TRASLACIÓN + TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS + CABRI GEOMETRY = UNA NUEVA HERRAMIENTA PARA LA CLASE DE GEOMETRÍA

OSCAR MAURICIO CORZO JAIMES
PAOLA CECILIA DELGADO PUENTES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

TRASLACIÓN + TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS + CABRI GEOMETRY = UNA NUEVA HERRAMIENTA PARA LA CLASE DE GEOMETRÍA

OSCAR MAURICIO CORZO JAIMES
PAOLA CECILIA DELGADO PUENTES

Trabajo de grado para obtener el título de
Licenciado en Matemáticas

Director
MARTÍN EDUARDO ACOSTA GEMPELER
Doctor en Didáctica de las Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

“*El profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivir y que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y en las cuales el conocimiento en cuestión aparezca como una solución óptima a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento sea construible por los alumnos”* [1]

[1] *Estudiar Matemáticas, el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Pág. 214*

AGRADECIMIENTOS

A Dios por permitirme alcanzar este primer gran sueño de mi vida.

A mi amada familia, en especial a mi madre, por su incondicional apoyo, comprensión y amor.

A mi hermano Carlos porque gracias a él este maravilloso logro se hizo realidad.

A los profesores Martín Acosta Gempeler y Juan de Dios Urbina, porque su acompañamiento fue decisivo en este proyecto.

A la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander y al Grupo Edumat de Nuevas Tecnologías por hacer parte de mi crecimiento personal y profesional.

Paola C.

A mi Dios por darme la oportunidad de obtener este logro en mi vida, a mi familia que siempre estuvo ahí, a los compañeros de estudio que colaboraron en todo momento, a los profesores que me capacitaron durante todo el proceso y a todos aquellos que de una u otra forma contribuyeron para que llegara este momento.

Oscar Corzo.

CONTENIDO

RESUMEN

TITULO[*]: TRASLACIÓN+TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS+CABRI GEOMETRY=UNA NUEVA HERRAMIENTA PARA LA CLASE DE GEOMETRÍA

AUTORES: CORZO JAIMES, Oscar Mauricio y DELGADO PUENTES, Paola Cecilia[**]

PALABRAS CLAVES:
1. Traslación 2.Cabri Geometry 3. Tarea 4. Acciones

DESCRIPCIÓN O CONTENIDO

Esta investigación se realizó con un grupo de sexto grado del Colegio Las Américas. En ella se aplicaron cuatro actividades para el concepto de traslación diseñadas de acuerdo con la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, en las cuales a los estudiantes se les presentaban unas figuras en el software de geometría dinámica Cabri Geometry de la Calculadora TI 92 en las que debían realizar una serie de tareas.

La teoría de las situaciones didácticas propone una nueva metodología en la enseñanza al buscar que los estudiantes descubran los conocimientos, por esta razón el objetivo que planteamos fue: analizar el diseño y el desarrollo de las actividades sobre el concepto de traslación con el programa Cabri, es decir, evaluar la efectividad de las actividades desde el punto de vista de la teoría al comparar lo que se previó con lo que realmente sucedió en clase.

Al analizar la información recolectada, constatamos que el uso de Cabri permitió a los estudiantes identificar de manera gradual las propiedades de dirección, sentido y magnitud que caracterizan a una traslación, porque a medida que ellos realizaban acciones para solucionar las tareas propuestas y recibían las respectivas retroacciones en forma de fenómenos visuales en la pantalla de la calculadora construían así los conocimientos.

---

[*] Trabajo de Grado.
[**] Facultad de Ciencias. Licenciatura en Matemáticas. D. Martín Acosta Gempeler.

ABSTRACT

TITLE*: TRANSLATION + THEORY OF DIDACTIC SITUATIONS + CABRI GEOMETRY = A NEW TOOL FOR THE CLASS OF GEOMETRY

AUTHORS: CORZO JAIMES, Oscar Mauricio y DELGADO PUENTES, Paola Cecilia**

KEYWORDS:
1. Translation 2.Cabri Geometry 3.Task 4. Actions

Description

This research was conducted with a group of students of the Americas School. It was applied four activities for the translation concept designed according to the didactic situations theory of Guy Brousseau, in which we presented to the students some figures on the dynamic geometry software Cabri Geometry Calculator TI 92 and they should make some activities.

The didactic situations theory proposes a new methodology in teaching by permiting to the students discovery knowledge, for this reason we raised the following goal: to analyze the design and development of activities about the translation concept with the Cabri program, in other words, to evaluate the effectiveness of activities from the theory point of view to compare what was planned with happened in class.

By analyzing the collected information, we note that the use of Cabri permitted identify the properties that characterizing a translation; because they built up knowledge by solving proposed tasks and received the respective feedbacks by visual phenomena in the calculator screen.

---

* Thesis

** Faculty of Science. Bachelor of Mathematics. Ph.D Acosta Gempeler Martín.

INTRODUCCIÓN

Si observamos nuestro entorno inmediato, descubriremos que en él se encuentran muchas relaciones y conceptos geométricos, lo que nos hace reflexionar sobre las razones para enseñar Geometría, puesto que ella proporciona herramientas para modelar el espacio, es decir, *la Geometría es la matemática del espacio*. (Bishop 1983).

Dada esta importancia, se deben utilizar todos aquellos recursos disponibles actualmente, en especial aquellos que ayuden a mejorar el aprendizaje en los estudiantes. En uno de los documentos del Ministerio de Educación Nacional referente a este tema dice:

"La enseñanza de la Geometría está cambiando con el uso de las nuevas tecnologías en el salón de clases, herramientas como software de geometría dinámica disponible en calculadoras especializadas, hace posible que los estudiantes exploren la geometría y tengan la posibilidad de estudiar objetos y propiedades geométricas"[2] (MEN, 2004).

En el año 2000 el Ministerio de Educación nacional dotó de calculadoras TI 92 a 60 instituciones educativas en 17 departamentos, y capacitó a algunos de los docentes de las instituciones involucradas, en el marco del Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de la Educación Media en Colombia, que buscaba la mediación de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemáticas.

[2] Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales.

El grupo de nuevas tecnologías de Edumat-UIS quiere dar continuidad a la iniciativa del Ministerio de Educación aunque a menor escala (solamente dos colegios), por esta razón en el año 2009 se dio inicio al **Proyecto Institucional de Uso de la Geometría Dinámica** con la participación de los colegios las Américas y el Vicente Azuero. En este sentido el objetivo de este proyecto es lograr que los profesores de las instituciones participantes se motiven a utilizar el software Cabri Geometry para la enseñanza de la Geometría en los grados sexto a noveno. Para ello se lleva a cabo una capacitación de profesores para una utilización correcta de Cabri Geometry como herramienta de exploración de la geometría, y como parte central de estas reuniones se analizan y se prueban las actividades de cada uno de los temas que se van a trabajar con los estudiantes, para hacer las correcciones necesarias antes de aplicarlas en el aula de clase. Por último, se exponen las experiencias de los profesores al desarrollar las actividades en los colegios. Este proyecto se desarrolla de manera gradual: aunque todos los profesores de matemáticas participan en la formación, durante el primer año se trabaja en el currículo de sexto grado, en el segundo año el de séptimo grado y así sucesivamente.

Con este proyecto contribuimos en la evaluación de las actividades propuestas (específicamente las actividades de traslación), recogiendo datos sobre la implementación que realizó la profesora Blanca Nubia Niño del colegio Las Américas, y comparando el diseño de las actividades con el desarrollo efectivo en el salón de clase. De ahí surge el objetivo fundamental de este proyecto que consiste en *analizar el diseño y el desarrollo de las actividades sobre el concepto de traslación con el programa Cabri Geometry en el marco del proyecto institucional de uso de la geometría dinámica en el grado 6-01 de la institución educativa las Américas de Bucaramanga.*

En el segundo capítulo "MARCO TEÓRICO" presentamos la Teoría de las Situaciones Didácticas que dio la fundamentación respectiva para las distintas actividades, también se exponen las características del software Cabri Geometry que lo hicieron apropiado para el desarrollo del proyecto en sí y finalmente presentamos el concepto de traslación

En el tercer capítulo "ORGANIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA" se presentan algunos detalles de las actividades y la forma en la que éstas se aplicaron en el salón de clases.

En el cuarto capítulo "ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES" el lector encontrará el objetivo para el cual fue diseñada cada una de las actividades, y se confronta lo que se previó para cada una de ellas con lo que realmente sucedió en el salón de clases.

En el quinto capítulo "CONCLUSIONES GENERALES" consignamos los que consideramos los aportes más importantes de este trabajo en el campo de la didáctica lo que representa un reto para los profesores que deseen implementar en sus clases una nueva forma de enseñar la Geometría.

1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

1.1 SITUACIONES DIDÁCTICAS

> *"El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades, desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por las respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (Brousseau 1986)*
>
> *"La concepción moderna la enseñanza va a pedir al profesor que provoque en el alumno las adaptaciones deseadas, por medio de la selección cuidadosa de los "problemas" que le propone. Esos problemas, escogidos de manera que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerlo actuar, hablar, reflexionar, evolucionar en su propio movimiento. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en el que produce su respuesta, el profesor evita intervenir como proponente de los conocimientos que quiere ver aparecer".* [3]

Las actividades las analizaremos desde el punto de vista de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau. A continuación expondremos sucintamente los principales conceptos de esta teoría que utilizaremos en el análisis.

Aprendizaje por adaptación

Para Brousseau (ver cita anterior) el aprendizaje es un *aprendizaje por adaptación*, concepto heredado de Piaget, quien desde su punto de vista de biólogo concebía la inteligencia como la capacidad de adaptación, pues las especies más inteligentes son aquellas que logran adaptarse al medio. En el siguiente gráfico se observa la teoría de Piaget aplicada a la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau:

[3] La Importancia de lo Falso y lo Verdadero en la Clase de Matemáticas. p. 135

Figura 1. Teoría de Piaget

Tenemos un sujeto que se relaciona con un medio donde vive; este sujeto tiene una intención y para lograrla realiza acciones sobre ese medio. El medio reacciona a esa acción con algo que llamamos una retroacción. El sujeto interpreta esa retroacción para saber si alcanzó su intención o no; si la alcanzó, *valida* su acción y la refuerza; si no la alcanzó, modifica su acción y empieza otro ciclo acción - retroacción, hasta que logra obtener lo que quería.

El aprendizaje por adaptación no contempla la intervención de un profesor; sin embargo, en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau el rol del profesor es muy importante, puesto que es el encargado de crear la *intención* en el estudiante y preparar correctamente el *medio.* El profesor debe anticipar las posibles *acciones* del estudiante y las *retroacciones* del *medio* para garantizar que puedan ser interpretadas por el estudiante, con el fin de *validar* o invalidar sus acciones, y de esta manera se dé un aprendizaje por adaptación.

Medio

Para Piaget el medio es el entorno natural del sujeto. Para Brousseau el medio es una entidad que el profesor puede moldear con el fin de obtener los objetivos de aprendizaje. Esta entidad debe tener las siguientes características:

1. Es exterior al alumno: el alumno debe reconocerle una existencia objetiva.

2. Es material: el alumno puede interactuar con él por medio de acciones y no por medio del lenguaje.
3. No tiene ninguna intención: No debe ser percibido como una persona.
4. Reacciona: las acciones del alumno tienen efectos reconocibles.
5. Impone restricciones a la acción: No cualquier acción es posible.

Para lograr que el aprendizaje por adaptación producido por la interacción con el medio responda a los objetivos de aprendizaje, el profesor debe controlar de manera especial las acciones que puede realizar el alumno y las retroacciones del medio, de manera que sólo se validen las acciones que corresponden al saber que se desea enseñar.

Validación

"El elemento determinante del aprendizaje en las situaciones a-didácticas es la posibilidad de *validación*. En toda resolución de problemas debe darse la oportunidad de que los estudiantes reconozcan sus errores y cómo corregirlos; normalmente el profesor interviene directamente para señalar los errores y exponer la solución correcta (fase de evaluación según Margolinas). Pero existe la posibilidad de que el alumno decida sobre sus propias acciones, basado en sus conocimientos y en las retroacciones del medio. *Es una fase de validación, si el alumno decide él mismo sobre la validez de su trabajo*"[4].

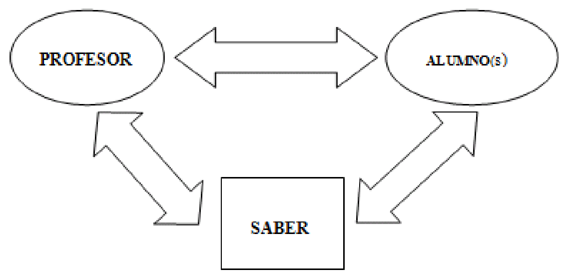
Situación[5] didáctica-situación a-didáctica

Brousseau llama situación a-didáctica, aquella en la que se produce un aprendizaje por adaptación; es decir, producto de la interacción del alumno con un medio, sin intervención directa del profesor. El profesor interviene de manera indirecta, preparando el medio adecuado y el problema que entrega al alumno.

[4] La importancia de lo falso y lo verdadero en clase de matemáticas. Pág. 32.
[5] Entendiendo por situación "un entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente que la considera como una herramienta" Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas pág. 17.

Una vez terminada la situación a-didáctica, el profesor relaciona la experiencia del alumno con el saber objetivo del aprendizaje. Una *situación a-didáctica* queda entonces inscrita dentro de una situación más global: la *situación didáctica*, que se caracteriza por la relación entre tres polos: el profesor, el estudiante y el saber. Situación que se da generalmente en un salón de clase, cuando un profesor enseña un saber a los alumnos.

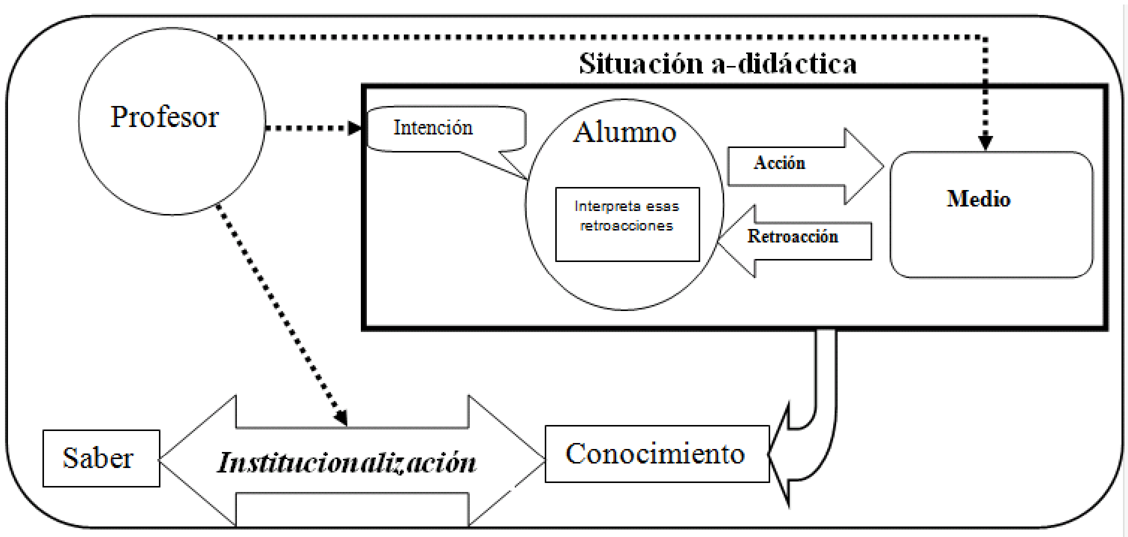
Figura 2. Situación Didáctica



Asumiendo una posición constructivista, Brousseau no considera que sea posible transmitir el saber directamente al alumno, sino que el profesor utiliza las situaciones a-didácticas como herramientas para que el alumno construya el conocimiento como resultado del aprendizaje por adaptación. Como dijimos anteriormente, el profesor prepara un *problema* y un *medio*: el *problema* motivará las acciones del alumno en el medio, y el *medio* deberá devolverle retroacciones adecuadas, de manera que el alumno pueda identificar sus errores y corregirlos, produciendo así un aprendizaje por adaptación. El rol del profesor es entonces más importante en la preparación de la actividad del alumno, y durante la misma limita sus intervenciones a motivar al alumno a resolver el problema en interacción con el medio.

Situación Didáctica

Figura 3. Situación Didáctica



Tenemos entonces al interior de la situación didáctica el *aprendizaje por adaptación* del que hablamos antes, utilizado para enseñar un *saber* a los alumnos. En la teoría de las situaciones didácticas "el saber es el producto cultural de una institución que tiene por objeto identificar, analizar y organizar los conocimientos a fin de facilitar su comunicación"[6]. El profesor no está dentro de la situación a-didáctica, sino que se encuentra por fuera, ejerciendo control de esta a través de la *intención* y el *medio*. Como resultado de la experiencia personal del alumno, gracias al aprendizaje por adaptación, se genera lo que Brousseau llama *conocimiento*. Que surge de tres formas:

- En la Acción, es decir el conocimiento está implícito en las acciones y decisiones del alumno.
- En la Formulación, el alumno intercambia información con una o varias personas. Comunica lo que ha encontrado a uno o varios alumnos.

[6] Brousseau. Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Pág. 28.

- En la Prueba: el alumno justifica la exactitud y pertinencia de sus afirmaciones o rechaza las afirmaciones de otros, argumentando su desacuerdo.

Las producciones del alumno (conocimientos) están contextualizadas en una determinada situación a-didáctica, y necesitan ser descontextualizadas; es decir, relacionadas con el saber que se quiere enseñar, recibir un estatus cultural; esto se conoce como *institucionalización*, y está a cargo del profesor, quien representa la institución y tiene el saber en el salón de clase.

1.2 CABRI GEOMETRY COMO MEDIO

En este proyecto analizaremos el software Cabri como medio con el cual el alumno interactúa para lograr un aprendizaje por adaptación.

Recordemos que las situaciones adidácticas son situaciones de aprendizaje en las que el *profesor* no interviene para decirle al *alumno* si algo está bien o está mal, ni para mostrarle cómo tiene que resolver el problema. Es el *medio* el que facilita ese aprendizaje al alumno a través de las *retroacciones* que ofrece. De ahí la importancia de seleccionar el medio.

Veremos las características de Cabri Geometry que lo hacen un medio apropiado para el aprendizaje de la geometría. En Cabri, el comportamiento de los objetos es geométrico; es decir, "se conservan intactas las relaciones geométricas que hayan sido declaradas en la construcción, así como las propiedades geométricas implícitas"[7] tanto al construir como al arrastrar. Esta característica supone una gran ventaja, pues las retroacciones del medio corresponden al saber geométrico, y por lo tanto los conocimientos que construyen los alumnos en interacción con Cabri tendrán una correspondencia directa con el saber que se quiere enseñar.

---

[7] Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Pág. 19

En Cabri se pueden realizar dos *tipos de acción*:

Construir: haciendo uso de los menús de herramientas podemos pedir a Cabri que dibuje en la pantalla diferentes objetos geométricos (rectas, segmentos, círculos, polígonos, etc.) con relaciones entre ellos (pertenencia, perpendicularidad, paralelismo, etc.). La retroacción correspondiente a la acción de construir es un dibujo estático que representa el objeto.

Pero el software no se limita a presentar dibujos en la pantalla. La herramienta *Mano* permite agarrar los objetos y desplazarlos en la pantalla, garantizando que las relaciones geométricas construidas se mantienen durante el movimiento. A este tipo de acción lo llamaremos *Arrastrar.* Las retroacciones de Cabri a la acción de arrastrar son fenómenos dinámicos en la pantalla: algunos objetos se mueven, y ese movimiento tiene patrones determinados. Al respecto el MEN dice:

"La capacidad de arrastre (dragging) de las figuras construidas favorece la búsqueda de rasgos que permanecen vivos durante la deformación. La diferencia fundamental entre un entorno de papel y lápiz y un entorno de geometría dinámica es precisamente el dinamismo.

Con esta opción, es posible reconocer los invariantes de una construcción, según si el arrastre conserva las propiedades matemáticas de dicha construcción o no. Así, la capacidad de arrastre de los objetos de una construcción favorece la búsqueda de propiedades de la figura, que permanecen "vivas" durante la deformación a la que sometemos la figura original. Estas son las propiedades geométricas genuinas. El objeto geométrico queda definido entonces por dichas propiedades[8]".

---

[8] Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Pág. 19

En resumen, tenemos dos *tipos de retroacción* para cada una de las *acciones* anteriores, respectivamente:

Fenómeno Estático: Cabri hará aparecer en pantalla la figura en respuesta a la orden que se le dio (recta, segmento, cónica, polígono, etc.)
Fenómeno Dinámico: la figura se puede desplazar, deformar, o no permitir el arrastre dependiendo de las propiedades de la construcción geométrica.

TIPOS DE ACCIÓN	**TIPOS DE RETROACCIÓN**
• Construir: utilizar las distintas herramientas de construcción, por ejemplo circunferencia, recta, triangulo, etc.	• Fenómeno estático: aparece en la pantalla el dibujo correspondiente circunferencia, recta, triángulo
• Arrastrar: usar la herramienta Mano, es decir, arrastrar los objetos en pantalla, puntos, rectas, segmentos, polígonos, vectores, etc.	• Fenómeno Dinámico: desplazamiento, deformación de figuras, imposibilidad de movimiento independiente de figuras obtenidas por transformaciones (traslación, simetría, rotación) etc.

La ventaja de Cabri como medio, es el hecho de que las retroacciones ya están programadas y corresponden a conceptos geométricos; podemos estar seguros de que los fenómenos dinámicos y estáticos que se ofrecerán al alumno corresponden a conceptos geométricos verdaderos, ofreciéndole así la oportunidad de vivir experiencias que le permitirán construir un conocimiento cercano al saber.

Por ejemplo, en las actividades que analizaremos, se presenta al alumno una figura en la que un triángulo punteado es imagen de un triángulo continuo por una traslación según un vector que está oculto. Al arrastrar el triángulo continuo, el triángulo punteado se moverá conservando la magnitud, la dirección y el sentido de la traslación. El alumno podrá entonces constatar la invariabilidad de estos fenómenos y utilizarla para resolver los problemas propuestos por el profesor.

1.3 TRASLACIÓN

La traslación es una transformación isométrica (que conserva tanto la forma como el tamaño), caracterizada por ser un movimiento rectilíneo, con magnitud, dirección y sentido constantes.

Sea ***u*** una traslación, *A* un punto cualquiera de una figura y *A'* la imagen de *A* por ***u***, entonces:

- La *dirección* es la inclinación de la recta que contiene a los puntos *A* y *A'*
- El *sentido* se refiere a la posibilidad que existe de desplazarse sobre una recta; toda recta puede ser recorrida en dos sentidos opuestos, en nuestro caso de *A* hasta *A'.*
- *Magnitud* es la longitud del segmento *AA'*

La traslación es entonces un vector pues tiene estas tres componentes constantes: *magnitud, dirección* y *sentido*.

Si se construye la imagen de una figura por una traslación, los segmentos que unen los puntos originales con sus imágenes son todos paralelos, y la distancia entre cada punto y su imagen es la misma.

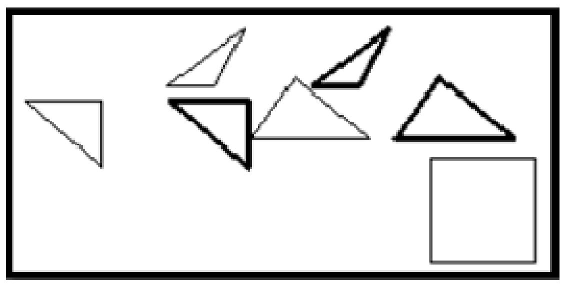
Ejemplo de situación a-didáctica

A continuación se tomará la tarea uno de la primera actividad acerca del concepto de traslación, para ilustrar cómo utilizamos el marco teórico.

El saber: La Magnitud de la traslación es constante.

El conocimiento: La distancia entre un triángulo y su correspondiente es constante.

Figura 4. Ejemplo situación a-didáctica



Como ***medio*** tenemos la figura Cabri 'trasla1'en la que hay tres triángulos delgados, tres triángulos gruesos y dos cuadrados superpuestos, los triángulos gruesos son obtenidos mediante una traslación por un vector (horizontal derecho con cierta magnitud) que está oculto.

El profesor crea la intención en el alumno al asignarle la siguiente tarea: **meter los triángulos gruesos dentro del cuadrado.** Para cumplir la tarea, el alumno realizará *acciones*; por ejemplo, intentar arrastrar directamente los triángulos gruesos hasta el cuadrado, descubriendo que no es posible; entonces modificará esta acción, arrastrando los triángulos delgados, observando que los gruesos se mueven de igual forma. Estas *retroacciones* del medio serán interpretadas por el alumno y usadas para cumplir la tarea. Hasta este momento, el profesor no interviene para mostrar las acciones correctas o incorrectas que se deben realizar.

Lo que sucede al arrastrar los triángulos y la forma en que quedan ubicados una vez realizada la tarea, permitirá que aparezca en el alumno el *conocimiento* que se buscaba. El profesor identificará y organizará este *conocimiento* para acercar a los alumnos al *saber* que quiere enseñar.

2. ORGANIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA

Como ya lo dijimos, este trabajo consiste en analizar el diseño y la implementación de las actividades de clase propuestas por el grupo Edumat-UIS para la enseñanza de la traslación, en el grupo sexto uno del colegio Las Américas, a cargo de la profesora Blanca Nubia Niño.

El grupo Edumat-UIS diseñó una serie de actividades de clase utilizando Cabri para la enseñanza de la traslación, actividades que fueron aplicadas por la profesora en el grupo (Grado 6-01). Es un grupo regular del colegio, los alumnos no fueron seleccionados para la experiencia. La profesora cuenta con un salón especial para utilizar calculadoras TI-92 y Voyage con el software Cabri. En este salón los alumnos se organizan en mesas (4 por mesa) y es posible oscurecer el salón para proyectar la pantalla de una calculadora a todo el salón.

Llamamos Actividad a un conjunto de tareas todas con un objetivo común. En una actividad se usa una serie de figuras en Cabri, en las que se debe repetir este conjunto de tareas. Una actividad puede tomar más de una sesión de clase.

Antes de realizar las actividades con los alumnos, éstas eran desarrolladas y analizadas por los integrantes del grupo en los seminarios, con el fin de aclarar dudas, y recibir las sugerencias de cada uno. Además se entregaba un formato escrito que contenía el objetivo, las tareas a realizar, el nombre de las figuras Cabri y otros pormenores.

Descripción de una sesión de clase:
Las actividades se desarrollaron en un salón de clases normal, donde los estudiantes se organizaban en grupos de tres o cuatro con una calculadora. La

profesora explicaba las tareas que se debían realizar en cada una de las figuras Cabri asignadas para dicha actividad. A continuación se entregaban las calculadoras, y se iniciaba el trabajo en grupos. Por último, había una ***puesta en común***, en la cual después de haber observado los fenómenos visuales en la calculadora, cada grupo de trabajo compartía con el resto de sus compañeros sus descubrimientos, dando razones del por qué de sus acciones y de sus afirmaciones en una especie de diálogo abierto en el que la profesora actuaba como moderador. La profesora hacía preguntas para conocer lo que los estudiantes habían comprendido, y tratar de encaminarlos hacia el objetivo de la actividad, homogenizando los conocimientos en ellos, es decir, para lograr un mínimo de conocimientos comunes a todos los alumnos del curso.

Para el concepto de traslación se realizaron cuatro actividades, después se realizó la *institucionalización*, cuyo objetivo era el de formalizar todos los conocimientos descubiertos por los estudiantes durante el desarrollo de las actividades.

Durante cada una de las sesiones se hizo filmación con una cámara del salón de clases en general, tratando de registrar cada diálogo entre la profesora y los estudiantes. Las tomas registraban en la mayoría de los casos las Figuras acerca de las cuales se hablaba. Además algunos de los cuadernos fueron escaneados para complementar la información necesaria para el análisis.

3. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DE TRASLACIÓN

Las actividades analizadas en este capítulo son un conjunto de situaciones adidácticas que permiten a quien las realice obtener una buena representación de la traslación.

