

**PROBABILITY EXPLORER: UN SOCIO COGNITIVO EN LA
CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE LA LEY DE LOS
GRANDES NÚMEROS CON ESTUDIANTES DE OCTAVO
GRADO EN EL INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL DE
PUENTE NACIONAL**

Autores:

**ÉDGAR DAVID JAIMES CARVAJAL
JORGE ALEXÁNDER MARTÍNEZ SILVA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007**

**PROBABILITY EXPLORER:
UN SOCIO COGNITIVO EN LA CONSTRUCCIÓN DEL
SIGNIFICADO DE LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS CON
ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO EN EL INSTITUTO
TÈCNICO INDUSTRIAL DE PUENTE NACIONAL**

**Autores:
ÉDGAR DAVID JAIMES CARVAJAL
JORGE ALEXÁNDER MARTÍNEZ SILVA**

**Trabajo presentado para optar al título de:
ESPECIALISTA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**Director
Dr. GABRIEL YÁÑEZ CANAL**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2007**

Dedicado con todo el amor a nuestra familia: Martínez Silva, Jaimes Carvajal y a mi Princesa.

AGRADECIMIENTOS

Al Todopoderoso, por bendecirnos y darnos la fortaleza para culminar nuestro trabajo.

Al profesor Gabriel Yáñez Canal, por sus orientaciones y haber depositar su confianza en nosotros.

A todos los estudiantes de 8-1 del Instituto Técnico Industrial Francisco de Paula Santander, por su paciencia, dedicación y haber hecho realidad este trabajo.

Al rector del ITI de Puente Nacional, Edgar Sánchez por su comprensión e invaluable colaboración.

A Lelio Miguel Bravo Pereira, por su generosa confianza y colaboración.

A la Universidad Industrial de Santander, en especial a los docentes de la Tercera Cohorte de la Especialización en Educación Matemática, por todas sus enseñanzas y ejemplos de vida.

A Gloria Merlo y Marta Ligia Díaz, por su incondicional colaboración.

CONTENIDO:

	Página
PRESENTACIÓN	1
1. MARCO TEÓRICO	3
1.1 Psicología del pensamiento aleatorio	3
1.1.1 La intuición de las frecuencias relativas	3
1.1.2 Insensibilidad al tamaño de la muestra o la ley de los pequeños números	6
1.1.3 Sesgo de desorden y de variación constante relacionados a las concepciones erróneas de las secuencias aleatorias	7
1.1.4 El sesgo de los valores recientes	7
1.1.5 El sesgo de equiprobabilidad	7
1.2 La herramienta computacional	8
1.2.1 La herramienta computacional, sus ventajas y efectos. Las representaciones ejecutables	8
1.2.2 El concepto de micromundo	11
1.2.3 Una teoría que permite interpretar las acciones de los estudiantes en un micromundo	12
1.2.4 El paquete Probability Explorer como un micromundo	13
1.2.5 Experimentación, modelo y simulación aleatoria	14
1.3 La Ley de los Grandes Números	16
2. ANTECEDENTES	18
2.1 Antecedentes relacionados con el simulador Probability Explorer	18
2.2 Otras investigaciones	20
3. METODOLOGÍA	28
3.1 Población y muestra	28
3.2 Fases de la investigación	29
3.3 Instrumentos de recolección de datos	37
3.4 Categorías de análisis de resultados	38
4. PRESENTACIÓN DE ACTIVIDADES	39

4.1	Diagnóstico	39
4.2	Primera Parte: Presentación del problema y predicción de Resultados	42
4.3	Segunda Parte: El día de la promoción	43
4.4	Tercera Parte: Análisis parcial de las ventas	46
4.5	Cuarta Parte: Análisis específico de los resultados de los Subgrupos	46
4.6	Quinta Parte: Comparando los resultados de los subgrupos	48
4.7	Sexta Parte: Análisis general de los resultados del grupo	49
4.8	Séptima Parte: Experimentación con dos monedas	50
4.9	Octava Parte: Explorando Probability Explorer	51
4.10	Novena Parte: Simulación computacional de la promoción de paletas	52
4.11	Décima Parte: Nueva promoción de paletas	52
4.12	Onceava Parte: Análisis de los resultados de la simulación real de la nueva promoción de paletas	54
4.13	Doceava Parte: Simulación computacional de la nueva promoción de paletas	54
5.	ANÁLISIS DE RESULTADOS	55
5.1	Modificabilidad de las concepciones previas	55
5.1.1	Respecto a la Naturaleza de los Experimentos Aleatorios	55
5.1.2	Respecto al Sesgo de Desorden	62
5.1.3	Respecto al Sesgo de los Valores Recientes	64
5.1.4	Sobre las intuiciones de los estudiantes respecto a las secuencias aleatorias	66
5.1.5	Intuición de la Frecuencia Relativa	68
5.2	Construcción del significado conceptual	91
5.2.1	Evaluación computacional	91
5.2.2	Evaluación escrita	107
6.	CONCLUSIONES GENERALES	116
6.1	Modificabilidad de las concepciones previas	116
6.2	Construcción del significado conceptual	119
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	122

TÍTULO: PROBABILITY EXPLORER: UN SOCIO COGNITIVO EN LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DE LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS CON ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO EN EL INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL DE PUENTE NACIONAL^{*}

AUTORES: ÉDGAR DAVID JAIMES CARVAJAL Y JORGE ALEXÁNDER MARTÍNEZ SILVA^{**}

PALABRAS CLAVES: Probabilidad frecuencial, simulador computacional, concepciones e intuiciones, ley de los grandes números.

DESCRIPCIÓN: Este trabajo presenta una experiencia de aula cuyo propósito era implementar y estudiar los efectos de las nuevas tecnologías en el aprendizaje significativo del concepto de probabilidad a partir de una situación problema contextualizada y el uso de un simulador aleatorio llamado Probability Explorer^{***}. El principal interés de los autores era identificar las intuiciones y malas concepciones probabilistas de los estudiantes a partir de un diagnóstico, analizar los posibles cambios y su relación con la construcción del significado de la ley de los grandes números durante el desarrollo de las actividades de experimentación y simulación computacional a través del enfoque frecuencial.

Se utilizó como método de investigación el estudio de casos para analizar los cambios que presentaron los estudiantes en sus formas de pensar durante la aplicación de las actividades en el aula bajo el enfoque planteado. La población objeto de estudio fue un grupo de 40 estudiantes de octavo grado entre los 12 y 17 años. Durante el trabajo de campo con los estudiantes se desarrollaron una serie de actividades basadas en el análisis de los resultados experimentales de una promoción de paletas, la cual giraba en torno a una apuesta relacionada con el lanzamiento de una moneda y la extracción de balotas de dos colores al azar, donde el objetivo general era que los estudiantes pudieran predecir con argumentos si la promoción era viable a largo plazo.

En general, las malas concepciones que los estudiantes construyen a partir de su experiencia con fenómenos aleatorios son fuertes y difíciles de modificar. Hubo estudiantes que lograron generar nuevas intuiciones respecto a los resultados de un experimento real o simulado, las cuales contribuyeron en la construcción del significado de la ley de los grandes números. El micromundo computacional demostró ser una herramienta poderosa en la construcción de un conocimiento social en un ambiente agradable de aprendizaje que motiva a los estudiantes a derrumbar los obstáculos que existen entre su realidad y las matemáticas.

* Tesis.

** Facultad de Ciencias, Especialización en Educación Matemática. Director Gabriel Yáñez Canal.

*** *Probability Explorer* es un simulador comercial cuyo uso fue autorizado por la autora Hollylynne Stohl.

HEADLINE: PROBABILITY EXPLORER: A COGNITIVE PARTNER IN THE MEANING CONSTRUCTION OF THE BIG NUMBERS LAW WITH STUDENTS OF EIGHTH GRADE OF THE INDUSTRIAL TECHNICAL INSTITUTE IN PUENTE NACIONAL

AUTHORS: EDGAR DAVID JAIMES CARVAJAL AND JORGE ALEXANDER MARTÍNEZ SILVA**

KEY WORDS: frequency Probability, computational simulator, conceptions and intuitions, big numbers law.

DESCRIPTION: This work states a classroom experience whose main goal is to implement and study the effects of the new technologies in the meaningful learning of the concept of probability starting from an issue in a specific context and the use of a random simulator called Probability Explorer. The authors' main interest is to identify the intuitions and the students' bad probabilistic conceptions starting from a diagnosis; to analyze the possible changes and its relation with the construction of the big numbers law during the development of the experimentation activities and the computational simulation through the frequency approach.

The study of cases to analyze the changes of the students' thoughts during the practice of the activities under the proposed approach was used. The population was a group of 40 students of eighth grade age 12 - 17. During the work the students developed a series of related activities that were subdivided in twelve parts, based on the analysis of the experimental results of a promotion of yokels by the students, which rotated around a bet related to a currency throwing and the taking out of ballots in two colors at random, where the main objective for the students was to predict with arguments if the promotion was viable in a long term.

In general, the bad conceptions that the students build starting from their experience with random phenomena are strong and difficult of modifying. Some students were able to generate new intuitions regarding the results of a real or pretended experiment, which contributed in the building of the meaning of the big numbers law. The computational microworld showed to be a powerful tool in the building of a social knowledge in a pleasant learning atmosphere that motivates the students to throw down the obstacles between their reality and mathematics.

* Thesis.

** Ability of Sciences. Specialization in Mathematical Education. YÁÑEZ, Gabriel.

PRESENTACIÓN

En la mayoría de textos de matemáticas en los que es posible encontrar algún capítulo dedicado a la probabilidad, es común el uso del lenguaje formal algebraico como única forma de representación utilizado para la enseñanza de los conceptos relacionados con la probabilidad. Lo anterior como se ha demostrado en muchas investigaciones, no permite una construcción significativa de los conceptos relacionados con 10 experimentos aleatorios, por el contrario, ha generado y reforzado algunas malas concepciones. Entonces nace la pregunta: ¿Qué metodología de trabajo es conveniente utilizar en el salón de clase para posibilitar la construcción significativa de estos conceptos dentro del currículo de matemáticas?

Para una persona la construcción significativa de un concepto está ligada a su experiencia, razón por la cual se ha adoptado en las últimas investigaciones el trabajo experimental de sucesos aleatorios dentro de clase como un principio en la formación de estos conceptos. Pero si bien es cierto que el realizar experimentos ayuda a generar una mayor comprensión alrededor del experimento aleatorio, como identificar el espacio muestral y algunas características sobre la naturaleza de las pruebas experimentales, también es cierto que dadas las pocas repeticiones que se realizan, es muy difícil que con sólo una experiencia los estudiantes perciban alguna regularidad en el comportamiento de las secuencias aleatorias que permita dar algún significado a su experiencia y generar conceptos claros sobre la probabilidad de un suceso, como se evidencia en algunos trabajos (Reátiga, 2004), una solución propuesta es el uso de la herramienta computacional.

Investigadores como Noss & Hoyles (1996), Pratt (1998), Batanero (2001), Moreno (1999), Yáñez (2003), y otros, han desarrollado trabajos relacionados con el uso e incidencias de la computadora como herramienta mediadora en la construcción de significados alrededor de experimentos aleatorios simulados, con muchos éxitos. Dichos trabajos sólo se han realizado fuera de Colombia, por lo que nuestro interés fue adoptar esta nueva metodología para verificar sus ventajas y estudiar sus incidencias en un grupo de 40 estudiantes entre los 12 y 15 años de edad que no habían recibido ninguna instrucción sobre conceptos formales de probabilidad, en un contexto donde la tecnología no es muy utilizada y teniendo como objetivo *implementar y estudiar los efectos de las nuevas tecnologías en el aprendizaje significativo*

de la probabilidad a partir de una situación problema contextualizada.

El trabajo de los autores consistió en implementar una situación problema que propiciara las condiciones necesarias para que el estudiante encontrara en el la herramienta computacional *Probability Explorer* un *socio cognitivo*, que le permitiera simular experimentos con muchas sucesiones aleatorias y posibilitar el desarrollo de un análisis probabilístico para comprender la *ley de los grandes números*, partiendo del enfoque frecuencial de la probabilidad y, finalmente evaluar los efectos y cambios que se produjeron en las concepciones del estudiante durante este proceso.

El programa *Probability Explorer*, es un software comercial creado por Hollylynn Stohl Drier el cual está disponible en www.probexplorer.com (versión demo), la licencia fue adquirida con la autora por intermedio del profesor Gabriel Yáñez Canal, director de esta investigación.

El problema para los estudiantes era evaluar una promoción de paletas relacionada con apuestas al cara y sello, a través de un simulador computacional partiendo de un análisis previo con resultados obtenidos de una experimentación real con 200 paletas en el Instituto Técnico Industrial de Puente Nacional (Santander), con la finalidad de predecir el comportamiento de las apuestas a largo plazo. La apuesta consistía en adivinar el lado de la moneda después de un lanzamiento al aire, si el cliente acertaba se ganaba la paleta de lo contrario perdía sus \$200.

Durante el trabajo de campo con los estudiantes, se desarrolló una serie de actividades relacionadas y subdivididas en doce partes basadas en el análisis, por parte de los estudiantes, de la Promoción de Paletas apostando al cara y sello. Para los estudiantes, el objetivo general de las actividades, era que pudieran predecir con argumentos si la promoción era viable a largo plazo. Ante la variabilidad y la escasez en la cantidad de datos recolectados en la experimentación, los estudiantes tuvieron la necesidad de repetir la experiencia, pero existía el obstáculo de no poder disponer de más paletas ni de clientes que dieran su escogencia para conocer el comportamiento tanto de la cantidad de clientes ganadores y perdedores como la cantidad de caras y sellos que habían de obtenerse. Entonces, se les presentó a los estudiantes un modelo para simular la situación reemplazando el lanzamiento de una moneda por el lanzamiento de dos monedas (una para el cliente y otra para el vendedor), donde se pretendía reemplazar la elección del cliente por el resultado aleatorio de otra moneda tomando como supuesto, por parte de los investigadores, que la escogencia del cliente era aleatoria.

Este modelo era necesario para poder implementar la situación de la

promoción de paletas dentro del programa Probability Explorer (Explorador de Probabilidad), repetir la experiencia, comparar con los resultados reales obtenidos e inferir sobre el comportamiento de la promoción a largo plazo haciendo uso de las múltiples representaciones dinámicas del programa. En esta parte los estudiantes coordinaron las representaciones gráficas y tabulares y desarrollaron aptitudes comunicativas para expresar razonamientos matemáticos relacionados con la construcción del significado de la probabilidad de ganar o perder. Después los estudiantes propusieron nuevos modelos probabilísticos (con bolas de colores) para generar promociones que fueran efectivas, probándolas con experiencias y haciendo uso del simulador. Por último, se realizó una evaluación escrita y una computacional en el simulador, contrastar sus respuestas con el diagnóstico inicial y, poner a prueba las nuevas intuiciones y significados relacionados con la modificabilidad de sus concepciones y la construcción del significado conceptual de la Ley de los Grandes Números.

El presente trabajo está organizado en seis capítulos. En el primer capítulo, se desarrolló el marco teórico, en este se presentan los conceptos relacionados con la forma como una persona construye desde su experiencia cualquier concepto, apoyados en la teoría de de Fischbein, la cual fundamenta el enfoque frecuencial de este trabajo. Esta teoría permite explicar desde el punto de vista psicológico el desarrollo de las intuiciones del sujeto en el aprendizaje de la probabilidad, así como comprender algunos de los sesgos y malas concepciones que se generan con este enfoque. Posteriormente se explican las ventajas de la herramienta computacional como un socio cognitivo que posibilita al estudiante el aprendizaje probabilístico dentro de un micromundo llamado Probability Explorer, allí se justifica su uso y propiedades. Por último se explica el enfoque frecuencial para el aprendizaje de la Ley de los Grandes Números.

El segundo capítulo, se hace referencia a los antecedentes tenidos en cuenta para esta investigación, relacionados con la simulación computacional y el enfoque frecuencial en la enseñanza de la probabilidad en la escuela. El tercer capítulo, relata la forma como se organizó la metodología de trabajo, una descripción del tipo de investigación, la población y muestra con la que se desarrolló el trabajo, las fases de desarrollo, la forma como se recolectó la información durante la investigación y las categorías de análisis para procesar los resultados.

En el cuarto capítulo se justifica cada una de las actividades aplicadas con los estudiantes. Finalmente en el quinto y sexto capítulo, se hace una síntesis de los principales resultados y conclusiones analizadas a través de las categorías de análisis propuestas en la metodología.

1 MARCO TEÓRICO

1.1 SICOLOGÍA DEL PENSAMIENTO ALEATORIO

Presentamos en este capítulo algunos resultados obtenidos del análisis realizado por Yáñez (2003) relacionados con el carácter psicológico de las intuiciones de las frecuencias relativas y de la Ley de los Grandes Números que soportan el uso del enfoque frecuencial de la probabilidad a partir de dos trabajos de gran influencia en el estudio psicológico de las intuiciones probabilísticas en los niños y en los jóvenes: *The origin of the idea of chance in children*, Piaget e Inhelder (1951) y *The intuitive sources of probability thinking in children*, Fischbein (1975).

1.1.1 La intuición de las frecuencias relativas

Piaget e Inhelder

En los trabajos de Piaget existe un marcado interés en determinar el nivel de desarrollo intelectual en que se encuentra el niño a diversas edades analizando su comprensión formal de los conceptos. Es decir, su análisis y resultados acerca de las ideas de azar, de la estimación de probabilidades y de las capacidades combinatorias de los niños. Las describe muy asociadas a los estadios preoperatorio, de operaciones concretas y de operaciones formales.

En el estadio de las operaciones concretas, entre los 7 y los 11 años, el niño empieza a comprender la interacción de cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles, y la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. Sin embargo, no llega a comprender la idea de azar porque no alcanza a comprender la independencia de las causas o su interferencia mutua. No obstante, el niño en estas edades está en capacidad de establecer cierto tipo de comparaciones entre las posibilidades de eventos. Por ejemplo, perciben que es más probable extraer una bola roja de una bolsa que contiene 2 de estas fichas de un total de 4 que de otra que contiene 2 de un total de 5.

En el estadio de las operaciones formales, a partir de los 11-12 años, cuando el niño desarrolla el pensamiento combinatorio, es cuando alcanza la idea de azar y de probabilidad, y tiene la capacidad de asociar a un evento aleatorio una fracción que mida su grado de determinación.

Para Piaget e Inhelder, los niños que se encuentran en la etapa preoperacional (antes de los 7 años) no comprenden la idea de causa-efecto como referencia que les permita diferenciar los fenómenos determinísticos de los aleatorios, es decir, que carecen de la idea intuitiva de azar y por lo tanto son incapaces de realizar juicios de probabilidad ya que no poseen ni los procedimientos combinatorios ni el concepto de proporción. La siguiente teoría contradice esta idea y pone de manifiesto que el aprendizaje probabilístico es parte del desarrollo intelectual del individuo y requiere de un proceso de instrucción que corrija las malas intuiciones independientemente de la etapa operacional en la que se encuentre.

Fischbein y las intuiciones

El concepto de intuición es muy general en el entorno educativo, sin embargo, la realidad es que todo proceso de aprendizaje implica el uso de intuiciones por parte del sujeto, para Fischbein (1975), las intuiciones son procesos cognitivos que intervienen en acciones mentales o prácticas del sujeto.

Si bien es cierto que los niños no tienen el concepto formal de probabilidad, sí pueden tener algo que permita obtenerlo; al fin de cuentas, los niños aprenden de la experiencia de su vida diaria y ésta contiene procesos estocásticos. Este algo que los niños tienen son las *intuiciones primarias* y, en particular, la intuición de la frecuencia relativa la cual existe en los niños de preescolar y se desarrolla con la edad, siendo el mayor desarrollo en la edad de 14 -15 años.

Las intuiciones se pueden *clasificar* de diferentes maneras según el punto de vista que se adopte. Respecto a la instrucción, las intuiciones se clasifican en primarias y secundarias.

- Las *intuiciones primarias* se adquieren directamente con la experiencia sin necesidad de ninguna instrucción sistemática. Ejemplos de ellas son las intuiciones espaciales elementales, como el cálculo de distancia y localización de objetos, o el admitir que al lanzar un dado todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.

- Las *intuiciones secundarias* se forman como consecuencia de la educación, principalmente de la escuela. Un ejemplo de percepción secundaria es el principio de inercia físico: un móvil conserva su estado de movimiento o de reposo mientras no intervenga una fuerza exterior. Las intuiciones secundarias, como todas las intuiciones, presuponen una práctica extensiva y una familiarización, es decir, requieren una cantidad de experiencia acumulada y verificada. Una simple explicación teórica no es suficiente para convertir la información en una adquisición estable que tenga las características de una intuición, sino que se requiere el uso de la información en sus propias acciones y predicciones a lo largo de gran parte del desarrollo intelectual del sujeto.

La existencia de la intuición de la frecuencia relativa se expresa a través del *aprendizaje probabilístico*, que son experimentos en los cuales se trata de estudiar las predicciones de los sujetos ante situaciones en que un suceso se repite con una determinada frecuencia relativa. Un ejemplo de esta clase de experiencias consiste en presentar al estudiante dos luces de colores diferentes que se irán encendiendo intermitente y aleatoriamente con una determinada frecuencia. El término aprendizaje probabilístico se refiere a la tendencia del sujeto a ajustar sus predicciones a las frecuencias reales de los sucesos: en otras palabras, la probabilidad de una respuesta dada tiende a igualar a la probabilidad del estímulo correspondiente.

Los experimentos del tipo *aprendizaje probabilístico* también demuestran efectos secundarios de la intuición de la frecuencia relativa que conducen a falacias, en particular la de negar los valores recientes. Este efecto se refleja en el decrecimiento de la probabilidad de predicción de un evento que ha ocurrido varias veces en ensayos previos, y es importante porque revela alguno de los mecanismos por los cuales se establecen intuiciones primarias erróneas durante la ontogénesis del intelecto.

El sesgo de tener en cuenta los *valores recientes*, son una expresión de una tendencia racionalizadora que conduce al sujeto a querer controlar las experiencias aleatorias. El hecho de que este efecto aparezca después de los 6-7 años y se fortalezca en la edad adulta, es un argumento que fortalece la hipótesis de ser una manifestación de un fenómeno que es parte del desarrollo intelectual del individuo contrario a lo manifestado por Piaget e Inhelder (1951).

En resumen, según Yáñez (2003), la intuición de la frecuencia relativa es una típica intuición primaria. Es una intuición preoperatoria en el sentido que, desde el punto de vista genético, se forma antes del estadio operatorio del desarrollo de la inteligencia, y actúa, o es capaz de actuar,

independientemente de cualquier razonamiento explícito. Estas intuiciones requieren de un proceso de instrucción estructurado que encarrile dichas intuiciones en forma de intuiciones secundarias cuyo desarrollo implican un contexto y ser ampliamente probadas desde la experiencia para ser aceptadas y asimiladas como lo dice Fischbein :

“Por ejemplo, para crear nuevas intuiciones correctas de probabilidad el educando debe ser activamente involucrado en un proceso de realización de experimentos aleatorios, de adivinar resultados y evaluar posibilidades de confrontar resultados individuales y grupales con unas predicciones realizadas a priori, etc. Nuevas intuiciones de probabilidad correctas y potentes no pueden ser producidas simplemente practicando fórmulas de probabilidad. Lo mismo es cierto para la geometría y para toda rama de las matemáticas” (Fischbein, 1982, p.12).

Desde este punto de vista, el trabajo de los autores fue crear una situación aleatoria desde el contexto del aprendiz, diseñar actividades que involucraran la experimentación y la simulación física para modelar la situación y, establecer una conexión con las simulaciones computacionales para posibilitar la creación de dichas intuiciones secundarias enfocadas al análisis de las frecuencias relativas para construir significativamente el concepto de la *ley de los grandes números*. En dichas actividades siempre estuvo presente la predicción de resultados y, la confrontación de resultados individuales y grupales como se puede ver en las actividades presentadas en el cuarto capítulo.

El análisis realizado obliga, en la práctica didáctica, a conocer las intuiciones primarias que tienen los estudiantes respecto a los temas que se les quieran enseñar, y a recurrir a esas intuiciones para la presentación de nuevos temas matemáticos con el fin de generar intuiciones secundarias adecuadas.

Se presenta a continuación una lista de los sesgos que se relacionan estrechamente con el enfoque frecuencial de la probabilidad. Precisamente, uno de los objetivos de este trabajo es observar la evolución de estos sesgos cuando se asume una enseñanza de la probabilidad adoptando el enfoque frecuencial implementado a través de la simulación física y computacional.

1.1.2 Insensibilidad al tamaño de la muestra o la Ley de los Pequeños Números

Este sesgo de insensibilidad al tamaño muestral, se manifiesta cuando las personas hacen una extensión indebida de la *ley de los grandes números* y

asumen que en las muestras pequeñas debe reflejarse la probabilidad de los eventos. En particular, al adoptar esta ley las personas creen que para obtener el valor de la probabilidad de un evento es suficiente calcular la frecuencia relativa en un número reducido de ensayos, o, en el otro sentido, asumen que los resultados obtenidos en pequeñas muestras deben ser proporcionales a la probabilidad de los eventos. Este sesgo se ha encontrado que es indiferente al paso del tiempo y al crecimiento intelectual de las personas como lo pudimos comprobar al final de nuestra experiencia (evaluación computacional).

1.1.3 Sesgo de desorden y de variación constante relacionados a las concepciones erróneas de las secuencias aleatorias

Hacemos referencia a las concepciones erróneas a través de las cuales las personas asumen que las secuencias cortas de resultados reflejen las características aleatorias que se piensa deben tener los procesos aleatorios. Por ejemplo, se piensa que secuencias cortas relativamente ordenadas no son el resultado de un proceso aleatorio. Esta mala concepción llamada *sesgo de desorden* se manifiesta en los jugadores de lotería que asumen que los números ganadores han de salir sin ningún orden, por ejemplo, creen que es más probable un resultado como 3895 que un resultado como 1234. Otra manifestación de esta concepción errónea y que se relaciona estrechamente con la concepción frecuencial, es la concepción denominada de *variación constante*, que se manifiesta cuando se asume que la variabilidad de las frecuencias relativas es constante.

1.1.4 El sesgo de los valores recientes

El sesgo de los valores recientes se manifiesta cuando las personas asumen que el conocimiento de los resultados que han ocurrido permite predecir los resultados futuros. En particular, cuando se han dado una serie de valores iguales se asume que el resultado siguiente debe ser igual (lo llamamos sesgo positivo) o, por el contrario, debe ser distinto (sesgo negativo o falacia del jugador). La falacia del jugador hace que las personas consideren demasiadas alternancias en las secuencias aleatorias.

1.1.5 El sesgo de equiprobabilidad

Este sesgo hace referencia a la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio, incluso en aquellos en que no es aplicable el principio de indiferencia o donde no hay una simetría física. Para comprobar esta

creencia, Lecoutre (1985, 1992) realiza unos experimentos en los que propone a las personas problemas como el que indaga si al lanzar dos dados hay la misma probabilidad de obtener un 5 y un 6 que la de obtener dos veces un 5. A pesar de variar el contexto, el formato de la pregunta, la edad y la formación de los sujetos, los resultados siempre coinciden y demuestran la estabilidad de la creencia en que los dos resultados son equiprobables. Lecoutre argumenta que no se puede explicar este error como una falta de razonamiento combinatorio, sino que los modelos combinatorios no se asocian con las situaciones en que interviene el "azar". Los sujetos que muestran el sesgo de equiprobabilidad consideran que el resultado del experimento "depende del azar" y en consecuencia todos los posibles resultados son equiprobables (son igualmente posibles).

1.2 LA HERRAMIENTA COMPUTACIONAL

En este apartado presentamos inicialmente el papel que desempeña la simulación computacional en la enseñanza de la probabilidad y un constructo teórico de los conceptos más importantes relacionados con la implementación de una herramienta computacional en el aula y la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial.

1.2.1 La herramienta computacional, sus ventajas y efectos. Las representaciones ejecutables

De acuerdo con el principio que rige la teoría de la mediación instrumental: "Todo acto cognitivo está mediado por un instrumento [herramienta] que puede ser material o simbólico". (Moreno & Waldegg, 1999). Pero, ¿En que forma se relaciona o interviene una herramienta con el aprendizaje? De acuerdo con este principio además del uso de una herramienta es inevitable también la utilización de recursos representacionales para el desarrollo de la cognición, ya que no hay actividad cognitiva al margen de la actividad representacional. (Moreno, 1999). Es decir que para que una persona pueda aprehender un concepto, necesariamente debe recurrir a una forma de representarlo.

En las matemáticas, esta mediación se ha dado a través de los sistemas de representación semióticos, que son los que permiten a la persona relacionar el concepto matemático y su representación mental. Estos sistemas no solo sirven para comunicar sino que son el medio que permite generar significados del concepto.

Los sistemas de representación clásicos (álgebra, cálculo, etc.) presentan como dificultad la complejidad para comprenderlos, ya que son sistemas contruidos para operar entre ellos mismos. Es decir, que para dar significado a un concepto como el de función, es necesario comprender el significado de los símbolos mismos que representan algebraicamente una función. Lo que hace que la forma de representación se convierta en un obstáculo y no en un facilitador del aprendizaje de dicho concepto.

En el aprendizaje de la probabilidad, estos sistemas de representación han sido el obstáculo principal para la comprensión de los conceptos relacionados con la probabilidad. ¿Qué representación mental puede adquirir un niño cuando le dicen que la probabilidad de que ocurra un determinado suceso (n) está dado por el cociente entre el número de casos favorables que puede ocurrir el suceso y el número de casos posibles?

$$P(n) = \frac{\# \text{ casos favorables}}{\# \text{ casos posibles}}$$

Una solución planteada, pero no aplicada en la educación colombiana, es la simulación de experimentos aleatorios desarrollados directamente por los estudiantes como una herramienta fundamental para que el niño adquiriera un sentido “significativo” y “contextualizado” del concepto de probabilidad, pero presenta el inconveniente de que requiere de muchas iteraciones para que los niños puedan percibir la equivalencia existente entre la probabilidad empírica y la teórica.

Al respecto, Reátiga (2004, p. 7) comenta: *“Las sucesiones aleatorias obtenidas en clase convergen lentamente y a veces fallan, cuando se precisan para una demostración, lo que puede ser contraproducente”*. Esto exige el reto de buscar un medio que permita a los niños obtener miles de sucesos aleatorios “reales” en poco tiempo, para que esta convergencia se perciba con menor dificultad. Este problema puede resolverse con ayuda de una herramienta computacional.

Ventajas de la herramienta computacional

Las herramientas computacionales, por el contrario de los sistemas de representación clásicos, “son representaciones *ejecutables*, es decir, portadoras de la potencialidad de simular acciones cognitivas con independencia del usuario” (Lupiañez y Moreno, 2001, p. 295), que requieren de la mediación de un procesador sintáctico (lenguaje de programación), el

cual permite transformar el trabajo cognitivo del estudiante evitando que el mismo sistema de representación sea un obstáculo, y sea la construcción de significados el eje central de la actividad cognitiva. La característica fundamental propia de la computadora es la facilidad y rapidez con que realiza cálculos, lo que permite al estudiante enfocar su actividad cognitiva hacia terrenos más cualitativos. Esta particularidad es conocida como la capacidad *amplificadora* de la computadora, en el sentido de que amplía las posibilidades de los estudiantes para realizar trabajos más exigentes y más interesantes que antes eran muy difíciles por la cantidad de tiempo y espacio que ocupaban los cálculos realizados con lápiz y papel (Yañez, 2003).

Estas herramientas presentan otra gran ventaja: ejecutan virtualmente funciones cognitivas que anteriormente eran privativas de los seres humanos (Moreno, 1999), como la función de representación, de transformación y de objetivación que todo sistema semiótico debe cumplir (Yañez, 2003. p. 5). Por ejemplo, podemos generar diferentes tipos de representación de un conjunto de datos aleatorios, que permitan al estudiante realizar un análisis general con sólo presionar la tecla “enter”, y, “ver” cualidades en los datos que con lápiz y papel antes no podía hacer.

La computadora asume el papel de un sistema cognitivo artificial que construye por su cuenta representaciones semióticas, las transforma y las convierte en representaciones diferentes, cuando el usuario se lo ordena. La tecla “enter”, o la activación de los comandos o de los recursos que pueda tener un paquete computacional, como Probability Explorer, son el medio que tiene el usuario de interactuar con este socio cognitivo que le ayuda a resolver ciertos problemas y que posiblemente le permite construir nuevos significados o adoptar estrategias diferentes en la resolución de problemas.

El uso de la tecnología permite, además, que el proceso educativo se centre en el estudiante, el cual se convierte en el protagonista del proceso de aprehendizaje cuando realiza y explora conjeturas, varía parámetros para realizar generalizaciones, confirmar y rechazar ejemplos, transformando el papel del docente como dueño del conocimiento al de promotor de procesos de reflexión llevando al estudiante a ser el portador de ese conocimiento.

La computadora, cuando se utiliza bajo la tutela de un *micromundo* didáctico, dicen Noss y Hoyles (1996), asume el doble papel de una ventana que permite que el estudiante pueda ver más allá de sus acciones, y que el profesor o el investigador puedan observar de una manera más continua el proceso de pensamiento de los estudiantes.

A pesar de los grandes beneficios que pueden ofrecer las herramientas

computacionales, se requiere de una urgente transformación del currículo escolar que permita a los docentes y a los estudiantes aprovechar de la forma óptima los beneficios de la herramienta y no se limiten al uso mecánico y operacional, que carece de sentido en ausencia de un proceso de reflexión, por lo que se hace necesario implementar el desarrollo investigativo en el uso correcto de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

1.2.2 El concepto de Micromundo

El micromundo en su forma más general es un escenario computacional cuyo propósito principal es el aprendizaje. El término fue adoptado de la Inteligencia Artificial donde fue utilizado para describir un mundo definible de objetos correspondiente a algún dominio del mundo real en la forma de un programa de computador con el deseo de resolver problemas. Es decir, de enseñar a las computadoras a resolver problemas, se pasó a diseñar ambientes de aprendizaje construyendo y combinando objetos apropiados para un dominio del conocimiento (Yáñez, 2003, p 16).

Un micromundo tiene constituyentes internos o técnicos y constituyentes externos o pedagógicos (Edwards, 1968) que responden a las preguntas ¿Qué es? y ¿Cómo se usa? Los internos se corresponden con un modelo de un dominio del conocimiento para ser investigado por interacción con un software y unos objetos que responden a ese modelo. Los externos se asocian a la actividad misma que se genera en el micromundo y responden a las actividades diseñadas por el docente, al contexto en que se proponen y a las respuestas dadas por los estudiantes en su solución.

El cuadro siguiente resume las ecuaciones que caracterizan un micromundo.

Micromundo = Componente Técnico + Componente Pedagógica
Componente Técnico = Modelo + Software
Componente Pedagógica = Profesor + Estudiantes + Contexto
Micromundo = Modelo + Software + Profesor + Estudiantes+ Contexto

Un mundo computacional puede ser *autoexpresivo* -contiene los elementos de un lenguaje que permite hablar de sí mismo-. Es precisamente el lenguaje del micromundo, el programa, lo que permite el vínculo más obvio entre los discursos matemáticos y computacionales. Es el medio con el que los estudiantes manipulan los objetos del micromundo haciendo descubrimientos que pueden poner a prueba con los recursos visuales del mismo medio.

Según Yáñez, en un micromundo los actores técnicos centrales son los objetos computacionales. La escogencia de tales objetos y las formas en que se representan dentro del medio, las relaciones entre ellos, son críticos. Cada objeto es un bloque de construcción conceptual ejemplificado sobre la pantalla, que el estudiante puede construir y reconstruir. Los objetos computacionales son intermediarios importantes en los micromundos porque la interacción con ellos presenta la oportunidad de conectarse con conocimiento existente y simultáneamente ir más allá.

1.2.3 Una teoría que permite interpretar las acciones de los estudiantes en un micromundo

Noss & Hoyles (1996) plantean un marco teórico que suministra unos conceptos básicos que permiten la interpretación de los procesos que los estudiantes viven en su interacción con un micromundo. Estos conceptos son los dominios de abstracción, las abstracciones situadas y las redes de significados.

Si bien el objeto fundamental de su teoría es conocer y comprender los mecanismos de construcción de significados, son los procesos de abstracción los que consideran fundamentales para comprender la construcción de estos significados. Es precisamente su concepción respecto a la abstracción la que marca una diferencia con otras teorías que también se centran en la comprensión de la construcción de significados. Para ellos la abstracción es un proceso de conexión y no de ascensión o descontextualización, de continuidad más que de diferencia entre lo concreto y lo abstracto.

- ❖ **Los dominios de abstracción.** Un dominio de abstracción es el término utilizado por Noss & Hoyles para referirse a un ambiente de enseñanza estructurado de tal forma que al realizar acciones con los objetos que brinda, permite construir nuevos significados y relacionarlo con los que ya se poseen. Los micromundos autoexpresivos son dominios de abstracción en la medida en que articulan relaciones generales y significativas construidas por los estudiantes.
- ❖ **Las abstracciones situadas.** Una abstracción situada hace referencia a la creación de un significado producido dentro de un escenario particular como producto de las acciones del sujeto sobre él. En forma más general son todas las ideas que le surgen a un estudiante durante su accionar dentro de un dominio de abstracción y que fortalecen sus acciones dentro de ese dominio.

- ❖ **Las redes.** El concepto redes de significados o simplemente red (web), hace referencia a la expansión e interconexión de ideas, construidas por un individuo (o grupo de individuos) haciendo uso de los recursos disponibles en el momento de la construcción. Es decir, describe la unión de las estructuras construidas en el software por el programador y aquellas estructuras mentales forjadas por el estudiante durante la actividad realizada.

Estas ideas extraídas del análisis realizado por Yáñez de la teoría de Noss & Hoyles, son la base sobre la cual Pratt (1998) fundamenta el desarrollo de su trabajo sobre *coordinación de significados para la aleatoriedad*, como veremos más adelante. De acuerdo con esta teoría, los significados de los estudiantes no pueden ser modificados al tratar de reemplazarlos unos por otros. Para Pratt, cada significado es construido por el estudiante basado en un significado anterior, formando redes internas de significados locales de los cuales emergen nuevos significados llamados significados globales que sirven para adquirir un verdadero significado del objeto de estudio que en este caso corresponde a las ideas de aleatoriedad inmersas en los experimentos.

1.2.4 El paquete *Probability Explorer* como un micromundo

En el simulador *Probability Explorer*, el modelo subyacente es el de los procesos aleatorios, no la probabilidad, sino los experimentos en sí mismos. El objeto fundamental que permite la simulación de cualquier experimento aleatorio, es la función *Run Experiment* que genera secuencias aleatorias que dependen de los eventos y de las propiedades definidas por el usuario. El paquete cuenta con diferentes representaciones pictóricas alusivas que facilitan la construcción, simulación o representación de cualquier experimento aleatorio, conservando en forma virtual los objetos concretos del experimento real y facilitando el proceso de abstracción.

Ante la pregunta de si la simulación realizada refleja verdaderamente el experimento real, no se puede responder a menos que se repitiera el experimento real un número suficiente de veces para realizar estimaciones y poderlas comparar con las obtenidas por simulación. Una forma de resolver este problema es generando confianza en el uso de la simulación y por ende en sus resultados. Una manera de crear seguridad en la simulación computacional es a través de la interacción social, realizando variadas actividades, confrontando las programaciones y los resultados obtenidos por unos y otros. El uso de otras representaciones para resolver los mismos problemas que se simulan también puede ayudar a generar confianza en el uso de la simulación

computacional. Al igual, la realización de experimentos reales con monedas, dados, urnas y otros juegos, y la confrontación de estos resultados es el camino para generar confianza en los simuladores computacionales, lo que implica una planeación y una inversión de tiempo considerable. Cuando se adquiere esta confianza, la simulación se constituye en un medio para confrontar las intuiciones previas que se puedan tener sobre el azar en un proceso interactivo que le permite al estudiante generar nuevos significados alrededor de los experimentos aleatorios.

Para realizar acciones de control sobre los resultados aleatorios, Probability Explorer posee diversos mecanismos tales como la definición del experimento, el número de pruebas generadas y la posibilidad de repetir el mismo experimento bajo las “mismas condiciones” iniciales. El efecto del empleo de cualquiera de estos mecanismos se puede confrontar con los diversos gráficos que el paquete posee. Para confrontar resultados de experimentos repetidos las tablas y gráficos se pueden pasar a cualquier procesador de texto como Word donde el estudiante puede describir mejor y comparar de manera simultánea, ya que el block de notas del programa tiene sus limitantes de espacio y de resolución en los gráficos.

Probability Explorer también permite un análisis cualitativo de la influencia de los valores de probabilidad de ciertos eventos sobre la probabilidad de otros con los cuales están relacionados, es decir puede generar significados matemáticos expresados en relaciones directas o inversas entre probabilidades de eventos. Un ejemplo de esta situación es la percepción de la influencia de la tasa de base sobre los valores de las probabilidades a posteriori. Igualmente puede servir de medio confirmatorio de los resultados obtenidos por otros medios o como generador de conjeturas. Estas características confirmatorias y predictoras permiten su adopción como "laboratorio matemático" que genere la necesidad de los tratamientos matemáticos para dar cuenta de los resultados observables. (Ver capítulo cuarto, Octava Parte para más detalles del programa).

1.2.5 Experimentación, modelo y simulación aleatoria

Para fines de este trabajo damos las siguientes definiciones de los términos *experimentación*, *modelo* y *simulación*.

Cuando queremos estudiar un fenómeno como el lanzamiento de una moneda podemos analizar varias características: número de giros, altura,

posición inicial, posición final, etc., para lo cual recurrimos a un experimento que busca explicar las causas y consecuencias de dicho fenómeno. En probabilidad, se establece que lo que importa analizar al “arrojar una moneda” es la posición final de la moneda respecto a sus dos caras, sin importar ninguna otra cosa que pueda ocurrir durante el proceso. Entonces, entenderemos por *experimentación* una realización de un experimento real o simulado bajo condiciones o variables controladas.

Un *modelo* es una versión simplificada de la realidad que pretende adquirir conocimiento de ella. El modelo permite una operatividad que no puede realizarse sobre la realidad y que, cuando está bien construido, suministra resultados que al ser interpretados se constituyen en afirmaciones sobre esa misma realidad. En pocas palabras, se puede decir que los modelos son representaciones hipotéticas de hechos reales que permiten explicarlos y preverlos.

