SEMIGRUPO DE PICARD Y ACCIONES PARCIALES

JHOAN SEBASTIÁN BÁEZ ACEVEDO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2016

SEMIGRUPO DE PICARD Y ACCIONES PARCIALES

Autor

JHOAN SEBASTIÁN BÁEZ ACEVEDO

Trabajo de grado para optar al título de

Magister en Matemáticas

Director

HÉCTOR EDONIS PINEDO TAPIA

Doctor en Ciencias

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2016

A mi madre y mis maestros que en este andar por la vida,
influyeron con sus lecciones y experiencias en formarme
como una persona de bien y preparada para los retos que pone la vida,
a todos y cada uno de ellos les dedico cada una de estás páginas.

Índice general

Resumen

TÍTULO: SEMIGRUPO DE PICARD Y ACCIONES PARCIALES[1]

AUTOR: Jhoan Sebastián Báez Acevedo[2]

PALABRAS CLAVE: Grupo de Picard; Semigrupo de Picard; Acciones parciales.

DESCRIPCIÓN

El grupo de Picard de un anillo conmutativo con unidad R es un elemento de gran trascendencia en la geometría algebraica, justamente por su dificultad para calcular y sus aplicaciones a otras áreas, como por ejemplo en la teoría de Galois y teoría de cohomología. Justamente la idea de la sucesión exacta de Chase-Harrison-Rosenberg en el contexto de extensiones parciales de Galois hizo que fuera necesario tener una estructura algebraica que contenga el grupo de Picard, por esto fue necesaria la aparición del semigrupo de Picard como solución a esté inconveniente.

Este trabajo consiste en estudiar algunos conceptos y resultados en torno a dicho semigrupo, así como su aplicación en el contexto de acciones parciales. En los dos primeros capítulos nos enfocaremos en resultados fundamentales que nos permitan definir y trabajar de forma adecuada el semigrupo en cuestión partiendo de la idea del grupo de Picard.

En el tercer capitulo veremos algunos resultados fundamentales respecto al semigrupo de Picard para usarlo en el cuarto capitulo que consiste en las acciones parciales, para concluir con la construcción de una acción parcial de un grupo G cualquiera en el semigrupo de Picard de un anillo conmutativo con unidad.

Además, finalizamos con el quinto capitulo enfocado en las personas que se encuentren interesados en las acciones parciales, así como la idea de la globalización de algunas acciones parciales, que nos deja algunas preguntas abiertas y una posible continuación de los resultados del cuarto capitulo.

[1] Tesis.

[2] Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas.
DIRECTOR: Dr. Héctor Edonis Pinedo Tapia.

Abstract

TITLE: PICARD'S SEMIGROUP AND PARTIAL ACTIONS [3]

AUTHOR: Jhoan Sebastián Báez Acevedo[4]

KEYWORDS: Picard's group; Picard's semigroup; Partial actions.

DESCRIPTION

Picard's group of a commutative ring with unit R is an element of great importance in algebraic geometry, precisely because of its difficulty in calculating and its applications to other areas, such as in Galois theory and cohomology theory. Just the idea of the Chase-Harrison-Rosenberg's exact sequence in the context of Galois's partial extensions made it necessary to have an algebraic structure containing Picard's group, so the appearance of the Picard's semigroup was necessary as a solution to be inconvenient.

This paper is to study some concepts and results around said semigroup, and their application in the context of partial actions. In the first two chapters we will focus on key results that allow us to define and work properly semigroup in question based on the idea Picard's group.

In the third chapter we will see some fundamental results regarding the Picard's semigroup to use it in the fourth chapter consisting of partial actions, concluding with the construction of a partial action of a group G anyone in the Picard's semigroup of a commutative ring unity.

In addition, we completed the fifth chapter focused on people very interested in partial actions, and the idea of globalization of some partial actions, which leaves some open questions and a possible continuation of the results of the fourth chapter.

---

[3]Thesis.

[4]Faculty of Science, School of Mathematics.
DIRECTED BY: Dr. Héctor Edonis Pinedo Tapia.

Introducción

Évariste Galois vivió durante los tumultuosos años de la restauración monárquica en Francia después de Napoleón. El importante estudio que realizó sobre la resolución de ecuaciones algebraicas por medio de grupos de permutaciones ha brindado a las Matemáticas una de sus partes más bellas, conocida hoy de forma genérica en su honor como teoría de Galois. Sus trabajos no recibieron la merecida atención en su tiempo, y no alcanzaron difusión entre la comunidad matemática hasta más de una década tras su muerte.