Cada una de las actividades fue diseñada para que los estudiantes fueran encontrando de manera gradual las propiedades de la traslación, al observar fenómenos visuales en la pantalla de la calculadora durante el desarrollo de las tareas, aprovechando las retroacciones que tiene el software Cabri Geometry.

Vamos a realizar dos tipos de análisis:

- **Análisis a priori:** donde hacemos hipótesis sobre el comportamiento de los estudiantes (acciones) y del medio (retroacciones).
- **Análisis a posteriori:** Confrontamos las hipótesis con lo que realmente sucedió. Para hacer este análisis utilizamos los videos de las actividades y los cuadernos de los alumnos.

Debido a que en cada una de las actividades las mismas tareas se realizan con cierto número de figuras, se incluye un análisis llamado **SECUENCIA**.

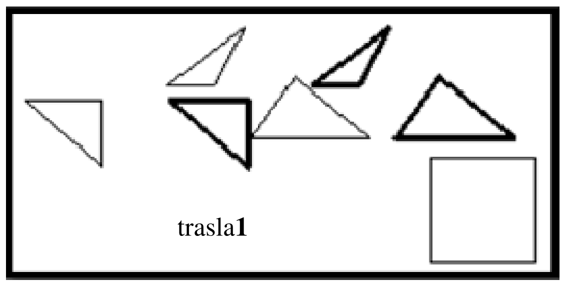
3.1 PRIMERA ACTIVIDAD

Objetivo: Que los alumnos identifiquen que al mover un triángulo, su imagen por una traslación se mantendrá siempre a la misma distancia. Además, el triángulo y su imagen por una traslación se mueven siempre en el mismo sentido.

Descripción de las figuras Cabri:

Esta primera actividad consta de nueve figuras Cabri. En cada una de los ocho primeras hay tres triángulos delgados y sus respectivas imágenes (triángulos gruesos) obtenidas mediante traslación de un vector que está oculto, y tres cuadrados superpuestos de igual tamaño. Los triángulos delgados se pueden desplazar arrastrándolos de cualquier parte, los cuadrados solo pueden desplazarse arrastrando el segmento de abajo.

Figura 5. Figuras Cabri



Se escogieron triángulos escalenos porque son figuras fáciles de construir, permitiendo visualizar cualquier cambio en la orientación de un triángulo y su imagen, además son de distinto tamaño para distinguir fácilmente dos triángulos correspondientes.

El vector para cada una de las figuras Cabri es diferente: para la figura uno el vector es horizontal a la derecha, en la figura dos horizontal a la izquierda, en la figura tres vertical hacia arriba, en la figura cuatro vertical hacia abajo, en la figura cinco oblicuo a la derecha y hacia arriba, en la figura seis oblicuo a la derecha y hacia abajo, en la figura siete oblicuo a la izquierda y hacia arriba, y en la figura ocho oblicuo a la izquierda hacia abajo. Debido a que la magnitud del vector es diferente de cero, las figuras no se superponen.

En la novena figura Cabri 'trascon' hay seis cuadrados, tres gruesos y tres delgados, además tres triángulos delgados y sus respectivas imágenes (triángulos gruesos) obtenidas mediante traslación por un vector que está oculto.

La razón por la cual el vector está oculto, es porque muchos de los descubrimientos que harán los alumnos corresponden a las características de ese vector; por ejemplo, la distancia constante entre un triángulo y correspondiente.

3.1.1 Análisis a priori. Como los estudiantes ya han trabajado las actividades correspondientes a la simetría axial, se espera que utilicen la calculadora con facilidad, y comparen lo que observan con las actividades anteriores.

Mediante la utilización de la herramienta arrastre de Cabri se quiere que los alumnos realicen en las primeras ocho figuras Cabri, tres tareas que les permitirán identificar los siguientes fenómenos visuales:

-*Dependencia en el movimiento*: sólo es posible mover la figura obtenida mediante una traslación arrastrando la figura original.
-*Igual movimiento:* una figura y su traslación se mueven siempre en la misma dirección y sentido.
-*Distancia constante:* una figura y su traslación nunca se superponen, la distancia entre ellas es constante.

Entonces las tareas que se les pidió realizar a los alumnos son:

Primera tarea: llevar los triángulos gruesos dentro del cuadrado
El propósito de esta tarea es que los alumnos utilicen el arrastre para tratar de mover los triángulos. Ellos ya conocen la dependencia de movimiento, pero

seguramente se darán cuenta que los triángulos no se comportan de la misma manera que en las actividades de simetría*.

En esta primera tarea, se espera que los estudiantes intenten arrastrar los triángulos gruesos hasta el cuadrado, pero la retroacción del medio mostrará que no es posible. Modificando su acción intentarán nuevamente moviendo entonces los triángulos delgados, logrando cumplir la tarea.

Una vez realizada esta tarea, es posible que los estudiantes noten que la posición de los tres triángulos delgados coincide, y que además están a la misma distancia de su correspondiente.

Segunda tarea: llevar <u>todos</u> los triángulos dentro del cuadrado

El propósito de esta tarea es que los alumnos constaten que debido a que la distancia entre un triángulo y su traslación es constante, no es posible meter todos los triángulos dentro de un cuadrado, en ningún lugar de la pantalla.

En esta segunda tarea se espera que los estudiantes lleven los triángulos gruesos dentro del cuadrado, observando que los delgados quedan fuera; luego harán lo mismo con los delgados, sin tener el resultado esperado. Entonces, recordando las primeras actividades de simetría axial (en las que encontraban un lugar en la pantalla en el que los triángulos se superponían), arrastrarán los triángulos por toda la pantalla, intentando buscar un lugar donde estos se superpongan y podrán constatar que esto no se produce en ningún sitio de la pantalla.

Se espera que los alumnos digan que la tarea es imposible, y que justifiquen su respuesta de alguna manera. Por ejemplo, podrán decir: al meter los gruesos los

---

* Recordamos que antes de las actividades acerca del concepto de traslación se trabajó con los estudiantes el concepto de simetría axial, usando la misma metodología.

delgados quedan por fuera, si intento meter los delgados los gruesos quedan por fuera, en cualquier lugar los triángulos siempre están separados.

Si los alumnos no aclaran que la tarea es imposible para cualquier posición del cuadrado, el profesor deberá sugerirles que muevan el cuadrado para ver en otra posición si es posible.

Tercera tarea: colocar los dos cuadrados en la pantalla de manera que puedan ponerse todos los triángulos delgados en uno y todos los gruesos en otro

El propósito de esta tarea es que los alumnos descubran que si se colocan los cuadrados en cualquier lugar de la pantalla, pero separados por la misma distancia que hay entre un triángulo y su correspondiente, entonces podrán colocar todos los triángulos gruesos en uno y todos los delgados en otro.

En esta tercera tarea, se espera que los estudiantes utilicen lo que observaron al realizar las dos anteriores, y lleven los triángulos gruesos dentro del cuadrado (los dos cuadrados están superpuestos), para después simplemente llevar el otro cuadrado a la posición donde quedaron los triángulos delgados. Se espera que hagan una descripción de cómo quedaron ubicados los cuadrados, después de realizar la tarea. Para facilitar esto, la profesora deberá pedir que dibujen las figuras en sus cuadernos antes de realizarse la tarea y después.

Es importante que la profesora se asegure de que los alumnos conciben la posibilidad de colocar los cuadrados en otras posiciones, pero siempre a la misma distancia. Una vez que los alumnos le muestren los dos cuadrados con los triángulos dentro, debe preguntarles si es posible colocarlos en otras posiciones.

SECUENCIA: como las tres tareas debían realizarse con una serie de ocho figuras Cabri, que se diferenciaban en las características del vector oculto, aparece entonces este análisis producto de la repetición.

Primera tarea: llevar los triángulos gruesos dentro del cuadrado

Después de realizar la tarea con la primera figura, se espera que en las siguientes figuras Cabri de esta serie arrastren directamente los triángulos delgados sin intentar con los gruesos. Y descubran que la orientación[9] de un triángulo y su correspondiente es la misma, y que no se afecta durante el arrastre.

Segunda tarea: llevar <u>todos</u> los triángulos dentro del cuadrado

Se espera que a partir de la segunda figura ya no intenten meter todos los triángulos dentro del cuadrado, sino que digan que esta tarea es imposible y den una justificación como: no se puede porque: - los triángulos siempre están separados, - el triángulo grueso se mueve con el delgado. - el triángulo grueso hace lo mismo que el delgado.

Además digan que en ninguna de las figuras Cabri existe un lugar en la pantalla donde los triángulos se pueden unir.

Tercera tarea: colocar los dos cuadrados en la pantalla de manera que puedan ponerse todos los triángulos delgados en uno y todos los gruesos en otro

Finalmente, se espera que una vez realizadas las tres tareas con cada una de las figuras Cabri, los estudiantes hagan comparaciones entre ellos y constaten que en algunos archivos los triángulos están más separados y en otros que la posición relativa de los cuadrados es distinta. Destacando las similitudes y diferencias, entre la forma en que quedaron ubicados los cuadrados al hacer la tercera tarea.

[9] En una traslación los lados de un triángulo y los de su imagen son paralelos.

Debido a la construcción misma de las figuras Cabri, se tendrán dos de estas con la misma dirección (dos horizontales figura uno y dos; dos verticales figura tres y cuatro etc.) por lo que se espera que los estudiantes las identifiquen diferenciándolas en el sentido.

Puesta en común:

No todos los estudiantes han podido identificar los fenómenos visuales asociados a la traslación, por ejemplo, algunos habrán identificado únicamente la dependencia entre los triángulos. Para solucionar esto se espera que la profesora usando el proyector pida a una estudiante que realice la primera tarea en una de las figuras de la serie preparada para esta primera actividad y pregunte al curso ¿qué fue necesario hacer?, además les pida que hagan una descripción del movimiento de los triángulos. Todo esto para hacer evidentes la dependencia del movimiento de cada par de triángulos, la orientación, la posición de los triángulos delgados una vez metidos los gruesos al cuadrado.

La profesora deberá preguntar ¿por qué es imposible realizar la segunda tarea? para asegurarse de que todos reconocen esta imposibilidad.

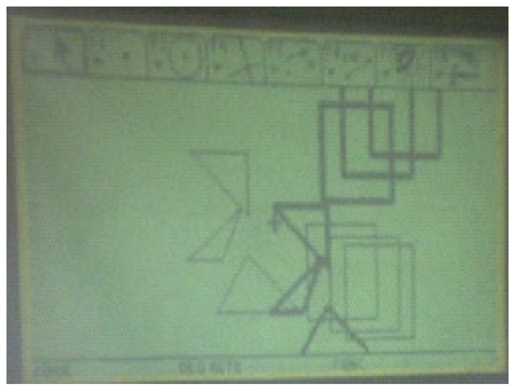
Como los estudiantes tienen en sus cuadernos dibujadas cada una de las figuras Cabri, después de realizar la tercera tarea, se espera que ella pida que comparen específicamente por pares (ejemplo: figura uno y dos; figura tres y cuatro), para que resalten las diferencias y similitudes.

De esta manera, los estudiantes más adelantados, aportarán sus descubrimientos referentes a las propiedades de la traslación; y aquellos estudiantes que aún no han observado los fenómenos visuales que se quería puedan ahora ponerse al tanto.

Concurso

La tercera tarea era posible de realizar sin utilizar el concepto de traslación, solo era necesario el control perceptivo, porque los estudiantes podían ubicar los triángulos y de esta forma encontrar la posición correcta para los cuadrados. Sin embargo para garantizar que los estudiantes *anticiparan* realmente la posición de los cuadrados antes de mover los triángulos, es decir, utilizando las propiedades de la traslación, se hizo un concurso utilizando la figura Cabri 'trascon'.

Foto 1. Cabri trascon



Organización del concurso

Se hacen dos equipos dentro del salón, y se reúne cada equipo. El profesor explica que él escogerá un representante de cada equipo para realizar la tercera tarea con un archivo nuevo, diferente a los que ya han trabajado, y que además tiene seis cuadrados: tres gruesos y tres delgados. La tarea consistirá en colocar los cuadrados <u>sin mover los triángulos</u> de manera que en cada cuadrado grueso pueda ponerse un triángulo grueso y en cada cuadrado delgado pueda ponerse un triángulo delgado. Cada equipo debe ponerse de acuerdo en una estrategia que les permita ganar, y asegurarse de que todos los miembros del equipo la comprendan, pues no saben a quién escogerá el profesor. De esta forma, tendrán que expresar verbalmente sus estrategias. Los representantes de cada equipo deberán trabajar en el retroproyector, colocar los seis cuadrados sin mover los triángulos; después de que el alumno haya colocado los seis cuadrados, el profesor u otro alumno podrán mover los triángulos para verificar si pueden colocarse uno grueso y uno delgado dentro de cada uno de ellos.

Si alguno de los representantes no logra resolver la tarea puede repetirse el concurso, hasta que los representantes puedan lograrlo. En ese momento debe organizarse una **puesta en común** para que los alumnos expliquen la estrategia ganadora y por qué funcionó para anticipar la posición de los cuadrados.

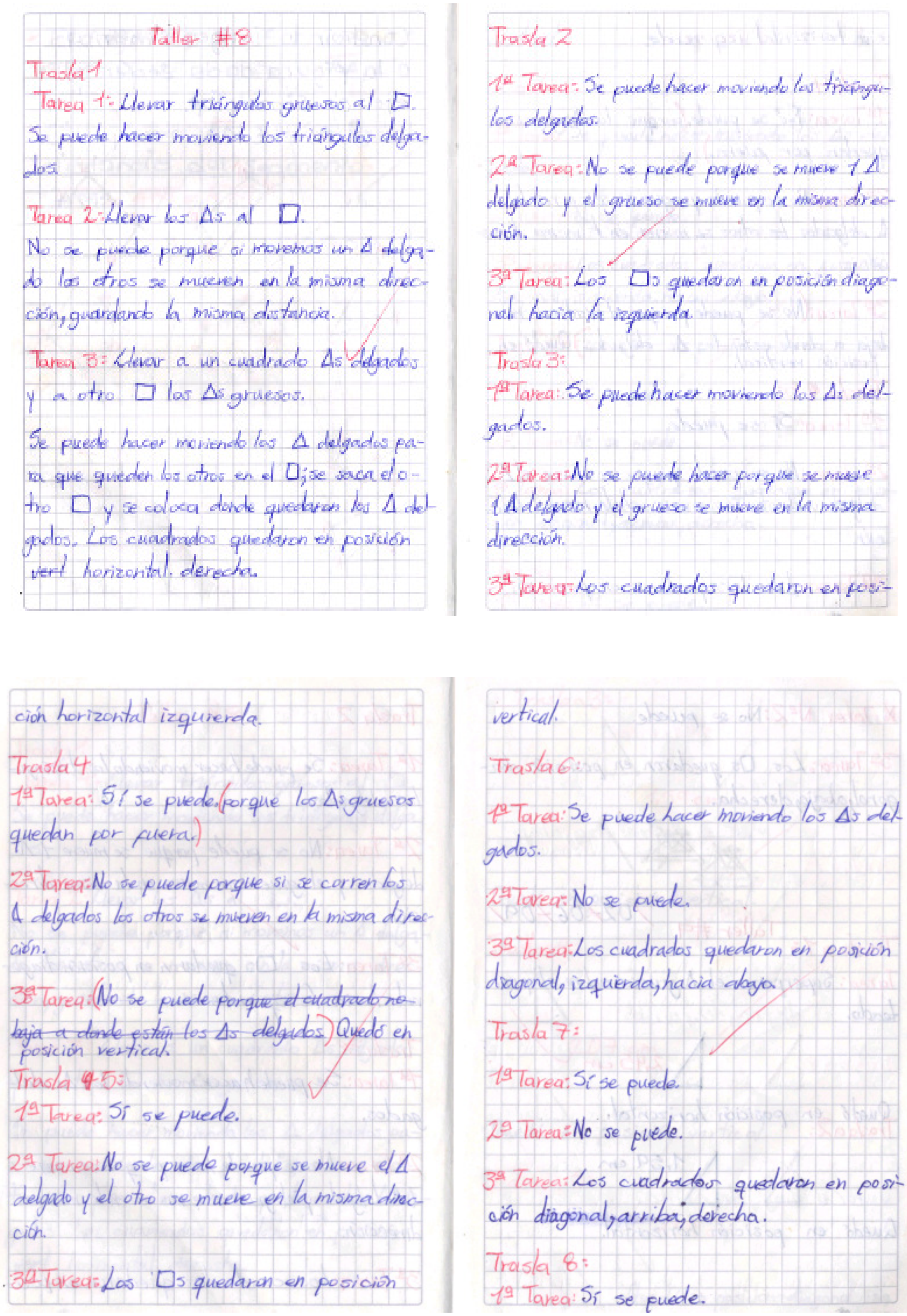
El profesor debe preparar varias figuras Cabri 'trascon' con diferentes vectores para que cada grupo enfrente un problema nuevo.

Se espera que los estudiantes anticipen la posición correcta de los cuadrados utilizando el conocimiento adquirido al realizar las tareas anteriores; es decir, sabrán identificar que un triángulo y su correspondiente tienen el mismo tamaño y orientación (tarea 1), que la distancia entre los triángulos determina la distancia entre los dos cuadrados (por tarea 2 y tarea 3) y la posición relativa de los triángulos en pantalla determina la posición de los cuadrados en pantalla

3.1.2 Análisis a posteriori. De esta primera actividad solo tenemos para el análisis, lo que escribieron los estudiantes en sus cuadernos y la filmación del concurso que inicia con una puesta en común. Debido a que en los días en que se realizó la primera y segunda actividad hubo disturbios en la universidad (junio de 2009) perdiéndose la comunicación entre nosotros y la profesora.

En las imágenes siguientes podemos leer cómo los estudiantes describen lo realizado en cada una de las tareas.

Foto 2. Desarrollo de tareas



Vemos que para las primeras figuras describieron en detalle las acciones que utilizaron para realizar la primera y tercera tarea, y las razones de por qué no se pudo realizar la segunda. Pero con las figuras finales solo se limitaron a escribir *"si se puede"* para la primera tarea, *"no se puede"* para la segunda tarea.

Además, después de realizada la tercera tarea en cada figura describieron la posición de los cuadrados usando palabras referentes a la dirección y sentido de la traslación como: *diagonal, horizontal, arriba, derecha, etc.*

Como habíamos previsto para la segunda tarea el estudiante justificó porque es imposible escribiendo "*no se puede porque si movemos un triángulo delgado los otros se mueven en la misma dirección, guardando la misma distancia*" claramente vemos que el estudiante habla de distancia constante, que es una de las propiedades de la traslación.

Puesta en común

El siguiente diálogo se hizo durante la puesta en común, previa a la realización del concurso, que estaba pendiente debido a las vacaciones de mitad de año.

Diálogo

P: - ¿cuál era la segunda tarea? Recuerdan (la profesora teniendo en el retroproyector a trasla1)

Es: -meter todos los triángulos dentro del cuadrado

P: - ¿hicimos la segunda tarea, la pudimos hacer?

Es: -no

E:- si

P: -¿por qué la segunda tarea no se pudo hacer?

Es: - no se puede porque los triángulos se mueven en la misma…

No cambian como los otros (refiriéndose a la simetría axial)

P: - a bueno siempre la misma…

Es:- distancia

…

P: -¿qué es lo que conserva?

E: - la misma distancia

P: - ¿en qué posición quedaron?

E: - vertical

P:-¿vertical hacia ¿qué lado?

E:- hacia la izquierda,

P:- hacia la izquierda, y ¿donde las teníamos antes?

E:- vertical hacia la derecha.

Aquí se observa como los estudiantes, al regresar de vacaciones, recuerdan las tareas y las conclusiones a las que habían llegado: dependencia del movimiento, distancia constante. Igualmente, describen la ubicación de los cuadrados al realizar la tercera tarea, usando palabras como horizontal, arriba, derecha, etc. También vemos que en una de las respuestas respecto a la tarea dos, uno de los estudiantes responde que *"sí es posible hacerla"*, indicándonos que no para todos está claro, el hecho de que la distancia siempre es constante, lo que justifica el objetivo de la puesta en común, que es el de lograr que todos los estudiantes tengan unos conocimientos mínimos comunes. Igualmente, queremos resaltar que en esta primera sesión la mayoría de los estudiantes participó.

Concurso

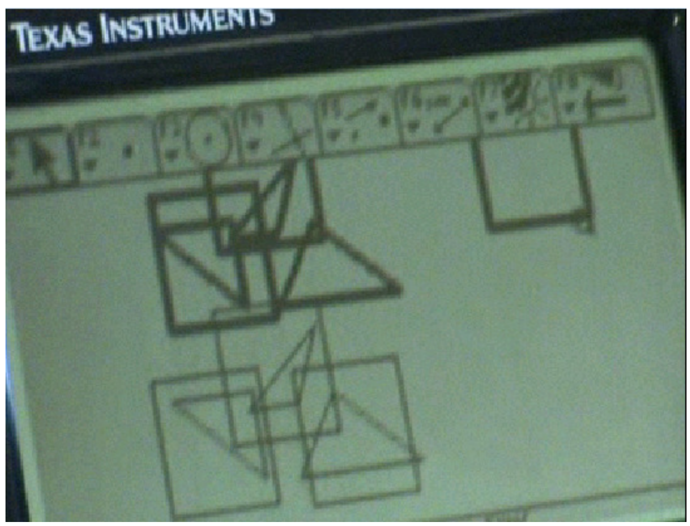
El siguiente diálogo corresponde a las instrucciones dadas por la profesora antes de realizar el concurso.

Diálogo

P:-entonces el concurso consiste en, sin mover los triángulos adivinar, predecir o pensar donde debo colocar los cuadrados de tal manera que cuando yo lleve los triángulos esa sea la posición correcta, ya no hay que mover ningún triángulo los cuadrados si los pueden mover.

A pesar de que las instrucciones fueron claras acerca de lo que se debía hacer, lo realizado por los estudiantes no correspondió al objetivo, ellos simplemente se dedicaron a llevar cada cuadrado hasta uno de los triángulos, dejándonos hasta el momento sin evidencia clara de si utilizaron o no los conocimientos acerca de la traslación.

Foto 3. Desarrollo de actividad



El siguiente diálogo parece dar la razón por la cual los estudiantes no realizaron la tarea correctamente.

Diálogo

P:- ¿qué es lo que le toca hacer? ¿Si entendió? (en ese momento tenía abierta la novena figura en su calculadora)

E: -tenemos que colocar cada triángulo en un cuadro

Vemos que ellos no comprendieron las instrucciones, posiblemente por un problema de atención en el momento que la profesora explicó, lo que llevó a que nada de lo previsto se hiciera. Y la puesta en común que debería haber remediado esto, tampoco se realizó. La profesora solo observó lo que los estudiantes hacían, y no corrigió el uso de esta estrategia prohibida (llevar los cuadrados a los triángulos) esto indica que hubo fallas en la preparación de la actividad. Queda la duda de si realmente los estudiantes aprendieron a utilizar las características de la traslación.

Conclusiones

A pesar de que el concurso no cumplió con el objetivo para el cual se diseñó podemos decir que la mayoría de los estudiantes identificaron las propiedades de la traslación como fenómenos visuales y lo consignaron en forma escrita en sus cuadernos y verbal durante la puesta en común.

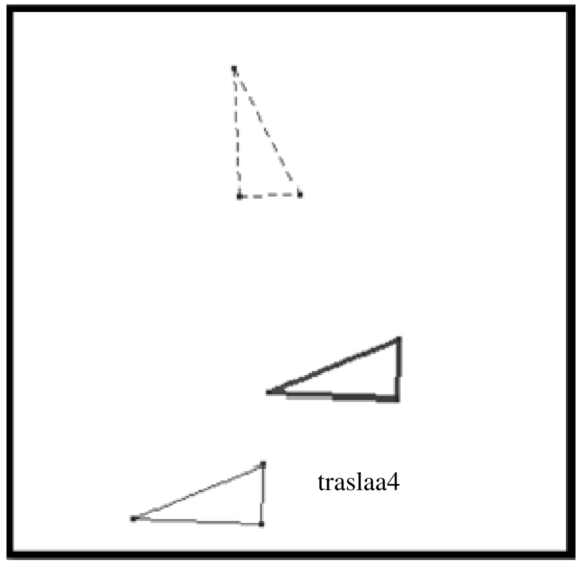
3.2 SEGUNDA ACTIVIDAD

Objetivo: El propósito de esta actividad es que los alumnos se familiaricen con algunos fenómenos visuales relativos al movimiento de una figura y su traslación, y que puedan identificar la magnitud, la dirección y el sentido de la traslación.
Además, que los alumnos comiencen a considerar no solamente las figuras completas, sino sus componentes como vértices y lados.

Descripción de las figuras Cabri:

Para esta actividad se prepararon ocho figuras:

Figura 6. Figuras Cabri



En cada una de ellas se tienen tres triángulos: uno delgado, uno grueso y uno punteado. El triángulo grueso es traslación del delgado con respecto a un vector que está oculto, el triángulo punteado es congruente con el delgado, pero independiente de él. El triángulo delgado sólo puede arrastrarse agarrando dos de sus vértices, que producen movimientos diferentes: uno de los vértices permite desplazar el triángulo ‘en traslación’, el otro permite girar el triángulo alrededor de uno de los vértices. El triángulo punteado no puede moverse. Siempre es posible superponer el triángulo grueso al punteado.

El vector está oculto por la misma razón que en la actividad anterior y es diferente para cada una de las figuras Cabri; en primera figura el vector es horizontal a la derecha, en la segunda vertical hacia arriba, en la cuarta oblicuo hacia arriba, etc.

La ubicación de los triángulos garantiza el tener que utilizar los movimientos de desplazamiento y el de giro para realizar la tarea, y de esta forma mostrar la traslación no solamente de una figura completa sino también de sus componentes como vértices y lados.

3.2.1 Análisis a priori. Los fenómenos visuales que se quiere que los alumnos descubran son los mismos que para la primera actividad, es decir:

- El triángulo trasladado depende del otro.
- Una figura y su traslación se mueven en el mismo sentido.
- La distancia entre una figura y su traslación es siempre la misma.

Además, en esta actividad queremos que identifiquen el siguiente fenómeno visual:

- Si una figura se hace girar, su traslación gira en el mismo sentido.

Para que los alumnos identifiquen esos fenómenos visuales y se familiaricen con ellos, se les pedirá que realicen la siguiente tarea con las diferentes figuras Cabri.

Tarea: superponer el triángulo grueso y el triángulo punteado

Debido a la experiencia ganada después de realizar las tareas con las diferentes figuras Cabri de la actividad anterior, los alumnos ya saben que para desplazar el triángulo grueso deben arrastrar el triángulo delgado. En este caso no pueden agarrar el triángulo de un lado, sino que deberán arrastrar los vértices.

Para realizar la tarea, no solamente deben llevar el triángulo grueso sobre el triángulo punteado, sino que deben girarlo hasta que coincidan completamente; por lo tanto, deben constatar que el giro del triángulo grueso es en el mismo sentido del giro del triángulo delgado.

Se espera que los estudiantes, al realizar esta tarea en la primera figura, traten de mover directamente el triángulo delgado desde cualquiera de sus lados, pero descubrirán que esto no es posible. Entonces intentarán hacerlo tomándolo de los vértices (en Cabri cuando el cursor esta cerca a un elemento aparece en pantalla: *este punto, este segmento, este triángulo,* etc.) para darse cuenta que uno les permitirá desplazar la figura y el otro girarla.

Al observar los fenómenos visuales en la pantalla los estudiantes usarán expresiones como: *para mover el triángulo grueso hay que mover el delgado de una de sus puntas (vértices), el triángulo grueso se mueve igual que el delgado, el grueso gira lo mismo que el delgado, el triángulo grueso está a la derecha (izquierda, arriba, abajo) del triángulo delgado, los tres triángulos son iguales (igual tamaño).*

SECUENCIA

Después de realizar la tarea con la primera figura, se espera que con las demás figuras Cabri haya mayor agilidad en el trabajo, los estudiantes ya no intentarán arrastrar el triángulo grueso, ni el triángulo delgado de los lados, si no que directamente buscarán el vértice que les permita girar el triángulo para obtener la misma orientación del triángulo punteado y el otro vértice que al arrastrarlo lo desplace hasta superponerlo con el triángulo punteado.

