo, como se muestra en la figura 15, que corresponde al paralelo donde se encuentra el estado enantiógiro del estado de entrada.

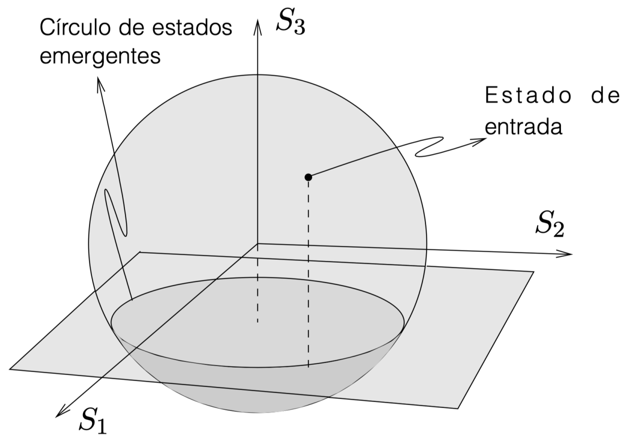


Figura 15. Representación gráfica de intersección entre la esfera de Poincaré y un plano, en donde la curva de intersección corresponde a la trayectoria que describen los estados emergentes, a partir de la interacción de un retardador media onda rotante y un haz polarizado.

2.5. Simulación y experimento de un retardador cuarto de onda rotante.

En la figura 16, se representa la configuración utilizada en el laboratorio, la cual permite generar las diferentes trayectorias que describen los estados de polarización emergente a partir de un haz monocromático polarizado de entrada que pasa a través de un retardador cuarto de onda que se rota desde 0 hasta 180. Las medidas experimentales se realizaron utilizando el polarímetro comercial de Thorlabs ($PAX5710VIS$, S/N:$M00255491$). Este es un polarímetro basado en la técnica de retardador cuarto de onda rotante, el polarizador sólo transmite la porción de luz que es paralela al eje de transmisión, la cual es medida mediante el fotodiodo (Berry et al., 1977). Por lo tanto, a partir de la corriente directa y las componentes de las amplitudes de los términos coseno y seno del segundo y cuarto armónicos de la señal de salida y mediante la transformada discreta de Fourier se obtienen los parámetros de Stokes (ver apéndice 9). Este polarímetro es capaz de medir los parámetros de Stokes después de media rotación del retardador cuarto de onda a un intervalo de tiempo de medición de 3ms, y cuya frecuencia máxima de rotación es de 333Hz.

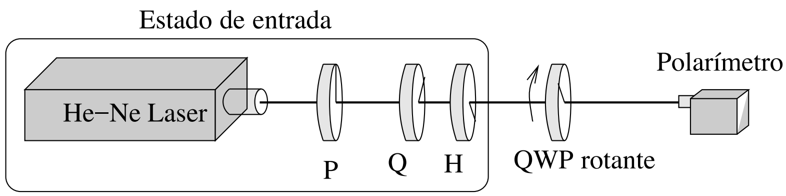
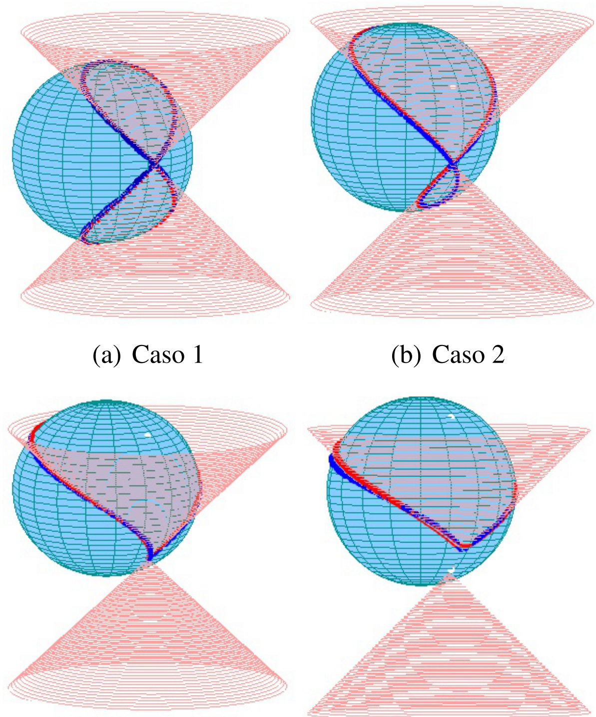


Figura 16. Representación del sistema óptico para el registro de datos experimentales.

El haz de entrada se prepara a partir de un láser He-Ne no polarizado (632.8nm) que se polariza cuando se hace pasar a través de un polarizador lineal (P), y mediante un retardador cuarto de onda (RCO) y media onda (RMO), se obtiene un estado arbitrario de polarización para el haz. Las trayectorias sobre la esfera de Poincaré que se obtienen experimentalmente se ajustan muy bien a la curva expresada en la ecuación 84, como se muestra a continuación. En todos los casos, el cono tiene su vértice en el estado de enantiógiro del estado de polarización del haz de entrada. El eje del cono está determinado por la línea recta definida por los puntos del estado de polarización del haz de entrada p y su estado enantiógiro p' (el vértice del cono), como se muetra en la figura 6.

En la figura 17, se superponen los datos simulados mediante la ecuación 84, puntos rojos, los datos tomados en la configuración experimental, los puntos azules, el punto blanco corresponden al estado del haz de entrada, y la curva resultante de la intersección entre la esfera de Poincaré con el cono.

Observación 3 *El vértice del cono sobre la esfera de Poincaré correspondiente al punto de in-*



(a) Caso 1 (b) Caso 2

(c) Caso 3 (d) Caso 4

Figura 17. Las trayectorias rojas corresponden a los datos calculados a partir de la ecuación 84, y las trayectorias azules corresponden a los datos experimentales. Las trayectorias se caracterizan por la curva de intersección entra la esfera de Poincaré y un cono. (a) Caso 1. Estado de polarización lineal de entrada $\mathbf{S}(\pi/2, 0)$. (b) Caso 2. Estado de polarización de entrada $\mathbf{S}(\pi/2, 0.1311\pi)$. (c) Caso 3. Estado de polarización de entrada $\mathbf{S}(\pi/2, \pi/4)$. (d) Caso 4. Estado de polarización de entrada $\mathbf{S}(\pi/2, 0.3120\pi)$.

tersección (ver ecuación 94), está relacionado con el estado de polarización del haz de entrada mediante la siguiente ecuación

$$V(2\alpha, \mp 2\chi) = \boldsymbol{S}(2\alpha, \pm 2\chi), \tag{106}$$

la cual caracteriza completamente la curva de intersección que describe los estados de polarización emergentes que un haz puede tener después de pasar a través de un retardador cuarto de *onda onda rotante.*

2.6. Relación entre el ángulo del cono, el estado de entrada y los estados $\mathbf{S}_{superior}$ y $\mathbf{S}_{inferior}$

Los estados de polarización $\mathbf{S}_{superior}$ y $\mathbf{S}_{inferior}$ están relacionados con el ángulo del cono (ver Apéndice 7), de la siguiente manera

$$\mathbf{S}'_{\pm}(2\alpha',2\chi') = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \cos(2\chi \pm \delta) \\ \sin 2\alpha \cos(2\chi \pm \delta) \\ \sin(2\chi \pm \delta) \end{pmatrix}, \tag{107}$$

en donde $\mathbf{S}'_{+} = \mathbf{S}_{superior}$ y $\mathbf{S}'_{-} = \mathbf{S}_{inferior}$. A través del componente $S_3(\pm 2\chi') = S_3(2\chi \pm \delta)$ del estado de polarización $\mathbf{S}'_{\pm}(2\alpha',2\chi')$, se obtiene la siguiente relación

$$\delta = \pm(2\chi' - 2\chi)\,. \tag{108}$$

Resultado que relaciona el ángulo del cono con los ángulos de elipticidad 2χ y $2\chi'$ del estado de polarización de entrada y estados $\mathbf{S}_{superior}(\mathbf{S}_{inferior})$, respectivamente. Es importante resaltar la simplicidad que implica el caso si el estado de entrada es lineal, ya que $2\chi = 0$, entonces se obtiene $\delta = \pm(2\chi')$, es decir, el ángulo del cono corresponde al ángulo de elipticidad del estado de polarización $\mathbf{S}_{superior}$ o $\mathbf{S}_{inferior}$. Esta es una de las ventajas de esta Ley ya que sólo es necesario realizar medidas en la elipticidad y la mayor elipticidad corresponde a la determinación del ángulo que a su vez representa el retardo de fase.

2.7. Conclusiones

Se ha presentado una caracterización completa de todas las trayectorias que describen los estados emergentes como resultado de hacer pasar un haz con polarización arbitraria ($P = 1$) a través de un retardador lineal con retardo arbitrario. En la sección 2.2, se da una nueva interpretación geométrica a partir de la curva de intersección entre la esfera de Poincaré y el cono, implicando una descripción completa de las trayectorias sobre la esfera de Poincaré. Estos resultados se estudiaron e ilustraron en las secciones 2.3 y 2.4 mediante simulaciones en los casos de retardadores cuarto de onda y media onda, respectivamente. Finalmente, en la sección 2.5 se muestran los resultados experimentales con un retardador cuarto de onda, los cuales corroboran los resultados teóricos que se obtuvieron. Por otra parte, se muestra que la proyección de estas trayectorias en el plano ecuatorial, tienen la forma de limaçon de Pascal (los caracoles de Pascal).

Los resultados anteriores también se obtienen en la formulación cuaterniónica de Pellat-Finet (ver apéndice 8).

3. Estadística de los parámetros de Stokes sobre la esfera de Poincaré: distribución de densidad de probabilidad de von Mises-Fisher

En el capítulo anterior se formuló la ley de los retardadores lineales rotantes, la cual describe el comportamiento sobre la esfera de Poincaré de la interacción de un haz polarizado y el retardador. Esta caracterización es válida si la fuente de luz es coherente, ya que si la fuente de luz es parcialmente coherente su grado de polarización disminuye cuando se propaga en medios birrefringentes. Por ejemplo, un retardador lineal divide el haz de entrada en dos componentes polarizados linealmente ortogonales que viajan a diferentes velocidades debido a la birrefringencia del material, conllevando a un cambio de fase entre las dos componentes del haz, es decir un cambio de estado de polarización. Un retardador ideal no debería cambiar el grado de polarización. Sin embargo, el grado de polarización para un haz de luz parcialmente coherente disminuye debido a la transmisión del haz a través de retardadores como se demuestra en (Domanski, 2005). Esta disminución del grado de polarización implica una despolarización de la fuente cuyo estado de polarización cambia con el tiempo, de manera que la dinámica de su polarización sobre la esfera de Poincaré constituye un proceso aleatorio propio de la estadística de la fuente (Brosseau, 1998; Korotkova, 2017). Este estado de polarización está definido por los promedios de ensamble de los parámetros instantáneos de Stokes, y su representación en la esfera de Poincaré corresponde a un punto en la esfera o una región interna, de acuerdo con el grado de polarización de la fuente. Recientemente, se ha introducido un nuevo enfoque para estudiar la dinámica de polarización en la esfera de Poincaré formulando y midiendo el tiempo de polarización mediante las correlaciones de los parámetros de Stokes en un tiempo t y un tiempo posterior $t+\tau$ (Shevchenko et al., 2009, 2017).

La esfera de Poincaré es una herramienta visual muy práctica, tanto los problemas que involucran fuentes de luz aleatorias como los relacionados con la luz polarizada (Set*älä* et al., 2008; Salazar-Ariza and Torres, 2018; Perez and Ossikovski, 2016). Las fuentes de luz naturales como la luz solar, y artificiales como fuentes halógenas, LED, bombillas incandescentes, entre otras, producen luz parcialmente polarizada y no polarizada, debido a la naturaleza aleatoria de los emisores de luz de estas fuentes (Khanna, 2014; Csele, 2004). Por otro lado, hasta ahora no se ha adaptado la estadística direccional para estudiar fuentes de luz estacionaria con grado de polarización arbitrario sobre la esfera de Poincaré(Brosseau, 1998; Korotkova, 2017). De ahí que, en este capítulo se caracteriza la fluctuación del estado de polarización a través de distribuciones de densidad de probabilidad sobre la esfera de Poincaré, implicando definir nuevos parámetros asociados a observables medibles. Además, se estudia el comportamiento de las distribuciones marginales de los parámetros de Stokes sobre los ejes de la esfera de Poincaré. Finalmente, se realiza la comprobación experimental de los resultados teóricos.

3.1. Distribución de von Mises-Fisher sobre la esfera de Poincaré

La distribución de von Mises-Fisher (vMF) adapta una distribución normal a la superficie de una esfera de radio unitario, formulada para un vector aleatorio (ver apéndice 11) (Fisher, 1953; Mardia and Jupp, 2009). Donde se destacan sus aplicaciones en áreas como: astronomía (Mardia and Edwards, 1982), medicina (Ryali et al., 2013), geología (Heslop et al., 2014), entre otras (Ley and Verdebout, 2017). Por otra parte, la esfera de Poincaré es un método gráfico que mediante puntos representa el estado de polarización de una fuente de luz (Brosseau, 1998; Goldstein, 2017), permitiendo así visualizar como fluctúa el estado de polarización de fuentes parcialmente polarizadas (Ellis and Dogariu, 2004; Collett, 2003). Por lo tanto, se propone caracterizar la dinámica de la polarización de una fuente de luz aleatoria a través de distribuciones de vMF sobre la esfera de Poincaré como se muestra en la figura 18.

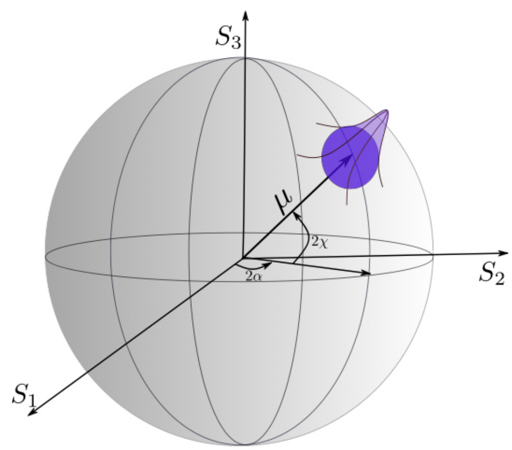


Figura 18. Esquematización de la distribución de vMF sobre la esfera de Poincaré. El parámetro $\boldsymbol{\mu}$ representa el vector unitario dirección media, y la distribución de puntos sobre la esfera delimitada por el parámetro de concentración κ representa la dinámica de polarización de una fuente de luz.

La distribución de densidad de probabilidad de vMF para un vector unitario aleatorio $\mathbf{S}$ está definida como:

$$f(\mathbf{S};\boldsymbol{\mu},\kappa) = \frac{\kappa}{4\pi \sinh \kappa} e^{\kappa \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{S}}, \qquad \kappa \geq 0, \tag{109}$$

en donde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ es un vector unitario llamado dirección media y κ es el parámetro de concentración. Escribiendo $\mathbf{S}$ y $\boldsymbol{\mu}$ en coordenadas esféricas, se tiene

$$\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3) = (\cos 2\chi \cos 2\alpha, \cos 2\chi \sin 2\alpha, \sin 2\chi), \tag{110}$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\cos 2\beta \cos 2\theta, \cos 2\beta \sin 2\theta, \sin 2\beta), \tag{111}$$

siendo $-\pi/4 \leq (\chi, \beta) < \pi/4$ y $0 \leq (\alpha, \theta) < \pi$. Mediante una transformación Jacobiana, la ecuación 109 se escribe en la forma

$$f(2\alpha, 2\chi; 2\theta, 2\beta, \kappa) = \frac{\kappa \cos 2\chi}{4\pi \sinh \kappa} e^{\kappa(\cos 2\beta \cos 2\chi \cos(2\alpha - 2\theta) + \sin 2\beta \sin 2\chi)}. \tag{112}$$

El primer momento está dado por (Hillen et al., 2017)

$$E[\mathbf{S}] = \left(\coth \kappa - \frac{1}{\kappa}\right) \boldsymbol{\mu}. \tag{113}$$

El valor esperado corresponde a un promedio de ensamble. Esta relación permite formular una ecuación para el grado de polarización P en función del parámetro de concentración κ

$$P = \left(\coth \kappa - \frac{1}{\kappa}\right). \tag{114}$$

Por lo tanto, el parámetro de concentración κ constituye una medida del grado de correlación temporal entre los parámetros Stokes en un tiempo t. Sin embargo, la distribución de von Mises-Fisher no contiene las auto-correlaciones y correlaciones cruzadas del vector de Stokes, de ahí que no se puede relacionar con el grado de correlación sobre la esfera de Poincaré propuestos por Setälä *et al* (Shevchenko et al., 2017). Por otro lado, es importante apreciar que cuando $\kappa \to \infty$ el grado de polarización es igual a uno, y la distribución de vMF de la ecuación 112 tiende a una distribución de Dirac o un estado puro de polarización. En el otro extremo, cuando $\kappa \to 0$ el grado de polarización es cero, lo que corresponde a una fuente de luz no polarizada, y la distribución de vMF es igual a $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu},0) = 1/4\pi$, señalando que todos los estados de polarización de la fuente sobre la esfera son igualmente probables.

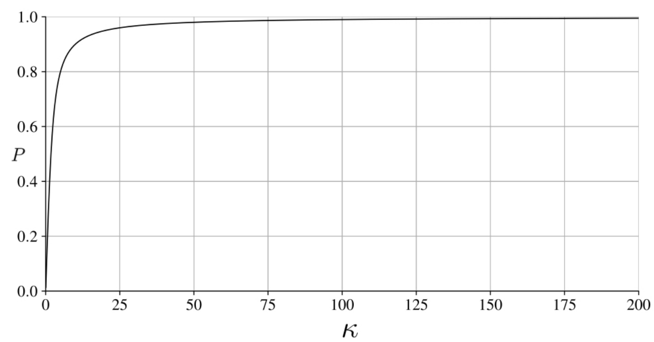
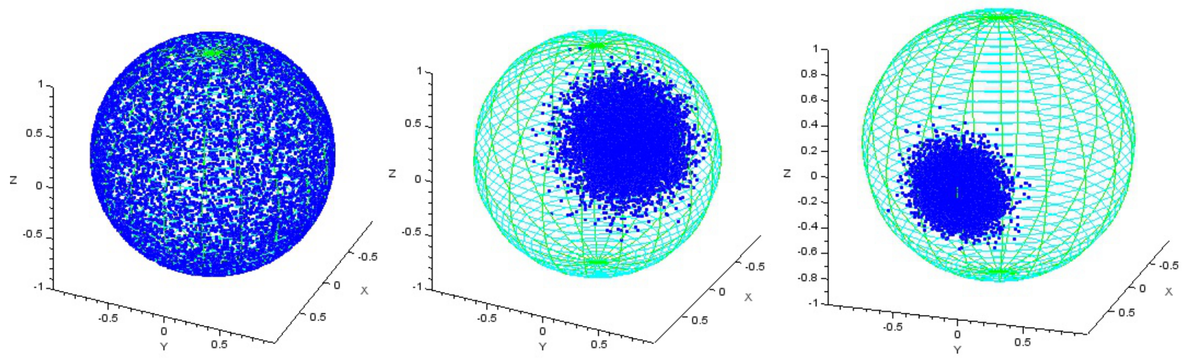


Figura 19. En la figura se representa gráficamente la relación entre el grado de polarización P y el parámetro de concentración κ.

En la simulación mostrada en la figura 20, se representan tres diferentes parámetros de concentración y dirección media de la distribución de vMF para diez mil muestras. Mediante las relaciones 114 y 113 se obtiene que el grado de polarización P y los promedios temporales (asumiendo la hipótesis de ergodicidad) de los parámetros de Stokes normalizados, asociados a las figuras 20(a), 20(b) y 20(c) son: $P = 0$ y $\mathbf{S} = (0,0,0)$, $P = 0.95$ y $\mathbf{S} = (0.55, 0.55, 0.54)$, y $P = 0.98$ y $\mathbf{S} = (0.98, 0, 0)$, respectivamente.



(a) (b) (c)

Figura 20. Representación gráfica de la distribución de vMF con parámetro de concentración y dirección media: a) $\kappa = 0$, b) $\kappa = 20$, $\boldsymbol{\mu} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ y c) $\kappa = 50$, $\boldsymbol{\mu} = (1,0,0)$.

3.2. Relación entre la distribución de von Mises-Fisher y la distribución de Eliyahu-Brosseau

La estadística de los parámetros de Stokes asociada a las fluctuaciones aleatorias del estado de polarización de fuentes de luz parcialmente polarizadas ha sido estudiada por Barakat (Barakat, 1987b), en donde presentó expresiones analíticas de las distribuciones de densidad de probabilidad de los cuatro parámetros de Stokes. Sin embargo, la estadística de los parámetros de Stokes normalizados propuesta por Brosseau (Brosseau, 1995b) es la de mayor interés para nuestro estudio, dado que estas tienen una significancia sobre la esfera de Poincaré y por lo tanto pueden ser relacionadas con la distribución de vMF.

Bajo la hipótesis de independencia estadística de la fase y amplitud del vector de campo eléctrico de una luz parcialmente polarizada, la función de distribución de probabilidad de Eliyahu-Brosseau del parámetro de Stokes normalizado S_1, correspondiente al campo de onda plana estocástica gaussiana está dado por 53, como se demuestra a continuación

Preposición 2 *Si un vector de campo eléctrico aleatorio estacionario de una onda electromag-*

nética parcialmente polarizada tiene fluctuaciones en amplitud y fase que son estadísticamente independientes, entonces la distribución de probabilidad de los parámetros de Stokes en la esfera de Poincaré tiene la forma de una distribución vMF.