La teoría de Galois trata de representar la estructura de la extensión generada por todas las raíces de un polinomio, por medio de sus simetrías. Para que este objetivo funcione en un contexto general son necesarias dos condiciones: encontrar un campo donde vivan las soluciones de dichos polinomios y que ningún elemento sea raíz múltiple de todos los polinomios que anula. Estas condiciones tienen que ver con los conceptos de cuerpo de descomposición y de extensión normal, estos resultados estructurales sobre este tipo de campos han sido altamente estudiados en los últimos años hasta llegar al siguiente concepto:

L es una extensión galoisiana de K (o de Galois de K) si L es una extensión normal y separable de K.

Maurice Auslander y Oscar Goldman introdujeron el concepto de extensiones de Galois para anillos conmutativos [2], luego de esto S. U. Chase, D.K. Harrison y A. Rosenberg dieron varias equivalencias para la definición de extensión de Galois en [6], estableciendo un teorema de correspondencia, obteniendo la sucesión exacta de siete términos que lleva el nombre de sucesión Chase-Harrison-Rosenberg [6] y [7]. Esta generaliza dos resultados importantes de la cohomología de campos de Galois que son el Teorema 90 de Hilbert y el isomorfismo entre el grupo de Brauer y el segundo grupo de cohomología del grupo de Galois. Desde ese momento la sucesión en cuestión ha tenido mucho peso y ha sido motivo de estudio de algebristas de todo el mundo.

Por otra parte, las acciones parciales de grupos fueron introducidas en la teoría algebraica de operadores y han servido como herramientas poderosas para su estudio, los primeros resultados algebraicos sobre estos nuevos conceptos fueron establecidos en [13], [10], [24], [25], [17] y [9], y el desarrollo de una teoría de Galois basada en acciones parciales [11], estimulando la creciente actividad algebraica en torno a acciones parciales. En particular, los resultados en teoría de Galois parcial se han obtenido en [3], [4], [5], [14], [18], [22].

Por lo tanto, una de las preguntas que apareció fue ¿Cuál es la versión de la sucesión exacta de Chase-Harrison-Rosenberg en el contexto de extensiones parciales de Galois? Para responder esto fue necesario introducir un semigrupo asociado al grupo de Picard ($\mathbf{Pic}(R)$).

El grupo de Picard será el motivo de estudio de este proyecto como vía de acceso al estudio del semigrupo de Picard, de la misma forma trataremos de obtener acciones parciales en dicho semigrupo. Este trabajo busca analizar y estudiar las acciones parciales aplicadas a $\mathbf{PicS}(R)$, así como una ciertas caracterizaciones con las que podemos representar dicho semigrupo.

Objetivos

Objetivo General

Estudiar el semigrupo de Picard $\mathbf{PicS}(R)$ y obtener una accion parcial para tal semigrupo.

Objetivos Específicos

- Adquirir una fundamentación teórica fuerte en los tópicos referentes a R-módulos proyectivos finitamente generados, donde R es un anillo conmutativo.
- Estudiar el grupo de Picard clásico y obtener ejemplos no triviales.
- Adquirir conocimientos básicos sobre acciones parciales con el propósito de extender una acción parcial α en R a una acción parcial α^* en $\mathbf{PicS}(R)$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se establecen algunos conceptos y resultados conocidos del álgebra conmutativa y no conmutativa, que son fundamentales en el desarrollo y comprensión de los capítulos posteriores. Varios de estos conceptos y resultados preliminares, así como algunos ejemplos aparecen en [1], [19] y [21], por tanto para las demostraciones y demás detalles faltantes recomendamos consultar en estas referencias.
En todo este trabajo la letra R denotará un anillo conmutativo con 1.

1.1. Definiciones Básicas

Definición 1.1. Un anillo R es llamado **anillo local** si tiene un sólo ideal maximal. Si R tiene un número finito de ideales maximales, R es llamado **anillo semilocal**.

Así mismo, definimos $\mathcal{U}(R)$ las **unidades de** R como sigue:

$$\mathcal{U}(R) = \{x \in R : \ \exists y \in R \text{ tal que } xy = 1\}.$$

Teorema 1.1. *Sean $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ideales de R, tales que $I_i + I_j = R$, para $i \neq j$. Entonces:*

(1) $I_1 \cap \cdots \cap I_n = I_1 \cdots I_n$.