Una vez finalizada la tarea con las ocho figuras Cabri se espera que hagan comparaciones,   identificando similitudes y diferencias sobre la ubicación de los triángulos en la pantalla. También se prevé que comparen con las figuras Cabri de la actividad anterior y también con las de simetría axial. Por ejemplo, los estudiantes, dirán: en la figura 1 y 2 los triángulos quedan así (haciendo un movimiento horizontal con su mano), pero el triángulo grueso en figura 1 está a la derecha y en figura 2 a la izquierda, - los triángulos giran igual en cambio en simetría giraban contrarios. - la distancia entre las puntas de los triángulos no cambia al moverlos.

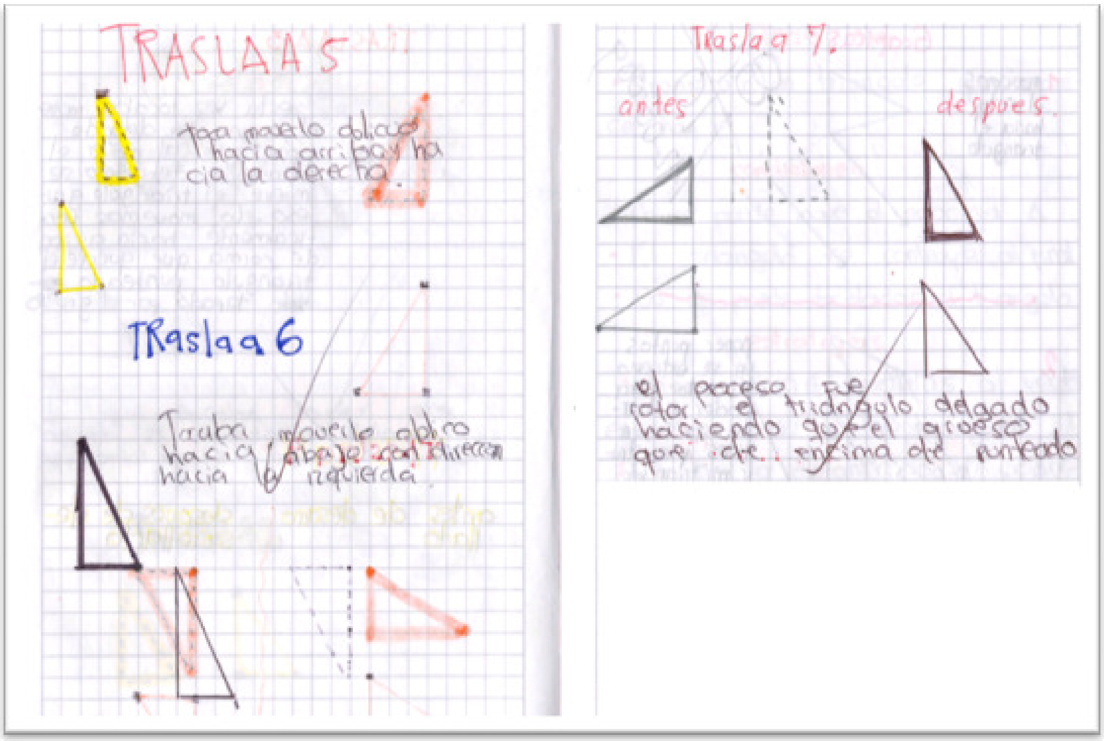
Puesta en común

Para este momento los estudiantes reafirmaran lo que aprendieron en la actividad anterior, es decir las nociones de distancia, dirección y sentido, viéndose reflejado en la calidad de los aportes, además la profesora tratará de dirigir estos aportes, hacia el objetivo de la segunda actividad que consiste en considerar la traslación no solamente de figuras completas, sino de sus componentes como vértices y lados.

Para esto, hará preguntas como: - ¿qué hicieron para realizar la tarea? , ¿Por qué tuvieron que girar el triángulo grueso? -¿cómo quedaron ubicados el triángulo grueso y el delgado en cada una de las figuras? (ayudándose de los dibujos que hicieron en los cuadernos), ¿Qué es lo que no cambia al mover los triángulos? Se espera que los alumnos traten de comprobar por qué sus afirmaciones son correctas y por qué consideran que algunas dadas por sus compañeros son equivocadas.

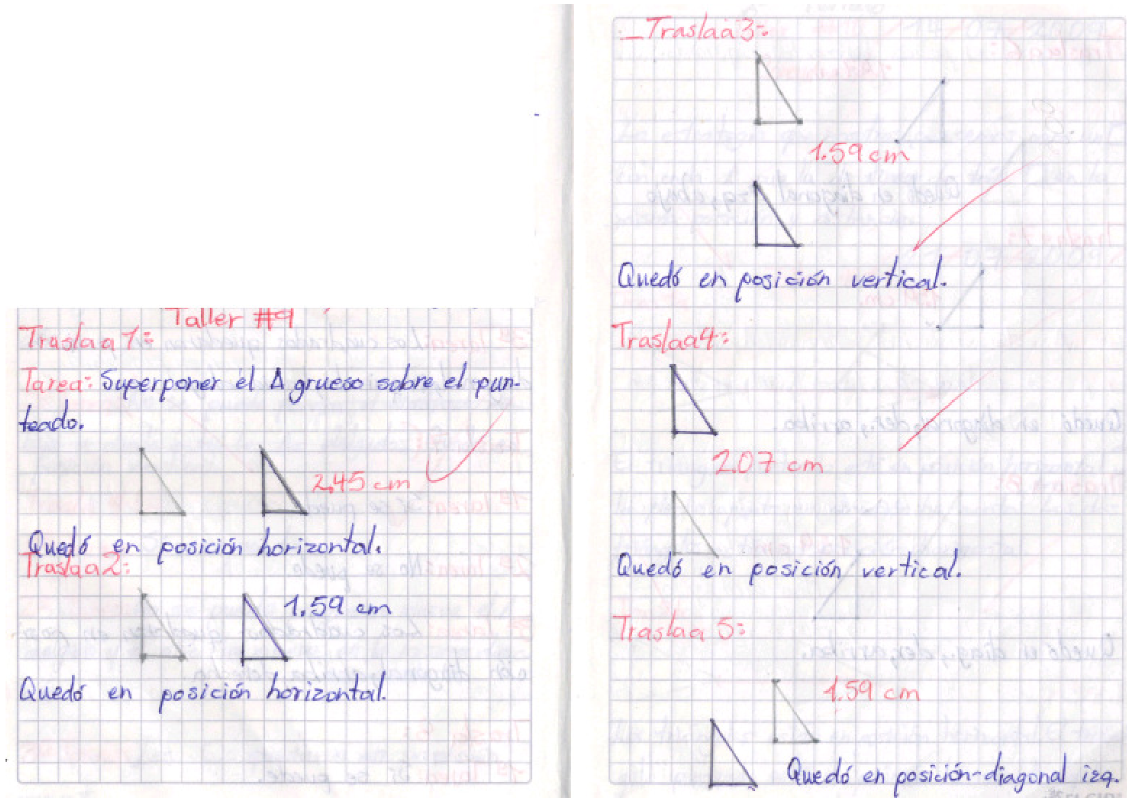
3.2.2 Análisis a posteriori. Para el análisis de esta actividad, solo se tiene lo que los estudiantes escribieron en sus cuadernos.

Foto 4. Desarrollo de la actividad



El estudiante describe lo que hizo para realizar la tarea en cada una de las figuras usando palabras como: *oblicua, izquierda, derecha, arriba* que apuntan hacia las propiedades de la traslación.

Foto 5. Desarrollo de tareas

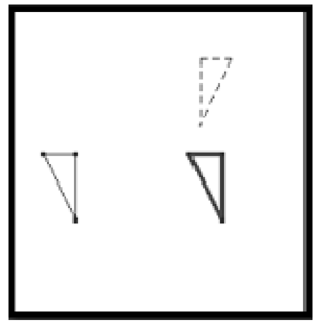


Podemos ver que el estudiante describe la posición final de los triángulos y usa palabras como *horizontal, vertical y diagonal* que se refieren a la dirección de la traslación pero no hace diferencia entre la primera y la segunda figura diferentes en sentido. Además el estudiante toma una distancia de la cual no podemos asegurar nada porque las evidencias no lo permiten.

Conclusiones

Entre las figuras de esta actividad hizo falta algunas en las que no fuera posible realizar la tarea (ver figura 7 que necesita de una reflexión para cumplir la tarea) para que los estudiantes dieran sus razones del ¿por qué? Esto habría permitido, caracterizar las figuras en las que es posible realizar la tarea y en las que es imposible.

Figura 7. Desarrollo de tarea



3.3 TERCERA ACTIVIDAD

Objetivo: En las dos actividades anteriores los estudiantes han aprendido a predecir de manera aproximada la magnitud, dirección y sentido de la traslación. El propósito de esta actividad es precisar esas características: específicamente, los estudiantes deberán representar la traslación por medio de un vector.

Figura 8. Actividad

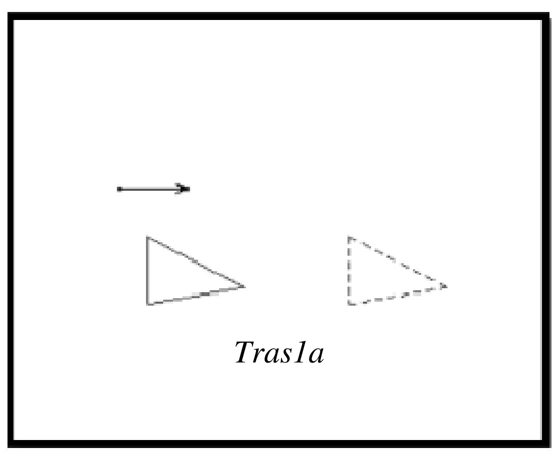
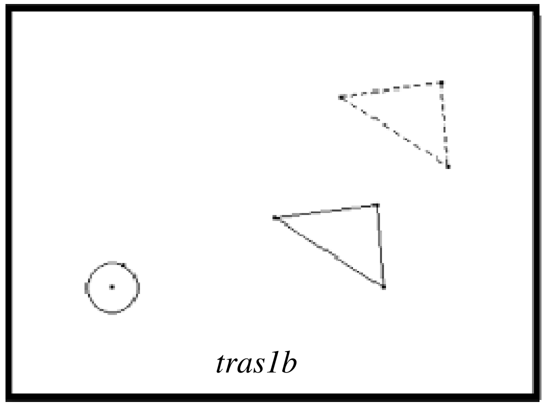


Figura 9. Actividad



Descripción de las figuras Cabri:

Para esta tercera actividad se prepararon nueve figuras Cabri. Las primeras ocho figuras están constituidas por dos triángulos: uno continuo y uno punteado (imagen del continuo por una traslación según un vector que está oculto; figura uno horizontal derecho, figura dos horizontal izquierdo, figura tres vertical arriba, etc.), y una flecha (que aparece en todas la figuras con dirección horizontal y sentido derecho). El triángulo continuo puede arrastrarse, si se toma de cualquier parte sin que se modifiquen la orientación o medidas. La flecha puede arrastrarse de dos formas: al tomarla de la mitad mantiene constantes su tamaño, dirección y sentido; y al tomarla de los extremos cambian su tamaño, dirección y sentido. Cuando la flecha es aproximadamente igual al vector de la traslación, se muestra un punto con el letrero 'muy bien'. Este tipo de respuesta de Cabri (*retroacción*) permite que el estudiante modifique su (s) *acción (es)* hasta que encuentre la correcta (*validación*).

En estas figuras la flecha tiene *magnitud, dirección* y *sentido* diferentes al vector oculto con excepción de las figuras uno y dos, en las que la dirección es la misma (horizontal).

La posibilidad de arrastrar el vector de la mitad y desplazarlo por toda la pantalla, sin modificar sus características (magnitud, dirección y sentido), permitirá que los estudiantes observen que no importa la ubicación del vector, siempre genera la misma traslación.

La novena figura tiene dos triángulos: uno continuo y uno punteado (imagen del continuo por una traslación del vector oculto); no aparece la flecha (que los alumnos deberán construir) y hay un círculo con un punto sobre él. Al arrastrar el punto sobre el círculo, el vector que define la traslación cambia de dirección, sentido y magnitud, por lo tanto el triángulo punteado cambia de posición.

3.3.1 Análisis a priori. Lo que queremos que los alumnos comprendan es que si se dibujan flechas entre un punto de la figura original y su correspondiente imagen por la traslación, esas flechas serán paralelas, tendrán la misma medida y el mismo sentido.

Primera tarea:
En las ocho primeras figuras: ‘el triángulo punteado es el resultado de trasladar el triángulo continuo; **debes modificar la flecha para que represente el movimiento del triángulo’.**

Se espera que los alumnos en un primer momento realicen un ligero arrastre de la flecha por uno de los extremos, modificando la magnitud y en el caso de la figura uno logren realizar la tarea (en esta figura la flecha y el vector que define la traslación solo se diferencian en la magnitud), sin embargo es poco probable que con esta misma estrategia obtengan el ‘muy bien’ en las demás figuras, porque la diferencia entre la flecha y el vector no es solo la magnitud, sino el sentido y en otros casos también la dirección (la figura tres tiene dirección vertical y sentido arriba). Otro posible movimiento será arrastrar la flecha únicamente de la mitad, arrastre que no modifica las características de la flecha y por lo tanto no se obtiene el 'muy bien'.

Ubicar la flecha entre vértices (es decir, un extremo en uno de los vértices del triángulo continuo y el otro extremo en uno de los vértices del triángulo punteado) es otra estrategia que esperamos realicen, existiendo tres posibilidades: que la ubiquen entre vértices no correspondientes[10]; entre correspondientes pero la flecha apuntando hacia el continuo; y entre vértices correspondientes pero con la flecha apuntando hacia el punteado. Los dos primeros casos serán invalidados por el medio porque no obtendrán el 'muy bien', aunque en el segundo la flecha y el vector coinciden en la magnitud y en la dirección pero no en el sentido (los estudiantes que traten de realizar la tarea de esta forma posiblemente están usando algunas de las propiedades de la traslación) y el tercer caso corresponde a una[11] estrategia ganadora.

Una vez realizada la tarea se espera que el estudiante describa la forma en que quedaron ubicados los triángulos y la flecha, utilizando palabras como: diagonal, horizontal, vertical, arriba, abajo, izquierda derecha. Las cuales corresponden a la dirección y el sentido de la traslación.

SECUENCIA

La estrategia de ubicar la flecha entre vértices será aplicada por los estudiantes luego de realizar la tarea con las dos primeras figuras, sin embargo puede que no reconozcan con facilidad los que son correspondientes por lo que ubicaran la flecha entre vértices no correspondientes, o entre correspondientes , pero apuntando hacia el continuo (sentido contrario) estas estrategias serán invalidadas por las retroacciones del medio (no se obtiene el 'muy bien'), llevando

[10] Llamamos correspondientes a un objeto y su imagen por una transformación geométrica, en este caso un vértice y su correspondiente imagen por una traslación.
[11] Recordamos que existen infinitos lugares en la pantalla donde podemos ubicar el vector que define una traslación sin afectarla.

al estudiante a modificar sus acciones y descubrir que la estrategia correcta implica no sólo ubicar la flecha entre vértices correspondientes, sino que debe ir apuntando siempre (sentido de la traslación) hacia el triángulo punteado. En las dos o tres últimas figuras de la serie se espera el uso de la estrategia correcta de forma más ágil.

Es posible que algunos de los estudiantes hagan comparaciones (similitudes y diferencias) a medida que realizan la tarea en cada una de estas figuras Cabri, por ejemplo de la uno y dos dirán que la flecha está horizontal, y que el triángulo punteado en una está a la derecha y en la otra figura está a la izquierda.

Puesta en común

Con la ayuda del proyector se espera que la profesora mediante preguntas haga que cada grupo de estudiantes exponga el razonamiento que utilizó para realizar correctamente la primera tarea y expliquen por qué funcionó.

Luego les pedirá que expliquen por qué la posición relativa de los triángulos determina la forma correcta en que debe ir la flecha para obtener el 'muy bien' y qué sucede cuando se mueve la flecha de la mitad o de alguno de los extremos.
La profesora realizará preguntas buscando que los estudiantes observen las figuras para que describan la forma en la que quedó la flecha en algunas de ellas (usando palabras como: horizontal, arriba, abajo, derecha, izquierda) y realicen comparaciones por ejemplo: entre la uno y la dos para que los estudiantes descubran que la dirección es la misma, pero con sentido diferente; entre la dos y la tres identifiquen que la dirección es distinta.

Segunda tarea: logrando la mayor precisión posible

Después de la puesta en común se muestra la novena figura. Para explicar a los estudiantes lo que deben hacer, la profesora le cuenta a la clase que se trata nuevamente de representar el movimiento por medio de una flecha que se llama vector, y muestra la herramienta para construirla. Construye un vector cualquiera y luego le pide a un alumno que modifique ese vector para que represente el movimiento. Una vez que el alumno lo hace (aproximadamente correcto), anuncia que va a verificar la precisión, y construye la traslación del triángulo continuo por el vector dibujado (utilizando la herramienta Traslación de Cabri). Después de felicitar al alumno, mueve el punto sobre el círculo, de manera que el triángulo punteado se mueva, y ya no coincide con la imagen del continuo por el vector dibujado. Finalmente, les explica a los alumnos que ahora **el problema es construir el vector de tal manera que siempre represente el movimiento del triángulo**, aunque se mueva el punto sobre el círculo, y los deja trabajar en grupos.

En esta actividad encontramos dos tipos de verificación que permiten invalidar las construcciones que se hayan hecho sin tener en cuenta todas las propiedades de la traslación.

La primera que llamaremos *verificación uno*, consiste en utilizar la herramienta 'traslación' de Cabri, que produce la imagen del triángulo continuo por el vector construido por los estudiantes. Si el triángulo producido por Cabri queda superpuesto al triángulo punteado, la construcción habrá pasado esta primera prueba; en caso contrario la construcción será invalidada.

La segunda verificación que llamaremos *verificación dos,* consiste en el arrastre del punto sobre el círculo (lo cual produce una modificación del vector oculto y por lo tanto un cambio de posición del triángulo punteado). Si el vector construido sigue correspondiendo a la traslación; es decir, si el triángulo construido por Cabri sigue superpuesto al triángulo punteado, la construcción habrá pasado esta segunda prueba; en caso contrario la construcción será invalidada.

Esta segunda verificación implica un problema nuevo para los estudiantes, quienes hasta el momento han arrastrado el vector para darle (perceptivamente) unas propiedades. Este es un arrastre para ajustar la figura perceptivamente. En esta segunda verificación, el arrastre invalida los ajustes perceptivos, y los estudiantes deben comprender que ya no basta con obtener una figura que aparentemente está correcta, ahora es necesario una figura que esté correcta *aunque cambien sus posiciones debido al arrastre.*

Para construir un vector en Cabri es necesario indicar un punto inicial y un punto final. Es posible que los estudiantes construyan ese vector usando los puntos que ya tiene la figura (vértices de los triángulos) o que creen dos puntos nuevos.

Podemos prever tres tipos de estrategia de los estudiantes. Una es crear el vector utilizando puntos nuevos y arrastrarlo hasta que quede entre dos puntos correspondientes de los triángulos, pero con sentido contrario al de la traslación. En este caso, la verificación uno invalidará la figura, pues el triángulo que construye Cabri no quedará superpuesto con el punteado. Otra es crear el vector utilizando puntos nuevos, y arrastrarlo hasta que quede entre dos puntos correspondientes de los triángulos, respetando el sentido de la traslación. En este caso, la verificación uno validará la figura, pero la validación dos la invalidará, pues el vector no cambiará al hacer el arrastre, y por lo tanto el triángulo construido por Cabri dejará de estar superpuesto al triángulo punteado. Por último, la estrategia ganadora es crear el vector utilizando dos puntos correspondientes de los triángulos. Esta figura será validada tanto por la verificación uno como por la verificación dos.

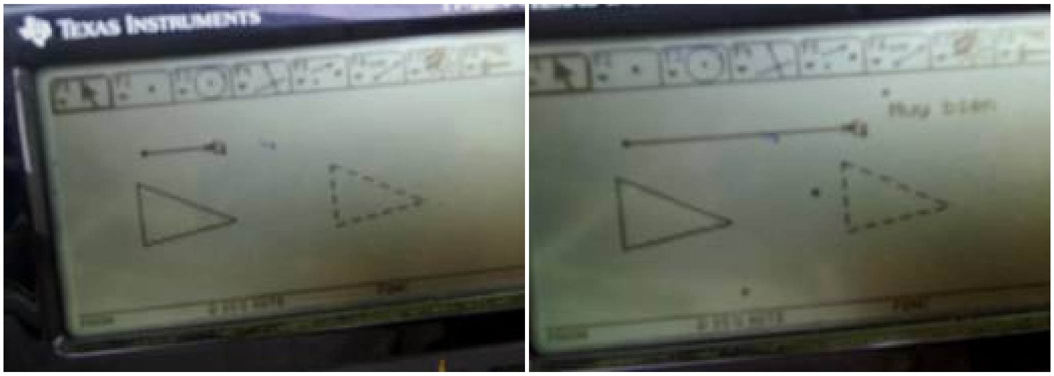
Finalmente, la profesora organiza una **puesta en común** para asegurarse de que todos comprenden que deben construir el vector entre dos puntos correspondientes, y que si trazan varios vectores, todos serán paralelos, tendrán el mismo sentido y la misma medida. Durante la puesta en común se presentarán algunas de las construcciones de los estudiantes, empezando por aquellas que fueron realizadas sin tener en cuenta las propiedades de la traslación (construcción a ojo), luego las que tuvieron en cuenta solo algunas de las propiedades y finalmente, las construcciones correctas (las que pasaron las verificaciones), realizando públicamente las verificaciones correspondientes para asegurarse de que los alumnos aceptan la validación/invalidación del medio. Entonces realizará preguntas a los estudiantes acerca de qué condiciones debe tener el vector para obtener una construcción correcta.

3.3.2 Análisis a posteriori

Primera tarea: modificar la flecha para que represente el movimiento del triángulo

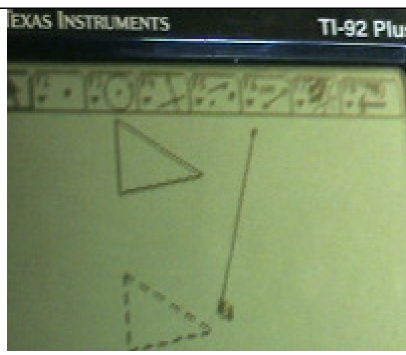
Como habíamos previsto, en la primera figura, algunos estudiantes obtuvieron el 'muy bien' con sólo modificar un poco la magnitud de la flecha; es decir, arrastrando alguno de los extremos, porque el vector oculto y la flecha tenían la misma dirección y sentido. En la puesta en común, la profesora retomó esta estrategia para cuestionar a los estudiantes sobre si era indispensable que la flecha fuera ubicada entre vértices correspondientes para obtener el 'muy bien' y así trabajar el concepto de vector.

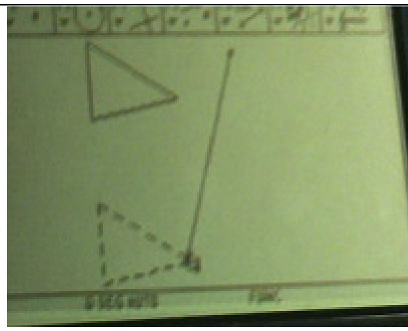
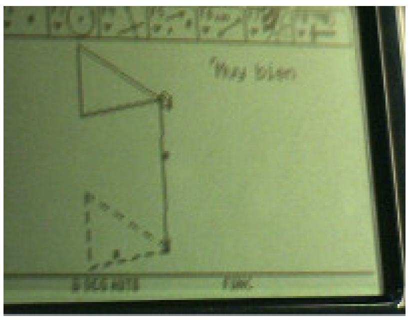
Foto 6. Análisis a posteriori de la actividad



La estrategia más usada por los estudiantes para hacer la tarea fue ubicar la flecha entre vértices correspondientes.

Tabla 1. Estrategia usada

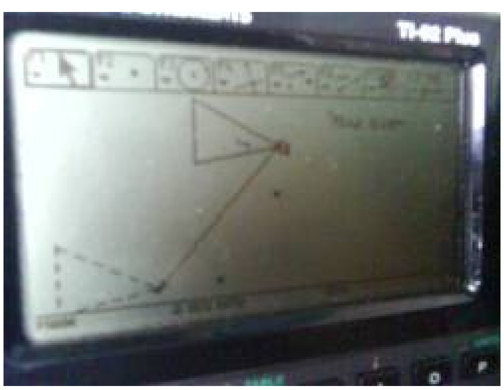
	El estudiante arrastra la punta de la flecha hacia un vértice del triángulo punteado.

<table>
<tr>
<td>

</td>
<td>Luego lleva el otro extremo de la flecha al punto correspondiente en el triángulo continuo.

Cuando la flecha ha quedado entre vértices correspondientes y con la flecha apuntando hacia el triángulo punteado como se muestra en la figura aparece el letrero ‘muy bien’.</td>
</tr>
</table>

Algunos de los estudiantes usaron otras estrategias que fueron invalidadas por las retroacciones del medio. Por ejemplo, ubicar la flecha entre vértices no correspondientes, o ubicar la flecha con diferente sentido.

Tabla 2. Estrategia

	El estudiante ubica uno de los extremos de la flecha en uno de los vértices del triángulo continuo luego el otro extremo de la flecha en uno de los vértices del triangulo punteado. Como podemos ver, los vértices entre los cuales se encuentra la flecha no son correspondientes y por lo tanto la hacen diferente en magnitud y dirección al vector que define la traslación.
 	Como el estudiante sabe que habrá terminado la tarea cuando le aparezca el 'muy bien' continua moviendo la flecha, arrastrándola de un extremo a otro de los vértices del triángulo continuo. Ahora la flecha está ubicada entre vértices correspondientes y con el sentido correcto, es decir, con la flecha apuntando hacia el triángulo punteado entonces aparece el 'muy bien'.

SECUENCIA

Los estudiantes observaron que la acción de ubicar la flecha entre vértices correspondientes les permitía obtener el 'muy bien'; de esta manera Cabri validaba sus acciones y el estudiante estaba seguro que en las figuras Cabri sucesivas aplicar la misma estrategia era la forma correcta de realizar la tarea.

Como habíamos previsto en el análisis a priori, los estudiantes comparan las características de las distintas figuras e identifican las distintas direcciones y sentidos de la traslación. Refiriéndose a la flecha de las ocho figuras Cabri uno de los estudiantes comenta:

Diálogo

P:- Al observar la posición de las flechas, después de realizar la tarea en las figuras Cabri, ¿qué puede decir?

E:- las direcciones en las que vemos a la flecha en las figuras, se parece a los movimientos que puede hacer la dama en el ajedrez.

El estudiante relaciona las características de la flecha de cada una de las figuras, con un pre-saber: los movimientos de la dama del ajedrez, que coinciden con las direcciones y el sentido de los vectores usados para hacer las traslaciones de los triángulos.

En el análisis a priori previmos que algunos estudiantes compararían figuras, esto no se dio de forma natural, sino que fue una sugerencia que hizo la profesora a un estudiante durante el trabajo individual.

Diálogo

P:-¿qué puede decir de los triángulos en esta figura y en la anterior?