Demostración 3 *Los parámetros instantáneos de Stokes están definidos por:*

$$s_0(t) = E_x^2(t) + E_y^2(t), \tag{115}$$

$$s_1(t) = E_x^2(t) - E_y^2(t), \tag{116}$$

$$s_2(t) = 2E_x(t)E_y(t)\cos\delta(t), \tag{117}$$

$$s_3(t) = 2E_x(t)E_y(t)\sin\delta(t), \tag{118}$$

Si la fase y la amplitud son estadísticamente independientes

$$E[s_2(t)] = 2E[E_x(t)E_y(t)]E[\cos\delta(t)], \tag{119}$$

$$E[s_3(t)] = 2E[E_x(t)E_y(t)]E[\sin\delta(t)], \tag{120}$$

entonces su correlación se escribe como

$$E[s_2(t)s_3(t)] = 4E[E_x^2(t)E_y^2(t)]E[\cos\delta(t)\sin\delta(t)], \tag{121}$$

como $E[\cos\delta(t)\sin\delta(t)] = 0$*, entonces* s_2 *y* s_3 *son estáticamente independientes.*

Por otra parte, la distribución de von Mises-Fisher para el vector aleatorio $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ sobre la esfera de Poincaré, se escribe de la forma

$$f(\mathbf{S}; \boldsymbol{\mu}, \kappa) = c(\kappa, 0)e^{\kappa \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{S}}. \tag{122}$$

Las componentes del vector de Stokes normalizados en función de las variables amplitud y fase, se escriben como

$$S_1 = \frac{E_x^2(t) - E_y^2(t)}{E_x^2(t) + E_y^2(t)}, \tag{123}$$

$$S_2 = \frac{2E_x(t)E_y(t)\cos\phi}{E_x^2(t) + E_y^2(t)}, \tag{124}$$

$$S_3 = \frac{2E_x(t)E_y(t)\sin\phi}{E_x^2(t) + E_y^2(t)}, \tag{125}$$

Remplazando las ecuaciones anteriores, en la ecuación 122, se tiene

$$\begin{aligned} f(E_x^2(t), E_y^2(t), \phi; \boldsymbol{\mu}, \kappa) =& c(\kappa, 0) exp\left\{ \kappa \left[\mu_1 \left(\frac{E_x^2(t) - E_y^2(t)}{E_x^2(t) + E_y^2(t)} \right) \right.\right. \\ &\left.\left. + \left(\frac{2E_x(t)E_y(t)}{E_x^2(t) + E_y^2(t)} \right) (\mu_2 \cos\phi + \mu_3 \sin\phi) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{126}$$

Teniendo que $\mu_2 \cos\phi + \mu_3 \sin\phi = \sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2} \sin(\phi + a) = \sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2} \cos(\phi + \tilde{a})$, con $\tilde{a} = a + pi/2$, siendo a la fase ($a = \arctan \mu_3/\mu_2$), se llega a

$$\begin{aligned} f(E_x^2(t), E_y^2(t), \phi; \boldsymbol{\mu}, \kappa) =& c(\kappa, 0) \exp\left\{ \kappa \left[\mu_1 \left(\frac{E_x^2(t) - E_y^2(t)}{E_x^2(t) + E_y^2(t)} \right) \right.\right. \\ &\left.\left. + 2\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2} \left(\frac{E_x(t)E_y(t)}{E_x^2(t) + E_y^2(t)} \right) \cos(\phi + \tilde{a}) \right] \right\} \end{aligned} \tag{127}$$

Integrando la fase, debido a su independencia con la amplitud y teniendo que $\langle s_0 \rangle = E_x^2(t) + E_y^2(t)$

$$\begin{aligned} f(E_x(t), E_y(t), \phi; \boldsymbol{\mu}, \kappa) =& c(\kappa, 0) \exp\left\{ \kappa\mu_1 \left(\frac{E_x^2(t) - E_y^2(t)}{\langle s_0 \rangle} \right) \right\} \\ & \int_0^{2\pi} \exp\left\{ 2\kappa\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2} \left(\frac{E_x(t)E_y(t)}{\langle s_0 \rangle} \right) \cos(\phi + \tilde{a}) \right\} d\phi\,, \end{aligned} \tag{128}$$

y teniendo en cuenta $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(acos\theta) d\theta = I_0(a)$, se obtiene

$$\begin{aligned} f(E_x^2(t), E_y^2(t), \phi; \boldsymbol{\mu}, \kappa) =& c(\kappa, 0) \exp\left\{ \kappa\mu_1 \left(\frac{E_x^2(t) - E_y^2(t)}{\langle s_0 \rangle} \right) \right\} \\ & I_0 \left[2\kappa\sqrt{\mu_2^2 + \mu_3^2} \left(\frac{E_x(t)E_y(t)}{\langle s_0 \rangle} \right) \right]. \end{aligned} \tag{129}$$

En el caso en que μ_2 y μ_3 sean iguales a

$$\mu_2^2 + \mu_3^2 = \frac{2(P^2 - \mu_1^2)}{\kappa}. \tag{130}$$

Reemplazando la ecuación anterior en 130 en las ecuación 129, se llega a

$$\begin{aligned} f(E_x^2(t), E_y^2(t)) =& c(\kappa, 0) \exp\left\{ -\mu_1 \kappa \left(\frac{E_y^2(t) - E_x^2(t)}{\langle s_0 \rangle} \right) \right\} \\ & I_0 \left(\frac{4(P^2 - \mu_1^2)^{1/2}}{\langle s_0 \rangle} E_x(t) E_y(t) \right). \end{aligned} \tag{131}$$

La función de distribución del cociente de las variables $E_x^2(t)$ y $E_y^2(t)$ con función de densidad de probabilidad conjunta $f(E_x^2(t), E_x^2(t))$, se define mediante la variable aleatoria auxiliar $u = E_x^2(t)/E_y^2(t)$, de manera que

$$f(E_x^2(t), E_y^2(t)) = (f_1(E_x^2(t), E_y^2(t)), f_2(E_x^2(t), E_y^2(t))) = (E_x^2(t)/E_y^2(t), E_y^2(t)), \tag{132}$$

en donde su transforma inversa está dada por

$$g(E_x^2(t), E_y^2(t)) = (uE_y^2(t), E_y^2(t)), \tag{133}$$

y el Jacobiano de la transformación inversa correspondiente es

$$J(E_x^2(t), E_y^2(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial E_y^2(t)} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial E_y^2(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_y^2(t) & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_y^2(t) \tag{134}$$

Por lo tanto, se define la función de distribución de la variable aleatoria U como:

$$P_U(u) = \int_{R^+} E_y^2(t) f(uE_y^2(t), E_y^2(t)) dE_y^2(t) \tag{135}$$

Sustituyendo la ecuación 131 dentro de la ecuación anterior, y empleando la integral

$$\int_0^\infty xe^{-px} I(ax)dx = \frac{p}{(p^2 - a^2)^{3/2}}, \tag{136}$$

se obtiene,

$$P_U(u) = c(\kappa, 0) \frac{\langle s_0^2 \rangle [\kappa \mu_1 (u-1)]}{[\kappa \mu_1 (u-1)]^2 - 4u(P^2 - \mu_1^2)]^{3/2}} \tag{137}$$

Si κ cumple con la condición

$$\kappa = 1 + \frac{u+1}{\mu_1 (u-1)}, \tag{138}$$

de manera que si la variable aleatoria auxiliar toma el valor de $u = \frac{\mu_1 - 1}{\mu_1 + 1}$, κ será igual a cero, y si $u = 1$ entonces $\kappa = \infty$. Imponiendo la condición de la ecuación anterior y la condición $c(\kappa, 0)\langle s_0^2 \rangle = 1 - P^2$, se llega

$$P_U(u) = \frac{(1 - P^2)[1 + u + \mu_1 (u-1)]}{[1 + u + \mu_1 (u-1)]^2 - 4u(P^2 - \mu_1^2)]^{3/2}} \tag{139}$$

De acuerdo a la ecuación 123 y la relación $u = E_y^2(t)/E_x^2(t)$,se tiene

$$S_1 = \frac{1-u}{1+u}. \tag{140}$$

Si U es una variable aleatoria real absolutamente continua cuya función de densidad de probabilidad definida por 139, y su vez $f_{S_1}(S_1)$ es una función estrictamente monótona y diferenciable, entonces la variable S_1 se puede expresar mediante la ecuación

$$f_{S_1}(S_1) = \frac{P_U(f^{-1}(S_1))}{|dS_1/du|}, \tag{141}$$

en donde f^{-1} corresponde con la inversa f y $|dS_1/du|$ debe estar expresada en términos de la variable S_1, de manera

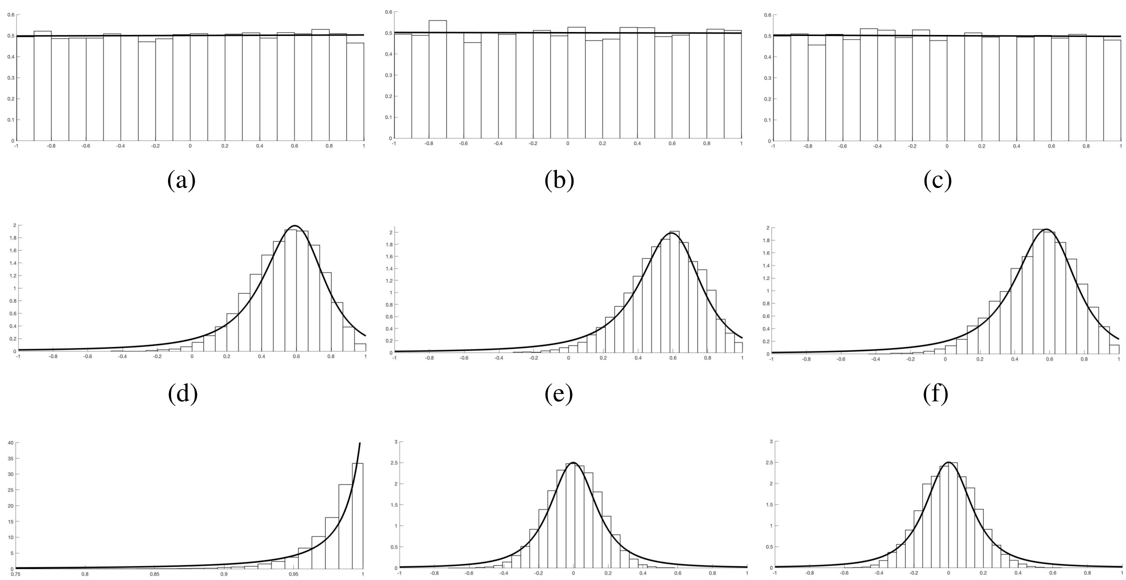
$$f_{S_1}(S_1) = \frac{2}{(1+S_1)^2} P_U\left(\frac{1-S_1}{1+S_1}\right), \tag{142}$$

Sustituyendo la ecuación 136 en la ecuación anterior,

$$P(S_1) = \frac{1-P^2}{2} \frac{1-S_1\mu_1}{[(1+S_1\omega_1)^2-(1-S_1^2)(P^2-\mu_1^2)]^{3/2}}, \tag{143}$$

se llega a la distribución de Eliyahu-Brosseau. Este resultado indica que las distribución marginales de la distribución de von Mises-Fisher toman la forma de las distribuciones de Eliyahu-Brosseau, siempre y cuando se cumplan las condiciones 138 y 130.

La curva continua en la figura 21 describe la función de densidad de probabilidad de los



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

(g) (h) (i)

Figura 21. El histograma de las figuras 21(a)-21(c), 21(d)-21(f) y 21(g)-21(i) representan las proyecciones sobre los ejes de la distribución de puntos sobre la esfera de Poincaré asociada a la distribución de vMF de las gráficas 20(a), 20(b) y 20(c), respectivamente. La curva continua representa las distribuciones de Brosseau.

parámetros de Stokes normalizados derivados por Eliyahu-Brosseau, donde el grado de polarización P y valor esperado ω_1,ω_2 y ω_3 son los mismos que los obtenidos en la sección anterior para los tres casos estudiados anteriormente (ver sección 1.8.1). Entonces, los histogramas muestran el mismo comportamiento estadístico de las distribuciones de Eliyahu-Brosseau para los tres casos. La independencia estadística de la fase y la amplitud del vector de campo eléctrico de una fuente de luz parcialmente polarizada implica que las variables aleatorias S_2 y S_3 del vector de Stokes son estadísticamente independientes, y si se cumplen las condiciones dadas por las ecuaciones 138 y 130 se formará sobre la esfera de Poincaré distribuciones con contornos circulares.

3.3. Simulación y experimento

La configuración utilizada en el laboratorio se esquematiza en la figura 22. Las distribuciones de Eliyahu-Brosseau corresponden a una fuente de luz con amplitudes y fases no correlacionadas, y dado que estas correlaciones se dan para los componentes del campo eléctrico $E_x(t_1)$ y $E_y(t_2)$ con $\tau = t_2 - t_1$ menor que el tiempo de coherencia, para fuentes parcialmente coherentes y de acuerdo con los resultados de la referencia (Domanski, 2005), cada placa birrefringente introduce retrasos que despolarizan, y si estas placas se disponen con sus ejes rápidos orientados arbitrariamente, finalmente podemos retrasar las amplitudes y las fases hasta romper la coherencia entre ellas y alcanzar una distribución de vMF cuyas distribuciones marginales corresponden a los de Eliyahu-Brosseau.

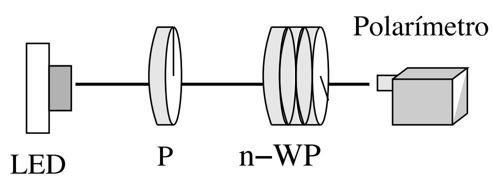
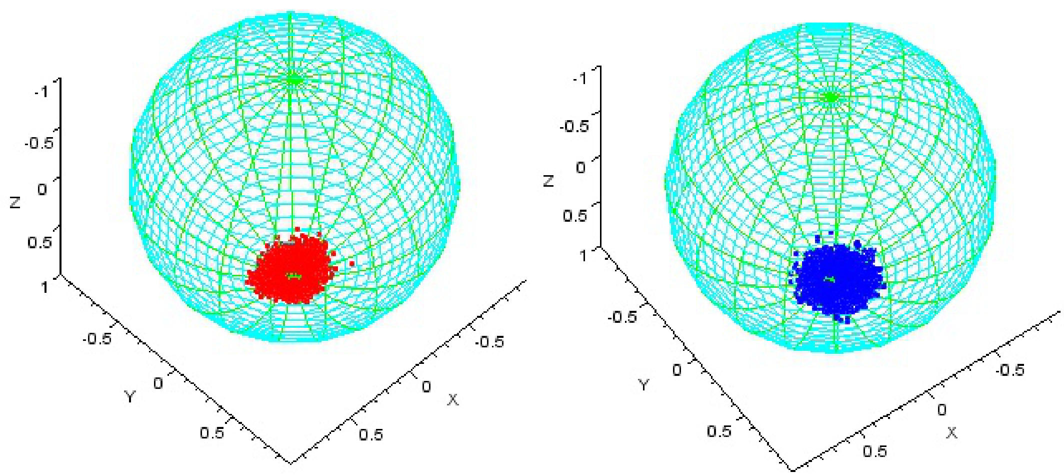


Figura 22. Esquematización del sistema óptico para el registro de datos experimentales.

Las medidas experimentales se llevaron a cabo utilizando un polarímetro comercial Thorlabs (PAN5710VIS), que se basa en una placa de onda giratoria y un polarizador (Flueraru et al., 2008). El haz de entrada se preparó a partir de un diodo parcialmente coherente y no polarizado con una longitud de onda central de 625*nm*, que se polarizó para un polarizador lineal dicroico (P). Posteriormente, el haz pasó a través de n-retardadores adecuadamente dispuestos; estos introdujeron una disminución en el grado de polarización de la fuente y permitieron la generación de una fuente de luz cuyos estados de polarización de salida formaron en la esfera de Poincaré una distribución con contornos circulares, es decir, los n-retardadores introdujeron decorelaciones entre amplitudes y fases. Por lo tanto, para una fuente incoherente, el estado de polarización de salida no corresponde a una rotación en la esfera de Poincaré sino a la despolarización.

El tiempo τ de captura del polarímetro (333 estados de polarización por segundo) es mucho mayor que el llamado tiempo de polarización (algunas decenas de femtosegundos) (Shevchenko et al., 2017), lo que significa que el rango del estado registrado en una captura está constituido en un muestra representativa del proceso aleatorio, que se supone estacionario y ergódico. Por lo tanto, en cada período de detección de polarímetro, esto divide la señal aleatoria en segmentos largos en comparación con el tiempo de polarización, y bajo la hipótesis de ergodicidad, cada segmento es un conjunto representativo de la señal aleatoria completa, por lo que la información estadística está contenida en una señal de muestra única de la señal aleatoria. Se ha demostrado que la independencia estadística de cada parte de la señal segmentada es suficiente para garantizar que un proceso pueda estimarse a partir de una única señal de muestra (Torres et al., 2018). Esto es lo que permite que las predicciones teóricas basadas en una hipótesis ergódica coincidan con los resultados experimentales (Wolf, 2007).

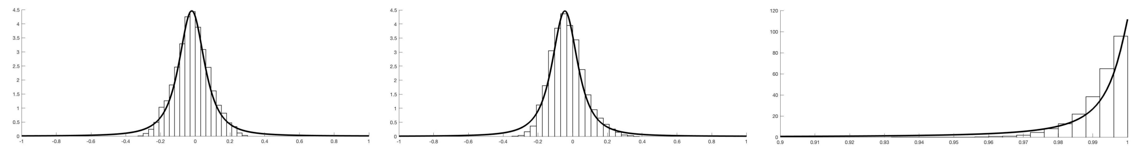
Se midieron por medio del polarímetro diez mil valores correspondiente a los tres parámetros de Stokes normalizados, es decir, correspondiente al promedio sobre el tiempo de integración del detector. En nuestro caso, este tiempo de integración fue suficiente para poder muestrear la dinámica de la polarización y así estimar la distribución de vMF. Luego, se obtuvo el grado de polarización 0.994 y el valor esperado de los parámetros de Stokes $E[\mathbf{S}] = (-0.019, -0.045, 0.993)$. Los datos experimentales que se obtuvieron se representan en la esfera de Poincaré como se muestra en la figura 23(a). Por otro lado, la figura 23(b) representa los datos simulados de una distribución vMF. Usando las ecuaciones 113 y 114, a partir de los datos experimentales, calculamos la dirección media $\boldsymbol{\mu} = (-0.020, -0.045, 0.999)$ y el parámetro de concentración $\kappa = 166.667$, que se utilizan como parámetros de entrada para la simulación.



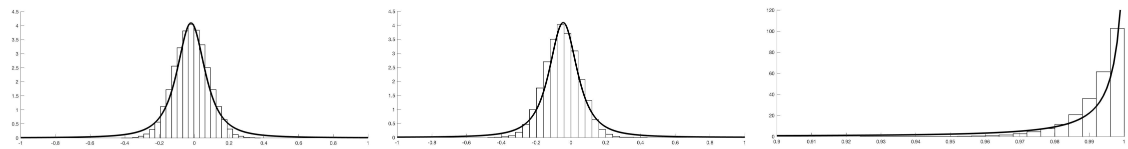
(a) (b)

Figura 23. En La figura 23(a) se representa los datos experimentales. La figura 23(b) corresponde a los datos simulados de la dsitribución de vMF.

Los histogramas en las figuras 24(a)-24(c) y 24(d)-24(f) representan las proyecciones sobre los ejes de distribución de los datos experimentales en la figura 23(a) y los datos simulados 23(b), respectivamente, que muestran el mismo comportamiento estadístico que las distribuciones de Eliyahu-Brosseau. Este resultado implica que las fuentes de luz parcialmente polarizadas con amplitud y fase estadísticamente independientes corresponden sobre la esfera de Poincaré a distribuciones de vMF. Por lo tanto, la distribución vMF de parámetros de Stokes normalizados aleatorios estadísticamente independientes está bien adaptada al estudio de la dinámica de polarización en la esfera de Poincaré.



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

Figura 24. El histograma de las figuras 24(a)-24(c) y 24(d)-24(f) representan las proyecciones sobre los ejes de la distribución de puntos sobre la esfera de Poincaré asociada a la distribución de vMF de las figuras 23(a) y 23(b), respectivamente. La curva continua representa la distribución de Brosseau.

3.4. Conclusiones

En resumen, se logró mediante los parámetros $(\boldsymbol{\mu},\kappa)$ estudiar fuentes de luz parcialmente polarizadas cuyo estado de polarización fluctúa describiendo una distribución simétrica sobre la esfera de Poincaré. Por consiguiente, los parámetros de la distribución de von Mises-Fisher permiten acoplarse con el método gráfico de Poincaré. Además, se estudiaron las proyecciones sobre las coordenadas de la esfera de Poincaré mediante la distribución de Eliyahu-Brosseau. En el próximo capítulo se generalizarán los resultados anterior mediante distribuciones asimétricas sobre la esfera de Poincaré.

4. Estadística de los parámetros de Stokes sobre la esfera de Poincaré: distribución de densidad de probabilidad de Kent

En el capítulo anterior se estudiaron las propiedades estadísticas de la polarización de fuentes de luz estacionarias; cuya fase y amplitud del campo eléctrico son estadísticamente independientes, mediante distribución densidad de probabilidad de von Mises-Fisher sobre la esfera de Poincaré (Salazar-Ariza and Torres, 2019). Estas distribuciones marginales presentan el mismo comportamiento estadístico de las distribuciones de Eliyahu-Brosseau (Eliyahu, 1994; Brosseau, 1995b), siempre y cuando se cumplan las condiciones 138 y 130. Sin embargo, la distribución de von Mises-Fisher no incluye correlaciones de cuarto orden implicando que sólo puede describir fuentes cuya dinámica de polarización tenga simetría rotacional sobre la esfera de Poincaré. Además, en muchos fenómenos de des-polarización la fluctuación del estado de polarización de la fuente no necesariamente es simétrico, lo que conlleva sobre la esfera de Poincaré a tener distribuciones con contornos no circulares (Ghabbach et al., 2014), y por lo tanto, sus distribuciones marginales ya no correspondan con las distribuciones de Brosseau-Eliyahu.

En este capítulo, se presente una generalización de los resultados anteriores mediante la distribución Kent, siendo la distribución de von Mises-Fisher un caso particular. Este resultado permite tener distribuciones sobre la esfera de Poincaré que incluye correlaciones de cuarto orden de los parámetros de Stokes, así como obtener una relación entre el grado de polarización y valor esperado de Stokes con los parámetros de concentración y elipticidad de la distribución de Kent $(P, \mathbf{S}) \rightarrow (\kappa, \beta)$. Además, se presenta una caracterización de las fuentes de luz parcialmente polarizadas mediante una expresión general del grado de correlación sobre la esfera de Poincaré.