(**2**) *Tenemos un isomorfismo de anillos*

$$R\Big/_{I_1 \cdots I_n} \simeq R\Big/_{I_1} \times \cdots R\Big/_{I_n}.$$

Este teorema es conocido como el **Teorema chino del Residuo**.

Definición 1.2. El Radical de Jacobson $J(R)$ de un anillo R es la intersección de los ideales maximales de R. Es decir

$$J(R) := \bigcap \{\mathfrak{m} : \ \mathfrak{m} \text{ es maximal en } R\}.$$

Veamos ahora la definición de uno de los objetos algebraicos fundamentales en nuestro trabajo:

Definición 1.3. Sea M un grupo abeliano y R un anillo conmutativo. Decimos que M es un R-**módulo**, si existe una operación llamada "producto por escalar"

$$\begin{array}{rcl} R \times M & \to & M \\ (r, m) & \mapsto & rm \end{array}$$

tal que para todo $r, r' \in R$, $m, m' \in M$ tenemos las siguientes:

- $(r + r')\, m = rm + r'm$,
- $r\,(m + m') = rm + rm'$,
- $(r \cdot r')\, m = r\,(r'm)$,
- $1_R \cdot m = m$.

Ejemplo 1.1. *Si I es ideal de R, R/I es un R-módulo, donde*

$$\begin{array}{rcl} R \times R/I & \to & R/I \\ (r, x + I) & \mapsto & rx + I. \end{array}$$

En particular para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_n$ es un $\mathbb{Z}$-módulo.

Sean M y N R-módulos, una función $f : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos si para todo $m, m' \in M$ y $r \in R$ tenemos:

- $f(m + m') = f(m) + f(m')$,
- $f(rm) = rf(m)$.

Análogamente a el caso de grupos o anillos, se definen monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos de R-módulos. Además definimos:

$$Hom_R(M, N) = \{f : M \to N \ : \ f \text{ es homomorfismo}\}$$

el grupo de los homomorfismos de R-módulos entre M y N donde la operación es la suma usual de funciones. Por lo tanto, dicho grupo es abeliano.

Ejemplo 1.2. *$Hom_R(M, N)$ es un R-módulo.*
Para esto considere:

$$\begin{array}{ccc} R \times Hom_R(M, N) & \to & Hom_R(M, N) \\ (r, f) & \mapsto & rf \end{array}$$

donde,

$$\begin{array}{rccc} rf : & M & \to & N \\ & m & \mapsto & rf(m). \end{array}$$

Claramente $rf \in Hom_R(M, N)$ pues dados $m, m' \in M$, tenemos que $(rf)(m + m') = rf(m + m') = rf(m) + rf(m')$. Además $(rf)(r'm) = r'(rf(m))$.

Proposición 1.2. *Si M es un R-módulo, $Hom_R(R, M) \simeq M$ como R-módulos.*

Definición 1.4. Sea M un R-módulo y $N \subseteq M$. N **es un submódulo de** M**. Si** N **es subgrupo de** M **y para todo** $r \in R$**,** $n \in N$ **tenemos que** $rn \in N$**.**

Si N es submódulo de M, escribimos $N \leq M$.

Ejemplo 1.3. *Si M es un R-módulo y $\{M_i\}_{i\in X}$ es una familia de submódulos de M. Entonces:*

$$\sum_{i\in X} M_i = \left\{ \sum_{j\in J} m_j \ : \ J \subseteq X,\ J \text{ es finito y } m_j \in M_j \right\}$$

es submódulo de M.

Ejemplo 1.4. *Si M es un R-módulo y $\{M_i\}_{i\in X}$ es una familia de submódulos de M. Entonces $\bigcap_{i\in I} M_i$ es un submódulo de M.*

Ejemplo 1.5. *Sea M un R-módulo y $S \subseteq M$, entonces:*

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i s_i \ : \ r_i \in R,\ s_i \in S \right\} = \bigcap_{J\in I(M)} J.$$

$\langle S \rangle$ es el submódulo generado por S.

Ejemplo 1.6. *Sean M un R-módulo e I ideal de R. El submódulo generado por I en M es:*

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i m_i \ : \ r_i \in I,\ m_i \in M,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si $f : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos, tenemos que $\ker f = \{x \in M : \ f(x) = 0\}$ y $\mathrm{im} f = f(M)$. Entonces definimos el **cokernel** de f como sigue:

$$\mathrm{coker} f = N/_{\mathrm{im} f}\,.$$

Ejemplo 1.7. *Si $f \in Hom_R(M, N)$, entonces $\ker f \leq M$ y $imf \leq N$.*

Ahora sea M un R-módulo y $N \leq M$, entonces M/N es un R-módulo con la acción:

$$\begin{array}{rcl} R \times (M/N) & \to & M/N \\ (r, m+N) & \mapsto & rm + N. \end{array}$$

Observación 1.1. Si N es solamente subgrupo abeliano de M, puede ocurrir que M/N no sea módulo, por ejemplo $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial y $\mathbb{Z}$ es subgrupo de $\mathbb{Q}$ que no es $\mathbb{Q}$-módulo, se puede ver que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ no es un $\mathbb{Q}$-módulo.