Adoptamos *simulación*, como el proceso de diseñar y desarrollar un modelo de un sistema o proceso y conducir experimentos con este modelo con el propósito de entender el comportamiento del sistema o evaluar varias estrategias con las cuales se pueda operar el sistema. Si la simulación se realiza en la computadora la llamamos simulación computacional. En este trabajo se simuló el lanzamiento de una moneda y la escogencia del cliente, de las dos formas: Física y computacionalmente.

Por simulación aleatoria entenderemos la técnica de modelación en la computadora que se fundamenta en el comando “run experiment” y que permite la selección aleatoria de los elementos de un conjunto definido previamente. En este trabajo usaremos indistintamente los términos simulación computacional o simulación aleatoria para referirnos a lo mismo.

Como la metodología didáctica que se adopta en este trabajo se fundamenta en la simulación aleatoria de problemas o situaciones dadas en lenguaje natural, damos las etapas que implica realizar este proceso y que sirvieron de guía para el desarrollo de nuestras actividades:

1. Una situación problema que involucra un fenómeno aleatorio. (Una promoción de paletas al cara y sello).
2. Recurrir en primera instancia a realizar el experimento físico real, con el fin de caracterizar el proceso y poder reconstruirlo.
3. Enseguida se define un modelo para esa situación y se clarifican los datos del modelo suministrados por la situación.
4. Se implementa el modelo en otro experimento físico real simplificado

- (modelo físico), para comparar y evaluar su similaridad con los resultados del fenómeno inicial.
5. Se traduce el modelo en los términos del lenguaje computacional (el programa Probability Explorer) para resolver los limitantes del modelo físico (modelo computacional).
 6. Se corre el programa y se obtienen resultados.
 7. Se interpretan los resultados y se dan conclusiones.

1.3 LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La convergencia estocástica hace posible el estudio de los fenómenos aleatorios en su conjunto, ya que individualmente son impredecibles. Para analizar la dificultad de la comprensión de la convergencia, hay que distinguir entre las leyes empíricas de los grandes números (la que se observa al recoger datos estadísticos de cierto fenómeno) y las correspondientes leyes matemáticas deducidas en forma de teoremas por diferentes probabilistas y que pueden ser demostradas formalmente.

La convergencia empírica es observable en la realidad, por ejemplo, la proporción de recién nacidos varones en un hospital a lo largo del año termina equilibrándose alrededor de los dos sexos. Es filosóficamente interesante que una regularidad global surja de la variabilidad local, que parece inherente al curso de la naturaleza "libertad individual bajo restricciones colectivas". Esa correspondencia empírica, hace que las correspondientes leyes matemáticas de los Grandes Números se justifiquen como un buen modelo para los fenómenos aleatorios, aunque no contesta la pregunta de si es posible que los alumnos sean capaces de diferenciar entre el modelo y la realidad, ya que de hecho vemos que con frecuencia se espera una convergencia empírica demasiado rápida o demasiado exacta.

Si se observa un número considerablemente grande de situaciones de la misma clase, que dependen de causas que varían irregularmente, es decir, sin variación sistemática en una dirección, se comprueba que la proporción del número de veces con que se observa cierto evento es aproximadamente constante. En seguida se presenta una definición de esta ley.

Sea A un evento definido en un espacio muestral, cuya frecuencia de ocurrencia en n experimentos es $f(A)$, entonces cuando n aumenta considerablemente -con límite al infinito- y se repite el experimento cualquier número de veces bajo las "mismas condiciones", entonces la frecuencia con que se da el evento respecto al número de pruebas se aproxima a un valor

constante que corresponde a la probabilidad teórica de ocurrencia de dicho evento.

Usando una representación algebraica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(A)}{n} \approx P(A)$$

Esta es una de las definiciones de La Ley de los Grandes Números.

Otra forma de explicar dicha ley es la siguiente: Al realizar un experimento aleatorio (cuyos resultados son impredecibles) constituido por un espacio muestral de dos o más eventos, al realizar el experimento en repetidas ocasiones podemos observar que los resultados a corto plazo con pocas pruebas son inestables, es decir, los resultados son variables, en cambio cuando el número de pruebas de cada experimento aumenta considerablemente (a largo plazo), los resultados de ocurrencia de cada evento se estabilizan poco a poco en cierto valor, el cual se asemeja al repetir el experimento; este valor de ocurrencia respecto al número de pruebas (frecuencia relativa) se aproxima al valor teórico de la probabilidad de dicho evento.

Desde este punto de vista pretendimos que los estudiantes pudieran comprender este concepto dentro del micromundo Probability Explorer y sobre todo estudiar con cierto detalle la forma como los estudiantes interactúan y construyen sus significados locales y globales.

2 ANTECEDENTES

2.1 ANTECEDENTES RELACIONADOS CON EL SIMULADOR PROBABILITY EXPLORER

Al contrario de otras opiniones o trabajos presentados que consideran que la simulación computacional debe ser introducida posteriormente al trabajo teórico asignándole un papel de confirmador de resultados obtenidos previamente, nosotros adoptamos en este trabajo una combinación de ambos puntos de vista: El de confirmar y confrontar resultados, y el de utilizar la simulación computacional como un medio de exploración de la realidad que motive precisamente la creación de modelos matemáticos que faciliten su interpretación.

Esta metodología justifica el uso del enfoque frecuencial de la probabilidad como el puente entre teoría y realidad que permite interpretar resultados teóricos en términos reales. A partir de la aceptación del comando *Run Experiment* como generador de extracciones aleatorias en la simulación computacional y con adecuados conteos, se puede inducir todas las propiedades básicas de la teoría de las probabilidades: la regla de la suma, la regla del producto tanto para eventos independientes como para eventos dependientes, el teorema de la probabilidad total y el teorema de Bayes.

A continuación se hace una breve síntesis de dos artículos relacionados con el uso del programa Probability Explorer desarrollados por la misma creadora del programa Hollylynne Stohl Drier a partir de su trabajo de doctorado: *Children's Probabilistic Reasoning With A Computer Microworld* en el año 2000.

"The Probability Explorer: A research-based microworld to enhance children's intuitive understandings of chance and data" y *"Children's Meaning-Making Activity With Dynamic Multiple Representations In A Probability Microworld"*, son dos artículos publicados por Hollylynne Stohl Drier (2000) en internet, donde la autora justifica el uso y la necesidad de la herramienta computacional como un micromundo, donde es posible que los estudiantes puedan desarrollar un pensamiento probabilístico.

En estos artículos se describen los resultados de un experimento de enseñanza con tres niños de cuarto grado entre 9 y 10 años durante seis

semanas, investigando el razonamiento probabilístico bajo el micromundo computacional Probability Explorer en el cual los niños usaban representaciones icónicas para mostrar e interpretar datos en forma estática y como objetos dinámicos durante la simulación de experimentos aleatorios. Este software fue desarrollado por la misma autora basado en una teoría constructivista de aprendizaje e investigación sobre el uso de micromundos con estudiantes. Para la autora, el ambiente computacional, las actividades significativas, instruccionales y lúdicas, junto con la motivación de los estudiantes, sus interacciones sociales y a través del computador, operan todos interactivamente como agentes de construcción significativa de conceptos probabilísticos en los estudiantes, donde el micromundo computacional ofrece la posibilidad de desarrollar las concepciones de cada estudiante, confrontándolas y modificándolas mientras se reflexiona sobre la experiencia donde se confirman o refutan sus intuiciones a través de perturbaciones mediadas por el docente y la herramienta.

Como dice Drier (2000), este ambiente no le enseña a los estudiantes sobre probabilidad, en lugar de eso, el ambiente es un escenario *cuasi tangible* donde los estudiantes pueden desarrollar habilidades de razonamiento probabilístico a medida que utilizan las herramientas disponibles en el micromundo para diseñar sus propios experimentos y analizar datos generados aleatoriamente. La intención de Drier y de los autores de este trabajo, no era reemplazar las experiencias físicas con simulaciones digitales, si no establecer conexiones significativas entre los dispositivos físicos y los dispositivos virtuales para que dicha transición fuera lo más natural posible.

La autora resalta la ventaja de amplificación del instrumento de mediación, que permite a los estudiantes analizar los resultados experimentales de forma visual al comparar las cantidades y observando el orden en que ocurren los resultados, desarrollando habilidades en la comprensión de múltiples representaciones que cambian instantáneamente y con propiedades que los dispositivos físicos difícilmente pueden ofrecer. En este caso el micromundo del computador no solo se conecta con el mundo físico del niño a través del lenguaje icónico dinámico, si no que extiende sus acciones potencialmente disponibles en este nuevo "mundo" matemático, donde el uso de estas representaciones como unidades dinámicas de análisis permiten al niño visualizar conceptos como la Ley de los Grandes Números y desarrollar usos apropiados de la heurística de representatividad.

Otra ventaja que impulsó a la autora en este trabajo, fue la dificultad para crear dispositivos físicos como monedas, dados cargados alterando su probabilidad de ocurrencia, experimentando con situaciones aleatorias no equiprobables similares a situaciones reales donde es común aplicar la heurística

equiprobable a situaciones como la probabilidad de ganar o perder un partido de fútbol, en el cual, es altamente improbable que ambos equipos tengan verdaderamente igual probabilidad de ganar. Probability Explorer permite al usuario ambientar situaciones no equiprobables con la herramienta de “pesos” que asigna diferentes valores de probabilidad de ocurrencia a un evento.

En su primer artículo, la autora da cuentas de resultados satisfactorios sobre la capacidad de visualizar el fenómeno de la Ley de los Grandes Números, evidenciado en el uso de movimientos corporales y la descripción verbal que hicieron los niños sobre la variabilidad de los resultados de un experimento aleatorio con pocas pruebas y la estabilización a largo plazo, que sugieren que los análisis dinámicos de las representaciones gráficas ayudaron a conceptualizar y dar significado a este fenómeno. También la autora hace un relato sobre el manejo de algunos espacios muestrales compuestos de dos eventos, en los cuales los niños aplicaban heurísticas basadas en su experiencia con la herramienta, que los autorizó a realizar conjeturas sobre nuevos espacios muestrales con buenos resultados.

En conclusión, el uso del simulador o Explorador de Probabilidad, extiende las experiencias típicas con dispositivos físicos y permite al docente orientar al niño dentro de la lúdica del juego, a experimentar, predecir y descubrir ideas de probabilidad, usando representaciones múltiples con objetos estáticos como dinámicos, generando un ambiente propicio para la construcción significativa de razonamientos probabilísticos puestos a prueba dentro de este micromundo.

2.2 OTRAS INVESTIGACIONES

A continuación se relata un resumen de las principales características y resultados obtenidos en tres investigaciones muy relacionadas con nuestro trabajo, y que se describirán a continuación:

A nivel local, en la Escuela de Matemáticas de la UIS, se cuenta con un proyecto de especialización desarrollado por Alexander Reátiga (2004), llamado, “*Confrontación Entre Realidad Y Modelo Teórico: Una Propuesta Para Desarrollar La Intuición Probabilística En Niños De Sexto Grado*”, el cual es una experiencia de aula que buscaba posibilitar en el estudiante, el desarrollo de la intuición probabilística acerca de los siguientes temas: espacio muestral, certeza e incertidumbre de un suceso, azar, naturaleza de pruebas experimentales, estructura de eventos, relaciones entre eventos simples y distribuciones, tratamiento de residuos, sesgos asociados a experimentos aleatorios y ley de los grandes números, a través de la realización de actividades de carácter lúdico bajo un enfoque frecuencial.

Desarrolló cuatro talleres con 19 estudiantes del grado sexto del Gimnasio Saucará de Bucaramanga, con edades entre 11 y 12 años, tratando de evitar al máximo la intervención del profesor en su desarrollo. A continuación se presentan las conclusiones generales a las que llegó el autor sobre el desempeño de los estudiantes en la realización de los cuatro talleres a través de las cinco categorías de análisis.

1. **Distinción entre Certeza e Incertidumbre.** En un principio los estudiantes creían tener certeza en la predicción de los resultados. Las actividades sirvieron para corregir algunas concepciones erróneas de los estudiantes y aceptar la incertidumbre de los resultados para caracterizar un fenómeno aleatorio.
2. **Naturaleza de las Pruebas Experimentales.** Al principio los estudiantes evidenciaban un pensamiento causal para justificar los resultados aleatorios de un experimento con dados y poder influir en los mismos, como la cantidad de fuerza, número de giros y posición del dado. La experimentación física es necesaria para corregir errores en las concepciones relacionadas con el azar y la naturaleza de las pruebas experimentales ya que permiten confrontar sus creencias con la realidad.
3. **Relaciones entre resultados individuales y patrones de resultados.** Ante una situación que involucraba un espacio muestral no equiprobable como los resultados de la suma de dos dados, los estudiantes no alcanzaron a construir un modelo claro que les permitiera predecir futuros resultados. Solo lograron modificar su sesgo de equiprobabilidad a partir de la experimentación física, pero fueron incapaces de construir el espacio muestral teniendo en cuenta la conmutatividad de los eventos. Para el autor y para nosotros, es necesario realizar varias experiencias concretas y simuladas, para que los estudiantes aprecien mejor el comportamiento de los resultados a medida que aumentan las iteraciones, para que después los estudiantes puedan inferir en otro tipo de experiencias hipotéticas. También es necesario determinar el grado de comprensión y manipulación que tienen los estudiantes con las proporciones.
4. **Estructura de los Eventos.** A pesar de la experimentación, la mayoría de estudiantes no pudieron comprender el significado de la conmutatividad de los resultados en la suma del lanzamiento de dos dados, esta falta en la comprensión de la estructura del espacio muestral causó dificultades en el entendimiento de la distribución frecuencial. Para que un estudiante pueda construir la estructura de eventos de un

experimento, se deben diseñar actividades propias en este aspecto, además, implica el manejo de diferentes tipos de representación que faciliten la identificación del espacio muestral en diferentes experiencias, partiendo de la experimentación física, lo cual faltó en el trabajo de Reatiga.

5. **Tratamiento de residuos.** La diferencia entre el valor esperado y el valor realmente dado, ocasionaron serios inconvenientes a los estudiantes para identificar las frecuencias de los resultados y llegar a compararlas para establecer regularidades entre ellas, lo que se justifica por el pensamiento determinístico de los estudiantes que les impide observar algún parecido o cercanía entre los valores.

El autor hace referencia a la necesidad de asistir al estudiante y que reciban cierta instrucción para modificar sus intuiciones, sin llegar a una metodología conductista, y que el docente no se convierta en un simple observador del proceso de experimentación. Esta recomendación se tuvo en cuenta en este trabajo, a la hora de implementar un medio computacional para estudiar los conceptos de probabilidad relacionados con la Ley de los Grandes Números desde un punto de vista frecuencial, haciendo uso de tablas de frecuencias absolutas y relativas, así como de gráficas que permitieron a los estudiantes percibir la tendencia de regularidad que tenían los datos colectivos de un experimento aleatorio, mejorar las falencias y optimizar los resultados de este trabajo el cual fue muy valioso para nuestro propósito; teniendo en cuenta que el docente es un facilitador que permite acercar los recursos disponibles para el uso y beneficio del estudiante, y la persona que propone actividades adecuadas para el proceso de construcción significativa de conceptos que hagan ver al estudiante la aplicación e importancia de este aprendizaje.

Un trabajo de mayor relevancia es el llamado: “**Estudios Sobre El Papel De La Simulación Computacional En La Comprensión De Las Secuencias Aleatorias, La Probabilidad Y La Probabilidad Condicional**”, realizado por Gabriel Yáñez Canal en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV – IPN) de México en el año 2003 como trabajo de doctorado y el cual evidencia el desarrollo probabilístico con un simulador computacional llamado Fathom.

Este trabajo doctoral presenta los resultados de una investigación realizada para conocer el efecto que tiene un proceso de enseñanza aprendizaje fundamentado en el enfoque frecuencial de la probabilidad implementado a través de la simulación computacional, sobre la comprensión de los estudiantes respecto a las secuencias aleatorias, la probabilidad y la probabilidad condicional.

Se resalta en la justificación de éste trabajo, que el uso exclusivo del lenguaje formal algebraico utilizado en la mayoría de textos básicos de probabilidad -como sistema semiótico de representación- no contribuye a la superación de las malas concepciones acerca de la probabilidad, sino por el contrario, las conserva y en algunos casos las fortalece a través del tiempo.

Plantea la necesidad de realizar experiencias que ayuden a generar comprensión alrededor del experimento aleatorio, pero dadas las pocas repeticiones que se realizan es imposible con una sola práctica obtener una buena estimación de los resultados posibles y percibir el comportamiento de las secuencias aleatorias que permita corregir algunas malas concepciones. Para suplir esta carencia de suficientes experiencias, el autor hace uso de la computadora, donde es posible, con simulación, representar el experimento aleatorio y realizar muchos ensayos en un corto espacio de tiempo.

Las actividades que se realizaron para alcanzar los objetivos que plantean cada una de las preguntas anteriores, se presentaron durante un curso de 52 horas de clase en el que, en un ambiente de resolución de problemas, se abordaron los temas básicos de la teoría de las probabilidades. Experimento aleatorio, espacio muestral, medida de probabilidad, equiprobabilidad, ley de la suma y del complemento, probabilidad condicional, regla del producto, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. El curso se fundamentó en el uso de la simulación computacional implementada a través del paquete Fathom.

La investigación fue de tipo cualitativo a través de un estudio de casos para estudiar durante un semestre académico la evolución que sufrieron los estudiantes de sus conceptos iniciales bajo la influencia de la metodología didáctica planteada. La población estudiada eran estudiantes universitarios de primeros semestres de ingeniería con edades entre los 18 y 20 años. La muestra estuvo conformada por seis casos que eran estudiantes de segundo semestre de Ingeniería de Control y Automatización del IPN y que se inscribieron voluntariamente al curso. Este trabajo, además de justificar, recopila un análisis profundo de las bases teóricas creadas hasta el momento y refleja en gran parte nuestra metodología.

Algunas conclusiones relevantes relacionadas con nuestro enfoque fueron:

- Los estudiantes no alcanzaron un nivel de comprensión suficientemente claro del concepto de probabilidad frecuencial.
- La simulación computacional de la probabilidad, permite superar algunos de los sesgos o malas concepciones que los estudiantes poseían sobre

las secuencias aleatorias o sobre el valor de las probabilidades en experimentos compuestos. Estos sesgos fueron: el sesgo de los valores recientes, el sesgo de desorden, el sesgo de equiprobabilidad y la concepción de la variación constante de las frecuencias relativas.

- Los estudiantes no lograron desarrollar un concepto de la simulación computacional de probabilidad suficientemente sólido que lo hicieran independiente de los resultados en otras representaciones.
- La dificultad en el manejo del lenguaje de programación de Fathom, fue un obstáculo para preferir el uso de otras herramientas en la solución de situaciones probabilísticas en lugar de las simulaciones.

Estas conclusiones nos llevaron a pensar en la escogencia de un simulador más sintáctico y de fácil manejo como lo es Probability Explorer, y en la necesidad de llevar a cabo la experimentación real de las situaciones aleatorias para alcanzar un mayor nivel de comprensión y facilitar la aceptación de la herramienta como un generador de experimentos aleatorios.

Destacamos el artículo: “**The Co-ordination of Meanings for Randomness**”, el cual es una abstracción que resume el trabajo doctoral del mismo autor David Pratt (1998). En este artículo el autor relata los principales resultados de un estudio dirigido a observar cómo un grupo de niños construían significados para la aleatoriedad en un ambiente computacional llamado Chance Maker (Constructor de Probabilidad) cuyo entorno pedagógico particular es un dominio estocástico de abstracción.

La intención del autor era estudiar las intuiciones previas de los estudiantes y analizar las posibles modificaciones o nuevos significados que los niños podían generar dentro del micromundo, donde el micromundo era el medio expresivo para analizar las acciones del aprendiz y una ventana a través de la cual las matemáticas se convertían en un sistema observable a la luz de la teoría de Noss & Hoyles. Pratt estudia la unión de *redes* formadas entre las intuiciones estocásticas de los niños con las herramientas basadas en el computador.

Estas intuiciones previas (primarias) son denominadas por Pratt como *significados locales* o *iniciales* los cuales se conectan unos con otros para formar redes de nuevos significados, llamados *significados globales*, que surgen del proceso de experimentación y retroalimentación con situaciones aleatorias dentro del micromundo computacional y la interacción social entre los aprendices y el profesor investigador. Estas conexiones se manifiestan como construcciones llamadas *abstracciones situadas*, heurísticas generalizadas que los estudiantes crean y aplican dentro de su micromundo estrecho o *situado* y que los autoriza para realizar acciones dentro de este

dominio de abstracción. Un ejemplo es el significado de *controlabilidad* de los resultados aleatorios, como veremos en los resultados de esta investigación algunos estudiantes manifestaron una fuerte creencia de poder controlar o manipular los resultados del lanzamiento de una moneda con tan solo ubicar la moneda (en la mano) en la posición contraria a la deseada, esta abstracción fue el resultado de algunas experiencias en las cuales su idea fue válida y fue aplicada indiscriminadamente para controlar los resultados y creer que podían predecir un evento.

Dentro de estos significados locales que fueron identificados o reconocidos en el trabajo previo con el micromundo por el autor fueron:

- i. **La impredecibilidad.** Este significado se relacionó con la evidencia lógica de pensar que si los resultados de un experimento no se podían predecir, entonces era porque el fenómeno era aleatorio.
- ii. **La incontrolabilidad.** En la cual los niños asociaron el efecto causal de la fuerza a los resultados del experimento sin ningún éxito, ya que en las simulaciones computacionales no pudieron probar dicha conjetura.
- iii. **La irregularidad de los resultados.** En esta parte los estudiantes reflejaron otro razonamiento al analizar las secuencias aleatorias para tratar de predecir futuros resultados.
- iv. **La imparcialidad.** En la cual los niños relacionaban la imparcialidad del dispositivo aleatorio con su apariencia física, de tal forma que en un diagrama de torta que no mostrara sectores uniformes (iguales) entonces era porque no era justo y tampoco aleatorio.

Un quinto significado encontrado por Pratt, estaba relacionado directamente con la herramienta llamada el **control del computador** es decir la creencia por parte de los estudiantes de la existencia de algún algoritmo dentro del computador que generaba los resultados, pero sin encontrar dicho patrón.

Durante las actividades, Pratt identificó algunos atributos de estos significados evidenciados durante el proceso:

- El *intercambio de significados*, como entre la incontrolabilidad y la impredecibilidad.
- El *uso contradictorio de significados*, como el control de resultados y la irregularidad de los resultados, por ejemplo manifestar que la fuerza controla los resultados y negar la aleatoriedad del dispositivo, para luego

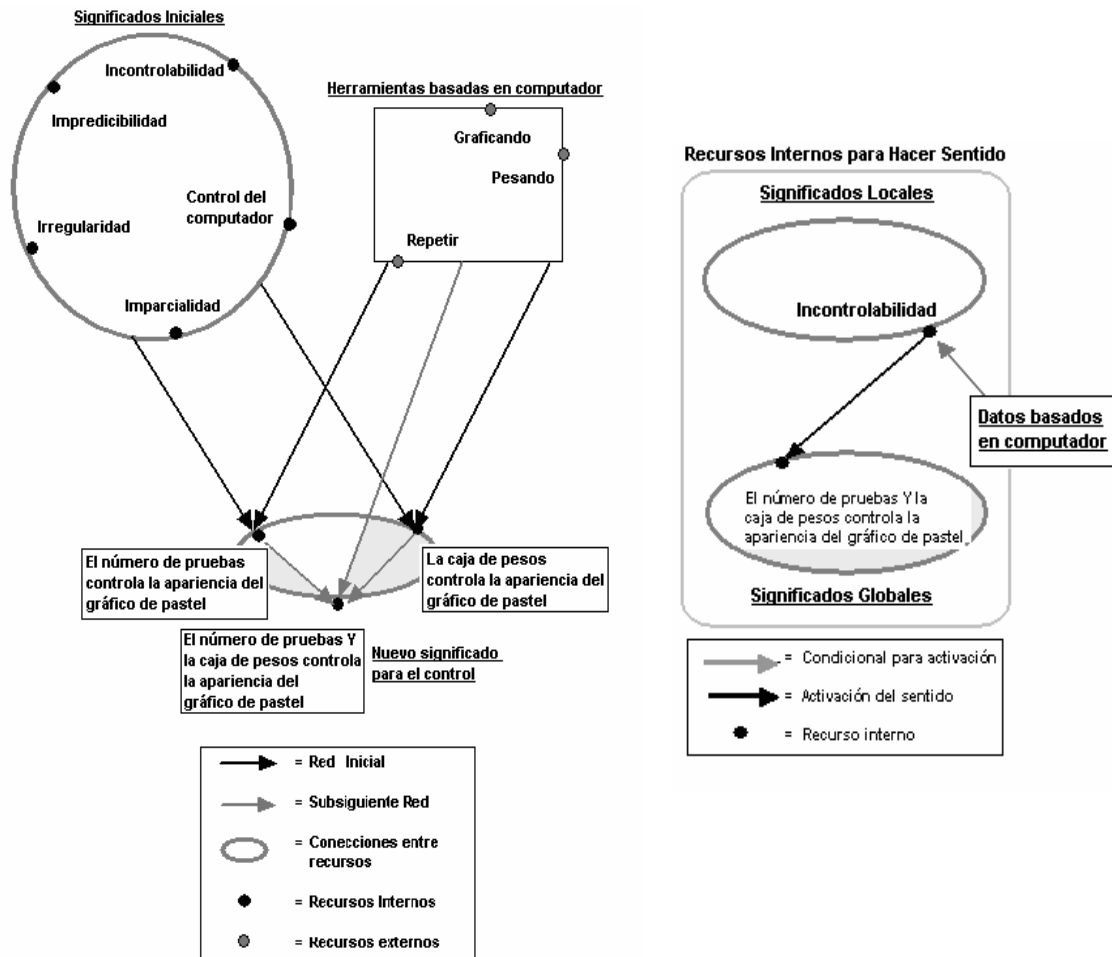
darse cuenta de la impredecibilidad de los resultados y afirmar que el dispositivo es aleatorio.

- Los *significados se conectan débilmente*. El uso contradictorio de significados es una manifestación que sugiere que los significados locales -ó iniciales- están conectados entre sí, pero el uso de la herramienta *motiva* significados contradictorios entre ellos, donde un significado no implica a otro directamente y las nuevas conexiones al parecer no son vistas como confiables y requieren de un proceso interno prolongado a través del uso de la herramienta.
- El *uso indiscriminado de los significados*, el cual se refiere al uso general que los estudiantes hacen a sus significados locales en situaciones aleatorias de largo y corto plazo, como por ejemplo la creencia de la regularidad de los resultados en las secuencias aleatorias tanto para pocos resultados como para muchos.
- *Aquello que no es determinístico*, en la cual los aprendices no tenían conocimiento sobre las características de un fenómeno aleatorio, luego era natural que trataran de determinar si el fenómeno tenía características determinísticas como el patrón en las secuencias (regularidad), la predecibilidad y el control de los resultados. La ausencia de estas características son las que definen un fenómeno aleatorio para el niño, para lo cual se hace necesario posibilitar la apreciación de características positivas que se dan al analizar el fenómeno a largo plazo como la estabilidad.

Varios de estos significados y atributos fueron también encontrados en nuestra investigación por lo que más adelante nos referiremos a ellos en el análisis de resultados.

Un ejemplo de la emergencia de *significados globales* mediado en el micromundo computacional es la construcción del significado para un par de niños sobre la comprensión del comportamiento aleatorio a largo plazo, donde los significados que surgen entre las conexiones de los significados iniciales (representados en el círculo del diagrama) como el número de pruebas y la caja de pesos o espacio muestral, generan nuevos significados en forma de abstracciones situadas como: “El número de pruebas y la caja de pesos controla la apariencia del gráfico de torta”, donde el aumento de las actividades con el micromundo Chance Maker permitieron la coordinación de estas dos abstracciones situadas que se conectaron -como una red- para formar este nuevo significado global.

Estas abstracciones situadas no están desconectadas de los significados locales, por el contrario se entrelazan para formar nuevos significados que comienzan a ser *confiables* en la medida que se ponen a prueba dentro del micromundo y le van a permitir usarlas en otras situaciones aleatorias para explicar el comportamiento del fenómeno a largo plazo. Pratt resume en el siguiente diagrama la construcción de estos significados globales.



3 METODOLOGÍA

Nuestro trabajo fue realizar una investigación de tipo cualitativo para hacer un análisis descriptivo de cómo un grupo de estudiantes construyeron un significado sobre la Ley de los Grandes Números y la forma como se modificaron o conservaron las malas concepciones que tenían los estudiantes, relacionadas con el azar, después de hacer uso de una herramienta computacional en un contexto real. La duración de la investigación fue de un año aproximadamente.

Dada la complejidad que implica analizar los efectos de una estrategia de aprendizaje sobre este tema, utilizamos como método de investigación el *estudio de casos* para analizar los cambios que presentaron los estudiantes en sus formas de pensar durante la aplicación de las actividades en el aula, bajo el enfoque aplicado. El propósito no era solucionar un problema sobre la enseñanza de la probabilidad, sino aplicar una estrategia de trabajo y analizar los efectos que implicó la utilización de una herramienta computacional en el aprendizaje de un concepto específico.

3.1 POBLACIÓN Y MUESTRA

La población objeto de estudio fue un grupo de 40 estudiantes que cursaban el grado octavo, jornada de la mañana, en el Instituto Técnico Industrial Francisco de Paula Santander de Puente Nacional (Santander - Colombia), cuyas edades oscilaron entre los 12 y 15 años, en un ambiente rural de estratos bajo-medio, los cuales no habían recibido ningún tipo de enseñanza formal en los conceptos de probabilidad y que no fueron sometidos a ningún tipo de instrucción en el desarrollo de la investigación. Durante el desarrollo de las actividades se escogieron 12 estudiantes por su compromiso y dedicación, y al final se tuvo en cuenta dos casos en especial: Camilo y Gerardo.

Las actividades desarrolladas por los estudiantes se dividieron en varias fases, las primeras fueron diseñadas con anterioridad y otras durante el desarrollo de las actividades de acuerdo a los resultados obtenidos:

Fase 1. Diagnóstico.

- Fase 2.** Análisis del diagnóstico.
- Fase 3.** Presentación de un problema: “La Promoción de Paletas” y predicción de resultados.
- Fase 4.** Experimentación real.
- Fase 5.** Análisis de la información.
- Fase 6.** En busca del modelo matemático.
- Fase 7.** Exploración de la herramienta computacional (Probability Explorer).
- Fase 8.** Simulación computacional de la promoción de paletas.
- Fase 9.** Diseño, experimentación y simulación de una Nueva Promoción de Paletas.
- Fase 10.** Evaluación final.

La prueba diagnóstica y la actividad de experimentación real se trabajó con la totalidad de la población, pero después de analizar los resultados del diagnóstico, el interés de los estudiantes y la disposición de los padres de familia para permitir a los estudiantes asistir a la institución en horario extra clase, se hizo una primera clasificación de veinte estudiantes que desarrollaron la quinta fase y de los cuales se seleccionó un grupo de diez estudiantes que desarrollaron las actividades en parejas hasta la Novena Fase y finalmente se sometió a dos de estos estudiantes a la evaluación final de la última fase. A continuación se hará una descripción de cada una de las fases desarrolladas por los estudiantes.

3.2 FASES DE LA INVESTIGACIÓN

Fase 1: Diagnóstico

En esta primera fase se aplicó una prueba escrita con el propósito de conocer las intuiciones primarias de los estudiantes relacionadas con la probabilidad, detectar las malas concepciones y analizar juicios de probabilidad de algunas situaciones hipotéticas con monedas y urnas por parte de los estudiantes; y así tener un punto de referencia para observar las posibles modificaciones en las concepciones durante y después del desarrollo de las actividades para evaluar los cambios conceptuales. Esta prueba estuvo formada por nueve preguntas de tipo interpretativo y argumentativo, las cuales fueron contestadas en una hora en forma individual. (Ver Capítulo Quinto: Presentación de Actividades, Diagnóstico).

Fase 2: Análisis del Diagnóstico

Una vez aplicado el diagnóstico, en forma sistematizada se diseñó una tabla con las respuestas de todos los estudiantes con el fin de comparar y detectar las principales singularidades que dieran indicios de malas concepciones,

para así identificar y clasificar el pensamiento (probabilístico o determinístico) de cada estudiante. Una vez identificados los estudiantes con las respuestas más llamativas, se procedió a entrevistar a algunos de ellos para corroborar sus respuestas y profundizar un poco en sus argumentos.

Fase 3: Presentación de un Problema: “La Promoción de Paletas” y predicción de Resultados.

Se presentó a los estudiantes una situación hipotética relacionada con una promoción de paletas que deseaba implementar una vendedora de helados en la institución (la señora Blanca). La promoción consistía en que cada cliente jugaba la paleta al *cara-sello* apostando su valor (\$200). El cliente debía escoger entre cara y sello, se lanzaba la moneda, si el cliente *acertaba*, se llevaba la paleta *GRATIS*, pero si por el contrario el cliente *no acertaba*, tendría que dar los \$200 sin llevar paleta. Los estudiantes debían hacer un juicio sobre la efectividad de dicha promoción a largo plazo, es decir, si la promoción de paletas dejaba o no ganancias superiores a las ventas común y corrientes sin promoción.

Conociendo las condiciones del problema, los estudiantes respondieron once preguntas relacionadas con la comprensión, ventajas, pronóstico y deseos de participar en la promoción, con el objetivo de percibir las intuiciones probabilísticas relacionadas con la situación aleatoria. En general los estudiantes llegaron a la conclusión de que la forma de comprobar la efectividad de la promoción era hacer el experimento en la vida real. La duración de este cuestionario fue de una hora. (Ver Capítulo Quinto: Presentación de Actividades, Primera Parte: La promoción de paletas y pronóstico de resultados).

Fase 4: Experimentación Real.

Se les proporcionó a los estudiantes 200 paletas para que pudieran hacer una prueba real de la promoción en la institución durante una jornada de descanso (30 minutos). Los estudiantes se organizaron en grupos de trabajo para realizar la publicidad con carteles y dando información por los salones, tratando de vincular al mayor número de estudiantes en la actividad.

Se organizaron cuatro puntos de venta a los cuales se asignó un tipo específico de lanzamiento donde el cliente o el vendedor lanzaron la moneda en la mano o dejándola caer al suelo. Cada punto de venta estuvo conformado por cuatro estudiantes con una función específica (lanzar, registrar, repartir y cobrar). Se hizo el registro de todos los lanzamientos especificando la escogencia del cliente y el resultado de la apuesta (ganó o

perdió el cliente). El objetivo de cambiar las condiciones de lanzamiento en cada punto de venta era demostrar a los estudiantes que los resultados no dependían de la persona que lanzaba o de algún factor físico en el lanzamiento (posición inicial, número de giros, altura y fuerza). O por lo menos motivar cambios en las malas concepciones de los estudiantes al comparar los resultados de los cuatro subgrupos.

La actividad fue video grabada como evidencia para recolectar opiniones de los clientes que más ganaban o más perdían, y de los estudiantes que desarrollaron la actividad. Los estudiantes de cada punto de venta, recibieron con anterioridad las instrucciones como se debía desarrollar la actividad resaltando la importancia de recolectar la información con la mayor exactitud posible, ya que de la veracidad de los datos dependía el juicio que ellos pudieran hacer de la promoción. (Ver Capítulo Quinto: Presentación de Actividades, Segunda Parte: La venta)

Fase 5: Análisis de la Información.

Se organizaron 20 estudiantes en parejas, a los que se les asignó el análisis parcial de uno de los cuatro puntos de venta, con los datos obtenidos en los registros de la experimentación real a través de un taller diseñado con anterioridad. Cada pareja hizo un análisis parcial del desarrollo de la promoción para los primeros 10, 20, 40, 60 y el total de lanzamientos que tuvieron que hacer para despachar sus 50 paletas, completando tablas y gráficos de barras en forma frecuencial y porcentual respecto a la cantidad de clientes que escogían un lado de la moneda, la cantidad de caras y sellos que salieron en la moneda, y el número de ganadores y perdedores. Respondieron algunas preguntas respecto a las percepciones que tuvieron de los resultados obtenidos con el propósito de analizar si los estudiantes captaban alguna regularidad o variabilidad en los resultados. Se hicieron algunas entrevistas video grabadas con estudiantes seleccionados con el perfil del diagnóstico. (Ver Capítulo Quinto: Presentación de Actividades, Tercera Parte: Análisis Parcial de las Ventas y Cuarta Parte: Análisis Específico de Resultados de los Subgrupos, duración tres horas).

Finalizada la sistematización de los resultados de cada subgrupo, se procedió a comparar los resultados entre parejas para verificar las cantidades obtenidas, luego se seleccionó una pareja por cada punto de venta para que hicieran una exposición y socializar los resultados haciendo uso de un proyector de acetatos, en la que cada pareja hacía un análisis general de las cantidades y los porcentajes obtenidos a medida que aumentaba el número de clientes apoyados de las tablas y gráficos de barras (duración dos horas). Cada una de las 10 parejas completó una tabla comparativa para acumular

los resultados de los cuatro subgrupos de venta, para que basados en la socialización y con los resultados sistematizados tuvieran un sentido propio de la experiencia. (Ver Capítulo Quinto: Presentación de Actividades, Quinta Parte: Comparando los resultados de los subgrupos, duración una hora). En el mismo taller se hicieron preguntas para percibir los pensamientos de los estudiantes al comparar los resultados de los cuatro puntos de venta.

Concientes de que el número de lanzamientos de la moneda necesarios para despachar las 50 paletas eran muy pocos (entre 87 y 103) para que los estudiantes percibieran alguna regularidad, se les presentó una SEXTA PARTE del taller en la cual se acumularon los resultados de los cuatro puntos de venta para analizar las variables con las 200 paletas y aumentar la convergencia entre los resultados. En esta parte los estudiantes compararon los resultados de cualquier punto de venta con los resultados de todo el grupo y describieron sus observaciones, además hicieron pronósticos para estimar los resultados de la promoción a largo plazo (en 25 días), con el propósito de evidenciar la percepción de alguna regularidad. Hicieron conclusiones parciales de la promoción y varios estudiantes expresaron sus deseos por querer repetir la experiencia y analizar si los resultados se repetirían o cambiarían. (Ver Capítulo Quinto: Presentación de Actividades. Sexta Parte: Análisis General de los Resultados del Grupo, duración dos horas).

Hasta el momento ningún estudiante percibía regularidad relacionada con la Ley de los Grandes Números, por lo que se les planteó la necesidad de buscar un medio de repetir la experiencia teniendo en cuenta de que no se disponía de paletas ni de clientes que escogieran el lado de la moneda. Se podía simular la experiencia sin paletas, pero en este caso especial donde el cliente era el que escogía el lado de la moneda ¿cómo se podía simular la opinión del cliente?

Fase 6. En Busca del Modelo Matemático.

Se escogieron 10 estudiantes de acuerdo a su disponibilidad, el desempeño y el limitante de los recursos informáticos con miras al desarrollo de las siguientes actividades. Se creó un modelo abstracto que pudiera reemplazar el uso de clientes y paletas para determinar la efectividad de la promoción a largo plazo a través del juego de cara y sello, suponiendo que la escogencia del cliente era aleatoria, se reemplazó por el lanzamiento de una segunda moneda. Como el fundamento de la promoción era comparar dos secuencias aleatorias: los resultados de lo que escogía el cliente y los resultados de la moneda después de cada lanzamiento, se modeló la situación haciendo uso de dos monedas, la primera que correspondía a la

elección del cliente y la segunda la que obtenía el vendedor de tal forma que cuando se lanzaban las dos monedas y coincidían los resultados (CC o SS) entonces era que ganaba el cliente, pero si no coincidían (CS o SC) entonces era que el cliente había perdido.

Cuatro de las cinco parejas simularon la promoción de 50 paletas con las dos monedas utilizando diferentes clases de moneda y de lanzamiento (en el suelo y en la mano), registraron los resultados, cuantificaron la cantidad de lanzamientos, número de ganadores y perdedores, número de caras y sellos para el cliente, y el vendedor, dinero recogido y el número de paletas despachadas; con el propósito de repetir el experimento real en condiciones similares. Acumularon los resultados completando la simulación de las 200 paletas y describieron sus percepciones comparando los resultados reales con los simulados. El inconveniente principal era no poder repetir el experimento las veces deseadas por la limitante de tiempo por lo que se planteó la necesidad de recurrir a otro medio que permitiera simular la promoción las veces y la cantidad deseada. (Ver Capítulo: Presentación de Actividades. Séptima Parte: Simulación de la Promoción de Paletas con dos monedas, duración cuatro horas).

Fase 7. Exploración de la Herramienta Computacional (Probability Explorer).

Se puso a disposición de los estudiantes un micromundo llamado *Probability Explorer 2.0*, un simulador probabilístico que permitió a los estudiantes simular la Promoción de Paletas. A través de una guía, se hizo una descripción del programa y se dieron algunas instrucciones sobre el manejo de la barra de herramientas y los comandos presentados como iconos ilustrativos con su respectiva función. Los estudiantes exploraron libremente la herramienta y simularon algunos experimentos, la mayoría entusiasmados comenzaron simulando el experimento de las paletas con dos monedas sin necesidad de indicarlo. La actividad se desarrolló con las cinco parejas anteriores, a dos de ellas se les hizo un seguimiento continuo con video grabadora para examinar con más detalle el proceso. La exploración se desarrolló durante media hora. (Ver Capítulo Quinto: Presentación de Actividades, Octava Parte: Explorando Probability Explorer)

Fase 8. Simulación computacional de la promoción de paletas.

Previamente se cargó en cada computador un archivo en Word correspondiente a un taller estructurado correspondiente a la Novena Parte, que sirvió como guía para respaldar el proceso desarrollado en la simulación computacional de paletas, donde respondieron las preguntas planteadas y

argumentaron con sus propias palabras utilizando las representaciones gráficas y tabulares que generaba el programa en las simulaciones. Las primeras indicaciones del taller pretendían evaluar el nivel de contextualización del problema real dentro de la herramienta, así como evaluar la interpretación de la tabla de frecuencias con relación a las variables del problema. Se continuó con el mismo enfoque de los talleres anteriores, en los cuales se siguió un proceso descriptivo aumentando el número de lanzamientos (10, 20, 40, 100 y 200), repitiendo las simulaciones, comparando resultados y escribiendo conclusiones con el objetivo de crear confianza en la herramienta al pretender que los estudiantes detectaran la similitud de los resultados reales con los obtenidos en las simulaciones, teniendo en cuenta la variabilidad en pocos lanzamientos y la relativa regularidad de los resultados con un mayor número de pruebas. Para ello los estudiantes contaron con los talleres desarrollados anteriormente con el fin de comparar los resultados reales y simulados para despachar las 50 paletas y luego para las 200 paletas. Estas simulaciones eran de cuidado ya que no era ejecutar un número determinado de lanzamientos, sino que debían realizar los lanzamientos necesarios para despachar el número exacto de paletas (proceso inverso).