4.1. Distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré

La estadística direccional describe las observaciones que son de naturaleza angular (ver apéndice 10), mediante vectores en el espacio bidimensional y tridimensional, implicando el estudio de distribuciones de densidad de probabilidad (Mardia and Jupp, 2009). En el caso de superficies esféricas una de las más utilizadas es la distribución de Kent (ver apéndice 12), la cual es análoga a una distribución bivariada general, y tiene como caso particular la distribución de von Mises-Fisher (Kent, 1982). La distribución de Kent a diferencia de la distribución de von Mises-Fisher es anisótropa, es decir no es rotacionalmente simétrica con respecto a la dirección media, siendo los contornos sobre la esfera elipses centrados en la dirección media. Recientemente, Paine et al. en (Paine et al., 2018) proponen la distribución gaussiana angular sobre una esfera como alternativa, siendo una analogía de la distribución de Kent. Sin embargo, en la dirección de este estudio se está más interesado en adaptar la distribución de Kent al estudio de fuentes de luz parcialmente polarizadas, como se mostrará a continuación.

La distribución de densidad de probabilidad de Kent de un vector aleatorio sobre la esfera de Poincaré $\boldsymbol{S}(t) = s_i/s_0$ con $i \in (1,2,3)$, está dada por:

$$f(\mathbf{S};\kappa,\beta) = c(\kappa,\beta)^{-1} exp\left\{k\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \mathbf{S} + \beta\left[(\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \mathbf{S})^2 - (\boldsymbol{\gamma}_3 \cdot \mathbf{S})^2\right]\right\}, \tag{144}$$

en donde

$$c(\kappa,\beta) = 2\pi \sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+\frac{1}{2})}{\Gamma(j+1)} \beta^{2j} \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{2j+\frac{1}{2}} I_{2j+\frac{1}{2}}(\kappa) \tag{145}$$

es la constante de normalización, el parámetro κ mide la concentracción y β determina la elipticidad ($0 \leq 2\beta < \kappa$). El vector unitario $\boldsymbol{\gamma}_1$ representa la dirección media, y los vectores unitarios $\boldsymbol{\gamma}_2$ y $\boldsymbol{\gamma}_3$ los ejes mayor y menor de los contornos elípticos de igual probabilidad, respectivamente. Estos tres vectores unitarios forman una matriz 3×3 ortogonal (Kasarapu, 2015).

Los primeros dos momentos en el caso de una distribución general de Kent (Kasarapu, 2015), se definen para cuando la distribución cuyos ejes vector dirección media, mayor y menor no están alineados con los ejes de coordenadas esféricas de la siguiente manera

$$E[\mathbf{S}] = \mathbf{Q}(c_\kappa / c_{\kappa,\beta}, 0, 0)^T = c_\kappa / c_{\kappa,\beta} \boldsymbol{\gamma}_1 \,, \tag{146}$$

en donde $c_\kappa = \partial c(\kappa, \beta) / \partial \kappa$, y

$$E[\mathbf{S}\mathbf{S}^T] = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T \tag{147}$$

La letra E representa el valor esperado, y $\mathbf{Q} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$, y

$$\lambda_1 = \frac{c_{\kappa\kappa}}{c(\kappa,\beta)}, \lambda_2 = \frac{c(\kappa,\beta) - c_{\kappa\kappa} + c_\beta}{2c(\kappa,\beta)}, \lambda_3 = \frac{c(\kappa,\beta) - c_{\kappa\kappa} - c_\beta}{2c(\kappa,\beta)}\,, \tag{148}$$

y $c_{\kappa\kappa} = \partial^2 c(\kappa,\beta)/\partial\kappa^2$, $c_\beta = \partial c(\kappa,\beta)/\partial\beta$, y $c_{\beta\beta} = \partial^2 c(\kappa,\beta)/\partial\beta^2$ (Kent, 1982; Kasarapu, 2015). Además, La traza correspondiente al producto matricial de la ecuación 147 representan las auto-correlaciones de los parámetros de Stokes sobre la esfera de Poincaré. Es importante señalar que si los ejes vector dirección media, mayor y menor de la distribución de Kent están alineados de manera arbitraria sobre la esfera de Poincaré, esta distribución no sólo incluye las tres auto-correlaciones sino también las correlaciones cruzadas del vector de Stokes sobre la esfera de Poincaré, es decir se tiene información de las correlaciones de campo eléctrico de cuarto orden (ver ecuación 147). Estos resultados implican una caracterización completa de la estadística de la fuentes sobre la esfera de Poincaré, y son fundamentales para diferenciar entre fuentes de luz parcialmente polarizadas a diferencia de los parámetros de Stokes (Shevchenko et al., 2009).

En el caso particular que la distribución de Kent cuyos ejes medio, mayor y menor están alineados con los ejes de coordenadas (S_1, S_2, S_3), indica que dada la simetría las correlaciones cruzadas $E[S_1S_2] = E[S_1S_3] = E[S_2S_3] = 0$. De manera que, la distribución de densidad de probabilidad (ver ecuación 144) incluye solamente las auto-correlaciones del vector de Stokes sobre la esfera de Poincaré, el cual corresponde al grado de correlación de Poincaré propuesto por Setälä *et al* en (Shevchenko et al., 2017). Finalmente, si el eje mayor y menor de distribución de Kent son iguales, ya no se tienen las correlaciones de cuarto orden del vector de Stokes, correspondiendo a la distribución de von Mises-Fisher.

Por otra parte, la ecuación 146 que corresponde a el valor esperado del vector de Stokes permite obtener una nueva medida del grado de polarización sobre la esfera de Poincaré, el cual se define en función de los parámetros κ y β de la distribución de Kent de la forma:

$$P = \frac{c_\kappa}{c} = \frac{1}{c(\kappa,\beta)} \frac{\partial c(\kappa,\beta)}{\partial \kappa}. \tag{149}$$

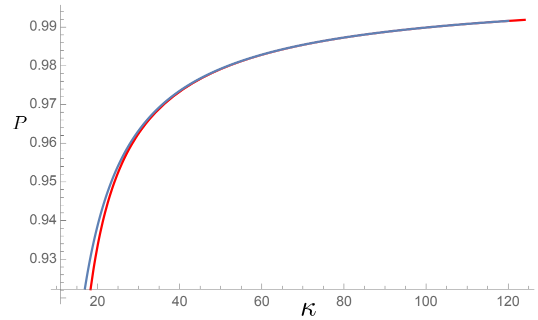


Figura 25. En la figura se muestra el comportamiento de la relación entre el parámetro κ y el grado de polarización P para un β constante. La relación entre estas variables descritas por las ecuaciones 149 y 155 se muestra mediante la curva roja y azul, respectivamente. Estas curvas tendrán aproximadamente el mismo comportamiento para grados de polarización mayores o igual a 0.96.

En los casos que κ es grande, la constante de normalización de la distribución de Kent se puede definir de forma analítica como:

$$c(\kappa,\beta) = 2\pi e^{\kappa}/\sqrt{\kappa^2 - 4\beta^2}\,, \tag{150}$$

la cual permite escribir el valor esperado de la distribución de Kent de la siguiente manera

$$E[\mathbf{S}] = \left(1 - \frac{\kappa}{\kappa^2 - 4\beta^2}\right)\boldsymbol{\gamma}_1\,, \tag{151}$$

y los parámetros $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ como:

$$\lambda_1 = \frac{(\kappa^2 - 4\beta^2)^2 + 4\beta^2(1+2\kappa) + 2\kappa^2(1-\kappa)}{(\kappa^2 - 4\beta^2)^2}\,, \tag{152}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3\kappa[(\kappa-1)\kappa-4\beta^2]}{(\kappa^2-4\beta^2)^2} + \frac{4\beta(1+\beta)-\kappa(1+\kappa)-1}{(\kappa^2-4\beta^2)} + 1\right), \tag{153}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{3\kappa[(\kappa-1)\kappa-4\beta^2]}{(\kappa^2-4\beta^2)^2} + \frac{4\beta(\beta-1)-\kappa(1+\kappa)-1}{(\kappa^2-4\beta^2)} + 1\right). \tag{154}$$

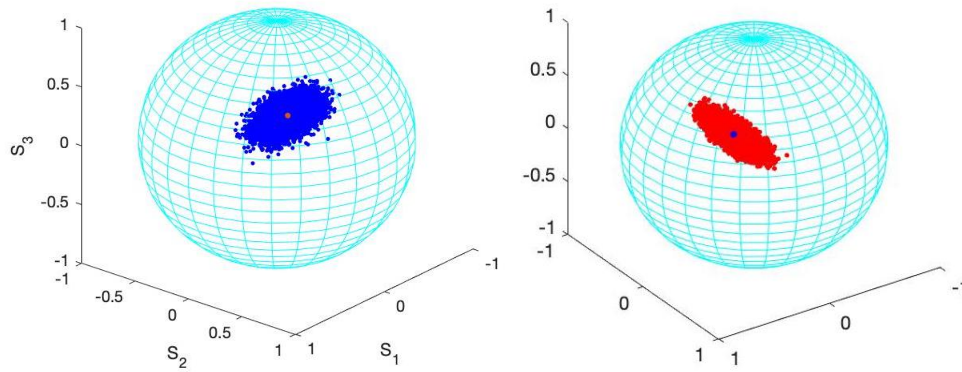
Estas últimas tres ecuaciones corresponden a las auto-correlaciones del vector de Stokes, siempre y cuando cumpla con la condición impuesta en el parámetro κ ya mencionada.

La expresión explícita del grado de polarización P en función de los parámetros κ y β se obtiene mediante la ecuación 151, y se define como:

$$P(\kappa,\beta) = 1 - \frac{\kappa}{\kappa^2-4\beta^2}. \tag{155}$$

Esta ecuación sólo es válida para valores del grado de polarización aproximadamente mayores o iguales a 0.96, como se observa en la figura 25. En esta figura se puede observar la relación entre el parámetro de concentración κ y el grado de polarización P para un β constante. La curva roja representa la ecuación 149 y la azul la ecuación 155, en donde se puede apreciar que cuando P es mayor a 0.96 ambas curvas presentan el mismo comportamiento. Por lo tanto, aunque Kent en (Kent, 1982) formula la expresión dada por la ecuación 155 para valores grandes de κ no estima a partir de que valores de κ esta ecuación deja de ser válida. Sin embargo, dada la relación que se obtuvo mediante el grado de polarización se pude decir con certeza que para valores de κ y β tal que el grado de polarización sea mayor o igual a 0.96 la expresión dada por la ecuación

155 es válida. Además, de esta ecuación se puede inferir, que cuanto mayor sea κ y β; es decir más concentrada y elíptica es la distribución sobre la esfera Poincaré, mayor será el grado de polarización.



(a) (b)

Figura 26. Simulación computacional para diez mil valores la distribución de Kent sobre la esfera con parámetros a) $\kappa = 150$, $\beta = 15\sqrt{7}$, $\gamma_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, b) $\kappa = 200$, $\beta = 120$, $\gamma_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Por otro lado, dos fuentes con diferente dinámica de polarización sobre la esfera de Poincaré, es decir, diferentes distribuciones de densidad de probabilidad, y por ende diferentes parámetros de concentración y elipticidad, tendrán el mismo grado de polarización (ver ecuación 155) si se cumple la siguiente condición

$$\kappa/(\kappa^2 - 4\beta^2) = \kappa'/(\kappa'^2 - 4\beta'^2) = \text{constante}, \tag{156}$$

y además, si el vector dirección media de las dos fuentes es el mismo; es decir, $\gamma_1 = \gamma_1'$, entonces las dos fuentes tienen los mismos parámetros de Stokes (ver ecuación 151). Este resultado permite inferir que los parámetros de Stokes es una formulación incompleto para la caracterización de fuentes parcialmente polarizadas. En la imagen 26, se puede observar dos distribuciones de Kent con diferentes parámetros κ y β, pero con el mismo grado de polarización $P = 0.991$ (ver ecuación 155), y dirección media $\boldsymbol{\gamma}_1$.

En la figura 27(a), se representa la simulación computacional mediante **R** (computación estadística) para diez mil valores de la distribución de Kent ($\kappa = 150$, $\beta = 50$) sobre la esfera de Poincaré con ejes vector dirección media, mayor y menor alineados con los ejes de coordenadas (S_1, S_2, S_3). Esto implica que las correlaciones cruzadas del vector de Stokes son iguales a cero, por ende mediante las ecuaciones 151 y 155 se obtiene que el grado de polarización P es igual a 0.988, y el promedio temporal del vector de Stokes como: $E[\mathbf{S}]$=(0.0, 0.988, 0.0). Los ejes vector dirección media $\boldsymbol{\gamma_1}$, mayor $\boldsymbol{\gamma_2}$ y menor $\boldsymbol{\gamma_3}$ arrojados por la simulación son:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 & \boldsymbol{\gamma}_3 \\ 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}. \tag{157}$$

Mediante la ecuación la anterior y la ecuación 147 teniendo en cuenta que: $\lambda_1 = 0.9760$, $\lambda_2 = 0.0196$ y $\lambda_3 = 0.00388$ (ver ecuaciones 152, 153 y 154) se obtienen las auto-correlaciones del vector de Stokes

$$\begin{pmatrix} E[S_1(t)S_1(t+\tau)] & E[S_1(t)S_2(t+\tau)] & E[S_1(t)S_3(t+\tau)] \\ E[S_2(t)S_1(t+\tau)] & E[S_2(t)S_2(t+\tau)] & E[S_2(t)S_3(t+\tau)] \\ E[S_3(t)S_1(t+\tau)] & E[S_3(t)S_1(t+\tau)] & E[S_3(t)S_3(t+\tau)] \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0.9760 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0. & 0.0196 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0038 \end{pmatrix}, \tag{158}$$

Este resultado demuestra que dada la orientación de la distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré, las correlaciones cruzadas del vector de Stokes son igual a cero.

Por su parte, las figuras $27(b)$ y $27(c)$ representan las distribuciones de Kent sobre la esfera con orientación arbitraria, en donde el grado de polarización y el valor esperado del vector de Stokes son: $P = 0.987$, $E[\mathbf{S}]$=(0.571, 0.571, 0.571), y $P = 0.963$, $E[\mathbf{S}]$=(-0.312, 0.467, 0.782), respectivamente. Los ejes del vector dirección media, mayor y menor de la elipse de polarización sobre la esfera de Poincaré son:

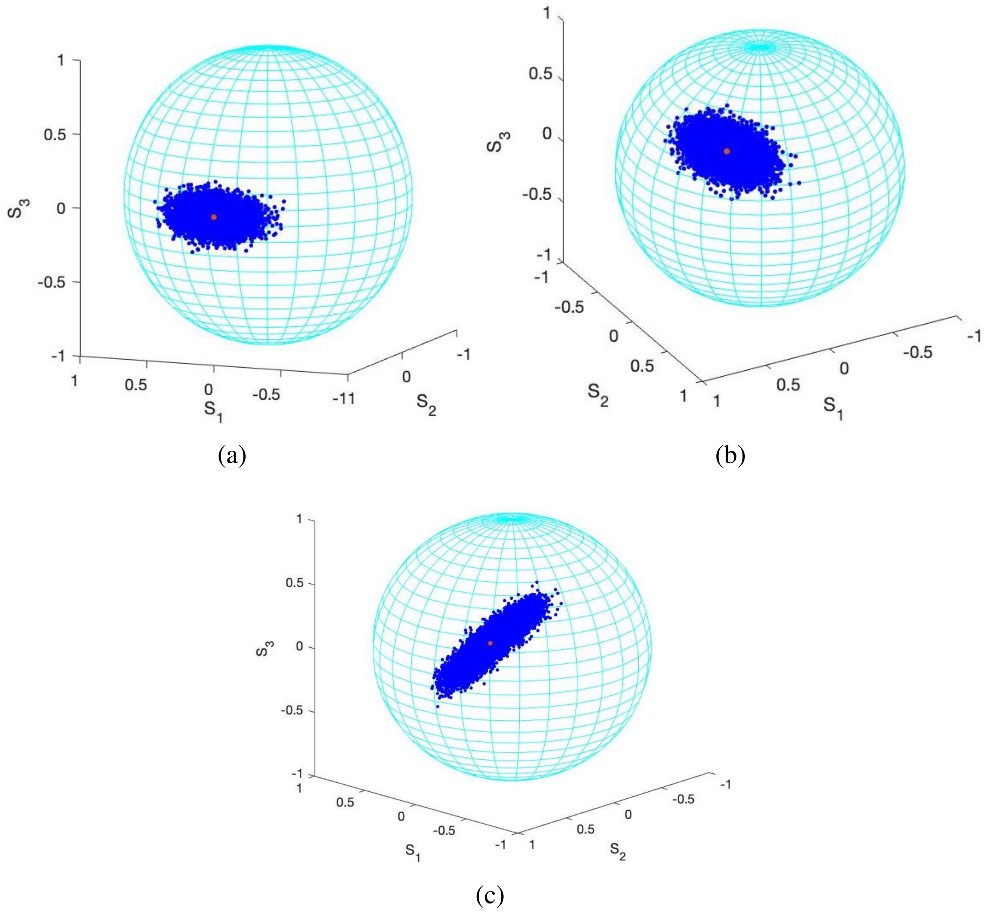


Figura 27. Simulación computacional para diez mil valores la distribución de Kent sobre la esfera con parámetros κ, β y γ_1: a) $\kappa = 150$, $\beta = 50$, $\gamma_1 = (0,1,0)$, b) $\kappa = 100$, $\beta = 25$, $\gamma_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ y c) $\kappa = 200$, $\beta = 93$, $\gamma_1 = (-0.526, 0.784, 0.331)$.

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 & \boldsymbol{\gamma}_3 \\ 1/\sqrt{3} & 0.548 & -0.607 \\ 1/\sqrt{3} & -0.791 & -0.171 \\ 1/\sqrt{3} & 0.253 & 0.776 \end{pmatrix}, \tag{159}$$

y

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 & \boldsymbol{\gamma}_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -0.526 & -0.529 & -0.666 \\ 0.784 & -0.606 & -0.138 \\ 0.331 & 0.595. & -0.733 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{160}$$

respectivamente. Además, las correlaciones de los parámetros de Stokes correspondientes a las figuras 27(b) y 27(c) son:

$$E[\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^T(t+\tau)] = \begin{pmatrix} 0.333 & 0.317 & 0.324 \\ 0.317 & 0.337 & 0.320 \\ 0.324 & 0.320 & 0.330 \end{pmatrix}, \tag{161}$$

y

$$E[\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^T(t+\tau)] = \begin{pmatrix} 0.276 & -0.362 & -0.183 \\ -0.362 & 0.596 & 0.217 \\ -0.183 & 0.217 & 0.126 \end{pmatrix}, \tag{162}$$

respectivamente. Las dos matrices anteriores contienen las auto-correlaciones como las correlaciones cruzadas del vector de Stokes. En resumen, las auto-correlaciones del vector de Stokes siempre estarán presente en la distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré. Sin embargo, dependiendo de la orientación de la distribución de Kent se tendrán o no las correlaciones cruzadas del vector de Stokes.

4.2. Relación entre el grado de correlación sobre la esfera de Poincaré y los parámetros κ y β

La nueva caracterización de la polarización presentada en la sección anterior y en capítulo 3, permite definir nuevos parámetros $(\boldsymbol{\mu}, \kappa, \beta)$ que describen la polarización de la luz sobre la esfera de Poincaré. Sin embargo, aún falta relacionar los parámetros (κ, β) con el grado de correlación del vector de Stokes sobre la esfera de Poincaré propuesto en (Shevchenko et al., 2017). Para esto, primero se estudio las correlaciones del vector de Stokes $\mathbf{S}$ en el tiempo t y un tiempo posterior $t+\tau$, las cuales se pueden cuantificar mediante la función de correlación general sobre la esfera de Poincaré:

$$\gamma_{GP}(\tau) = \tilde{\mathbf{S}}(t+\tau)\mathbf{R}\tilde{\mathbf{S}}(t)^T \tag{163}$$

en donde $\mathbf{R}$ representa la matriz de rotación de ángulo θ, definida como:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\theta + \gamma_{1_{S_1}}^2 (1-c_\theta) & \gamma_{1_{S_1}}\gamma_{1_{S_2}} (1-c_\theta) - \gamma_{1_{S_3}} s_\theta & \gamma_{1_{S_1}}\gamma_{1_{S_3}} (1-c_\theta) + \gamma_{1_{S_2}} s_\theta \\ \gamma_{1_{S_2}}\gamma_{1_{S_1}} (1-c_\theta) + \gamma_{1_{S_3}} s_\theta & c_\theta + \gamma_{1_{S_2}}^2 (1-c_\theta) & \gamma_{1_{S_2}}\gamma_{1_{S_3}} (1-c_\theta) - \gamma_{1_{S_1}} s_\theta \\ \gamma_{1_{S_3}}\gamma_{1_{S_1}} (1-c_\theta) - \gamma_{1_{S_2}} s_\theta & \gamma_{1_{S_3}}\gamma_{1_{S_2}} (1-c_\theta) + \gamma_{1_{S_1}} s_\theta & c_\theta + \gamma_{1_{S_3}}^2 (1-c_\theta) \end{bmatrix} \tag{164}$$

Se denota c_θ como $\cos\theta$ y s_θ como $\sin\theta$. Haciendo la operación matricial (ver apéndice 13) y tomando el promedio de ensamble sobre las componentes del vector de Stokes se llega a:

$$\begin{aligned}\gamma_{GP}(\tau)^2 &= [c_\theta+\gamma_{1_{S_3}}^2(1-c_\theta)]\langle\tilde{S_1}(t)\tilde{S_1}(t+\tau)\rangle+[c_\theta+\gamma_{1_{S_2}}^2(1-c_\theta)]\langle\tilde{S_2}(t)\tilde{S_2}(t+\tau)\rangle\\ &+ [c_\theta+\gamma_{1_{S_3}}^2(1-c_\theta)]\langle\tilde{S_3}(t)\tilde{S_3}(t+\tau)\rangle+2\gamma_{1_{S_1}}\gamma_{1_{S_2}}(1-c_\theta)\langle\tilde{S_2}(t)\tilde{S_1}(t+\tau)\rangle\\ &+ 2\gamma_{1_{S_1}}\gamma_{1_{S_3}}(1-c_\theta)\langle\tilde{S_3}(t)\tilde{S_1}(t+\tau)\rangle\\ &+ 2\gamma_{1_{S_2}}\gamma_{1_{S_3}}(1-c_\theta)\langle\tilde{S_3}(t)\tilde{S_2}(t+\tau)\rangle\,. \end{aligned} \tag{165}$$

Siendo θ el ángulo que hace el eje mayor de la elipse de polarización con respecto al meridiano como se muestra en la figura 28.