Al igual que para grupos y anillos, en los R-módulos también se cumplen los teoremas del isomorfismo, en este caso son:

(1) Si $f \in Hom_R(M,N)$, entonces $f(M) \simeq M/_{\ker f}$ como R-módulos. En particular si f es epimorfismo $N \simeq M/_{\ker f}$.

(2) Si $M_1, M_2 \leq M$, entonces $(M_1+M_2)\Big/_{M_1} \simeq M_2\Big/_{M_1 \cap M_2}$ como R-módulos.

(3) Si $M_1 \leq M_2 \leq M$, entonces $M/_{M_2} \simeq M/_{M_1}\Big/ M_2/_{M_1}$ como R-módulos.

(4) Si $N \leq M$ existe una correspondencia uno a uno entre:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Submódulos de } M \text{ que contienen a } N\} & \longleftrightarrow & \{\text{Submódulos de } M/_N\} \\ N' & \longleftrightarrow & N'/_N. \end{array}$$

Si $\{M_i\}_{i\in I}$ es una familia de submódulos de M, se tiene que $\sum\limits_{i\in I} M_i \leq M$. Si $\sum\limits_{j\in I} m_j = 0$, implica que $m_j = 0$, para todo $j \in J$, en este caso decimos que $\sum\limits_{i\in I} M_i$ es directa y escribimos:

$$\sum_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I} M_i,$$

el cual es llamado de **suma directa interna**.

Definición 1.5. M es un R**-módulo libre**, si existe una familia $\{M_i\}_{i\in I}$ de R-módulos tales que

$$M \simeq \bigoplus_{i\in I} M_i$$

y $M_i \simeq R$ como R-módulo.

Note que si M es un módulo libre y $N \simeq M$, entonces N es un módulo libre.

Proposición 1.3. *Sea M un R-módulo. Son equivalentes:*

(1) *M es módulo libre.*

(**2**) *Existe* $X \subseteq M$ *tal que* $\langle X \rangle = M$ *y si* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, $r_1, ..., r_n \in R$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0 \;\Rightarrow\; r_1 = \cdots = r_n = 0.$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$.

El conjunto X de la Proposición 1.3 es llamado **base** para M.
En particular se dice que un R-módulo libre es un R-módulo L con una base $\{x_i : \ i \in I\}$, esto es, todo elemento $x \in L$ se escribe de forma única como $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$, donde $\lambda_i \in R$ y son todos nulos excepto un número finito de indices.

Observación 1.2. Cabe resaltar que los módulos libres no se comportan como los espacios vectoriales, por ejemplo:
Considere $\mathbb{Z}$ como R-módulo, note que $\mathbb{Z} = \langle H \rangle$, donde $H = \{2, 3\}$, pero no es cierto que $\{2\}$ o $\{3\}$ generan $\mathbb{Z}$. Por lo tanto, no todo conjunto generador contiene una base, tampoco es cierto que todo conjunto linealmente independiente puede ser extendido a a una base.
Además no todo R-módulo es libre, pues $\mathbb{Z}_m$ como $\mathbb{Z}$-módulo no es libre.

1.2. Lema de Nakayama

El lema de Nakayama es uno de los resultados mas famosos del álgebra conmutativa, dicho resultado tiene muchas versiones (equivalencias) que serán bastante útiles para nuestro trabajo.

Lema 1.4 (**Lema de Nakayama**).
V1. *Si* M *es un* R*-módulo finitamente generado,* $J(R)M = M$*, entonces* $M = 0$.
V2. *Si* M *es un* R*-módulo finitamente generado,* N *un* R*-submódulo de* M *y* $M = N + J(R)M$*, entonces* $M = N$.
V3. *Si* M *es un* R*-módulo finitamente generado y* $\varphi : M \to M \big/ J(R)M$ *un homomorfismo. Si* $\varphi(m_1), \ldots, \varphi(m_n)$ *generan a* $M \big/ J(R)M$ *como* R*-módulo, entonces*

$m_1, \dots m_n$ genera a M como R-módulo.