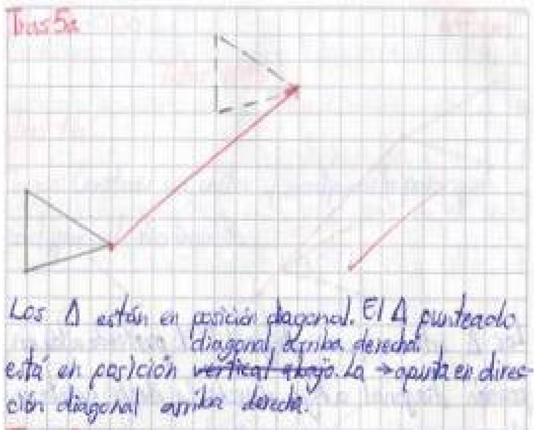
E: -Los triángulos están en diferente posición (el estudiante está comparando las figuras dos y uno)
P:-¿el punteado va hacia al lado qué?
E:- izquierdo y antes estaba hacia el lado derecho
P: -¿y en la anterior figura hacia dónde estaba apuntando la flecha?
E: -hacia la derecha.

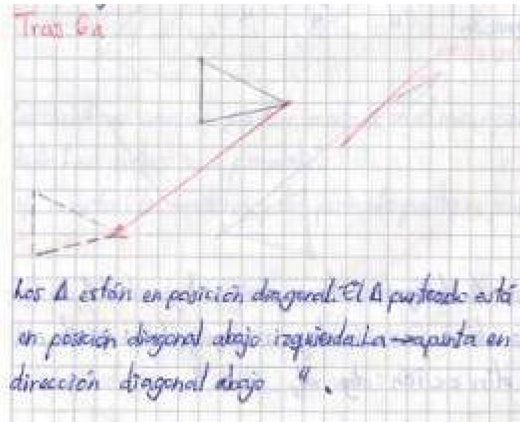
Aquí describe que la diferencia entre las dos figuras está en la posición que ocupa el triángulo punteado. Y en cada una coincide con la punta de la flecha.

Otra manera de constatar que los estudiantes identificaron el sentido como una característica de la traslación, es la descripción que hicieron en su cuaderno de la posición de los triángulos y las características de la flecha.

La observación de los dibujos hechos en sus cuadernos y en otros casos directamente en la pantalla de las calculadoras brindó soporte valioso para cada uno de los descubrimientos hechos por ellos.

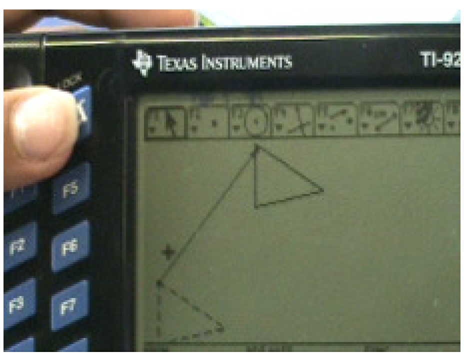
Foto 7. Desarrollo de la actividad por los estudiantes

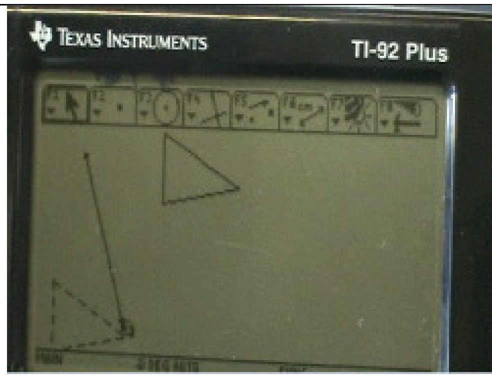
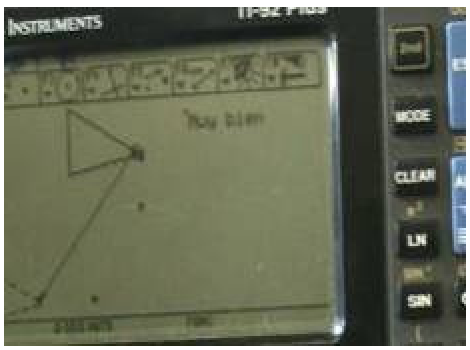




Lo que los estudiantes describen sobre el triángulo punteado coincide con lo que dicen de la flecha. Aunque no se puede asegurar que ellos relacionan directamente estas dos cosas si podemos ver que lo escriben.

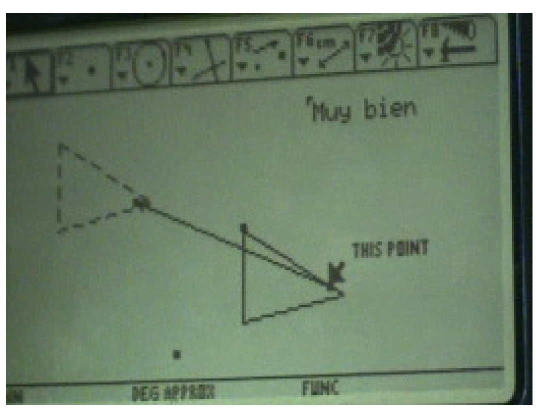
Tabla 3. Descripción de la actividad

	Uno de los estudiantes, para realizar la tarea de la figura cinco, ubica el vector entre vértices correspondientes, pero con la flecha apuntando hacia el triángulo continuo; es decir, con sentido contrario, por lo que no obtiene el ‘muy bien’.
	La profesora le sugiere comparar con las figuras anteriores y finalmente descubre que la flecha debe apuntar hacia el triángulo punteado. Las imágenes junto con el diálogo no lo

 	muestran. *P:-¿Por qué cree que ahora si le salió el muy bien?* *E:-Porque yo lo estaba haciendo mal, porque la flecha tiene que ir hacia donde está el punteado y no hacia donde está el continuo.*

Luego que un grupo de estudiantes realiza la tarea en una de las figuras finales, la profesora por medio de preguntas les sugiere observar más detenidamente la forma en que quedaron los triángulos y la flecha.

Foto 10. Desarrollo de la actividad



Diálogo

P:- ¿Qué pasa con la flecha, qué pasa con los triángulos?

E1: Los triángulos están en diagonal

P: ¿en qué posición está la flecha?

E1: hacia la izquierda a la parte de arriba

…

P:-¿El triángulo punteado qué es para el continuo?

E2:- Este es como un espejo de este (refiriéndose al triángulo punteado y al continuo)

P:- ¿un espejo?

E1:- no, porque si este fuera un espejo la punta de este estuviera acá. (Señalando que el triángulo punteado debería estar con orientación contraria.)

P:- ¿Entonces?

E1:- es como, lo sacaron de ahí, como un doble de este (para referirse a que el triángulo continuo y el punteado tienen la misma medida y orientación).

La profesora también pide a los estudiantes que comparen las posiciones de los triángulos que se tenían en la simetría axial (trabajada anteriormente) y las que se tienen ahora, con el fin de resaltar que en la simetría axial las orientaciones de los triángulos son opuestas, mientras que en la traslación son iguales.

Puesta en común

La puesta en común inicia con la respuesta de los estudiantes a la pregunta de la profesora ¿qué se debió hacer para realizar la tarea?

Diálogo

P:- ¿Qué era la tarea?

E1:- Señalar los puntos. Colocar la flechita en los dos puntos.

E2:- hasta que le saliera el 'muy bien'.

E3:- nosotros debimos apuntar con la flechita, o sea con la punta de la flechita al costado del triángulo punteado.

P:-¿por qué tenía que ir la flechita siempre hacia donde estaba el triángulo punteado?

E4:- para que nos saliera el 'muy bien'.

P:- ¿y por qué nos salía el 'muy bien', qué es el triángulo punteado con respecto al otro?

E5:- el espejo.

P:- representa, en este caso no el espejo sino el movimiento. Es el mismo y representa el movimiento que hizo.

Después de realizar la tarea, se generalizó la estrategia ganadora, que consistía en ubicar la flecha vértice a vértice que ellos llaman *colocar la flechita entre dos puntos*.

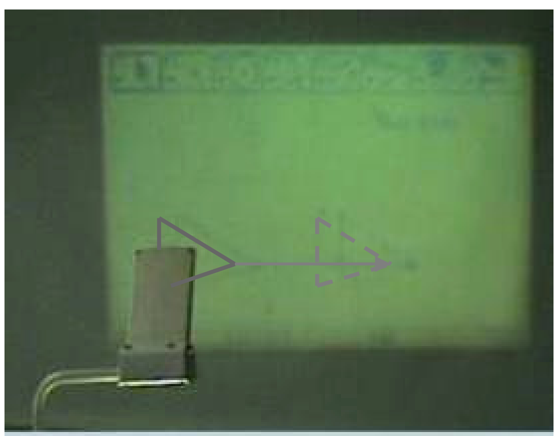
Como el 'muy bien' también se obtenía sin la condición de tener la flecha entre vértices correspondientes, la puesta en común giró en torno a esto. En los siguientes diálogos se identifican las condiciones que según los estudiantes debe tener la flecha, para que sin estar ubicada entre vértices correspondientes siga apareciendo el 'muy bien'.

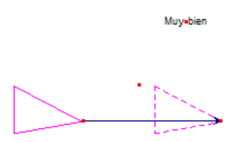
Diálogo

P:- La pregunta es la siguiente: cuando colocamos el vector sobre los vértices nos da muy bien, pero otras personas colocaron el vector no sobre los vértices.
P:- colócalo en otro lugar a ver si nos sale el muy bien, a ver mueve el vector (refiriéndose a la flecha ubicada entre vértices correspondientes y con sentido correcto).

El procedimiento que realizó el estudiante que tenía la calculadora durante el diálogo anterior es el siguiente:
(Las imágenes a la derecha son construcciones nuestras que nos ayudan a ver los elementos en pantalla y a entender el razonamiento que creemos utiliza el estudiante)

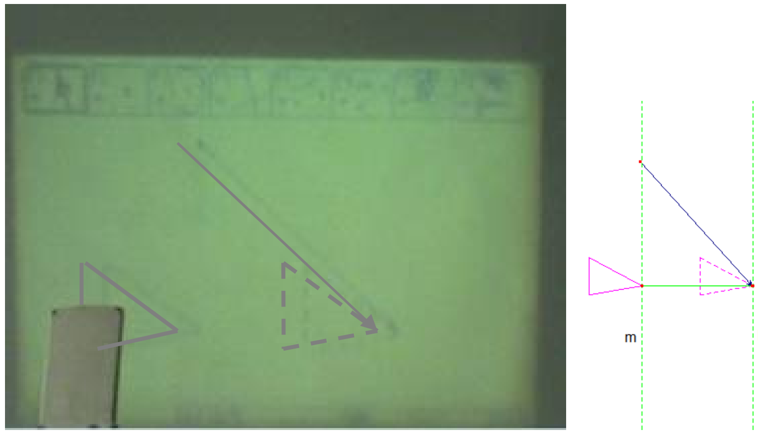
Foto 11. Comparación actividad





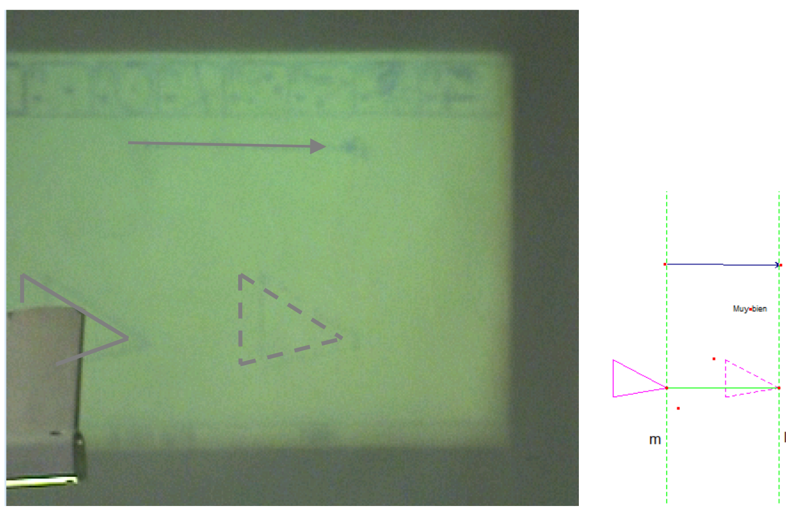
Primero mueve uno de los extremos cierta distancia sobre una recta perpendicular al segmento que une los dos vértices, así:

Foto 11.



Luego intenta mover la misma distancia con el otro extremo de la flecha por la otra recta perpendicular, pero no sale como él quería, porque no obtiene el 'muy bien'.

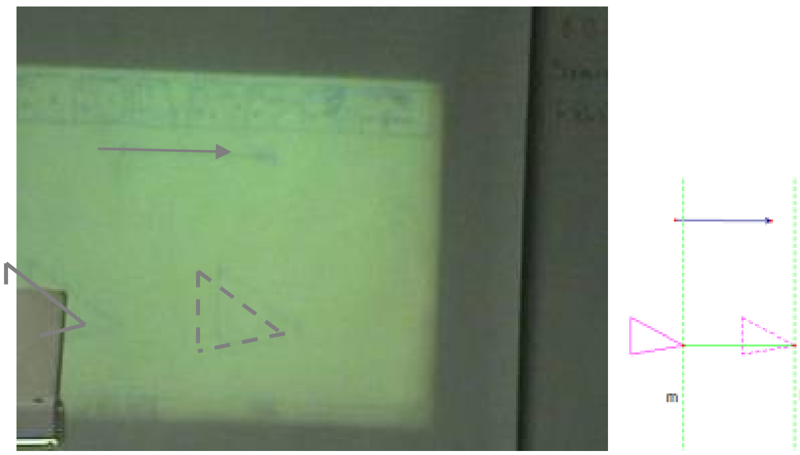
Foto 12.



Esta tarea asignada por la profesora podía haberse realizado arrastrando la flecha del centro, pero él la hace de la forma que acabamos de ver, es decir, usando líneas paralelas (líneas imaginarias que pasan por vértices correspondientes) como guías para desplazar la flecha, y así conservar su magnitud, sentido y dirección en la posición final.

Debido a que no obtiene el ‘muy bien’, el estudiante empieza a mover la flecha de los extremos.

Foto 13.



Este razonamiento creemos era común a varios de los estudiantes, quienes al ver que no había salido el ‘muy bien’ en la pantalla deciden brindar asesoría. Ubicando vértices correspondientes, colocan la regla como vemos en la foto queriendo usarla como guía para ubicar la flecha correctamente.

Foto 14.

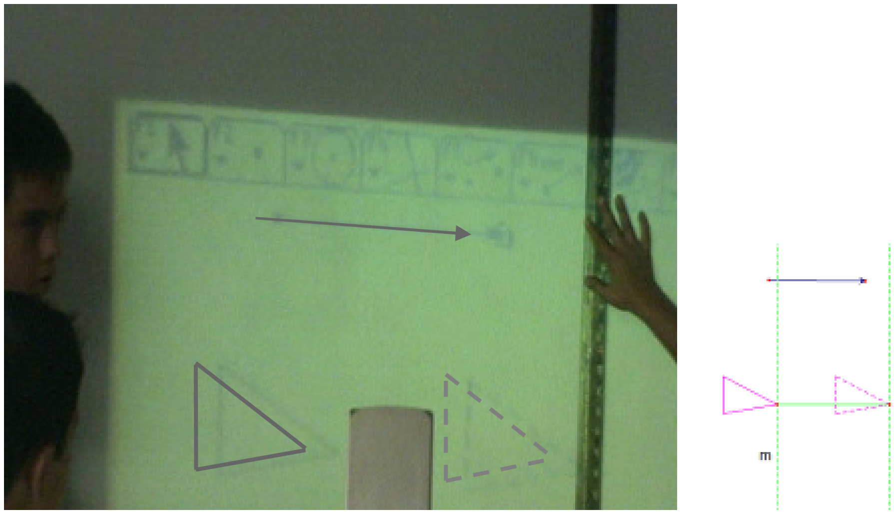
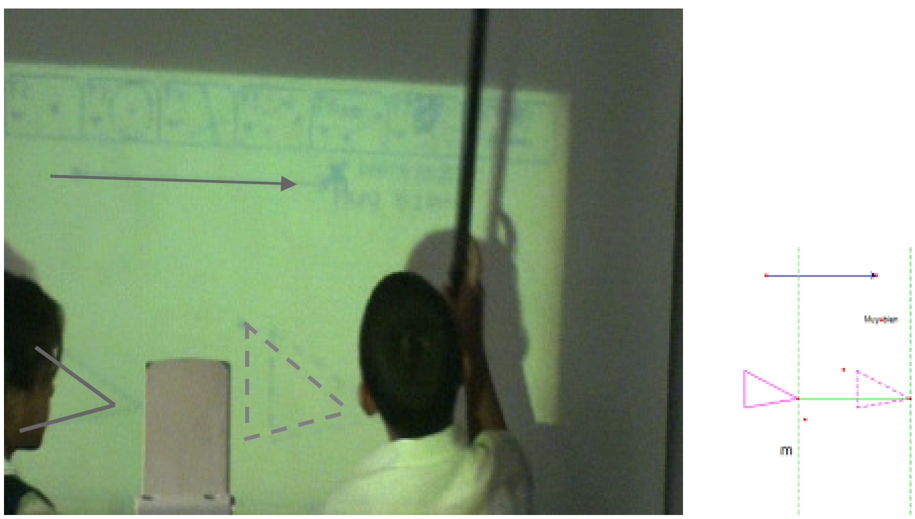


Foto 15.



Sin embargo, cuando arrastraban la flecha hasta la guía que ubicaron (la regla de forma vertical) obtienen el ‘muy bien’, ya que el sentido y la dirección eran correctas y únicamente hacía falta ajustar la magnitud. Al final logran el resultado antes que realizaran lo que esperábamos hicieran, es decir, que llevaran un extremo de la flecha hasta la regla ubicada verticalmente sobre uno de los vértices y luego el otro extremo a la regla que deberían haber ubicado en el vértice correspondiente. Nos queda la duda si los estudiantes usaron este razonamiento o no. Puesto que al obtener el 'muy bien' finaliza su intervención.

Luego de haber comprobado que el '*muy bien'* se obtiene incluso sin poner la flecha entre dos puntos correspondientes, la profesora lanza la pregunta a los estudiantes y obtiene la siguiente respuesta:

Diálogo
P:-¿Por qué se obtiene el muy bien sin tener ubicada la flecha entre vértices? (refiriéndose a vértices correspondientes y teniendo abierto en el proyector en la figura uno)
E:-porque los triángulos están hacia la misma distancia del vector, la misma distancia, lo que tiene de largo el vector es la misma distancia que tienen los triángulos, pero si yo muevo el triángulo se quita el 'muy bien',
P:-¿solamente la misma distancia? ¿Qué otra cosa?
E:-La misma posición

La estudiante dice que la longitud del vector es la misma que la distancia entre dos vértices correspondientes. Aunque esto puede notarse de manera aproximada (a ojo) no es tan sencillo como parece; es el resultado de haber realizado las actividades anteriores. También reconoce que esta no es la única condición del vector sino que hay algo más; por eso habla de *posición*, condición que creemos corresponde a la dirección del vector.

Para ratificar que los estudiantes identificaron la propiedad de dirección de la traslación mostramos las fotos de lo que ellos hacen para comparar el paralelismo entre un segmento que une vértices correspondientes y el vector. Haciendo un barrido con la regla desde el segmento que une dos vértices correspondientes hasta el vector, el estudiante trata de conservar la dirección de la regla. Previo a esto, estudiante y profesora tienen un corto diálogo, pero no registramos lo que hablaron (no fue posible hacer la transcripción del video porque no se oye lo que hablan), sin embargo suponemos que el estudiante explica su idea a la profesora.

Foto 16.

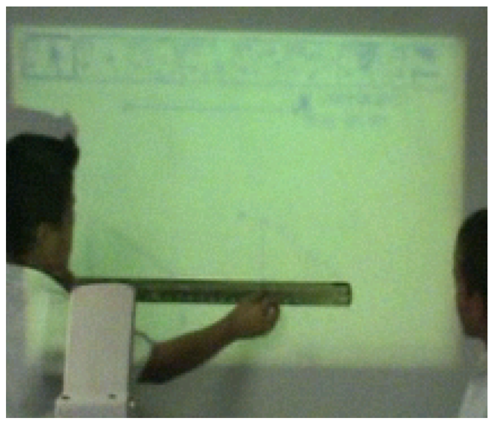


Foto 17.

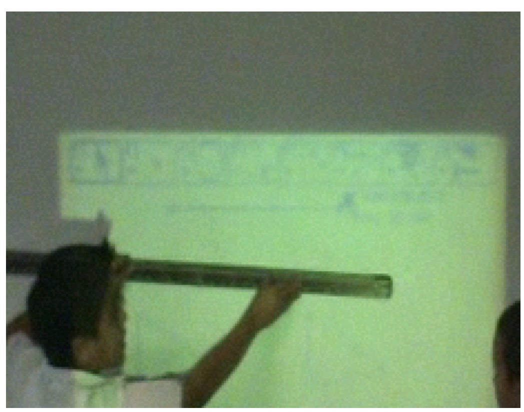
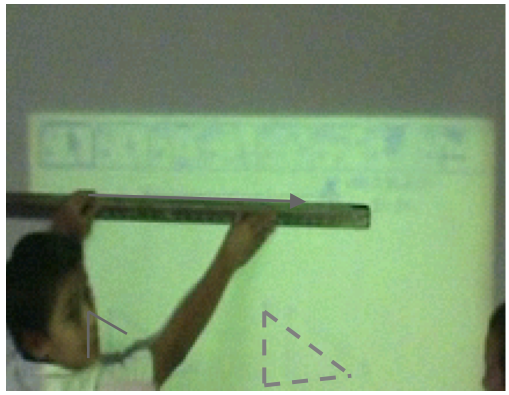


Foto 18.



Teniendo una figura con el 'muy bien' en el proyector, la profesora pide a un estudiante que modifique la flecha (como ella le indica) para conocer las razones del por qué consideran los estudiantes que desaparece el 'muy bien', veamos:

Diálogo

P:- A ver; por qué si movemos la punta hacia abajo, ¿no nos sale el 'muy bien'? (la figura uno está abierta en el proyector, ya se tiene el 'muy bien' sin colocar la flecha vértice a vértice, y un estudiante al frente va a modificarla).

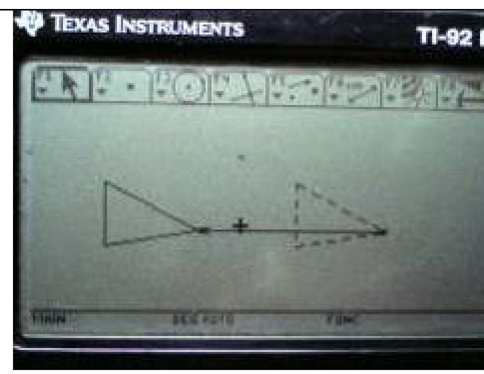
Después que se modifica la flecha en la forma indicada, algunas de las respuestas del por qué desaparece el 'muy bien' son:

E1:-porque no está recto.
E2:-porque no quedan iguales.
E3:-porque no queda los mismos puntos.
E4:-porque debe estar recto a las, como a los triángulos...
E5:-deben quedar rectos a la misma distancia del vector.
P:-dice él por que debe quedar recto como los triángulos.

En el diálogo anterior se nota una muy buena participación por las respuestas de los estudiantes, la primera habla de '*no está recto*' para explicar que la flecha ha dejado de ser paralela al segmento que une dos puntos correspondientes; otra explicación es que al mover una de las puntas hacia abajo la *magnitud* de la flecha cambia y lo dicen así '*no quedan iguales'.* Es visible que las propiedades del vector están siendo identificadas, aunque la forma de referirse a ellas no sea la más apropiada.

En esta puesta en común, se retomó la estrategia ganadora de colocar la flecha vértice a vértice; se hizo énfasis en que la punta de la flecha siempre iba dirigida hacia el triángulo punteado.

Tabla 4. Desarrollo de la actividad

Con la siguiente imagen en el proyector la profesora hace la pregunta: *Aquí en esta forma ¿Por qué no me ha salido el muy bien?* Recibiendo respuestas como: *-Porque está mal* *-porque la flecha debe apuntar siempre hacia el triángulo punteado.*	 La flecha en esta imagen está apuntando hacia la derecha (sentido incorrecto)

Segunda tarea: logrando la mayor precisión posible

Como se había previsto, la profesora terminó la puesta en común de las ocho figuras anteriores presentando la nueva tarea. Sin embargo, no les mostró las distintas formas de verificación.

La profesora decidió intervenir de la siguiente manera: primero usó el proyector para explicar la figura y la tarea, y los dejó trabajar en grupos. Luego seleccionó algunas construcciones de los estudiantes a las que aplicó la *verificación uno* y *dos,* y aprovechó para preguntarles por qué algunas construcciones fueron invalidadas y otras validadas; de esta forma reforzó la identificación de las propiedades de la traslación. Nuevamente los dejó trabajar en grupos, para que modificaran sus construcciones y usaran la correcta. Cuando la mayoría construyó el vector correctamente (usando como extremos vértices correspondientes y apuntando hacia el triángulo punteado), la profesora les pidió construir vectores en los otros dos pares de vértices, y que los compararan.

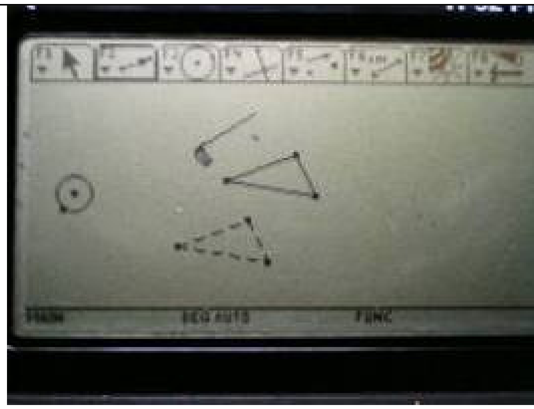
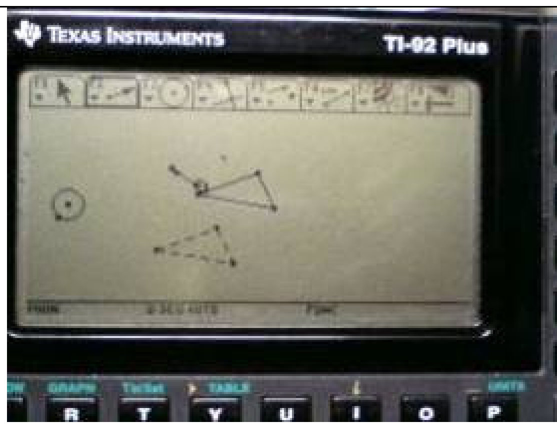
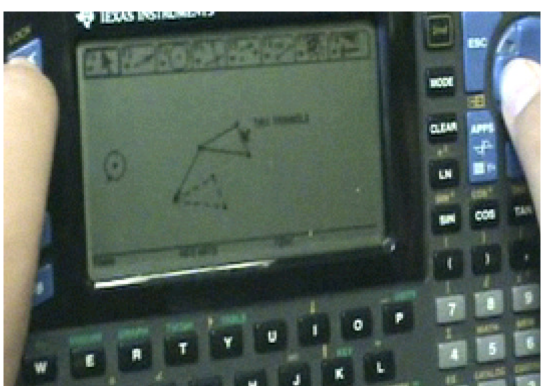
La profesora inicia la clase mostrando la figura en el proyector y le pide a los estudiantes que describan lo que ven. Los estudiantes identifican que parte del trabajo en esta figura será construir un vector y la profesora explica cómo usar la herramienta 'vector'. Sin embargo, como vemos en el siguiente diálogo, los estudiantes ya saben que en la barra de herramientas de Cabri a la que llaman las 'efes' está la opción vector necesaria para la tarea.

Diálogo
P: -para construir un vector ¿cómo lo construyen?
Es: -Con las efes.
P: -Muy bien, con herramientas.
P:- esa es la tarea que va a hacer, van a construir el vector y lo van a llevar y lo van a ubicar para ver cuál fue el movimiento del triángulo.

A continuación veremos algunas de las construcciones que diferentes estudiantes hicieron para hacer la tarea; hasta ese momento la profesora no les había mostrado como validarlas usando las retroacciones del medio (verificación uno y dos).