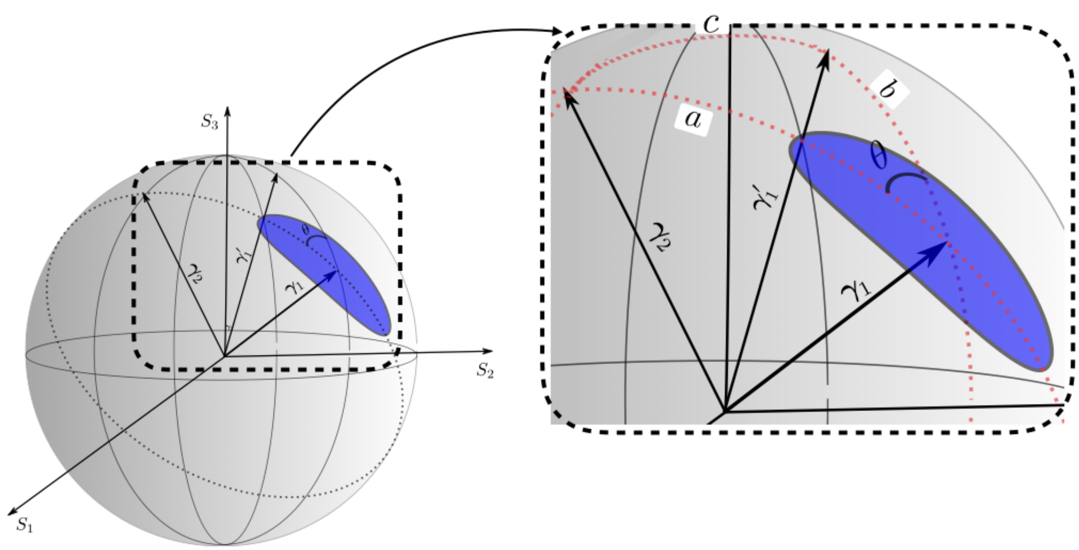


Figura 28. Esquematización de la distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré. El ángulo θ representa el ángulo que hace el eje mayor con el meridiano, por el cual que pasan los vectores unitarios dirección media γ_1 y γ_1', y el vector γ_2 corresponden al eje mayor de la elipse.

Para hallar el ángulo θ, se necesitan tres vectores, el vector dirección media γ_1, el vector eje mayor γ_2, y el vector γ_1'. Los dos primeros vectores se conocen, sin embargo, para hallar el vector γ_1' primero se debe encontrar el ángulo azimutal 2ϕ y el ángulo polar 2α del estado de polarización que representa el vector dirección media $\gamma_1(2\alpha, 2\chi)$, mediante las siguientes relaciones

$$2\chi = \arcsin \gamma_{1_{S_3}}, \tag{166}$$

y

$$2\alpha = \arctan \frac{\gamma_{1_{S_2}}}{\gamma_{1_{S_1}}}. \tag{167}$$

Expresiones que se obtienen de la relación entre las coordenadas de la esfera de Poincaré y el vector de Stokes (ver sección 1.8). De acuerdo con esto, se define el vector estado de polarización $\boldsymbol{\gamma}_1'(2\alpha' = 2\alpha, 2\chi' > 2\chi)$, es decir tiene la misma orientación pero diferente elipticidad del vector $\boldsymbol{\gamma}_1$. De manera que la distancia entre estos dos vectores (longitud de arco), se define como:

$$a = R\beta = \arccos\left(\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}_2\right), \tag{168}$$

De la misma forma se define la distancia entre el vector que representa el eje mayor γ_2 y el el vector dirección media γ_1, así como la distancia entre el vector γ_2 y el vector γ_1, como:

$$b = R\beta' = \arccos\left(\boldsymbol{\gamma}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}_1'\right), \tag{169}$$

y

$$c = R\beta'' = \arccos\left(\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma}_1'\right), \tag{170}$$

Respectivamente. Con esta información y mediante la ley esférica de los cosenos se obtiene el ángulo θ, definido como:

$$\theta = \frac{\arccos\left(\frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\right)}{2}. \tag{171}$$

De acuerdo a la relación anterior, se obtiene el ángulo de rotación de las simulaciones de la distribución de Kent sobre la esfera 27(b) y 27(c) son $\theta = 36.1^\circ$ y $\theta = 25.5^\circ$, respectivamente. Por otra parte, reemplazando los valores obtenidos de θ para cada distribución de Kent sobre la esfera en la matriz de rotación (ver ecuación 164), y con las matrices de correlación de los parámetros de Stokes (ver ecuaciones 161 y 162), en la ecuación

$$\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{S}(t)}\tilde{\mathbf{S}}^T(t+\tau)] = \mathbf{R}\mathrm{E}[\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^T(t+\tau)]\mathbf{R}^T, \tag{172}$$

se obtienen las correlaciones del vector de Stokes de las distribuciones 27(b) y 27(c) en el sistema primado,

$$\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{S}}(t)\tilde{\mathbf{S}}^T(t+\tau)] = \begin{pmatrix} 0.337 & 0.317 & 0.320 \\ 0.317 & 0.333 & 0.324 \\ 0.320 & 0.324 & 0.330 \end{pmatrix}, \tag{173}$$

y

$$\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{S}}(t)\tilde{\mathbf{S}}^T(t+\tau)] = \begin{pmatrix} 0.260 & -0.377 & -0.172 \\ -0.377 & 0.587 & 0.213 \\ -0.172 & 0.213 & 0.151 \end{pmatrix}, \tag{174}$$

las cuales corresponden a las correlación del vector de Stokes en el caso que el eje mayor y menor de la elipse se orienten a lo largo del meridiano y paralelo, respectivamente. Reemplazando los valores de correlación y auto-correlación del vector de Stokes contenidos en la matrices 173 y 174 y los ángulos de rotación θ previamente hallados en la ecuación 165, se obtiene el grado de correlación. Por lo tanto, el grado de correlación de la distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré de las figuras 27(b) y 27(c) es $\gamma_{GP} = 0.934$ y $\gamma_{GP} = 0.972$, respectivamente. Este resultado de demuestra, que entre mayor sea el grado de polarización de la fuente mayor será el grado de correlación entre el vector de Stokes.

Por otro lado, en el caso que cuyos ejes medio, mayor y menor de la distribución de Kent están alineados con los ejes de coordenadas (S_1, S_2, S_3), por ejemplo como se muestra en la figura 27(a). En ese caso particular, las correlaciones cruzadas son cero, y $\theta = 0°$, llegando a:

$$\gamma_{GP}(\tau)^2 = \sum_{i=1}^{3} \tilde{S}_i(t)\tilde{S}_i(t+\tau)\,. \tag{175}$$

La ecuación anterior del grado de correlación corresponde a la traza de la matriz de correlaciones del vector de Stokes 158, cuyo resultado es: $\gamma_{GP}(\tau)^2 = 0.999$. Es importante resaltar que en los casos en donde las correlaciones cruzadas del vector de Stokes sea igual a cero, se debe cumplir la siguiente condición sobre el ángulo $0 \leq \theta < \pi$. Estos resultados permiten resaltar que en los casos en donde las correlaciones cruzadas del vector de Stokes sea igual a cero, necesariamente se debe cumplir la siguiente condición sobre el ángulo $0 \leq \theta < \pi$. Por otro lado, si la distribución de Kent presenta una orientación arbitraria sobre la esfera de Poincaré y además el vector unitario dirección media y los ejes mayor y menor de la elipse $(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3)$ no esté alineados con los ejes S_1, S_2 y S_3 el ángulo θ debe cumplir con la condición $0 < \theta \leq \pi$, ya que en esos casos siempre se tienen las correlaciones cruzadas del vector de Stokes.

Finalmente, cuando $\tau = 0$, y además los ejes medio, mayor y menor de la distribución de Kent están alineados con los ejes de coordenadas, es decir el vector dirección media coincide con uno de los ejes de coordenadas, se obtiene una relación entre el grado de correlación de Poincaré y de polarización, de manera que:

$$\gamma_{GP}^2(0) \quad = \quad P^2. \tag{176}$$

Es importante señalar, que si $\tau = 0$ el grado de correlación sobre la esfera de Poincaré coincide con el grado de polarización que se obtiene mediante el valor esperado de los parámetros de Stokes. Además, hay una directa entre el grado de polarización sobre la esfera de Poincaré con los parámetros κ y β (ver ecuación 149) obtenida en la sección anterior. Es importante resaltar, que en el caso que $\kappa \to \infty$, el grado de correlación sobre la esfera de Poincaré es igual a uno, lo cual describe una fuente de luz polarizada. En el otro extremo, cuando el parámetro β es igual a cero, implica que la distribución de Kent llega a ser la distribución de von Mises Fisher, en donde el grado de polarización se define como se muestra en la ecuación 114. Esta distribución de von Mises Fisher describe fuentes de luz no polarizadas si $P = 0$, y por ende el grado de correlación de Poincaré $\gamma_P(0)$ igual a 0.

Por otro lado, la ecuación 165 se puede escribir en el sistema no primada como:

$$\gamma_{GP}(\tau)^2 = \sum_{j}^{3}\sum_{i}^{3}\langle S_i(t)S_j(t+\tau)\rangle\,. \tag{177}$$

en donde el resultado representa la función de correlación general, la cual puede cuantificar el estado de polarización dentro de un tiempo τ antes que cambie a otro estado de polarización. Este grado de correlación temporal sobre la esfera de Poincaré definido en la ecuación 177 mide el tiempo de coherencia τ_c (Shevchenko et al., 2017), mediante la ecuación

$$\tau_c^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\tau^2\gamma_{GP}^2(\tau)}{\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_{GP}^2(\tau)} \tag{178}$$

la cual permite conocer el tiempo en donde las componentes del vector campo eléctrico de la fuente de luz están lo suficientemente correlacionados para interferir y producir las franjas de interferencial. Además, este tiempo de polarización puede proporcionar nueva información sobre fuentes aleatorias y medios de propagación.

Por otro lado, cuando $\tau = 0$, la relación 165 corresponde a una nueva definición del grado de polarización generalizado,

$$\begin{aligned} P^2 &= \langle S_1(t)^2\rangle + \langle S_2(t)^2\rangle + \langle S_3(t)^2\rangle \\ &+ \langle S_1(t)S_2(t)\rangle + \langle S_1(t)S_3(t)\rangle + \langle S_2(t)S_3(t)\rangle\,, \end{aligned} \tag{179}$$

el cual no sólo contiene las auto-correlaciones sino las correlaciones cruzadas del vector de Stokes sobre la esfera de Poincaré.

4.3. Relación entre el grado de polarización definido en la ecuación 179 y el grado de coherencia de Wolf

De la definición del nuevo grado de polarización dado por la ecuación 179 se deduce:

$$1-P^2 = \frac{\langle s_0(t)^2\rangle - \langle s_1(t)^2\rangle - \langle s_2(t)^2\rangle - \langle s_3(t)^2\rangle - \langle s_1(t)s_2(t)\rangle - \langle s_1(t)s_3(t)\rangle - \langle s_2(t)s_3(t)\rangle}{\langle s_0(t)^2\rangle} \tag{180}$$

en donde, $0 \leq P \leq 1$. Por lo tanto, si $P=0$ indica que la luz no está polarizada, $P=1$ la luz está completamente polarizada, y $0<P<1$ la luz está parcialmente polarizada. Por otra parte, los parámetros de Stokes definidos a partir de la matriz coherencia están dados por:

$$\langle s_0\rangle = \langle E_x(t)\overline{E_x(t+\tau)}\rangle + \langle E_y(t)\overline{E_y(t+\tau)} = \Gamma_{xx}(\tau) + \Gamma_{yy}(\tau)\,, \tag{181}$$

$$\langle s_1\rangle = \langle E_x(t)\overline{E_x(t+\tau)}\rangle - \langle E_y(t)\overline{E_y(t+\tau)}\rangle = \Gamma_{xx}(\tau) - \Gamma_{yy}(\tau)\,, \tag{182}$$

$$\langle s_2\rangle = \langle E_x(t)\overline{E_y(t+\tau)}\rangle + \langle E_y(t)\overline{E_x(t+\tau)}\rangle = \Gamma_{xy}(\tau)+\Gamma_{yx}(\tau)\,, \tag{183}$$

$$\langle s_3\rangle = i(\langle E_y(t)\overline{E_x(t+\tau)}\rangle - \langle E_x(t)\overline{E_y(t+\tau)}\rangle) = i(\Gamma_{xy}(\tau)-\Gamma_{yx}(\tau))\,. \tag{184}$$

Las funciones de auto-correlación y correlación cruzada de los parámetros de Stokes en $\tau = 0$ se pueden expresar como

$$\langle s_0(t)s_0(t)\rangle = (\Gamma_{xx}+\Gamma_{yy})^2\,, \tag{185}$$

$$\langle s_1(t)s_1(t)\rangle = (\Gamma_{xx}-\Gamma_{yy})^2\,, \tag{186}$$

$$\langle s_2(t)s_2(t)\rangle = (\Gamma_{xy}+\Gamma_{yx})^2\,, \tag{187}$$

$$\langle s_3(t)s_3(t)\rangle = -(\Gamma_{xy}-\Gamma_{yx})^2\,, \tag{188}$$

$$\langle s_1(t)s_2(t)\rangle = 2\Gamma_{xx}\Gamma_{yy}|\mu_{xy}|Re\{e^{i\phi_{xy}(t)}\}[\Gamma_{xx}-\Gamma_{yy}] \tag{189}$$

$$\langle s_1(t)s_3(t)\rangle = -2\Gamma_{xx}\Gamma_{yy}|\mu_{xy}|Re\{e^{i(\phi_{xy}(t)-\pi/2)}\}[\Gamma_{xx}-\Gamma_{yy}] \tag{190}$$

$$\langle s_2(t)s_3(t)\rangle = -2\Gamma_{xx}\Gamma_{yy}\mu_{xy}^2 Re\{e^{i(2\phi_{xy}(t)-\pi/2)}\}, \tag{191}$$

en donde el ángulo $\phi_{xy}(t) = \alpha_{xy}(t) - \Delta\varphi$, el cual relaciona el ángulo de fase del grado de coherencia complejo $\alpha_{xy}(t)$ y el ángulo de fase entre las componentes del campo eléctrico $\Delta\varphi$. Remplazando las ecuaciones anteriores en la ecuación 180, se llega a:

$$\begin{aligned} 1-P^2 &= \frac{4\Gamma_{xx}\Gamma_{yy}}{(\Gamma_{xx}+\Gamma_{yy})^2}[1-\mu_{xy}^2\left(1-\frac{1}{2}Re\{e^{i(2\phi_{xy}(t)-\pi/2)}\}\right) \\ &- |\mu_{xy}|Re\{e^{i\phi(xy)(t)} - e^{i(\phi_{xy}(t)-\pi/2)}\}(\Gamma_{xx}-\Gamma_{yy})]\,. \end{aligned} \tag{192}$$

De la relación anterior, el nuevo grado de polarización debe estar acotado y de la misma manera originalmente sugerida por Wolf, en donde introduce el grado de polarizaciones como el módulo máximo de μ_{xy} (Wolf, 1959). Por lo tanto, dado que la media geométrica de cualquier número positivo no puede exceder su media aritmética, se llega a la relación

$$\begin{aligned} &0 \le [\mu_{xy}^2\left(1-\frac{1}{2}Re\{e^{i(2\phi_{xy}(t)-\pi/2)}\}\right) \\ - \;& |\mu_{xy}|Re\{e^{i\phi_{xy}(t)} - e^{i(\phi_{xy}(t)-\pi/2)}\}(\Gamma_{xx}-\Gamma_{yy})]^{1/2} \\ &\le P^2 \end{aligned} \tag{193}$$

En el caso de tener una fuente de luz no polarizada $|\mu_{xy}| = 0$, lo cual representa una completa ausencia de correlaciones entre las componentes x y y del vector campo eléctrico. En el otro extremo $|\mu_{xy}| = 1$, representa fuentes de luz cuasi-monocromático cuyo desfase entre las componentes del vector campo eléctrico se puede describir como un sinusoide, en donde el promedio temporal es cero sobre un periodo de la onda. Por lo tanto, $P = 1$.

4.4. Conclusiones

Se adaptó e ilustró mediante ejemplos numéricos la distribución de Kent al estudio de fuentes parcialmente polarizadas sobre la esfera de Poincaré en la sección 4.1, hallando una relación entre el grado de polarización y los parámetros κ y β de la distribución de Kent. Finalmente, en la sección 4.2 se obtuvo el grado de correlación de Poincaré general y además una nueva definición del grado de polarización, la cual permitió encontrar una nueva relación con el grado de coherencia. Además, se obtuvo las condiciones en que el grado de correlación sobre la esfera de Poincaré es igual al grado de polarización convencional.

5. Estadística de los parámetros de Stokes sobre los ejes de la esfera de Poincaré

La descripción de fuentes de luz parcialmente polarizadas mediante las distribuciones marginales de los parámetros de Stokes normalizados, ha sido estudiada por Eliyahu (Eliyahu, 1994), las cuales se obtienen a partir de una distribución Gaussiana compleja bivariada tipo Goodman (Goodman, 1963). En está dirección, Brosseau también obtiene las mismas distribuciones marginales de los parámetros de Stokes, pero mediante el estudio estadístico de la fase y amplitud para un campo de onda plano aleatorio con distribución Gaussiana. Estas variables son considerados estadísticamente independientes (Brosseau, 1995b). Las distribuciones marginales de Brosseau-Eliyahu, permiten obtener información adicional de la estadística de los parámetros de Stokes en función del valor esperado de la variable de Stokes y el grado de polarización de la fuente. Sin embargo no diferencia entre fuentes parcialmente polarizadas con diferente dinámica de polarización pero igual grado de polarización y valor esperado de Stokes. A continuación, se presentará una nueva expresión analítica de las distribuciones marginales de los parámetros de Stokes normalizados en función de su varianza y valor esperado para una onda parcialmente polarizada, a partir de la estadística de las variables angulares 2α y 2χ. Además, se mostrará en que casos estas distribuciones marginales presentan el mismo comportamiento estadístico de las proyecciones sobre los ejes de la esfera de Poincaré de la distribución de Kent.

5.1. Distribución de densidad de probabilidad de las variables angulares de la esfera de Poincaré

Las propiedades estadísticas de una fuente de luz permiten estudiar la polarización del vector campo eléctrico que fluctúa aleatoriamente (Brosseau, 1998). Estas fluctuaciones del estado de polarización corresponden sobre la esfera de Poincaré a una distribución de estados puros, la cual caracteriza la dinámica de polarización propia de la fuente como se vio en las secciones 3 y 4. Esta distribución contiene toda la información estadística del vector de Stokes sobre los ejes de la esfera de Poincaré, así como de sus auto-correlaciones, correlaciones cruzadas y el grado de polarización (Ellis and Dogariu, 2005; Luis, 2002). En la sección 4.2 se estudió cómo están relacionadas estas cantidades con el grado de correlación sobre la esfera de Poincaré. Por otro lado, además de estudiar la estadística del vector sobre la esfera de Poincaré es importante conocer las propiedades estadísticas del vector de Stokes sobre los ejes de la esfera. De ahí, que se estudiará mediante la relación entre el vector de Stokes y las variables angulares dadas por las ecuaciones

$$S_1 = \cos 2\alpha \cos 2\chi \, , \tag{194}$$

$$S_2 = \sin 2\alpha \cos 2\chi \, , \tag{195}$$

$$S_3 = \sin 2\chi \, , \tag{196}$$

la estadística de las variables angulares; es decir, orientación y elipticidad sobre la esfera de Poincaré (ver apéndice 10). Explorando el caso más sencillo, el cual corresponde a variables angulares (2α,2χ) estadísticamente independientes, y además imponiendo que la distribución de densidad de probabilidad de estas variables es una distribución normal definida como:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{197}$$

en donde, x representa las variables angulares 2α o 2χ, μ el valor esperado y σ^2 la varianza. Por otra parte, dada la relación entre el vector de Stokes y las variables angulares (ver ecuaciones 194, 195 y 196), se hace necesario mediante la transformación de la variable aleatoria obtener la distribución de densidad de probabilidad de la variable coseno o seno de 2α y 2χ con estadística Gaussiana, mediante la ecuación

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{\partial}{\partial y} h^{-1}(y) \right|, \tag{198}$$

en donde y representa ya sea el $\sin x$ o el $\cos x$. A partir de la ecuación anterior se obtiene la distribución de densidad de probabilidad de la variable y definida como

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-y^2)}} e^{\frac{-(\arcsin y-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{199}$$

y

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(1-y^2)}} e^{\frac{-(\arccos y - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{200}$$

Estas relaciones permitirá encontrar una relación analítica de la distribución de probabilidad de las componentes del vector Stokes sobre los ejes de coordenadas sobre la esfera de Poincaré, como se mostrará a continuación.

5.2. Distribución de densidad de probabilidad de los parámetros de Stokes: variables angulares estadísticamente independientes

Los parámetros de Stokes S_1 y S_2 son función de las variables angulares 2α y 2χ, como se puede ver en las ecuaciones 194 y 195, mientras que la variable de Stokes S_3 es solamente función de la variable angular 2χ mediante la ecuación 199. Por lo tanto, el parámetro normalizado de Stokes S_3 tiene la misma distribución de densidad de probabilidad de la variable $\sin 2\chi$ (ver ecuación 196). Haciendo un cambio de variable $y \to S_3$, se define la distribución marginal del vector de Stokes S_3 normalizado como:

$$f(S_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_3^2(1-S_3^2)}} e^{\frac{-(\arcsin S_3 - \mu_3)^2}{2\sigma_3^2}}, \tag{201}$$

en donde, μ_3 y σ_3^2 es el valor esperado y la varianza del $\arccos$ de la variable S_3, respectivamente. Es importante analizar que conforme $\sigma^2 \to 0$ la altura de la curva de la distribución se va haciendo más y más pronunciado, acercándose a una función delta de Dirac, aunque la altura de la distribución marginal del vector de Stokes es finita la altura de la función delta de Dirac es infinita.