Una vez dadas las condiciones que propiciaron un ambiente de confianza en la herramienta, los estudiantes hicieron simulaciones de la promoción de paletas con dos monedas a largo plazo, haciendo 5000 lanzamientos correspondientes a la situación hipotética de analizar la promoción en 25 días, para que contrastaran los resultados con los dados por los estudiantes en la predicción hecha en la Séptima Parte. Después volvieron a realizar simulaciones a corto y largo plazo para 100, 200, 300, 500, 1000, 2000, 5000 y 10000 lanzamientos, compararon los resultados con las demás parejas y escribieron conclusiones, esperando que hicieran un contraste entre los resultados. Todo el proceso se hizo sin hacer uso de ninguna instrucción conceptual sobre probabilidad ya que el objetivo principal de las actividades era *hacer sentido* de la Ley de los Grandes Números con ayuda del socio cognitivo en un ambiente de preguntas y discusiones entre el estudiante, los profesores y la herramienta, tratando de construir socialmente el conocimiento a partir de sus intuiciones y concepciones generadas durante el proceso. (Ver Capítulo Quinto: Presentación de Actividades, Novena Parte: Simulación Computacional de la Promoción de Paletas, duración 5 horas).

Al final de la actividad se preguntó si habían detectado alguna relación aritmética y cual era la conclusión final sobre el veredicto de la promoción de paletas a largo plazo. Los estudiantes redactaron un informe dirigido a la vendedora de helados -la señora Blanca- dando argumentos y conclusiones sobre la efectividad de la promoción. Adicionalmente, durante y al final de

esta fase, se hicieron entrevistas con todas las parejas para indagar sobre las percepciones, profundizando y discutiendo las conclusiones de los estudiantes en forma personal dentro del micromundo. Los archivos fueron recolectados e impresos como evidencia de las actividades y para el análisis posterior.

Fase 9. Diseño, experimentación y simulación de una nueva promoción de paletas.

Los estudiantes en vista de que no habían obtenido ganancias con la promoción de paletas al cara y sello, por iniciativa decidieron crear una Nueva Promoción de Paletas que garantizara su efectividad indicando a los estudiantes únicamente la utilización de un juego de azar práctico y que pudieran simular con el programa. En un ambiente de discusión, los diez estudiantes decidieron utilizar las balotas, pusieron las condiciones de la nueva promoción de paletas y buscaron la forma de probar su efectividad.

Configuraron una bolsa con 3 bolas amarillas y 2 bolas rojas de tal forma que una persona que quisiera participar extraía una bola, si sacaba la bola roja ganaba (el cliente no podía saber la cantidad de bolas en la bolsa), concientes de que en estas condiciones tenían ventaja sobre los clientes, sin abusar de ella.

Antes de probar experimentalmente, se hicieron algunas preguntas diseñadas en ese momento, enfocadas a indagar sobre las predicciones de la nueva promoción con el objetivo de evaluar algún indicio sobre el dominio de aproximaciones de resultados aleatorios teniendo en cuenta la Ley de los Grandes Números. Estas preguntas se diseñaron en el mismo instante de la actividad y los estudiantes las respondieron creando en el editor de texto Word un archivo de evidencia (para evitar escribir con lápiz y papel), para luego comparar con los resultados. En el mismo archivo los estudiantes comenzaron justificando la necesidad de una nueva promoción, escribieron las condiciones y ventajas de la misma.

Se puso a disposición de ellos una bolsa y las cinco bolas plásticas de colores, así como un paquete de 200 dulces, con las cuales podían hacer la simulación física de la promoción fuera del aula buscando la participación directa de muchos estudiantes ofreciendo como incentivo a los ganadores un dulce que equivalía a que el cliente ganara una paleta. (Ver Capítulo Quinto: Presentación de Actividades. Décima Parte: Nueva Promoción de Paletas, duración una hora)

Esta fase se desarrolló en horario de clase, durante la jornada de la mañana

(30 minutos). Los estudiantes se organizaron, buscando la participación de estudiantes, docentes y administrativos realizando en total 200 extracciones, hicieron registros de los resultados de cada participante en tablas (ver Capítulo Quinto: Presentación de Actividades, Registro simulación de la nueva promoción de paletas), para luego poder hacer un rápido análisis y contrastar los resultados con posteriores simulaciones en el programa Probability Explorer.

En la Onceava Parte, los estudiantes hicieron un análisis de los resultados de la simulación física con la nueva promoción y los compararon con los datos en las predicciones, e hicieron algunas conclusiones parciales en cuatro subgrupos de 50 extracciones y finalmente con la acumulación de las 200 extracciones. (Ver Capítulo Quinto: Presentación de Actividades, Onceava Parte: Análisis de la Simulación Real, duración una hora)

Luego, hicieron simulaciones computacionales de la promoción con el programa Probability Explorer y dieron respuesta a algunas preguntas por escrito y en entrevistas con el objetivo de discutir resultados y propiciar un ambiente generador de conceptos dentro del micromundo. (Ver Capítulo Quinto: Presentación de Actividades, Doceava Parte: Simulación Computacional de la Nueva Promoción de Paletas, duración 2 horas).

Fase 10. Evaluación final.

Finalizada la fase anterior, se aplicó una prueba escrita a dos de los 10 estudiantes y una prueba computacional a los mismos estudiantes, con el propósito de evidenciar algún cambio en las concepciones previas, así como las ventajas y desventajas de la herramienta computacional, pero sobre todo evidenciar la construcción del significado de la Ley de los Grandes Números.

i. Prueba computacional (Duración: 30 minutos)

Se escogieron dos estudiantes destacados por su nivel de argumentación y análisis, a los cuales se les planteó la siguiente situación en el ambiente de Probability Explorer. En ausencia del estudiante, previamente se configuró el programa para simular un experimento de urna con bolas de dos colores y se ocultó los atributos de la urna y de la balanza dentro del programa de tal forma que no hubiera forma de que el estudiante pudiera conocer la cantidad de bolas con las que se había configurado la urna.

El objetivo del estudiante era describir la configuración de la urna: ¿Cuántas bolas hay de cada color en la urna? Haciendo uso libre del simulador. El propósito de la actividad era evaluar el manejo del programa y el desarrollo

del concepto intuitivo de probabilidad frecuencial usando la Ley de los Grandes Números. Cada estudiante le correspondió una configuración diferente. Se observó y grabó el proceso seguido por el estudiante, cuando el estudiante creía llegar a una solución de la situación, se estableció un diálogo con el estudiante con el fin de que justificara su solución.

ii. Prueba escrita (Duración: 1 hora)

Se aplicó una prueba escrita similar a la prueba diagnóstica de la primera fase, con el objetivo de evaluar nuevamente las concepciones de los estudiantes y el nivel de conocimiento adquirido sobre los conceptos probabilísticos relacionados con la Ley de los Grandes Números, pero principalmente se puso a prueba el nivel de predicción de resultados en experimentos similares (con monedas y urnas) a corto y largo plazo, para evaluar el manejo de la variabilidad y la regularidad de los resultados aleatorios, además del estado de las concepciones previas de cada estudiante.

3.3 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Para desarrollar el proceso de triangulación, implementamos los siguientes instrumentos para la recolección de datos:

- **El diario de campo.** En el cual se tomaron nota de los detalles importantes que se presentaron en el desarrollo de las actividades con los estudiantes y que permitieron mejorar las actividades, así como estudiar aspectos relevantes en los procesos de comprensión y generación de significados.
- **Entrevistas video grabadas.** Con la debida autorización de los estudiantes y padres de familia, se realizaron video grabaciones generales de todo el proceso y en particular, de las respuestas que dieron los estudiantes en forma de entrevistas antes, durante y después del desarrollo de cada actividad, y cuando hubo necesidad de pedir alguna explicación adicional sobre las respuestas dadas en los talleres. Hubo un especial seguimiento de algunos estudiantes que se destacaron por sus respuestas en la prueba diagnóstica y durante el desarrollo de las actividades.
- **Informes escritos de los talleres.** Éstos fueron la principal fuente de información ya que en ellos se evidenció en parte el grado de

formalización y de comprensión que adquirieron los estudiantes al transcurrir el desarrollo de la aplicación de las actividades sobre los conceptos relacionados con la probabilidad y con la Ley de los grandes números. Además, los talleres sirvieron a los mismos estudiantes para comparar, recordar, corroborar y contrastar sus propios argumentos y predicciones, ya que los tuvieron a disposición durante el desarrollo de todo el proceso.

- **Los archivos del computador.** Al finalizar cada actividad de simulación computacional, los estudiantes grabaron el desarrollo de los talleres en los computadores para ahorrar tiempo y hacer uso de las propiedades que ofrecía el programa como copiar y pegar tablas de frecuencias y gráficos (de barras o circulares) obtenidos en las simulaciones. Estos archivos nos permitieron analizar las respuestas de los estudiantes y la evolución de sus concepciones.

3.4 CATEGORÍAS DE ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para el análisis de resultados de esta investigación, establecimos dos categorías de análisis *a priori* que se describirán a continuación:

- **Modificabilidad de las concepciones previas:** En la cual se analizarán hasta que punto las intuiciones previas y malas concepciones evidenciadas en el diagnóstico pudieron ser modificadas con la estrategia aplicada, es decir evaluar el efecto del aprendizaje de los nuevos significados relacionados con la interpretación de los resultados aleatorios de los experimentos tratados sobre el esquema de estas intuiciones y malas concepciones de cada estudiante.
- **Construcción del significado conceptual:** Esta categoría permitió establecer si la estrategia aplicada fue útil a la hora de construir el sentido de la Ley de los Grandes Números y formar un significado propio del concepto de probabilidad. En especial tuvimos en cuenta el proceso como los estudiantes construyeron su red de significados a partir de intuiciones relacionadas con las frecuencias relativas mediante la coordinación de significados.

4. PRESENTACIÓN DE ACTIVIDADES

4.1 Diagnóstico

El diagnóstico consistió en una prueba escrita estructurada de nueve preguntas aplicada a 40 estudiantes durante una hora, la cual tenía el propósito de indagar sobre las concepciones previas de los estudiantes y sus intuiciones primarias frente a situaciones aleatorias con lanzamientos de monedas y extracción de balotas. Se realizó un análisis superficial de las pruebas y se detectaron algunos estudiantes cuyas respuestas eran especiales o requerían de una justificación para comprender más a fondo sus respuestas. A estos estudiantes se les hizo una entrevista individual video grabada, una semana después de haber resuelto la prueba. A continuación se explica la intención de cada pregunta a la luz de los sesgos y malas concepciones relacionadas con la intuición de las frecuencias relativas.

i. Respetto a la naturaleza de los experimentos aleatorios

En la primera, segunda y cuarta pregunta, se quiso conocer, cómo los estudiantes concebían o justificaban los resultados de un suceso aleatorio como el lanzamiento de una moneda, respecto a la causa de los resultados, controlabilidad y comparación de situaciones con similaridad probabilística.

En esta primera pregunta, se quiso conocer, cómo el estudiante justificaba los resultados de un suceso aleatorio.

1. Si lanzas una moneda al aire, las posibilidades de que salga cara o sello dependen según usted de:
 - a. El número de giros.
 - b. La altura que alcance la moneda.
 - c. La suerte de la persona.
 - d. La posición inicial de la moneda.
 - e. Otro ¿Cuál?

En la segunda pregunta se quiso conocer la posición que el niño asumía frente a la falta o no, de control de un experimento aleatorio.

2. Si alguien le pidiera que lances una moneda al aire y saque "cara" como resultado, le dirías que:

- a. Es posible, porque: _____
- b. Es imposible, porque: _____

En la cuarta pregunta se pretendía evaluar el significado de la palabra suerte y el efecto de su posición en la primera pregunta al hacer un juicio de probabilidad comparando dos situaciones aleatorias similares.

- 4. a. Para usted ¿Qué es la suerte?
- b. Respecto a los resultados, es lo mismo que una persona lance 10 veces una moneda o que 10 personas lancen una moneda cada uno?

ii. Respecto al sesgo de desorden

En esta tercera pregunta se esperaba del estudiante un juicio de probabilidad sobre la ocurrencia de una secuencia aleatoria, la cual está asociada al sesgo de desorden dependiendo de la regularidad e irregularidad de los resultados, que como en el ejemplo de la lotería, es poco común la escogencia de números consecutivos como 1234 y se prefieren números en desorden como 3142.

- 3. Si lanzas una moneda **seis veces** (6) seguidas ¿Cuál de los siguientes resultados crees que es **MENOS** posible obtener? Justifica la respuesta.
 - a. CARA, CARA, CARA, SELLO, SELLO, SELLO.
 - b. SELLO, CARA, SELLO, CARA, SELLO, CARA.
 - c. CARA, CARA, SELLO, CARA, SELLO, SELLO.
 - d. SELLO, CARA, CARA, CARA, SELLO, CARA.
 - e. Todas son igualmente posibles.
Porque: _____

iii. Respecto al sesgo de los valores recientes.

Esta quinta pregunta tenía como propósito evidenciar la existencia o no del sesgo de los valores recientes en los estudiantes, ya sea en su forma positiva (creer que nuevamente saldrá cara) o negativa (falacia del jugador, creer que va a salir lo contrario, sello).

- 5. Si al lanzar una moneda se obtuvieron los siguientes resultados: **Cara - Cara - Cara - Cara**, al lanzar una vez más la moneda, el siguiente resultado será:
 - a. SELLO
 - b. CARA
 - c. Cualquiera de los dos
 - d. No se puede saber
Porque: _____

iv. Respecto a la distribución de frecuencias.

En la siguiente situación se buscaba analizar los posibles criterios de los estudiantes a la hora de distribuir frecuencias de experimentos a corto y largo plazo relacionadas con las concepciones que tienen sobre la regularidad de las frecuencias absolutas de un experimento o la distribución proporcional de frecuencias.

6. Para cada número de lanzamientos, escribe el número de veces que crees, puede salir cara o sello.
- ❖ En 20 lanzamientos: Cara = Sello =
 - ❖ En 100 lanzamientos: Cara = Sello =
 - ❖ En 500 lanzamientos: Cara = Sello =
 - ❖ En 1000 lanzamientos: Cara = Sello =

v. Intuiciones de los estudiantes respecto a las secuencias aleatorias.

En la séptima pregunta se quería conocer hasta donde el estudiante podía relacionar el espacio muestral no equiprobable y los posibles resultados que debía generar en un experimento con balotas.

7. En una bolsa **oscura** hay 3 bolas: 1 blanca y 2 negras. Y se quiere hacer un experimento con las siguientes condiciones:
- ❖ Se saca una bola, se registra su color y se vuelve a introducir en la bolsa.
 - ❖ Cada vez que se quiera sacar una bola se debe agitar muy bien la bolsa.
 - ❖ Las bolas son de igual tamaño y no se pueden diferenciar con solo tocarlas.

Imagine que en este experimento se hacen 15 extracciones. Se le pide que llene la siguiente tabla de resultados. (Utilice, N = Bola negra y B = Bola blanca).

Extracción #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Color de la bola															

- a. ¿Cuál bola cree que es más fácil sacar, negra o blanca? ¿Por qué?
- b. Cuente el número de bolas de cada color. N = ___ y B = ___
- c. Si fueran 30 extracciones, ¿Cuál sería el resultado? N = ___ y B = ___

vi. Relación entre proporción y probabilidad.

Se pretendía conocer si los estudiantes relacionaban la probabilidad de ocurrencia con la razón entre el número de casos favorables y el total de resultados, es decir el concepto de probabilidad clásica, en las dos siguientes

preguntas.

En la octava pregunta se esperaba que los estudiantes evaluaran la probabilidad de ocurrencia de un evento en espacios muestrales equivalentes.

8. Tenemos ahora dos bolsas oscuras, la primera con 3 bolas: 1 blanca y 2 negras, y la segunda con 6 bolas: 4 negras y 2 blancas. Con las mismas condiciones del experimento anterior ¿En cuál de las dos bolsas es más fácil sacar una bola negra? ¿Por qué?

En la novena pregunta se esperaba que los estudiantes evaluaran la probabilidad de ocurrencia de un evento en cuatro espacios muestrales no equivalentes. El propósito era analizar la capacidad del estudiante para evaluar la probabilidad de ocurrencia de un evento, dependiendo de la proporcionalidad y definir un orden de mayor a menor probabilidad.

9. Se tienen cuatro bolsas con bolas de dos colores:
 - ❖ La primera contiene 1 roja y 2 verdes.
 - ❖ La segunda contiene 3 rojas y 3 verdes.
 - ❖ La tercera contiene 2 rojas y 1 verde.
 - ❖ La cuarta contiene 2 rojas y 3 verdes.

¿De cuál bolsa podrá sacarse más fácilmente una bola verde? ¿Por qué?

4.2 PRIMERA PARTE: PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA Y PREDICCIÓN DE RESULTADOS

Después de haber aplicado la prueba diagnóstica se les presentó una semana después una guía con una situación llamada: *La Promoción de Paletas*. En ella se describió el problema para conocer la efectividad de una promoción apostando al cara y sello, en esta misma guía se les planteó 11 preguntas que buscaban indagar sobre la percepción inicial que tenían los estudiantes respecto a la situación aleatoria, la forma como la entendían y abordarían, así como poner a prueba sus intuiciones previas para predecir resultados aleatorios.

Esta guía se aplicó en forma individual a los 40 estudiantes del curso pero sólo haremos referencia a 12 pruebas de los estudiantes que continuaron hasta el final del proceso de las actividades propuestas. Basados en las respuestas de los estudiantes extraemos las conclusiones de 12 estudiantes:

Después de presentar una descripción de la situación hipotética de la promoción de paletas a los estudiantes, en forma individual y con un taller

prediseñado, se les hizo cuatro primeras preguntas que buscaban indagar sobre la comprensión de la situación, la justeza, ventajas, estrategias por parte de ellos para comprobar la efectividad y el impacto de la promoción. Las preguntas 5, 6, y 7 sobre la predicción de resultados de la promoción, tenían como propósito evidenciar sus *intuiciones previas* sobre lo que creía, iba a ocurrir con la promoción en *100 lanzamientos* de la moneda respecto al número de ganadores, cantidad de caras y sellos, y el número de lanzamientos para que se presentara el primer ganador de paleta. Las preguntas 8, 9, 10 también buscaban evidenciar predicciones respecto a las mismas variables anteriores para despachar las *200 paletas*. La pregunta 11, planteaba la opinión de la promoción a largo plazo.

Con estas preguntas, en general, se pretendía tener una percepción de los estudiantes sobre resultados aleatorios para un número determinado de lanzamientos y la forma cómo justificaban dichos resultados. Esta parte era necesaria como una primera inducción a la situación y tuvo una duración de una hora. (Ver Anexo 1A)

4.3 SEGUNDA PARTE: EL DÍA DE LA PROMOCIÓN

Antes de la actividad los estudiantes se organizaron en dos grupos: uno de publicidad y otro de logística. El primero se encargó de elaborar, distribuir y difundir la información a través de carteles y pasando por los cursos motivando a los estudiantes para que participaran, y el segundo, se encargó de la estrategia para mantener un orden cuando los clientes se presentaran a participar. Se les hizo claridad que el éxito del estudio de mercadeo dependía del orden y la correcta toma de datos que servirían luego para inferir sobre la efectividad de la promoción.

Se formaron 4 subgrupos de 5 personas para que se encargaran del control de uno de los cuatro puntos de venta cada uno de ellos con una función específica (un cobrador, un lanzador, dos registradores y un repartidor).

Subgrupo 1:

CARLOS: Lanzador
 YURY ANDREA: Registradora
 SAIRA VIVIANA: Acompañamiento
 ERWIN: Repartidor
 LUISA: Acompañamiento

Tipo de Lanzamiento: El *vendedor*, la arrojaba al aire y observa el resultado que cayera en su *mano*.

Subgrupo 2:

SEBASTIÁN:: Lanzador
 YENNY: Registradora
 WILLIAM: Acompañamiento
 CRISTIAN: Repartidor

Tipo de Lanzamiento: El *cliente*, la arrojaba al aire y observa el resultado que cayera en el *piso*.

Subgrupo 3:

JUAN CARLOS: Lanzador
 CINDY: Registradora
 YESID: Acompañamiento
 MIGUEL: Repartidor

Tipo de Lanzamiento: El *vendedor*, la arrojaba al aire y observa el resultado que cayera en su *mano*.

Subgrupo 4:

CAMILO: Lanzador
 LILIANA: Registrador
 WILMER: Repartidor
 SHAROM: Observadoras
 GERARDO: 2º Lanzador.

Tipo de Lanzamiento: El *vendedor*, la arrojaba al aire y observaba el resultado que cayera en el *piso*.

A los dos registradores de cada subgrupo se les dio instrucciones de la forma en que debían registrar la información de cada lanzamiento (ver tabla anexa) y la importancia de hacer registros correctos. Se realizó un trabajo logístico con los estudiantes para organizar los cuatro puntos de ventas: usando vallas, instalando las mesas, cada uno con su correspondiente tema con 50 paletas exactas, su tabla de registro, con personal de control para la fila de clientes, con un espacio adecuado para el lanzador, todo esto con el fin de evitar desorden y garantizar en lo posible la mayor exactitud en la toma de datos.

Con anterioridad a la actividad se escogieron los estudiantes responsables del registro y se les hizo una corta preparación sobre la forma en que debían hacer los registros. Sin embargo, en los cuatro subgrupos se registró la escogencia del cliente en lugar del resultado de la moneda (inexplicablemente).

En cada subgrupo se realizó un aviso para asignar a cada punto una clase diferente de lanzamiento.

Subgrupo 1: El vendedor lanzaba en la mano.

Subgrupo 2: El cliente lanzaba al suelo.

Subgrupo 3: El vendedor lanzaba en la mano.

Subgrupo 4: El vendedor lanzaba en el suelo.

Inicialmente con el propósito de evidenciar o hacer ver a los estudiantes que los resultados no dependían del tipo de lanzamiento, ni de la persona que hiciera el lanzamiento. Sin embargo, como veremos más adelante las condiciones de la experiencia sirvieron de base para crear justificaciones subjetivas sobre la causa de la ganancia o pérdidas en cada punto de venta.

La mayoría de estudiantes que participaron directamente en la ejecución de la promoción en los cuatro subgrupos, fueron los que más estaban

motivados y permanecían durante todo el proceso, destacándose por su desempeño durante los talleres posteriores con sus argumentos (Liliana, Juan Carlos, Camilo, Gerardo, Saira y Yesid). Los demás estudiantes estuvieron presentes en el desarrollo de la actividad como observadores y clientes.

En general cada estudiante dependiendo del grado y la forma en que participó de la actividad, se personalizó o adueñó de las características que involucraba el experimento, y su experiencia contextualizada fue fundamental a la hora de desarrollar las actividades posteriores.

La actividad se video grabó y se hicieron algunas entrevistas a los clientes que participaban, así como algunos de los encargados de los subgrupos. Se desarrolló con mucho entusiasmo por parte de todos los estudiantes. Los estudiantes que perdían buscaban una justificación como que le hicieron trampa y los que ganaban decían que tenían “buena suerte”. Hubo clientes que participaban en forma consecutiva (ganando paletas) hasta que perdían.

En el Anexo 3A se presenta la tabla corresponde al registro que cada punto de venta debía diligenciar para recolectar la información de la experimentación real, la cual se analizaría posteriormente por parte de los mismos estudiantes.

Con a los resultados obtenidos el día de la promoción, se organizaron catorce parejas de los cuarenta estudiantes que quisieron colaborar en horario extra clase, cada una de ellas realizó el análisis de uno de los cuatro puntos de venta, de los cuales tuvimos en cuenta para esta parte del estudio seis (6) de esas parejas teniendo en cuenta su dedicación y constancia para desarrollar las actividades propuestas.

Pareja 1: Laura y Maribel	(Analizó subgrupo N° 2).
Pareja 2: Juan Carlos y Saira Yineth	(Analizó subgrupo N° 3).
Pareja 3: Gerardo y Luisa	(Analizó subgrupo N° 3).
Pareja 4: Liliana y Yury Andrea	(Analizó subgrupo N° 1).
Pareja 5: Yesid y Saira Viviana	(Analizó subgrupo N° 2).
Pareja 6: Camilo y William	(Analizó subgrupo N° 4).

El propósito general de la Tercera, Cuarta, Quinta y Sexta Parte, era propiciar un ambiente de socialización y discusión por parte de los mismos estudiantes, y hacer preguntas que llevaran al estudiante a justificar y argumentar sus respuestas generando la construcción de significados a partir de la actividad real desarrollada en el campo.

Para que los estudiantes comenzaran a generar significados del comportamiento aleatorio de los datos era necesario que cada estudiante conociera y manipulara las variables involucradas:

- Número de caras y sellos que salen en la moneda.
- Número de caras y sellos que escoge el cliente.
- Número de clientes ganadores y perdedores.
- Número de paletas entregadas.
- Dinero recogido.
- Número de lanzamientos.

Así, como realizar representaciones gráficas, cálculo de frecuencias absolutas y relativas en forma porcentual del número de caras y sellos de la moneda, la escogencia del cliente, y respecto a la cantidad de ganadores y perdedores.

4.4 TERCERA PARTE: ANÁLISIS PARCIAL DE LAS VENTAS.

En esta parte cada pareja hacía un balance general de la promoción y se concluía si hubo ganancias o pérdidas en el subgrupo de venta analizado. Los estudiantes respondieron nueve preguntas. A continuación se presenta el taller presentado y sus preguntas (Anexo 4A).

4.5 CUARTA PARTE: ANÁLISIS ESPECÍFICO DE LOS RESULTADOS DE LOS SUBGRUPOS

En esta parte se desglosa el análisis de cada subgrupo de venta en cinco secciones de acuerdo al número de lanzamientos (para los primeros 10, 20, 40, 60 y para el total de lanzamientos del subgrupo). Para cada número de lanzamientos, cada pareja completó una tabla de registro relacionando en cada columna:

- El número de cada lanzamiento.
- El número del cliente participante.
- El Resultado de la moneda (Cara / Sello).
- El lado de la moneda que escogió el cliente (Cara / Sello).
- El resultado del cliente (Ganó / Perdió).

Y al final de cada tabla debían totalizar e ir acumulando la cantidad de caras y sellos, y, de ganadores y perdedores correspondientes en forma cardinal y

porcentual. Cada sección de lanzamientos exigía la construcción de un diagrama de barras que relacionara la cantidad de lanzamientos con el resultado de la moneda y el resultado del cliente que junto a la tabla permitiera a cada pareja responder en cada sección seis preguntas de tipo descriptivo, con el propósito de propiciar un análisis detallado de la forma como variaban los resultados a medida que aumentaba el número de lanzamientos, pudieran comparar y generar significados al coordinar las distintas representaciones.

En la última sección (ver puntos 6 y 7 del taller), cada pareja debía completar una tabla comparativa de los resultados para cada número de lanzamientos esperando que percibieran la variabilidad y regularidad al comparar:

- La cantidad de clientes ganadores y perdedores a medida que aumentaba el número de lanzamientos.
- La cantidad de caras y sellos que salen en la moneda a medida que aumentaba el número de lanzamientos.
- La cantidad de lanzamientos y, la cantidad de ganadores y perdedores a medida que aumentaba el número de paletas entregadas.

Por último se escogieron cuatro parejas, una por cada punto de venta, para que realizaran una exposición espontánea de los resultados mediante proyector de acetatos, con el propósito de socializar, corregir, describir, comparar y argumentar ante los demás compañeros. A continuación se presenta la actividad desarrollada por los estudiantes (Anexo 5A).

Exposición de resultados de los cuatro subgrupos

Se escogieron 4 parejas que hubieran analizado los resultados de uno de los cuatro subgrupos, con el propósito de que expusieran y socializaran ante sus compañeros el análisis hecho para las 50 paletas. Se les proporcionó en acetatos, una copia del taller correspondiente a la Tercera y Cuarta Parte que habían diligenciado anteriormente.

Los estudiantes que expusieron en este orden fueron:

- Por el subgrupo # 4: Camilo.
- Por el subgrupo # 3: Gerardo y Juan Carlos.
- Por el subgrupo # 2: Laura y Saira Viviana.
- Por el subgrupo # 1: Liliana.

Esperando que los demás estudiantes conocieran, compararan y opinaran

sobre los resultados de los cuatro subgrupos en general, y ofrecer a cada pareja la información necesaria para que ellos realizaran un análisis comparativo más profundo. Al final se hicieron algunas entrevistas para detectar alguna modificación en el pensamiento. Durante las exposiciones los estudiantes se limitaron a repetir la descripción de los datos, reforzando la creencia de la existencia de una tendencia de caer más cara que sello y de que las personas ganaban era con cara. En la exposición de los estudiantes, los docentes intervinieron con algunas preguntas que buscaban generar alguna controversia y establecer un diálogo entre los expositores y los estudiantes espectadores.

4.6 QUINTA PARTE: COMPARANDO LOS RESULTADOS DE LOS SUBGRUPOS

El propósito general de esta parte era resumir en cuatro tablas los resultados fundamentales del análisis específico hecho anteriormente de los cuatro subgrupos de tal forma que permitiera a los estudiantes hacer algunas comparaciones y realizar algunas conjeturas respondiendo cinco preguntas. A continuación justificamos el propósito de cada tabla y los resultados del análisis hecho por las seis parejas escogidas. Una vez finalizada las exposiciones, las parejas completaron cuatro tablas con la información de los cuatro subgrupos de venta para hacer un análisis con todos los registros, con las cuales debieron responder algunas preguntas generales que tuvieron que ser profundizadas más adelante con algunas entrevistas video grabadas. A continuación mencionamos algunos objetivos generales que perseguíamos detrás de esta actividad.

Objetivos:

- Desde un enfoque frecuencial, propiciar la percepción en la variación en la cantidad de caras y sellos en pocos lanzamientos y la estabilidad de los mismos cuando aumenta el número de lanzamientos para los cuatro subgrupos.
- Resumir en cuatro tablas los resultados de los cuatro subgrupos e indagar sobre las múltiples interpretaciones de los estudiantes.
- Evaluar el nivel de abstracción de los estudiantes para percibir, manipular y justificar las relaciones existentes entre las variables involucradas a partir de la información de los registros.
- Comparar las cantidades y porcentajes de caras y sellos que salieron en

la moneda a medida que aumentaba el número de lanzamientos en cada uno de los cuatro subgrupos de venta (tabla N° 1), esperando que los estudiantes pudieran percibir que dichas cantidades se acercaban al 50% (mitad de caras $n/2$ y mitad de sellos $n/2$, para n lanzamientos).

- Comparar las cantidades y porcentajes de clientes ganadores y perdedores que se presentaban en cada subgrupo a medida que aumentaba el número de lanzamientos (tabla N° 2), esperando que los estudiantes pudieran percibir que dichas cantidades tendían a acercarse al 50% (mitad de ganadores $n/2$ y mitad de perdedores $n/2$, para n lanzamientos).
- Comparar las cantidades y porcentajes de lanzamientos necesarios para repartir las paletas en cada subgrupo a medida que aumentaba regularmente el número de paletas (tabla N° 4), esperando que los estudiantes pudieran percibir que el número de lanzamientos necesarios se aproximaba al doble de la cantidad de paletas a despachar ($2p$ lanzamientos para repartir p paletas).
- Comparar la cantidad de paletas entregadas y el dinero recogido con relación al número de lanzamiento, esperando que los estudiantes percibieran algún parecido de dichas cantidades entre los cuatro subgrupos a medida que aumentaba el número de lanzamientos, así como la diferencia entre estas cantidades cuando se trataba de pocos lanzamientos (tabla N° 3).

En el Anexo 6A se presenta la estructura del taller que cada pareja diligenció. Todas las parejas tuvieron a disposición las mismas tablas con las mismas cantidades de tal forma que cada estudiante trabajara con su compañero en el análisis general de los cuatro subgrupos y poder comparar sus abstracciones y argumentos.

4.7 SEXTA PARTE: ANÁLISIS GENERAL DE LOS RESULTADOS DEL GRUPO

El objetivo de esta parte era hacer un análisis acumulado de los cuatro subgrupos como un solo registro, de tal forma que pudiera posibilitar la percepción en la estabilidad de los resultados a medida que aumentaban los lanzamientos respecto a las variables implicadas.

En las seis primeras preguntas relacionadas con las tablas, se esperaba la proposición por parte de los estudiantes de las relaciones existentes entre las variables, así como las posibles comparaciones que pudieran hacer entre el análisis entre subgrupos con los resultados generales de todo el grupo. Las

preguntas 7 y 8, tuvieron la intención de evaluar las predicciones para la repetición del mismo experimento con 200 paletas, de tal forma que se pudiera percibir un razonamiento probabilístico estable respecto a las frecuencias absolutas y relativas de las variables implicadas por parte de los estudiantes.

Con las preguntas 9, 10 y 11, se quiso indagar sobre el grado de comprensión de la promoción a largo plazo a través de la predicción de resultados, suponiendo la realización de la promoción en 25 días y pidiendo la opinión de los estudiantes sobre la efectividad de la promoción, esperando que manifestaran una mayor estabilidad de los futuros resultados con la característica de que las ganancias y pérdidas se igualaran, al igual que las cantidades de caras y sellos. La última pregunta (12) pretendía que los estudiantes propusieran una nueva promoción que garantizara la obtención de ganancias con otros dispositivos.

Una vez finalizada esta actividad sabíamos que los resultados de este experimento no eran suficientes para alcanzar el nivel de comprensión del fenómeno aleatorio, por lo que se esperaba que los estudiantes manifestaran la necesidad de buscar una forma de repetir la experiencia sin necesidad de recurrir a la experimentación directa, sino a través de un mecanismo de simulación que permitiera modelar la situación real (Anexo 7A).

4.8 SÉPTIMA PARTE: EXPERIMENTACIÓN CON DOS MONEDAS

Después del análisis de la promoción con los datos obtenidos de la experimentación real de la promoción, se hizo necesario encontrar la forma de repetir la experiencia, teniendo en cuenta que el modelo debía aproximarse a la realidad en la cual existía un factor incidente que era la escogencia del cliente la cual sería difícil de reemplazar, ya que esta suponía considerar dicha elección como aleatoria. En esta actividad se parte de la idea de suponer que la escogencia del cliente era aleatoria, por lo que se les planteó a los estudiantes un modelo matemático reemplazando la escogencia del cliente (impredecible) con el resultado obtenido de lanzar una primera moneda y comparándola con el resultado del lanzamiento de una segunda moneda que correspondía a la del vendedor.

El objetivo de esta actividad era poner a prueba un modelo matemático que permitiera ambientar una simulación física de la promoción sin el uso de paletas y clientes, para lo cual se distribuyeron 10 parejas las cuales debían repetir el experimento con dos monedas, asumiendo cada uno el papel de cliente y de vendedor, registrando los resultados y asignando a cada pareja

una clase de lanzamiento (al suelo o en la mano) y con diferentes tamaños de moneda de forma similar a la experimentación real. Los estudiantes utilizaron la tabla de registro, mejorada, donde registraban el resultado de la moneda que correspondía al cliente y al vendedor, así como el resultado de ganancia o pérdida.

En el Anexo 8A se presenta la tabla de registro y la forma como se presentó la actividad a los estudiantes que incluyen 7 preguntas similares al proceso de análisis hecho anteriormente, así como las percepciones sobre la aceptación de este modelo.

4.9 OCTAVA PARTE: EXPLORANDO PROBABILITY EXPLORER

Una vez finalizada la simulación física con dos monedas se planteó la necesidad de simular el experimento una gran cantidad de veces y con muchas repeticiones, lo cual se podía hacer a través de una herramienta computacional llamada Probability Explorer. En esta guía se realiza la presentación del programa y un manual básico de uso que soportara su manejo independiente de la instrucción personal. La idea era que cada pareja pudiera explorar la herramienta y percibir las interacciones sociales entre los estudiantes y con el micromundo, observando de alguna forma su pensamiento plasmado en esta ventana de conocimiento.

Inicialmente se hace una descripción general del programa y la función de cada icono, luego se hace una referencia sobre la forma como pueden simular los experimentos, definiendo los eventos y la cantidad de pruebas y experimentos que pueden hacer. Finalmente se sugirieron algunos ejercicios para que simularan e interactuaran con el programa.

Este taller era un soporte para cada estudiante a la hora de comenzar con el manejo del programa, pero la esencia era dar la libertad necesaria para que los estudiantes exploraran por sí mismos, crearan sus experimentos y aprendieran su manejo básico (Anexo 9A).

4.10 NOVENA PARTE: SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE LA PROMOCIÓN DE PALETAS

Terminada la exploración del programa, la idea era que los estudiantes implementaran el modelo de las dos monedas para simular el experimento de la Promoción de Paletas, siguiendo una secuencia similar a la hecha anteriormente con el fin de comparar resultados con pocos lanzamientos y muchos lanzamientos, pero lo importante inicialmente era generar la confianza en la herramienta para que los procesos de abstracción del experimento pudieran ser válidos y se enlazaran con sus concepciones e intuiciones adquiridas.

Los talleres presentados a continuación se desarrollaron en el mismo computador como archivos de texto para facilitar el trabajo de los estudiantes y que utilizaran los mismos gráficos de representación para justificar sus respuestas y que pudieran tener una visión general del problema.

Los estudiantes debían simular y comparar sus resultados con los obtenidos en la experimentación y en la simulación. Finalmente la idea era esperar que los estudiantes simularan con una gran cantidad de pruebas y realizar muchas repeticiones y confrontar los argumentos descritos anteriormente.

Durante y al final de cada parte se realizaron entrevistas audio grabadas para registrar la evolución en sus razonamientos y la forma como hacían sus conexiones con las experiencias anteriores. A continuación aparece la estructura del taller que desarrollaron los estudiantes.

4.11 DÉCIMA PARTE: NUEVA PROMOCIÓN DE PALETAS

Finalizada la simulación de la Promoción al cara y sello, y partiendo de la suposición que los estudiantes concluían que la promoción no era beneficiosa porque a largo plazo la cantidad de clientes ganadores y perdedores era igual con el único beneficio de motivar a los clientes con la apuesta, entonces en un ambiente de discusión entre los estudiantes y con los profesores investigadores, se construyeron las siguiente actividad que buscaba diseñar entre todos una nueva promoción de paletas que permitiera obtener ganancias y con ello poner a prueba los conocimientos probabilísticos adquiridos y el posible manejo que le dieran al simulador para probar conjeturas.

Comenzaron respondiendo algunas preguntas claves sobre lo que se quería realizar, una justificación, una propuesta sobre la nueva promoción, las ventajas, como se podía probar, etc. Después se procedió a realizar algunas predicciones sobre el comportamiento aleatorio de la promoción a corto plazo y a largo plazo, para luego confrontarlas con una pequeña experimentación real, en la cual debían obtener algunos resultados que permitieran generar una mayor confianza en sus predicciones y en la forma de implementar el nuevo experimento en el computador.

Los estudiantes definen el nuevo experimento con balotas de dos colores: 3 amarillas y 2 rojas, opinando que era una configuración que les iba a dar ventajas sin abusar del cliente porque podían correr con el riesgo de que no participaran (Anexo 11A).

4.12 ONCEAVA PARTE: ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN REAL DE LA NUEVA PROMOCIÓN DE PALETAS

Una vez definido el nuevo experimento con balotas de dos colores, los 12 estudiantes realizaron un experimento para 200 extracciones con clientes reales, de tal forma que el cliente que sacara la balota roja ganaba paleta y el que sacara la balota amarilla debía pagar los \$200, lo cual fue simulado con estudiantes del colegio que en lugar de recibir una paleta, recibían un dulce como premio a su colaboración (no se entregaron paletas, ni se cobraron las apuestas). Los estudiantes realizaron un registro único para la simulación de la promoción, en el Anexo 12A se presenta la tabla de registro y las preguntas planteadas a los estudiantes para analizar los resultados y confrontarlos con sus predicciones.

4.13 DOCEAVA PARTE: SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE LA NUEVA PROMOCIÓN DE PALETAS

Después de realizar la simulación física, los estudiantes procedieron a implementar una simulación computacional en Probability Explorer, con el propósito de corroborar y confrontar resultados y opiniones.

En el Anexo 13A se presenta el diseño de las preguntas planteadas al mismo tiempo que recurrían al simulador y las preguntas finales de la simulación, las cuales se apoyaron por entrevistas a los estudiantes.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo presentaremos un análisis general de todas las actividades desarrolladas en este trabajo a través de las dos categorías de análisis propuestas en la metodología: Modificabilidad de las concepciones previas y la construcción del significado conceptual, teniendo en cuenta la información recolectada. En el siguiente análisis se resaltarán las respuestas más relevantes de cada actividad haciendo referencia a la pregunta y la parte correspondiente al orden en que fueron presentadas en el capítulo anterior, teniendo muy en cuenta las entrevistas realizadas a algunos de los estudiantes y que permitieron escudriñar en el pensamiento de los estudiantes antes, durante y después de su interacción con el micromundo Probability Explorer.

5.1 MODIFICABILIDAD DE LAS CONCEPCIONES PREVIAS

En esta categoría se analizó hasta que punto las intuiciones previas y malas concepciones evidenciadas en el diagnóstico pudieron ser modificadas con la estrategia aplicada, es decir evaluar el efecto del aprendizaje de los nuevos significados relacionados con la interpretación de los resultados aleatorios de los experimentos tratados sobre el esquema de estas intuiciones y malas concepciones de cada estudiante.

Debemos aclarar la forma como abordamos el análisis del diagnóstico de nueve preguntas, en el cual la idea era identificar el estado de las concepciones e intuiciones previas del grupo de 40 estudiantes, por lo que hicimos referencia a los significados iniciales manifiestos en las respuestas y a ejemplificarlos con algunas respuestas escritas u orales de los estudiantes.