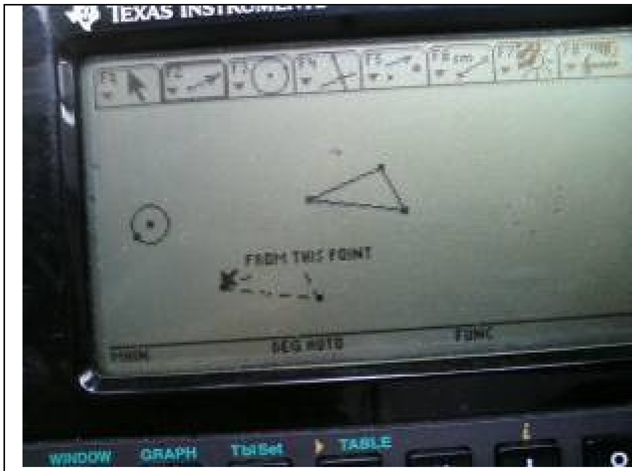
Primera construcción.

Tabla 5.

	Como habíamos previsto, el estudiante construye el vector creando dos puntos nuevos.
 	Luego arrastra el vector hasta los vértices correspondientes. *Diálogo* *P:- ¿qué está haciendo?* *E:- llevo el vector a las puntas como hacíamos* *P:-¿por qué la punta de la flecha va hacia abajo?* *E:- porque la punta de la flecha tiene que ir apuntando hacia el triángulo punteado* *P: -¿por qué cree que va apuntando hacia allá?* *E: -porque es el mismo movimiento que hace este (señalando el triángulo continuo)*

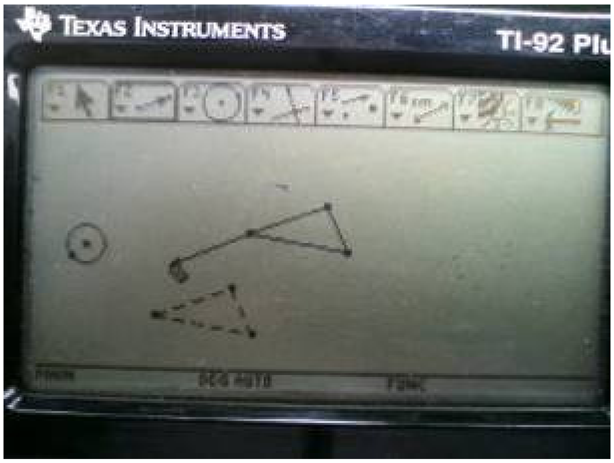
Segunda construcción

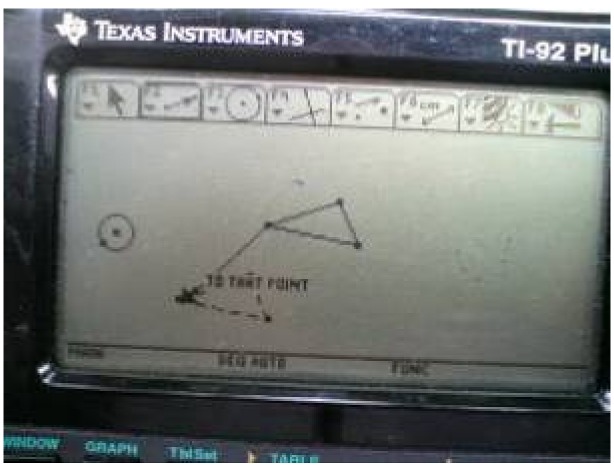
Tabla 1

	Como habíamos previsto el estudiante utiliza dos vértices correspondientes para construir el vector pero con sentido incorrecto. *P:-¿cómo se llaman esos puntos?* *E:-vértices* *P:-¿por qué lo pone ahí?* *E:-porque esta es la punta de este*
	Aunque el estudiante construye el vector con sentido contrario (apuntando hacia el triángulo continuo) utiliza vértices correspondientes.

Tercera construcción

Tabla 7.

<table>
<tr>
<td>




</td>
<td>La estudiante construye el vector usando un par de puntos correspondientes y con la punta del vector dirigida hacia el vértice del triángulo punteado. (Sentido correcto).</td>
</tr>
</table>

Como vemos esta última construcción es correcta (aunque el estudiante aún no ha aplicado las verificaciones porque la profesora no ha mostrado cómo) y la explicación que él da de su estrategia es la siguiente:

Tabla 8.

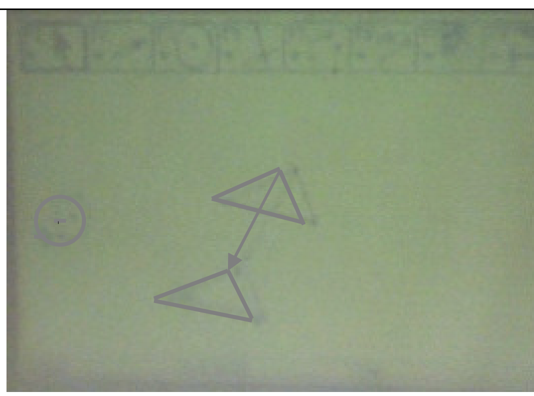
  .	A la pregunta de cómo construyó el vector la estudiante indica señalando con el lápiz el inicio y final del vector, los cuales corresponden a pares de vértices correspondientes. *Diálogo* *P: -¿Por qué la punta va hacia ese lado* *E: - Porque la punta de la flecha siempre tiene que ir apuntando al triángulo punteado* *P: - ¿Por qué cree que va apuntando hacia allá?(es decir hacia el triángulo punteado)* *E: - Porque es el mismo movimiento que hace este (refiriéndose al triángulo continuo)* *…* *P: - ¿Por qué el vector tiene que ser de esa longitud?* *E: - Porque este es la punta de este (señalando vértices correspondientes)*

	Se identifican el *sentido* al hablar de hacia dónde apunta la flecha y la *magnitud* al relacionar directamente la longitud del vector con la distancia entre dos puntos correspondientes.

La profesora usó el proyector para mostrar estas construcciones hechas por los estudiantes y aplicó las verificaciones descritas en el análisis a priori, resaltando las condiciones que debe cumplir la construcción del vector.

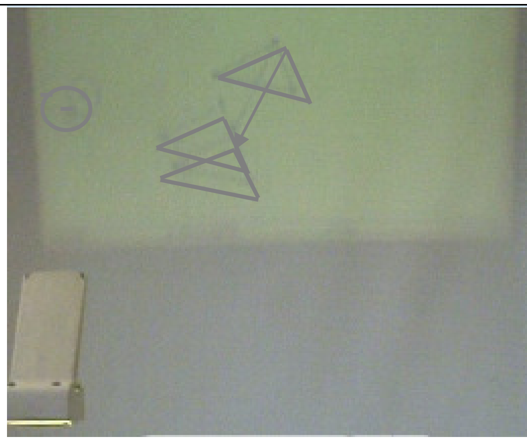
La profesora tomó la **primera construcción** y aplicó la *verificación uno* explicando paso a paso cómo hacerlo.

Tabla 9.

	*Diálogo:* *P:- Voy a probar esta construcción que él hizo. En f5 doy traslación, y le digo qué es lo que voy a trasladar. ¿Quién es que la distancia a la traslación?* *E:-el vector* La profesora haciendo uso de la herramienta traslación de Cabri, produce un nuevo triángulo (imagen del triangulo continuo por traslación del vector que construyó el estudiante) que queda superpuesto al triángulo punteado. Y aunque ella no lo dice esta construcción pasa la verificación uno.

A continuación aplica la segunda verificación

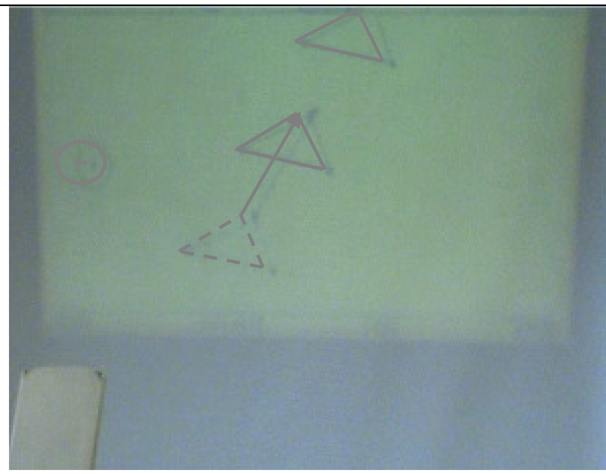
Tabla 10

	*P:-Cuando hicimos la traslación apareció otro (otro triángulo). Vamos a ver qué pasa cuando muevo el punto sobre el círculo (efectivamente la profesora mueve el punto sobre el círculo).* *P:-¿Qué pasó ahí?* *E:-No se mueve el que está pegado al vector.* *P:-¿Cuál es el triángulo que está indicando el movimiento del triángulo liso?* *E:- El punteado.* *…* *P:-Cuando yo mueva el punto sobre el círculo se tiene que arrastrar todito (vector, triángulo punteado y el triángulo construido por Cabri).* *P:-¿Qué pasa cuando yo muevo aquí? (punto sobre el círculo).* *E:-Se va el punteado solo.* *P:- o sea que ese vector no me sirve cierto…tengo que darle unas condiciones* *P:-¿Qué condiciones le tengo que dar?* *E:-Que vaya de punto a punto.*

Los estudiantes aceptan que la construcción debe mantenerse durante el arrastre para que sea correcta y eso les ayuda a identificar algunas de las condiciones que debe cumplir el vector como ir de ‘punto a punto’. Que corresponde a la magnitud de la traslación.

La **segunda construcción** tiene correctas la magnitud y la dirección, pero no el sentido. Y cuando la profesora aplica la *verificación uno* esta es invalidada.

Tabla 11.


Diálogo *P: -¿Quién es el que le da la distancia a la traslación?* *Es: -El vector.* *P: -¿Qué paso ahí? (ver foto 42)* *¿Dónde apareció el otro triángulo? (triángulo obtenido mediante traslación por el vector construido).* *P:-¿Por qué aparece arriba?* *Es: -Porque esa es la posición verdadera* *P: -¿Quién le dio esa posición verdadera?* *Es:- El vector.* *P: -¿Por qué el vector?*

Es:- Porque él fue el que señaló el triángulo para que saliera arriba.
…
P: -La flecha del vector es la que indica para donde es que va el movimiento. Entonces el trabajo es que salga sobre el mismo, sobre el triángulo que esta dado que es el punteado (es decir, el triángulo obtenido por traslación mediante el vector construido por el estudiante debe quedar sobre el triángulo punteado).
E: - Sí.
P:- ¿Entonces qué tengo que hacer con ese vector? (refiriéndose al vector construido por el estudiante con sentido contrario al vector oculto fig. 30)
E:- Lo voltea.

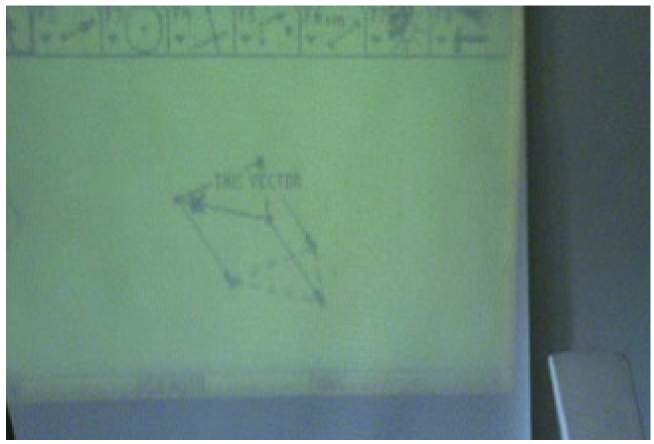
Vemos cómo los estudiantes identifican explícitamente una de las propiedades de la traslación al relacionar la distancia entre los triángulos con la magnitud del vector. Además ellos mismos dan las razones del por qué la figura no quedó bien (sentido contrario), es decir, es invalidada por el medio y entonces dan la solución: en este caso voltear el vector para darle el *sentido* correcto al vector.

Cuando la profesora aplica las *verificaciones* a la **tercera construcción,** mediante preguntas hace que los estudiantes se fijen en que el vector está construido entre vértices correspondientes y que apunta hacia el triángulo punteado condiciones que hacen a la construcción correcta.

Diálogo
P:- ¿cómo está ubicado el vector?
E:- de punto a punto
P: - cuando muevo el punto sobre el circulo, ¿el vector apunta siempre hacia dónde?
E:- hacia el triángulo punteado

Para cumplir con el objetivo de la actividad, la profesora pidió que trazaran un vector para cada vértice y realizó preguntas para que los estudiantes identificaran las características comunes de estos tres vectores, veamos:

Foto 19.



Diálogo

P: si pudiera medirlos ¿qué podría decir de los tres?

E: que son de igual medida.

P: - Los vectores van de punto a punto.

P:-Las flechas del vector van siempre en el mismo…

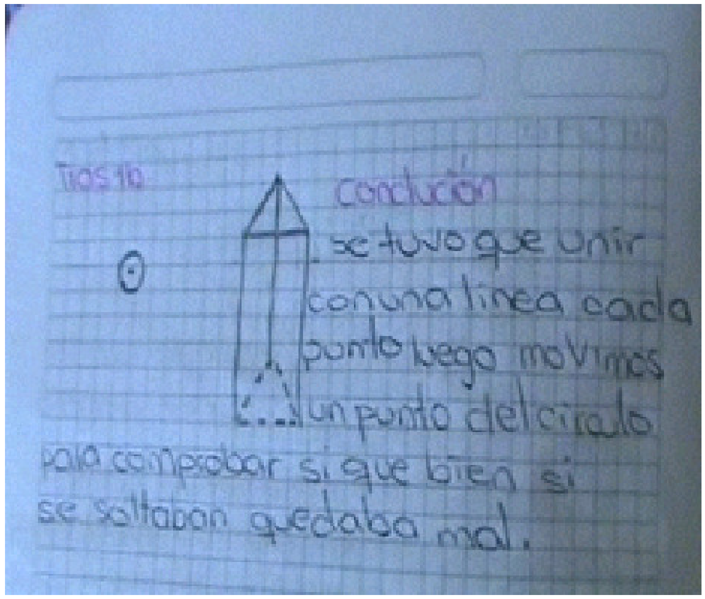
E: -Sentido.

P:-Y las rectas ¿cómo son? (refiriéndose a las rectas que están sobre cada vector)

Es: -paralelas.

Las características que los estudiantes mencionan para estos tres vectores son el mismo sentido y que son paralelos entre sí. También, hacen referencia a que tienen igual medida.

Foto 20.



En el texto, el estudiante hace referencia a la *verificación dos* y acepta la retroacción del medio como una forma de validar o invalidar las construcciones, y describe el caso de una construcción que es invalidada diciendo: “si se soltaban quedaba mal”, es decir los vectores dejaban de representar el movimiento del triángulo continuo hasta el triángulo punteado.

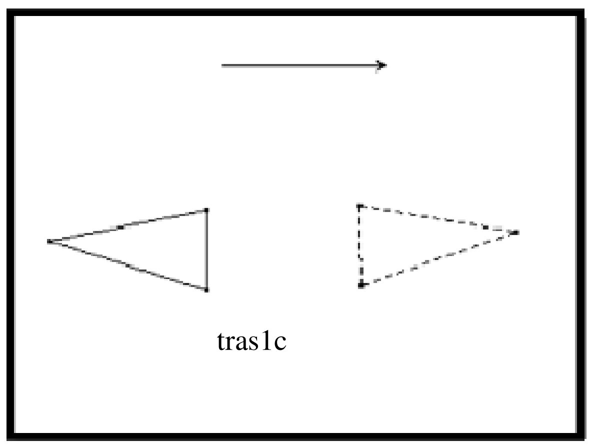
Conclusiones

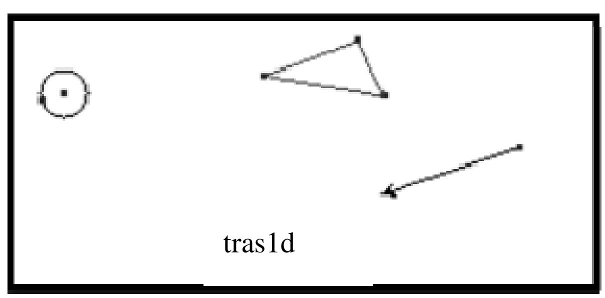
Los estudiantes identificaron que la longitud del vector está relacionada con la distancia que hay entre un vértice y su correspondiente, esto lo expresaron así: “*lo que tiene de largo el vector es la misma distancia que tienen los triángulos”*; y cuando trataron de explicar por qué obtenían el ‘muy bien’ sin estar el vector entre vértices correspondientes, daban algunas razones como: -*recto a las, como a los triángulos; -la misma posición; -deben quedar rectos a la misma distancia del vector;- desde que sólo quedara bien alineado como a las dos puntas;* las cuales apuntan al paralelismo entre el vector y el segmento que une dos vértices correspondientes.

3.4 CUARTA ACTIVIDAD

Objetivo: el propósito de esta actividad es precisar las condiciones para construir la imagen de una figura por una traslación. Específicamente, que los alumnos construyan rectas paralelas para garantizar la misma dirección y utilicen el compás para asegurar la misma medida.

Figura 10. Cuarta Actividad





Descripción de las figuras Cabri

Para esta actividad se prepararon nueve figuras. Las primeras ocho están constituidas por dos triángulos congruentes pero de lados no paralelos, uno continuo y uno punteado, y un vector (diferente para cada figura Cabri) al que no

se puede modificar la magnitud sentido y dirección, pero que si puede arrastrarse. El triángulo continuo puede desplazarse al arrastrarlo de sus lados y deformarse al arrastrarse de sus vértices; el triángulo punteado es congruente al continuo y puede arrastrarse por dos de sus vértices; uno lo desplaza en traslación, el otro en rotación. Cuando el triángulo punteado está aproximadamente sobre la imagen del triángulo continuo por el vector, aparece un punto con el letrero 'muy bien'.
La novena figura tiene un triángulo continuo, un vector y un círculo con un punto. Al mover el punto sobre el círculo se modifica la magnitud, la dirección y el sentido del vector de forma aleatoria; es posible arrastrar el vector sin que cambie su dirección, magnitud ni sentido.

3.4.1 Análisis a priori. En esta actividad queremos que los alumnos comprendan que para que una figura sea imagen de otra por una traslación, las rectas que unen puntos correspondientes deben ser paralelas y la distancia entre puntos correspondientes debe ser la misma. También queremos que los alumnos comprendan que no importa la posición del vector en la pantalla, a diferencia de la posición del eje en la simetría axial. El vector puede estar en cualquier lugar de la pantalla, porque lo que cuenta es su magnitud, su dirección y su sentido.

Primera tarea:

En las ocho primeras figuras el vector representa un movimiento, por tanto **'debes mover el triángulo punteado para mostrar la posición que ocupará el triángulo continuo si hace ese movimiento'.**

Los estudiantes seguramente van a mover los triángulos, descubriendo que al desplazar el triángulo continuo el punteado quedará igual, pero al modificar la forma del continuo el punteado también será modificado.

Para este momento los estudiantes ya reconocen que la orientación de un triángulo y su imagen por una traslación es la misma, así que la primera acción que consideramos la mayoría va a realizar será rotar el triangulo punteado para que tenga la misma orientación del continuo (es decir, que tengan sus lados correspondientes paralelos).

Luego los alumnos pueden utilizar la siguiente estrategia: **desplazar el vector** (recordemos que en estas figuras se puede mover el vector sin cambiar su magnitud, dirección y sentido) para colocarlo a partir de uno de los vértices del triángulo continuo (recordando una de las estrategias en la actividad anterior), y luego desplazar el triángulo punteado para que el vértice correspondiente quede en el otro extremo del vector. Esto implica que los alumnos reconocen que cada par de puntos correspondientes define el mismo vector. Si el vector queda apuntando hacia el triángulo continuo (sentido incorrecto) el medio invalidará esta estrategia pues en pantalla no aparecerá el 'muy bien', pero si apunta hacia el triángulo punteado (sentido correcto) si aparecerá, esta es una estrategia ganadora.

Otra estrategia (similar a la anterior) que se espera realicen será **desplazar el triangulo continuo** hasta uno de los extremos del vector, y luego el vértice correspondiente del triángulo punteado al otro extremo del vector. Y nuevamente puede ocurrir que no acierten en el sentido correcto del vector (apuntando hacia el triángulo continuo) y al no obtener el muy bien cambien de lugar los triángulos.
No todos los estudiantes van a girar el triángulo punteado para darle la orientación correcta como primera acción, sino que van a mover el vector y luego los triángulos tratando de ubicar el vector entre vértices correspondientes, pero van a descubrir que deben girar el triangulo punteado para lograr la tarea ('muy bien').
Antes de que los estudiantes realicen cualquier acción en las diferentes figuras de esta serie los triángulos no tienen sus lados paralelos; es posible que el estudiante ubique el vector entre vértices correspondientes dejando los triángulos así, y el

medio invalidará esta estrategia.

Ubicar el vector entre vértices no correspondientes es una estrategia que consideramos poco probable, porque en la actividad anterior reforzaron la propiedad de la traslación que indica que cada punto tiene su correspondiente imagen.

SECUENCIA

Después de realizar la tarea en la primera figura, los estudiantes intentarán ubicar los triángulos de igual forma en la segunda, pero esta estrategia no funcionará porque el vector tiene diferente sentido; es decir, no se obtendrá el 'muy bien', que los va a llevar a reconocer algunas diferencias entre las figuras, por lo tanto a modificar su estrategia para obtener el 'muy bien'. En las figuras finales se espera la aplicación de estrategias ganadoras con rapidez.

Al igual que en la actividad anterior se espera que algunos estudiantes comparen las figuras destacando las diferencias, apoyados por los dibujos de las figuras realizados en los cuadernos. Por ejemplo, dirán: 'los triángulos están intercambiados', 'el vector es horizontal y apunta hacia el triángulo punteado', 'la tres es diferente de la dos porque el triángulo punteado no está a la izquierda del continuo, sino arriba'. Estas comparaciones también tendrán en cuenta lo que observaron en las figuras utilizadas para el concepto de Simetría Axial.

Puesta en común

Se espera que la profesora pida a los estudiantes que describan la estrategia que utilizaron para realizar la tarea y expliciten específicamente las características del vector (dirección, magnitud y sentido) después de que apareció el 'muy bien' en cada una de las figuras.

Ellos dirán que el triángulo continuo y el punteado (imagen del continuo por traslación) deben tener la misma orientación y describirán el vector de cada figura (horizontal derecho, vertical abajo, vertical arriba, diagonal abajo, diagonal arriba). Esto ocurrirá mientras un estudiante realiza la tarea utilizando el proyector, y los demás responden las preguntas acerca de la posición correcta de los triángulos y el vector. Es posible que algunos estudiantes recuerden y digan que el vector no necesariamente debe ir de punto a punto para obtener el 'muy bien'.

La profesora deberá pedirles que realicen comparaciones puntuales entre pares de figuras como por ejemplo: figuras tres y cuatro, para que los estudiantes digan que los vectores son verticales pero uno con la flecha apuntando hacia arriba y el otro hacia abajo; figuras dos y tres que para que los estudiantes digan que los vectores son diferentes: uno vertical y el otro horizontal; la posición de los triángulos en las figuras de simetría axial y la posición de los triángulos en las figuras de traslación.

Segunda tarea: logrando la construcción exacta

Para esta tarea se utiliza la novena figura. En esta figura los alumnos pasan de una problemática de colocar el triángulo 'aproximadamente' a construirlo de manera exacta (recordemos que en esta figura al arrastrar el punto sobre el círculo, la traslación cambia).

Después de mostrar en el proyector la novena figura, la profesora le pide a un alumno que construya un triángulo punteado que sea la traslación del continuo con respecto al vector (utilizando las estrategias que acaban de explicitar en la puesta en común). Para verificar la exactitud de ese dibujo, la profesora propone utilizar la herramienta 'traslación', y aplicarla al triángulo continuo. Si el triángulo punteado no coincide con el triángulo producido por Cabri, permite que el alumno lo ajuste hasta que coincidan exactamente. Luego mueve el punto sobre el círculo, de manera que el vector cambie, y muestra que el triángulo construido ya no coincide con el triángulo producido por Cabri. Entonces borra el triángulo construido por el alumno, y la imagen de verificación, y explica que se trata de **hacer una construcción que siempre coincida con el triángulo producido por Cabri**, incluso cuando se mueve el punto sobre el círculo.

Al igual que en la novena figura de la actividad anterior, aquí las construcciones hechas por los estudiantes deben pasar por dos tipos de verificación, que invalidará las construcciones hechas sin usar las propiedades de la traslación y validará las que sí.

La *verificación uno* consiste en utilizar la herramienta 'traslación' de Cabri, para producir la imagen del triángulo por el vector. Si el triángulo producido por Cabri queda superpuesto al triángulo construido por el estudiante, habrá pasado esta primera prueba.

La *verificación dos* consiste en el arrastre del punto sobre el círculo (lo cual modifica el vector) que produce una modificación en la posición del triángulo hecho por Cabri. Si el triangulo hecho por el estudiante y el construido por Cabri siguen coincidiendo la construcción será validada, en caso contrario será invalidada.

Al igual que la figura nueve de la actividad anterior, esta segunda verificación implica hacer una construcción utilizando las herramientas de Cabri, es decir, explicitando las propiedades de los objetos (recta paralela, igual distancia), pues es la única manera de que esté correcta aunque cambien sus posiciones debido al arrastre.

Es posible que algunos alumnos tracen segmentos a partir de los vértices del triángulo continuo, que aparentemente son paralelos y de igual magnitud que el vector; pero al mover el punto sobre el círculo estos segmentos dejan de ser paralelos al vector y su magnitud será diferente de la magnitud del vector. La profesora debe plantear la pregunta: '¿qué es lo que se pierde al mover el punto sobre el círculo?' Los alumnos podrán expresar con sus propios términos el paralelismo ('los segmentos no están iguales al vector, el vector se torció, etc'). Entonces la profesora les pedirá a algunos alumnos que muestren cómo debería estar el segmento con respecto al vector. A continuación, el profesor mostrará cómo usar la herramienta 'recta paralela' (la tecla f4 del menú opción 2) para obtener el dibujo que ellos esperan. Finalmente les pedirá a todos que lo construyan en los grupos, y que los compañeros comprueben desplazando el punto sobre el círculo.

Una vez que han construido rectas paralelas al vector por los vértices del triángulo, podrán ubicar de manera aproximada puntos sobre las rectas, y así construir la imagen del triángulo. Al mover el punto sobre el círculo, como la magnitud del vector cambia, ya no será la misma de los puntos colocados 'a ojo'. La profesora deberá asegurarse de que los alumnos identifican claramente el problema: ¿qué es lo que no está funcionando? Los alumnos deberán responder en sus propias palabras que las distancias entre puntos correspondientes deben ser iguales a la longitud del vector. Sólo después de que los alumnos hayan identificado claramente la necesidad de lograr que los segmentos tengan la misma medida del vector, la profesora les mostrará cómo usar la herramienta compás (tecla f4 del menú la opción 8).

La profesora también podrá explicarles a los alumnos cómo obtener el paralelismo utilizando regla y escuadra, y cómo utilizar el compás para obtener una distancia entre vértices correspondientes de igual longitud que el vector, para que hagan la construcción en el cuaderno o en el tablero.

Puesta en común

Para esta última figura no se realiza una puesta en común al final del trabajo de los estudiantes, sino que se hace necesaria la intervención de la profesora de forma continua dada la dificultad de la construcción (debido a la necesidad de usar algunas herramientas que los alumnos desconocen, como recta paralela, compás).

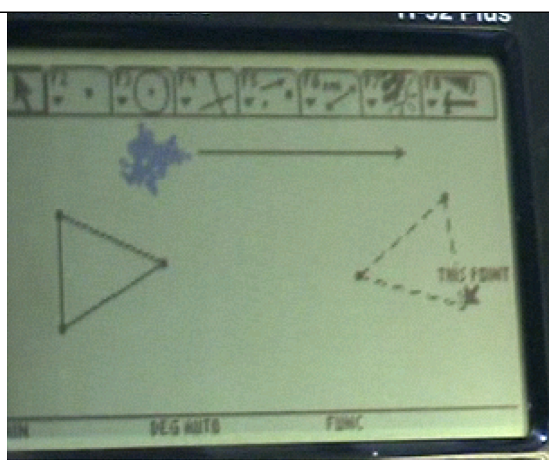
Durante estas intervenciones la profesora, además de explicar el uso de las herramientas de Cabri, pide a los estudiantes que justifiquen por qué las construcciones que ellos realizan se desbaratan durante el arrastre.