Por otra parte, cuando la fuente no está polarizada, las variables angulares de la esfera de Poincaré tienen la misma probabilidad de ocurrencia, por consiguiente la distribución de probabilidad del vector de Stokes (ver ecuación 201), debería tender a una constante $f(S_i) = 1/2$ con $i \in (1,2,3)$. Sin embargo, no corresponde a una distribución de densidad de probabilidad constante. Por lo tanto, no está distribuida uniformemente, es decir, no corresponde a la distribución uniforme de los parámetros de Stokes normalizados en el intervalo $[-1,1]$ de una fuente de luz no polarizada. Además, se tiene una indeterminación en la ecuación 201 si la variable aleatoria S_i es igual a uno o menos uno. De acuerdo a lo mencionado anteriormente, la ecuación 201 describe la distribución de densidad de probabilidad de una fuente de luz con grado de polarización $0 < P < 1$. Finalmente, las distribuciones de densidad de probabilidad de las variables S_2 y S_3 se obtienen a partir de la la expresión 201, haciendo uso de la simetría de transformación pero ahora con las siguientes matrices $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$ unitarias

$$S_3 \xrightarrow{\mathbf{R}_1} S_1 \ \text{ con } \ \mathbf{R}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \tag{202}$$

$$S_3 \xrightarrow{\mathbf{R}_2} S_2 \ \text{ con } \ \mathbf{R}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}, \tag{203}$$

y de manera análoga a lo presentado en la sección 1.8 para obtener las funciones de distribución de probabilidad de Eliyahu-Brosseau $p_{S_i}(S_i)$ con $i \in (1,2,3)$, se halla mediante la matriz de polarización, la cual corresponde a una transformación $\mathbf{\Gamma} \rightarrow R_j \mathbf{\Gamma} R_j^{-1}$ con $j \in (1,2)$, y mediante la relación

56, lo cual corresponde a un cambio por ejemplo: $S_3 \to S_1$ y de $\omega_3 \to \omega_1$ en la ecuación 201, se obtienen la función de distribución de probabilidad $p_{S_1}(S_1)$.

A continuación se mostrará como está relacionada la distribución de densidad de las componentes del vector de Stokes con la proyección sobre los ejes de la distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré.

5.3. Relación del vector de Stokes sobre los ejes de la esfera de Poincaré con la distribución de Kent

En la figura 27(a) el eje mayor y menor de las distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré están alienadas con respecto al ecuador y meridiano de la esfera, respectivamente. Este resultado implica, que sus variables aleatorias angulares son estadísticamente independientes y con distribución normal de densidad de probabilidad como se muestra en la figura 29.

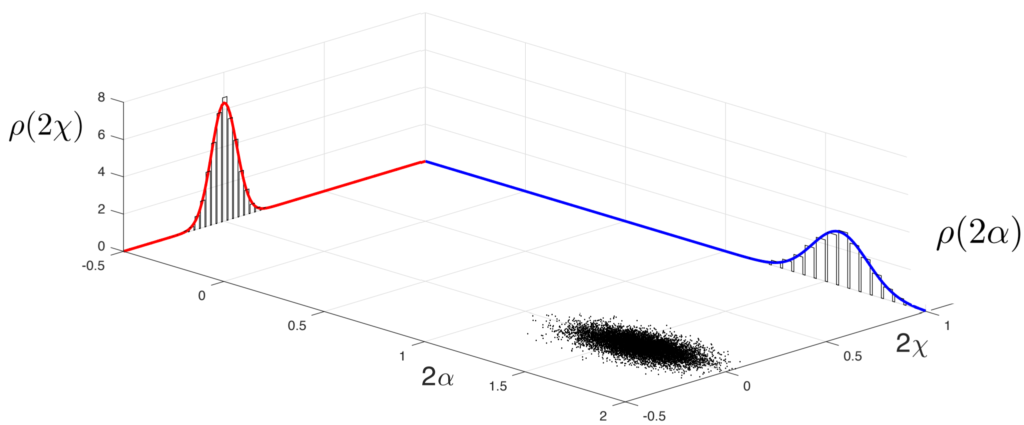
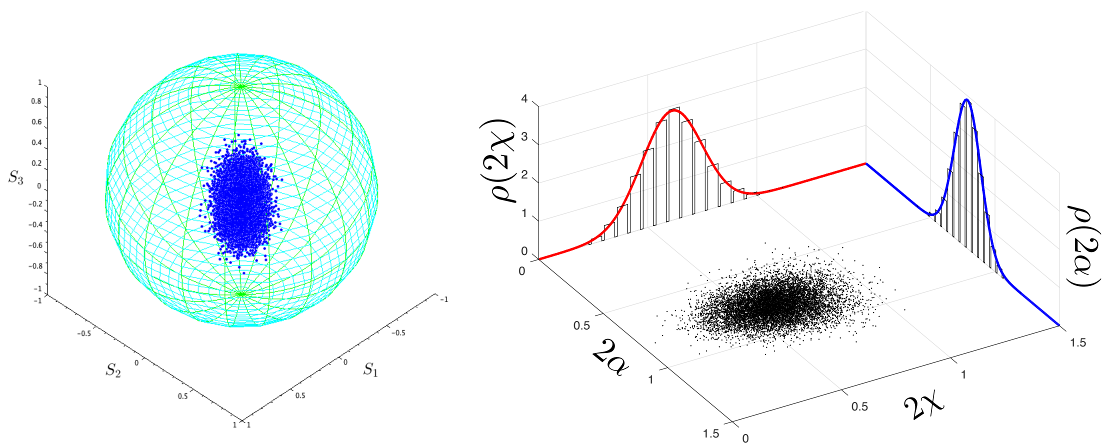


Figura 29. En la imagen se representa mediante puntos la distribución de probabilidad de las variables angulares 2α y 2χ correspondiente a la distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré de la figura 27(b), junto con las distribuciones marginales, las cuales se representan por los histogramas y las curvas continúas en rojo y azul descritas por la ecuación 197.

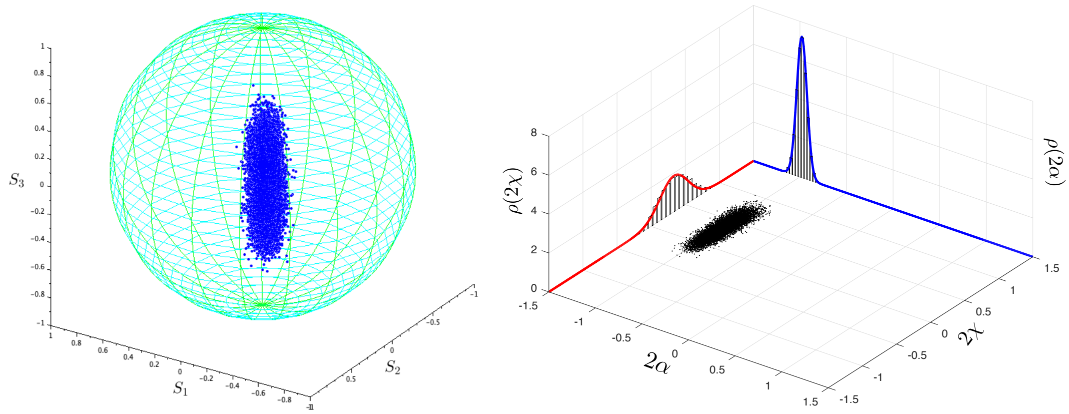
La transformación de las variables aleatorias angulares 2α y 2χ permite obtener la distribución de densidad de probabilidad de las variables del vector de Stokes como se mostró en la sección 5.2. En las figuras 32(a)-32(c), la línea continua muestra el comportamiento de la distribución de densidad de probabilidad de las componentes del vector de Stokes normalizados. Este comportamiento estadístico es el mismo que presentan las proyecciones sobre los ejes de la distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré de la gráfica 21, las cuales son representadas mediante los histogramas.



(a) (b)

Figura 30. La imagen 30(a) corresponde a la distribución de Kent ya rotada sobre la esfera de Poincaré de la figura 27(b), es decir ahora los ejes de la elipse mayor y menor se alinean con respecto al meridiano y paralelo de la esfera. Por su parte, en la figura 30(b) se describe mediante puntos las variables angulares 2α y 2χ de esta distribución, cuyas proyecciones sobre los ejes 2α y 2χ están descritas por los histogramas. La distribución normal dada por la ecuación 197 se describe por las curvas continúas en rojo y azul.

Por otro lado, en la gráfica 30 se observa la misma distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré de la figura 27(a)) pero rotada, es decir su eje mayor y menor de la distribución descansa sobre un meridiano y un paralelo, respectivamente, en otras palabras con la rotación las variables ya no están correlacionadas. Al igual que el caso anterior en las figuras 32(a)-32(c), la línea continua



(a) (b)

Figura 31. La imagen 31(a) corresponde a la distribución de Kent ya rotada sobre la esfera de Poincaré de la figura 27(c), es decir ahora los ejes de la elipse mayor y menor se alinean con respecto al meridiano y paralelo de la esfera. Por su parte, en la figura 31(b) se describe mediante puntos las variables angulares 2α y 2χ de esta distribución, cuyas proyecciones sobre los ejes 2α y 2χ están descritas por los histogramas. La distribución normal dada por la ecuación 197 se describe por las curvas continúas en rojo y azul

muestra el comportamiento de la distribución de densidad de probabilidad del vector de Stokes, el cual presenta el mismo comportamiento que las proyecciones sobre los ejes de la distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré de la gráfica 21 representadas mediante los histogramas.

En la figura 31 se observa la distribución de Kent coincidiendo sus ejes mayor y menor con el meridiano y paralelo de la esfera de Poincaré. Esta distribución se obtuvo de la rotación de la distribución 27(c), hallando el ángulo θ estudiado en la sección 4.2. El comportamiento estadístico de las variables angulares corresponden a una distribución normal. Sin embargo, el comportamiento de la distribución de densidad de probabilidad del vector de Stokes no presenta el mismo comportamiento que las proyecciones sobre los ejes de la distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré de la gráfica 31(a) representadas mediante los histogramas.

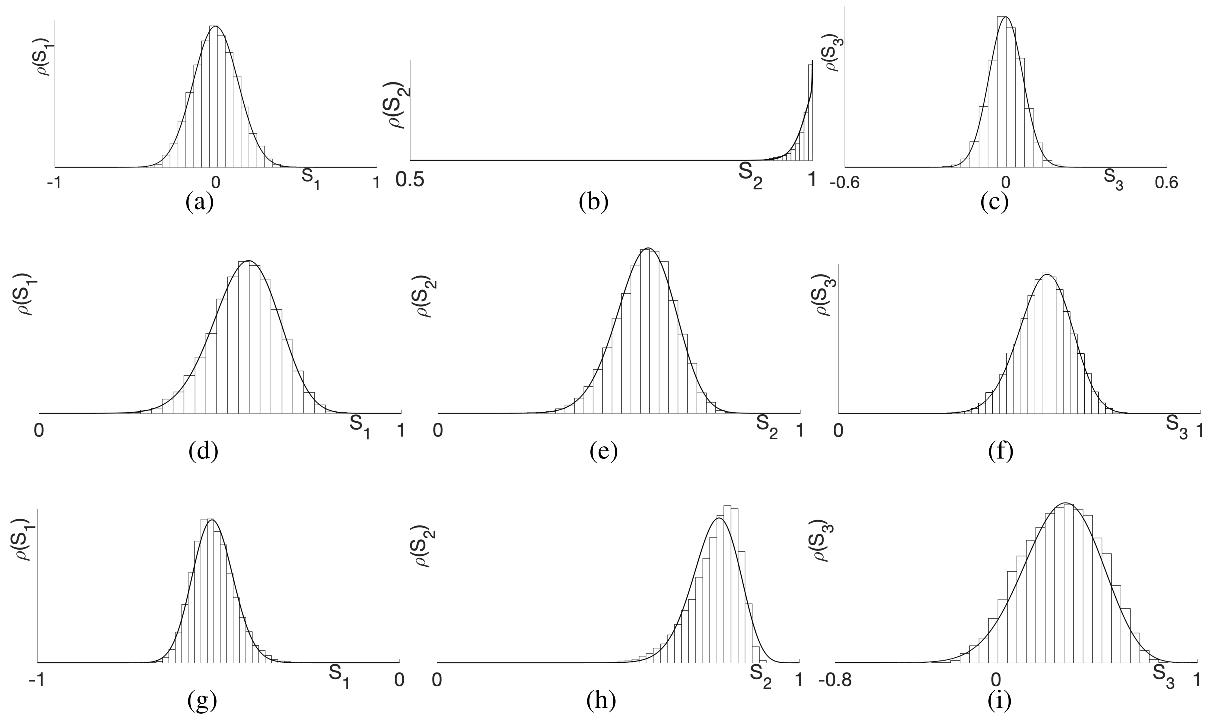


Figura 32. Los histogramas de las figuras 32(a)-32(c), 32(d)-32(f) y 32(g)-32(i) corresponden a la proyección sobre los ejes de la esfera de Poincaré de la distribución de puntos asociada a la distribución de Kent de las figuras 27(a), 30(a) y 31(a), respectivamente. La curva continua representa la distribución de densidad de la ecuación 201.

En resumen, las variables angulares $(2\alpha, 2\chi)$ de la distribución de Kent sobre de la esfera de Poincaré presentan el mismo comportamiento estadístico de la distribución normal, en el caso en que no halla correlaciones entre estas. La transformación de variable angular 2χ con distribución normal permite hallar la distribución de densidad de probabilidad de la variable S_3 definida por la ecuación 201. La distribución de densidad de probabilidad de las variables S_1 y S_2 se pueden derivar a partir de $f(S_3)$ mediante la transformación de las matrices unitarias dejando invariantes la intensidad total de la fuente de luz y el grado de polarización P, implicando que la esfera de Poincaré es isótropa. Este resultado sólo es válido si los ejes unitarios dirección media, mayor y menor de la distribución de Kent están alineados con los ejes de coordenadas (S_1,S_2,S_3) (ver las figuras 27(a), 29 y 32(d)-32(f)), es decir las correlaciones cruzadas de las variables del vector de Stokes son cero.

Finalmente, si los ejes mayor y menor de la distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré coinciden con el meridiano y un paralelo o viceversa, las variables angulares son estadísticamente independientes, como se muestra en la figura 31. Sin embargo, las proyecciones de esta distribución sobre los ejes de la esfera de Poincaré ya no describen el mismo comportamiento estadístico de la distribución de densidad de probabilidad de la ecuación 201, lo que conlleva a que las transformaciones sobre las variables S_1, S_2 y S_3 ya no correspondan con la distribución de densidad de probabilidad descrita por la ecuación 201. En otras palabras son las correlaciones cruzadas del vector de Stokes las que hacen que no se cumpla la isotropía de la esfera de Poincaré. Si el valor del parámetro elipticidad β no es grande comparado con el parámetro κ las proyecciones de la distribución de Kent sobre la esfera tenderán a presentar el mismo comportamiento estadística de la ecuación 201 (ver las figuras 27(b), 31 y 32(a)-32(c)).

5.4. Caso particular: Distribución de von Mises-Fisher

La distribución de von Mises-Fisher en coordenadas esféricas sobre la esfera de Poincaré, se escribe de la forma

$$f(2\alpha,2\chi) = c(\kappa,0)e^{(\kappa\cos 2\beta\cos 2\chi\cos(2\alpha-2\theta)+\kappa\sin 2\beta\sin 2\chi)}\cos 2\chi\,, \tag{204}$$

en donde 2θ y 2β corresponden a la dirección media. Integrando con respecto a la variable angular 2α, debido a su independencia con la variable angular 2χ, se obtiene

$$f(2\chi) = \overline{c(\kappa,0)} \exp(\kappa \sin 2\beta \sin 2\chi) I_0(\kappa \cos 2\beta \cos 2\chi) \cos 2\chi \,. \tag{205}$$

Teniendo que $\kappa \cos 2\beta = (u-u_0)\frac{\sqrt{\sin 2\chi}}{\cos 2\chi}$ y $\kappa \sin 2\beta = -\frac{\sigma^2}{2}$, siendo $u_0 = cte$, se llega

$$\sin 2\beta = \frac{-\sigma^2 \cos 2\chi}{2} \,, \tag{206}$$

$$\cos 2\beta = (u-u_0)\sqrt{\sin 2\chi} \,, \tag{207}$$

y

$$\kappa = \frac{1}{\cos 2\chi} \,. \tag{208}$$

Reemplazando las ecuaciones 206 y 208 en la ecuación 205, se llega

$$f(2\chi) = \overline{c(\kappa,0)} \int \exp\left(-\frac{\sigma^2 \sin 2\chi}{2}\right) I_0[(u-u_0)\sqrt{\sin 2\chi}] \cos 2\chi d2\chi \,, \tag{209}$$

Haciendo un cambio de variable $\sin 2\chi = x$, y empleando la integral $\int_0^\infty e^{-\alpha x} I_0(\beta\sqrt{x})dx = \frac{1}{\alpha}e^{-\beta^2/4\alpha}$ (Gradshteyn and Ryzhik, 2014), se tiene

$$p(u) = \overline{c(\kappa,0)} e^{-(u-u_0)^2/2\sigma^2} \,. \tag{210}$$

De acuerdo a la ecuación 196, la distribución de densidad de probabilidad de variable S_3 se puede expresar mediante la fórmula 198,

$$p_{S_3}(S_3) = \frac{1}{\sqrt{1-S_3^2}} p(\arcsin S_3)\,. \tag{211}$$

Sustituyendo la ecuación 210 en la ecuación anterior,

$$P(S_3) = \frac{\overline{c(\kappa,0)}}{\sqrt{1-S_3^2}} e^{\frac{-(\arcsin S_3 - u_0)^2}{2\sigma^2}}, \tag{212}$$

se llega a la distribución de la ecuación 201, en donde u_0 es el valor esperado del arcoseno de la variable S_3.

5.5. Conclusiones

En la sección 5.1, se estudió las variables angulares gaussianas con independencia estadística, resultado que permitió hallar una expresión de la distribución de densidad de probabilidad del vector de Stokes aleatorio como se demostró en la sección 5.2. Además, se demostró en que casos las proyecciones de la distribución de Kent sobre la esfera de Poincaré coincide con la expresión matemática del vector de Stokes 5.3. Resultado que muestra la importancia tanto de las auto-correlaciones como de las correlaciones cruzadas de las variables del vector de Stokes. Finalmente, en la sección 5.4 se demostró que si se cumplen las condiciones 206, 207 y 208 las distribuciones marginales sobre los ejes de la esfera de Poincaré de la distribución de von Mises-Fisher tendrán el mismo comportamiento de la distribución de analítica descrita por la ecuación

201.

6. Conclusiones

En esta tesis, se ha investigado teóricamente y experimental la dinámica de la polarización mediante distribuciones de densidad de probabilidad sobre la esfera de Poincaré. Para esto, primero se estudio la interacción entre un haz polarizado y un retardador lineal. Estos resultados obtenidos se resumen por medio de la siguiente ley:

Ley 1 *Las trayectorias formadas sobre la esfera de Poincaré como resultado de pasar un haz polarizado a través de un retardador lineal rotante se caracterizan por la curva de intersección entre la esfera de Poincaré y el cono. El eje de simetría del cono se define por el estado de polarización del haz de entrada y su estado de enantiógiro, en donde se encuentra el vértice del cono (ver figura 6). Las proyecciones sobre el plano del ecuador de estas trayectorias corresponden a los limaçon de Pascal.*

El concepto de una fuente de luz polarizada es una idealización, ya que al pasar una fuente parcialmente coherente polarizada mediante un polarizador, y posteriormente por un retardador introduciendo un retardo entre las componentes del campo eléctrico por lo menos del orden del tiempo de coherencia, el haz emergente se transforma y ademas se despolariza y sobre la esfera de Poincaré corresponderá a una distribución de estados de polarización puros. A partir de ahí, se analizó la distribución de vMF adaptadando al estudio de la dinámica de polarización de fuentes de luz aleatorias parcialmente polarizadas. Encontrando una relación entre el grado de polarización P y los parámetros de Stokes normalizados $\mathbf{S}$ con el parámetro de concentración κ y la dirección media $\boldsymbol{\mu}$, respectivamente. Este resultado permitió caracterizar el estado de polarización de la fuente de luz parcialmente polarizada a través de los parámetros $(P,\mathbf{S}) \rightarrow (\kappa,\boldsymbol{\mu})$ y acoplarlo con el método gráfico de Poincaré. Además, debido a las amplitudes y fases no correlacionadas, se mostró que las distribuciones marginales de las distribuciones de vMF en los ejes de la esfera de Poincaré tienen el mismo comportamiento estadístico que las distribuciones de Eliyahu-Brosseau.

La distribución de von Mises-Fisher permite describir fuentes parcialmente polarizada, cuya distribución con contornos circulares sobre la esfera de Poincaré describe los estados de polarización de una fuente en donde la correlación del vector de Stokes es igual a cero. De ahí, que se halla adaptado la distribución de Kent para el estudio de las propiedades dinámicas de las fluctuaciones de polarización de haces estacionarios sobre la esfera de Poincaré. Esta adaptación permite caracterizar el estado de polarización de la fuente de luz parcialmente polarizada a través de los parámetros κ, β, $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ y $\boldsymbol{\gamma}_3$ de la distribución de Kent, y acoplarlo con el método gráfico de Poincaré. Esta distribución incluye las auto-correlaciones y correlaciones cruzadas del vector de Stokes, lo cual permitió encontrar una expresión general del grado de correlación sobre la esfera de Poincaré, y de una nueva expresión del grado de polarización. Además, se obtuvo el caso particular que permite relacionar el grado de correlación de Poincaré con los parámetros κ y β. Estos resultados permiten no sólo caracterizar la dinámica de la polarización propia de la fuente de luz sobre la esfera de Poincaré, sino también visualizar sobre esta dependiendo donde se encuentre la distribución de Kent y la orientación del eje mayor y menor de la distribución, si la distribución incluye o no las correlaciones cruzadas del vector de Stokes sobre la esfera.

Finalmente, se estudio la estadística de las variables angulares (2α, 2χ), en donde se asumió que estas variables son estadísticamente independientes. Resultado que permitió obtener una expresión analítica de las distribuciones de densidad de probabilidad (ver la ecuación 201) de las variables de Stokes sobre los ejes de la esfera de Poincaré. Además, se mostró en que casos las distribuciones marginales de la distribución de Kent sobre la esfera tiene el mismo comportamiento estadístico que la expresión de la distribución de densidad de probabilidad de los parámetros de Stokes (ver la ecuación 201) propuesta en este trabajo de investigación.

Los resultados reportados en el presente trabajo de investigación han sido aceptados y publicados en las siguientes revistas indexadas y homologadas por Colciencias.