Este resultado tiene aplicaciones interesantes, sobretodo si R es un anillo local.

1.3. Sucesiones Exactas y Producto Tensorial

Sea $\zeta : \cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$ una familia de R-módulos y R-homomorfismos. Si $\mathrm{im} f_i = \ker f_{i+1}$, ζ es llamada **sucesión exacta**.

Ejemplo 1.8. *La sucesión:*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

es exacta si y solo si f es inyectiva. La sucesión:

$$M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

es exacta si y solo si f es sobreyectiva.

Por lo tanto una composición de los dos ejemplos anteriores garantiza que

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

es exacta si y solo si f es inyectiva y g es sobreyectiva y $\mathrm{im} f = \ker g$.

Proposición 1.5. *Sea $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M'' \to 0$ una sucesión exacta de R-módulos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(**1**) *Existe un homomorfismo de R-módulos $s : M'' \to M$ tal que $p \circ s = I_{d_{M''}}$.*

(**2**) *Existe un homomorfismo de R-módulos $r : M \to M'$ tal que $r \circ i = I_{d_{M'}}$.*

En particular, si se cumple cualquiera de estas, $M \simeq M' \oplus M''$.

Definición 1.6. Las sucesiones exactas $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ se llaman **sucesiones exactas cortas**. Diremos que una sucesión exacta corta **escinde** si verifica cualquiera de las condiciones de la Proposición anterior.

Proposición 1.6. *Toda sucesión exacta* $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} L \to 0$ *de* R*-módulos, donde* L *es libre, escinde.*

Ahora veamos el producto tensorial entre módulos, pero primero un resultado fundamental para la construcción de dicho producto.

Teorema 1.7 (**Propiedad Universal**). *Sean* M*,* N *y* P R*-módulos, existe un único* R*-módulo* T *y una función* $\otimes : M \times N \to T$ *tal que para cualquier* $f : M \times N \to P$ *bilineal existe un único* $\overline{f} : T \to P$ *tal que* $f = \overline{f} \circ \otimes$*.*

Como un bosquejo de la demostración, considere el R-módulo libre $R[M \times N] = \bigoplus_{(m.n) \in M \times N} R(m,n)$. En $R[M \times N]$ tomemos el subconjunto

$$S = \begin{cases} (m+m',n) - (m,n) - (m',n'), \\ (m,n+n') - (m,n) - (m',n'), \\ (m,an) - a(m,n), \\ (am,n) - a(m,n). \end{cases}$$

Entonces $T = R[M \times N] \Big/ \langle S \rangle$.
Denotamos $T = M \otimes_R N$ el **producto tensorial** de M y N. La clase $\overline{(m,n)}$ de (m,n) en T es denotada por $m \otimes_R n$ que es llamado el **tensor elemental**. Así dado $x \in T$, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$x = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes_R n_i \text{ en } M \otimes_R N.$$

Observación 1.3. De ahora en adelante, cuando hablemos del tensor $\otimes$ se sobreentenderá que es $\otimes = \otimes_R$, a menos que se especifique lo contrario.

Note que para M y N R-módulos, $M \otimes N$ es un R-módulo vía $r \cdot (m \otimes n) = rm \otimes n$, de ahí $r\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) = \sum_i r m_i \otimes n_i$. Entonces, para M, N y P R-módulos se cumplen los isomorfismos de R-módulos:

(**1**) $(M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes (N \otimes P)$.

(**2**) $M \otimes N \simeq N \otimes M$.

(**3**) $R \otimes M \simeq M$.

(**4**) $(M \oplus N) \otimes P \simeq (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$.

(**5**) Si I es ideal de R, $R/_I \otimes M \simeq M/_{IM}$.

Proposición 1.8. *Sean M y M' R-módulos libres con bases $\{e_i\}_{i\in I}$ y $\{e'_j\}_{j\in J}$, entonces $M \otimes M'$ módulo libre con base $\{e_i \otimes e'_j\}_{(i,j)\in I\times J}$.*

Se puede mostrar que L es un R-módulo libre con base dada por n elementos si y solo si $L \simeq R^n$ como R-módulos.