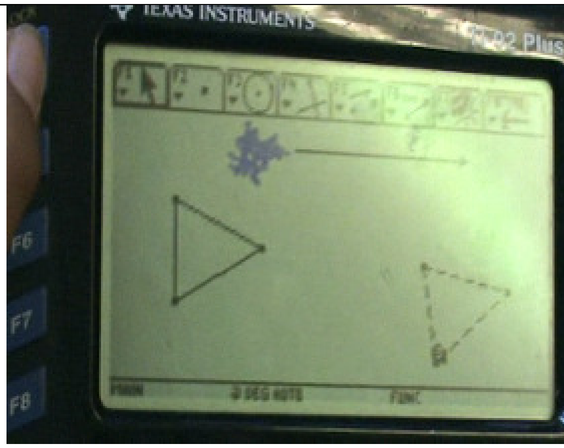
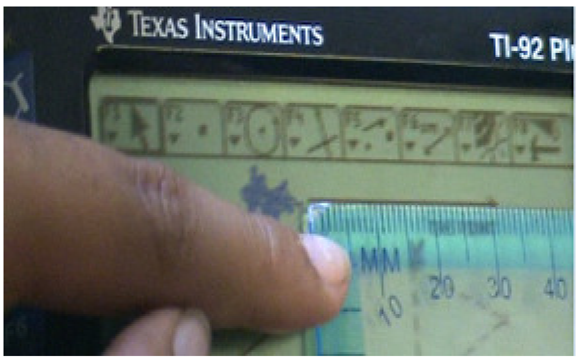
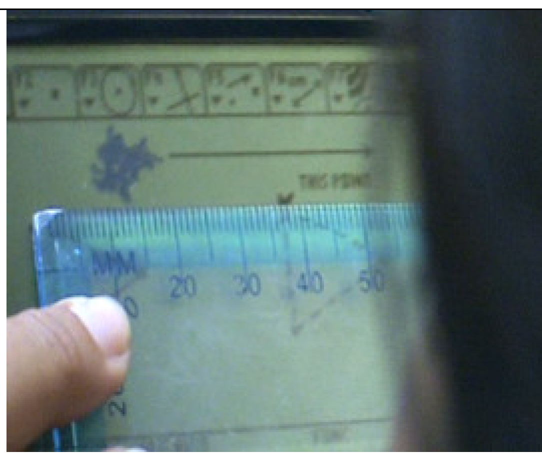
3.4.2 Análisis a posteriori

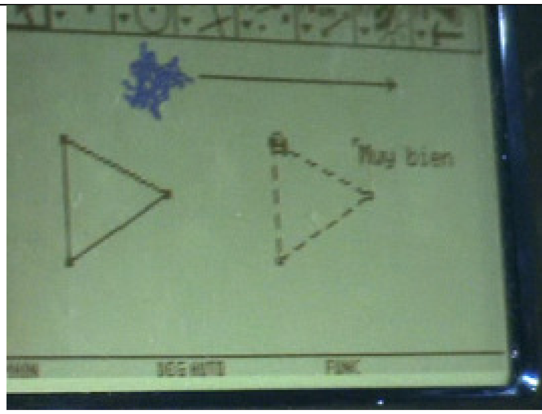
Primera tarea 'Debes mover el triángulo punteado para mostrar la posición que ocupará el triángulo continuo si hace ese movimiento'.

La siguiente secuencia de imágenes y diálogos nos dejan ver la estrategia aplicada para realizar la tarea, en la que se utilizan conocimientos ya adquiridos en las actividades anteriores. Más exactamente el relacionar directamente la longitud del vector con la distancia entre vértices correspondientes.

Tabla 12. Estrategia utilizada en la tarea

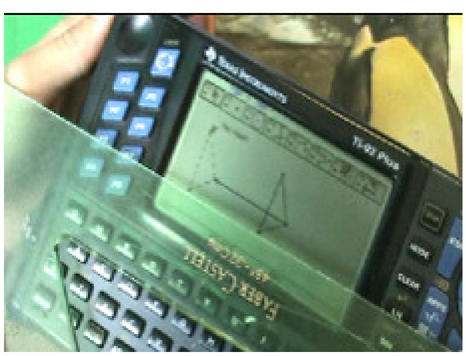
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Diálogo
P:-¿cómo tiene que ir el triángulo punteado?
E:-al revés</td>
</tr>
</table>

 	P: ¿por qué no ha salido el muy bien? E: porque está muy lejos (refiriéndose a que la distancia entre dos vértices correspondientes es mayor que la longitud del vector) y falta subirla un poquito.
	P:- ¿por qué le salió el muy bien ahora sí? E:-medí la distancia del vector, y entre los dos puntos, entre los dos vértices (se refiere a que la distancia entre los vértices corresponde a la longitud del vector)

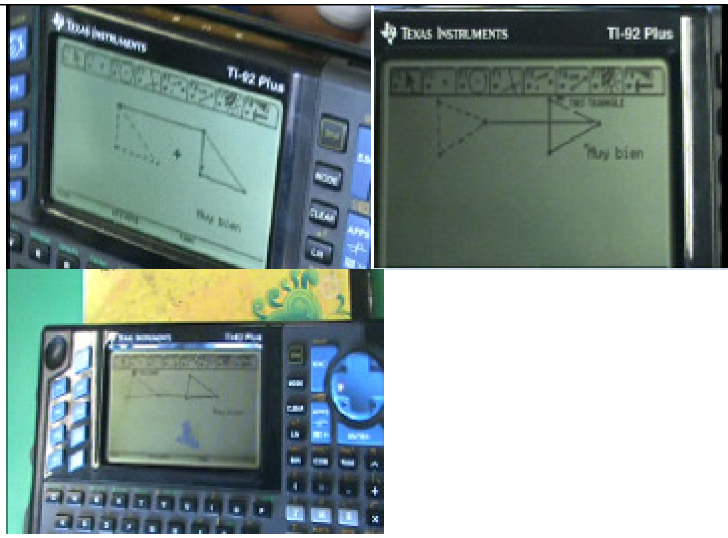
Algo muy importante que se observa en esta estrategia es que el estudiante no ubica el vector entre vértices correspondientes, sin embargo esto no lo hace ‘a ojo’, sino usando las propiedades. En el diálogo observamos como relaciona la magnitud del vector y la distancia entre puntos correspondientes; lo vemos cuando midió la longitud del vector utilizando una regla para saber la distancia correcta (magnitud); además cuando él dice ‘falta subirla un poquito’ está refiriéndose al paralelismo entre el vector y los segmentos que unen vértices correspondientes (dirección). De forma similar vemos en la siguiente foto la verificación del paralelismo entre vector y el segmento que une vértices correspondientes que hace un estudiante.

Tabla 13.

	*P:-¿qué está haciendo?* *E:-voy a ver si quedó bien.* En una figura que está aproximadamente correcta y que sin embargo no ha obtenido el ‘muy bien’, el estudiante recurre a una de las

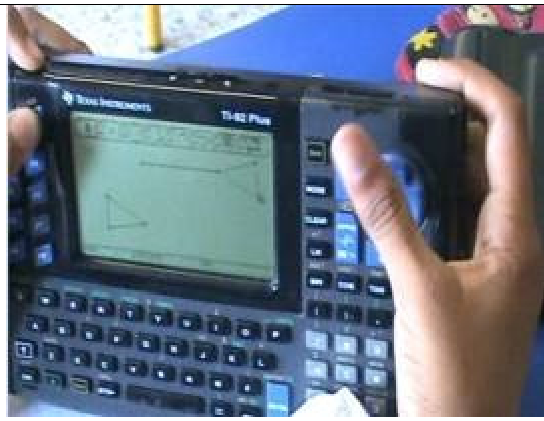
	propiedades de la traslación para verificar.

Tabla 14.


La misma figura dos con los triángulos ubicados de forma distinta, sin embargo la tarea se realiza usando la misma estrategia.

Por momentos los estudiantes confundieron el sentido de la traslación representado por la posición de los triángulos, pero ellos mismos rectificaron esta equivocación, porque ya tenían antecedentes obtenidos de la actividad anterior, en donde la punta de la flecha siempre debía ir hacia el triángulo punteado para obtener el muy bien.

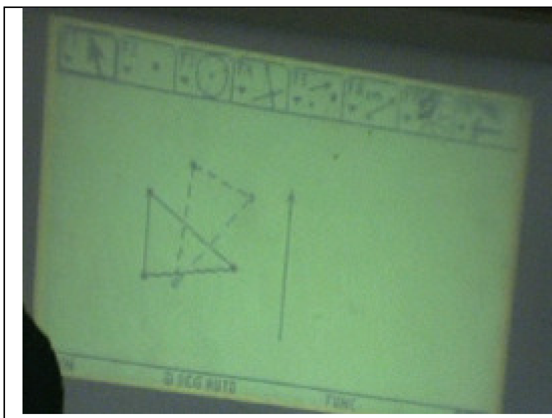
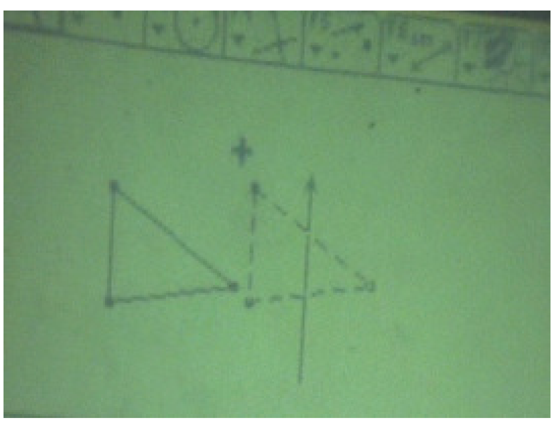
Tabla 15.

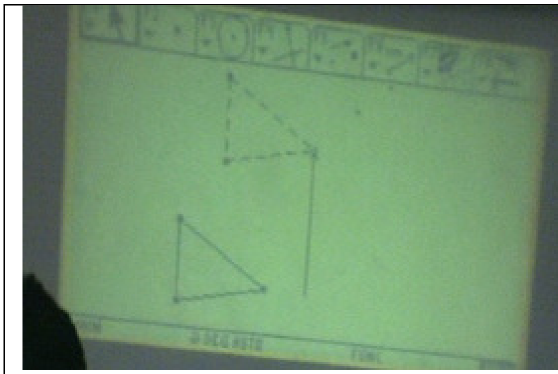
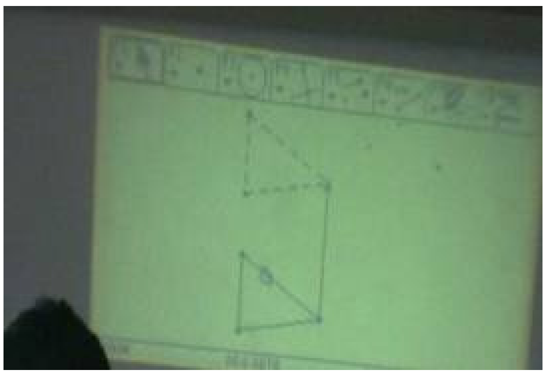
	El estudiante arrastra el triángulo punteado llevando uno de sus vértices hasta un extremo de la flecha. Como vemos en la figura este extremo no es el que le corresponde (el vector no apunta hacia el triángulo punteado).
 	Luego el estudiante modifica esta acción y ubica el triángulo punteado en el otro extremo del vector (el vector apunta hacia el triángulo punteado).

No se tiene registro de video de hasta donde el estudiante continuo modificando la figura y si obtuvo el 'muy bien' o no, lo que si podemos afirmar es que cambió sus acciones utilizando los conocimientos ya adquiridos durante las actividades anteriores, acerca de la forma correcta en la que deben estar los triángulos (sentido, magnitud y dirección).

SECUENCIA

Tabla 16.

 	Como se había previsto la mayoría de los estudiantes aplicó nuevamente la estrategia de girar el triángulo punteado para que quedara con los lados paralelos a los del triángulo continuo (propiedad de la traslación descubierta por ellos durante el desarrollo de las actividades anteriores).

 	Luego arrastrar los triángulos para ubicar el vector entre vértices correspondientes. De esta forma obtener el ‘muy bien’ que en este caso es un punto en la pantalla que equivale a lo mismo.

Esta estrategia es similar a la de la actividad anterior (ubicar el vector entre vértices correspondientes) aunque tuvieron que modificarla debido a que la orientación de los triángulos era distinta, y el vector solo podía trasladarse.

Vemos que escribieron en sus cuadernos las acciones necesarias para obtener la ubicación correcta de los triángulos. Con las primeras figuras son explícitos al decir lo que hacían, pero a medida que avanzaban en la serie redujeron esta descripción, lo que muestra que ya no están tan interesados en lo que había que hacer, sino en hacerlo rápidamente, como lo habíamos previsto.

Foto 21.

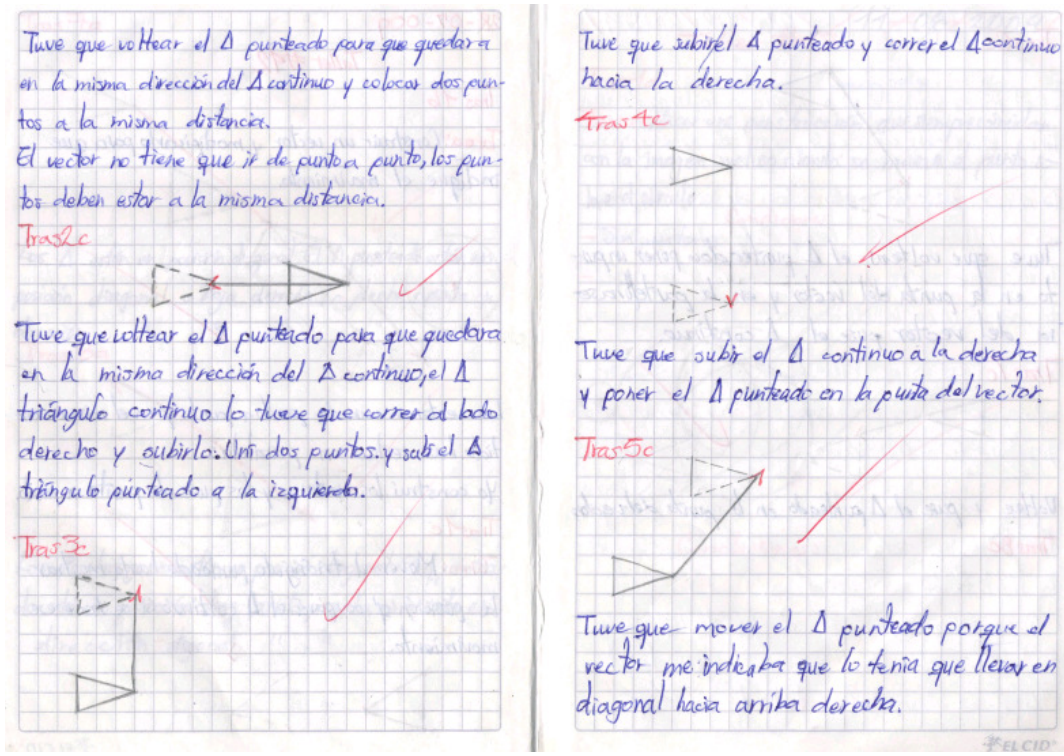
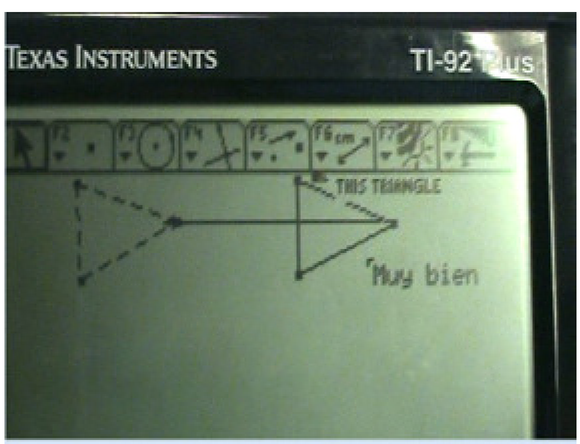
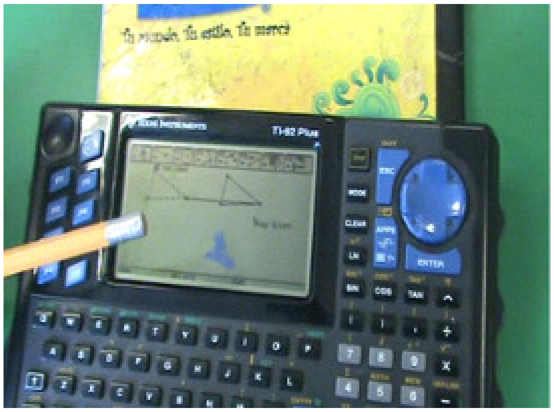
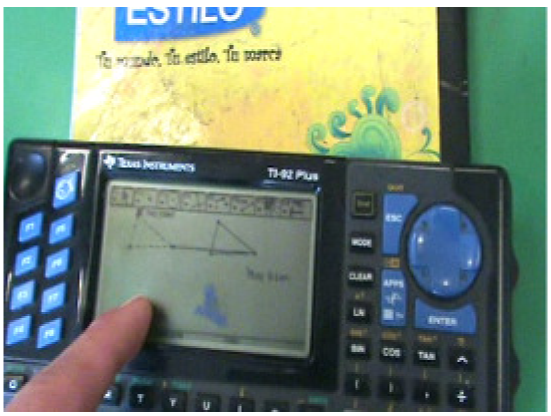


Tabla 17.

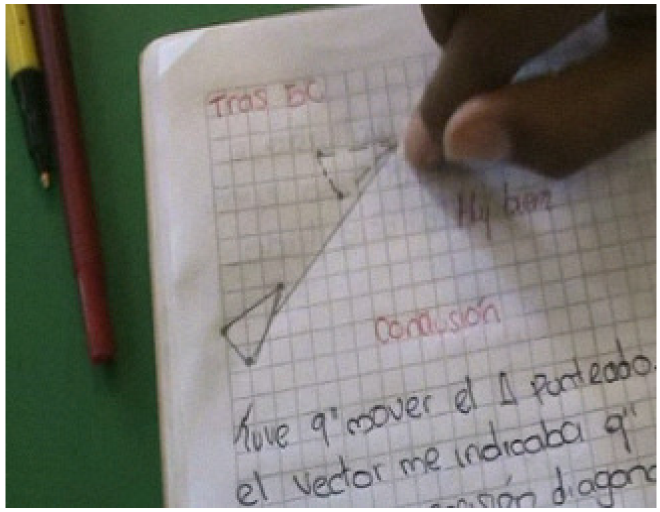
 	*Dialogo* *P:-¿por qué el triángulo punteado no está girado?* *E:-porque eso pasaba en las anteriores figuras de simax, con el simétrico.* *P:-¿por qué el triángulo punteado no está más lejos?* *E:-porque tiene que quedar a la distancia del vector.* *P:-¿Qué determina esa distancia?* *E:-De punto a punto.*

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>P:-¿por qué el triángulo punteado está ahí y no está aquí?
P:-¿qué pasaría si el triángulo punteado estuviera aquí? ¿Será que el letrero aparecería? (refiriéndose al ‘muy bien’)
E:- sí, pero bajando este (refiriéndose al triángulo continuo), pero los dos tendrían que quedar a la distancia del vector.
…
P:- ¿este qué movimiento es?
E:- traslación
P:- ¿qué es lo más importante en la traslación?
E:- el vector</td>
</tr>
</table>

Este diálogo inicia con la comparación de dos movimientos, simetría y traslación, que se diferencian en la orientación de los triángulos. Además, el estudiante tiene identificada la relación entre la dirección del vector y la posición de los triángulos; este hecho se evidencia cuando se le pregunta si teniendo ese mismo vector el triángulo punteado estuviera más abajo, a lo que él responde que sería necesario que el triángulo continuo también estuviera más abajo, eso sí conservando la distancia del vector.

Foto 22.



P:- ¿de dónde a dónde va la flecha?

E:- de este punto a este, es que acá se me corrió un poquito

P: -¿será que este se parece al que está en la calculadora?

E:- un poquito, sino que este va diagonal hacia arriba y el otro diagonal hacia abajo (el estudiante compara las figuras cinco y seis).

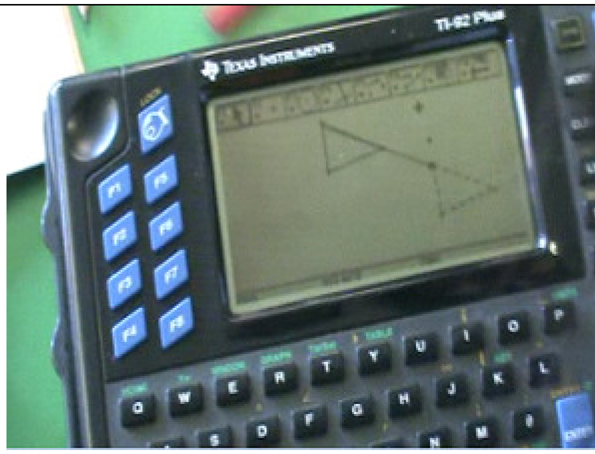
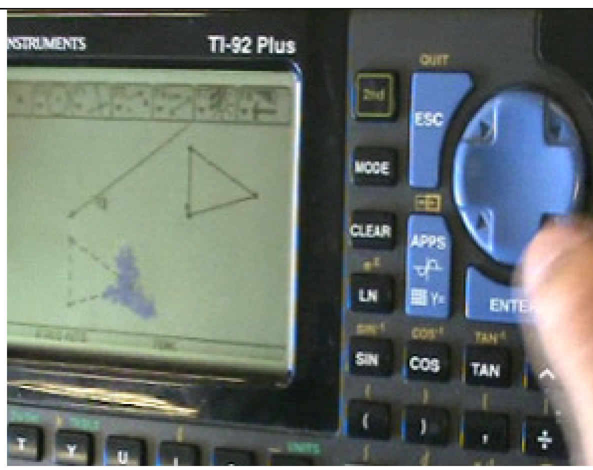
P:- ¿si esto (refiriéndose al dibujo de la estudiante) estuviera en la calculadora aparecería el 'muy bien'?

E: no, porque el extremo de este vértice tenía que quedar acá y el otro acá (señalando vértices correspondientes)

En la foto anterior extraída de uno de los cuadernos de los estudiantes notamos un error en el dibujo, vemos el vector no está ubicado entre vértices correspondientes, sin embargo cuando le preguntamos sobre esto, él responde que: *'Ahí está mal'* e indica con su mano vértices correspondientes entre los cuales debería ir el vector.

La profesora hizo que algunos estudiantes describieran figuras y también las compararan con las anteriores como vemos en las siguientes tablas:

Tabla 18.

	*Diálogo* *P:-¿hacia dónde apunta el vector?* *E:-diagonal hacia abajo* *P:-diagonal y que más… ¿esta qué mano es?* *E:-diagonal abajo derecha.* *P:-¿y el de la anterior figura, hacia dónde apuntaba?* *E:-hacia la izquierda… diagonal hacia abajo.*
	*P:- ¿hacia dónde apunta el vector?* *E:-diagonal, izquierda hacia abajo.* *P:-¿hacia qué otras partes puede apuntar el vector?* *E:-diagonal abajo, diagonal arriba, vertical arriba y vertical abajo.* *P: mueva el vector, pero antes de moverlo cree que el muy bien se va a desaparecer.* *E:-no porque la distancia ya está tomada.*

Puesta en común

En la puesta en común la profesora inició diciendo que el vector indica el movimiento que realiza el triángulo continuo. Después les pidió que describieran el vector en cada una de las figuras. Los estudiantes ya usan las palabras correctas para referirse a la dirección y el sentido (resaltadas en el diálogo).

P:-quién indicaba el movimiento en este, en este…

E:-el vector.

P:- el vector.

P:- en la primera figura, ¿hacia dónde apuntaba el vector?

*E:-**izquierda.***

*E:-**derecha.***

P:-miren el cuaderno, no se pongan a adivinar.

*E:-**derecha.***

P:-Estaba apuntando hacia la derecha en ¿qué posición?

*E:-**horizontal.***

P:-y en la tercera ¿hacia dónde apuntaba el vector?

E:-hacia arriba.

P:-¿en qué posición?

*E:-**vertical.***

P:- o sea que el triángulo punteado ¿hacia donde tenían que llevarlo?

*E:-Hacia **arriba***

P:-¿Por qué hacia arriba?

E:-Porque el vector está indicando hacia arriba.

Podemos ver que se identifica que el sentido de la traslación la da el vector, porque los estudiantes recuerdan la tarea: **deben mover el triángulo punteado para mostrar la posición que ocupará el triángulo continuo si hace ese movimiento**.

Diálogo

P:-¿qué era lo que tenían que hacer?

E1:-colocar el triángulo en la dirección del vector. (Haciendo referencia al triángulo punteado)

E2:-el vector indicaba a donde tenía que ir triángulo punteado.

En el siguiente diálogo encontramos varios elementos de una situación a-didáctica como son: el conocimiento, la intención, las acciones y retroacciones del medio.

Diálogo

P:-¿cómo movían el triángulo punteado?

E1:-con un punto del vértice se podía dar giros y con el otro podía correr

E2:-trasladar

…

P:- ¿y cuánta distancia tenían que trasladar?

E2:-la distancia del vector

P:-La distancia la daba el vector.

P:-¿Ustedes cómo hicieron ese trabajo?

E1:-Moviendo el punteado.

E2:-Moviendo los puntos del triángulo punteado.

P:-¿Listo pero cómo lo hicieron? ¿Les tocó usar una herramienta?

E:-No.

P:-Entonces como no usaron ninguna herramienta, uno dice lo hicieron 'a ojo' y les salía las palabras…

E:-Muy bien o un puntico

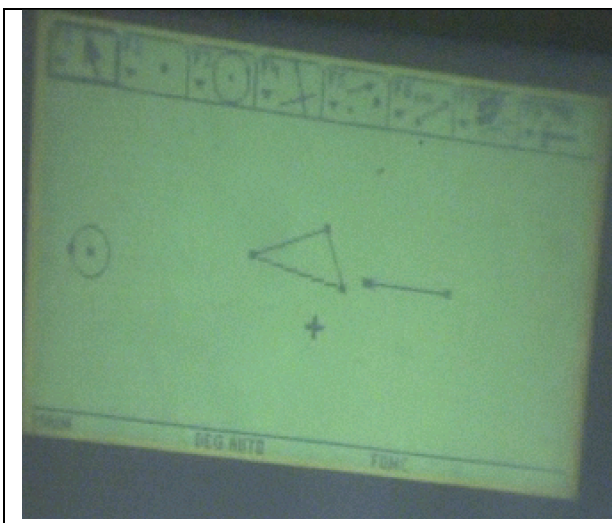
P:-Eso les indicaba que ya habían terminado.

En la segunda línea del diálogo vemos que los estudiantes describen que al arrastrar los vértices (acción) se modifica la posición de los triángulos (retroacción). En la quinta línea leemos 'la distancia del vector' como respuesta de un estudiante a la pregunta que hace la profesora sobre '¿cuánta distancia había que trasladar?', corresponde a la *magnitud de la traslación*, que es parte del conocimiento que ya han adquirido. Recordemos que en las ocho primeras figuras de esta actividad cuando se realizaba la tarea correctamente se obtenía, como dice el diálogo 'el muy bien o un puntico' y gracias a esta retroacción el estudiante sabía que había logrado su intención.

Segunda tarea: logrando la construcción exacta

Luego que la profesora pidiera a los estudiantes que recordaran la posición final de los triángulos en algunas de las figuras de esta actividad, explica que ahora van a realizar una construcción y empieza por presentar la figura para esta tarea.