- K. Salazar-Ariza and R. Torres, Trajectories on the Poincaré sphere of polarization states of a beam passing through a rotating linear retarder, JOSA A 35(1), 65–72 (2018).
- K. Salazar-Ariza and R. Torres, Statistical theory of the polarization on the Poincaré sphere, Optics Letters 44(13), 3318–3321 (2019).
- Jhon Pabón, Karol Salazar and Rafael Torres, Characterization method of the effective phase retardation in linear birefringent thin sheets. Accepted for publication in Applied Optics.

Así mismo, varios de los resultados obtenidos fueron presentados a través de las siguientes ponencias internacionales:

- Ponencia. 2nd Joensuu Conference on Coherence and Random Polarization, University of Eastern Finland. Título: Trajectories on the Poincaré sphere of polarization states of a beam passing through a rotating linear retarder. Junio 12-15 del 2018, Joensuu-Finlandia.

- Ponencia. IX Iberoamerican Optics meeting - XII Lationamerican meeting on Optics and applications IX RIAO - XII OPTILAS. Título: Caracterización de los estados de polarización sobre la esfera de Poincaré de un haz polarizado y un retardador cuarto de onda. Noviembre 21-25 del 2016, Pucón-Chile.

- Ponencia. X Iberoamerican Optics meeting - XII Lationamerican meeting on Optics, Lasers and applications Mexican optics and photonics meeting. Título: Statistics of the Stokes parameters from the angular variables ellipticity and orientation of the Poincaré sphere. Septiembre 23-27 del 2019, Cancún-México.

6.1. Futuros trabajos de investigación

A continuación se describen algunos de los futuros trabajos que se pueden ampliar de esta tesis

- Un área interesante de investigación futura mediante la geometría que describen la ley de los retardadores sería estudiar la distribución de la birrefringencia espacial en materiales de interés. Esto podría tener aplicaciones por ejemplo en fibras multi-núcleo, ya que además de caracterizar la distribución de la birrefringencia espacial se puede obtener una información completa sobre la polarización en cada punto del material, así se podría tener una precisión alta y control en el estado de polarización emergente de cada núcleo de la fibra.

- Sería igualmente interesante probar el modelo estadístico propuesto en un análisis de la dispersión de polarización de speckle sobre la esfera de Poincaré.

- El grado de correlación propuesto sobre la esfera de Poincaré en el capítulo 4 podría ser medido experimentalmente y así poder tener una caracterización completa de una fuentes de luz ya sea coherentes o no mediante el tiempo de polarización.

- Finalmente, sería interesante poder estudiar las variables angulares estadísticamente dependientes con el fin de proponer un modelo estadísticos de los vectores de Stokes más general sobre los ejes de la esfera de Poincaré.

Referencias Bibliográficas

Abbena, E., Salamon, S., and Gray, A. (2006). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Third Edition*. Textbooks in Mathematics. Taylor & Francis.

Ade, P. A., Aikin, R., Barkats, D., Benton, S., Bischoff, C., Bock, J., Brevik, J., Buder, I., Bullock, E., Dowell, C., et al. (2014). Detection of b-mode polarization at degree angular scales by bicep2. *Physical Review Letters*, 112(24):241101.

Ambirajan, A. and Look, D. C. (1995). Optimum angles for a polarimeter: part i. *Optical Engineering*, 34:1651–1651.

Amrit Ambirajan, D. C. L. (1995). Optimum angles for a polarimeter: part ii. *Optical Engineering*, 34:34 – 34 – 3.

Azzam, R. (2000). Poincaré sphere representation of the fixed-polarizer rotating-retarder optical system. *JOSA A*, 17(11):2105–2107.

Azzam, R. (2016). Stokes-vector and mueller-matrix polarimetry. *J. Opt. Soc. Am. A*, 33(7):1396–1408.

Azzam, R. M. A. and Bashara, N. (1987). *Ellipsometry and polarized light*. North-Holland.

Band, Y. B. (2006). *Light and matter: electromagnetism, optics, spectroscopy and lasers*, volume 1. John Wiley & Sons.

Barakat, R. (1987a). Statistics of the stokes parameters. *Journal of the Optical Society of America A*, 4(7):1256–1263.

Barakat, R. (1987b). Statistics of the stokes parameters. *JOSA A*, 4(7):1256–1263.

Bates, A., Hopcraft, K., and Jakeman, E. (1997). Particle shape determination from polarization fluctuations of scattered radiation. *Journal of the Optical Society of America A*, 14(12):3372–3378.

Berry, H. G., Gabrielse, G., and Livingston, A. (1977). Measurement of the stokes parameters of light. *Applied optics*, 16(12):3200–3205.

Bickel, W. S., Davidson, J., Huffman, D., and Kilkson, R. (1976). Application of polarization effects in light scattering: a new biophysical tool. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 73(2):486–490.

Brosseau, C. (1995a). Statistics of the normalized stokes parameters for a gaussian stochastic plane wave field. *Applied optics*, 34(22):4788–4793.

Brosseau, C. (1995b). Statistics of the normalized stokes parameters for a gaussian stochastic plane wave field. *Applied optics*, 34(22):4788–4793.

Brosseau, C. (1998). *Fundamentals of polarized light: a statistical optics approach*. Wiley-Interscience.

Brosseau, C., Barakat, R., and Rockower, E. (1991a). Statistics of the stokes parameters for gaussian distributed fields. *Optics communications*, 82(3-4):204–208.

Brosseau, C., Barakat, R., and Rockower, E. (1991b). Statistics of the stokes parameters for gaussian distributed fields. *Optics communications*, 82(3-4):204–208.

Browne, C. and Zerban, F. (1941). *Physical and Chemical Methods of Sugar Analysis: A Practical and Descriptive Treatise for Use in Research, Technical, and Control Laboratories*. Wiley.

Cabrera, J., López, F., and López, F. (1993). *Optica electromagnética: Fundamentos*. Óptica electromagnética. Addison-Wesley Iberoamericana S. A.

Chipman, R., Lam, W., and Young, G. (2018). *Polarized Light and Optical Systems*. Optical Sciences and Applications of Light. CRC Press.

Collett, E. (2003). *Polarized light in fiber optics*. SPIE Press.

Collett, E. (2005). *Field Guide to Polarization*. Field Guide Series. Society of Photo Optical.

Collett, E. and Schaefer, B. (2008a). Visualization and calculation of polarized light. i. the polarization ellipse, the poincaré sphere and the hybrid polarization sphere. *Applied optics*, 47(22):4009–4016.

Collett, E. and Schaefer, B. (2008b). Visualization and calculation of polarized light. ii. applications of the hybrid polarization sphere. *Applied optics*, 47(22):4017–4024.

Csele, M. (2004). *Fundamentals of light sources and lasers*. Wiley Online Library.

Dai, Z., Zhang, X., Peng, Z., Li, J., Ou, Z., and Liu, Y. (2010). Distributed fiber optic stress sensor system based on p-ofdr. In *5th International Symposium on Advanced Optical Manufacturing* *and Testing Technologies*, pages 765914–765914. International Society for Optics and Photonics.

Dam, E. B., Koch, M., and Lillholm, M. (1998). *Quaternions, interpolation and animation*, volume 2. Datalogisk Institut, Københavns Universitet.

De Feijter, J., Benjamins, d. J., and Veer, F. (1978). Ellipsometry as a tool to study the adsorption behavior of synthetic and biopolymers at the air–water interface. *Biopolymers*, 17(7):1759–1772.

Domanski, A. (2005). Polarization degree fading during propagation of partially coherent light through retarders. *OPTOELECTRONICS REVIEW*, 13(2):171.

Dorosz, J. and Romaniuk, R. S. (2014). Optical fibers and their applications 2014. *Photonics Letters of Poland*, 6(2):50–52.

Eliyahu, D. (1994). Statistics of stokes variables for correlated gaussian fields. *Physical Review E*, 50(3):2381.

Ellis, J. and Dogariu, A. (2004). Differentiation of globally unpolarized complex random fields. *JOSA A*, 21(6):988–993.

Ellis, J. and Dogariu, A. (2005). Discrimination of globally unpolarized fields through stokes vector element correlations. *JOSA A*, 22(3):491–496.

Ellis, J., Dogariu, A., Ponomarenko, S., and Wolf, E. (2005). Degree of polarization of statistically stationary electromagnetic fields. *Optics communications*, 248(4):333–337.

Ferréol, R. and Mandonnet, J. (2016). Encyclopédie des formes mathématiques remarquables.

Fisher, R. A. (1953). Dispersion on a sphere. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 217(1130):295–305.

Flueraru, C., Latoui, S., Besse, J., and Legendre, P. (2008). Error analysis of a rotating quarter-wave plate stokes' polarimeter. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 57(4):731–735.

Fu, H., Khijwania, S. K., Au, H., Dong, X., Tam, H., Wai, P., and Lu, C. (2008). Novel fiber optic polarimetric torsion sensor based on polarization-maintaining photonic crystal fiber. In *19th International Conference on Optical Fibre Sensors*, pages 70042V–70042V. International Society for Optics and Photonics.

Fujiwara, H. (2007). *Spectroscopic ellipsometry: principles and applications*. John Wiley & Sons.

Gaskell, P. E., Skulason, H. S., Strupinski, W., and Szkopek, T. (2010). High spatial resolution ellipsometer for characterization of epitaxial graphene. *Optics letters*, 35(20):3336–3338.

Ghabbach, A., Zerrad, M., Soriano, G., and Amra, C. (2014). Accurate metrology of polarization curves measured at the speckle size of visible light scattering. *Optics express*, 22(12):14594–14609.

Gnauck, A., Charlet, G., Tran, P., Winzer, P., Doerr, C., Centanni, J., Burrows, E., Kawanishi, T., Sakamoto, T., and Higuma, K. (2008). 25.6-tb/s wdm transmission of polarization-multiplexed rz-dqpsk signals. *Journal of Lightwave Technology*, 26(1):79–84.

Goldstein, D. H. (2017). *Polarized light*. CRC press.

Gompf, B., Braun, J., Weiss, T., Giessen, H., Dressel, M., and H*ü*bner, U. (2011). Periodic nanostructures: spatial dispersion mimics chirality. *Physical review letters*, 106(18):185501.

Goodman, N. R. (1963). Statistical analysis based on a certain multivariate complex gaussian distribution (an introduction). *The Annals of mathematical statistics*, 34(1):152–177.

Gordon, J. and Kogelnik, H. (2000). Pmd fundamentals: Polarization mode dispersion in optical fibers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97(9):4541–4550.

Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (2014). *Table of integrals, series, and products*. Academic press.

Hajnsek, I., Pottier, E., and Cloude, S. R. (2003). Inversion of surface parameters from polarimetric sar. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 41(4):727–744.

Hanson, A. J. (2005). Visualizing quaternions. In *ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, page 1. ACM.

Heslop, D., Roberts, A. P., and Hawkins, R. (2014). A statistical simulation of magnetic particle alignment in sediments. *Geophysical Journal International*, 197(2):828–837.

Hillen, T., Painter, K. J., Swan, A. C., and Murtha, A. D. (2017). Moments of von mises and fisher distributions and applications. *Mathematical Biosciences & Engineering*, 14(3):673–694.

Jakeman, E. (1995). Polarization characteristics of non-gaussian scattering by small particles. *Waves in Random Media*, 5(4):427–442.

Jammalamadaka, S. R. and Sengupta, A. (2001). *Topics in circular statistics*, volume 5. world scientific.

Jones, R. C. (1941). A new calculus for the treatment of optical systemsi. description and discussion of the calculus. *Journal of the Optical Society of America*, 31(7):488–493.

Jones, R. C. (1942). A new calculus for the treatment of optical systems. iv. *J. Opt. Soc. Am.*, 32(8):486–493.

Jones, R. C. (1948). A new calculus for the treatment of optical systems. vii. properties of the n-matrices. *Josa*, 38(8):671–685.

Kasarapu, P. (2015). Modelling of directional data using kent distributions. *arXiv preprint arXiv:1506.08105*.

Kent, J. T. (1982). The fisher-bingham distribution on the sphere. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 44(1):71–80.

Khanna, V. K. (2014). *Fundamentals of solid-state lighting: LEDs, OLEDs, and their applications in illumination and displays*. CRC press.

Kliger, D. S. and Lewis, J. W. (2012). *Polarized light in optics and spectroscopy*. Elsevier.

Korotkova, O. (2013). *Random Light Beams: Theory and Applications*. Taylor & Francis.

Korotkova, O. (2017). *Random Light Beams: Theory and Applications*. CRC Press.

Koshiishi, H., Lai, U., Suzuki, T., and Kurosaki, H. (1996). Application of spectro-polimetry for remote sensing. In *International Symposium on Polarization Analysis and Applications to Device Technology*, pages 25–28. International Society for Optics and Photonics.

Kovac, J., Leitch, E., Pryke, C., Carlstrom, J., Halverson, N., and Holzapfel, W. (2002). Detection of polarization in the cosmic microwave background using dasi. *arXiv preprint astro-ph/0209478*.

Kumar, A. and Ghatak, A. (2011). *Polarization of light with applications in optical fibers*. SPIE Press,.

Ladd, J., Taylor, A. D., Piliarik, M., Homola, J., and Jiang, S. (2009). Label-free detection of cancer biomarker candidates using surface plasmon resonance imaging. *Anal. Bioanal. Chem.*, 393(4):1157–1163.

Lawrence, J. (1972). *A catalog of special plane curves*. Dover books on advanced mathematics. Dover Publications.

Ley, C. and Verdebout, T. (2017). *Modern directional statistics*. Chapman and Hall/CRC.

Lopez-Téllez, J. M., Bruce, N. C., and Rodríguez-Herrera, O. G. (2016). Characterization of optical polarization properties for liquid crystal-based retarders. *Appl. Opt.*, 55(22):6025–6033.

Luis, A. (2002). Degree of polarization in quantum optics. *Physical review A*, 66(1):013806.

Macdonald, C. and Meglinski, I. (2011). Backscattering of circular polarized light from a disperse random medium influenced by optical clearing. *Laser Physics Letters*, 8(4):324–328.

MacKintosh, F., Zhu, J., Pine, D., and Weitz, D. (1989). Polarization memory of multiply scattered light. *Physical Review B*, 40(13):9342.

Mandel, L. and Wolf, E. (1995). *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge university press.

Mardia, K. and Edwards, R. (1982). Weighted distributions and rotating caps. *Biometrika*, 69(2):323–330.

Mardia, K. V. and Jupp, P. E. (2009). *Directional statistics*, volume 494. John Wiley & Sons.

Monge, G. (1798). *Géométrie descriptive. Lecons données aux écoles normales, l'an 3 de la République*. Baudouin, imprimeur du corps legislatif et de l'institut naional.

Oprea, J. (2007). *Differential geometry and its applications*. MAA.

Ortega-Quijano, N., Fade, J., Parnet, F., and Alouini, M. (2017). Generation of a coherent light beam with precise and fast dynamic control of the state and degree of polarization. *Optics letters*, 42(15):2898–2901.

Paine, P., Preston, S. P., Tsagris, M., and Wood, A. T. (2018). An elliptically symmetric angular gaussian distribution. *Statistics and Computing*, 28(3):689–697.

Pellat-Finet, P. (1990). An introduction to a vectorial calculus for polarization optics. *Optik*, 84(5):169–175.

Pellat-Finet, P. (1991a). Geometric approach to polarization optics: I-geometrical structure of polarized light. *Optik*, 87(1):27–33.

Pellat-Finet, P. (1991b). Geometrical approach to polarization optics. ii, quaternionic representation of polarized light. *Optik*, 87(2):68–76.

Pellat-Finet, P. and Bausset, M. (1992). What is common to both polarization optics and relativistic kinematics? *Optik*, 90(3):101–106.

Perez, J. J. G. and Ossikovski, R. (2016). *Polarized light and the Mueller matrix approach*. CRC press.

Perlicki, K. (2005). Analysis of clusters and uniformity of distribution of states of polarization on the poincaré sphere. *Applied optics*, 44(21):4533–4537.

Pletinckx, D. (1989). Quaternion calculus as a basic tool in computer graphics. *The Visual Computer*, 5(1-2):2–13.

Poincaré, H. (1892). Traite de la lumiere. *Paris*, 2:165.

Reddy, S. G., Prabhakar, S., Chithrabhanu, P., Singh, R., and Simon, R. (2016). Polarization state transformation using two quarter wave plates: application to mueller polarimetry. *Applied optics*, 55(12):B14–B19.

Rhee, H., June, Y.-G., Lee, J.-S., Lee, K.-K., Ha, J.-H., Kim, Z. H., Jeon, S.-J., and Cho, M. (2009). Femtosecond characterization of vibrational optical activity of chiral molecules. *Nature*, 458(7236):310–313.

Richter, I., Sun, P.-C., Xu, F., and Fainman, Y. (1995). Design considerations of form birefringent microstructures. *Appl. Opt.*, 34(14):2421–2429.

Rikken, G. and Raupach, E. (1997). Observation of magneto-chiral dichroism. *Nature*, 390(6659):493–494.

Roberts, A. and Lin, L. (2012). Plasmonic quarter-wave plate. *Opt. Lett.*, 37(11):1820–1822.

Ryali, S., Chen, T., Supekar, K., and Menon, V. (2013). A parcellation scheme based on von mises-fisher distributions and markov random fields for segmenting brain regions using resting-state fmri. *Neuroimage*, 65:83–96.

Sabatke, D., Descour, M., Dereniak, E., Sweatt, W., Kemme, S., and Phipps, G. (2000). Optimization of retardance for a complete stokes polarimeter. *Optics Letters*, 25(11):802–804.

Salazar-Ariza, K. and Torres, R. (2018). Trajectories on the poincaré sphere of polarization states of a beam passing through a rotating linear retarder. *JOSA A*, 35(1):65–72.

Salazar-Ariza, K. and Torres, R. (2019). Statistical theory of the polarization on the poincaré sphere. *Optics Letters*, 44(13):3318–3321.

Sankaran, V., Walsh, J. T., and Maitland, D. J. (2002). Comparative study of polarized light propagation in biologic tissues. *J. Biomed. Opt.*, 7(3):300–306.

Sato, T., Araki, T., Sasaki, Y., Tsuru, T., Tadokoro, T., and Kawakami, S. (2007). Compact ellipsometer employing a static polarimeter module with arrayed polarizer and wave-plate elements. *Appl. Opt.*, 46(22):4963–4967.

Schott, J. and of Photo-optical Instrumentation Engineers, S. (2009). *Fundamentals of Polarimetric Remote Sensing*. SPIE tutorial texts. SPIE.

Set*älä*, T., Shevchenko, A., Kaivola, M., and Friberg, A. T. (2008). Polarization time and length for random optical beams. *Physical Review A*, 78(3):033817.

Shevchenko, A., Roussey, M., Friberg, A. T., and Setälä, T. (2015). Ultrashort coherence times in partially polarized stationary optical beams measured by two-photon absorption. *Optics express*, 23(24):31274–31285.

Shevchenko, A., Roussey, M., Friberg, A. T., and Set*älä*, T. (2017). Polarization time of unpolarized light. *Optica*, 4(1):64–70.

Shevchenko, A., Set*älä*, T., Kaivola, M., and Friberg, A. T. (2009). Characterization of polarization fluctuations in random electromagnetic beams. *New Journal of Physics*, 11(7):073004.

Shoemake, K. (1985). Animating rotation with quaternion curves. In *Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 245–254.

Shurcliff, W. (2013). *Polarized Light: Production and Use*. Harvard University Press.

Sondermann, M., Weinkath, M., Ackemann, T., Mulet, J., and Balle, S. (2003). Two-frequency emission and polarization dynamics at lasing threshold in vertical-cavity surface-emitting lasers. *Physical Review A*, 68(3):033822.

Stokes, G. G. (1851). On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9:399.

Tedjojuwono, K. K., Hunter, W. W., and Ocheltree, S. L. (1989). Planar poincaré chart: a planar graphic representation of the state of light polarization. *Applied optics*, 28(13):2614–2622.

Tervo, J., Set*älä*, T., and Friberg, A. T. (2003). Degree of coherence for electromagnetic fields. *Optics express*, 11(10):1137–1143.

Theocaris, P. (1979). Elliptic polarization represented by the carter and smith charts. *Applied optics*, 18(23):4017–4024.

Torres, R., Torres, D., and Lizarazo, Z. (2018). Theory of prediction, interpolation and filtering of α-stationary random signals. *Signal Processing*, 147:46–53.

Tu, X., Jiang, L., Ibn-Elhaj, M., and Pau, S. (2017). Design, fabrication and testing of achromatic elliptical polarizer. *Optics express*, 25(9):10355–10367.

Tyo, J. S., Goldstein, D. L., Chenault, D. B., and Shaw, J. A. (2006). Review of passive imaging polarimetry for remote sensing applications. *Applied optics*, 45(22):5453–5469.

VanWiggeren, G. D. and Roy, R. (2002). Communication with dynamically fluctuating states of light polarization. *Physical Review Letters*, 88(9):097903.

Walker, M. (1954). Matrix calculus and the stokes parameters of polarized radiation. *American Journal of Physics*, 22(4):170–174.

Wiener, N. et al. (1930). Generalized harmonic analysis. *Acta mathematica*, 55:117–258.

Williams, P. A. (1999). Rotating-wave-plate stokes polarimeter for differential group delay measurements of polarization-mode dispersion. *Appl. Opt.*, 38(31):6508–6515.

Wolf, E. (1959). Coherence properties of partially polarized electromagnetic radiation. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 13(6):1165–1181.

Wolf, E. (2003). Unified theory of coherence and polarization of random electromagnetic beams. *Physics Letters A*, 312(5):263–267.

Wolf, E. (2007). *Introduction to the Theory of Coherence and Polarization of Light*. Cambridge University Press.

Wolf, E. (2008). Can a light beam be considered to be the sum of a completely polarized and a completely unpolarized beam? *Optics letters*, 33(7):642–644.

Woliński, T. R. (2000). I polarimetric optical fibers and sensors. In *Progress in Optics*, volume 40, pages 1–75. Elsevier.

Xu, F., Cheng, C.-C., Scherer, A., Tyan, R.-C., Sun, P.-C., and Fainman, Y. (1995). Fabrication, modeling, and characterization of form-birefringent nanostructures. *Opt. Lett.*, 20(24):2457–2459.

Xue, J., Jung, C., and Kim, M. W. (1992). Phase transitions of liquid-crystal films on an air-water interface. *Physical review letters*, 69(3):474.

Yasui, T., Tohno, Y., and Araki, T. (2004). Determination of collagen fiber orientation in human tissue by use of polarization measurement of molecular second-harmonic-generation light. *Appl. Opt.*, 43(14):2861–2867.