5.1.1 Respecto a la Naturaleza de los Experimentos Aleatorios

Durante el diagnóstico pudimos observar, que la mayoría de estudiantes relacionaron los resultados aleatorios con una causa física del experimento, que muchas veces con llevó a la creencia de poder controlar los resultados, o los relacionaron con una causa sobrenatural de la persona (la suerte); esto se debe al parecer como una consecuencia del pensamiento determinista de

cada estudiante, a su falta de instrucción en el campo de la probabilidad en la escuela, o bien a un mecanismo intuitivo de los estudiantes para encontrar una respuesta **“racional”** que conduce al estudiante a querer controlar las experiencias aleatorias.

Respecto a la primera pregunta sobre la justificación que los estudiantes daban a la causa o dependencia de un resultado:

1. Si lanzas una moneda al aire, las posibilidades de que salga cara o sello dependen según usted de:
 - a. El número de giros.
 - b. La altura que alcance la moneda.
 - c. La suerte de la persona.
 - d. La posición inicial de la moneda.
 - e. Otro. ¿Cuál? _____

- La mitad de los estudiantes (21), creyeron que existía una causa determinista para justificar el lanzamiento de una moneda al escoger una de las cuatro opciones a, b, c o d.
- 17 estudiantes creen en algo llamado “suerte”, la cual no siempre se relaciona con el sentido de azar o aleatorio, si no como una causa sobrenatural por la cual algunos tienen “buena suerte” para predecir un resultado, o “mala suerte” para no coincidir con el resultado.
- Solo 3/40 estudiantes afirmaron que no dependía de nada (Juan Carlos, Cristian y Saira G.) y al parecer evidencian algún sentido sobre la independencia de los sucesos aleatorios.
- Otros dos estudiantes definieron otra causa como: “Depende de uno mismo” y “depende que la giren cuando caiga”, las cuales tienen un sentido de controlabilidad.

La siguiente entrevista hecha a Erwin para profundizar el diagnóstico respecto a la primera pregunta, ejemplifica el significado de **“controlabilidad”** que la mayoría de estudiantes manifestó.

P: *¿Si lanza una moneda al aire las posibilidades de que salga cara o sello depende según usted de?*

E: *La altura que alcance la moneda porque si lanzo dos veces la moneda con la misma fuerza pues va a caer el mismo resultado sello o cara.*

P: *¿Y la altura que tiene que ver?*

E: *Pues la altura si lanzo por ejemplo: un metro y cae cara y vuelvo a lanzar otro metro me va a volver a caer en cara.*

P: *¿O sea que la fuerza y la altura están relacionadas?*

E: *Sí.*

Esta otra entrevista también pone de manifiesto el significado de controlabilidad.

P: Patricia si lanza una moneda al aire las posibilidades de caiga cara o sello dependen según usted de...

E: La posición inicial de la moneda.

P: ¿Por qué?

E: Porque depende de la posición inicial de la moneda. Si la posición inicial es sello cae cara y si es cara cae sello.

Este significado de controlabilidad que se presentó en los estudiantes pone de manifiesto la ausencia del significado de “impredicibilidad” a la hora de creer “predecir” el resultado del lanzamiento de la moneda como lo manifestaron en la segunda pregunta del diagnóstico.

2. Si alguien le pidiera que lances una moneda al aire y saque "cara" como resultado, le dirías que:

c. Es posible, porque: _____

d. Es imposible, porque: _____

➤ En general, 24/40 estudiantes escogieron la opción “a”, de los cuales quince pensaron que era posible dependiendo de la suerte de la persona, cinco estudiantes porque creían que podían controlar el resultado manipulando la posición inicial de la moneda y dos estudiantes creían poder controlar el número de giros y la velocidad de la moneda. Otros dos estudiantes pensaron que era posible, según como tiraran la moneda o según la suerte.

➤ De los restantes, 16/40, cuatro estudiantes piensan que era imposible sacar cara porque depende de la suerte y no se sabe que buena o mala suerte tenga la persona. Otros diez estudiantes porque no pueden conocer el número de giros o la posición que puede caer, lo que evidencia la falta de control en el resultado. Un estudiante, piensa que es imposible porque depende de la gravedad y otro porque no tiene el poder para controlar el resultado.

Como ejemplo tenemos la continuación de la entrevista hecha a Patricia:

P: ¿O sea que usted cree que se podría controlar cuando usted quiere cara, o cuando usted quiere sello?

Y: En algunas veces se puede y hay otras que falla, porque depende de la posición de la moneda, si es sello cae cara, si es cara cae sello.

P: ¿Por qué falla?

Y: Porque muchas veces se pone cara y cae sello, depende también de los giros de la moneda.

P: ¿Si alguien le pidiera que lance una moneda al aire y saque cara como resultado, le

diría que?

Y: Que sería posible dependiendo si lanzo para caer cara, tengo que lanzar la moneda en la posición inicial sello.

Respecto a la parte b de la cuarta pregunta, puso de manifiesto el efecto del significado de la controlabilidad al comparar dos fenómenos aleatorios similares:

4. b. ¿Es lo mismo que una persona lance 10 veces una moneda o que 10 personas lancen una moneda cada uno?
 - Julian y Yinna opinan que es lo mismo porque corresponde al mismo número de lanzamientos.
 - Juan Carlos opina que es lo mismo porque no cae cara por una persona.
 - Gerardo opina que es lo mismo porque en ambos casos los resultados son diferentes, tal vez refiriéndose a la impredecibilidad de los resultados. Luisa opina que es lo mismo, pero no justifica su respuesta.
 - Los demás estudiantes afirman que los resultados en las dos situaciones no son los mismos, justificándose a través de una causa física (no es la misma moneda, no son los mismo lanzadores, no coinciden en la posición, no puede coincidir el número de giros, las personas no pueden lanzar con la misma fuerza, etc.) o una causa sobrenatural (la suerte del lanzador no es la misma).

Durante la **Primera Parte** de la predicción de resultados antes de la experimentación física de la Promoción, a pesar de que los estudiantes pensaron que la promoción era justa para los clientes (por tener igual opción de ganar que de perder, sea con cara o con sello), no lo era para el vendedor ya que pensaban que existía una ventaja para él, al poder “manipular” la moneda y por ende, controlar los resultados. Estas son creencias o concepciones erróneas naturales consideradas por nosotros como sus *significados iniciales*. En particular, esta creencia es la que Pratt (1998) llama “**controlabilidad**” de los resultados. Por supuesto, no podía faltar la consabida argumentación de la suerte de las personas: “Hay más ventaja para el vendedor porque la mayoría de las personas no tienen buena suerte”.

Al terminar la **segunda parte** correspondiente al desarrollo de la actividad de la Promoción de Paletas, los estudiantes relacionaron los resultados de cada subgrupo con las condiciones físicas en que se realizó el experimento (tipo de lanzamiento: en el suelo o en la mano, número de giros, altura, etc.) o de la persona que realizó los lanzamientos. La siguiente entrevista corresponde a la primera percepción de Camilo, uno de los estudiantes del grupo de estudio, que estuvo a cargo de los lanzamientos en el subgrupo de venta N° 4.

P₁: *¿Qué pasó con el puesto No. 4?*

C: *Ganaron paletas más de los que perdieron, o sea no valió la pena la promoción en nuestra mesa.*

P₁: *¿Cuántos perdieron?*

C: *Perdieron unos 35 a 36 clientes (y se repartieron las 50 paletas correspondientes).*

P₁: *¿De qué cree que dependió?*

C: *Pues no sé, de cómo la tirábamos y todo eso, o sea yo casi siempre perdía, entonces cambiamos con Gerardo y él mejoró un poquito y perdieron más con él.*

Finalizada la **cuarta parte** del análisis parcial de los resultados de los cuatro subgrupos (ver detalles en el capítulo anterior), la mayoría de estudiantes conservaron sus concepciones acerca de la naturaleza de la prueba experimental, pero en el caso particular de Camilo manifiesta el significado de “**incontrolabilidad**” a pesar de que adjudica razones físicas a los resultados experimentales.

Durante la exposición oral que hizo Camilo frente a sus demás compañeros, de los resultados analizados en la cuarta parte, se dio la siguiente intervención mientras (C: Camilo, P₁: Profesor 1 y P₂: Profesor 2). En ella se pone de manifiesto inicialmente una idea intuitiva sobre el comportamiento aleatorio de los resultados, en cuyo caso esperaba que fueran “**parecidos**” entre los cuatro subgrupos:

C: *Nos fue mal porque hubo más ganadores que perdedores. Los resultados debieron ser parecidos a los demás grupos por que tenían igual cantidad de paletas (50) y era la misma promoción. Y nos fue mal porque solo hicimos \$7.400.*

P₁: *¿Cuál cree que fueron las posibles causas para esta pérdida?*

C: *Pues, que tirábamos mal. Es que al principio comencé tirando yo, y comenzamos a perder, y después cambiamos con Gerardo y ahí ganamos un poquito.*

P₂: *¿Usted cree que influyó el tipo de lanzamiento?*

C: *Sí, porque cuando cambiamos de lanzador nos comenzó a ir mejor, pues perdían más los clientes.*

P₁: *Eso es de acuerdo al lanzador, pero respecto al tipo de lanzamiento hubo varias clases. El tipo de lanzamiento de dejarla caer al suelo ¿cree que influyó?*

C: *Yo si creo, porque en la mano daba más vueltas en el aire y caía en la mano, mientras que en el suelo daba vueltas por varias partes y pues caía diferente.*

P₂: *O sea, ¿usted cree que el resultado depende del número de vueltas de la moneda?*

C: *Sí, del número de vueltas en el aire o en el piso.*

P₂: *¿Y usted puede controlar ese número de vueltas?*

C: *No, porque cómo hace para saber con que fuerza tira uno para que dé las dos vueltas en el aire, y cuando uno la tira en el piso da mas vueltas.*

P₂: *Entonces, ¿Se puede hacer trampa?*

C: *No, porque así es muy difícil calcular qué va a caer.*

P₂: *¿Cómo explica usted los resultados obtenidos?*

C: *Es cuestión de suerte, de cómo cae, como uno la tira, si la tira duro.*

P₁: *Después de realizada la experiencia ¿cree que la apuesta fue justa tanto para el cliente como para ustedes?*

C: *Sí, porque de todas formas fue cuestión de nosotros, porque nosotros fuimos los que tiramos mal y por eso perdimos. Y de todas formas si hubiéramos tirado bien hubiéramos podido ganar.*

Al **final** de las actividades de aprendizaje estudiantes como Camilo y Gerardo que alcanzaron un nivel de comprensión del significado probabilístico del fenómeno a corto y largo plazo, fueron el ejemplo de modificación y conservación del significado de controlabilidad. Así, respecto a la misma primera pregunta del diagnóstico hecha en la evaluación escrita final, repondieron:

- Camilo escogió la opción “e”, afirmando la existencia de otra explicación para el resultado del lanzamiento de una moneda: *“Hay las mismas posibilidades de que caiga cara o sello”*, cuando en el diagnóstico y el transcurso de las actividades afirmaba que dependía del número de giros por lo que presumimos que de alguna forma comprendió la independencia de los resultados aleatorios.
- Gerardo cree que existe una causa determinista para justificar el resultado del lanzamiento de una moneda al afirmar que la posición de la moneda determina su resultado, conservando la misma mala concepción dada en el diagnóstico.

Sin embargo, a pesar de la modificabilidad del significado de Camilo que pasó a ser un significado de **“incontrolabilidad”**, no desconecta su significado anterior corroborando de alguna forma la explicación de Pratt sobre la estructura de los significados iniciales y globales generados, los cuales no son de ninguna manera reemplazados unos por otros sino por el contrario las nuevas experiencias permiten modificar el significado y completarlo como unidades significantes (p-prims).

Lo anterior se puede manifestar en la respuesta dada por Camilo y Gerardo a

la segunda pregunta de la evaluación final que era igual a la segunda pregunta del diagnóstico.

- Los dos estudiantes creen que es imposible porque no pueden controlar las causas físicas que según ellos influye en los resultados. Camilo dice que es imposible, porque: *“No puede calcular cómo tirarla para adivinar qué va a caer”*, aceptando que la probabilidad de ocurrencia de los eventos es independiente de las causas físicas pero sin dejar de pensar que la moneda está regida por leyes físicas como el número de giros que determinan el resultado, es decir como una causa incontrolable.
- Y Gerardo afirma que es imposible controlar el resultado porque: *“No es lo suficientemente sofisticado para sacar lo que quiere, pues no depende de nada”*, lo cual es contradicho por una entrevista corta al final de esta evaluación con uno de los profesores en la que afirmaba que él podía obtener la cantidad de caras o sellos deseado con solo ubicar la moneda en el lado “correcto”. Por lo que finalmente podemos decir que su mala concepción sobre la controlabilidad de los resultados aleatorios se conserva y refuerza. La experimentación física no fue suficiente para modificar dicho significado, posiblemente porque a diferencia de Camilo su comprensión de la Ley de los Grandes Números era incompleta. La siguiente entrevista hecha a Gerardo surge de una conversación con uno de los docentes investigadores de manera informal después de terminada la evaluación final (escrita).

P: *¿Usted puede manipular la moneda de tal manera que favorezca siempre?*

G: *Depende, si el lanzamiento es en la mano sí se puede depende de la concentración de uno.*

P: *Gerardo haga el favor de sacar 5 caras seguidas.*

G: *¿Cinco caras?*

P: *Cara, sello.*

G: *Espere otra vez empiezo.*

P: *Sello.*

G: *Ahora si ya sé como es.*

P: *Una, dos, sello. Falló otra vez.*

G: *Cinco veces seguidas van aquí, póngale cuidado. Cara, cara, sello. No es así, espere no grabe todavía...*

Conclusión respecto a la Naturaleza de los Experimentos Aleatorios:

En general podemos decir, que la mayoría de estudiantes que estuvieron involucrados en las actividades, conservaron las concepciones sobre la causa y control de los resultados aleatorios, mostrando que la balanza entre el pensamiento determinista y probabilista no esta equilibrada. La experiencia de las actividades no fue suficiente para modificar estas creencias sobre la naturaleza de los experimentos aleatorios, por lo que se requiere de actividades más específicas para corregir dichas creencias, lo que deja abierto el interrogante de ¿Cómo modificar las malas concepciones relacionadas con la naturaleza de los experimentos aleatorios? El caso de Camilo demuestra que alcanzar una comprensión de la Ley de los Grandes Números y tener sentido propio del concepto de probabilidad, permite interpretar mejor la naturaleza de los experimentos aleatorios desde el contexto real.

5.1.2 Respecto al Sesgo de Desorden

En general, en el diagnóstico se observa que la mayoría de estudiantes tienen cierta creencia que es más posible ciertos resultados que otros, ya sea por la “imposibilidad” de obtener rachas largas de caras o la de obtener resultados intercalados (CSCSCS). Los primeros 20 estudiantes que escogen las opciones “a” y “b” de la tercera pregunta evidencian tener el sesgo de desorden. Los estudiantes que dan igual posibilidad de ocurrencia “e” al parecer aceptan las secuencias aleatorias como todas posibles dependiendo de las causas naturales que ellos le adjudican a los resultados aleatorios.

3. Si lanzas una moneda **seis veces** (6) seguidas, ¿cuál de los siguientes resultados crees que es **MENOS** posible obtener? Justifica la respuesta.

f. CARA, CARA, CARA, SELLO, SELLO, SELLO.

g. SELLO, CARA, SELLO, CARA, SELLO, CARA.

h. CARA, CARA, SELLO, CARA. SELLO, SELLO.

i. SELLO, CARA, CARA, CARA. SELLO, CARA.

j. Todas son igualmente posibles.

Porque:

- **CCCCSS** (11/40 estudiantes). Justificaron que era “imposible” sacar más de dos caras seguidas, o bien no creían en la posibilidad de sacar el mismo número de caras y sellos seguidos. Algunos después de experimentar con una moneda.

- **SCSCSC** (9/40 estudiantes). De los cuales cuatro, no creen poder sacar estos resultados intercalados o creen es necesario obtener una cara o sello repetido. Los otros cinco estudiantes eligieron esta opción pero su justificación indica una errónea interpretación de la pregunta, al parecer creyeron que preguntaban la opción **MÁS** posible al creer poder controlar este resultado.
- **CCSCSS** (4/40 estudiantes). De los cuales solo Sebastián dio una justificación: *“No hay que esperar que todas las veces caiga lo mismo o diferente”*.
- **SCCCSC** (2/40 estudiantes). Mauricio: *“porque es menos posible sacar cuatro veces cara y dos veces sello”*, deja entre ver un criterio de evaluación de frecuencias en la secuencia la cual no es igual. Yuri: *“Porque no siempre va a caer el mismo lado de la moneda sino intercambiado”*.
- **Todas son igualmente posibles** (13/40 estudiantes). Los cuales se justificaron:
 - Por la suerte porque nadie sabe lo que va a caer.
 - No se puede obligar a la moneda para que caiga cara o sello.
 - Nunca sale lo que uno espera.
 - Siempre cambian los resultados.
 - Depende de la gravedad, el número de giros y la posición inicial.
- Como caso especial un (1) estudiante propuso una alternativa diferente para un caso menos posible de ocurrir. Luisa Fernanda: *“Cinco veces sello y una vez cara porque no tenía suerte la persona”*.

En contraste en la **evaluación final** encontramos las siguientes respuestas de Camilo y Gerardo respecto a esta misma pregunta del diagnóstico modificada.

3. Si lanzas una moneda **cuatro** (4) **veces** seguidas, ¿cuál de los siguientes resultados crees que es **MENOS** posible obtener? Justifica la respuesta.
- a. **C, C, C, S.**
 - b. **S, C, S, C.**
 - c. **C, C, C, C.**
 - d. **S, C, S, S.**
 - e. Todas son igualmente posibles.
- Porque: _____

- *Camilo: “Todas son igualmente posibles, porque hay las mismas*

posibilidades de cara y sello”, una respuesta similar a la dada en el diagnóstico: “Todas son igualmente posibles, porque al tirarla 6 veces y no sale en un orden, si la vuelvo a tirar saldrá algo totalmente diferente, y mientras más veces la tire me saldrán resultados diferentes”. Al parecer confirma su creencia con la experimentación física, sin embargo en las entrevistas finales, el estudiante cree que existen algunas secuencias aleatorias con rachas largas de caras o sellos que para él son difíciles de obtener. También debemos resaltar que en varias ocasiones algunos estudiantes tenían en cuenta las secuencias de los resultados experimentales para aceptar o rechazar los resultados simulados al comparar cualitativamente las secuencias (por ejemplo al determinar si los resultados de los primeros 100 lanzamientos simulados de la moneda, en la mayoría salía cara y lo mismo ocurría en los resultados reales).

- Gerardo: “Es menos posible sacar la opción c porque no creo que de cuatro veces, el sello no salga ni una vez, pues ambos lados de la moneda tienen la misma posibilidad de salir”. Una respuesta diferente a la dada en el diagnóstico: “Es menos posible sacar **SCSCSC** porque si se tira, la inversión de la moneda no lo logra”. Conserva el sesgo de desorden aunque modifica sus argumentos.

Conclusión respecto al sesgo de desorden

La experiencia directa que tuvieron los estudiantes con la realización y análisis del fenómeno aleatorio permite de alguna forma interactuar con las secuencias aleatorias y percibir sin darse cuenta, de las características de las mismas, comenzando a modificar las malas concepciones relacionadas como el sesgo de desorden y terminando por aceptar de forma natural que cualquier secuencia es posible obtener, sin embargo, no todos los estudiantes logran desarrollar esta idea, lo que obliga a dirigir actividades propias para el estudio de las secuencias aleatorias y corregir este tipo de sesgos.

5.1.3 Respecto al Sesgo de los Valores Recientes

En la **quinta** pregunta del **diagnóstico** esperábamos que los estudiantes mostraran el sesgo de los valores recientes en su forma positiva (creer que nuevamente saldrá cara) y más en su forma negativa (falacia del jugador, creer que va a salir lo contrario, sello), sin embargo se presentó una indecisión en general que no se basó en la impredecibilidad de los resultados si no en el desconocimiento de las condiciones físicas o sobrenaturales del experimento, lo que demuestra la inexperiencia de los estudiantes en la

predicción de resultados aleatorios causada tal vez por el vacío de las experiencias físicas.

10. Si al lanzar una moneda se obtuvieron los siguientes resultados: **Cara - Cara - Cara - Cara**, al lanzar una vez más la moneda, el siguiente resultado será:

- a. SELLO
- b. CARA
- c. Cualquiera de los dos
- d. No se puede saber

Porque: _____

- Treinta y tres de los cuarenta estudiantes (33/40), no se inclinaron por un resultado, al escoger la opción c y d, lo que evidencia una intuición primaria de impredecibilidad en los resultados aleatorios o la falta de experiencia en la predicción de resultados.
- Cuatro (4/40) estudiantes tienen un sesgo positivo y tres (3/40) un sesgo negativo.

Algunos argumentos fueron los siguientes:

- *“Cualquiera de las dos, porque no se sabe como la tire, ni la suerte de la persona”*. Saira L.
- *“No se puede saber porque no se sabe el número de giros que va a caer en el aire”*. Yesid.
- *“Cara, porque la lance con sinceridad y volvió a salir cara”*. (Basándose en la experimentación). Luisa Fernanda.
- *“Sello porque es muy difícil que salga cuatro veces cara y detrás salga un sello”*. Yeimi.
- *“Sello, porque es imposible que salga nuevamente sello”* (Falacia del jugador). Saira G.

En la **evaluación final** Camilo y Gerardo evidencian una modificación en su concepción inicial, al responder la misma cuarta pregunta.

- Camilo afirmó: *“Cualquiera de las dos, porque hay 50% de posibilidades para cara y 50% para sello”*, lo que muestra un real cambio en sus concepciones anteriores en la cual afirmaba que *“cualquiera de las dos porque depende como tire la moneda la quinta vez”* pasando de una justificación con significado de la controlabilidad a uno de impredecibilidad (aleatoriedad).
- Gerardo, cree que: *“No se puede saber, porque la moneda trae unos resultados acumulados y hay igual posibilidad de que se repita o que cambie”*. En el diagnóstico dio la misma respuesta pero con un argumento

diferente: “No se puede saber porque ya sería la suerte o la concentración”. Evidencia modificabilidad en su concepción de controlabilidad y se desarrolló en el estudiante un sentido de impredecibilidad al igual que su compañero.

Conclusión respecto al Sesgo de los Valores Recientes

El sesgo de los valores recientes se hizo presente en pocos estudiantes. La experiencia física y computacional le permite a Camilo y a Gerardo modificar su concepción lo que demuestra el efecto de la interacción del estudiante con los experimentos aleatorios dentro del micromundo.

5.1.4 Sobre las intuiciones de los estudiantes respecto a las secuencias aleatorias

Este problema planteado anteriormente por otros autores como Green (1982, 1991), Serrano (1996) y Yáñez (2003) con espacio muestral equiprobable, fue presentado con una variación al plantear un espacio muestral no equiprobable para generar una secuencia aleatoria, en el cual pudimos percibir en la **séptima pregunta** de la prueba **diagnóstica**, que existe algún mecanismo interno en las personas para generar secuencias que no son muy “aleatorias” porque casi siempre tienden a igualar las frecuencias sin importar el espacio muestral.

7. En una bolsa **oscura** hay 3 bolas: 1 blanca y 2 negras. Y se quiere hacer un experimento con las siguientes condiciones:

- ❖ Se saca una bola, se registra su color y se vuelve a introducir en la bolsa.
- ❖ Cada vez que se quiera sacar una bola se debe agitar muy bien la bolsa.
- ❖ Las bolas son de igual tamaño y no se pueden diferenciar con solo tocarlas.

Imagine que en este experimento se hacen 15 extracciones. Se le pide que llene la siguiente tabla de resultados. (Utilice, N = Bola negra y B = Bola blanca).

Extracción #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Color de la bola															

- La mayoría de estudiantes distribuyen equiprobablemente la frecuencia de bolas negras y blanca (N=8 y B=7, en su mayoría), lo que evidencia la tendencia de la mente humana de distribuir por igual las frecuencias cuando generan secuencias “aleatorias”, sin tener en cuenta el espacio

- muestral (sesgo de equiprobabilidad).
- A pesar de que la mayoría de los estudiantes reconocieron que era más fácil sacar la bola negra (2:1), no lo tuvieron en cuenta a la hora de aplicar una proporcionalidad en los resultados.
 - Solo Saira (N=11 y B=4), Mayerly (N=9 y B=6), Sebastian (N=10 y B=5) y Mónica (N=9 y B=6), asignaron mayor frecuencia a las bolas negras teniendo en cuenta la proporcionalidad de los eventos, al parecer tuvieron en cuenta el espacio muestral.
 - Saira G, confunde el espacio muestral, dos bolas blancas y una bola negra, pero igual lo tiene en cuenta a la hora de generar las secuencias (N=6 y B=9).

Como resultado de la experiencia física y simulada de los fenómenos aleatorios con monedas y balotas encontramos la modificación en las concepciones manifiestas anteriormente del sesgo de equiprobabilidad, como lo evidencian las respuestas de Camilo y Gerardo de la **décima** pregunta de la **evaluación final**.

10. En una bolsa oscura hay 3 bolas: 1 blanca y 2 negras. Imagine que en este experimento se hacen 30 extracciones con sustitución y escriba el resultado en la tabla.
- La respuesta de Camilo fue: NBBBNNNNBNBNNBBNBBBNBNNNNNB NNB, (N=17 y B=13) donde podemos ver que a diferencia del diagnóstico NB NNNBNNBBNBNBB (N=8 y B=7), en este caso sí tuvo en cuenta el espacio muestral, modificando su sesgo de equiprobabilidad, porque en estas predicciones el estudiante ya es coherente con el espacio muestral y contempla rachas largas.
 - Gerardo genera la siguiente secuencia aleatoria: NBNBBNNNNBBNNB NNBBNNNNNNBBBNNN (N=19 y B=11). El estudiante confirma tener una intuición primaria al relacionar el espacio muestral con la predicción de secuencias aleatorias en el diagnóstico NBNBNNNNBBBNNNB (N=9 y B=6).

Conclusión respecto a la generación de secuencias aleatorias

Aunque durante el desarrollo de las actividades físicas y simuladas de los experimentos aleatorios no se hizo énfasis en el estudio minucioso de las características de las secuencias aleatorias es notable que el proceso generó modificaciones importantes como el del sesgo de equiprobabilidad y las clases de rachas que se pueden presentar.

5.1.5 Intuición de la Frecuencia Relativa

Como producto de la experiencia física, se manifiesta en la mayoría de estudiantes la intuición de la frecuencia relativa expresada a través del **aprendizaje probabilístico** extraído de Yáñez (2003, p. 50) en su justificación al enfoque frecuentista de la probabilidad desde el punto de vista psicológico de Fischbein (1975, p. 58-65), este término se refiere a la tendencia de la persona a ajustar sus predicciones a las frecuencias reales de los sucesos. De esta forma, los estudiantes hicieron conjeturas y predicciones del comportamiento del experimento a partir de la interpretación de los resultados obtenidos.

Luego del experimento real de la Promoción de Paletas y su análisis parcial pudimos observar que por causa del **aprendizaje probabilístico** surgieron efectos secundarios de la intuición de la frecuencia relativa que condujeron a la mayoría de estudiantes a crear falacias, en particular la del sesgo de los **valores recientes** en su forma positiva. Este efecto se reflejó en el crecimiento de la probabilidad de predicción de un evento que había ocurrido varias veces en ensayos previos. Esta actitud presentada en los estudiantes refleja la tendencia del ser humano en querer de cualquier forma, controlar las experiencias aleatorias.

El ejemplo específico de este efecto se dio en la **Cuarta Parte** en el punto **6 b** en el cuál debían comparar la cantidad de caras y sellos que salieron en la moneda. Las cinco parejas de estudiantes generaron una nueva concepción generalizada sobre los resultados experimentales de la escogencia del cliente y los resultados de la moneda: **“La gente prefiere escoger la cara”**.

La pareja 2. Laura y Maribel (subgrupo #2). *“Respecto al número de caras y el porcentaje va aumentando, de igual forma con el número de sellos y su porcentaje. Al ver los resultados finales nos pudimos dar cuenta que las caras gobernaron, al parecer tuvieron más suerte las personas de las caras, que las personas de los sellos”*.

La pareja 13. Camilo y Carlos (subgrupo #4). *“En los 10 y 20 primeros lanzamientos, la cara siempre estuvo más alta que el sello, en los 40 primeros lanzamientos se igualaron, y de ahí hasta los 87 lanzamientos dominó la cara”*.

En la entrevista hecha a Camilo al final de la cuarta parte después de la exposición, hace evidente el significado generado:

P₁: *Ese fue el análisis de las cantidades de ganadores y perdedores, pero ahora ¿qué*

opina de los resultados para los 10, 20 y 40 primeros lanzamientos respecto al número de caras y sellos que salen en la moneda?

C: *La moneda tiende a caer más en cara, entonces los clientes como que confían más en la cara y comienzan a escoger más la cara.*

Aquí Camilo y otros compañeros más adelante, reflejan la presencia en los clientes y en ellos mismos del sesgo de los **valores recientes**, al creer que cuando caía cara en la moneda dos o tres veces seguidas entonces los clientes empezaban a escoger cara (como en realidad ocurrió en grandes rachas), creyendo que así tendrían mayor posibilidad de ganar. Las siguientes preguntas de la misma entrevista, se centraron en profundizar un poco en su argumento y tratar de hacer ver al estudiante que a pesar de que la mayoría de veces salía cara y la mayoría de clientes escogía cara eso no implicaba que la mayoría iba a ganar, ya que habían cantidad parecidas de ganadores tanto con cara como con sello.

P₁: *Muestre a sus compañeros por qué afirma eso.*

C: *Aquí vemos que nada mas en los 10 primeros (lanzamientos), 6 veces cae cara y 4 sellos, pero como eran los primeros las personas no sabían y por eso escogieron más sello (lo cual era falso) y por eso perdieron más de los que ganaron. En los primeros 20 -lanzamientos- pues como eran los primeros siguieron así pero después los clientes empezaron a darse cuenta...(cambió el acetato).*

C: *En los 40 lanzamientos vemos que las caras y los sellos comienzan a caer igual (20 caras y 20 sellos), pero las personas empiezan a creer más en cara, entonces empiezan a escoger cara y poco a poco van subiendo la cantidad de caras, entonces van ganando más los clientes. Aquí -señalando el gráfico de barras- pues están parejos caras y sellos pero los clientes siguen ganando, o sea va subiendo la cantidad de ganadores y entonces nos van perjudicando poco a poco.*

En los 60 lanzamientos siguen cayendo más caras que sellos, entonces los clientes siguen confiando de cara y siguen ganando poco a poco. Entonces nos fue cada vez peor pues de los 60 lanzamientos ganaron 35 y solo recogimos \$5.000 (correspondiente a los 25 perdedores).

P₂: *¿Usted cree que los clientes que ganaron fueron todos con cara?*

C: *Pues todos no, pero la mayoría porque se iban dando cuenta que caía más cara y entonces fueron confiando en la cara.*

Ahora Camilo, además de pensar que los clientes escogieron más la cara y que efectivamente los resultados de la moneda favorecían a este lado de la moneda, el efecto del sesgo de los valores recientes genera un significado secundario: **“Los clientes ganaron porque escogieron la cara”**.

P₁: *En los primeros 10 lanzamientos ¿cuantos escogieron cara? (Del subgrupo N° 4).*

C: *8 caras y solo 2 sellos.*

P₁: *¿En los primeros 20?*

C: *16 escogieron cara y 4 sello. A los 40 lanzamientos, 26 escogieron cara y 14 sello. A los 60 lanzamientos, 42 escogieron cara y solo 18 sello. Y en el total de lanzamientos (87), hubo 60 que escogieron cara y 27 sello. Entonces los clientes como que confiaban más en cara.*

P₁: *¿En los demás grupos pasó lo mismo?*

Varios: *Si profesor.*

El docente investigador trató en este momento de hacer evidente un contraejemplo basado en los resultados reales disponibles, sin embargo como veremos, no fue suficiente para que Camilo modificara su concepción.

Saira y Yesid: *Profesor a nosotros nos dio más sellos que caras.*

P₁: *A bueno, entonces pasen y nos muestran los resultados.*

P₁: *Con sus resultados ¿cuántos clientes escogieron cara o sello en los 10 primeros lanzamientos?*

Yesid: *Salieron 5 caras y 5 sellos -en la moneda- y 3 escogieron cara y 7 sello.*

P₁: *¿Y respecto a los ganadores y perdedores?*

Yesid: *El 60% ganó (6 clientes) y el 40% perdió (6 clientes).*

P₁: *¿Y a los 20 lanzamientos qué pasó?*

Yesid: *También más sellos que caras. Casi se fueron todos por sello, 14 por sello y solo 6 por cara.*

P₁: *¿Y respecto a los ganadores y perdedores?*

Yesid: *Hubo el 12 ganadores (60%) y 8 perdedores (40%).*

P₁: *Entonces una pregunta Camilo, para usted hubo más ganadores que perdedores y para el -Yesid- también (subgrupos N° 4 y N° 2). ¿Depende de la cara que escoja el cliente? (Esperando haber aclarado que en el subgrupo de Yesid los clientes escogían más sello que cara)*

C: *Es que la moneda como que tiende a caer en cara, entonces los clientes escogen cara viendo que está cayendo cara, luego son más poquitos los que pierden que los que ganan porque muy de vez en cuando sale sello.*

P₁: *Hagamos un receso aquí.*

A continuación hacemos un resumen de la evolución del significado generado por efecto del sesgo de los valores recientes. En esta exposición podemos observar la firme idea de Camilo de pensar basado en su propia experiencia (por que él fue uno de los lanzadores del subgrupo #4) que:

1. La moneda tiende a caer más en cara que en sello. Lo cual es cierto en su caso pero no en exceso (54% salió cara -47 veces- y 46% sello -40 veces- de los 87 clientes).
2. Los clientes tienden también a escoger cara. Lo cual es cierto en su caso

(69% prefirieron cara y 31% sello de los 87 clientes).

3. La mayoría de clientes ganaron en todos las secciones de lanzamientos analizados con excepción de los primeros 10 lanzamientos (Al final, 50 ganaron -57,5%- y 37 perdieron -42,5%-).

Entonces la conclusión natural de Camilo era pensar que los clientes que ganaban era porque *escogían cara* y esta era la causa principal del por qué en su subgrupo el balance general fue de pérdidas. A pesar de presentar diferentes contraejemplos para demostrar su error, al parecer no fueron suficientes y dejan entrever un mecanismo más complejo sobre la forma en que se construyen y conectan estas intuiciones secundarias.

Estos *significados locales* forman redes muy fuertes denominados significados globales, que una vez construidos son difíciles de modificar y evidencian la falta de una mayor experimentación.

A pesar de que la intervención de Yesid debió servir para contradecir la conclusión de Camilo, ni Camilo ni la mayoría de compañeros dejaron de sostener que la gente ganaba más con cara que con sello, como lo argumenta Liliana al final de su exposición al preguntarle:

P₂: Liliana si se repite el experimento, ¿usted cree que la cara vuelve a ser favorita?

L: Si, porque es que siempre... o sea, "Yo siempre apuesto con cara".

P₂: Entonces usted cree que hay mayor posibilidad de ganar con cara que con sello?

L: Es igual los dos resultados, pero de todas maneras predomina más la cara.

Este significado sin lugar a dudas influyó en la comprensión de la distribución de frecuencias y obstaculizó la detección del significado de estabilidad y regularidad de los resultados a largo plazo.

Finalizada la quinta parte, fueron escogidos tres estudiantes para una entrevista no estructurada que buscaba poner a prueba las respuestas dadas por escrito. Es notoria la diferencia de los argumentos dados por escrito y oralmente, en cuanto a la riqueza de expresión de sus pensamientos donde encontramos mayor fluidez verbal para expresar sus ideas y establecer una cercanía docente-estudiante que permite indagar sobre los juicios dados de la experiencia.

Las siguientes tablas, hacen parte de la quinta parte y permiten orientar al lector sobre los resultados globales de los cuatro subgrupos en los cuales se

basaron los estudiantes para hacer su análisis:

Tabla N° 1. Resultados de la moneda

Objetivo: Comparar las cantidades y porcentajes de caras y sellos que salieron en la moneda a medida que aumentaba el número de lanzamientos.

N° Lanza mientos	Subgrupo 1				Subgrupo 2				Subgrupo 3				Subgrupo 4			
	caras		sellos		caras		sellos		caras		sellos		caras		Sellos	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Los primeros 10	3	30	7	70	5	50	5	50	3	30	7	70	6	60	4	40
Los primeros 20	7	35	13	65	6	30	14	70	8	40	12	60	12	60	8	40
Los primeros 40	21	52,5	19	47,5	18	45	22	55	19	47,5	21	52,5	20	50	20	50
Los primeros 60	32	53,3	28	46,6	29	48,4	31	51,6	33	55	27	45	31	51,6	19	48,4
Total lanzamiento	54	52,4	49	47,5	47	50,6	46	49,4	49	51,6	46	48,4	47	54,2	40	45,8

Tabla N° 1 Resultados de la moneda

Tabla N° 2. Resultados de los clientes

Objetivo: Comparar las cantidades y porcentajes de clientes ganadores y perdedores que salieron en en la moneda a medida que aumentaba el número de lanzamientos.

N° Lanza mientos	Subgrupo 1				Subgrupo 2				Subgrupo 3				Subgrupo 4			
	N° clientes				N° clientes				N° clientes				N° clientes			
	Gana		Pierde		Gana		Pierde		Gana		Pierde		Gana		Pierde	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Los primeros 10	3	30	7	70	6	60	4	40	5	50	5	50	4	40	6	60
Los primeros 20	8	40	12	60	12	60	8	40	10	50	10	50	8	40	12	60
Los primeros 40	19	47,5	21	52,5	22	55	18	45	21	52,5	19	47,5	22	55	18	45
Los primeros 60	32	53,3	28	46,7	29	48,3	31	51,7	31	51,6	29	48,4	35	58,3	25	41,7
Total Lanzamientos	50	48,5	53	51,5	50	53,7	43	46,3	50	52,6	45	47,4	50	57,5	37	42,5

Tabla N° 2 Resultados de los clientes

Tabla N° 3. Resultados de las paletas entregadas y el dinero recogido

Objetivo: Comparar las cantidades y porcentajes de paletas entregadas a los clientes ganadores y el dinero recogido de los clientes perdedores a medida que aumentaba el número de lanzamientos.

N° LANZAM	Subgrupo 1		Subgrupo 2		Subgrupo 3		Subgrupo 4	
	N° Paletas entregadas	Dinero recogido	N° Paletas entregadas	Dinero recogido	N° Paletas entregadas	Dinero recogido	N° Paletas entregadas	Dinero recogido
Los primeros 10	3	\$1.400	6	\$800	5	\$1.000	4	\$1.200
Los primeros 20	8	\$2.400	12	\$1.600	10	\$2.000	8	\$2.400
Los primeros 40	19	\$4.200	22	\$3.600	21	\$3.800	22	\$3.600
Los primeros 60	32	\$5.600	29	\$6.200	31	\$5.800	35	\$5.000
Total Lanzamient	50	\$10.600	50	\$8.600	50	\$9.000	50	\$7.400

Tabla N° 3 Relación de Paletas y Dinero con el número de Lanzamientos

Tabla N° 4. Resultados de de Lanzamientos, Ganadores y Perdedores con el número de Paletas

Objetivo: Comparar las cantidades de lanzamientos, el número de ganadores y perdedores a medida que aumentaba el número de paletas entregadas.

N° PALETAS	Subgrupo 1			Subgrupo 2			Subgrupo 3			Subgrupo 4		
	N° Lanza mientos	N° Gana dores	N° Perde dores	N° Lanza mientos	N° Gana dores	N° Perde dores	N° Lanza mientos	N° Gana dores	N° Perde dores	N° Lanza mientos	N° Gana dores	N° Perde dores
Las primeras 10	24	10	14	15	10	5	20	10	10	24	10	14
Las primeras 20	41	20	21	29	20	9	39	20	19	38	20	18
Las primeras 40	77	40	37	76	40	36	74	40	34	70	40	30
Las 50 paletas	103	50	53	93	50	43	95	50	45	87	50	37

Tabla N° 4 Relación de Lanzamientos, Ganadores y Perdedores con el número de Paletas

En el caso de Laura, encontramos que muestra una intuición de la equiprobabilidad cuando relaciona la cantidad de clientes ganadores y perdedores al realizar predicciones del experimento en igualdad de condiciones, al parecer basada en los resultados de la experiencia.

P₁: Si hubiese otro punto de venta ese mismo día, con otras 50 paletas, ¿Cuántos

- lanzamientos requeriría este grupo?
- L:** Pues... qué le digo... un número similar a estos, por lo menos 100.
- P₁:** Y en este mismo caso ¿Cuántas personas cree que ganen y pierdan?
- L:** Son 100 lanzamientos, y son 50 paletas, pues ganarían 50 personas y se llevan las 50 paletas.
- P₁:** ¿Y cuántos perderían?
- L:** Pues lo que quedan, las otras 50 (personas).
- P₁:** ¿Pero eso es lo que usted quisiera?
- L:** No.
- P₁:** Entonces en qué se basa.
- L:** Más o menos en el cálculo que yo hago, porque son 100 lanzamientos de los cuales yo creo que ganan 50 y pierden 50 (clientes).
- P₁:** Pero en la experiencia de los cuatro subgrupos ¿Cuántos de ellos arrojaron pérdida y cuántos ganancia?
- L:** En uno hubo ganancias y en los otros tres pérdidas.
- P₁:** Entonces, porque ahora opina que si hubiese otro punto de venta, los resultados, serían, así:
- L:** Puesto opino que ni ganancias ni pérdidas, igual.
- P₁:** Porque dice eso, si en los resultados de la experiencia tres de los cuatro subgrupos perdían y la ganancia fue sólo de... ¿Cuánto?
- L:** De 600 pesos (Refiriéndose al subgrupo 1).
- P₁:** Si hubiese otro punto de venta con 50 paletas, usted dice que 50 clientes ganarían y 50 perderían, entonces el balance sería...
- L:** Nivelado.
- P₁:** ¿Sigue opinando lo mismo?
- L:** Sí.

En relación a la escogencia del cliente, Laura muestra el significado que: “El cliente escoge más la cara”, de acuerdo a los resultados obtenidos en la experimentación. Y respecto al resultado de la moneda muestra el significado: “En la moneda predomina la cara”. Haciendo evidente la similaridad entre las cantidades pero a la vez resaltando sus significados.