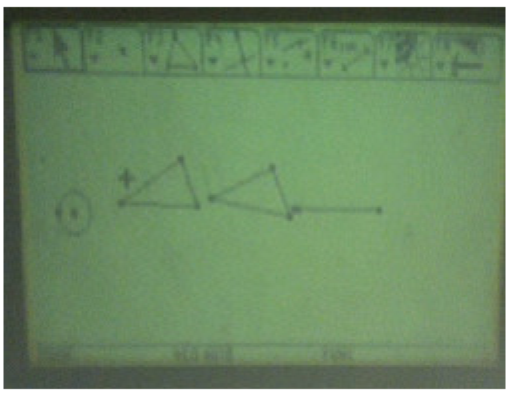
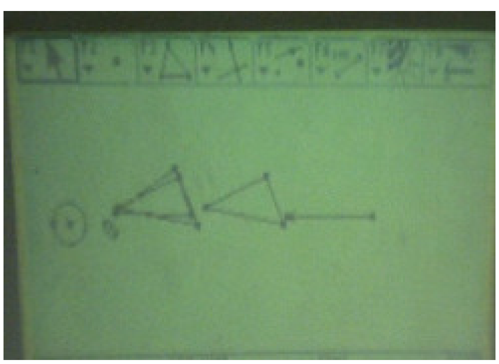
Tabla 19.

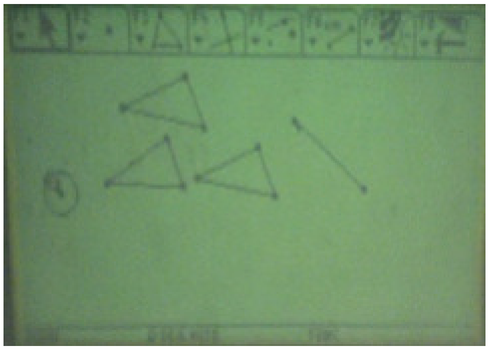
	*Diálogo* *P:-¿Qué objetos tenemos en la pantalla?* *E:-Un triángulo, un vector y un círculo.* *P:-¿Qué creen que nos falta hacer?* *E:-Otro triángulo.* *E2:- un triángulo punteado.* *P:-Y dónde creen que debemos colocar ese otro triángulo.* *E:-En la otra…* *P:-Miren, miren, miren al tablero.* *E:-En el otro extremo.*

	E:-Hacia el lado izquierdo del vector.

En el diálogo anterior podemos ver que los estudiantes responden la pregunta de la profesora sobre el lugar que debería ocupar el triángulo que falta (punteado), para representar el movimiento indicado por el vector.

Tabla 20.

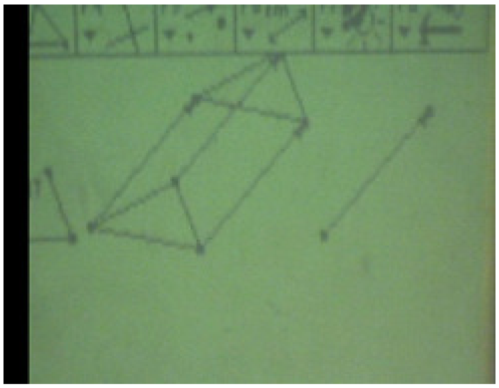
	La profesora pide a un estudiante que dibuje el triángulo que falta. *P:-¿Quién quiere dibujar el triángulo que se movió?* Como esperábamos realizó la construcción de manera aproximada en otras palabras 'a ojo'.
	Verificación uno A continuación la profesora le pide al estudiante que use la herramienta traslación y realice la traslación del triángulo inicial por el vector, y aparece un nuevo triángulo: *P:-Vamos a comprobar que este trabajo nos quedó bien. Miren lo que sucedió* *E:-Está corrido un poquitico.* *E2:-Ay, le quedó mal.*

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Verificación dos
Luego pide que mueva el punto sobre el círculo:
P:-Ahora movamos el punto sobre el círculo, y miren lo que pasa.
P:-¿Qué pasó con el triángulo que él pintó?
E:-Que quedó mal.
P:-¿Qué es lo que debemos hacer?
E:-Que se mueva.
P:-¿Que se mueva de acuerdo a quién?
E:-Al vector.</td>
</tr>
</table>

La primera construcción realizada por los estudiantes utiliza los conocimientos que ya tienen sobre traslación, porque vemos que el sentido es correcto, la dirección y la magnitud es aproximada, así que para haber sido realizada 'a ojo' está bien, sin embargo cuando se le aplican las verificaciones, en especial la segunda, ellos reconocen que la construcción ya no cumple con las características del vector y que para que esté correcta, el triángulo que ellos construyen debe moverse lo mismo que el construido por Cabri.

Recordando la novena figura en la actividad anterior, la profesora sugiere dibujar vectores entre vértices correspondientes del triángulo continuo y el triángulo construido con la herramienta traslación, y les pide que comparen los tres vectores que hicieron con el que ya tenía la figura inicialmente (las construcciones de las dos tablas siguientes fueron hechas por un estudiante quien hacía las instrucciones de los demás estudiantes y la profesora).

Tabla 21.

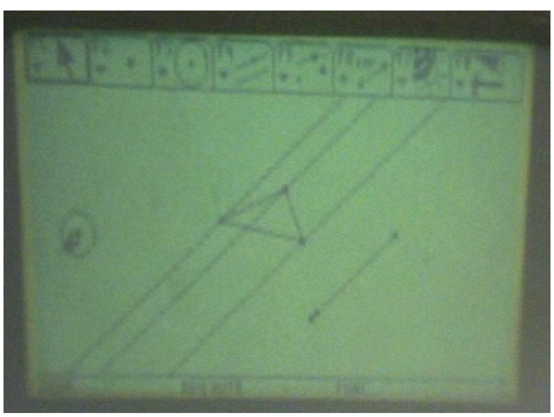
	*Diálogo* *P:-¿Qué posición tienen esos vectores con respecto a este?(mientras se mueve el punto sobre el círculo)* *P:-¿Cómo son?* *E:- Paralelos.* *P:-¿Paralelos a quién?* *E:- Al vector.* *P:- Esta tarea nos queda bien, pero hay condiciones para hacer este trabajo* *P:-Necesitamos hacer un triángulo que siempre coincida con la imagen incluso cuando se mueva el punto sobre el círculo, pero tenemos condiciones que son: sin vectores y sin traslación.* *P:-si no puedo pintar vectores, entonces ¿qué puedo pintar para hacer los puntos y pintar el triángulo? ¿Qué podría pintar?* *E:- círculos* *E:- líneas* *P:- ¿y esas líneas cómo son?* *Es: Las iguales al vector (iguales en dirección)* *P:-¿Esas líneas me mantienen qué?* *Es:-La misma distancia con el vector* *P:-¿La misma distancia?* *E:-No, la misma posición (la misma*

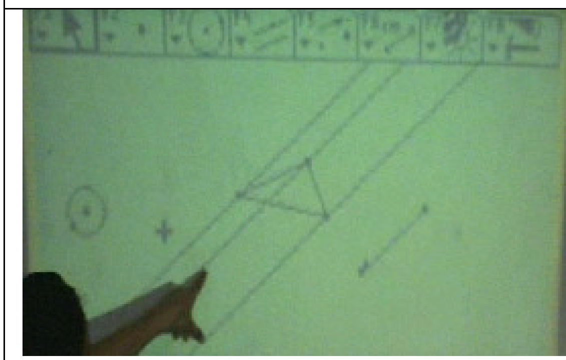
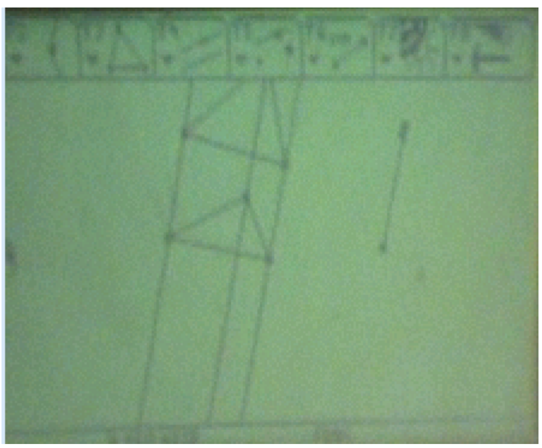
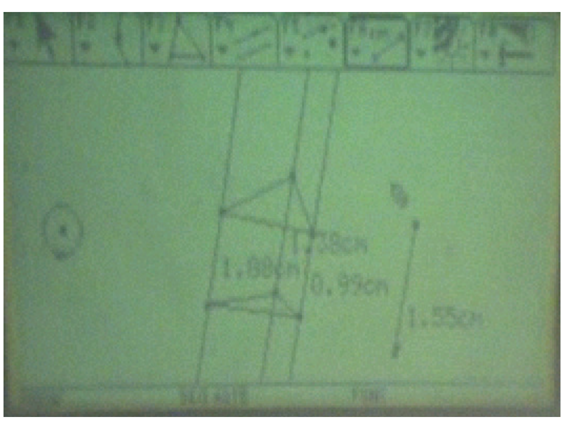
	dirección) *P:- Sí, la misma posición.* *E:-Como ustedes saben una condición es que esas líneas sean paralelas, vamos a hacerlo con paralelas.*

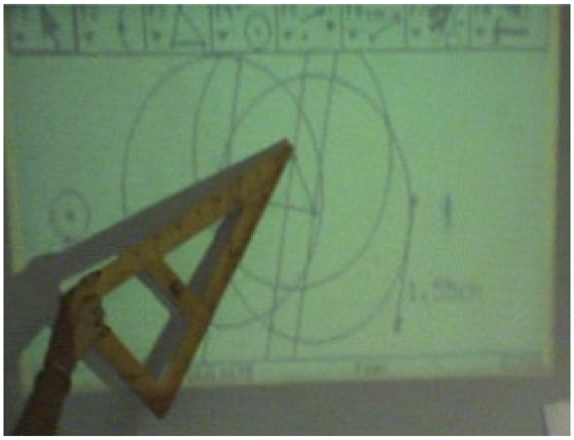
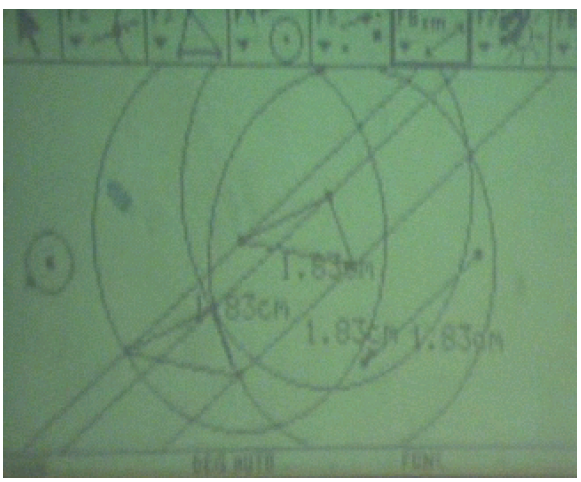
Identificar la necesidad de trazar ‘rectas paralelas’ por los vértices del triángulo continuo es producto del trabajo realizado en todas las actividades, sumado a la observación que sugirió la profesora en esta última figura. La profesora les muestra la herramienta ‘recta paralela’ y les enseña a construir rectas paralelas al vector por los tres vértices del triángulo.

A continuación el proceso de construir el triángulo imagen sigue:

Tabla 22.

	*P:-¿Y ahora qué tengo que hacer?* *E:-Los puntos para el triángulo* *P:-Vamos a pintar los puntos para el triángulo, y cómo lo hacíamos antes? (se refiere a que en las ocho figuras anteriores ubicaban los vértices del triángulo punteado de forma aproximada)* *E:-Calculando* *E:-Con la mente* *P:-‘A ojo’* *P:-¿Qué debemos calcular?* *E:-La distancia*

	P:-¿Cuál? *E:-Del vector* *P:-¿Quién me viene a señalar qué distancia?*
  	Los estudiantes realizan la construcción ubicando los puntos de los vértices sobre las rectas paralelas ‘a ojo’, pero cuando aplican la verificación dos (girar el punto sobre el círculo) la figura se deforma. *P:-Mire lo que pasa, ¿siguen siendo qué?* *E:-Paralelas* *P:-Pero, ¿qué será lo que no nos sirve?* *E:-El triángulo* *E:-La distancia* *P:-Vamos a comprobarlo.* Luego se toman medidas entre vértices correspondientes y se comparan con la longitud del vector, y se muestra que son diferentes, dando razón a lo que decían los estudiantes. Porque ellos dijeron que para ubicar cada punto la distancia debía ser la

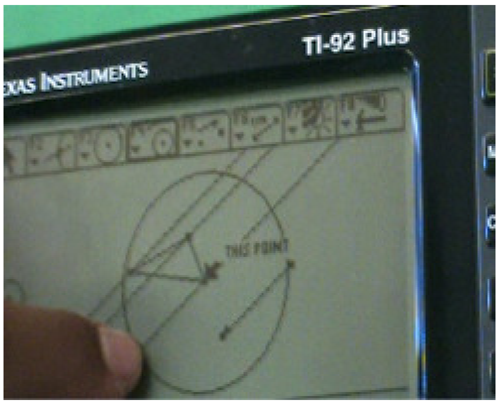
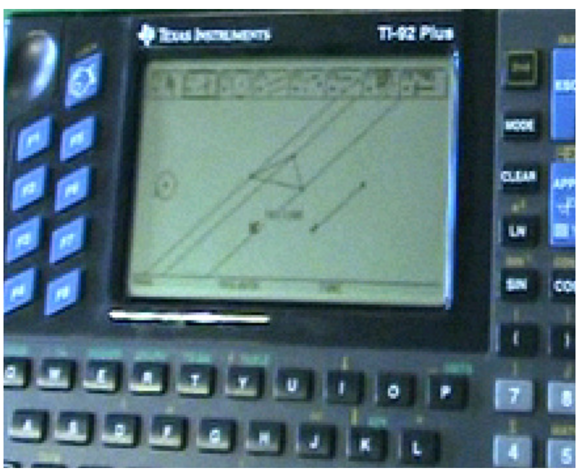
	misma del vector y vemos que las tres medidas son diferentes.
  	*P:-La distancia del vector debe ser la misma que de punto a punto.* *P:-¿Ahora qué elemento nos garantiza la distancia?* *E.-El círculo* *P: -Hijos el círculo es el único elemento en geometría que me sirve para conservar la distancia. Recordemos que la distancia del centro a cualquier punto del círculo es la misma (los estudiantes ya habían trabajado este concepto en simetría axial).* *P:-Todos los puntos del círculo son equidistantes.* *P:- ¿qué herramienta se utiliza para hacer círculos?* *E:-El compás.* *P:-Entonces vamos a usar la herramienta compás. ¿De qué tamaño quiero pintar los círculos? ¿Del tamaño de quién?* *E:-Del vector.* *P:-Bien, porque esa es la distancia que tengo que conservar. ¿De qué punto a qué punto?*

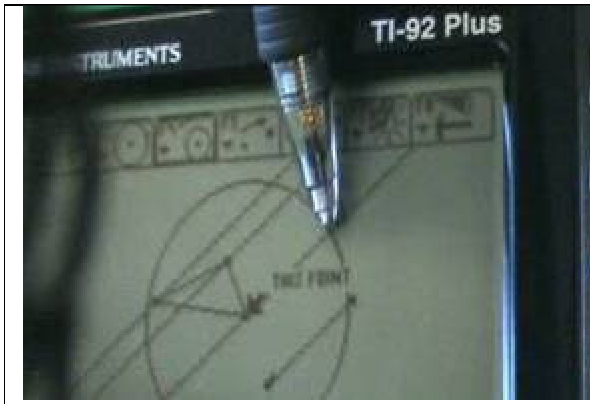
	E:-De este punto a este punto (indicando los extremos del vector) *P:- ¿Y a qué punto necesitan conservar esa distancia?* *E:- A cualquiera de los puntos del triángulo (los vértices del triángulo).* **…** *P:-¿después de hacer los círculos dónde ubicamos el primer punto del triángulo?* *P:-miren donde está la flecha del vector. El triángulo debe estar abajo.* El estudiante que manipulaba sigue las sugerencias de los compañeros para ubicar los puntos correspondientes y construye el triángulo. Por último comprueban la propiedad de la magnitud como se observa en la imagen.

Los estudiantes identificaron las condiciones que debía cumplir la construcción del triángulo (que no se desbarate cuando se aplique las verificaciones), pero no conocían las herramientas que tiene Cabri (recta paralela y compás) para hacerlo y vemos que ese es el trabajo que realizó la profesora.

Luego de recibir este ‘nuevo conocimiento’ los estudiantes empiezan a elaborar cada uno la construcción, y tenemos ahora a uno de ellos justificando el uso de cada una de las herramientas.

Tabla 23.

 	*P:-¿Cuál es la tarea que debe hacer?* *E:-Sacar el otro triángulo* *P:-Y hasta ahora ¿qué ha hecho?* *E:-Puse las líneas paralelas,* *P:- ¿Por qué paralelas o paralelas a quién?* *E:-al vector* *P:-¿y por qué al vector?* *E:-porque el vector se mueve y van igual que el vector.* *P:-o sea que conservan siempre la misma posición que el vector* *P:-y ahora el triángulo que usted debe construir debe estar a una distancia, ¿cierto? ¿Quién da esa distancia?, ¿de dónde saca esa distancia?* *E:-Del vector* *P:-Y con qué herramienta se ponía esa distancia* *E:-Con el compás* *P:-¿Dónde deben estar los centros, y cuántas debe hacer?* *E:-En los vértices, tres.*

	*P:-Y si hubiera un cuadrado ¿cuántas tendría que hacer?* *E:-Cuatro, porque tiene cuatro lados.* *…* *P:-¿dónde debe quedar el primer punto del triángulo que va a dibujar?* *E:-Ahí* *P:-¿Por qué no aquí?* *E.-Porque el vector está apuntando hacia abajo.*

Identificamos las tres propiedades de la traslación en el diálogo anterior:

Dirección

Cuando el estudiantes *dice 'cuando el vector se mueve (las líneas) van igual que el vector'* está hablando del paralelismo entre los segmentos que unen vértices correspondientes y el vector.

Magnitud

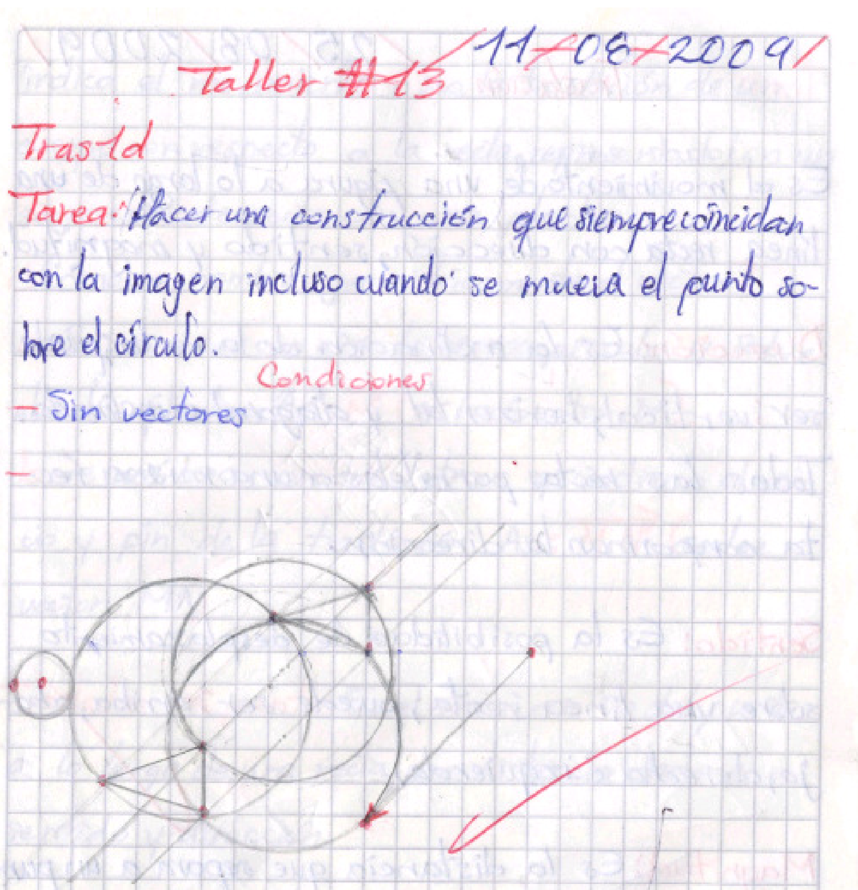
Cuando el estudiante responde a las preguntas de la profesora '*¿Quién da esa distancia?, ¿de dónde saca esa distancia? responde 'Del vector'* se refiere a que la distancia entre cada vértice del triángulo y su correspondiente debe ser la misma que la longitud del vector.

Sentido

Para hallar los tres puntos del triángulo nuevo, es necesario hacer un círculo y una recta por cada vértice del triángulo original, estos se cortan en dos puntos, dando la posibilidad de escoger, luego de que el estudiante selecciona el punto la profesora le pregunta '*¿Por qué no aquí?*'(Refiriéndose al otro punto de intersección) responde *'porque el vector está apuntando hacia abajo',* no está hablando de otra cosa sino del sentido.

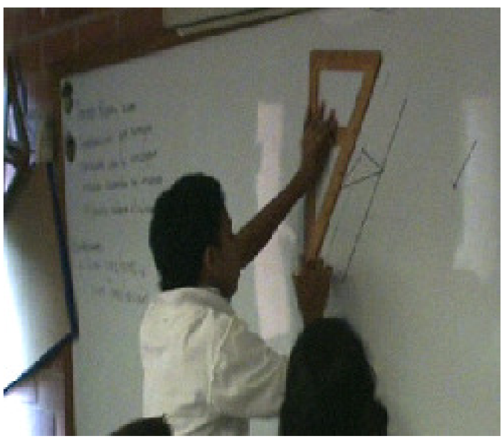
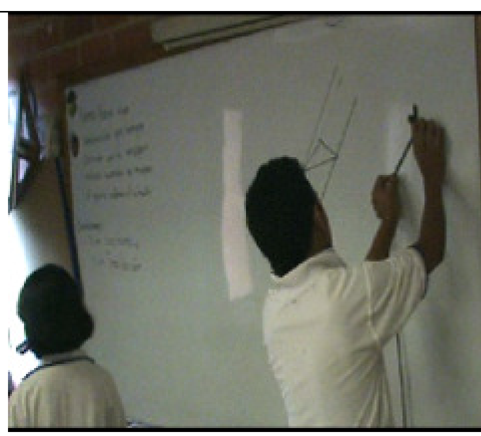
En sus cuadernos también se realiza la construcción de la novena figura, usando regla y compás, como lo habíamos previsto.

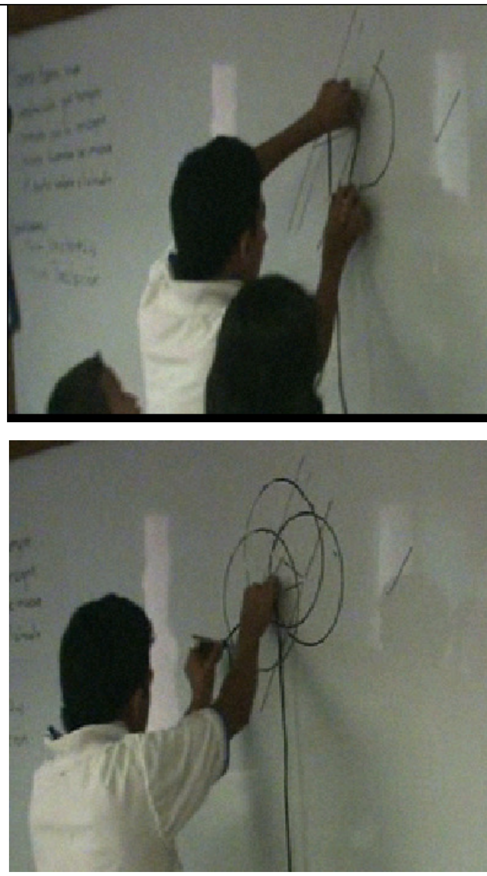
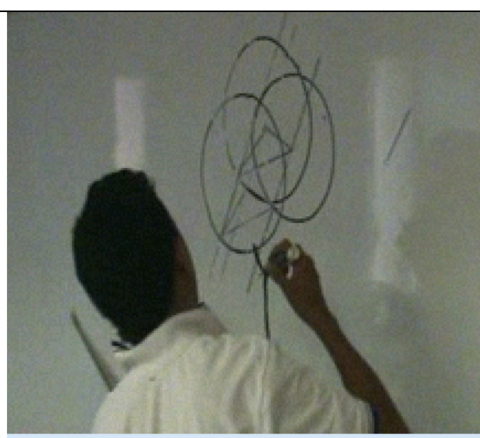
Foto 23.



Por último con una construcción en el tablero por parte tres estudiantes, se pudo verificar el aprendizaje que hasta ahora ellos habían adquirido en gran parte por la interacción con el medio en las situaciones adidácticas realizadas.

Tabla 24.

	Como el estudiante no sabía (y tampoco tenía las herramientas) como trazar rectas paralelas utilizando escuadras tendría que trazarlas de manera aproximada por esto observó la dirección del vector.
	Trazó rectas paralelas al vector por cada uno de los vértices del triángulo. Rectas sobre las cuales se deben ubicar los vértices del nuevo triángulo.
	Ahora utilizando una cuerda como compás tomó la magnitud del vector necesaria para hallar la posición exacta de los vértices del nuevo triángulo.

 **Foto 1**	Con esta magnitud traza círculos con centro en cada uno de los vértices del triángulo.
	Al final dibuja el nuevo triángulo ubicando cada vértice en la intersección correcta dada por el sentido del vector.

En esta serie de imágenes se ve la construcción que hacen unos estudiantes de una traslación, aunque para este momento la profesora no ha definido lo que es una traslación (esto se hará en la institucionalización), ellos la relacionan con el movimiento que hace un triángulo determinado por la flecha. La recursividad de ellos es notoria, porque se improvisan herramientas geométricas como el compás. La dificultad principal se ve en la construcción de las rectas paralelas, sin embargo el trabajo es aceptable.

En estas imágenes vemos a uno de los estudiantes más inquietos de la clase trabajando activamente. Podríamos decir que estas actividades han sido muy productivas, dados los resultados.

Conclusiones

En cada una de las estrategias usadas por los estudiantes para realizar las tareas vemos que aplicaron las propiedades de la traslación, por ejemplo: cuando midieron el vector, y esa distancia fue tenida en cuenta para determinar la separación entre un triángulo y su imagen; cuando identificaron que los vectores dibujados entre vértices correspondientes eran paralelos y además que el lugar hacia el cual apunta la flecha determina el lado correcto hacia donde debe ir el triángulo imagen.

3.5 INSTITUCIONALIZACIÓN

Las cuatro actividades tratadas anteriormente, son un conjunto de situaciones adidácticas que han permitido a los estudiantes, como resultado de su experiencia personal, obtener una buena representación del concepto de traslación. Esto se ha evidenciado en las acciones que han realizado para cumplir con las tareas, en los argumentos presentados (verbales o escritos) para justificarlas, y en las herramientas geométricas utilizadas en sus construcciones.

Estas producciones (conocimientos) están contextualizadas en estas situaciones adidácticas, y necesitan ser descontextualizadas; es decir, relacionadas con el saber que se quiere enseñar (concepto de traslación), recibir un estatus cultural; esto se conoce como *institucionalización*, y está a cargo del profesor, quien representa la institución y tiene el saber en el salón de clase.

El profesor en la institucionalización debe:

"…tomar nota de lo que los alumnos hacen, describir lo que sucede y que está en relación con el conocimiento buscado, darle un estatus a los sucesos de la clase, como resultados de los alumnos y como resultados del profesor, asumir un objeto de enseñanza, identificarlo, relacionar esas producciones con los conocimientos de los demás (culturales, o del programa) indicar para quien pueden servir.[12]"

La institucionalización del concepto de traslación se desarrolló en tres etapas:

-En la primera, la profesora, una vez terminadas las cuatro actividades de traslación, suspendió el trabajo de los estudiantes con las calculadoras y desarrolló la clase haciendo preguntas sobre algunas de las tareas

-En la segunda, la profesora hizo un resumen de los fenómenos visuales identificados por los estudiantes de las propiedades de la traslación para ser llevados al lenguaje formal, y copiados en sus cuadernos. Durante esta etapa se construyó el concepto de traslación.