Yu, N., Aieta, F., Genevet, P., Kats, M. A., Gaburro, Z., and Capasso, F. (2012). A broadband, background-free quarter-wave plate based on plasmonic metasurfaces. *Nano letters*, 12(12):6328–6333.

Apéndice A. Producto cuaterniónico

Dado dos cuaterniones $q = s + \mathbf{m}v$ y $q' = s' + \mathbf{m}v'$, su producto cuaterniónico se define como:

$$\begin{aligned} q'' &= qq' \,, \\ &= ss' - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}' + s\boldsymbol{v}' + s'\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' \,, \end{aligned} \tag{213}$$

en donde la componente escalar del cuaternión resultante se escribe de la forma

$$s'' = ss' - \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i' \,, \tag{214}$$

y la parte vectorial como

$$v_i'' = s\boldsymbol{v}_i' + s'\boldsymbol{v}_i + v_j v_k' - v_k v_j' \,. \tag{215}$$

Estos elementos pueden asociarse con los siguientes esquemas gráficos de la figura 33.

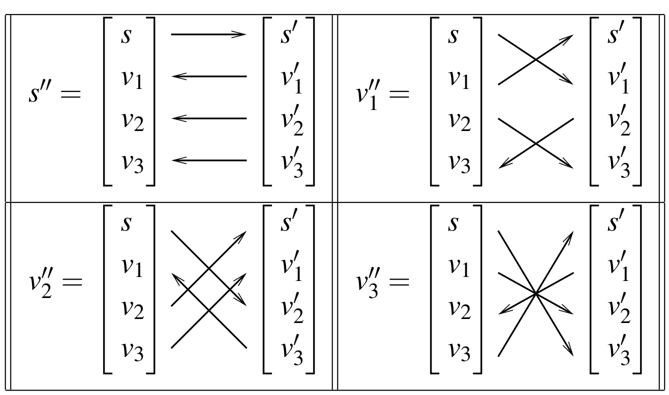


Figura 33. La esquematización del producto cuaterniónico, donde la dirección de la flecha representa el signo del producto, de izquierda a derecha es positiva y negativa en la dirección opuesta.

Apéndice B. Propagación de la luz en un medio birrefringente

La propagación de un rayo incidente de luz natural en un cristal de calcita, fue estudiado por Bartholinus en 1670 (Goldstein, 2017; Perez and Ossikovski, 2016), quien observó como la luz se refractaba a través del cristal dando lugar a dos rayos, conocidos como rayo ordinario y extraordinario. Bartholinus sólo pudo describir lo que observó en el cristal, pero fue Huygens que explicó por primera vez el fenómeno de la doble refracción del cristal al interactuar con la luz en términos de polarización, ya que demostró que al girar un segundo cristal la intensidad del primer rayo desaparecía mientras que el segundo rayo alcanzaba su valor máximo en intensidad, y si lo rotaba 90 respecto a la primera rotación desaparecía el segundo rayo mientras el primero alcanzaba el valor máximo en intensidad. Esto lo llevo a concluir que el rayo de luz natural, es decir no polarizado al refractar en el cristal se descompone en dos rayos independientes y polarizados ortogonalmente, conocidas como estados de polarización S y polarización P (ver la figura 34).

En los materiales birrefringentes, el índice de refracción que experimenta la luz varía con la dirección del campo eléctrico de la luz, a diferencia de los materiales isotrópos, en donde la longitud de onda λ presenta el mismo índice de refracción independiente de la dirección de propagación del haz de luz. El estudio de la propagación de un haz polarizado o no polarizado a través de materiales birrefringente, incluidos materiales biaxiales, uniaxiales y ópticamente activo se hace mediante un tensor dieléctrico $\boldsymbol{\varepsilon}$, mientras que para medios isótropos, por ejemplo los vidrios ópticos el tensor dieléctrico se convierte en cantidades escalares que varían de un punto del medio a otro. Además, si se considera que el medio es homogéneo, el tensor se reduce a una cantidad constante, ya que tiene el mismo valor en cualquier punto del medio material. La relación entre el vector desplazamiento **D** y el vector campo eléctrico **E** cuando no están en la misma dirección está dada por:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{216}$$

Haciendo la elección apropiada de ejes para que el tensor dialéctrico esté diagonalizado. Con esta elección de ejes, denominados ejes principales del material, la ecuación 216 en forma de matriz se escribe como:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \tag{217}$$

Los materiales biaxiales como la mica por ejemplo (Perez and Ossikovski, 2016), tiene tres índices de refracción diferentes asociados con tres ejes principales ortogonales o ejes de cristal $n_x = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_x}$, $n_y = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_y}$ y $n_z = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}_z}$, como se muestra en la figura 34a). Estos índices se denotan como n_s para el valor del índice de refracción más grande, n_f para el valor del índice más pequeño, y n_m para el valor del índice que cumple con: $n_f < n_m < n_s$. Por su parte, en los medios uniaxiles $n_x = n_y \neq n_z$, en donde $n_x = n_y$ se denota como n_o y n_z como n_e, y se conocen como índice ordinario principal e índice extraordinario principal, respectivamente. El eje principal está relacionado con el eje óptico, el cual especifica la orientación del cristal. Si $n_o > n_e$ por definición es un cristal uniaxial negativo (por ejemplo la calcita), ver figura 34c, pero si $n_o < n_e$ se tiene un cristal uniaxial positivo (por

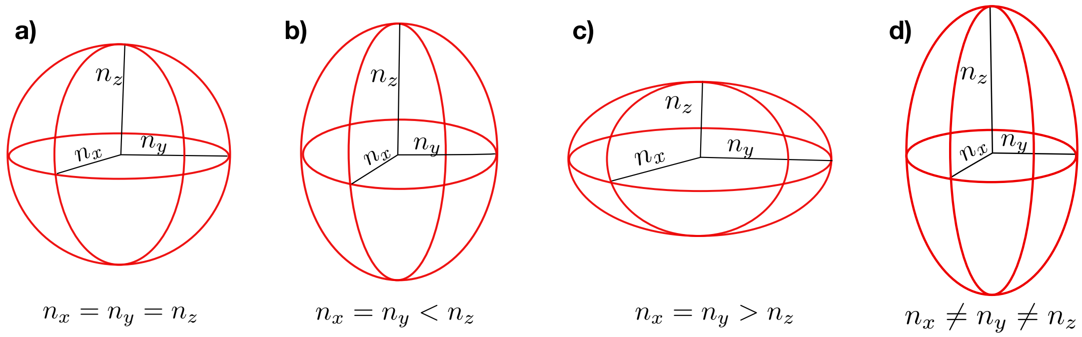


Figura 34. Un material biaxial tiene tres índices de refracción principales. Sus ejes principales asociados están orientados ortogonalmente. El material uniaxial tiene dos índices de refracción principales, el índice de refracción ordinario n_o y el índice extraordinario n_e. El material isotrópico tiene un índice de refracción n.

ejemplo el cuarzo), ver figura 34b. Un caso particular de materiales anisótropos se tiene cuando el material es isótropo con $n_x = n_y = n_z = n$, como se muestra en la figura 34d.

La diferencia máxima Δn en los índices de refracción del material entre los rayos extraordinarios y ordinarios que viajan a través de un material birrefringente es una cantidad medible y se conoce como birrefringencia. En los materiales biaxiales y uniaxiales (ver figura 35) la birrefringencia se puede expresar como valor absoluto de $|n_s - n_f|$ y $|n_e - n_o|$, respectivamente.

Las placas de ondas birrefringentes más comunes y usadas son los retardadores cuarto de onda y media onda, cuyas propiedades varían con la longitud de onda y el ángulo de incidencia del haz, modificando el estado de polarización del haz de entrada sin modificar la intensidad del haz de entrada. Al propagarse el haz en el retardadar se descompone en dos estados mutuamente ortogonales que viajan a diferentes velocidades introduciendo un desplazamiento de fase entre los dos rayos polarizados lo que da como resultado un estado de polarización, siempre y cuando el grosor del retardador sea lo suficientemente pequeño como para no destruir la coherencia entre los

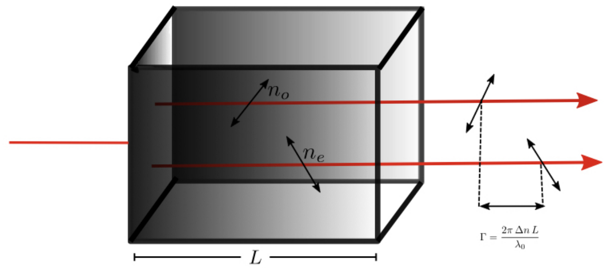


Figura 35. Representación de un cristal birrefringente. El haz de luz de entrada polarizado o no al interactuar con el cristal se divide en dos haces con estados de polarización ortogonales, los cuales viajan a diferente velocidad dado que el cristal exhibe diferentes índices de refracción n_o y n_e. Esto resulta en una diferencia de fase entre las dos estados de polarización.

dos componentes. El estado de salida es una composición coherente de los componentes rápidos y lentos de salida, lo que da como resultado un estado de polarización

El retardador se caracteriza por la cantidad de fase relativa Γ que introduce a los dos componentes del haz polarizadas ortogonalmente y al recombinarse estas dos componentes para formar un solo haz emergente con estado de polarización diferente. Este retardo se define como:

$$\Gamma = \frac{2\pi\,\Delta n\,L}{\lambda}, \tag{218}$$

en donde L representa el grosor del cristal uniaxial y λ es la longitud de onda de vacío de la luz.

Apéndice C. Derivación de la ecuación 71

Remplazando las ecuaciones paramétricas 69 y 70 de las variables x y y respectivamente, en la ecuación 66, se tiene

$$\begin{aligned}&\left[a+\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)(z-c)\sin 2t\right]^2\\&+\left[b-\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)(z-c)\cos 2t\right]^2+z^2=1\,.\end{aligned}\tag{219}$$

Esta expresión matemática es igual a

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2 z^2+\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2 c^2-2zc\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2\\&+2za\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\sin 2t-2ca\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\sin 2t-2zb\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\cos 2t\\&+2cb\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\cos 2t+z^2=1\,,\end{aligned}\tag{220}$$

en donde si se le suma y se resta c^2 a la ecuación anterior, y además se saca como factor común cada variable, se llega a

$$\begin{aligned}&\cancel{a^2+b^2+c^2}+c^2\left[\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2-1\right]+2c\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)(b\cos 2t-a\sin 2t)\\&-2z\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\left[b\cos 2t-a\sin 2t+c\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\right]\\&+z^2\left[1+\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2\right]=\cancel{1}\,.\end{aligned}\tag{221}$$

Apéndice D. Derivación de la ecuación 77

Sustituyendo la ecuación 75 del vertice del cono en las ecuaciones 72, 73 y 74, se obtiene para el radical de la ecuación 75

$$
\begin{aligned}
&(B^2-4AC)^{1/2} = \\
&\left[\frac{1}{2\left(1+\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2\right)}\left(4\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)^2\cos^2 2\chi'\sin^2(2\alpha'-2t)\right.\right. \\
&\left.\left.-8\sin(2\alpha'-2t)\sin 2\chi'\cos 2\chi'\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)+4\sin^2 2\chi'\right)\right]^{1/2} \\
&=\left\{4\left[\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\cos 2\chi'\sin(2\alpha'-2t)-\sin 2\chi'\right]^2\right\}^{1/2} \\
&=2\left[\left(\frac{1-\cos\delta'}{\sin\delta'}\right)\cos 2\chi'\sin(2\alpha'-2t)-\sin 2\chi'\right]. \qquad (222)
\end{aligned}
$$

Reemplazando el resultado anterior y la ecuación 73 en 75, se llega a la expresión 77.

Apéndice E. Derivación de la ecuación 94

A partir de $2\theta_1 = 2\alpha - \arcsin(-\tan 2\chi)$, ecuación 90, se tiene

$$\sin(2\alpha - 2\theta_1) = -\tan 2\chi\,, \tag{223}$$

y para $2\theta_2 = 2\alpha + \arcsin(-\tan 2\chi) - \pi$, ecuación 91, se obtiene

$$\sin(2\alpha - 2\theta_2) = -\tan 2\chi\,. \tag{224}$$

Remplazando la ecuación 223, o la ecuación 224 en la ecuación 84, se llega a

$$\mathbf{S}'_{cruzado} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\chi \cos 2\alpha \\ \cos 2\chi \sin 2\alpha \\ -\sin 2\chi \end{pmatrix}, \tag{225}$$

la cual corresponde a la ecuación 94.

Apéndice F. Demostración de las ecuaciones 95 y 96

Definiendo $2\theta_{\pm} = 2\alpha \pm \pi/2$, y remplazando en la ecuación 84, se llega a

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}'_{\mp} \quad &= (1, \cos 2\chi \cos 2\alpha + [\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\alpha \mp \pi/2) \\
&+ \sin 2\chi] \sin(2\alpha \pm \pi/2) \\
&, \cos 2\chi \sin 2\alpha - [\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\alpha \mp \pi/2) \\
&+ \sin 2\chi] \cos(2\alpha \pm \pi/2) \\
&, \cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\alpha \mp \pi/2)),
\end{aligned} \tag{226}$$

simplificando

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}'_{\mp} \quad &= (1, \cos 2\chi \cos 2\alpha - (\cos 2\chi \mp \sin 2\chi) \cos 2\alpha \\
&, \cos 2\chi \sin 2\alpha - (\cos 2\chi \mp \sin 2\chi) \sin 2\alpha \\
&, \mp \cos 2\chi) \, .
\end{aligned} \tag{227}$$

Finalmente se obtiene

$$\mathbf{S}'_{\mp} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \sin 2\chi \cos 2\alpha \\ \pm \sin 2\chi \sin 2\alpha \\ \mp \cos 2\chi \end{pmatrix}, \tag{228}$$

entonces $\mathbf{S}_{inferior} = \mathbf{S}_{-}$ y $\mathbf{S}_{superior} = \mathbf{S}_{+}$, las cuales se obtuvieron en las ecuaciones 95 y 96, respectivamente.

Apéndice G. Generalización de las ecuaciones 95 y 96

El estado de entrada en función de los ángulos de elipticidad y orientación está definido como:

$$\mathbf{S}_{entrada}(2\alpha,2\chi)=\begin{pmatrix}1\\ \\ \cos 2\chi\cos 2\alpha\\ \\ \cos 2\chi\sin 2\alpha\\ \\ \sin 2\chi\end{pmatrix}. \tag{229}$$

La interacción del estado $\mathbf{S}_{entrada}$ con cualquier retardador rotante genera la trayectoria sobre la esfera de Poincaré descrita por los estados emergentes, entre estos estados se tiene un máximo llamado $\mathbf{S}_{superior}$, un mínimo llamado $\mathbf{S}_{inferior}$, y un estado donde la trayectoria se cruza llamado $\mathbf{S}_{cruzado}$. las relaciones de estos estados con $\mathbf{S}_{entrada}$ se determinan para una placa de cuarto de onda (ver sección 2.3). Ahora, repetimos el procedimiento para cualquier retardador δ, para eso, encontramos el ángulo que mantiene invariante el meridiano, en la forma

$$\begin{aligned}&\pm\cos 2\chi'\cos 2\alpha=\cos 2\chi\cos 2\alpha+\\ &[\cos 2\chi\sin(2\alpha-2\theta)(1-\cos\delta)+\sin 2\chi\sin\delta]\sin 2\theta\,,\end{aligned} \tag{230}$$

$$\begin{aligned}&\pm\cos 2\chi'\sin 2\alpha=\cos 2\chi\sin 2\alpha-\\ &[\cos 2\chi\sin(2\alpha-2\theta)(1-\cos\delta)+\sin 2\chi\sin\delta]\cos 2\theta\,,\end{aligned} \tag{231}$$

$$\sin 2\chi' = \sin\delta \cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta) + \sin 2\chi \cos\delta\,. \tag{232}$$

Resolviendo $\cos 2\chi'$ en la ecuación 230 y ecuación 231, se tiene

$$[\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta)(1-\cos\delta) + \sin 2\chi \sin\delta] \cos(2\theta - 2\alpha) = 0. \tag{233}$$

Para 2θ se obtienen cuatro soluciones: $2\theta_{\pm}$ obtenidas en la sección 2.3 y las siguientes dos nuevas soluciones:

$$2\theta_1 = 2\alpha - \arcsin\left(-\tan 2\chi \left(\frac{\sin\delta}{1-\cos\delta}\right)\right), \tag{234}$$

$$2\theta_2 = 2\alpha + \arcsin\left(-\tan 2\chi \left(\frac{\sin\delta}{1-\cos\delta}\right)\right) - \pi, \tag{235}$$

Reemplazando la ecuación 234 y ecuación 235 en la ecuación para estados emergentes $\mathbf{S}'$ (ver ecuación 84), se obtiene $\mathbf{S}_{cruzado}(2\alpha, 2\chi)$ de la misma forma expresada en 2.3, estado que está determinada por el estado de entrada independiente al valor del retardo δ. Para las otras dos soluciones $2\theta_{\pm} = 2\alpha \pm \pi/2$, se reemplazan en la ecuación 84 para estados emergentes $\mathbf{S}'$, entonces se llega a

$$\mathbf{S'}_{\pm}(2\alpha', 2\chi') = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\alpha \cos(2\chi \pm \delta) \\ \sin 2\alpha \cos(2\chi \pm \delta) \\ \sin(2\chi \pm \delta) \end{pmatrix}. \tag{236}$$

Donde se obtienen las siguientes relaciones: $\alpha' = \alpha$ y $2\chi' = 2\chi \pm \delta$. Los vectores $S_{superior}$ y $S_{inferior}$ se obtienen a través de la ecuación 236 para los signos (+) y (-), respectivamente.

Apéndice H. Formulación cuaterniónica: Ley de los retardadores lineales

Escribiendo la ecuación 29 en la forma

$$U' = \begin{bmatrix} \cos\delta/2 \\ \cos 2\theta \sin\delta/2 \\ \sin 2\theta \sin\delta/2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i\cos 2\chi \cos 2\alpha \\ i\cos 2\chi \sin 2\alpha \\ i\sin 2\chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\delta/2 \\ -\cos 2\theta \sin\delta/2 \\ -\sin 2\theta \sin\delta/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{237}$$

Teniendo en cuenta que la primera y tercera matriz se obtiene mediante las ecuaciones 27 y 28, y en donde la matriz del medio $U_{4\times 1}$ representa el estado de polarización de entrada en coordenadas polares con $0 \leq \alpha \leq \pi$ y $-\pi/4 \leq \chi \leq \pi/4$.

Por otra parte, se define U_1 como:

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos\delta/2 \\ \cos 2\theta \sin\delta/2 \\ \sin 2\theta \sin\delta/2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i\cos 2\chi \cos 2\alpha \\ i\cos 2\chi \sin 2\alpha \\ i\sin 2\chi \end{bmatrix}, \tag{238}$$

luego, usando las reglas de la figura 33 se obtiene

$$U_1 = \begin{bmatrix} \cos\delta/2 - i\cos 2\theta\sin\delta/2\cos 2\chi\cos 2\alpha - i\sin 2\theta\sin\delta/2\cos 2\chi\sin 2\alpha \\ \\ i\cos\delta/2\cos 2\chi\cos 2\alpha + \cos 2\theta\sin\delta/2 + i\sin\delta/2\sin 2\theta\sin 2\chi \\ \\ i\cos\delta/2\cos 2\chi\sin 2\alpha + \sin 2\theta\sin\delta/2 - i\sin\delta/2\cos 2\theta\sin 2\chi \\ \\ i\cos\delta/2\sin 2\chi + i\sin\delta/2\cos 2\theta\cos 2\chi\sin 2\alpha - i\sin\delta/2\sin 2\theta\cos 2\chi\cos 2\alpha \end{bmatrix}. \quad (239)$$

De manera que la ecuación 27 se escribe como:

$$U' = U_1 \begin{bmatrix} \cos\delta/2 \\ \\ -\cos 2\theta\sin\delta/2 \\ \\ -\sin 2\theta\sin\delta/2 \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (240)$$

y multiplicando el último término se llega a

$$
\begin{aligned}
U' =& [(\cos^2\delta/2 - i\sin\delta/2\cos\delta/2\cos 2\theta\cos 2\chi\cos 2\alpha - i\sin\delta/2\cos\delta/2\sin 2\theta\cos 2\chi\sin 2\alpha \\
&+ i\sin\delta/2\cos\delta/2\cos 2\theta\cos 2\chi\cos 2\alpha + \sin^2\delta/2\cos^2 2\theta + i\sin^2\delta/2\cos 2\theta\sin 2\theta\sin 2\chi \\
&+ i\sin\delta/2\cos\delta/2\sin 2\theta\cos 2\chi\sin 2\alpha + \sin^2\delta/2\sin^2 2\theta - i\sin^2\delta/2\cos 2\theta\sin 2\theta\sin 2\chi)e_0 \\
&+ (-\cos\delta/2\sin\delta/2\cos 2\theta + i\sin^2\delta/2\cos^2 2\theta\cos 2\chi\cos 2\alpha \\
&+ i\sin^2\delta/2\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 2\chi\sin 2\alpha + i\cos^2\delta/2\cos 2\chi\cos 2\alpha + \cos\delta/2\sin\delta/2\cos 2\theta \\
&+ i\cos\delta/2\sin\delta/2\sin 2\theta\sin 2\chi + i\cos\delta/2\sin\delta/2\sin 2\theta\sin 2\chi \\
&+ i\sin^2\delta/2\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 2\chi\sin 2\alpha \\
&- i\sin^2\delta/2\sin^2 2\theta\cos 2\chi\cos 2\alpha)e_1 \\
&+ (-\cos\delta/2\sin\delta/2\sin 2\theta + i\sin^2\delta/2\sin 2\theta\cos 2\theta\cos 2\chi\cos 2\alpha \\
&+ i\sin^2\delta/2\sin^2 2\theta\cos 2\chi\sin 2\alpha + i\cos^2\delta/2\cos 2\chi\sin 2\alpha + \cos\delta/2\sin\delta/2\sin 2\theta \\
&- i\cos\delta/2\sin\delta/2\cos 2\theta\sin 2\chi - i\cos\delta/2\sin\delta/2\cos 2\theta\sin 2\chi \\
&- i\sin^2\delta/2\cos^2 2\theta\cos 2\chi\sin 2\alpha + i\sin^2\delta/2\cos 2\theta\sin 2\theta\cos 2\chi\cos 2\alpha)e_2 \\
&+ (i\cos^2\delta/2\sin 2\chi + i\sin\delta/2\cos\delta/2\cos 2\theta\cos 2\chi\sin 2\alpha \\
&- i\sin\delta/2\cos\delta/2\sin 2\theta\cos 2\chi\cos 2\alpha - \sin\delta/2\cos\delta/2\sin 2\theta\cos 2\chi\cos 2\alpha \\
&- \sin^2\delta/2\sin 2\theta\cos 2\theta - i\sin^2\delta/2\sin^2 2\theta\sin 2\chi \\
&+ i\sin\delta/2\cos\delta/2\cos 2\theta\cos 2\chi\sin 2\alpha + \sin^2\delta/2\cos 2\theta\sin 2\theta \\
&- i\sin\delta/2\cos\delta/2\cos^2 2\theta\sin 2\chi)e_3]\,. \qquad (241)
\end{aligned}
$$

Finalmente se obtiene

$$U' = \begin{bmatrix} 1 \\ i\{\cos 2\chi \cos 2\alpha + [\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta)(1 - \cos\delta) + \sin 2\chi \sin\delta] \sin 2\theta\} \\ i\{\cos 2\chi \sin 2\alpha - [\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta)(1 - \cos\delta) + \sin 2\chi \sin\delta] \cos 2\theta\} \\ i[\sin\delta \cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta) + \sin 2\chi \cos\delta] \end{bmatrix}. \qquad (242)$$

Este resultado matemático de la interacción entre un haz polarizado y un retardador rotante mediante el método de los cuaterniones, corresponde al obtenido en el sección 2.2 (ver ecuaciones 81,82 y 83).