- P₁:** Ahora, respecto a la cantidad de caras y sellos que escogió el cliente, ¿Qué opina finalmente?
- L:** Pues casi todos se iban por la cara.
- P₁:** ¿En todos?
- L:** Sí, más que todo en el subgrupo 1, 3 y en el 4, porque en el subgrupo 2, la diferencia fue muy mínima, fue de uno (1) como ya decía. Cuarenta y siete escogieron cara y, cuarenta y seis sellos, entonces la diferencia fue muy mínima.

P₁: *¿Y en general de todos los subgrupos?*

L: *Predominó la cara.*

P₁: *¿Y los que salió en la moneda?*

L: *Fueron más o menos casi todos iguales, en el subgrupo 1, hubo 54 en cara y 49 en sello, igual predominó la cara, en el subgrupo 2, 47 y 46, como decía antes muy mínima, en el subgrupo 3, 49 en cara y 46 en sello, también fue muy poquito pero predominó la cara y en el subgrupo 4, 46 en cara y de sello 41, también predominó la cara y en general en todos predominó la cara.*

En el caso de Yesid y Camilo, empiezan a detectar algunas regularidades del experimento que no habían manifestado por escrito, pero siguen manteniendo el efecto de la frecuencia relativa:

Para Camilo:

P₁: *Háblenos algo de los porcentajes en el número de caras y sellos (que salen en la moneda).*

C: *En todos los lanzamientos la diferencia entre los porcentajes fue muy poca, o sea, no es que hallan quedado muchísimos sellos y pocas caras, sino que hubo poca diferencia de los porcentajes, entre caras y sellos, aunque las caras ganaron.*

P₁: *¿En todos los subgrupos?*

C: *En todos los subgrupos hubo poca diferencia.*

Para Yesid:

P₁: *¿Qué puede decir de los porcentajes en estos dos extremos? (Al principio y al final)*

Y: *En los pocos lanzamientos los sellos le llevaron más porcentajes que a las caras, excepto en el subgrupo 4 que la cara le llevó un 20%, y en el subgrupo 2 que estuvieron igual en los porcentajes. Al final las caras siempre superaron a los sellos porque ya los clientes *en su mayoría eligieron cara*, entonces siempre estuvieron entre 50% y 54% los porcentajes de caras, y los sellos estuvieron entre 45% y 48%, o sea que no hubo mucha diferencia entre ellos, o sea, estuvieron casi parejos los porcentajes de las caras y los sellos entre los cuatro subgrupos. (Confunde los resultados de la moneda con la escogencia del cliente)*

Al final de la entrevista a Camilo de la quinta parte, surge un nuevo significado global, relacionado con la causa para que un cliente gane o pierda, la cual afecta la comprensión de las secuencias aleatorias de los resultados en la moneda y la secuencia no aleatoria de la escogencia del cliente (ya que en las tablas de registro se detectaron grandes rachas de caras que demuestran que la decisión del cliente en cierta forma dependía de lo que escogían las personas que recientemente habían participado, por lo que era claro que la escogencia del cliente no era aleatoria para los estudiantes, ver resultados del subgrupo N° 4).

“Si la mayoría de clientes escogieron más cara que sello y se presentaron más clientes ganadores que perdedores, entonces era porque los clientes que ganaban lo hacían escogiendo cara”.

P₁: O sea ¿que no hay relación alguna entre ganar y perder con las caras que salen en la moneda?

C: *Sí hay relación, porque las personas escogían más cara que sello, entonces los que ganaban, era porque la moneda caía en cara, tenía que caer más veces en cara que en sello para que los clientes ganaran más veces que las que perdieran.*

Durante la sexta parte, las seis parejas de estudiantes conservaron sus significados respecto a la intuición de la frecuencia relativa y el efecto del sesgo de los valores recientes.

A continuación presentamos las tablas de resultados que cada pareja de estudiantes construyó en base a las tablas de la quinta parte para realizar un compendio de los resultados generales de todo el grupo y detallar el comportamiento de los datos para las 200 paletas.

SUBGRUPO	Lanzamientos	Lanzamientos Acum.	LADO QUE ESCOGE EL CLIENTE C/S				RESULTADO DE LA MONEDA C/S				RESULTADO CLIENTE G/P			
			C	%	S	%	C	%	S	%	G	%	P	%
1	103	103	69	66,9	34	33,1	54	52,4	49	47,6	50	48,5	53	51,5
2	93	196	107	54,6	89	45,4	101	51,5	95	48,5	100	51,0	96	48,9
3	95	291	155	53,3	136	46,7	150	51,5	141	48,5	150	51,5	141	48,5
4	87	378	215	56,9	163	43,1	197	52,1	181	47,9	200	52,9	178	47,1

SUBGRUPO	Lanzamientos	Cantidad de Lanzamientos	Cantidad Paletas	Dinero Recogido
	Subgrupo	Acumulados	Acumuladas	Acumulado
1	103	103	50	\$10.600
2	93	196	100	\$19.200
3	95	291	150	\$28.400
4	87	378	200	\$35.600

Debido a la similaridad de las frecuencias relativas en el resultado de la moneda, la mayoría de estudiantes se limitan a decir que la cara supera al sello y que los porcentajes son parejos al aumentar la cantidad de lanzamientos. Nuevamente, esperábamos una mayor convergencia en los

resultados.

1. ¿Qué DIFERENCIA o PARECIDO encuentra en los resultados obtenidos en su subgrupo con 50 paletas y los resultados obtenidos de todo el grupo con 200 paletas respecto a la cantidad de caras y sellos que salen en la moneda?

Pareja # 2. Laura y Maribel. En mi subgrupo dominó la cara aunque con una diferencia de uno hacia el sello, hubo una diferencia no muy grande hacia los otros subgrupos respecto a la cara y a los sellos, lo que indica que aún así siempre en todo el grupo dominó la cara.

Pareja # 13. Camilo. Tanto en el subgrupo como en el grupo completo, la cara domina sobre el sello, respecto a los porcentajes, la diferencia se mantiene más o menos igual.

Los efectos generados por los significados relacionados con la intuición de la frecuencia relativa

Los significados creados por cada estudiante se reflejaron en sus predicciones a largo plazo:

- i. Los estudiantes predicen mayor cantidad de clientes que escogen cara sobre los que escogen sello.
- ii. Predicen mayor cantidad de cara en los resultados de la moneda que de sellos.
- iii. Predicen mayor cantidad de clientes ganadores que de perdedores.

La siguiente tabla corresponde a la respuesta de las seis parejas a la novena pregunta de la Sexta Parte.

9. Si la promoción se aplicara durante **25 días** escolares y los estudiantes mantuvieran la misma motivación, haga una **NUEVA APROXIMACIÓN** de los resultados que cree se podrían obtener con un solo punto de venta y realizando **100 lanzamientos en cada jornada (Jornada de la mañana y jornada de la tarde)**.

Parejas	# 2. Laura y Maribel.	# 3. Juan Carlos y Saira L	# 4. Gerardo y Luisa	# 10. Liliana y Yury Andrea	# 12. Yesid y Saira V.	# 13. Camilo
El número de lanzamientos que se realizan en los 25 días	5.000	5.000	5.000	5.000	5.000	5.000
El número de paletas que se despachan en UN DÍA, en juntas jornadas	200	110	130	100	96	120
El número de paletas que se despachan en ambas jornadas después de los 25 días	5.000	2.750	3.250	?	?	3.000

El número de ganadores y perdedores	G	2.500 50%	2.000 40%	3.250 65%	200 4%	2.400 48%	3.000 60%
	P	2.500 50%	3.000 60%	1.750 35%	4.800 96%	2.600 52%	2.000 40%
El número de caras y sellos que escogen los clientes	C	2.500 50%	3.000 60%	3.500 70%	3.900 78%	3.877 77,5%	3.500 70%
	S	2.500 50%	2.000 40%	1.500 30%	1.100 22%	1123 22,4%	1.500 30%
El número de caras y sellos que salen en la moneda	C	2.500 50%	3.500 70%	3.100 62%	3.000 60%	3.700 74%	2.700 54%
	S	2.500 50%	1.500 30%	1.900 38%	2.000 40%	1.300 26%	2.300 46%

Se puede observar que la mayoría de estudiantes (a excepción de la pareja #2), comprenden la relación que existe entre el número de lanzamientos y el número de clientes que pueden ganar, ya que para los 200 lanzamientos diarios en las dos jornadas predicen 110,130, 100, 96 y 120 ganadores (mayor cantidad de clientes ganadores que de perdedores). Se sigue conservando la creencia de que la mayoría de clientes escogerá cara y que la moneda caerá en cara en la misma proporción a largo plazo. Solo Camilo evidencia nuevamente haber corregido esta creencia, ya que predice una cantidad similar de caras y sellos que saldrán en la moneda, sin embargo sigue creyendo en que la gente escogerá en su gran mayoría la cara.

Durante la SÉPTIMA PARTE, en la cual se buscaba encontrar un modelo que permitiera simular la promoción de paletas, cuatro de las cinco parejas que resultaron, simularon la promoción para 50 paletas con dos monedas y un tipo de lanzamiento diferente (al suelo o en la mano), incluso con diferentes clases de moneda, con el propósito de comparar los resultados con los obtenidos en cada subgrupo de venta real y encontrar el camino para llegar al modelo computacional que queríamos implementar.

La segunda tabla se diseñó en forma similar a la presentada en el simulador computacional para familiarizar al estudiante. A continuación anexamos los resultados generales simulados por las cinco **PAREJAS** completada en la séptima parte:

P A R E J A	L A N Z	LADO DEL CLIENTE				LADO DEL VENDEDOR				RESULTADO CLIENTE			
		C	%	S	%	C	%	S	%	G	%	P	%
		1	91	46	50,5	45	49,5	53	58,2	38	41,8	50	54,9
2	101	43	42,6	58	57,4	52	51,5	49	48,5	50	49,5	51	50,5

3	114	60	52,6	54	47,4	57	50,0	57	50,0	50	43,9	64	56,1
4	103	50	48,5	53	51,5	58	56,3	45	43,7	50	48,5	53	51,5
TOTAL	409	199	48,7	210	51,3	220	53,8	189	46,2	200	48,9	209	51,1

Tabla 1. Cantidad de caras y sellos, del cliente y del vendedor en las cuatro **PAREJAS**.

P A R E J A	L A N Z	CLIENTES QUE GANAN CON:				CLIENTES QUE PIERDEN CON:				
		CC	%	SS	%	CS	%	SC	%	
1	En la mano	91	29	31,9	21	23,1	16	17,5	25	27,5
2	En el suelo	101	22	21,7	28	27,8	21	20,8	30	29,7
3	En el suelo	114	27	23,7	23	20,2	34	29,8	30	26,3
4	En la mano	103	28	27,1	22	21,4	18	17,5	35	34,0
TOTAL	409	106	25,9	94	23,0	89	21,8	120	29,3	

Tabla 2. Relación de Ganadores y Perdedores con cara y/o sello de las cuatro **PAREJAS**.

A continuación anexamos los resultados generales de los cuatro **SUBGRUPOS** de la experimentación real analizados anteriormente, incluyendo la tabla que discrimina los clientes que ganaron y perdieron con cada lado de la moneda:

P A R E J A	L A N Z	LADO DEL CLIENTE				LADO DEL VENDEDOR				RESULTADO CLIENTE			
		C	%	S	%	C	%	S	%	G	%	P	%
1	103	69	66,9	34	33,1	54	52,4	49	47,6	50	48,5	53	51,5
2	93	38	40,9	55	59,1	47	50,5	46	49,5	50	53,8	43	46,2
3	95	48	50,5	47	49,5	49	51,6	46	48,4	50	52,6	45	47,4
4	87	60	69,0	27	31,0	47	54,4	40	46,0	50	57,5	37	42,5
TOTAL	378	215	56,9	163	43,1	197	52,1	181	47,9	200	52,9	178	47,1

Tabla 1. Cantidad de caras y sellos, del cliente y del vendedor en los cuatro **SUBGRUPOS**.

P A R E J A	L A N Z	CLIENTES QUE GANAN CON:				CLIENTES QUE PIERDEN CON:			
		CC	%	SS	%	CS	%	SC	%

1	103	35	34,0	15	14,6	19	18,4	34	33,0
2	93	21	22,6	29	31,2	26	27,9	17	18,3
3	95	26	27,4	24	25,3	23	24,2	22	23,1
4	87	35	40,2	15	17,5	11	12,6	26	29,9
TOTAL	378	117	31,0	83	22,0	79	20,9	99	26,2

Tabla 2. Relación de Ganadores y Perdedores con cara y/o sello de los cuatro **SUBGRUPOS**.

Para la mayoría de estudiantes, el nuevo modelo para simular la promoción ofrecía resultados diferentes y con ventajas, comparados con la experimentación real. En lugar de buscar la forma de encontrar alguna similitud o aproximación entre el modelo y la realidad, los estudiantes trataron de cambiar el experimento aleatorio inicial por el nuevo modelo que ofrecía mejores resultados ya que el número de lanzamientos requeridos para las 200 paletas fue superior en tres casos a los obtenidos por los subgrupos.

Pareja # 1. Camilo. “Vemos que con dos monedas son necesarios más lanzamientos que con una sola, o sea, con dos monedas hay más posibilidades de obtener ganancias”.

Pareja # 3. Gerardo y Saira Viviana. “Según la moneda, yo creo que influye ya que con una moneda solo se hicieron 378 lanzamientos y con dos monedas fueron necesarios 409 lanzamientos, lo que nos garantiza una ganancia en todos los cuatro subgrupos en el cual la pareja # 3 fue al que mejor le fue en cuestión de suerte y concentración”.

Una primera causa para que los estudiantes hubieran rechazado el modelo de las dos monedas, fue el hecho de que en los resultados de las parejas, la cantidad de sellos que les correspondió a los clientes fue superior a la cantidad de caras (C=199 - 48,7% y S=210 - 51,3%), contrario a lo ocurrido en el experimento real con una moneda, en la cual al final la cantidad de caras que escogieron los clientes fue superior a la cantidad de sellos (C=215 - 56,9% y S=163 - 43,1%). Es decir, la escogencia del cliente no tenía el mismo comportamiento en la simulación.

Una segunda causa, fue el hecho de que en la simulación física con dos monedas resultaran más clientes perdedores que ganadores (G=200 – 48,9% y P=209 – 51,1%), lo cual fue contrario a los resultados reales en los cuales hubo más clientes ganadores que perdedores (G=200 y P=187). Lo anterior, junto al hecho de que el resultado de la moneda en la simulación concordó con los resultados reales en los cuales la cantidad de cara superó a los sellos (En la simulación: C=220 y S=189, y en la realidad: C=197 y S=181), activo el significado: “La cara es el resultado que predomina en la

moneda”.

Como resultado de la coordinación de significados los estudiantes llegaron a reforzar el significado global anteriormente generado en la sexta parte: “Los clientes ganan al escoger cara”, el cual fue complementado en esta parte: “Los clientes pierden si escogen o les corresponde sello”. Finalmente, como en la simulación, la cantidad de clientes perdedores superó a los ganadores, el modelo matemático fue rechazado. Al parecer la única forma de que el modelo de simulación pudiera reemplazar al experimento real sería que los resultados simulados se acoplaran a los significados anteriormente generados, de lo contrario sería rechazado.

Pareja # 1. Camilo. *“Con dos monedas el lado de la moneda que correspondió a la escogencia del cliente cayó más veces en sello que en cara y la del vendedor más veces en cara que en sello, por eso nos fue bien (hubo mayor cantidad de clientes perdedores que de ganadores), pero con una moneda los clientes escogían cara y la moneda seguía cayendo en cara, por eso nos fue mal” (hubo mayor cantidad de clientes ganadores que perdedores). (Pregunta 4, séptima parte).*

Pareja # 1. Camilo. *“No es válido el modelo, porque el cliente se apoya en lo que ve que está cayendo la moneda para escoger su lado, en cambio con dos monedas puede caer cualquier cosa dependiendo como tire la moneda el supuesto cliente. No podemos saber lo que el cliente prefiere, o en qué se basa para escoger su lado, sería como tratar de adivinar lo que el cliente piensa”. (Pregunta 6 y 8, séptima parte).*

Otra causa probable para justificar las notorias diferencias en los resultados de la experimentación real y la simulación física con dos monedas, está en el hecho de que para los estudiantes la decisión del cliente no era aleatoria, es decir, para ellos existe una tendencia del cliente en la escogencia de la moneda, que en este caso favorecería a la cara, basados obviamente en sus experiencias. Haber afirmado o supuesto que la decisión del cliente era aleatoria implicaba la realización de un estudio más exhaustivo al respecto con experimentos a largo plazo. Para nosotros existe una aparente tendencia de la mente por escoger más cara que sello por varias razones, pero en el caso de los estudiantes las razones se fundamentaron en los resultados parciales del experimento y, ver e interiorizar el uso del sesgo de los valores recientes por parte de los clientes en la experimentación real. Es decir, para los estudiantes, la escogencia del cliente no es aleatoria, en cambio en los resultados simulados la escogencia que corresponde al cliente en la primera moneda es aleatoria, por lo tanto la simulación es diferente a la realidad del experimento.

Pareja # 1. Camilo. Es mejor con dos monedas pues con clientes las personas prefieren escoger cara, pues es la que tiende a caer en la moneda, en cambio con dos monedas, en la moneda del cliente puede caer cara como sello. Con clientes los ganadores con cara son

mayores que con las parejas, porque los clientes escogen cara al ver que la moneda cae en cara, en cambio en las parejas uno no puede escoger lo que el cliente quiere. (Pregunta 2, séptima parte).

El hecho de que el modelo haya arrojado resultados contrarios a los obtenidos en la experimentación real, autoriza a los estudiantes a rechazar el modelo debido a que los estudiantes observan los datos de una manera absoluta o determinista. Sin lugar a duda, surge la necesidad de más experimentación física que permita validar los modelos de simulación física y computacional para generar una mayor conciencia del significado aleatorio del experimento y sus características.

En la NOVENA PARTE, en el proceso de simulación computacional, los estudiantes implementaron el modelo de las dos monedas para simular la promoción de paletas, el programa Probability Explorer generaba una secuencia aleatoria que correspondía al resultado del lanzamiento de dos monedas o bien el lanzamiento de una moneda dos veces consecutivas.

Se hizo un especial seguimiento al proceso desarrollado por Camilo y Gerardo a través de entrevistas video grabadas. A continuación detallaremos la evolución de los significados generados por Camilo que en cierta manera fueron parecidos a los demás compañeros.

En una entrevista posterior al trabajo de la novena parte, Camilo no acepta del todo el simulador como un medio de aproximarnos a los resultados que se pueden dar en la realidad, debido a la influencia de los significados globales construidos por Camilo anteriormente, los cuales coincidimos con Pratt en que no se pueden reemplazar sino que necesariamente implican un mayor trabajo en la experimentación real y computacional para ser modificados.

Mostrando la tabla que resume algunas simulaciones hechas durante la Novena parte (punto 12):

E X P E R	L A N Z	CLIENTE				VENDEDOR				RESULTADO CLIENTE			
		C	%	S	%	C	%	S	%	G	%	P	%
1	405	194	47.9	211	52.1	225	55.6	180	44.4	200	49.4	205	50.6
2	418	205	49	213	51	205	49	213	51	200	47.8	218	52.2
3	400	207	51.8	193	48.2	205	51.2	195	48.8	200	50	200	50

Tabla N° 7. Resultados de 3 experimentos simulados en Probability Explorer con 200 paletas

S U B G R	L A N Z	CLIENTES QUE GANAN CON:				CLIENTES QUE PIERDEN CON:			
		CC	%	SS	%	CS	%	SC	%
1	405	107	26.4	93	23	87	21.5	118	29.1
2	418	96	23	104	24.8	109	26.1	109	26.1
3	400	106	26.5	94	23.5	101	25.3	99	24.7
TOTAL	1.223	309	25.2	291	23.8	297	24.3	326	26.7

Tabla N° 8. Resultados de 3 experimentos simulados en Probability Explorer con 200 paletas

C: Aquí en las tres simulaciones hubo mayor cantidad de clientes perdedores que clientes ganadores. Entonces, si en la realidad funcionara como en las simulaciones computacionales entonces nos hubiera ido bien en la promoción.

P: ¿Siempre sucedía esto en las simulaciones? Realice otra simulación.

C: Hagámosla con 400 lanzamientos.

C: Para 400 lanzamientos hubo 196 clientes ganadores y 204 perdedores, entonces vemos que siempre hubo mayor cantidad de perdedores que de ganadores.

Como podemos ver los resultados reales en los que hubo mayor cantidad de clientes ganadores que perdedores contrastó con las pocas simulaciones realizadas en el computador, por lo cual no hubo mucha credibilidad en la herramienta, a pesar de que Camilo detecta la regularidad de los resultados a largo plazo, este significado solo fue valido dentro del micromundo computacional y no pudo ser exteriorizado a la realidad.

Continuando la entrevista:

C: Cuando el programa empieza a simular, los porcentajes varían pero después se estabilizan y no varían mucho.

P: ¿Eso de que depende?

C: Como el programa es de probabilidad, saca las cosas a la suerte, entonces cuando los porcentajes quedan mas o menos iguales, lo que varía ya es muy poco.

P: Y eso ¿es probable que suceda en la realidad?

C: No creo, porque en la realidad ya varían mucho y en el programa tratan como de estabilizarse en los mismos porcentajes.

Esta descripción de la concepción de Camilo, se confirma en la respuesta dada en el taller de la Novena parte, punto 19:

¿Qué opina del simulador Probability Explorer con estos resultados?

“Que los resultados que da, se parecen a la simulación hecha con dos monedas, pero se aleja un poco de la realidad”. (Camilo, Novena Parte, punto 19).

En esta respuesta, Camilo acepta que los resultados de la simulación computacional son similares a los obtenidos en la simulación física con dos monedas, pero para él difieren con los resultados de la experimentación real. Es decir, Camilo no acepta el simulador como un medio confiable para analizar la Promoción de Paletas, invalidando los atributos encontrados en las simulaciones computacionales sobre el comportamiento de la promoción a largo plazo.

En conclusión, Camilo logra percibir las características fundamentales de las secuencias aleatorias del experimento dentro del micromundo, pero tuvo dificultad para relacionarlo con la realidad y extrapolar dichas ideas. Se formaron nuevos significados relacionados con el experimento, pero los significados globales construidos anteriormente con la experiencia real fueron un obstáculo para fortalecer los nuevos significados lo que Pratt llama significados débilmente conectados.

Algo similar ocurre en el caso de Juan Carlos y Lina, para quienes el simulador no fue plenamente aceptado como una forma de realizar la promoción, debido al determinismo como se analizaban los resultados.

Comparando los resultados reales con 200 paletas con los resultados simulados por el computador, ¿qué piensa?

“Que en cierta forma fueron parecidos ya que en estos fue mayor el número de ganadores que de perdedores. Las diferencias en porcentaje fueron grandes pero en lanzamientos no fue tan grande” (Juan Carlos y Lina, Novena parte, punto 17).

¿Los resultados de alguno de los cinco experimentos, con 200 paletas, se parecieron a uno de las cuatro parejas de la promoción simulada con dos monedas? ¿Cuáles y por qué?

“No. Fueron diferentes porque en la mayoría de parejas cuando realizamos la simulación física con dos monedas pudimos observar que los resultados fueron a favor lo que nos muestra que fue mayor el número de perdedores que de ganadores en cambio en los resultados simulados en el computador fue mayor el número de ganadores” (Juan Carlos y Lina, Novena parte, punto 19).

Qué opina del simulador Probability Explorer con estos resultados:

“Que los resultados son muy diferentes aunque algunas veces coincide con los resultados reales” (Juan Carlos y Lina, Novena parte, punto 20).

Pero en el caso de Laura, los resultados del simulador fueron parcialmente

aceptados, debido a que en las pocas simulaciones computacionales de la promoción encontró similitud con los resultados reales.

Experimente CINCO veces con dos monedas en Probability Explorer para despachar 50 paletas, teniendo en cuenta que la primera moneda corresponde al CLIENTE y la segunda VENDEDOR. Es importante que registre los resultados en la siguiente tabla y, copie la tabla de datos y el gráfico de barras correspondiente en un archivo de Word:

EXPER	LANZ	CLIENTE				VENDEDOR				RESULTADO CLIENTE			
		C	%	S	%	C	%	S	%	G	%	P	%
1	125	65	52	60	48	58	46.4	67	53.6	50	40	75	60
2	105	57	54.3	48	45.7	52	49.5	53	50.5	50	47.6	55	52.4

Tabla N° 5 Resultados de 5 experimentos simulados en Probability Explorer con 50 paletas

Event 1	Event 2	Count	Fraction	Decimal	Percent
H	H	24	24/125	0.192	19.2%
H	T	41	41/125	0.328	32.8%
T	H	34	34/125	0.272	27.2%
T	T	26	26/125	0.208	20.8%

Event 1	Event 2	Count	Fraction	Decimal	Percent
H	H	27	27/105	0.25714	25.71%
H	T	30	30/105	0.28571	28.57%
T	H	25	25/105	0.2381	23.81%
T	T	23	23/105	0.21905	21.9%

EXPER	LANZ	CLIENTE				VENDEDOR			
		CC	%	SS	%	CS	%	SC	%
1	125	24	19.2	26	20.8	41	32.8	34	27.2
2	105	27	25.71	23	21.9	30	28.6	25	23.8

Tabla N° 6 Resultados de 5 experimentos simulados en Probability Explorer con 50 paletas

Comparando los resultados reales con los resultados simulados por el computador, con 50 paletas, ¿qué piensa?

“En la simulación nos damos cuenta que con 230 lanzamientos hay 130 perdedores, podemos observar que hubo ganancias, mientras que en los 409 lanzamientos que se obtuvieron en los resultados reales nos damos cuenta que también hubo ganancias, lo que indica que los resultados son parecidos en ese sentido, pero al comparar los resultados reales del cliente ganan las caras y en el lado del vendedor ganan las caras, mientras que en la simulación en el lado del cliente ganan las caras pero en el lado del vendedor ganan los sellos entonces podemos decir que hay un poquito de diferencia en ese sentido”. (Laura y Maribel, Novena Parte, punto 13).

¿Los resultados de alguno de los **dos experimentos** con **50 paletas** se pareció a uno de los **cuatro subgrupos** de la promoción realizada en el Instituto? ¿Cuáles y por qué?

“Los resultados de los 4 subgrupos son un poco parecidos porque en los resultados del lado que escoge el cliente de caras y sellos gana la cara al igual que la simulación, en cambio en los resultados de la moneda de los 4 subgrupos gana cara en cambio en la simulación gana sello, y respecto a los ganadores y perdedores de los 4 subgrupos también se parecen a los de la simulación porque en este caso aparece mayor número de perdedores”. (Laura y Maribel, Novena Parte, punto 14).

En conclusión, de la Novena Parte encontramos estudiantes que aceptan o rechazan la herramienta computacional comparando los resultados reales con los simulados en el programa. Si en general las características de los resultados generales no son similares a los resultados reales, entonces rechazan el simulador teniendo en cuenta los significados generados por la intuición de la frecuencia relativa y el aprendizaje de tipo probabilístico.

La relación del espacio muestral y la distribución de frecuencias

La DOCEAVA PARTE, en la cual se implemento un nuevo dispositivo aleatorio con balotas para realizar la promoción, los estudiantes configuraron un espacio muestral no equiprobable en el cual se eliminó la escogencia del cliente simplificando el experimento. La nueva promoción se basó en una bolsa con tres bolas amarillas y dos rojas, en la que extraer una bola roja equivalía a ganar una paleta y extraer una bola amarilla a tener que pagar \$200 sin llevar paleta.

En este nuevo experimento, los estudiantes por intuición eran conscientes que de antemano tenían ventaja sobre los clientes y partiendo del espacio muestral predijeron mayor cantidad de clientes perdedores que de ganadores relacionando el espacio muestral con la distribución de frecuencias del experimento. Realizaron simulaciones físicas (Onceava Parte) y computacionales (Doceava parte), encontrando los resultados esperados (mayor cantidad de extracciones amarillas que de rojas) lo cual generó *confianza* en la herramienta.

En este caso los significados generados en el experimento con monedas estuvieron ausentes, pero no olvidados. El nuevo experimento no estuvo relacionado con malas concepciones respecto a la naturaleza del experimento, el experimento fue adoptado como aleatorio y el significado de incontrolabilidad fue asociado.

Sin embargo, durante el desarrollo de las simulaciones computacionales surgieron algunos significados similares a los de las monedas como el efecto del sesgo de los valores recientes.

En el caso de Gerardo (G) y Lina (L), al comienzo de las simulaciones con

pocas extracciones creen que “siempre gana la balota amarilla o se da un empate” (s_1), basados en los resultados de las primeras simulaciones. Es algo común en los estudiantes, que tienden a generalizar lo observado en pocas y cortas simulaciones de los experimentos (intuición de la frecuencia relativa).

G: Como decimos muy pocas veces que ocurre que gane la roja, aquí gano la amarilla (R=7, A=13), ya lo habíamos intentado otras veces en el programa y nos había dado que ganaba siempre la amarilla, o si no quedaban en empate ya que muy pocas veces gana la roja o empata, o bien, la mayoría de veces es la amarilla la que esta por encima de la roja; siempre le ha llevado una ventaja como podemos ver. En esta mire otra vez gana la amarilla.

G: Mire otra vez ganan las balotas amarillas, como de cinco intentos que hemos hecho últimamente hasta el momento solo una vez ganan las rojas, significa que esta promoción seria buena para nosotros.

P: ¿Así que en general que pasa para las 20 extracciones?

G: Pues que muy casual ganan las rojas o se da un empate, casi siempre la balota amarilla es la que domina.

L: Lo cual nos podría dejar muchas ganancias.

Luego, en la medida que los estudiantes siguen realizando simulaciones con un mayor número de extracciones y analizando los resultados, se evidencia una modificación del significado anterior: “Cuando aumenta el número de extracciones, las balotas amarillas amplían su diferencia con las balotas rojas” (s_2).

G: Vemos que en este experimento gana la balota roja.

P: ¿En cuanto?

G: Por una diferencia muy mínima (R=21 y A=19), casi siempre ocurre esto, ganó la roja por muy poco. Vamos a observar otra vez de nuevo esto con las mismas 40 extracciones (simulando). Vemos que si la amarilla gana, entonces gana con una diferencia amplia, mire (señalando los resultados de la tabla, R=15 y A=25).

L: Con una diferencia de diez extracciones sobre la roja.

G: Una diferencia amplia, si lo realizáramos con el doble de los que estábamos haciendo, vamos a ver observaríamos (simulando). Mire gana la roja por muy poco (R=41 y A=39), al volverlo a intentar, creo que gana la balota amarilla (simulando). Mire se demuestra que aquí ya no es tanta la diferencia (R=33 y A=47), lo podríamos intentar con mas lanzamientos a ver que pasaría. (Experimenta con 140 extracciones).

P: ¿Qué puede ver de los resultados?

G: Pues que la amarilla siempre, entre más avanza las extracciones como que la cantidad de balotas amarillas se aleja de la cantidad de balotas rojas. Veíamos que alcanzaba a llegar al punto que avanzaban casi iguales y luego en otras 10 extracciones 8 caían amarillas.

Vamos a volver a intentar a ver que pasa (simulando nuevamente). Aquí podemos observar que empezando la roja como que intenta ganar, pero al terminar la amarilla tomó más ventaja sobre la roja con una diferencia de 40 (R=50 y A=90).

L: Casi dobla el número de balotas rojas.

G: Si lo intentáramos con más extracciones, supongo que la balota amarilla tomaría más ventaja a la roja.

P: ¿Qué tanto?

*G: Pues yo creo que alcanzaría a llevarle el **doble**.*

L: Más todavía.

G: De pronto hasta más.

P: En porcentaje ¿cuánto?

G: Porcentaje yo creo que sería...

L: Un 75%

G: Para las amarillas, y un 25% para las rojas, lo que dije primero, alcanzaría a llevarle mas del doble.

Los resultados experimentales sirvieron de apoyo para generar confianza en la herramienta y aceptar los resultados simulados, porque perciben comportamientos similares entre las secuencias aleatorias en la realidad y la simulación, al observar los cambios que sufren las representaciones gráficas y tabulares.

P: ¿Usted cree que eso fue lo que paso cuando hicieron el ensayo con la simulación física con balotas?

G: Sí, porque según el análisis que realizamos, a mí me toco llevar bolsa en la simulación, y vimos que en las primeras extracciones la roja era como la que más sacaba el cliente, pero ya después la amarilla la empata y la pasa hasta un punto que ya era grande la diferencia.

Ahora modifican y fortalecen el significado anterior (s_2), creen que “en pocas extracciones la balota roja puede ganarle a la amarilla o llevarle una ventaja inicial, pero al aumentar el número de extracciones la balota amarilla la empata y sobre pasa con una diferencia siempre mayor” (s_3).

*G: Al volverlo a hacer con 20 extracciones, mire lo que no pasa: La roja gana en las 20 extracciones porque la amarilla **no tuvo la suficiente cantidad de extracciones** como para alcanzar la roja y pasarla, pues la roja empieza bien; entre **menos cantidad de extracciones sea para la roja es mejor**; si lo hacemos con mas vemos que la roja empieza ganando pues la amarilla intenta superarla. Vemos que aquí al principio, cuando la roja gana, gana no por mucha diferencia pero la amarilla al ganar siempre la mayoría de veces gana por mucha cantidad, al volverlo a intentar...*

(Se hace un nuevo corte para que sigan los estudiantes simulando el experimento)

La experiencia real que tenga cada estudiante con el fenómeno aleatorio es sin duda fundamental para generar confianza o ser un obstáculo en el proceso de comprensión de los significados que emergen, ya que se convierten en el origen de los mismos. En este punto los estudiantes empiezan a buscar argumentos basados en la relación del espacio muestral y su experiencia práctica para justificar sus ideas, aunque todavía no lo hacen cuantitativamente.

G: *Observamos que siempre es una cantidad superior (R=27 y A=73), por lo que esto se es bueno ya que la roja favorece al cliente y la amarilla a nosotros. Yo creo que en esto **influye la cantidad de balotas que se utiliza.***

P: *¿Por qué?*

G: *Porque como están dentro de una bolsa, el cliente no va a saber que la cantidad de balotas amarillas es mayor, aquí lo hicimos con tres amarillas y dos rojas, es poca la diferencia pero hay mas oportunidades de sacar la amarilla que la roja; **como lo hicimos en la simulación, así es en la realidad.** Vimos en los salones, que los alumnos al ver que no ganaban decían que era trampa, a lo último tocaba mostrarle las balotas de la bolsa para que creyeran que había balotas rojas, ya que casualmente ganaba uno de una fila donde había seis estudiantes (refiriéndose a la simulación dentro de los salones de clase).*

La confianza que gana el estudiante y el análisis que hace de los resultados de los primeros experimentos lo autoriza para defender sus conjeturas (s_2 y s_3), al punto de no percibir cualquier falencia en ellas. Así, en las nuevas simulaciones realizadas el estudiante no percibe que la “diferencia” entre las frecuencias de los eventos no aumenta en la forma que esperaba.

P: *¿En 1000 extracciones, en que proporción creen que van a ganar?*

G: *Pues yo creo que sería como decimos, **siempre que gana es superior** -la diferencia-. En 1000 ya sería más avanzada, creo que si no es muy exagerado decir alcanzaría a superar por el doble, lo podemos intentar en el simulador.*

(Simulando). Observamos que sucedió lo que dije pero tuvo una gran diferencia la cantidad de balotas rojas sobre las amarillas, pues la cantidad de extracciones que se hicieron, no les faltó mucho para alcanzar a superarlo casi el doble (R=397 – 39,7% y A=603 – 60,3%).

P: *¿Casi el doble?*

G: *Faltó un poco.*

El estudiante sigue fortaleciendo la concepción creada de que al aumentar el número de extracciones aumenta la diferencia entre la cantidad de balotas amarillas y rojas (s_3), a pesar que los resultados de las simulaciones

recientes no le permiten justificar su conjetura.

P: ¿Qué pasaría a las 1500 extracciones con los porcentajes?

G: Pero otras 1500 o ¿sobre estas?

P: No sobre estas 1000.

*G: Pues yo creo que la diferencia que tienen las balotas amarillas sobre las rojas **aumentaría** pues ya que observamos en las 1000 extracciones es una diferencia avanzada si ampliáramos a otras 500 **la diferencia aumentaría**.*

P: ¿Que porcentajes cree que aparecerían?

G: Creo que un 70% para las amarillas y un 30% para las rojas.

P: Pruébalo.

*G: Antes la diferencia era casi de 294 y aquí ya no fue mucha la diferencia pero aquí ya **aumento a 300** ($R=600 - 40\%$ y $A=900 - 60\%$).*

El estudiante justifica el supuesto “aumento de la diferencia” al decir que aumenta la frecuencia absoluta de la balota amarilla respecto al experimento anterior, sin tener en cuenta la relatividad entre ambas frecuencias debido a que los dos experimentos tienen diferentes números de extracciones (1000 y 1500 extracciones respectivamente).

A pesar de que el estudiante se da cuenta que la evidencia de los resultados contradice su conjetura (s_3), trata de defenderla con otros argumentos, sin tener en cuenta la relatividad de los valores en la nueva simulación. Contrario a lo que dice Pratt (1998), esto evidencia que existen nuevos significados creados por el estudiante dentro del micromundo que no son tan débiles, por el contrario son fuertes y difíciles de modificar, lo mismo ocurre con los significados iniciales o globales generados antes y durante la experimentación física (como las malas concepciones relacionadas con las causas físicas de los resultados aleatorios de las monedas). Parece ser que las malas concepciones de los estudiantes son difíciles de modificar, mientras que las buenas concepciones son difíciles de generar.

P: ¿Y qué pasaría si aumentamos otras 500 extracciones?

G: Sería mayor la diferencia.

P: ¿Qué porcentajes cree que saldrían?

G: Pues yo sigo confiando en que van aumentar, sería como un 30% las rojas y un 70% las amarillas. Sigo insistiendo en ese porcentaje porque ya vemos que se va acercando a lo que decía antes.

P: ¿Qué puede ver a medida que aumentan las extracciones? (Mientras la representación dinámica se actualiza en los gráficos y tablas de valores).

G: Que la ventaja que tienen las balotas amarillas sobre las rojas aumento ya no son las

mismas 300 de antes sino alcanzan a pasar casi las 400 (R=774 – 38,7% y A=1226 – 61,3%).

P: ¿Y los porcentajes?

G: Los porcentajes de la roja disminuyen un poco lo que alcanzo a aumentar la amarilla, todavía no se alcanza a dar lo que yo dije pero creo que al intentar otros lanzamientos se alcanzaría a lograr.

En el caso de Camilo, presenta el efecto del sesgo de los valores recientes, pero a diferencia de Gerardo, la diferencia percibida entre las frecuencias de los eventos no aumenta indefinidamente, por el contrario disminuye al aumentar las extracciones.

Camilo crea un significado similar a su compañero Gerardo, al afirmar que al aumentar las extracciones la diferencia entre las frecuencias aumenta (s_2), pero a diferencia de él entiende que esta diferencia aumenta cada vez más lentamente, ya que interpreta mejor el dinamismo de las representaciones.

P: ¿Qué sucedió en las 200 extracciones de la simulación real de la nueva promoción?

*C: Igual que en la simulación computacional empiezan parejas: 25 balotas amarillas y 25 rojas. Para los siguientes 50 cambiaron y al final para las 200 extracciones las amarillas terminaron superando a las rojas. Comenzó parejo y luego fue **subiendo lentamente la diferencia**. (Refiriéndose a los valores obtenidos de la simulación física de la nueva promoción ver 11ª Parte).*

En el análisis de categoría de la construcción del significado conceptual, se centran los argumentos en el estudio del desarrollo del proceso de comprensión de la Ley de los Grandes Números.

5.2 CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO CONCEPTUAL

Esta categoría permitió establecer si la estrategia aplicada fue útil a la hora de construir el sentido de la Ley de los Grandes Números y formar un significado propio del concepto de probabilidad. En especial tuvimos en cuenta el proceso de cómo los estudiantes construyeron su red de significados a partir de intuiciones relacionadas con las frecuencias relativas mediante la coordinación de significados.

5.2.1 Evaluación computacional

Junto a la prueba escrita, se aplicó a Camilo una prueba computacional diseñada con anterioridad que consistió en enfrentar al estudiante a la siguiente situación: Se configuró en el simulador Probability Explorer una

urna con un determinado número de bolas de dos colores, y utilizando las propiedades de la herramienta se ocultó al estudiante esta información. La prueba consistía simplemente en averiguar el espacio muestral del experimento configurado, donde la única acción que podía hacer era simular de manera libre con el número de extracciones deseado y observar las representaciones tabulares y gráficas.

El objetivo general de la prueba era evaluar la manera como el estudiante podía abordar la situación aleatoria de acuerdo a la experiencia adquirida y analizar el alcance de los significados generados relacionados con la Ley de los Grandes Números dentro del micromundo. Esta prueba se realizó ANTES de aplicar la prueba escrita.

El caso de Camilo

Para Camilo se configuró la urna con seis (6) bolas negras y dos (2) bolas azules. A continuación presentamos algunos apartes del seguimiento video grabado que hizo uno de los docentes investigadores del proceso desarrollado y su interacción en el micromundo. Este seguimiento nos puede permitir percibir la manera como evolucionan los razonamientos del estudiante y se crean o modifican los significados.

Cuando el estudiante se enfrentó a la situación frente al computador esperábamos que comenzara a simular aumentando el número de extracciones con altas cantidades, pero por el contrario, el estudiante comienza a simular haciendo extracciones una por una esperando encontrar el número de balotas de la urna en pocas extracciones.

P: ¿Qué pasa?

(El estudiante simuló extracciones acumuladas una por una obteniendo sucesivamente las siguientes cantidades de bolas Azules y Negras: A=1 - N=0 y A=1 - N=1. Observó simultáneamente las representaciones tabular y, las gráficas circular y de barras).

C: No sé, no puedo.

P: Solamente puede simular.

(Continuó incrementando las extracciones anteriores una por una hasta obtener el resultado de 14 extracciones: A=5 – 35,71% y N=9 – 64,29%. Luego borró los resultados y simuló el experimento ejecutando directamente 10 extracciones y obtuvo: A=2 – 20% y N=8 – 80%)

C: Pues será una bola azul y cuatro negras.