-Y en la última, los estudiantes realizaron en sus cuadernos ejercicios de aplicación del concepto de traslación.

[12] La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas. Pág. 175.

PRIMERA ETAPA

Primera actividad

P:- Miremos la primera actividad, si no tiene el cuaderno vamos a recordar.

E:-. La primera tarea era ***llevar el triángulo grueso al cuadrado.***

P:- Sí, llevar el triángulo grueso al cuadrado.

P:- Les pregunto algo de este taller ***¿una tarea era llevar todos los gruesos al cuadrado?***

E:- No se podía, siempre. Siempre dejaban la misma distancia. (Representa con los brazos la separación entre los triángulos).

P:- No se podía porque siempre conservaban la misma distancia.

P:- Como siempre conservaban la misma distancia nunca pudimos llevar los dos a uno solo (refiriéndose al cuadrado).

Segunda actividad

P-. De la primera figura de la segunda actividad, como ***superponían el grueso con el punteado*** *se acuerdan. ¿Cómo superponían esos triángulos el uno con el otro?*

P:-. Con un punto que hacían.

E:-. Lo giraba (refiriéndose al triángulo delgado).

P:- Y con el otro

E:-. Se movía

P:-Lo trasladaba

Tercera actividad

P:- Hijos cuando trabajaron las figuras de la tercera actividad, había un elemento que siempre les decía que hacer.

E:- El vector

P:- Siempre que habrían la calculadora ustedes miraban el vector y decían nos toca llevar la figura para tal lado, para tal lado, ¿por qué?

E:- Porque el vector siempre tenía que ir señalando el triángulo punteado

E2:-Yo profe

P:-El vector con que señalaba el triangulo punteado

E:-con la flecha

E2:- A…con la flecha

P:-El vector tiene una flecha que me indica para donde debo ir

P:-¿Qué es lo que me indica el vector, un qué?

E:-.Una distancia

E2:-Una dirección

E3:- Para donde va el punteado

E4:- De punto a punto

P:- El vector me indica para donde me debo mover, que me indica el vector un movimiento

P:- Siempre en la calculadora ustedes veían que yo tenía que mover el triángulo

Diálogo

P:-¿Recuerdan que hicieron en la novena figura? Busquen el dibujo

E:- Sí, ***construir un vector y modificarlo para que indique el movimiento*** *(la niña lee de su cuaderno)*

P:-Sí construir un vector que represente el movimiento

P:-Y a que construcción llegaron, cuantos vectores tuvieron que hacer

E:- Tres

P:-E ir de donde a donde

E:- De punto a punto

P:-Si de punto a punto, el punto de la figura original con el punto de la figura de la imagen que se trasladaba.

P:- Entonces el vector era el que me indicaba ¿qué?

E:- La posición

P:- Era el que me decía que tarea hacer

Cuarta actividad

P:- Acá en las figuras de esta actividad teníamos un vector para calcular los movimientos que había hecho el triángulo

P:-¿Qué pasaba en estas figuras miremos?

E:- Mover el triángulo punteado

P:- Entonces a ustedes le daban un vector así, así o así (los dibuja en el tablero) y ustedes tenían que mover el triangulo punteado. ¿Calculando qué?

E:-La distancia

P:-¿Cómo?

P:-A ojo, a ojo

P:-Cuando ya pasaron a la novena figura, ¿qué sucedió?

E:-Tenían que hacer las líneas paralelas y unirlas hasta formar un triángulo

P:- Muy bien tenían que hacer primero las líneas paralelas. Había un triangulo, había un vector y había un punto sobre el circulo ¿que tenían que hacer ahí?

*P:- **Primero construir el triángulo de tal manera que al mover el punto sobre el círculo siempre fuera imagen de ese triangulo que estaba ahí***

P:- ¿Qué tuvieron que trazar primero?

E:-Los puntos

E1:- Las líneas paralelas

E2:-Después hacer el triángulo

P:-Después de las líneas paralelas hicieron

E:- Un círculo

P:-Unos puntos

P:-Hicieron puntos sobre las paralelas mirando el tamaño de quien

E:- A ojo

P:-Mirando el tamaño de quien….del vector

P:-¿Cuándo ubicamos el triangulo ahí que pasó? ¿Cuándo movimos el punto que pasó?

E:- Que tenían que ser las mismas líneas

P:- Pero las líneas paralelas ya las habían pintado que pasó

P:-Entonces qué fue lo que nos falló

E:-Que tenía que ser la misma distancia

P:-¿La misma distancia?

P:- Se acuerdan que midieron y el vector les media algo y la distancia de donde a donde

E:- De punto a punto

P:- Y de punto a punto les daba diferente

E:-Un cordón

E2:-Un compás

P:-Con el compás que hicimos, de que tamaño era la abertura

P:-¿Del tamaño de quien?

E:-Del vector

P:-¿Y después de que tomaba el tamaño del vector a dónde iba?

E:-Al punto del triángulo

P:-¿Cuántas veces tuve que medir?

Es:-Tres

P:-Cuando ya hice tres círculos que sucedió. ¿Qué ubiqué en esos círculos?

E:- Los puntos del triángulo

P:-Los puntos de que…los puntos de intersección

E:-Entre los círculos y el triángulo

E2:- Entre los círculos y las paralelas

P:-Entre los círculos y las líneas paralelas encontramos los puntos de intersección. Luego ¿con esos puntos que hice?

E:-El triángulo

P:-y ya hice la construcción exacta

En este repaso que la profesora hace de cada una de las tareas en las cuatro actividades, vemos las propiedades de la traslación que los estudiantes identificaron y explicitaron con sus propias palabras.

SEGUNDA ETAPA

A continuación la profesora les pide a los estudiantes que hagan una conclusión general sobre todas las actividades.

Diálogo

P:- Todos en este trabajo hecho, había siempre una figura que me indicaba que hacer

P:-.La flechita es horizontal y ¿hacia dónde apunta? (dibuja el vector en el tablero)

E:- Derecha

P:-¿Qué dirección es esta? (señalando en el tablero los vectores que dibujó)

E:-Vertical

P:-Y la flecha apunta

E:-Hacia arriba

P:- ¿Y qué dirección es esta?

E:-Diagonal hacia arriba

*P:-Todo el trabajo que hicimos…**díganme una conclusión general,** ¿qué fue lo hicimos siempre?*

E:- Medir el vector

E2:- Sacar triángulos

E3:- Mover triángulos

P:-Bien mover triángulos, mover un triángulo, porque estábamos haciendo puros ejercicios de traslación.

*P:-Entonces pensemos haber ¿**qué es traslación?***

E:-Nos trasladamos

P:- Haber piensen todo lo que necesito para hacer una traslación.

E1: Los triángulos de un lado a otro

E2:- Mover un punto de un lugar a otro

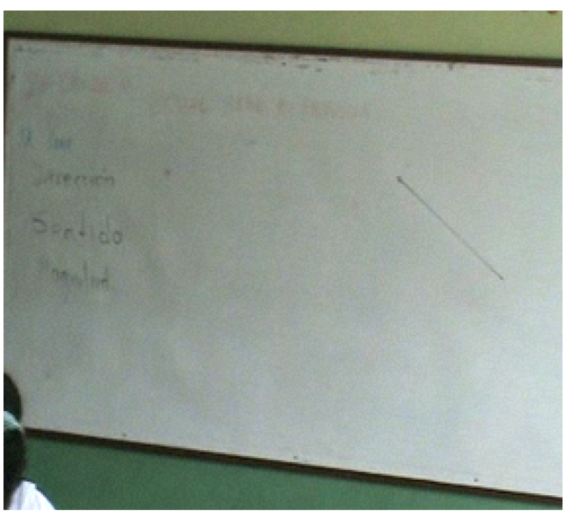
E3:-. No solo un punto y un triangulo sino cualquier objeto….

A pesar de que la profesora recuerda algunos de los conocimientos adquiridos durante las actividades realizadas y les dice que los ejercicios que hicieron son todos sobre traslación, las respuestas de los estudiantes a la pregunta ¿Qué es traslación? no hacen uso explícito de ninguno de estos.

Esto hace necesaria la institucionalización, para que la profesora organice los conocimientos de los estudiantes dándoles nombre propio y relacionándolos con el saber.

En el siguiente diálogo la profesora relaciona cada uno de los conocimientos de los estudiantes con las propiedades de la traslación, esta vez llamándolas con nombre propio.

Tabla 2

	*Diálogo* *P:-¿Cuándo yo muevo de un lugar a otro y si me aparece esto que me dice, que tengo que moverlo a dónde (señalando en el tablero el vector)?* *E:-* *Hacia arriba* *P:- Y en qué posición (señala el vector)* *E:-Diagonal* *P:-No tenemos que mover de un lugar a otro sin ningún sentido sino*

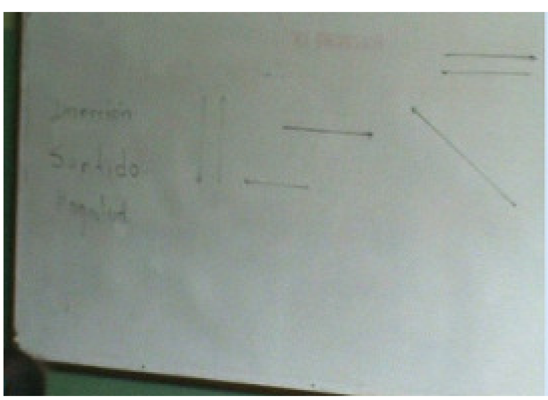
	mirar a donde lo voy a llevar. *P-Para dónde, para qué lado, para arriba, abajo, la derecha* *P:-Miremos estos elementos(refiriéndose a magnitud, dirección y sentido)* *P:-¿Qué hay en la traslación**? ¿Qué es la dirección?** cierto porque a mí me tienen que decir para dónde lo muevo, en la calculadora no les decía para cualquier lado sino que había un…* *E:- Vector* *P:- Algo que me decía para donde, había una dirección. ¿Qué más había, cuando la flechita me indicaba había un?* *P:- No, ¿cuando yo veía la flechita qué veían?… un **sentido*** *P:- Y cuando nosotros mediamos la longitud del vector ustedes me decían que había una distancia. Esto se llama una **magnitud.*** *P:- Entonces hijos ahora si yo puedo hablar de traslación con estos tres elementos, no puedo trasladar algo sin tener las herramientas para lo que tengo que hacer.*

Luego de mostrar las tres propiedades de la traslación les pide a los estudiantes definir lo que es la traslación usando estas tres palabras.

Diálogo
P:-Ahora si díganme ***¿qué es traslación?*** *usando estos tres elementos (señalando en el tablero donde estaban escritos)*
E:- Mover un triangulo
P:- Mover un triangulo de un lugar a otro teniendo en cuenta que
Es:- ***La dirección, el sentido y la magnitud***
P:-. Entonces mover la figura teniendo en cuenta.
E:-La dirección, el sentido y la magnitud,
P:-Eso es traslación, trasladar un objeto teniendo en cuenta estos tres elementos, no lo podemos trasladar así como así
P:-Siempre teníamos unas condiciones o unos elementos que eran estos

Luego dibujando algunos vectores en el tablero la profesora hace que los estudiantes identifiquen la dirección en cada uno de ellos

Tabla 26.

	*P:- Haber miremos... ¿Ésta qué dirección es?* *Es:- Horizontal* *P:- Muy bien una forma de dirección es horizontal… ¿esta qué dirección es?…* *E:- Vertical* *P:- ¿Esta dirección qué es?* *Es:- Diagonal* *P:-La dirección es la inclinación que*

	nosotros le demos a la recta *P:-Porque siempre la traslación se hace ¿sobre quién?* *Es:- Sobre una recta* *P:- Se hace sobre una recta, entonces yo le puedo dar inclinación, horizontal, inclinación vertical y diagonal.*

Tabla 27.

	*Diálogo* *P:- Para ustedes que indica el vector* ***. ¿Qué es el vector?*** *Es:- Una dirección.* *P:-¿El vector solamente tiene una dirección?* *Es:- Sentido y magnitud* *P:-¿Qué me indica el vector?* *Es:- Magnitud, dirección y sentido* *P:-Como el vector me indica magnitud, dirección y sentido que me indica. El vector es una traslación*

Para reforzar la propiedad del *sentido* en una traslación la profesora utiliza pre-saberes de los estudiantes.

Diálogo

P:- Cuando yo hablo de sentido hijos, ya sobre esa recta tengo dos opciones (teniendo una recta dibujada en el tablero)

P:- Imaginemos esta recta acá, yo que opción tengo. De ir hacia allá o hacia acá en la misma recta. Por ejemplo, niños ubíquense en la carrera 38 (vía de doble sentido aledaña al colegio) ahí como pueden ir los carros

Es:- En las dos direcciones

E2:- En contravía

P:- No señor en contravía…Cuando ahí esto.

Es. O sea hay doble vía

P:- En la carrera 38 yo puedo ir en sentido sur y en sentido norte. Si vamos por ejemplo en la 36 (vía de doble sentido en el centro de la ciudad), puede

Es. Subir o puede bajar.

P:-¿Y la magnitud qué es?

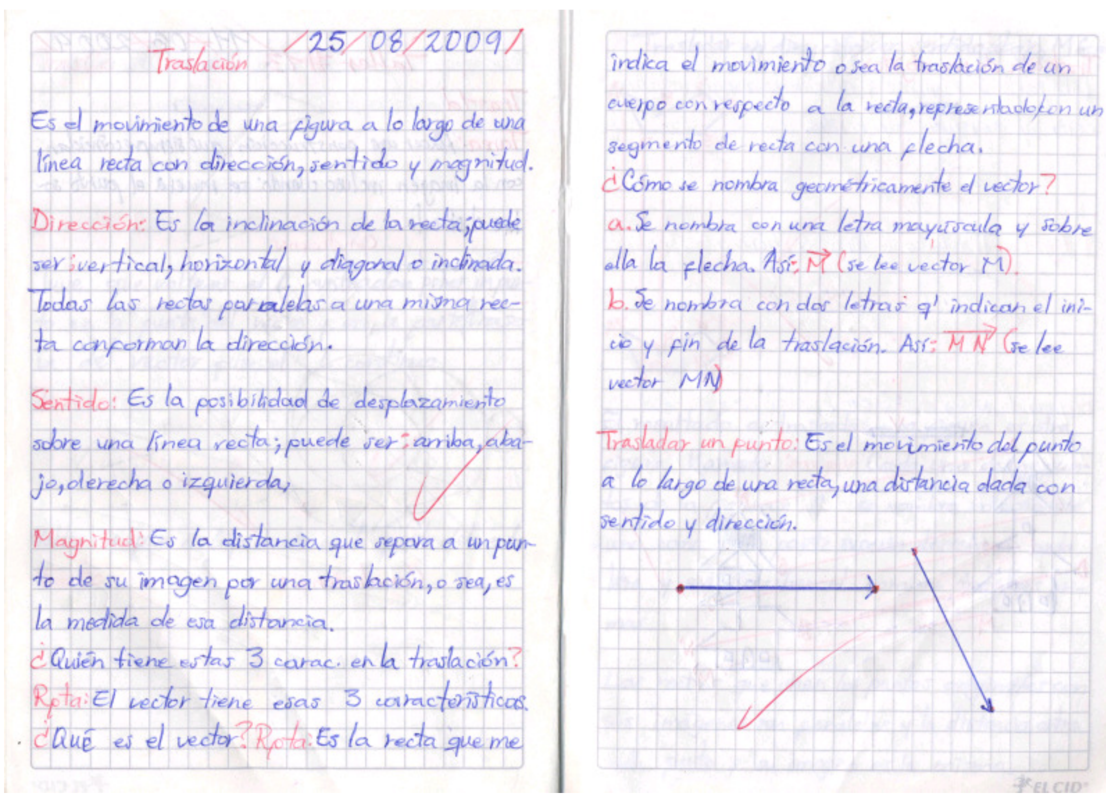
Es:-.La distancia

P:- Si la distancia es medir, cuanto tiene este vector. ¿Cuánta distancia de punto a punto?

Cuando ya mido, evaluó la distancia que hay de un punto a otro punto.

En el cuaderno vemos las tres propiedades de la traslación a las que tanto se refirieron los estudiantes durante las actividades.

Foto 24.



Traslación /25/08/2009/

Es el movimiento de una figura a lo largo de una línea recta con dirección, sentido y magnitud.

Dirección: Es la inclinación de la recta; puede ser: vertical, horizontal y diagonal o inclinada. Todas las rectas paralelas a una misma recta conforman la dirección.

Sentido: Es la posibilidad de desplazamiento sobre una línea recta; puede ser: arriba, abajo, derecha o izquierda.

Magnitud: Es la distancia que separa a un punto de su imagen por una traslación, o sea, es la medida de esa distancia.

¿Quién tiene estas 3 carac. en la traslación?

Rpta: El vector tiene esas 3 características.

¿Qué es el vector? Rpta: Es la recta que me indica el movimiento o sea la traslación de un cuerpo con respecto a la recta, representado con un segmento de recta con una flecha.

¿Cómo se nombra geométricamente el vector?

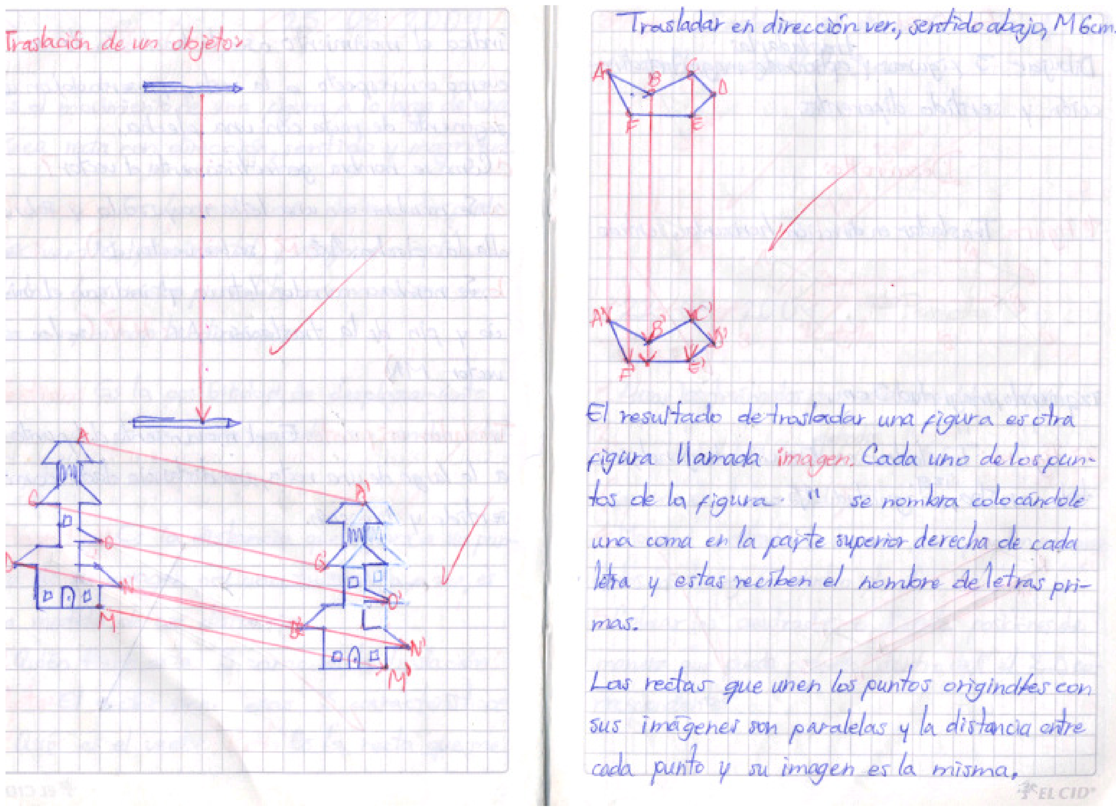
a. Se nombra con una letra mayúscula y sobre ella la flecha. Así: $\vec{M}$ (se lee vector M).

b. Se nombra con dos letras q' indican el inicio y fin de la traslación. Así: $\overrightarrow{MN}$ (se lee vector MN)

Trasladar un punto: Es el movimiento del punto a lo largo de una recta, una distancia dada con sentido y dirección.

Para reforzar lo aprendido la profesora propone algunas construcciones para realizar en el cuaderno.

Foto 25.

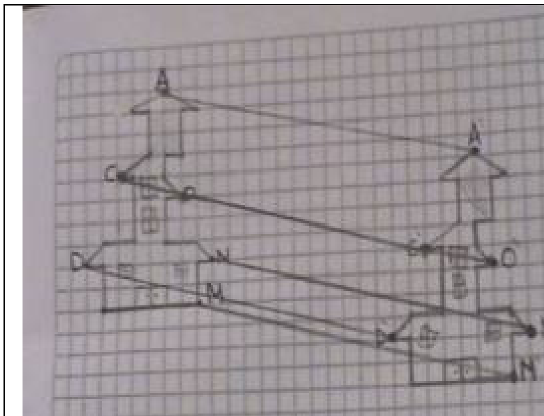
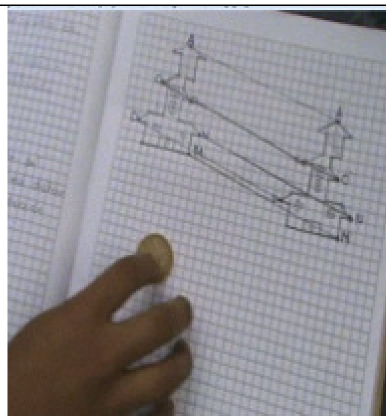


TERCERA ETAPA

Ejercicios de los cuadernos

Tabla 28.

	*Diálogo* *P:-¿Qué hizo ahí?* *E:- Un vector* *P:- ¿Y esos puntos rojos que son?* *E:- Es el movimiento de ese punto hacia esta dirección* *P:-¿Cuánto?* *E:-Cinco centímetros* *P:-¿Hacia dónde?* *E:-Hacia la derecha* *P:- ¿El vector es?* *E:-Horizontal derecho* *P:-¿Hacia la derecha y qué más?* *P:- ¿En la traslación hay un elemento que las representa cuál es?* *P:-Qué dibujé en el tablero* *P:-¿Qué le indicó hacia donde tenía que trasladarla?* *P:-¿Cuáles son los tres elementos?* *E:-Dirección, sentido y magnitud* *P:-¿Y esos elementos a quien pertenecen?* *E:- Al vector*

	*P:-¿Qué figura hizo ahí?* *E:-Una casa* *P:-¿Y esto qué es?* *E:-* ***La imagen de esta casa trasladada*** *(señalando la casa del lado derecho)* *P:-¿Esas rectas que son?* *E:-Paralelas, a las casas a los puntos de las casas.* *P:-Cuáles son los tres elementos que comprenden la traslación* *E:-Dirección, magnitud y sentido* *P:-Esos tres elementos a quien pertenecen Qué elemento se definió en el tablero.* *P:-¿Quién tiene estos tres elementos?* *Es:-La traslación*
	*P:- ¿Qué figura es?, si yo le digo que haga la misma traslación ¿cómo haría las paralelas acá?¿como las hizo y acá?(señalando los ejercicios anteriores)* *P:-¿Cómo hace para trasladar este círculo? ¿Hacia dónde tiene que trasladarlo?* *P:- ¿Para hacer un círculo qué necesita?* *P:-¿Por dónde pasaría la paralela?* *E:-por el centro*

CONCLUSIONES

El software Cabri Geometry se pudo utilizar para provocar las adaptaciones deseadas en los estudiantes, es decir, hacer que los estudiantes identificaran los fenómenos visuales característicos de una traslación y los utilizaran para resolver las tareas. Además fue posible anticipar la mayoría de las acciones que ellos realizaron en cada una de las actividades.

El uso de figuras Cabri dinámicas que podían arrastrarse en la pantalla de la calculadora con la garantía que todas las propiedades declaradas en la construcción se mantendrían, permitió a los estudiantes visualizar algunas de las propiedades de la traslación por ejemplo: en la segunda tarea de la primera actividad '**llevar <u>todos</u> los triángulos dentro del cuadrado'** los alumnos notaron que la distancia se mantenía constante por eso dijeron y escribieron sobre esta tarea 'no se puede'.

Las retroacciones del medio permitieron a los estudiantes validar o invalidar sus acciones, y de esta manera saber si habían logrado o no, cumplir con la tarea. Por ejemplo en las actividades tres y cuatro cuando la profesora preguntaba ¿por qué no ha obtenido el 'muy bien'? ellos respondían 'porque está mal', 'porque me falta hacer…'. Reconociendo que debían realizar nuevas acciones para cumplir con la intención de realizar la tarea.

Los fenómenos visuales proporcionados en las actividades permitieron a los estudiantes adquirir la habilidad de ubicar y construir de forma aproximada ('a ojo') el triángulo imagen por una traslación, esto se observó en la novena figura de la cuarta actividad. Aunque los estudiantes por sí solos no lograron realizar la construcción exacta requerida en la novena figura de la cuarta actividad, si se logró crear al ambiente propicio para enseñar el uso de herramientas de Cabri como recta paralela y compás.

El diseño de las actividades, apunta al uso gradual de las propiedades de la traslación para el cumplimiento de las tareas. En principio se requería solo de la percepción para realizarlas, pero a medida que avanzaba se hizo necesario el uso de las propiedades de la traslación, al final fue indispensable el uso de las propiedades para hacer la construcción exacta.

Constatamos que la mayoría de los conocimientos adquiridos por los estudiantes estaban contextualizados a las situaciones adidácticas planteadas en este trabajo (actividades 1, 2, 3, 4) eso lo pudimos ver con más claridad en las respuestas que ellos dieron durante la etapa de institucionalización; por ejemplo cuando la profesora preguntó ¿qué es traslación? y uno de los estudiantes respondió 'traslación es mover un triángulo'.

La enseñanza del concepto de traslación por medio de situaciones adidácticas llevó más tiempo (aproximadamente dos meses) del que se necesitaría hacerlo de la forma tradicional, pero los resultados en cuanto al aprendizaje fueron mejores, esto se evidenció en los aportes de los estudiantes durante la clase y en lo que escribieron en sus cuadernos.

El rol de la profesora durante el desarrollo de las actividades se diferenció del tradicional, porque su trabajo en clase se limitó: a explicar y dejar el problema (las tareas) a los estudiantes; a no dar la solución, sino mediante preguntas llevarlos a observar los fenómenos visuales que los hiciera razonar para que ellos mismos propusieran la solución a las tareas.

La toma de registros audiovisuales durante la realización de las actividades en el salón de clase, no fue la más apropiada porque no se seleccionó un grupo pequeño de estudiantes (recordemos que en el aula habían 50 estudiantes y solo una videograbadora) para hacer un seguimiento más detallado del proceso, sino que se quiso obtener la mayor información de todos los estudiantes. Esto es un error metodológico en la toma de registros audiovisuales, porque para analizar a cada uno de ellos habría que poner una cámara en cada una de las mesas de trabajo de los estudiantes lo que demandaría una alta inversión de tiempo y dinero.

BIBLIOGRAFÍA

BROSSEAU, Guy. Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones Didácticas. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal. 2007.

CHEVALLARD, Yves. BOSCH, Marianna. GASCÓN, Josep. Estudiar Matemáticas, el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Editorial Horsori. 2000.

INSTITUTO NACIONAL PARA LA EVALUACIÓN DE LA EDUCACIÓN. La enseñanza de la Geometría. México. 2008.

MARGOLINAS Claire. La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas. Publicaciones UIS. 2009.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Matemáticas.

RUEDA, Karol; MONROY, Lilian. Conceptualización de la Simetría Axial y la Traslación con el programa Cabri Geometry II. Trabajo de Grado. 2009.