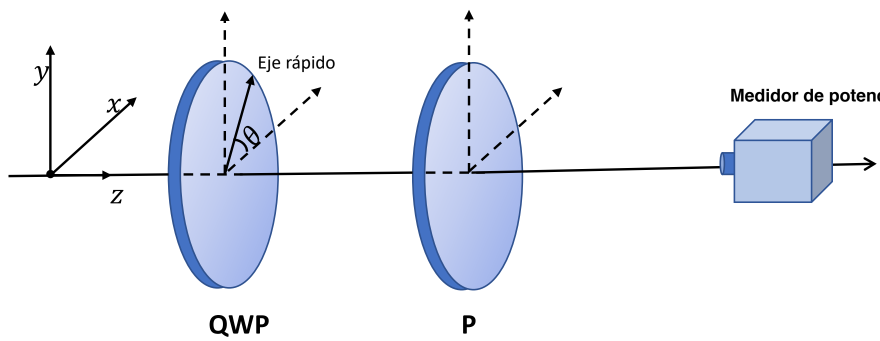


Figura 36. Medición de los parámetros de Stokes utilizando un retardador rotante cuarto de onda (QWP) y un polarizador lineal (P).

Apéndice I. Medición de polarización: técnica cuarto de onda rotante

La técnica cuarto de onda permite medir los parámetros de Stokes mediante el análisis de Fourier y un retardador cuarto de onda rotante que gira a una frecuencia angular ω seguido por un polarizador horizontal lineal (ver figura 36), como se muestra a continuación.

Los parámetros de Stokes del haz emergente de la combinación de un retardador cuarto de onda rotante (ver ecuación 64) y un polarizador horizontal,

$$M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{243}$$

corresponde a el parámetro de Stokes S_0, el cual representa la intensidad total de la luz transmitida definida como:

$$I(\theta) = \frac{1}{2}(S_0 + S_1 \cos^2 2\theta + S_2 \sin 2\theta \cos 2\theta - S_3 \sin 2\theta)\,, \tag{244}$$

La ecuación anterior se puede reescribir utilizando las fórmulas trigonométricas de ángulo medio y reemplazando $\theta = \omega t$ se obtiene

$$I(\theta) = \frac{1}{2}(A - B \sin 2\omega t + C \cos 4\omega t + D \sin 4\omega t)\,, \tag{245}$$

en donde $A = S_0 + S_1/2$, $B = S_3$, $C = S_1/2$ y $D = S_2/2$. La ecuación anterior describe una serie de Fourier truncada, el primer término es constante, el segundo término de frecuencia doble y los dos últimos términos son de frecuencia cuádruple, lo que permite fácilmente hallar los parámetros de Stokes

$$S_0 = A - C\,, \tag{246}$$

$$S_1 = 2C\,, \tag{247}$$

$$S_2 = 2D\,, \tag{248}$$

$$S_3 = B\,. \tag{249}$$

Los coeficientes se encuentran realizando un análisis de Fourier integrando los valores de intensidad observados en el rango del ángulo de rotación del retardador, el cual rota de 0 a 360 en incrementos determinados (Goldstein, 2017; Azzam, 2016).

Apéndice J. Variables circulares

Una variable aleatoria circular se define mediante su función de distribución (Ley and Verdebout, 2017; Jammalamadaka and Sengupta, 2001), la cual depende de la elección de la orientación y dirección inicial del círculo unitario. Además, para dos ángulos θ y $\theta + 2\kappa\pi$ con $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, dan lugar al mismo punto en el circulo unitario, implicando que la función de la distribución circular debe ser periódica. Por lo tanto, la función de distribución circular F se define como:

$$F(\theta) = Pr(0 < \Theta \leq \theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \tag{250}$$

y

$$F(\theta + 2\pi) - F(\theta) = 1, \qquad -\infty < \theta < \infty. \tag{251}$$

En la ecuación 250 la dirección escogida es cero y θ sólo puede tomar valores entre 0 y 2π. Por su parte, la ecuación 251 es una condición adicional impuesta para reflejar la periodicidad de una distribución circular, la cual indica la probabilidad de obtener un punto en el círculo unitario dentro de cualquier arco de longitud 2π. La función de distribución F es una función continua a la derecha, a diferencia con la funciones de distribución en la línea real, a diferencia de las funciones de distribución en la línea real, lo cual implica

$$\lim_{\theta \to -\infty} F(\theta) = -\infty, \qquad \lim_{\theta \to \infty} F(\theta) = \infty. \tag{252}$$

Una diferencia importante con respecto a la función de distribución de una variable aleatoria lineal es que los valores que toma la función de distribución F no son probabilidades (Mardia and Jupp, 2009; Jammalamadaka and Sengupta, 2001). Sin embargo, para $\alpha \leq \beta \leq \alpha + 2\pi$

$$Pr(\alpha < \Theta \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} dF(\theta). \tag{253}$$

La integral 253 es una integral de Lebesgue-Stieltjes. Por definición,

$$F(-\pi) = 0, \qquad F(\pi) = 1. \tag{254}$$

Si la función de distribución F es continua, entonces tiene una función de densidad de probabilidad f tal que

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) d\theta = F(\beta) - F(\alpha), \qquad -\infty < \alpha \leq \beta < \infty. \tag{255}$$

Una función f es la función de densidad de probabilidad de una distribución circular absolutamente continua si y sólo si cumple con las siguientes propiedades

- $f(\theta) \geq 0$ casi siempre sobre $[-\pi, \pi)$,
- $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$,
- $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ casi siempre sobre $[-\pi, \pi)$.

La primera propiedad también se cumple para la densidad de una variable aleatoria observada en la línea real. Los otros dos propiedades son consecuencia de la periodicidad de una distribución circular.

Apéndice K. Distribución de von Mises-Fisher

La distribución de von Mises Fisher es un modelo unimodal y con simetría rotacional (Mardia and Jupp, 2009). Esta distribución es una generalización de la distribución de von Mises a dimensiones superiores, la cual parte de las variables aleatorias independientes x_1 y x_2 cuya distribución de densidad de probabilidad conjunta está definida como:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= f(x_1)f(x_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}(x_1-\kappa)^2\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}x_2^2\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2-2x_1\kappa+\kappa^2)\right]. \end{aligned} \tag{256}$$

Re-escribiendo la ecuación anterior en coordenadas polares (r,θ), se tiene

$$x_1 = r\cos\theta, \qquad y \qquad x_2 = r\sin\theta\,, \tag{257}$$

en donde $x_1^2+x_2^2 = r^2$ y $\theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$. El Jacobiano de esta transformación esta dada por

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r\,. \tag{258}$$

Por lo tanto, se define la en función de densidad de probabilidad en función de las variables polares

(r,θ) como:

$$f(r,\theta)=\frac{r}{2\pi}\exp\left[-1/2(r^2-2\kappa r\cos\theta+\kappa^2)\right], \tag{259}$$

en donde $0\leq\theta<2\pi$ y $0<r<\infty$. Dada la independencia estadística entre la variable r y θ se puede obtener la distribución de densidad de probabilidad de la variable aleatoria r

$$\begin{aligned} f(r) &= \int_0^{2\pi} f(r,\theta)d\theta \\ &= r\exp\left[-\frac{1}{2}(r^2+\kappa^2)\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(r\kappa\cos\theta)\right]d\theta \\ &= r\exp\left[-\frac{1}{2}(r^2+\kappa^2)\right]I_0(\kappa r). \end{aligned} \tag{260}$$

La distribución condicional de θ para un r dado esta dado por:

$$\begin{aligned} f(r|\theta) &= \frac{f(r,\theta)}{f(r)} \\ &= \frac{\frac{1}{2\pi}r\exp\left[-\frac{1}{2}(r^2-2r\kappa\cos\theta+\kappa^2)\right]}{r\exp\left[-\frac{1}{2}(r^2+\kappa^2)\right]I_0(r\kappa)} \\ &= \frac{1}{2\pi I_0(r\kappa)}\exp(r\kappa\cos\theta). \end{aligned} \tag{261}$$

Si $r=1$ la distribución de densidad de probabilidad condicional de θ llega a ser

$$f(\theta|r=1)=\frac{1}{2\pi I_0(\kappa)}\exp(\kappa\cos\theta). \tag{262}$$

La expresión anterior corresponde a la distribución de von Mises, en donde I_0 denota la función de Bessel modificada de primera clase y orden cero, y κ representa el parámetro de concentración de la distribución (Mardia and Jupp, 2009; Ley and Verdebout, 2017). Por otro lado, teniendo que:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (\cos\theta, \sin\theta) \\ \boldsymbol{\mu} &= (\cos\alpha, \sin\alpha)\,.\end{aligned} \tag{263}$$

El producto $\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x}$ con $r = 1$ esta dado por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x} &= \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta \\ &= \cos(\theta - \alpha)\,.\end{aligned} \tag{264}$$

Comparando el resultado anterior con la ecuación 262 se llega a la expresión de la distribución de densidad de probabilidad de la distribución de von Mises

$$f(\mathbf{x};\kappa,\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x}}, \tag{265}$$

en donde $\mathbf{x}$ representa un vector aleatorio sobre un círculo de radio unitario en $\mathscr{R}$. En Fisher extendiendo este resultado a un vector unitario p-dimensional aleatorio $\mathbf{x}$ (Mardia and Jupp, 2009; Ley and Verdebout, 2017)

$$f(\mathbf{x};\mu,\kappa) = \frac{1}{c_2(\kappa)} e^{\kappa\mu^T\mathbf{x}}\ \kappa > 0,\ \mathbf{x}| = 1,\ |\mu| = 1\,, \tag{266}$$

en donde μ y κ corresponden a la dirección media y concentración de la distribución, respectivamente. Por su parte, la constante de normalización se obtiene a partir de

$$1=\frac{1}{c_2(\kappa)}\int_{S^{d-1}}e^{\kappa\mu^T\mathbf{x}}dx=\frac{1}{c_2(\kappa)}\frac{4\pi\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\Gamma(1/2)}\int_{-1}^{1}e^{\kappa t}(1-t^2)^{\frac{d-3}{2}}dt\,. \tag{267}$$

La función de Bessel modificada de primera clase y orden ν está definida por

$$I_\nu(\kappa)=\frac{(\kappa/2)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}e^{\kappa t}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt\,. \tag{268}$$

Reemplazando en la ecuación anterior $\nu=d/2-1$,

$$I_\nu(\kappa)=\frac{(\kappa/2)^{\frac{d}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}e^{\kappa t}(1-t^2)^{\frac{d}{2}-\frac{3}{2}}dt\,, \tag{269}$$

la ecuación 267 queda definida de la forma

$$\begin{aligned}1&=\frac{1}{c_2(\kappa)}\frac{4\pi\Gamma(d/2)(\kappa/2)^{\frac{d}{2}-1}}{(\kappa/2)^{\frac{d}{2}-1}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)\Gamma(1/2)}\int_{-1}^{1}e^{\kappa t}(1-t^2)^{\frac{p-3}{2}}dt\\&=\frac{1}{c_2(\kappa)}\frac{4\pi\Gamma(d/2)I_{p/2-1}(\kappa)}{(\kappa/2)^{\frac{d}{2}-1}}\,.\end{aligned} \tag{270}$$

Por lo tanto, la constante de normalización se escribe como:

$$c_2(\kappa)=\frac{4\pi\Gamma(d/2)I_{p/2-1}(\kappa)}{(\kappa/2)^{\frac{d}{2}-1}}\,. \tag{271}$$

En el caso que corresponde a una esfera, es decir $p = 3$

$$c_2(\kappa) = \frac{4\pi \frac{2\sqrt{\pi}\sinh\kappa}{2(2\pi\kappa)^{1/2}}}{(\kappa/2)^{1/2}} = \frac{4\pi\sinh(\kappa)}{\kappa}. \tag{272}$$

Remplazando lo anterior en la ecuación 266 se encuentra

$$f(\mathbf{x};\mu,\kappa) = \frac{\kappa}{4\pi\sinh(\kappa)} e^{\kappa\mu^T\mathbf{x}}. \tag{273}$$

Escribiendo $\mathbf{x}$ y μ en coordenadas polares esféricas

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi), \\ \mu &= (\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\sin\beta\cos\alpha, \sin\beta\sin\alpha, \cos\beta). \end{aligned} \tag{274}$$

en donde ϕ es el ángulo colatitud $0 \leq \phi < \pi$, θ es el ángulo azimut $0 \leq \theta < 2\pi$, (β, α) es la dirección media y κ es medida de la concentración sobre la dirección media. El Jacobiano de está transformación

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \phi} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \phi} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \phi} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi \\ \cos\phi & -\sin\phi & 0 \end{bmatrix} = \sin\phi. \tag{275}$$

El producto $\mu^T \mathbf{x}$ (asumiendo que $r = 1$) está dado por

$$
\begin{aligned}
\mu^T \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\phi \end{pmatrix} \\
&= \sin\beta\cos\alpha\sin\phi\cos\theta + \sin\beta\sin\alpha\sin\phi\sin\theta + \cos\beta\cos\phi \\
&= \sin\beta\sin\phi(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) + \cos\beta\cos\phi \\
&= \sin\beta\sin\phi\cos(\alpha-\theta) + \cos\beta\cos\phi\,.
\end{aligned} \tag{276}
$$

Remplazando el resultado anterior en la ecuación 273, de la distribución de von Mises Fisher (ϕ, θ) queda de la forma

$$
f(\theta, \phi; \alpha, \beta, \kappa) = \frac{\kappa\sin\phi}{4\pi\sinh\kappa} e^{\kappa(\sin\beta\sin\phi\cos(\alpha-\theta)+\cos\beta\cos\phi)} \tag{277}
$$

El parámetro de concentración κ, el cual indica el grado de dispersión direccional o en otras palabras controla en ancho de la distribución sobre la esfera. Por lo tanto, en el caso de que $\kappa \to \infty$, la dispersión llegue a ser no isotrópica, es decir tienda a una distribución delta de Dirac, y en el otro extremo cuando $\kappa = 0$ se produce una dispersión isotrópica, es decir los valores del vector $\mathbf{x}$ tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Apéndice L. Distribución de densidad de probabilidad de Kent

La generalización de von Mises-Fisher se conoce como distribución de Fisher-Bingham (Mardia and Jupp, 2009) que toma la forma:

$$f(\mathbf{x};\kappa,\boldsymbol{\mu},\mathbf{x}) = c(\kappa,\mathbf{A})^{-1} exp\{k\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x} + \beta_2(\boldsymbol{\gamma}_2^T\mathbf{x})^2 + \beta_3(\boldsymbol{\gamma}_3^T\mathbf{x})^2\}\,. \tag{278}$$

Los parámetros γ_1, γ_2, y γ_3 son vectores unitarios, en donde γ_2 y γ_3 son vectores ortogonales entre sí. Por su parte, los parámetros con valores reales β_2 y β_3 con $\beta_2 \leq \beta_3$. El uso de esta distribución en estadísticas direccional presenta inconvenientes dada la cantidad y comprensión de parámetros 278. De ahí que Kent en (Kent, 1982) propuso una distribución cuyos parámetros tiene una interpretación simple, ya que γ_1, γ_2, y γ_3 que son vectores forman un sistema ortogonal. Además, $\beta_2 = -\beta$ y $\beta_3 = \beta$

$$f(\mathbf{x};\kappa,\boldsymbol{\mu},\mathbf{x}) = a(\kappa,\mathbf{A})^{-1} exp\{k\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x} + \beta[(\boldsymbol{\gamma}_2^T\mathbf{x})^2 - (\boldsymbol{\gamma}_3^T\mathbf{x})^2\}\,, \tag{279}$$

en donde β y κ son los parámetros de elipticidad y concentración, respectivamente. Estos parámetros cumple con la condición ($0 \leq 2\beta < \kappa$). Los vectores unitarios $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ y $\boldsymbol{\gamma}_3$ representan los ejes mayor, menor y dirección media de la elipse de probabilidad sobre la esfera de Poincaré. En el caso $\beta = 0$ la distribución 279 corresponde a la distribución de von Mises-Fisher (Mardia and Jupp, 2009; Ley and Verdebout, 2017).

Apéndice M. Demostración del grado de correlación definido por la ecuación 165

Dada la rotación en un ángulo θ alrededor de un eje arbitrario definido por el vector unitario dirección media $\boldsymbol{\gamma}_1 = (\gamma_{1_{S_1}}, \gamma_{2_{S_2}}, \gamma_{3_{S_3}})$, se define mediante la matriz de rotación definida por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_\theta + \hat{u}_1^2(1-c_\theta) & \hat{u}_1\hat{u}_2(1-c_\theta) - \hat{u}_3 s_\theta & \hat{u}_1\hat{u}_3(1-c_\theta) + \hat{u}_2 s_\theta \\ \hat{u}_2\hat{u}_1(1-c_\theta) + \hat{u}_3 s_\theta & c_\theta + \hat{u}_2^2(1-c_\theta) & \hat{u}_2\hat{u}_3(1-c_\theta) - \hat{u}_1 s_\theta \\ \hat{u}_3\hat{u}_1(1-c_\theta) - \hat{u}_2 s_\theta & \hat{u}_3\hat{u}_2(1-c_\theta) + \hat{u}_1 s_\theta & c_\theta + \hat{u}_3^2(1-c_\theta) \end{bmatrix}. \tag{280}$$

Reemplazando la matriz de rotación $\boldsymbol{R}$ en la ecuación 163, se obtiene el grado de correlación general sobre la esfera de Poincaré dado por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}(t+\tau) \begin{bmatrix} c_\theta + \hat{u}_1^2(1-c_\theta) & \hat{u}_1\hat{u}_2(1-c_\theta) - \hat{u}_3 s_\theta & \hat{u}_1\hat{u}_3(1-c_\theta) + \hat{u}_2 s_\theta \\ \hat{u}_2\hat{u}_1(1-c_\theta) + \hat{u}_3 s_\theta & c_\theta + \hat{u}_2^2(1-c_\theta) & \hat{u}_2\hat{u}_3(1-c_\theta) - \hat{u}_1 s_\theta \\ \hat{u}_3\hat{u}_1(1-c_\theta) - \hat{u}_2 s_\theta & \hat{u}_3\hat{u}_2(1-c_\theta) + \hat{u}_1 s_\theta & c_\theta + \hat{u}_3^2(1-c_\theta) \end{bmatrix} \mathbf{S}(t)^T \;, \tag{281}$$

en donde $\mathbf{S}(t) = (S_1(t), S_2(t), S_3(t))$ y $\mathbf{S}(t+\tau) = (S_1(t+\tau), S_2(t+\tau), S_3(t+\tau))$. De acuerdo con esto se llega a:

$$
\begin{aligned}
\gamma_{PG} &= [c_\theta + \hat{u}_1^2\,(1-c_\theta)]S_1(t)S_1(t+\tau) + [\hat{u}_1\hat{u}_2\,(1-c_\theta) - \hat{u}_3 s_\theta]S_2(t)S_1(t+\tau) \\
&+ [\hat{u}_1\hat{u}_3\,(1-c_\theta) + \hat{u}_2 s_\theta]S_3(t)S_1(t+\tau) + [\hat{u}_2\hat{u}_1\,(1-c_\theta) + \hat{u}_3 s_\theta]S_1(t)S_2(t+\tau) \\
&+ [c_\theta + \hat{u}_2^2\,(1-c_\theta)]S_2(t)S_2(t+\tau) + [\hat{u}_2\hat{u}_3\,(1-c_\theta) - \hat{u}_1 s_\theta]S_3(t)S_2(t+\tau) \\
&+ [\hat{u}_3\hat{u}_1\,(1-c_\theta) - \hat{u}_2 s_\theta]S_1(t)S_3(t+\tau) + [\hat{u}_3\hat{u}_2\,(1-c_\theta) + \hat{u}_1 s_\theta]S_2(t)S_3(t+\tau) \\
&+ [c_\theta + \hat{u}_3^2(1-c_\theta)]S_3(t)S_3(t+\tau)\,, \qquad (282)
\end{aligned}
$$

Simplificado, finalmente se llaga a la ecuación

$$
\begin{aligned}
\gamma_{PG} &= [c_\theta + \hat{u}_1^2\,(1-c_\theta)]S_1(t)S_1(t+\tau) + [c_\theta + \hat{u}_2^2\,(1-c_\theta)]S_2(t)S_2(t+\tau) \\
&+ [c_\theta + \hat{u}_3^2(1-c_\theta)]S_3(t)S_3(t+\tau) + [\hat{u}_1\hat{u}_2\,(1-c_\theta)]S_2(t)S_1(t+\tau) \\
&+ [\hat{u}_1\hat{u}_3\,(1-c_\theta)]S_3(t)S_1(t+\tau) + [\hat{u}_2\hat{u}_3\,(1-c_\theta)]S_3(t)S_2(t+\tau)\,, \qquad (283)
\end{aligned}
$$

la cual representa el grado de correlación general sobre la esfera de Poincaré.