El estudiante aplicó la **Ley de los Pequeños Números**, creyendo que la frecuencia relativa de los dos eventos en pocas extracciones correspondía al valor de probabilidad y por lo tanto relaciona dicho valor a la proporción de bolas del espacio muestral de acuerdo al significado generado en las actividades de simulación anterior.

Camilo a medida que realizaba las cortas simulaciones, al parecer esperaba obtener porcentajes enteros para cada evento, por eso fue que se atrevió a dar un posible espacio muestral para las 10 extracciones, pero al ir incrementando las extracciones se dió cuenta que estas frecuencias relativas tomaban otros porcentajes con decimales, quedando consternado y desorientado.

(Sigue simulando con los anteriores resultados, incrementando una por una las extracciones, detallando los eventos apilados y clasificados por color en dos columnas hasta llegar a 16 extracciones: A=3 – 18,75% y N=13 – 81,25%)

C: ¿Toca decir el número exacto de bolas?

P: Sí. Por ejemplo en las simulaciones con bolas de la Nueva Promoción de Paletas que ustedes hicieron ¿Cuántas bolas de cada color había?

C: 3 amarillas y 2 rojas.

P: Y el gráfico ¿Cómo era?

C: Pues así. (Señalando el gráfico circular de la pantalla e indicando una línea divisora similar a la generada en las simulaciones a largo plazo con 40% rojo y 60% amarillo)

P: ¿Para cualquier número de extracciones?

C: Casi siempre salía así.

P: ¿Casi siempre? Entonces para 10 extracciones ¿El gráfico circular salía de la misma forma?

C: Sí, más o menos el 60% para las amarillas y el 40% era para las rojas.

En este punto podemos apreciar que a pesar de haber realizado recientemente el análisis del experimento de la Nueva Promoción (12ª Parte) y haber construido los significados necesarios para concluir el valor de probabilidad y, su relación con el espacio muestral y los valores de las frecuencias relativas, olvida el significado de “variabilidad” a corto plazo. Así, el significado creado de “variabilidad” en los resultados a corto plazo, aún está conectado débilmente con el significado de “estabilidad” de los resultados a largo plazo.

P: ¿Y entonces?

(El estudiante borró los resultados anteriores y simuló directamente con 10 extracciones obteniendo: A=4 – 40% y N=6 – 60% en las distintas representaciones del programa).

P: ¿Con esos resultados podría saber cuántas bolas hay de cada una en la urna?

C: 4 azules y 6 negras, o podrían ser 2 y 3.

P: ¿Con ese número de extracciones?

C: Sí.

P: Pero si vuelve realizar el mismo experimento con el mismo número de extracciones ¿Vuelve a ocurrir lo mismo?

(Simula nuevamente 10 extracciones diferentes).

P: ¿Qué paso?

C: Cambiaron los resultados, ahora serían 2 azules (20%) y 8 negras (80%).

P: ¿Y si vuelve a hacer otras 10 extracciones?

C: 5 azules (50%) y 5 negras (50%).

P: ¿Por qué escogió el 10?

C: Pues porque no creo que la bolsa tenga más de 10 balotas.

P: Entonces ¿El número de extracciones que debe realizar depende del número de balotas?

C: Pues no, solamente que con 10 hay mas posibilidades de que me caigan exactos los porcentajes, porque si hago por ejemplo 100 extracciones me puede salir 50.3% de negras o azules, entonces eso no me conviene porque necesito saber el número exacto de balotas.

P: Muestre con 100 extracciones.

C: Si ve que salen porcentajes con decimales, y necesito dar un número exacto de balotas (Mientras el simulador genera los resultados y actualiza simultáneamente las frecuencias).

Podemos comprobar el supuesto escrito en el comentario anterior. Camilo relaciona directamente la frecuencia porcentual de los eventos con el espacio muestral sin tener en cuenta el número de extracciones (Ley de los Pequeños Números), lo cual solo es cierto cuando la frecuencia relativa alcanza su estabilidad y se aproxima al valor de probabilidad teórico es decir con un gran número de extracciones; lo que no ocurre en este caso porque los resultados para las 10 extracciones siempre van a ser diferentes. El siguiente esquema ilustra las conexiones evidenciadas por el estudiante hasta el momento.

C: Mire, 73% de bolas negras y 27% azules. O sea, si hubiera cuatro balotas en la bolsa entonces 3 bolas serían negras y 1 azul.

P: Pero en la anterior simulación era diferente. Parecía ser la tercera parte azul y el resto negra (29% y 71% respectivamente).

(Nuevamente simulo con 100 extracciones diferentes).

C: Mire 24% para las azules y 76% para las negras (A=24 y N=76).

P: Como podría estar seguro de esa relación que usted dijo (1 bola azul y 3 negras).

C: No estoy seguro completamente ¿Únicamente simulando?

Camilo ya encontró el espacio muestral buscado pero no esta seguro de él. Aquí el profesor investigador (P), trata de evocar situaciones aleatorias del dominio del estudiante (C) para propiciar el recuerdo y fijación de significados generados con anterioridad, los cuales por su naturaleza tratan de ser olvidados por ser recientes.

P: Sí. Por ejemplo, abra otra ventana y configure una urna de la cual usted sepa como va a salir el gráfico.

(Camilo configuró en otra ventana una urna con 1 bola roja y 2 amarillas, y ejecutó 100 extracciones).

P: ¿Cómo cree que va a salir el gráfico?

C: Una tercera parte para la roja y dos terceras partes para la amarilla

(Ejecutó la simulación y abre solo el gráfico circular para su análisis).

C: Si trazamos una línea imaginaria vemos que el círculo queda dividido en tres partes de las cuales una de ellas es roja y el resto amarilla.

P: ¿Cómo serían los porcentajes?

C: Así a simple vista sin abrir la tabla de valores, yo diría que un 33.3% pero no exactamente.

(Abrió la tabla de frecuencias del programa).

C: Nos dio 30% para la roja y 70% para la amarilla.

P: ¿Más o menos, o se alejó mucho?

C: Pues no es mucha la diferencia (3,3%, respecto al 33,3% y al 66,6% de acuerdo al espacio muestral) si lo volvemos a hacer también va a estar cerca de estos valores.

P: Listo, si usted ya sabe cómo debe quedar el gráfico ¿Cómo puede hacer para que el gráfico sea más exacto de lo que piensa (33,3% y 66,6%)?

C: Con **menos** extracciones.

Esperábamos que la respuesta del estudiante fuera con más extracciones, pero en este tipo de situaciones la experimentación en el micromundo es la herramienta esencial para modificar las malas concepciones respecto a la relación entre el número de extracciones y el significado de “estabilidad” en los resultados de las frecuencias relativas la cual aún no se ha fijado en la estructura mental de Camilo.

P: ¿Con menos extracciones va a tener más exactitud? Hágalo entonces con menos extracciones.

C: Con 50 extracciones.

P: ¿Si le dio más exacto?

C: No. (A=19 – 38% y N= 31 – 62%)

P: ¿Por qué?

C: Pues porque en la otra simulación me daba 30% y la diferencia era de 3.3%, en cambio en esta simulación me dio 38% y la diferencia es de casi 5% (4,7% respecto al porcentaje de balotas azules).

P: Y entonces cómo hace para obtener el gráfico como usted cree que va a salir.

C: ¿En este caso hay 3 bolas en la urna cierto?

P: Sí.

C: Entonces yo siempre he creído que el programa trata como de basarse en eso, entonces de pronto... no pero ¿Para hacer más extracciones?

(Borró los resultados anteriores y ejecutó 250 extracciones con velocidad lenta, observando detalladamente los cambios en las múltiples representaciones)

P: ¿Qué está sucediendo ahí? (Mientras el simulador genera resultados con baja velocidad).

*C: Pues que la balota roja intenta irse mucho para acá (ser menor de 1/4 de circunferencia), algo que no debería pasar. Pero me estoy dando cuenta de que con más lanzamientos trata de **estabilizarse más** en los valores que yo dije, es decir 1/3 de las rojas. Si ve que al principio nos daba valores que no correspondían en cambio con muchos lanzamientos trata de dar más preciso, donde debe ser.*

En este momento el estudiante está conectando y coordinando los significados que relacionan el número de extracciones y el valor de probabilidad.

P: Entonces ¿Qué cree que debe hacer para averiguar el número de balotas negras y azules de la urna?

C: Hacer la simulación por ahí con 250 extracciones como aquí.

P: Esperemos a ver que resultados obtiene en esta ventana. ¿El gráfico qué refleja?

C: Hay como una tercera parte de bolas rojas, pero un poco corrida (inexacta).

P: ¿Qué pasa a medida que aumentan las extracciones?

C: Trata de irse más para donde debe, o sea a $1/3$, me dio 29.2% -refiriéndose a la frecuencia de balotas rojas - ($R=73 - 29,2\%$ y $A=177 - 70,8\%$). Para que de más o menos exacto no sé cómo hacer.

P: ¿Está mejor que con las 50 extracciones o no?

C: Pues un poco, sí porque con las 50 se pasó un 5% y aquí ya un 4% no fue mucho la diferencia pero mejoró un poco (refiriéndose la frecuencia de balotas rojas).

P: Entonces ¿Qué más puede hacer?

C: No sé, porque seguir aumentando la cantidad de extracciones no es que me halla dado resultado.

P: ¿Cree que 250 extracciones son suficientes para que le dé lo esperado?

C: Sería probar de otra forma.

(Continuando con la simulación del problema, ejecutó más extracciones sobre los mismos resultados).

C: Aquí trata como de acercarse. (Refiriéndose a los nuevos resultados de la simulación)

P: ¿Para cuántas extracciones?

C: 366 extracciones.

P: ¿Qué pasa si continúa la simulación con la urna?

C: Vemos que está como cerca, o sea como que con **muchas extracciones es más exacto**. Digamos que está la urna en la realidad y vamos a hacer 5 extracciones, entonces sacamos una por una las balotas y puede que en estas cinco primeras extracciones salga la misma bola y luego empiecen a salir las otras. A largo plazo nos vamos dando cuenta de los porcentajes porque al principio si probábamos con pocas extracciones, no va a dar como queríamos, pero con muchas extracciones, aquí llevamos 520 (refiriéndose a la simulación que continuó ejecutando), ya los porcentajes nos van a convenir más.

P: ¿Nos están conviniendo?

C: Es decir que de acuerdo a mi urna el resultado de balotas rojas ya es de $1/3$.

El docente pone a prueba el significado global que conecta el número de extracciones con el valor de probabilidad que necesariamente está ligado al significado de “variabilidad”

P: ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

C: Un tercio.

P: O sea, que si voy hacer 10 extracciones ¿Cuántas bolas cree que van a salir rojas?

C: De 10 extracciones por ahí 3 o 4 bolas rojas. Es que con **poquitas extracciones** ya es más difícil porque uno va a dar el porcentaje.

P: ¿Cuándo funciona el valor de la probabilidad?

C: Cuando es una **gran cantidad**.

En este punto podemos evidenciar la diferenciación del proceso de simulación respecto a los resultados a corto y largo plazo, exteriorizando en sus argumentos que: **“El valor de probabilidad no se refleja a corto plazo en las frecuencias relativas”**. La falta de este significado, originaba en un principio que el estudiante tratara de encontrar el espacio muestral haciendo simulaciones a corto plazo con 10 extracciones. A continuación el docente trata de probar dicho significado en un contexto diferente en la vida real.

P: En las noticias escuchamos mucho que la probabilidad de llover es del tanto por ciento ¿Cierto?

C: Sí.

P: Si sale en las noticias: “La probabilidad de que llueva en esta mañana es del 20%” ¿Usted qué diría?

C: Que de todas formas hay poquitas posibilidades de que llueva, pero de todas formas puede llover, pero si vamos a probar un solo día, esa posibilidad puede fallar en el caso de que no llueva. En cambio si vamos a probar en 10 días, ya unos días puede llover y otros no, se supone que la mayoría de días no lloverán, entonces ahí si se sabe si más o menos coincide el porcentaje.

P: O sea que si por ejemplo, le dicen que la probabilidad de lluvia para los próximos 10 días es del 20% y llueve 8 días ¿Qué puede decir de este pronóstico?

C: Pues ahí yo creo que la probabilidad está mal, porque de todas formas el 20% es contrario a los resultados y eso ya es difícil de que pase.

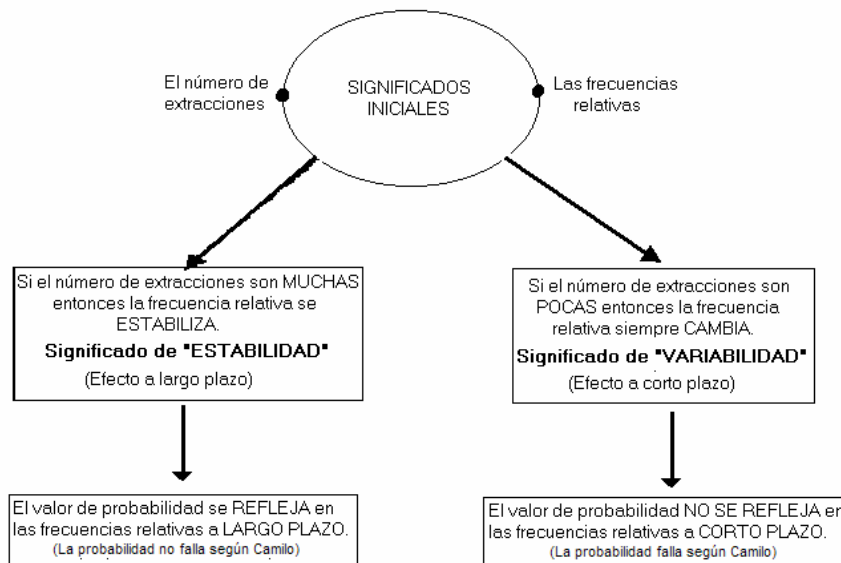
P: ¿Estaría mal calculada esa probabilidad?

C: Pues yo creo.

P: ¿Cuándo sería cierta esa probabilidad?

*C: Pues yo creo que a **largo plazo** pues digamos que de esos 10 días, 8 días llovió pero después a los siguientes 10 días ya no llueve y siguen cambiando unos días sí, otros no, hasta que empiece como a coger forma la probabilidad.*

El siguiente esquema ilustra las conexiones entre los significados iniciales que generan los dos nuevos significados globales de “variabilidad” y “estabilidad” definiendo de cierta forma el significado de la palabra “probabilidad” reflejado en las predicciones que hace el estudiante.



Detallemos que el estudiante aún no logra coordinar por completo el significado de “variabilidad” y el de “probabilidad”. Es decir, no logra explicar el por qué no se refleja el valor de probabilidad en los resultados aleatorios a corto plazo. Es decir, complementa el significado global anterior así: **“Si el valor de probabilidad no se refleja a corto plazo en las frecuencias relativas, entonces el valor de probabilidad falla a corto plazo”**.

Sin embargo logra coordinar muy bien el significado de “estabilidad” y “probabilidad” al explicar como se genera esa estabilidad a partir de los cambios que se presentan en las secuencias aleatorias a medida que se incrementan las pruebas. Y algo importante, el estudiante logra validar sus significados fuera del micromundo en otros contextos.

P: ¿Cuándo tomaría forma esa probabilidad del 20%?

C: Pues mientras más días.

P: ¿Un año por ejemplo?

C: No, por ahí en 2 meses ya se sabe.

P: ¿Se podría conocer esa probabilidad o cree que es imposible?

C: Como el noticiero tiene equipos especiales, que estudian las nubes y todo eso para conocerlas y así mas o menos calculan cómo pronosticarlos.

A continuación aplica el nuevo significado global de la Ley de los Grandes Números a la situación inicial para conocer el espacio muestral.

P: Listo, volviendo a nuestro problema.

C: Pues aquí con 750 extracciones nos dimos cuenta que fue más exacto.

(Obtuvo en la tabla de frecuencias las siguientes cantidades de la urna configurada por él con una bola roja y dos amarillas: R= - 33,2% y A= - 66,8%).

C: Entonces sería volver a la otra ventana y probar con 750 extracciones.

(Borró y ejecutó las primeras 500 extracciones y luego incrementó las 250 extracciones faltantes aumentando la velocidad del simulador y observando las múltiples representaciones en la simulación de la urna desconocida)

C: Acá nos dio 24,67% de bolas azules que aproximando nos da 25% y 75,33% de bolas negras que aproximando daría 75% (A=185 - y N= 565). Entonces yo digo que el 25% de las balotas que hay en bolsa son azules y 75% son negras.

P: Entonces ¿Cuántas bolas podrían haber en la urna?

C: Pues podrían haber 1 y 3 o 2 y 6 y así sucesivamente ¿Sí?

P: O sea que por cada...

C: Pues que por cada bola azul hay tres negras.

P: ¿Podría asegurar eso?

C: Sí.

P: ¿Por qué?

C: Pues porque con este experimento nos dimos cuenta que casi funciona, o sea entre más lanzamientos más exacta será la respuesta.

P: ¿Qué pasaría si se duplican a 1.500 extracciones?

C: Pues sería aun más exacta. Ahí ya hay posibilidades de que saliera 25 y 75%, o con una diferencia mínima.

P: Entonces ¿Cuándo funciona la probabilidad de un evento?

C: Pues mientras más largo el tiempo o lo que se esté manejando mientras mayor sea la cantidad pues más exacta es.

Camilo ya asegura con argumentos convincentes la solución del problema aleatorio de encontrar el espacio muestral que se ajuste a los resultados obtenidos en el simulador y que correspondan a la urna configurada, a través de los significados construidos. Este proceso inverso de buscar el valor de probabilidad que corresponde a un espacio muestral desconocido nos permitió detectar fallas en las conexiones establecidas entre los significados iniciales y que a través de este proceso el mismo estudiante con el acompañamiento del docente halla podido afianzar y coordinar eficazmente los significados para generar una comprensión de la Ley de los Grandes Números que fue el significado que finalmente le permitió resolver la situación.

A continuación el profesor investigador trata de amplificar y verificar el alcance de los nuevos significados en las situaciones aleatorias iniciales con monedas.

P: Cuando se lanza una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara o sello?

C: Hay la misma probabilidad para cada una de ellas, por ejemplo en los resultados de la promoción nos dábamos cuenta que al principio daba más cara que sello, pero al final con todos los lanzamientos, nos dimos cuenta que estuvieron cerca las dos.

P: ¿Cerca a qué?

C: Cerca al 50%.

P: O sea que la probabilidad de ganar al lanzar una moneda en la promoción de paletas ¿De cuánto es?

C: Yo estoy hablando de lo que cayó en la moneda. Nos dimos cuenta que cada vez estuvo más cerca del 50% o sea que si hubiéramos continuado cada vez más hubiéramos estado más cerca y más cerca.

P: ¿Y respecto a los ganadores?

C: Pues respecto a los ganadores hubo más ganadores.

P: En la promoción a pesar de que el cliente escogía el resultado ¿Cuál era la probabilidad de ganar? ¿Se podía determinar? o ¿Eso ya no se puede medir?

C: Al hacer la promoción nos dimos cuenta que la probabilidad de ganar era como de un 75% por ahí, o no mas era como de un 60% contra un 40%.

P: Revise los resultados de la experimentación real con monedas para los cuatro subgrupos de la Sexta Parte.

(El estudiante revisa las hojas correspondientes al análisis de resultados de la Sexta Parte)

P: Imagine que estos son los resultados del simulador (señala las hojas). Describa lo que sucede con los resultados en los cuatro subgrupos.

C: Sí.

P: Listo pasaron los primeros 87 lanzamientos.

C: Para los primeros 87 lanzamientos, pues...

P: ¿Los porcentajes de ganadores y perdedores?

C: El 57.4% gano y el 42.6% perdió (señalando las hojas).

P: Bueno sí, eso es de pronto para muchos lanzamientos. ¿Qué pasaba con 10 lanzamientos en cualquier subgrupo?

C: Digamos en el subgrupo N°3 el 50% de clientes ganaron y el 50% perdieron. Para los 20 primeros lanzamientos se mantuvo igual con el 50%. Para los primeros 40 ya fue 52.5% y 47.5%. Para los primeros 60 el 51.6% y el 48.4%.

P: Pero por ejemplo miremos el subgrupo N° 2.

C: En el subgrupo N° 2 (señala las hojas), arrancaron con 60% para los ganadores y 40% para los perdedores.

P: Se está imaginando las gráficas ¿Cierto?

C: Sí.

P: Listo.

C: Para los 20 primeros lanzamientos se mantuvieron igual los porcentajes, entonces la gráfica sería la misma. Para los primeros 40 lanzamientos los ganadores ya bajaron a 55% y los perdedores pasaron a un 45% entonces la gráfica trata como de igualarse más. Luego para los primeros 60 lanzamientos un 48.3% y un 51.7%, sigue tratando de igualarse más y para el total de lanzamientos un 53.7% y un 46.3% ya comenzaron hacia el lado contrario (es decir, al aumentar los ganadores y disminuir los perdedores).

P: ¿Pero se alejan?

C: No se alejan mucho, o sea, hay como que las **mismas posibilidades de ganar que de perder**.

A pesar que al final de las simulaciones físicas con dos monedas (7ª Parte) y las computacionales (9ª Parte) el estudiante estaba convencido que en la realidad siempre había más clientes ganadores que perdedores y por eso no creía en los resultados del simulador. Podemos evidenciar una modificación en su concepción al conectar los nuevos significados en diferentes contextos, desde la situación con urnas a la situación con monedas, aceptando finalmente que la promoción original de paletas no se obtenía ganancias ni pérdidas porque la cantidad de clientes perdedores era igual a la de ganadores a largo plazo.

P: ¿Y sí existen las mismas posibilidades de ganar o perder en la promoción de paletas?

C: Yo sí creo, porque de todas formas hay las mismas posibilidades de sacar cara o sello.

P: ¿Cuáles son las posibilidades de que los clientes ganen?

C: Yo creo que el 50% y 50%.

P: ¿Con cuáles posibilidades ganaba el cliente las paletas?

C: Pues con cara – cara (que correspondía a la escogencia del cliente y el resultado de la moneda respectivamente).

P: Y...

C: Con sello – sello.

P: ¿Y perdía con?

C: Con sello – cara o con cara – sello. ¡Ah! Entonces se dividía cada una en un 25%, entonces el sello-sello y el cara-cara, caía mas o menos el 50% para ganar. Como nos dimos cuenta con poquitos lanzamientos no fue exacto, pero a medida que fue subiendo se fue igualando más (señala hojas). Ahora vamos a ver con mas lanzamientos, para los 87 primeros lanzamientos del cliente gana el 57.4% y pierde el 42.6%, para los 182 lanzamientos ganan el 54.91% y pierden el 45.1%, o sea se alejó

un poquito. Para los 275 primeros lanzamientos ganan el 54.5% y pierden el 45.5% y para los 378 lanzamientos finalmente el 52.9% ganan y el 47.1% pierden, o sea trata como de seguir acercándose porque la gracia es que con mas y más lanzamientos las cantidades de ganadores y perdedores se van igualando hasta quedar mas o menos parejos.

En este punto de la entrevista, el docente propicia la retroalimentación de los procesos desarrollados anteriormente, conectando el modelo matemático de las dos monedas con la realidad y la simulación computacional. Podemos concluir que el estudiante generó unos significados que eran válidos solo para el simulador y que finalmente fueron aceptados en el contexto real generando confianza en la herramienta.

P: ¿Y con los resultados simulados con las dos monedas (observan las hojas de la Séptima Parte) sucede lo mismo?

C: Estos resultados no están acumulados.

P: Bueno pero ¿Al final?

C: Comparamos con cualquier pareja (señala las hojas del taller) mire hay las mismas posibilidades aquí de que gane o de que pierda, entonces todos los grupos pues no estuvieron un muy lejos. Vemos que el total fue de 48.8% para los ganadores y el 51.2% para los perdedores, o sea estuvieron cerca de quedar igual en las gráficas.

P: ¿Y con el simulador computacional?

C: Sí, también va a funcionar. Como nos dimos cuenta a los 10 primeros lanzamientos, nos da resultados parecidos a los reales luego diferentes, pero cuando fuimos aumentando los lanzamientos nos fueron dando resultados más exactos.

P: ¿Qué pasaría si hubiesen seguido con la promoción durante un mes?

*C: Pues al final yo creo que iban a quedar **cerca** los ganadores y los perdedores.*

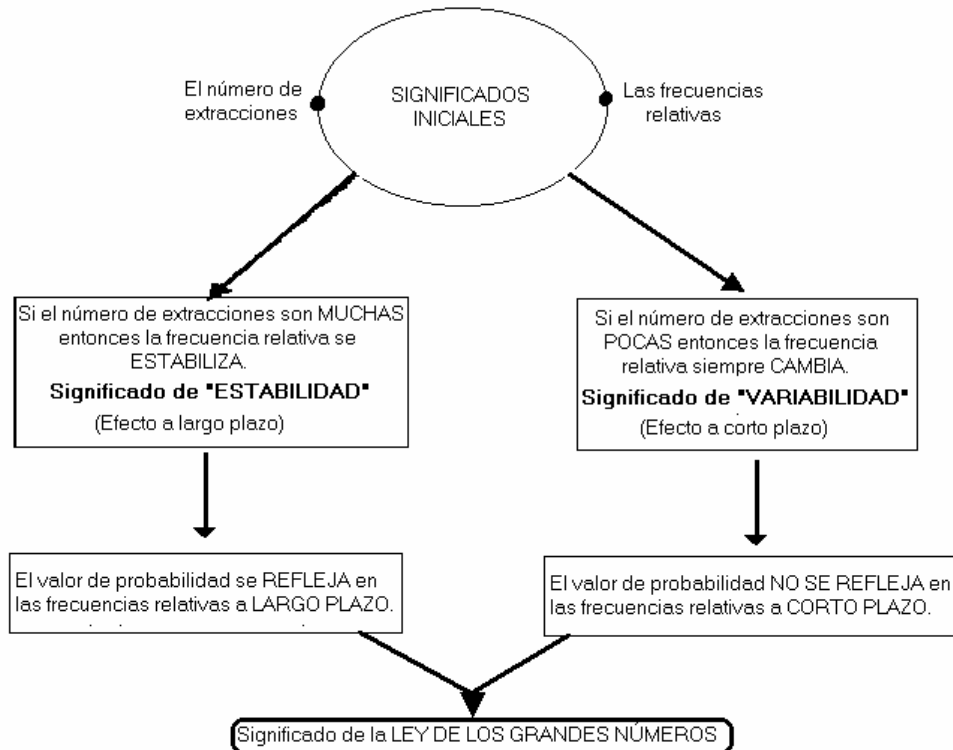
P: ¿Está convencido de eso?

C: Prácticamente, sí.

Ahora si podemos evidenciar en el estudiante una **comprensión** completa del significado de la Ley de los Grandes Números a partir de la coordinación de los significados de “variabilidad” y “estabilidad” de los resultados de un experimento aleatorio a corto y largo plazo. El siguiente esquema muestra la forma en que se generaron y coordinaron los significados a través de la evaluación computacional.

P: Entonces ahora ¿Qué concepto tiene del simulador?

C: El simulador **funciona** es como para promociones a largo plazo, porque a corto plazo como nos dimos cuenta los resultados serían **diferentes** entonces es difícil comparar los resultados porque pueden salir de cualquier forma. Pero al hacerlo con **muchos lanzamientos** ya empieza a igualarse o a salir **exactos los resultados**.



Por último, el estudiante concluye la solución de la situación aleatoria inicial para encontrar el espacio muestral del experimento de la urna, demostrando una comprensión del concepto de espacios muestrales equivalentes y su relación con el valor de probabilidad desde el punto de vista frecuencial.

P: Acá en el problema ¿Tiene la misma probabilidad de salir bola negra que bola azul?
C: No, yo creo que por cada bola azul hay tres negras.

P: Vamos a averiguar entonces como esta finalmente conformada la urna.
C: Sí.

P: Usted dijo que estaban en relación...
C: 1 azul y 3 negras.

P: Ahora vamos a desbloquear el icono que permite ver la configuración de la urna.
C: Dos bolas azules y seis negras. Sí estaba bien.

P: ¿Contento o no?
C: Sí.

P: ¿Por qué?

C: Ni tanto, pues contento porque lo pude desarrollar, pero me demoré mucho tratando de descubrir como se hacía. Pero ahora si lo voy a volver hacer ya sé mas o menos la táctica para hacerlo, o sea ya sé que mientras más lanzamientos más inicialmente exacto me da el resultado.

En **conclusión**, creer que Camilo había alcanzado la comprensión de la Ley de los Grandes Números a través de un proceso que partía del conocimiento de un espacio muestral y de unas condiciones iniciales, y que a través de simulaciones le permitió generar significados como la “estabilidad” de las frecuencias relativas a largo plazo, su relación con el espacio muestral y el valor de probabilidad, nos permitió ver a través de la nueva situación que las conexiones entre los significados generados no eran fuertes y presentaban inconsistencias (como la ausencia del significado de “variabilidad” a corto plazo) al enfrentarse a una nueva situación que implicaba un proceso inverso para encontrar el espacio muestral que se ajustara a los resultados frecuenciales de un experimento.

La ausencia del significado de variabilidad. Al creer que Camilo había alcanzado por completo la comprensión de la Ley de los Grandes Números se sometió a la evaluación computacional en la cual el estudiante no supo aplicar este significado a la hora de buscar el espacio muestral de una urna desconocida a través del simulador. Aplica la Ley de los Pequeños Números al intentar descubrir el espacio muestral simulando pocas pruebas y esperando encontrar el valor de probabilidad estable en la distribución de frecuencias olvidando la conexión que existe con el número de pruebas. Es decir, Camilo era consciente que al aumentar el número de extracciones el valor de las frecuencias relativas se estabilizaba hacia un valor específico que correspondía al valor de probabilidad el cual validaba relacionándolo con el espacio muestral, pero al estar ausente el espacio muestral, el valor de probabilidad y el valor específico al que debía estabilizarse las frecuencias relativas, el proceso inverso hizo evidente la ausencia del significado de “variabilidad”. Solo a través de la retroalimentación con las experiencias anteriores y el diálogo con el docente, fue posible darse cuenta que al disminuir el número de extracciones el valor de las frecuencias relativas era inestable y por lo tanto el valor de probabilidad no podía reflejarse. Esta ausencia de significado a corto plazo era la razón por la cual el estudiante no podía encontrar el espacio muestral. Una vez coordinado estos significados con el número de extracciones, Camilo simuló el experimento de la urna desconocida con “muchas extracciones” para encontrar la estabilidad de la frecuencia relativa de los eventos para luego establecer el valor de probabilidad y por último determinar los posibles espacios muestrales.

De esta manera Camilo alcanzó una comprensión de la Ley de los Grandes Números al coordinar los significados de variabilidad y estabilidad a corto y largo plazo. En la evaluación escrita que respondió después de la computacional, se hizo evidente el dominio para distribuir frecuencias de variados espacios muestrales a corto y largo plazo (Ver resultados de la evaluación escrita).

5.2.2 Evaluación escrita

Se diseñó un cuestionario de 14 preguntas basado en el tipo de preguntas planteadas en el diagnóstico realizado al comienzo del trabajo y al tipo de simulaciones realizadas al final, el cual se aplicó a los nueve estudiantes que completaron todas las actividades al final de la Doceava Parte y tuvo una duración de 45 minutos aproximadamente.

El objetivo general de esta evaluación era de alguna forma evidenciar por escrito el efecto que tuvo el desarrollo de las actividades físicas y computacionales en la forma como los estudiantes se enfrentaban a situaciones aleatorias similares y los argumentos que finalmente hacían a la hora de justificar los resultados.

A continuación nos referiremos a las preguntas relacionadas directamente con la construcción del concepto de probabilidad. Las demás preguntas fueron presentadas en la categoría anterior sobre la modificabilidad de las concepciones.

i. Respecto a la evaluación de probabilidad

8. Al lanzar dos monedas al tiempo, ¿cuál es la probabilidad de obtener los eventos CC, CS, SS y SC?

Durante el taller se hizo énfasis en evaluar la ocurrencia de que el cliente gane y que el cliente pierda escogiendo cara o sello, por lo que se quiso hacer esta pregunta para determinar el alcance de comprensión del sistema de representación en el cual se presentaba el resultado de dos lanzamientos de la moneda o bien el resultado del lanzamiento de dos monedas de acuerdo al modelo físico simulado originado por cuatro eventos (CC – CS – SC – SS).

Camilo respondió: “25% para cada una de ellas”. Es claro que el sistema de representación dinámico es transparente para el estudiante o bien tiene en cuenta el espacio muestral para asignar los valores de probabilidad teniendo

en cuenta la equiprobabilidad de los eventos, por eso se hace necesario analizar la distribución de frecuencias en la predicción de resultados de este mismo experimento.

Gerardo respondió: “Muy indecisa o de pronto no se puede saber, todas tienen la misma posibilidad”. Para el estudiante no es muy claro el concepto de probabilidad relacionado con el valor de porcentaje al que converge la frecuencia relativa a largo plazo. Tiene una idea intuitiva de equiprobabilidad de acuerdo al espacio muestral.

10. a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca? ¿Por qué? (De una bolsa con 1 bola blanca y 2 bolas negras).

Después de que los estudiantes distribuyeron la ocurrencia de los eventos que aparecen en la construcción de “secuencias aleatorias”, se les pidió evaluar el valor de ocurrencia de uno de los eventos a partir de un nuevo espacio muestral, esperando que pudieran aplicar el significado de probabilidad en experimentos diferentes a los trabajados durante las actividades.

Para Camilo: “De un 33,3% porque es la tercera parte de 100%”. El estudiante relaciona el valor de probabilidad relacionando el espacio muestral, en la cual podemos percibir el significado de probabilidad a partir de la frecuencia porcentual de ocurrencia de cada evento donde el 100% corresponde al máximo valor de probabilidad.

Para Gerardo: “Muy mínima, pues hay menor número de este color”. El estudiante no logra asignar un valor de probabilidad, solo hace referencia a que la probabilidad de ocurrencia de obtener una bola blanca es menor que el de obtener una bola negra al hacer una extracción de la bolsa basado en el espacio muestral, lo que evidencia el pobre alcance de sus significados construidos hacia la comprensión de un concepto probabilista.

ii. Respecto a la distribución de frecuencias.

4. Si dos personas quieren realizar 100 lanzamientos cada uno, con una moneda, los resultados generales pueden ser ¿Iguales? ¿Diferentes? ¿Parecidos? Justifique.

“Hay las mismas posibilidades pero es más usual que caigan diferentes”. Camilo a pesar que tiene un concepto de probabilidad, resalta la diferencia de los posibles resultados sin hacer referencia clara a la aproximación que se da en los resultados para este número de lanzamientos.

“Diferentes pues la moneda no caerá siempre del mismo lado y si lo hace no será por muchas veces”. Parece que Gerardo no logra comprender la generalidad de los resultados aleatorios de este supuesto experimento y se centra en comparar las secuencias aleatorias que obviamente son diferentes.

7. Para cada número de lanzamientos de una moneda, escribe el número de veces que crees, puede salir.

Camilo llenó la tabla de frecuencias absolutas y relativas de la siguiente forma:

Nº Lanzamientos	Nº Caras	Nº Sellos	C (%)	S (%)
20	14	6	70%	30%
100	40	60	40%	60%
500	270	230	54%	36%
1000	501	499	50,1%	49,9

En este caso, observamos que el estudiante evidencia un significado claro del comportamiento de las frecuencias de los eventos a corto y largo plazo, aún sin haber realizado un análisis de las simulaciones computacionales o físicas para este caso específico (de una moneda). Sin duda construye y exterioriza en una representación tabular el sentido de variabilidad y estabilidad de los resultados aleatorios. Resaltamos la última distribución de frecuencias para 1000 lanzamientos, en la que no termina con el valor de probabilidad teórico sino en una aproximación real, así como la ausencia de preguntas respecto a las condiciones de lanzamiento de la moneda que dejan ver que sus malas concepciones no influyeron en la comprensión del significado de la Ley de los Grandes Números.

Gerardo llenó la tabla de frecuencias absolutas y relativas de la siguiente forma:

Nº Lanzamientos	Nº Caras	Nº Sellos	C (%)	S (%)
20	15	5	75	25
100	75	25	75	25
500	260	240	52	48
1000	620	380	62	38

En este caso el estudiante no evidencia una exteriorización de la comprensión de la Ley de los Grandes Números en la cual se puede suponer que el único criterio utilizado para distribuir los valores de frecuencias fue la superioridad de la cantidad de caras, significado conservado a lo largo del

desarrollo de las actividades, lo que deja ver que para este estudiante las concepciones generadas si fueron un obstáculo importante que impidió la generación del significado relacionado con la Ley de los Grandes Números.

9. Al hacer el lanzamiento de dos monedas al tiempo, escribe el número de veces **APROXIMADO** que puede salir c-c, s-s, s-c y c-s .

Camilo llenó la tabla de frecuencias absolutas y relativas de la siguiente forma:

Nº Lanza Mientos	20		100		500		1000	
	#	%	#	%	#	%	#	%
CC	7	35	20	20	120	24	251	2,5
CS	5	25	30	30	130	26	249	24,9
SC	4	20	25	25	123	24	252	25,2
SS	4	20	25	25	127	25,4	248	24,8

Aquí el estudiante confirma la respuesta anterior y demuestra el mismo significado construido en la pregunta 7 de la Ley de los Grandes Números viendo la manera intencional con que distribuye las frecuencias de ocurrencia de un experimento no realizado gracias a la experiencia adquirida en las simulaciones de este mismo experimento.

Gerardo llenó la tabla de frecuencias absolutas y relativas de la siguiente forma:

Nº Lanza Mientos	20		100		500		1000	
	#	%	#	%	#	%	#	%
CC	5	25	25	25	150	30	322	32.2
CS	6	30	60	60	20	4	103	10.3
SC	3	15	9	9	100	20	415	41.5
SS	6	30	6	6	230	46	160	16.0

Aquí el estudiante sigue confirmando la ausencia de patrones en la distribución de frecuencias a largo plazo.

10. c. Si fueran 300 extracciones, ¿Cuál sería el resultado? (En una bolsa con 1 bola blanca y 2

10. d. Si fueran 900 extracciones ¿Cuál sería el resultado? bolas negras)

En esta predicción de resultados esperábamos encontrar la coherencia entre el valor de probabilidad dado en el punto “b” con la distribución de frecuencia de ocurrencia para dos casos específicos de extracciones y sus variantes a medida que aumentan.

N° Extracciones	Camilo		Gerardo	
	N	B	N	B
30	17	13	19	11
120	75	45	120	80
900	595	305	600	300

Camilo distribuye las frecuencias de los eventos teniendo en cuenta el espacio muestral y el valor de probabilidad asignado, dejando ver que de manera consciente asigna un valor muy aproximado al porcentaje de ocurrencia para las 900 extracciones pudiendo decir que el estudiante nos confirma claramente una interiorización sobre la Ley de los Grandes Números.

Gerardo comete un error inexplicable en las frecuencias para las 120 extracciones, sin embargo para las 900 extracciones asigna frecuencias de acuerdo a la probabilidad de ocurrencia de los eventos al parecer teniendo en cuenta más el espacio muestral que por la comprensión del comportamiento aleatorio del fenómeno.

Este tipo de preguntas es importante a la hora de analizar la comprensión del estudiante sobre el valor teórico de probabilidad y las posibles frecuencias de ocurrencia en el caso de llevar a la práctica el experimento, que en muchas ocasiones no es coherente a la hora de hacer predicciones a largo plazo a pesar de que el estudiante tenga consciencia del valor de probabilidad y su relación con el espacio muestral. Así por ejemplo, es común que estudiantes predigan que en 1000 lanzamientos de una moneda expresen frecuencias de 700 veces cara y 300 sello, aún cuando han expresado o conozcan que el valor de probabilidad es el mismo para ambos eventos.

12. Se tienen cuatro bolsas con bolas de dos colores: La primera contiene 1 roja y 2 verdes. La segunda contiene 3 rojas y 3 verdes. La tercera contiene 2 rojas y 1 verde. La cuarta contiene 2 rojas y 3 verdes. Determine los resultados **APROXIMADOS** que podrían ocurrir al hacer la experimentación.

En el caso de Camilo, distribuyó las frecuencias así:

Bolsa / Extracciones	60 Extracciones				1000 Extracciones				12.000 Extracciones			
	R	V	R%	V%	R	V	R%	V%	R	V	R%	V%
1 roja y 2 verdes	23	37	38,3	61,6	350	650	35	65	4000	8000	33,3	66,6
3 rojas y 3 verdes	31	29	51,6	48,3	550	450	55	45	6010	5990	50,08	49,92
2 rojas y 1 verde	38	22	65,3	36,6	660	340	66	34	8000	4000	66,6	33,3
2 rojas y 3 verdes	24	36	40	60	400	600	40	60	4800	7200	40	60

El estudiante demuestra de manera explícita las características de las frecuencias de cada experimento a corto y largo plazo, aunque se enfoca más en mostrar valores estables a largo plazo y no muestra mucha variabilidad en los resultados a corto plazo como en el último caso de la cuarta configuración de bolas en la cual distribuye en la misma proporción las frecuencias de ocurrencia de los dos eventos en especial sabiendo que este fue el mismo espacio muestral simulado para la nueva promoción. Hay que tener en cuenta que estos dos estudiantes solo tuvieron media hora para desarrollar la prueba debido a que antes de esta prueba ellos estaban realizando la prueba computacional en la misma jornada en que finalizaron la Doceava Parte.

En el caso de Gerardo, distribuyó las frecuencias así:

Bolsa / Extracciones	60 Extracciones				1000 Extracciones				12.000 Extracciones			
	R	V	R%	V%	R	V	R%	V%	R	V	R%	V%
1 roja y 2 verdes	24	36	40	60	650	350	65	35	7080	4920	59	41
3 rojas y 3 verdes	29	31	48	52	550	450	55	45	4000	8000	33	67
2 rojas y 1 verde	39	21	65	35	890	110	89	11	8900	3100	74	26
2 rojas y 3 verdes	20	40	33	67	800	200	80	20	9000	3000	75	25

En el primer espacio muestral no nos explicamos la manera como Gerardo distribuyó las frecuencias de los eventos a largo plazo en la cual asignó mayor ocurrencia al evento con menor probabilidad (la bola roja). Así como la manera que distribuyó las frecuencias para el segundo espacio muestral equiprobable en la que de ninguna forma los resultados se acercan a la probabilidad en que deben ocurrir. En la última configuración equivalente a la nueva promoción (2 bolas rojas y 3 amarillas) definitivamente no logró aceptar lo ocurrido en sus simulaciones en las cuales los resultados se

aproximaba demasiado a los valores de probabilidad del 40 y 60% respectivamente, creemos que faltó encontrar las preguntas adecuadas que hicieran evidente la relación de las frecuencias de ocurrencia con el espacio muestral. Debemos tener en cuenta lo ocurrido aquí para comprender mejor lo hecho por el estudiante en la evaluación computacional que para este estudiante fue **posterior** a la prueba escrita.

14. En una urna hay un número desconocido de bolas de dos colores, si en 1.000 extracciones el número de cada una es de $R = 605$ y $A = 395$. ¿Cuál de las siguientes opciones es más posible que contenga la bolsa? Justifique su respuesta.

a. $R = 2$ y $A = 2$. b. $R = 1$ y $A = 2$ c. $R = 2$ y $A = 1$ d. $R = 3$ y $A = 2$

- “ $R = 3$ y $A = 2$, porque es la proporción más cercana”. Camilo escoge la respuesta esperada mostrando la comprensión del proceso inverso que a partir de una distribución de frecuencias el estudiante pueda predecir el espacio muestral del que pueda originarse los resultados.
- “Las 2 últimas, pues hay más rojas y tienen mayor diferencia sobre las amarillas que las demás opciones”. Gerardo por el contrario se limita a elegir los espacios muestrales que fueran coherentes con los resultados teniendo en cuenta solo un criterio cualitativo: “El mayor número de bolas rojas respecto a las amarillas”.

Conclusión respecto a la distribución de frecuencias

Pero llegamos a una nueva pregunta ¿Porqué Camilo fue capaz de alcanzar un nivel aceptable en la construcción del significado de la Ley de los Grandes Números y Gerardo no? Es evidente que Camilo alcanzó una mejor coordinación de significados generados en la fase experimental y de simulación computacional y de sus concepciones primarias. Como más adelante se evidencia en las otras preguntas Camilo a diferencia de Gerardo logró crear un significado importante en la comprensión del concepto esperado, fue “*la relación entre espacio muestral y el valor encontrado en la estabilidad de las frecuencias relativas (porcentuales)*” que le permitió a Camilo predecir resultados sin necesidad de realizar simulaciones, es decir con solo analizar el espacio muestral de los eventos. Otro significado importante necesario que tuvo que generar Camilo fue “*la variabilidad y estabilidad de las frecuencias de los eventos a corto y largo plazo*” que solo se pudo **generar** en las repetidas simulaciones y **respaldar** con los resultados de experimentación física del fenómeno.

iii. Intuiciones de los estudiantes respecto a las secuencias aleatorias.

7. En una bolsa oscura hay 3 bolas: 1 blanca y 2 negras, como se ilustra en la figura. Imagine que en este experimento se hacen 30 extracciones.

- La respuesta de Camilo fue: NBBNNNNBNBNNBBNBBBNBNNNNBNNB, donde podemos ver que a diferencia del diagnóstico, en este caso si tuvo en cuenta el espacio muestral, modificando su sesgo de equiprobabilidad porque en estas predicciones el estudiante ya es coherente con el espacio muestral y contempla rachas largas.
- Gerardo presenta la misma actitud de su compañero Camilo generando la siguiente secuencia aleatoria: NBNBBNNNNBBNNBNNBBNNNNNBBBNNN. A pesar que Gerardo no ha evidenciado una comprensión de La Ley de los Grandes Números, su experiencia influyó de alguna forma en la modificación del sesgo de equiprobabilidad que también presentó en el diagnóstico.

Conclusión respecto a la generación de secuencias aleatorias

Aunque durante el desarrollo de las actividades físicas y simuladas de los experimentos aleatorios no se hizo énfasis en el estudio minucioso de las características de las secuencias aleatorias es notable que el proceso generó modificaciones importantes como el del sesgo de equiprobabilidad y las clases de rachas que se pueden presentar.

iv. Relación entre proporción y probabilidad.

8. Tenemos ahora dos bolsas oscuras, la primera con 3 bolas: 1 blanca y 2 negras, y la segunda con 6 bolas: 4 negras y 2 blancas. ¿En cuál de las dos bolsas es más fácil sacar una bola negra? ¿Por qué?

- “En las dos hay las mismas posibilidades en las 2 bolsas, porque por cada bola Negra hay dos bolas Blancas”. Camilo modificó su concepción de esta pregunta dada en el diagnóstico, demostrando que el proceso desarrollado le sirvió para tener en cuenta la proporción de los eventos en el espacio muestral y su relación con la probabilidad de ocurrencia.
- “En la bolsa N° 2, pues hay una mayoría de bolas negras”. Gerardo conserva su concepción desde el diagnóstico aplicando el mismo criterio positivo para elegir la bolsa con MAS bolas negras demostrando que no percibió la equivalencia de los espacios muestrales y su probabilidad de

ocurrencia para cualquiera de los dos eventos.

15. Se tienen cuatro bolsas con bolas de dos colores: La primera contiene 1 roja y 2 verdes. La segunda contiene 3 rojas y 3 verdes. La tercera contiene 2 rojas y 1 verde. La cuarta contiene 2 rojas y 3 verdes. ¿De cuál bolsa es más fácil sacar una bola verde y bajo qué condiciones? ¿Por qué?
- “En la primera bolsa, porque por cada 2 bolas verdes hay 1 bola roja”. Camilo escoge la opción correcta de acuerdo al espacio muestral pero no es muy explícito en su elección. Por las respuestas anteriores creemos que el estudiante tuvo que comparar la relación de los eventos en el mismo espacio muestral y entre los espacios muestrales para llegar a su respuesta.
 - “En la bolsa 4, pues hay mayor cantidad de bolas verdes que de bolas rojas”. Gerardo nuevamente nos confirma su falta de comprensión para analizar espacios muestrales y aplicando el mismo criterio positivo para elegir su respuesta sin tener en cuenta la proporción entre los casos favorables y posibles.

Conclusión respecto a la relación entre proporción y probabilidad

Aunque no se muestran valores de probabilidad de cada evento para justificar por completo la elección entre los experimentos, es evidente que de cierta forma los estudiantes hacen uso de un criterio que relaciona el espacio muestral con la probabilidad de ocurrencia para establecer diferencias. En pocas palabras, por lo menos Camilo, compara espacios muestrales basándose en la proporción entre los eventos de manera cualitativa (mayor, menor o igual) siendo intrínseca la relación entre estas proporciones y la probabilidad de los eventos.

6. CONCLUSIONES GENERALES

El objetivo de esta investigación era implementar y estudiar los efectos de la simulación computacional en el aprendizaje significativo de la Ley de los Grandes Números a partir de una situación problema contextualizada. De acuerdo a esto haremos a continuación una síntesis de los resultados observados a través de las cinco categorías de análisis propuestas en nuestra metodología.

6.1 Modificabilidad de las concepciones previas

A través de esta categoría se analizará la evolución de las intuiciones primarias y secundarias del estudiante en cuatro diferentes momentos del proceso:

- ***La controlabilidad y la predicibilidad se relacionan como significados iniciales en forma diferente para cada estudiante.*** Respecto a la naturaleza de los experimentos aleatorios, en el diagnóstico pudimos apreciar que la mayoría de estudiantes justifican los resultados con una causa física o sobrenatural, cuyo efecto en unos estudiantes es creer que los resultados pueden ser “controlables” y “predecibles”, y en otros que los resultados son “incontrolables” e “impredecibles”. Como por ejemplo, para un estudiante el resultado del lanzamiento de una moneda depende de la posición inicial de la moneda entonces puede controlar el resultado y en consecuencia predecirlo, o como el caso de otro estudiante para el cual el resultado dependía del número de giros pero cuyo resultado era incontrolable y en consecuencia impredecible. Al final del proceso de interacción con la herramienta computacional estas concepciones se conservaron y no pudieron ser modificadas como se pudo evidenciar en la evaluación escrita de Camilo y Gerardo. Sin embargo pudimos constatar que a pesar de la persistencia de dichas concepciones, no representaron en sí un obstáculo para la construcción del significado de la Ley de los Grandes Números como lo pudo mostrar Camilo en la evaluación computacional. Es decir, las malas concepciones sobre la naturaleza de los experimentos aleatorios son ignoradas cuando se ha construido un significado fuerte del comportamiento de los fenómenos aleatorios como la Ley de los Grandes Números.
- ***Los sesgos son posibles de modificar.*** Durante el diagnóstico en la mayoría de estudiantes se pudo apreciar la presencia en ellos de

intuiciones primarias relacionadas con malas concepciones como los sesgos de desorden, de los valores recientes y de equiprobabilidad.

El *sesgo de desorden* pudo ser modificado en algunos estudiantes gracias al análisis que hicieron de las secuencias aleatorias desde el punto de vista frecuencial cuando comparaban resultados parciales obtenidos en la experimentación física con monedas y balotas. Al igual cuando comparaban las frecuencias de los eventos entre resultados experimentales y simulados, las cuales implicaban el conteo y observación de las secuencias aleatorias. Por ejemplo, si antes un estudiante consideraba que obtener una secuencia del lanzamiento de una moneda era poco probable obtener: CCCC, a través de la experimentación pudo darse cuenta que no lo es del todo.

Respecto al *sesgo de los valores recientes* en Camilo fue evidente la modificación de su concepción al tener en cuenta la comprensión del concepto de probabilidad que le permitió justificar los resultados de un fenómeno inmediato, a corto y largo plazo con coherencia. En el caso de Gerardo que no alcanzó una comprensión total de la Ley de los Grandes Números, conservó dicho sesgo con la influencia del significado de controlabilidad.

El análisis directo con experimentos reales y simulados, con eventos equiprobables y no equiprobables permitió a los estudiantes modificar el *sesgo de equiprobabilidad* cuando deben hacer predicción de secuencias aleatorias teniendo en cuenta el espacio muestral y no implicó la comprensión de la Ley de los Grandes Números, como se pudo constatar en la evaluación escrita de Camilo y Gerardo.

- ***El surgimiento del significado de parcialidad.*** Este significado surgió como consecuencia del análisis de los estudiantes de las frecuencias absolutas de los eventos y fue utilizado como un criterio para determinar la aleatoriedad de un fenómeno.

En el análisis de los resultados obtenidos en la experimentación real con monedas en subgrupos (Tercera Parte) surgió un significado: *“El cliente escoge más la cara que el sello”* como producto del uso de la heurística de representatividad (los estudiantes predicen el resultado que parece ser el más representativo de la evidencia). Este significado era muy fuerte y resistente al cambio a pesar de las múltiples contradicciones que el docente hacía a través de las simulaciones físicas y simuladas. De esta forma la escogencia del cliente siempre fue considerada como no aleatoria debido al surgimiento de este significado.

Este significado fue coordinado con la creencia de que “La moneda cae más en cara que en sello” y el hecho de que “La mayoría de clientes ganaron en los sugbrupos”, para formar un significado más fuerte: “La mayoría de clientes ganaron porque escogieron cara” este significado global fue el impedimento principal para que los estudiantes aceptaran la aleatoriedad del fenómeno relacionado con la primera Promoción de Paletas y más aún pudieran tener “*confianza*” en la herramienta para el posterior uso encaminado en la comprensión de la Ley de los Grandes Números. Generar el significado de *imparcialidad* solo pudo ser posible a través de la experimentación y validación de resultados de la Nueva Promoción de Paletas con balotas que permitió generar la confianza en la herramienta.

Finalmente los significados anteriores a los cuales también hace referencia Pratt (1998) a excepción del significado de irregularidad en los resultados, más adelante serán retomados porque a partir de la coordinación con otros significados permiten la construcción del significado de la Ley de los Grandes Números.

- ***Los significados que surgen de la experimentación física influyen en la confiabilidad que tiene el estudiante sobre la herramienta computacional y sus resultados.*** Para generar confianza en la herramienta, los estudiantes esperan encontrar características similares en el comportamiento de los resultados reales y simulados al comparar las secuencias aleatorias y las frecuencias absolutas y relativas, pero con mayor relevancia esperan que los significados construidos se cumplan en los resultados simulados, de lo contrario los significados que puedan ser construidos en el micromundo computacional dejan de tener validez a la hora de explicar el fenómeno real. Lo anterior implica una mayor responsabilidad a la hora de diseñar y aplicar experimentos físicos que no permitan generar malas concepciones que obstaculicen la construcción de significados a través de las simulaciones computacionales.
- ***Los resultados experimentales validan los resultados simulados.*** Cualquiera esperaría que la dificultad para que los resultados en la realidad convergan pudiera ser reemplazada por las potentes propiedades de la herramienta computacional y por lo tanto pudieran reemplazar la experiencia física. Pero lo cierto es que sin la experiencia física es difícil que los significados construidos en el ambiente computacional pudieran ser considerados por los estudiantes como válidos en la realidad del fenómeno.

- **La coordinación entre los sistemas de representación.** Es común que entre los estudiantes se presente gran dificultad a la hora de interpretar y describir cualquier tipo de gráficas estadísticas y con mayor razón las representaciones simbólicas como las ecuaciones. En el desarrollo de este trabajo nos pudimos dar cuenta de la importancia que tiene para el estudiante, conocer el fenómeno real, interactuar con él y llevar un proceso de abstracción para comprender la simulación física y computacional. De esta forma el estudiante puede comprender de manera simple los distintos sistemas de representación gráficas, tabulares y de lenguaje común, hallar equivalencias y realizar conversiones que le permitirán construir significados con “**sentido**”.

En nuestro caso debemos resaltar el poder de abstracción que alcanzaron los estudiantes para **interpretar y describir** las frecuencias absolutas y relativas a través de los diferentes tipos de representación gráfico (circular y de barras) y de tabular (en forma cardinal y porcentual), dando sentido a las distintas variables inmersas en una misma representación, como el número de lanzamientos, el número de ganadores, perdedores, escogencia del cliente y el resultado de la moneda. Este tipo de competencias estadísticas son las que se deben cultivar y desarrollar en la escuela.

6.2 Construcción del significado conceptual

La comprensión de la Ley de los Grandes Números exige inicialmente, la coordinación de dos significados el de “variabilidad” y el de “estabilidad” relacionados con las características de las frecuencias relativas a corto y largo plazo, así como la coordinación del significado del valor de probabilidad y el espacio muestral relacionados con las características superficiales del experimento.

- **El surgimiento del significado de variabilidad.** Aunque para nosotros este significado era el primero que debería surgir por la aparente sencillez de encontrar la “diferencia” de resultados en pocas pruebas del experimento (con monedas y con balotas), en realidad para que los estudiantes pudieran ser conscientes y expresar esta característica no fue tan simple porque a simple vista las características de las secuencias aleatorias y de las frecuencias absolutas para un mismo experimento eran superficialmente siempre diferentes al repetir el experimento a la luz del pensamiento determinista de cada estudiante; llegando al punto que se hacía obvio que TODO era diferente. En pocas palabras para que el estudiante pudiera construir el significado claro de “variabilidad” era necesario primero el surgimiento del significado de “estabilidad”.

- **El significado de estabilidad.** Nos referimos aquí a la capacidad del estudiante para percibir en el resultado de las frecuencias RELATIVAS la tendencia hacia un valor específico al repetir el experimento. Este significado requiere tener en cuenta dos aspectos para su activación: El número de pruebas y la repetición. Durante el análisis de los resultados del experimento real con monedas en la Quinta Parte de los talleres surge en algunos estudiantes este significado después de comparar los resultados de los subgrupos al referirse al “emparejamiento” de la cantidad de caras y sellos que salieron en la moneda al final de los lanzamientos necesarios para repartir las 50 paletas. Estos significados surgieron de manera más efectiva en los estudiantes que estuvieron bajo el continuo seguimiento a través de las entrevistas, es decir, la necesidad de expresar verbalmente las respuestas a las preguntas al interactuar con el docente investigador, de alguna manera permiten al estudiante “ver” y expresar lo que antes no era posible cuando expresaba por escrito sus respuestas. Pero en general la mayoría de estudiantes al final del análisis de los resultados totales de la experimentación real (Sexta Parte) no fue suficiente para establecer este significado y expresarlo claramente debido a la influencia de los significados de parcialidad explicado en la primera categoría de análisis sobre la modificabilidad de las concepciones.

- **Relación del espacio muestral y el valor de probabilidad.** En el caso de Camilo este significado surge de manera significativa cuando analiza las condiciones de la nueva promoción con un espacio no equiprobable y de alguna manera predice que la probabilidad de sacar una bola roja depende de la cantidad de bolas que hay en la bolsa: “Si hay dos bolas rojas y 3 amarillas, entonces la probabilidad de ganar es del 40% y de perder de 60%” (Décima Parte). Esta conjetura fue rápidamente validada por los resultados de la experimentación física (Onceava Parte) y respaldada por la simulación computacional (Doceava Parte), lo que le permitió asociar a cada espacio muestral un valor de probabilidad. Este significado marcó la diferencia con los demás compañeros a la hora de construir el significado de la Ley de los Grandes Números. Con este nuevo significado fue más sencillo para Camilo dar sentido al significado de estabilidad de las frecuencias relativas centrando su atención en buscar la forma de encontrar el valor de probabilidad en los resultados de las simulaciones. Para ello Camilo relacionó el espacio muestral con el valor de probabilidad y a su vez relacionó el valor de probabilidad con la frecuencia relativa al condicionar el “cumplimiento” del valor de probabilidad al hecho de que dicho valor debía REFLEJARSE en las frecuencias porcentuales, encontrando que esta condición sólo se cumplía al realizar el experimento a largo plazo como lo pudo constatar en el simulador demostrando una aparente comprensión de la Ley de los

Grandes Números.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATANERO, C., (2001), Didáctica de la Estadística Grupo de Educación Estadística Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, España.
- EDWARDS, E., (1968). Conservatism in Human Information Processing. En Kahneman, D., y Tversky, A., (eds). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. Cambridge. 1982.
- LUPIAÑEZ, J. L., Moreno, L. E., (2001). Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas. En Gómez. P., Rico. L., (eds.) *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*, Universidad de Granada, España. De Tesis Yáñez (2003)
- LECOUTRE, M. P., (1985). Judgments probabilistes chez les adultes: Pratique des jeux de hasard et formation en théorie des probabilités. *Bulletin de psychologie*, 38, 891-899.
- LECOUTRE, M. P., (1992) Cognitive Models and problem spaces in “purely random” situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.
- MORENO. L. E., (1999). Acerca del conocimiento y sus mediaciones en la educación matemática. *Revista EMA*, 4(2), 101-114.
- NOSS, R., HOYLES, C., (1996). Windows on Mathematical Meanings. Kluwer Academic Publishers.
- PRATT, D., (1998). The Co-ordination of Meanings for Randomness. *For the Learning of Mathematics* 18 (3), 2-11.
- REÁTIGA, A., (2004). Confrontación entre realidad y modelo teórico: Una propuesta para desarrollar la intuición probabilística en los niños de sexto grado. Tesis de especialización en Educación

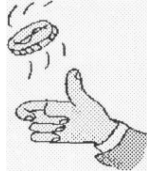
Matemática. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

- DRIER, H. S., (2000). The *Probability Explorer*. A research-based microworld to enhance children's intuitive understandings of chance and data. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 22(3-4), p. 165-178.
- DRIER, H. S., (2000). Children's meaning-making activity with dynamic multiple representations in a probability microworld. In M. Fernandez (Ed.), *Proceedings of the twenty-second annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v 2, p. 691-696). Tucson, AZ.
- YÁÑEZ, G., (2003). Estudios sobre el Papel de la Simulación Computacional en la Comprensión de las Secuencias Aleatorias, la Probabilidad y la Probabilidad Condicional. Tesis de doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México D.F.

Anexo 1A

DIAGNÓSTICO

1. Si lanzas una moneda al aire, las posibilidades de que salga cara ó sello dependen según usted de:



- (a) El número de giros.
- (b) La altura que alcance la moneda.
- (c) La suerte de la persona.
- (d) La posición inicial de la moneda.
- (e) Otro. ¿Cuál? _____.

2. Si alguien le pidiera que lances una moneda al aire y saque "cara" como resultado, le dirías que:

- (a) Es posible, porque: _____.
- (b) Es imposible, porque: _____.

3. Si lanzas una moneda **seis veces** (6) seguidas, ¿cuál de los siguientes resultados crees que es **MENOS** posible obtener? Justifica la respuesta.

- (a) CARA, CARA, CARA, SELLO, SELLO, SELLO.
- (b) SELLO, CARA, SELLO, CARA, SELLO, CARA.
- (c) CARA, CARA, SELLO, CARA, SELLO, SELLO.
- (d) SELLO, CARA, CARA, CARA, SELLO, CARA.
- (e) Todas son igualmente posibles.

Porque: _____

4. a. Para usted ¿Qué es la suerte? _____

- b. Es lo mismo que una persona lance 10 veces una moneda o que 10 personas lancen una moneda cada uno? _____

5. Si al lanzar una moneda se obtuvieron los siguientes resultados: **Cara - Cara - Cara - Cara**, al lanzar una vez más la moneda, el siguiente resultado será:

- (a) SELLO
- (b) CARA
- (c) Cualquiera de los dos
- (d) No se puede saber

Porque: _____

6. Para cada número de lanzamientos, escribe el número de veces que crees, puede salir cara ó sello.

- ❖ En 20 lanzamientos: Cara = Sello =
- ❖ En 100 lanzamientos: Cara = Sello =
- ❖ En 500 lanzamientos: Cara = Sello =
- ❖ En 1000 lanzamientos: Cara = Sello =

7. En una bolsa **oscura** hay 3 bolas: 1 blanca y 2 negras, como se ilustra en la figura. Y se quiere hacer un experimento con las siguientes condiciones:

- ❖ Se saca una bola, se registra su color y se vuelve a introducir en la bolsa.
- ❖ Cada vez que se quiera sacar una bola se debe agitar muy bien la bolsa.
- ❖ Las bolas son de igual tamaño y no se pueden diferenciar con solo tocarlas.



Imagine que en este experimento se hacen 15 extracciones. Se le pide que llene la siguiente tabla de resultados. (Utilice, N = Bola negra y B = Bola blanca).

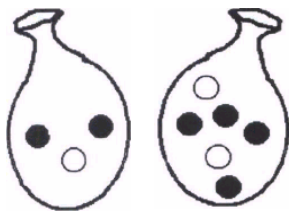
Extracción #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Color de la bola															

a. ¿Cuál bola cree que es más fácil sacar, negra o blanca? ¿Por qué?

b. Cuente el número de bolas de cada color. N = ____ y B = ____

c. Si fueran 30 extracciones, ¿Cuál sería el resultado? N = ____ y B = ____

8. Tenemos ahora dos bolsas oscuras, la primera con 3 bolas: 1 blanca y 2 negras, y la segunda con 6 bolas: 4 negras y 2 blancas como se ilustra en la figura:



Con las mismas condiciones del experimento anterior:
¿En cuál de las dos bolsas es más fácil sacar una bola negra? ¿Por qué?

9. Se tienen cuatro bolsas con bolas de dos colores:

- ❖ La primera contiene 1 roja y 2 verdes.
- ❖ La segunda contiene 3 rojas y 3 verdes.
- ❖ La tercera contiene 2 rojas y 1 verde.
- ❖ La cuarta contiene 2 rojas y 3 verdes.

¿De cuál bolsa podrá sacarse más fácilmente una bola verde? ¿Por qué?

Anexo 2A

LA PROMOCIÓN DE PALETAS

La señora encargada de la venta de helados en el Instituto Técnico Industrial de Puente Nacional quiere hacer un estudio de mercadeo para probar la efectividad y el impacto de una promoción con una clase específica de helado (las paletas de agua) la cual se quiere ofrecer por un tiempo indefinido.



Para ello la señora Blanca, a través del profesor David, quiere pedirle ayuda a un grupo de estudiantes de octavo grado para que hagan el estudio de mercadeo y prueben si la promoción de paletas deja ó no ganancias superiores a las ventas común y corrientes sin promoción.

La promoción consiste en que cada cliente juega la paleta al cara-sello apostando su valor (\$200). El cliente debe escoger entre cara ó sello, se lanza la moneda al aire, si el cliente acierta, se lleva el helado GRATIS, pero si por el contrario el cliente no acierta, tendrá que dar los \$200 sin llevar el helado.

Para que los estudiantes hagan un análisis parcial de la promoción, la señora Blanca pone a disposición 200 paletas para que realicen la prueba real durante el descanso en el colegio, las cuales se venden normalmente a \$200 cada una, para un valor total de \$40.000 que corresponde al dinero que se recogería si las paletas se venden sin promoción. Este es el precio de referencia para saber si con la promoción hay ganancias ó pérdidas adicionales.



Se aconseja organizar un grupo de publicidad para informar con anterioridad a los estudiantes de la promoción, y cuatro grupos de vendedores (con cuatro personas cada uno: el cobrador, el lanzador, el registrador y el repartidor). El profesor David será el coordinador y junto con los estudiantes organizará los grupos de trabajo.

Antes de organizar los grupos de trabajo, conteste en forma individual las siguientes preguntas, teniendo en cuenta las condiciones anteriores:

- ¿Cómo se puede saber si la promoción es efectiva? ¿Y para saber cuál es su impacto?
 - ¿Qué estrategia propone para poder hacer el estudio de mercadeo que necesita la señora Blanca?
- Si usted fuera un cliente ¿Le parecería justa la promoción? ¿Por qué?
 - ¿Participaría? Justifique el motivo.
 - ¿Piensa usted que las condiciones de la promoción brindan alguna ventaja a la señora Blanca? Explique su respuesta.
- Al hacer el lanzamiento de la moneda, solo gana el estudiante que: _____ y se lleva _____. Solo pierde el estudiante que: _____ y es el único que tiene

que: _____ y ____ lleva paleta.

4. ¿Cuántos lanzamientos cree que son necesarios para que se presente el ganador de la primera paleta? _____ ¿Y para que se ganen la quinta paleta? _____.
5. En 100 lanzamientos de una misma moneda, ¿Aproximadamente, en cuantos de estos lanzamientos cree que los estudiantes predigan -ó adivinen- el resultado de la moneda?

Rta: En _____ lanzamientos

¿De qué depende?

¿Cuántas paletas se despachan en este caso y cuánto dinero se recoge?

6. En estos mismos 100 lanzamientos de la moneda, ¿Aproximadamente, en cuantos de ellos el resultado de la moneda será CARA?

Rta: En _____ lanzamientos.

Y ¿en cuántos de ellos SELLO?

Rta: En _____ lanzamientos.

7. Teniendo en cuenta que solo a los ganadores se les da paleta. Para usted, ¿Cuál sería el número aproximado de veces que se tiene que lanzar la moneda para repartir todas las 200 paletas?

Rta: En _____ lanzamientos.

¿En cuántos de estos, el cliente gana? En _____ lanzamientos.

Y ¿en cuántos de estos, el cliente pierde? En _____ lanzamientos.

¿Por qué? _____

8. De acuerdo a la estimación anterior del número de lanzamientos y del número de perdedores, realice a la derecha los cálculos para determinar el dinero que se recogería. ¿La promoción de las 200 paletas dejaría ganancias superiores en comparación al valor de las paletas vendidas sin promoción?
9. Haciendo una estimación, ¿cuántos de estos clientes cree que van a sacar cara y cuántos sello? ¿Por qué?
10. Según usted, ¿Será buena la promoción a largo plazo para la señora Blanca ? (Dos meses por ejemplo)

Ahora, con ayuda del profesor organicen los grupos de trabajo y asignación de labores.

Anexo 3A

SEGUNDA PARTE: LA VENTA

Fecha: _____ Grupo N°: _____ Tipo de Lanzamiento:

Registrar: _____ Lanzador:

Repartidor: _____ Cobrador: _____

A continuación los grupos organizados realizaran la venta y los estudiantes encargados de hacer el registro de los resultados de cada venta lo harán en la siguiente tabla:

C L I E N T E	L A N Z A M	Resultado Moneda C = Cara S = Sello		Resultado del cliente G = Gana P = Pierde		C L I E N T E	L A N Z A M	Resultado Moneda C = Cara S = Sello		Resultado del cliente G = Gana P = Pierde		C L I E N T E	L A N Z A M	Resultado Moneda C = Cara S = Sello		Resultado del cliente G = Gana P = Pierde	
		C	S	G	P			C	S	G	P			C	S	G	P
	1						34						67				
	2						35						68				
	3						36						69				
	4						37						70				
	5						38						71				
	6						39						72				
	7						40						73				
	8						41						74				
	9						42						75				
	10						43						76				
	11						44						77				
	12						45						78				
	13						46						79				
	14						47						80				
	15						48						81				
	16						49						82				
	17						50						83				
	18						51						84				
	19						52						85				
	20						53						86				
	21						54						87				
	22						55						88				
	23						56						89				
	24						57						90				
	25						58						91				
	26						59						92				
	27						60						93				
	28						61						94				
	29						62						95				
	30						63						96				
	31						64						97				
	32						65						98				
	33						66						99				

Anexo 4A

TERCERA PARTE : ANÁLISIS PARCIAL DE LAS VENTAS

Una vez finalizado el día de la venta deben reunirse en parejas para hacer un análisis parcial de los resultados de la promoción en cada subgrupo y conocer cuál fue el valor de las ganancias o pérdidas en los subgrupos.

1. ¿Cuántos clientes participaron en su subgrupo?
2. ¿Cuántas paletas entregaron?
3. ¿Cuántos lanzamientos fueron necesarios para despachar las paletas entregadas en su subgrupo?
4. ¿En cuántos lanzamientos el cliente ganó? ____ y ¿en cuántos lanzamientos perdió?

5. Si no hubo errores al recibir el dinero o al hacer los registros, ¿cuánto dinero debieron recoger?
6. ¿Cuánto dinero se recogería si se hubiesen vendido las paletas del subgrupo sin promoción?
7. De acuerdo a lo anterior ¿ganaron o perdieron dinero con la promoción en su subgrupo? ¿Cuánto?
8. ¿Qué opinan sobre la promoción con los resultados del subgrupo?
9. Cree que los resultados de los demás subgrupos pudieron ser parecidos, diferentes ó iguales. Explique.

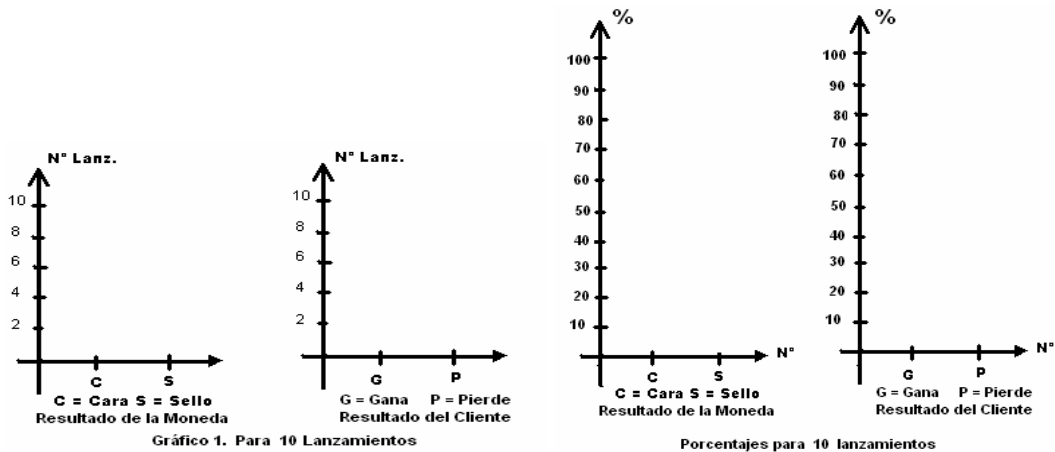
Anexo 5A

CUARTA PARTE: ANÁLISIS ESPECÍFICO RESULTADOS DE LOS SUBGRUPOS

Ahora cada *pareja* hará un análisis más profundo de los registros para observar el comportamiento de las ventas a medida que se presentaba cada cliente en el subgrupo que le correspondió. Para cada número de clientes complete la tabla y los gráficos de barras:

1. Para los primeros 10 lanzamientos:

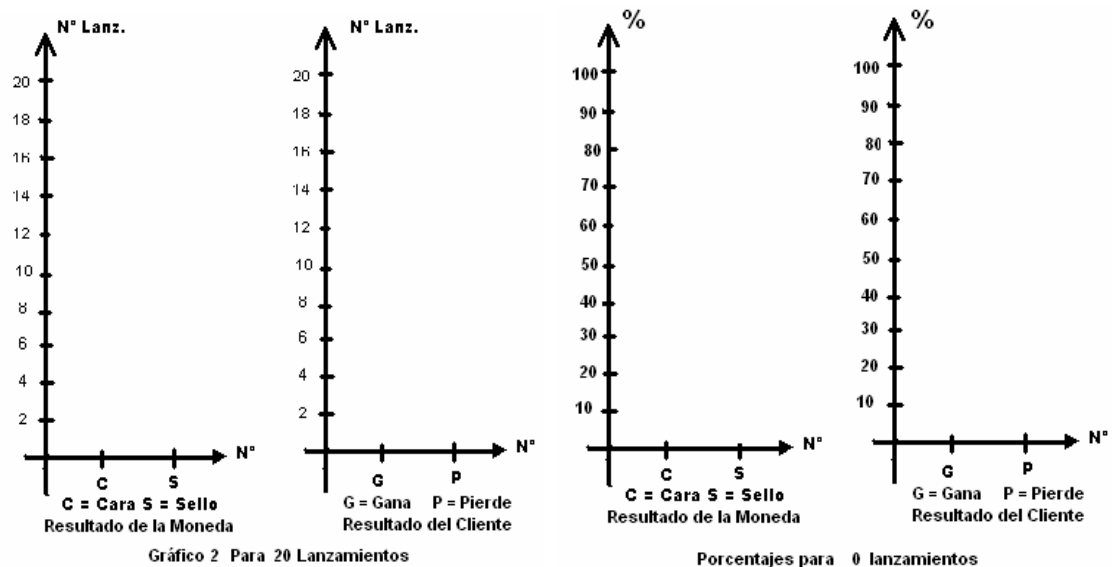
Lanzamiento	Resultado de la moneda C / S	Lado de la moneda que escogió el cliente	Resultado del cliente G / P
1			
2			
.			
.			
.			
10			
Total	C =	C =	G =
	C (%) =	C (%) =	G (%) =
	S =	S =	P =
	S (%) =	S (%) =	P (%) =



- ¿Cuántas paletas se entregaron en los 10 primeros lanzamientos?
- ¿Cuánto dinero se recogió en los 10 lanzamientos?
- ¿Cuál es la diferencia entre el número de caras y sellos?
- ¿Cuál es la diferencia en porcentaje entre el número de caras y sellos?
- ¿Cuál es la diferencia entre el número de veces que gana y pierde el cliente?
- ¿Cuál es la diferencia en porcentaje entre el número de veces que gana y pierde el cliente?

2. Para los primeros 20 lanzamientos:

Lanzamiento	Resultado moneda C/S	Lado de la moneda que escoge el cliente C/S	Resultado del cliente G/P
Total anterior	C = S =	C = S =	G = P =
11			
12			
.			
.			
.			
20			
TOTAL	C =	C =	G =
Porcentaje	C(%) =	C(%) =	G(%) =
TOTAL	S =	S =	P =
Porcentaje	S(%) =	S(%) =	P(%) =

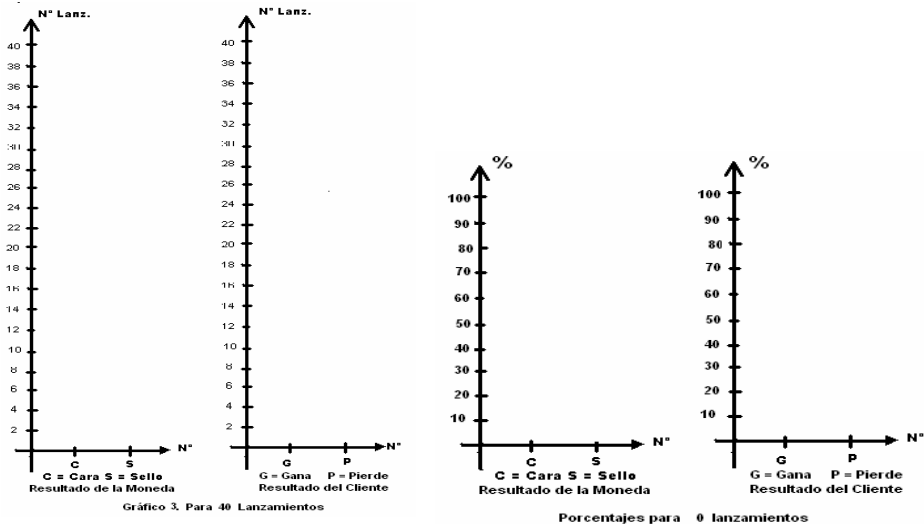


- ¿Cuántas paletas se entregaron en los 20 primeros lanzamientos?
- ¿Cuánto dinero se recogió en los 20 lanzamientos?
- ¿Cuál es la diferencia entre el número de caras y sellos?
- ¿Cuál es la diferencia en porcentaje entre el número de caras y sellos?
- ¿Cuál es la diferencia entre el número de veces que gana y pierde el cliente?

f. ¿Cuál es la diferencia en porcentaje entre el número de veces que gana y pierde el cliente?

3. Para los primeros 40 lanzamientos:

Lanzamiento	Resultado moneda C / S	Lado de la moneda que escogió el cliente C/S	Resultado del cliente G / P
Total anterior	C = S =	C = S =	G = P =
21			
22			
.			
.			
.			
38			
39			
40			
TOTAL	C = S =	C = S =	G = P =
Porcentaje	C (%) = S (%) =	C (%) = S (%) =	G (%) = P (%) =
TOTAL	C (%) = S (%) =	C (%) = S (%) =	G (%) = P (%) =
Porcentaje	C (%) = S (%) =	C (%) = S (%) =	G (%) = P (%) =

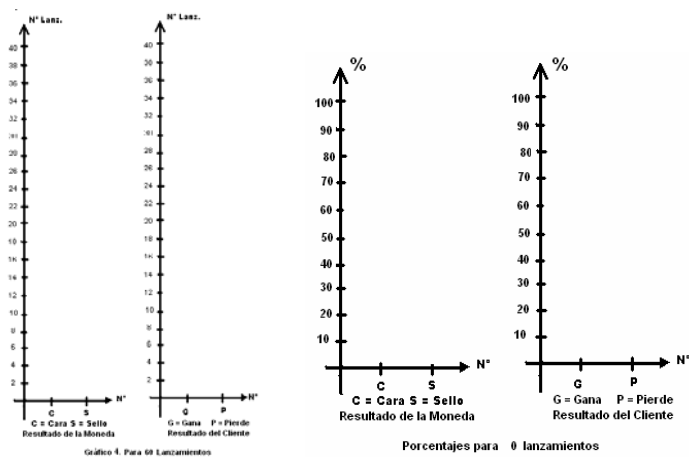


- ¿Cuántas paletas se entregaron en los 60 primeros lanzamientos?
- ¿Cuánto dinero se recogió en los 60 lanzamientos?
- ¿Cuál es la diferencia entre el número de caras y sellos?
- ¿Cuál es la diferencia en porcentaje entre el número de caras y sellos?

- e. ¿Cuál es la diferencia entre el número de veces que gana y pierde el cliente?
 f. ¿Cuál es la diferencia en porcentaje entre el número de veces que gana y pierde el cliente?

4. Para los primeros 60 lanzamientos:

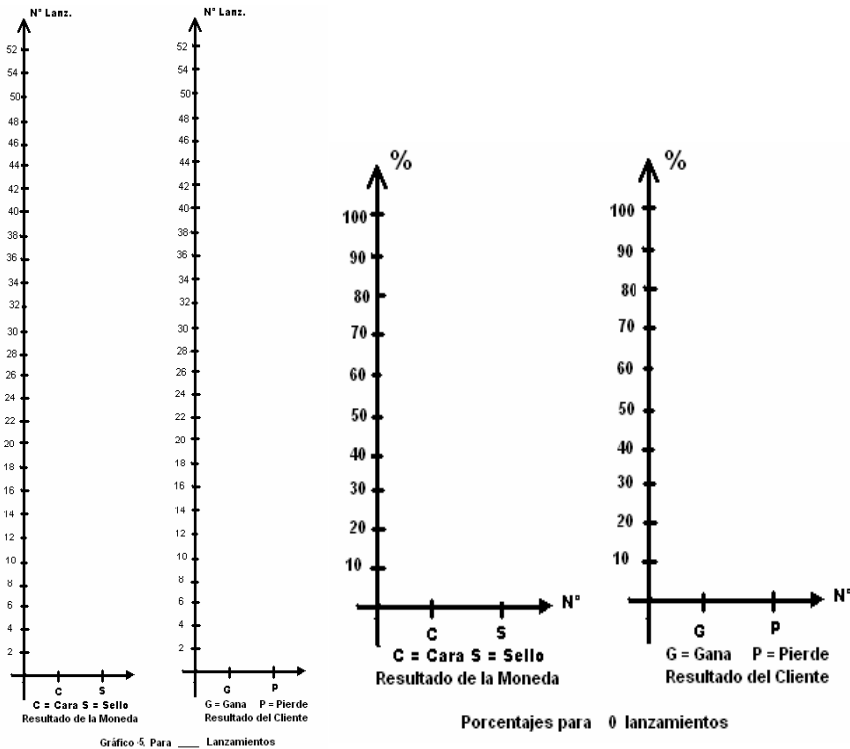
Lanzamiento	Resultado moneda C / S	Lado de la moneda que escoge el cliente C / S	Resultado del cliente G / P
Total anterior	C = S =	C = S =	G = P =
41			
42			
.			
.			
.			
60			
TOTAL	C =	C =	G =
Porcent.	C (%) =	C (%) =	G (%) =
TOTAL	S =	S =	P =
Porcent.	S (%) =	S (%) =	P (%) =



- a. ¿Cuántas paletas se entregaron en los 60 primeros lanzamientos?
 b. ¿Cuánto dinero se recogió en los 60 lanzamientos?
 c. ¿Cuál es la diferencia entre el número de caras y sellos?
 d. ¿Cuál es la diferencia en porcentaje entre el número de caras y sellos?
 e. ¿Cuál es la diferencia entre el número de veces que gana y pierde el cliente?
 f. ¿Cuál es la diferencia en porcentaje entre el número de veces que gana y pierde el cliente?

5. Para el total de lanzamientos del subgrupo (____) :

Lanzamiento	Resultado moneda C / S	Lado de la moneda que escoge el cliente C / S	Resultado del cliente G / P
Total anter.	C = S =	C = S =	G = P =
61			
62			
.			
.			
110			
111			
112			
Total	C =	C =	G =
	C (%) =	C (%) =	G (%) =
	S =	S =	P =
	S (%) =	S (%) =	P (%) =



- ¿Cuántas paletas se entregaron en los ____ lanzamientos?
- ¿Cuánto dinero se recogió en los ____ lanzamientos?
- ¿Cuál es la diferencia entre el número de caras y sellos?
- ¿Cuál es la diferencia en porcentaje entre el número de caras y sellos?
- ¿Cuál es la diferencia entre el número de veces que gana y pierde el cliente?
- ¿Cuál es la diferencia en porcentaje entre el número de veces que gana y pierde el cliente?

6. Compare los anteriores gráficos y observe con detalle los datos de las tablas y con sus palabras escriba lo que sucede a medida que aumenta el número de lanzamientos respecto a:

- a. La cantidad de clientes ganadores y de perdedores.

N° lanzamientos	N° Ganadores		N° Perdedores		N° Paletas entregadas	Dinero recogido
	#	%	#	%		
Los primeros 10						
Los primeros 20						
Los primeros 40						
Los primeros 60						
Los ____ lanzam.						

- b. La cantidad de caras y sellos.

N° lanzamientos	N° caras		N° sellos	
	#	%	#	%
Los primeros 10				
Los primeros 20				
Los primeros 40				
Los primeros 60				
Los ____ lanzamientos				

7. Complete la siguiente tabla y observe con detalle los datos y con sus palabras escriba lo que sucede con el número de lanzamientos que se necesitan para despachar los siguientes números de paletas

N° Paletas	N° Lanzamientos	N° Ganadores		N° Perdedores	
		#	%	#	%
Las primeras 10 paletas					
Las primeras 20 paletas					
Las primeras 40 paletas					
Las 50 paletas					

8. Haciendo uso de un proyector cada pareja hará una breve *exposición* del análisis específico de los resultados anteriores y sus conclusiones ante los demás.

Anexo 6A

QUINTA PARTE: COMPARANDO LOS RESULTADOS DE LOS SUBGRUPOS

A medida que las parejas hacen su exposición, complete las siguientes tablas con la información de los cuatro grupos de venta para hacer un análisis con todos los registros de los cuatro grupos:

N° Lanza Mientos	Subgrupo 1				Subgrupo 2				Subgrupo 3				Subgrupo 4				
	Caras		sellos		caras		sellos		caras		Sellos		caras		Sellos		
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	
Los primeros 10																	
Los primeros 20																	
Los primeros 40																	
Los primeros 60																	
Total lanzamiento																	

Tabla N° 1 Resultados de la moneda

N° Lanza Mientos	Subgrupo 1				Subgrupo 2				Subgrupo 3				Subgrupo 4			
	N° clientes				N° clientes				N° clientes				N° clientes			
	Gana		Pierde		Gana		Pierde		Gana		Pierde		Gana		Pierde	
	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%	#	%
Los primeros 10																
Los primeros 20																
Los primeros 40																
Los primeros 60																
Total Lanzamient																

Tabla N° 2 Resultados de los clientes

N° LANZAM.	Subgrupo 1		Subgrupo 2		Subgrupo 3		Subgrupo 4	
	N° Paletas entregadas	Dinero recogido	N° Paletas entregadas	Dinero recogido	N° Paletas entregadas	Dinero recogido	N° Paletas entregadas	Dinero recogido
Los primeros 10								
Los primeros 20								
Los primeros 40								
Los primeros 60								
Total Lanzam								

Tabla Nº 3 Relación de Paletas y Dinero con el número de Lanzamientos

Nº PALETAS	Subgrupo 1			Subgrupo 2			Subgrupo 3			Subgrupo 4		
	Nº Lanza mientos	Nº Gana dores	Nº Perde dores	Nº Lanza mientos	Nº Gana dores	Nº Perde dores	Nº Lanza mientos	Nº Gana dores	Nº Perde dores	Nº Lanza mientos	Nº Gana dores	Nº Perde dores
Las primeras 10												
Las primeras 20												
Las primeras 40												
Las 50 paletas												

Tabla Nº 4 Relación de Lanzamientos, Ganadores y Perdedores con el número de Paletas

5. *¿Comparando* los resultados de los cuatro subgrupos qué pueden decir acerca del número de ganadores y perdedores a medida que aumenta el número de lanzamientos?
6. *¿Comparando* los resultados de los cuatro subgrupos qué pueden decir acerca del número de caras y sellos a medida que aumenta el número de lanzamientos?
7. *¿Comparando* los resultados de los cuatro subgrupos qué pueden decir acerca del número de *lanzamientos* y el número *paletas* vendidas? Explique.

Anexo 7A

SEXTA PARTE: ANÁLISIS GENERAL DE LOS RESULTADOS DEL GRUPO

Para completar el análisis parcial de la promoción, es necesario agrupar los resultados de los cuatro subgrupos para observar el comportamiento de los datos para TODAS LAS 200 PALETAS.

Complete la siguiente tabla, teniendo en cuenta que la primera fila corresponde a los datos del subgrupo que le correspondió analizar anteriormente.

S U B	Lan Zam	Lanzamiento	LADO QUE ESCOGE EL CLIENTE C / S				RESULTADO DE LA MONEDA C / S				RESULTADO CLIENTE G / P			
	Sub grup	Acum. lados	C	%	S	%	C	%	S	%	G	%	P	%

S U B	Lanzamientos	Cantidad de Lanzamientos	Cantidad Paletas	Dinero Recogido
	Subgrupo	Acumulados	Acumuladas	Acumulado

2. ¿Qué DIFERENCIA ó PARECIDO encuentra en los resultados obtenidos en su subgrupo con 50 paletas y los resultados obtenidos de todo el grupo con 200 paletas respecto a la cantidad de ganadores y perdedores?
3. ¿Qué DIFERENCIA ó PARECIDO encuentra en los resultados obtenidos en su subgrupo con 50 paletas y los resultados obtenidos de todo el grupo con 200 paletas respecto la cantidad de caras y sellos que escoge el cliente?:
4. ¿Qué DIFERENCIA ó PARECIDO encuentra en los resultados obtenidos en su subgrupo con 50 paletas y los resultados obtenidos de todo el grupo con 200 paletas respecto a la cantidad de caras y sellos que salen en la moneda?:
5. ¿Qué DIFERENCIA ó PARECIDO encuentra en los resultados obtenidos en su subgrupo con 50 paletas y los resultados obtenidos de todo el grupo con 200 paletas respecto a la cantidad de lanzamientos que se necesitan para repartir las paletas?
6. ¿Qué DIFERENCIA ó PARECIDO encuentra en los resultados obtenidos en su

subgrupo con 50 paletas y los resultados obtenidos de todo el grupo con 200 paletas respecto a la cantidad de clientes que pierden cuando aumenta el número de lanzamientos?

7. ¿Qué DIFERENCIA ó PARECIDO encuentra en los resultados obtenidos en su subgrupo con 50 paletas y los resultados obtenidos de todo el grupo con 200 paletas respecto a la cantidad de caras y sellos, y el número de ganadores y perdedores cuando aumenta el número de lanzamientos?
8. Si nuevamente se realizara la promoción con 200 paletas, qué resultados se obtienen (parecidos ó diferentes)? Expliquen
9. Si la promoción se hubiese aplicado en la jornada de la tarde con las mismas 200 paletas, haga una nueva aproximación de los resultados que cree se pudieron obtener:

El número de lanzamientos necesarios $L =$ _____

El número de ganadores y perdedores $G =$ _____ $P =$ _____
 $G(\%) =$ _____ $P(\%) =$ _____

El número de caras y sellos que escogen los clientes $C =$ _____ $S =$ _____
 $C(\%) =$ _____ $S(\%) =$ _____

El número de caras y sellos que salen en la moneda $C =$ _____ $S =$ _____
 $C(\%) =$ _____ $S(\%) =$ _____

10. Si la promoción se aplicara durante 25 días escolares y los estudiantes mantuvieran la misma motivación, haga una NUEVA APROXIMACIÓN de los resultados que cree se podrían obtener con un solo punto de venta y realizando 100 lanzamientos en cada jornada:

El número de lanzamientos que se realizan en los 25 días
 # Lanzamientos = _____

El número de paletas que se despachan en UN DÍA, en juntas jornadas:
 # Paletas = _____

El número de paletas que se despachan en ambas jornadas después de los 25 días:
 # Paletas = _____

El número de ganadores y perdedores $G =$ _____ $P =$ _____
 $G(\%) =$ _____ $P(\%) =$ _____

El número de caras y sellos que escogen los clientes $C =$ _____ $S =$ _____
 $C(\%) =$ _____ $S(\%) =$ _____

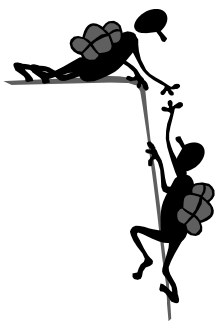
El número de caras y sellos que salen en la moneda $C =$ _____ $S =$ _____
 $C(\%) =$ _____ $S(\%) =$ _____

11. ¿Qué opina finalmente sobre las ganancias ó pérdidas de la promoción si se aplica a largo plazo? Haga una descripción a doña Blanca sobre las conclusiones que usted le daría sobre el estudio de mercadeo.

12. Con el propósito de tener una mejor perspectiva para analizar la efectividad de la promoción, ¿Qué alternativa(s) propone para obtener por algún medio los resultados de la promoción durante 25 días ó muchos más, sin necesidad de realizarla?
13. Plantee una promoción más atractiva y que permita asegurar a doña Blanca obtener ganancias (Utilizando algún objeto que involucre el azar: monedas, dados, ruletas, cartas, balotas). Argumente su planteamiento.

Anexo 8A

SÉPTIMA PARTE: SIMULACIÓN DE LA PROMOCIÓN DE PALETAS CON DOS MONEDAS



Ahora vamos a tratar de repetir la promoción de 200 paletas para conocer si los resultados encontrados se vuelven a repetir o cambian radicalmente, pero como no tenemos ni paletas ni clientes que escojan el lado de la moneda, entonces vamos a probar haciendo una **SIMULACIÓN** de la promoción y comparar los resultados.

Antes de hacer la simulación de la promoción de paletas es necesario encontrar un *modelo parecido (equivalente)* a lo que hacíamos en la realidad, donde el cliente ESCOGÍA un lado de la moneda y el vendedor lanzaba la moneda, sabiendo que solo el cliente ganaba cuando el lado de la moneda que escogía el cliente *coincidía* con el resultado de la moneda y perdía cuando no coincidía.

Como el fundamento de la promoción era una apuesta y comparar dos lados de la moneda: El que ESCOGE el cliente y el que SALE en la moneda, entonces:

- ◆ El cliente GANA cuando el resultado es CARA-CARA ó SELLO-SELLO.
- ◆ El cliente PIERDE cuando el resultado es CARA-SELLO ó SELLO-CARA.

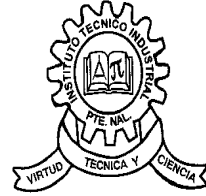
Para lo cual podríamos ensayar un experimento con DOS MONEDAS y comparar los resultados después de lanzarlas, para determinar si el cliente gana ó pierde.

1. Ensayen lanzando DOS MONEDAS para simular la venta de 50 paletas. En parejas, un estudiante lanza su moneda como CLIENTE y anota su resultado, el otro compañero lanza su moneda como VENDEDOR y anota su resultado. Si los resultados coinciden entonces el cliente gana la paleta, de lo contrario pierde y tiene que pagar los \$200. (Utilice la tabla anexa que le hará entrega el profesor).





UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
 TRABAJO DE GRADO ESP. EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
 POR: ÉDGAR D. JAIMES Y JORGE A. MARTÍNEZ
 INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL FRANCISCO DE PAULA
 SANTANDER
 NIVEL OCTAVO GRADO



CLIENTE: _____ Moneda: _____ Fecha: _____
 VENDEDOR: _____ Moneda: _____ Pareja # _____
 TIPO DE LANZAMIENTO: _____

SIMULACIÓN DE LA PROMOCIÓN DE PALETAS (Con dos monedas)

LANZAM	CLIENTE		VENDEDOR		RESULTADO CLIENTE		LANZAM	CLIENTE		VENDEDOR		RESULTADO CLIENTE	
	C	S	C	S	G	P		C	S	C	S	G	P
1							56						
2							57						
3							58						
4							59						
5							60						
6							61						
7							62						
8							63						
9							64						
10							65						
11							66						
12							67						
13							68						
14							69						
15							70						
16							71						
17							72						
18							73						
19							74						
20							75						
21							76						
22							77						
23							78						
24							79						
25							80						
26							81						
27							.						
28							.						
29							.						
30							97						
.							98						
.							99						
.							100						
.							101						
34													

4													
TOTAL													

Tabla 3. Cantidad de caras y sellos, del cliente y del vendedor de los cuatro SUBGRUPOS.

SUBGRUPO	LANZAMOS	CLIENTES QUE GANAN CON:				CLIENTES QUE PIERDEN CON:			
		CC	%	SS	%	CS	%	SC	%
1									
2									
3									
4									
TOTAL									

Tabla 4. Relación de Ganadores y Perdedores con cara y/o sello de los cuatro SUBGRUPOS.

4. Comparando los lanzamientos necesarios para que los clientes se ganen las 50 paletas de las cuatro parejas (con dos monedas) y de los cuatro subgrupos (con una moneda) de venta realizadas en el colegio, ¿qué opinan de los resultados?
5. Comparando la cantidad de ganadores y perdedores con UNA moneda en los cuatro subgrupos y la cantidad de ganadores y perdedores con DOS monedas en las cuatro parejas, ¿qué opinan de los resultados?
6. Comparando la cantidad de CLIENTES que ganan con CARA y la cantidad de CLIENTES que ganan con SELLO entre los cuatro subgrupos de venta realizadas en el colegio y las cuatro parejas, ¿qué opinan de los resultados?
7. Comparando la cantidad de caras y sellos que ESCOGIERON los clientes el día de las ventas (con una moneda) y la cantidad de caras y sellos que les CORRESPONDIÓ a los clientes en los lanzamientos con las dos monedas, ¿qué opinan de los resultados?
8. Comparando la última fila de las dos tablas sobre la TOTALIDAD de resultados de las cuatro parejas (con dos monedas) y los resultados de los cuatro subgrupos (con una moneda) de venta realizadas en el colegio, ¿qué opinan de ellos?
9. ¿Creen que puede ser VALIDO adoptar el modelo de las DOS MONEDAS para simular la promoción de paletas teniendo en cuenta que no tenemos el cliente que ESCOJA el lado de la moneda? Justifique la respuesta basándose en los resultados obtenidos.
10. De acuerdo a su experiencia y los resultados obtenidos, ¿creen que la forma de hacer el lanzamiento de las monedas ó la persona que lanza influyen en los resultados? Justifiquen.
11. Para usted cuáles podrían ser los inconvenientes de aplicar el modelo del lanzamiento de dos monedas para simular la promoción de paletas y poder continuar con el estudio de mercadeo.

12. Si quisiéramos saber los efectos de la promoción a LARGO PLAZO y probar el pronóstico que ustedes hicieron para los 25 días en las dos jornadas (SEXTA PARTE), ¿cuáles podrían ser las desventajas de simular la promoción con el modelo de las dos monedas? Haga una lista de ellas.
13. ¿Cómo se podrían superar estas desventajas mencionadas anteriormente? Proponga una alternativa para resolver el problema de PROBAR la efectividad de la promoción a largo plazo.

Anexo 9A

OCTAVA PARTE: EXPLORANDO PROBABILITY EXPLORER

Objetivos:

- ✓ Explorar y manipular un software interactivo que permite la simulación de experimentos aleatorios.
- ✓ Simular la promoción de las dos paletas para hacer experimentos que nos permitan obtener resultados para comparar con los reales y definir la efectividad de la promoción a largo plazo.

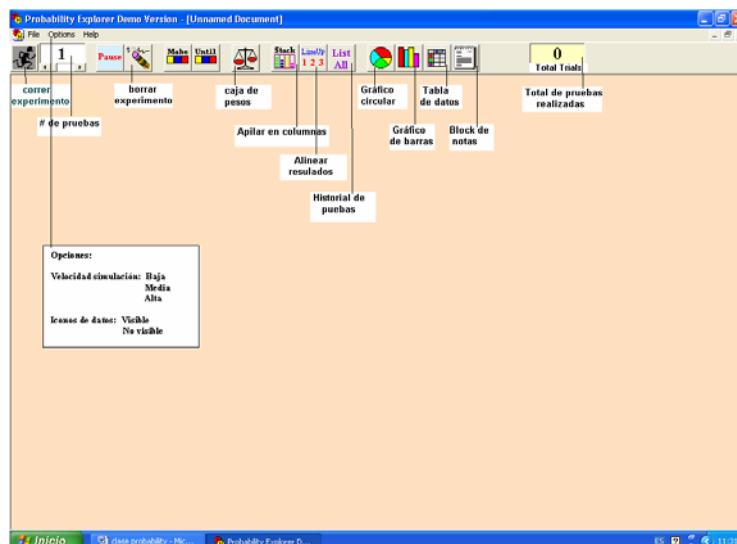
I. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

Probability Explorer es un programa creado por la inglesa Hollylynne Stolh, profesora de la Universidad del Carolina del Norte (EEUU) como resultado de su trabajo de doctorado, el cuál surgió de la necesidad de ofrecer en especial a los niños, un *micromundo computacional* que permitiera al usuario visualizar e interactuar con simulaciones de algunos experimentos aleatorios comunes en la enseñanza de la probabilidad (lanzamiento de una moneda, dados, bolas y otros definidos por el usuario), en un ambiente *multirepresentacional* que genera resultados a una velocidad definida por el usuario y con la posibilidad de realizar muchísimas pruebas en un solo instante.

Las representaciones disponibles en el micromundo Probability Explorer, son representaciones multi-enlazadas, que se actualizan simultáneamente cuando los eventos aleatorios son simulados. Estas representaciones incluyen representaciones de íconos movibles, arrastrando con el cursor.

Además en él se puede manipular el número de pruebas (de 1 en 1 ó 20 pruebas seguidas, por ejemplo), las cuales se ejecutan con solo un clic en el icono: *correr el experimento* (Run Experiment) representado por un muñeco que corre.

El usuario también puede manipular la velocidad de la simulación en el menú de opciones (Simulation Speed) en tres niveles: baja (slow), media (medium) y rápida (fast). Incluye también íconos para crear su propio experimento con dibujos alusivos (balones de diferentes deportes, figuras de estado del tiempo, población, caras, caras de dado de 1 a 9).

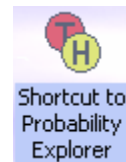


En el siguiente gráfico se señalan en español varios de los íconos, incluye un block de notas (notebook) que permite al estudiante describir y recolectar las conclusiones a que puede llegar en uno o varios experimentos y pegar tablas de resultados o gráficos. El programa permite guardar cada sesión del estudiante como un archivo con el propósito de poder analizar los experimentos realizados por cada estudiante.

II. EXPLORACIÓN DEL PROGRAMA:

1. ¿Cómo se abre el programa Probability Explorer?

- Haga doble clic sobre el icono del escritorio que aparece como dos círculos, uno amarillo y otro rojo con las letras T y H, con el nombre **Shortcut to Probability Explorer** (Acceso directo al Explorador de Probabilidad).



- Aparece una ventana con la presentación del programa, su autora y la versión. Haga clic sobre el letrero amarillo que dice: "Siga".

Let's Go!

- Aparecen dos ventanas, la más pequeña con el nombre **Choose an experiment** (Elija un experimento), donde pregunta **¿What do you want to do today?** (¿Qué desea hacer usted hoy?) y presenta cuatro opciones para correr un experimento (**run experiment**):



- **Coins:** Para experimentar con monedas, donde **H** es cara y **T** es sello.
 - **6-sided Dice:** Para experimentar con dados de 6 caras (1, 2, 3, 4, 5, 6).
 - **Marbles in a bag:** Para experimentar con bolas en una bolsa.
 - **Design your own experiment:** Para diseñar su propio experimento seleccione con el cursor el experimento que desee explorar y haga clic en Ok.
- Aparece otra pequeña ventana, donde le pregunta ¿Cuántos a la vez? (**¿How many at a time?**), si son monedas entonces, ¿cuántas monedas quiere lanzar al mismo tiempo?, y lo mismo con los demás eventos (dado, bolas, etc.); permite escoger hasta tres eventos al tiempo. Haga clic en el número de eventos deseados y clic en Ok.

2. ¿Cómo funciona el programa Probability Explorer?

Queda la ventana principal donde en la parte superior se muestran la barra de menú y la barra de herramientas del programa. En la barra de menú despliegue Archivo (**File**) y guarde su experimento (**Save as**), crea una carpeta con sus nombres y asígnele un nombre al archivo relacionado con el experimento (ej. **carpeta:** Pedro Sánchez y Juanita Pérez, **archivo:** 2dados).




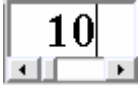







En la barra de menú también encontramos:

- **Menú Archivo:** Donde aparecen las funciones como: Nuevo experimento, Abrir, Cerrar,

Guardar, Guardar como, Imprimir y Salir.

- **Menú Opciones:** Ofrece las posibilidades de modificar la velocidad de la simulación (baja, media y rápida). También ofrece la posibilidad de ocultar (**Hide**) ó mostrar (**Show**) los íconos de datos.

En la **barra de herramientas** encontramos varios íconos con una función específica:

- **Correr Experimento:** Con solo hacer clic sobre éste icono se inicia la simulación del experimento, de acuerdo al número de pruebas asignadas. 
- **Número de pruebas:** En esta barra se escribe el número de pruebas (**trials**) ó lanzamientos que se desean ejecutar: de 1 en 1, de 2 en 2, 10 en 10, etc. máximo pueden ser 500 pruebas en un solo clic, pero se pueden repetir de forma acumulada haciendo nuevamente clic en el primer icono. 
- **Pausa:** Haciendo clic en este icono se puede detener la simulación en el momento que desee el usuario, cuando el número de pruebas es grande. 
- **Total de pruebas:** Es una barra que controla el conteo del total de pruebas realizadas en el experimento, así, se pueden ejecutar 10 pruebas, luego 20 pruebas, entonces en esta barra se muestra un total de 30 pruebas realizadas. 
- **Borrador:** Elimina los datos obtenidos para repetir el mismo experimento desde cero pruebas. 
- **Hacer esto:** Abre una ventana que permite escoger el evento que desea sacar. (Ej. Yo quiero que salga Cara). 
- **Correr hasta:** Abre una ventana que permite escoger uno evento para que el experimento corra hasta que salga determinado resultado. (Ej. Yo quiero que corra el experimento hasta que salga un sello). 
- **Balanza:** Abre una ventana que muestra las opciones que tiene cada evento de salir y permite simular una moneda ó dado cargado. (Se puede ocultar en el menú de Opciones). 
- **Apilar Columnas:** Tiene como función organizar los íconos que representan los datos del experimento (Ej. Los íconos que representan la cara ó sello de la moneda) en columnas a medida que corre la simulación. Cuando el número de pruebas es muy alto, las columnas se desbordan y se desordenan. 
- **Formar en orden:** Tiene como función presentar los iconos de resultado del experimento en el orden en que van saliendo, formando 10 columnas. (Ej. T-T-T-S-S...).
- **Enumerar todos:** Tiene como función mostrar en una ventana el historial del experimento todos los resultados enumerados a medida que aparecen. 
- **Grafico de torta (Pie Graph):** Al hacer clic sobre el muestra un gráfico circular cuya apariencia depende de la proporción en los resultados. Cambia a medida que 

corre el experimento. Se puede copiar y pegar en el block de notas.

- **Gráfico de barras** (Bar Graph): Al hacer clic sobre el muestra un gráfico barras cuya apariencia depende de la proporción en los resultados. Cambia a medida que corre el experimento y muestra la escala de medida. Se puede copiar y pegar en el block de notas.



- **Tabla de datos** (Data Table): Muestra los resultados de la simulación clasificando los eventos, donde aparecen las cantidades como una cuenta (**count**), en forma de fracción (**fraction**), en forma decimal y en forma de porcentaje (**percent**). Cambia a medida que corre el experimento. Se puede copiar y pegar en el block de notas.



- **Block de notas** (Note Bock): Permite al estudiante describir y recolectar las conclusiones a que puede llegar en uno o varios experimentos y pegar tablas de resultados y gráficos.



Pero tiene el inconveniente de que por el tamaño no se distingue claramente la información, por lo que se aconseja usar el editor de texto (**Word**) para copiar y pegar gráficos y tablas de datos, así como describir las conclusiones relevantes.

3. ¿Cómo empiezo a simular un experimento?

- Para hacer lanzamientos o pruebas uno por uno, haga clic en el primer icono: “*correr experimento*” (**run experiment**). Haga clic para hacer 5 pruebas una por una.
- Para **borrar** los resultados y empezar de nuevo el experimento, haga clic en el icono “*borrar*”. Hágalo. Cerciórese que el contador del *Total de pruebas* quede en cero 0.
- Para hacer 20 pruebas seguidas por **primera vez**, ubique el cursor en el icono “*número de pruebas*”, modifique el valor y haga clic en “*correr experimento*”. **Hágalo**.
- Para hacer 20 pruebas **adicionales** solo deben hacer clic nuevamente en el icono “*correr experimento*”, de tal forma que los resultados se suman a los obtenidos en las 20 pruebas anteriores. **Hágalo**.
- Para **completar** 100 pruebas en la misma simulación solo deben tener en cuenta el número “*Total de pruebas*” que ya se han realizado y escribir en la barra de “*Número de pruebas*” el número que hace falta para completar. **Hágalo**.
- Para **cambiar de experimento**. Vaya al menú Archivo y haga clic en Nuevo Experimento. Aparece la ventana inicial donde puede seleccionar el experimento que desea trabajar.
- Para **cambiar la velocidad** de la simulación vaya al menú de “*Opciones*” y seleccione la velocidad deseada, por defecto aparece en velocidad media. Corra 100 pruebas adicionales y cambie la velocidad a rápida (**Fast**).
- Para organizar los datos **en columnas** haga clic en el icono respectivo. Borre los resultados hechos hasta ahora y corra 40 pruebas organizadas en columna.
- Para cambiar la presentación de los datos **conservando el orden** en que aparecen haga clic en el icono “*formación*”. Corra 10 pruebas en formación. **Hágalo**.

- Para usar el **historial de resultados** haga clic en el icono “enumerar todos” sirve para buscar cual es el número más largo de eventos repetidos. **Haga** 50 pruebas y busque el número más grande de caras o sellos seguidos.
- Para **usar los gráficos** de barra y de torta. En cualquier experimento aparece siempre el de barras pero el circular no siempre. Mantenga activo los dos tipos gráficos, corra cualquier número de pruebas y observe como cambia la forma de los gráficos. **Hágalo**.
- Para **usar la tabla de datos**. Borre las pruebas realizadas e inicie uno nuevo con 100 pruebas manteniendo abierta la ventana *Data Table* y observe como cambian los valores a medida que aumenta el número de pruebas, haga una pausa en cualquier momento y analice los valores que aparecen en ella. Para experimentos de dos o tres eventos al tiempo, aparece en la parte superior una opción para presentar los resultados de la simulación teniendo en cuenta el orden o lo contrario.

		Count	Fraction	Decimal	Percent
H	H	34	34/100	0.34	34.0%
H	T	44	44/100	0.44	44.0%
T	T	22	22/100	0.22	22.0%

Event 1	Event 2	Count	Fraction	Decimal	Percent
H	H	34	34/100	0.34	34.0%
H	T	23	23/100	0.23	23.0%
T	H	21	21/100	0.21	21.0%
T	T	22	22/100	0.22	22.0%

- Para copiar un gráfico o tabla de datos. El programa permite copiar solo las ventanas en cuya parte superior aparece la palabra “**Copy**”, basta con hacer clic en éste y luego hacer clic en pegar dentro de la ventana del block de notas. O bien se puede pegar en el procesador de texto Word, dependiendo de lo que desee hacer el usuario. Copie una tabla de datos y un gráfico de barras dentro del block de notas y en Word. **Hágalo**.
- Cree un nuevo experimento con dos monedas al tiempo y calcule el número de paletas que se despacharían con 10 lanzamientos, 20 lanzamientos, 40 lanzamientos y 50 lanzamientos. Compare sus resultados con otros compañeros.
- En la misma simulación con dos monedas, calcule el número de lanzamientos necesarios para repartir 10 paletas, 20 paletas, 40 paletas y 50 paletas. Compare sus resultados con otros compañeros.

Anexo 10A

NOVENA PARTE: SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE LA PROMOCIÓN DE PALETAS

Adoptando el modelo de las dos monedas para simular la promoción de paletas.

1. Realice la promoción de paletas. Pegue las tablas de datos y los gráficos de barras para describir lo que sucede en **20 lanzamientos**, y compare con lo que sucedió en los cuatro subgrupos realizados en el Instituto. Repita la simulación varias veces con el mismo número de lanzamientos y solo anexe 2 gráficos y dos tablas en el tamaño adecuado que ejemplifiquen su respuesta.
2. Haga lo mismo para **40 lanzamientos**, y compare con lo que sucedió en los cuatro subgrupos realizados en el Instituto. Repita la simulación varias veces con el mismo número de lanzamientos y solo anexe 2 gráficos y dos tablas en el tamaño adecuado que ejemplifiquen su respuesta.
3. Haga lo mismo para **100 lanzamientos**, y compare con lo que sucedió en los cuatro subgrupos realizados en el Instituto. Repita la simulación varias veces con el mismo número de lanzamientos y solo anexe 2 gráficos y dos tablas en el tamaño adecuado que ejemplifiquen su respuesta.
4. Comparando lo resultados descritos anteriormente en los puntos 1, 2 y 3. Qué puede decir acerca de:
 - a. La apariencia de los gráficos.
 - b. Las cantidades de ganadores y perdedores.
 - c. El número de ganadores con cara y sello.
 - d. El número de perdedores con cara y sello.
5. Realice los experimentos que crea necesario para describir lo que sucede cuando el número de lanzamientos aumenta. Respecto al número de ganadores y perdedores.
6. Experimente **CINCO** veces con dos monedas en Probability Explorer para despachar **50 paletas**, teniendo en cuenta que la primera moneda corresponde al **CLIENTE** y la segunda al **VENDEDOR**. Es importante que registre los resultados en la siguiente tabla y, copie la tabla de datos y el gráfico de barras correspondiente en un archivo de Word:

EXPERIMENTO	LANZAMIENTOS	CLIENTE				VENDEDOR				RESULTADO CLIENTE			
		C	%	S	%	C	%	S	%	G	%	P	%
1													
2													
3													

4													
5													

Tabla N° 5 Resultados de 5 experimentos simulados en Probability Explorer con 50 paletas

SUBGRUPO	L E N T O S I	CLIENTES QUE GANAN CON:				CLIENTES QUE PIERDEN CON:			
		CC	%	SS	%	CS	%	SC	%
1									
2									
3									
4									
5									
TOTAL									

Tabla N° 6 Resultados de 5 experimentos simulados en Probability Explorer con 50 paletas

- Comparando los resultados **reales** con los resultados **simulados** por el computador, con **50 paletas**, ¿qué piensa?
- ¿Los resultados de alguno de los **cinco experimentos** con **50 paletas** se pareció a uno de los **cuatro subgrupos** de la promoción realizada en el Instituto? ¿Cuáles y por qué?
- ¿Los resultados de alguno de los **cinco experimentos** con **50 paletas** se pareció a uno de los **cuatro parejas** de la promoción simulada con dos monedas? ¿Cuáles y por qué?
- Experimente **CINCO** veces con dos monedas en Probability Explorer para despachar **200 paletas**, teniendo en cuenta que la primera moneda corresponde al **CLIENTE** y la segunda al **VENDEDOR**. Registre los resultados en la siguiente tabla, lleve también los registros en Word:

EXPERIMENTO	L E N T O S I	CLIENTE				VENDEDOR				RESULTADO CLIENTE			
		C	%	S	%	C	%	S	%	G	%	P	%
1													
2													
3													
4													
5													

Tabla N° 7. Resultados de 5 experimentos simulados en Probability Explorer con 200 paletas

Registre también el número de ganadores con Cara y los que ganan con Sello

SUBGRUPO	L A N N Z A O S M I	CLIENTES QUE GANAN CON:				CLIENTES QUE PIERDEN CON:			
		CC	%	SS	%	CS	%	SC	%
1									
2									
3									
4									
5									
TOTAL									

Tabla N° 8. Resultados de 5 experimentos simulados en Probability Explorer con 200 paletas

11. Comparando los resultados **reales** con **200 paletas** con los resultados **simulados** por el computador, ¿qué piensa?
12. ¿Los resultados de alguno de los **cinco experimentos**, con **200 paletas**, se pareció a alguno de los **cuatro subgrupos** de la promoción realizada en el Instituto? ¿Cuáles y por qué?
13. ¿Los resultados de alguno de los **cinco experimentos**, con **200 paletas**, se pareció a uno de los **cuatro parejas** de la promoción simulada con dos monedas? ¿Cuáles y por qué?
14. Qué opina del simulador Probability Explorer con estos resultados:
15. Ahora utilice el programa **Probability Explorer** para obtener los resultados de 100 lanzamientos, 200, 300, 500, 1000, 2000, 5000 y 10000 lanzamientos.

EXPER	L A N N Z A O S M I	CLIENTE				VENDEDOR				RESULTADO CLIENTE			
		C	%	S	%	C	%	S	%	G	%	P	%
1	100												
2	200												
3	300												
4	500												
5	1000												
6	2000												
7	5000												

8	10.000												
---	--------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

16. Compare los resultados que usted pronosticó para los **25 días** con la promoción, con los obtenidos en la tabla. ¿Qué opina de ellos, fue un buen pronóstico?
17. Compare sus resultados con los obtenidos por los demás compañeros. Describa lo que perciba de ellos.
18. ¿Qué puede decir de la promoción en las dos jornadas a los **50 días**?
19. ¿Qué **relaciones aritméticas** pudieron descubrir que se cumplen en **general** entre todas las variables que están involucradas en la promoción (número de caras, sellos; número de lanzamientos, número de paletas; número de ganadores, perdedores? Simbolicelas de la forma más simple posible. Especifique bajo que condiciones se cumplen.
20. Escriba un informe para entregarle a la señora Blanca sobre el estudio de mercadeo.

Anexo 11A

DÉCIMA PARTE: NUEVA PROMOCIÓN DE PALETAS

1. Justificación
2. Propuesta
3. Ventajas de la propuesta respecto a la de las monedas
4. ¿Cómo probarla?
5. ¿Por qué piensa que esta promoción garantiza ganancias?
6. ¿De que depende que el cliente gane o pierda?
7. Para el número de extracciones asigne un valor estimado del número de balotas que se obtienen:

N° Extrac.	N° Balotas	
	A	R
10		
20		
50		
100		
200		
300		
500		
1000		
10.000		

8. Escriba una serie de 30 extracciones.

N°	Extrac	N° Balotas	
		R	A
1			
2			
3			
.			
.			
.			
28			
29			
30			

Anexo 12A

ONCEAVA PARTE: ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN REAL

1. Comparando los resultados en grupos de 50 clientes ¿Qué observa?

N°	N° Extr	A	R	A%	R%
1	50				
2	50				
3	50				
4	50				

2. Si tuviera la oportunidad de simular el mismo experimento con otros 50 clientes ¿Qué resultados cree que obtendría y por qué?
 3. ¿Qué observa a medida que aumenta el número de extracciones?

N°	N° Extr	A	R	A%	R%
1	50				
2	100				
3	150				
4	200				

4. Comparando los resultados de la simulación real y el pronóstico hecho en la décima parte con 50, 100 y 200 extracciones ¿Qué puede decir?

PRONÓSTICO			
N°	Extrac	N° Balotas	
		R	A
	10		
	20		
	50		
	100		
	200		
	300		
	500		
	1000		
	10.000		

5. Con los resultados anteriores, complete lo que pasaría en las 400 extracciones.

N°	N° Extr	A	R	A%	R%
1	50				
2	100				
3	150				
4	200				
5	400				

6. Con lo hecho hasta ahora, ¿Podría asegurar la efectividad de la nueva promoción de paletas a largo plazo?

Anexo 13A

DOCEAVA PARTE: SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DE LA NUEVA PROMOCIÓN DE PALETAS.

1. Simule repetidamente el experimento con 20 extracciones, compare lo que sucede en general con este número de extracciones y concluya. Anexe ejemplos que sustenten su respuesta.
2. Simule repetidamente el experimento con 50 extracciones, compare lo que sucede en general con este número de extracciones y concluya. Anexe ejemplos que sustenten su respuesta.
3. Simule repetidamente el experimento con 100 extracciones, compare lo que sucede en general con este número de extracciones y concluya. Anexe ejemplos que sustenten su respuesta.
4. Comparando las simulaciones anteriores, ¿qué diferencia encuentra entre ellas?
5. Utilice el simulador para probar la efectividad de la nueva promoción a LARGO PLAZO. Describa, ejemplifique y concluya.
6. ¿Cómo podría dar una medida sobre la efectividad de la promoción anterior y la nueva promoción?
7. ¿Existe alguna relación cuantitativa entre el número de bolas de cada color y la cantidad de ganadores y perdedores?
8. Escriba un informe a la señora Blanca sobre la nueva promoción.

Anexo 14A

EVALUACIÓN FINAL (Escrita)

NOMBRE: _____ FECHA: _____

A continuación encontrará, algunas preguntas sobre situaciones hipotéticas, esperamos las conteste con la mayor sinceridad, con argumentos propios y lo más expresivos posibles. En las preguntas de selección, marca con una equis X la respuesta con la que esté de acuerdo y justifique la respuesta con sus propias palabras.

1. Si lanza una moneda al aire, las posibilidades de que salga cara ó sello dependen según usted de:

- a) El número de giros.
- b) La altura que alcance la moneda.
- c) La suerte de la persona.
- d) La posición inicial de la moneda.
- e) No depende de nada.
- f) Otros. ¿Cuáles?

2. Si alguien le pidiera que lance una moneda al aire y saque "sello" como resultado, le diría que (escoja solo una):

- a) Es posible, porque:

- b) Es imposible, porque:

3. Si lanza una moneda **cuatro veces** (4) seguidas, ¿cuál de los siguientes resultados cree que es **MENOS** posible obtener? Justifica la respuesta.

- a) C, C, C, S.
- b) S, C, S, C.
- c) C, C, C, C.
- d) S, C, S, S.
- e) Todas son igualmente posibles.

Porque: _____

4. Si dos personas quieren realizar 100 lanzamientos cada uno, con una moneda, los resultados generales pueden ser ¿iguales? ¿diferentes? ¿parecidos? Justifique.

5. Si al lanzar una moneda se obtuvieron los siguientes resultados: **C - C - C - C**, al lanzar una vez más la moneda, el siguiente resultado será:

- a. S.
- b. C.
- c. Cualquiera de los dos.
- d. No se puede saber.

Porque: _____

6. Para cada número de lanzamientos, escribe el número de veces que crees, puede salir cara ó sello al lanzar una moneda.

Nº Lanzamientos	Nº Caras	Nº Sellos	C (%)	S (%)
20				
100				
500				
1000				

7. Al lanzar dos monedas al tiempo, ¿Cuál es la probabilidad de obtener los eventos CC, CS, SS y SC?

8. Al hacer el lanzamiento de dos monedas al tiempo, escribe el número de veces **APROXIMADO** que puede salir c-c, s-s, s-c y c-s.

Nº Lanzamientos	20		100		500		1000	
	#	%	#	%	#	%	#	%
CC								
CS								
SC								
SS								

9. En una bolsa oscura hay 3 bolas: 1 blanca y 2 negras, como se ilustra en la figura. Y se quiere hacer un experimento con las siguientes condiciones:



- ❖ Sacar una bola sin mirar y volviéndola a introducir en la bolsa.
- ❖ Cada vez que se quiera sacar una bola se debe agitar muy bien la bolsa.
- ❖ Las bolas son de igual tamaño y no se pueden diferenciar con solo tocarlas.

Imagine que en este experimento se hacen 30 extracciones. Se le pide que llene la siguiente tabla de resultados. (Utilice, N = Bola negra y B = Bola blanca).

Extracción # 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
 Color de la bola

Extracción # 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
 Color de la bola

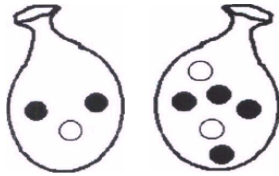
a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola blanca? ¿Por qué?

b. Cuente el número de bolas de cada color. N = ___ y B = ___

c. Si fueran **120** extracciones, ¿Cuál sería el resultado? N = ___ y B = ___

d. Si fueran **900** extracciones, ¿Cuál sería el resultado? N = ___ y B = ___

10. Tenemos ahora dos bolsas oscuras, la primera con 3 bolas: 1 blanca y 2 negras, y la segunda con 6 bolas: 4 negras y 2 blancas como se ilustra en la figura:



Bolsa 1 Bolsa 2

Con las mismas condiciones del experimento anterior:
 ¿En cuál de las dos bolsas es más fácil sacar una bola negra?
 ¿Por qué?

11. Se tienen cuatro bolsas con bolas de dos colores, determine los resultados **APROXIMADOS** que podrían ocurrir al hacer la experimentación.

Bolsa / Lanzamientos	60 Extracciones				1000 Extracciones				12.000 Extracciones			
	R	V	R%	V%	R	V	R%	V%	R	V	R%	V%
1 roja y 2 verdes												
3 rojas y 3 verdes												
2 rojas y 1 verde												
2 rojas y 3 verdes												

12. ¿En cuál bolsa es más fácil sacar una bola verde y bajo qué condiciones? ¿Por qué?

13. En una urna hay un número desconocido de bolas de dos colores, si en 1.000 extracciones el número de cada una es de $R = 605$ y $A = 395$. ¿Cuál de las siguientes opciones es **más posible** que contenga la bolsa? Justifique su respuesta.

- a. $R = 2$ y $A = 2$.
- b. $R = 1$ y $A = 2$
- c. $R = 2$ y $A = 1$
- d. $R = 3$ y $A = 2$