Observación 1.4. Para un anillo arbitrario S puede ocurrir que $S^m \simeq S^n$ con $m \neq n$, por ejemplo sea $\mathcal{R}$ un anillo con $1_{\mathcal{R}}$ y considere:

$$CFM_{\mathbb{N}}(\mathcal{R}) := \left\{A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} : \text{ cada columna de } A \text{ es casi nula}\right\}.$$

Note que $CFM_{\mathbb{N}}(\mathcal{R})$ es un anillo con el producto de matrices y es un $CFM_{\mathbb{N}}(\mathcal{R})$-módulo. Ahora

$$\begin{array}{rccc} \psi: & CFM_{\mathbb{N}}(\mathcal{R}) & \longrightarrow & CFM_{\mathbb{N}}(\mathcal{R}) \times CFM_{\mathbb{N}}(\mathcal{R}) \\ & A & \longrightarrow & (\text{columnas impares de } A, \text{ columnas pares de } A) \end{array}$$

es un $CFM_{\mathbb{N}}(\mathcal{R})$ isomorfismo, esto es $CFM_{\mathbb{N}}(\mathcal{R}) \simeq CFM_{\mathbb{N}}(\mathcal{R})^2$.

Pero como R es conmutativo $R^n \simeq R^m$ si y solo si $m = n$, para ver esto sea $\mathfrak{m}$ ideal maximal de R, entonces tenemos los isomorfismos de $R/_{\mathfrak{m}}$ espacios vectoriales

$$R^n \otimes R/_{\mathfrak{m}} \simeq \left(R/_{\mathfrak{m}}\right)^n \quad \text{y} \quad R^m \otimes R/_{\mathfrak{m}} \simeq \left(R/_{\mathfrak{m}}\right)^m$$

luego

$$\left(R\middle/\mathfrak{m}\right)^n \simeq \left(R\middle/\mathfrak{m}\right)^m$$

espacios vectoriales, lo que implica $n = m$.

1.4. Producto tensorial de Homomorfismos

Sean $f : M \to M'$ y $g : N \to N'$ homomorfismos de R-módulos, entonces:

$$\begin{array}{rcl} M \times N & \to & M' \otimes N' \\ (m,n) & \mapsto & f(m) \otimes g(n) \end{array}$$

es bilineal. Luego por la propiedad universal, existe un homomorfismo de R-módulos

$$f \otimes g : \; M \otimes N \to M' \otimes N'.$$

Ahora, el producto tensorial es exacto a la derecha, esto es, si

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$$

es exacta, entonces

$$M \otimes T \xrightarrow{f \otimes i_d} N \otimes T \xrightarrow{g \otimes i_d} P \otimes T \to 0$$

es exacta para cualquier R-módulo T.

Definición 1.7. un **R-módulo plano** es un R-módulo N tal que si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

es una sucesión exacta de R-módulos, entonces

$$0 \to M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0$$

es exacta.

1.5. Topología de Zariski

El espectro de un anillo R es el conjunto:

$$SpecR := \{\mathfrak{p} : \ \mathfrak{p} \text{ es ideal primo de } R\}.$$

Dado I ideal de R, denotamos

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in SpecR : \ \mathfrak{p} \supseteq I\}$$

este conjunto es llamado la **variedad cortada** por I.

Proposición 1.9. *Sean I, J ideales de R, entonces*

(**1**) *Si $I \subseteq J$, entonces $V(I) \supseteq V(J)$.*

(**2**) *$V(0) = SpecR$ y $V(R) = \emptyset$.*

(**3**) *$V(IJ) = V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.*

(**4**) *$V\left(\sum_{i \in I} J_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(J_i)$, para cualquier familia de ideales $\{J_i\}_{i \in I}$.*

Por lo tanto, los conjuntos $V(I)$ con I ideal de R, verifican los axiomas de cerrados en un espacio topológico, dicha topología del cual está dotado $SpecR$ es conocida como la **Topología de Zariski**. Luego en $Spec(R)$ tenemos una topología cuyos abiertos son de la forma $SpecR \backslash V(I)$, con I ideal. Para $x \in R$ definimos:

$$D(x) := \{\mathfrak{p} \in SpecR : \ x \notin \mathfrak{p}\}.$$

Así $D(x) = SpecR \backslash V(\langle x \rangle)$, se puede probar que los $D(x)$ son abiertos básicos de la topología de Zariski.

Veremos una relación que existe entre los idempotentes de R y las componentes conexas de $Spec(R)$.

Lema 1.10. *Si* $x \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in SpecR} \mathfrak{p}$*, entonces* x *es nilpotente.*

Proposición 1.11. *$SpecR$ es disconexo, si y solo si R contiene idempotentes no triviales* $(e \neq 0, 1)$.

Demostración. Sea $e \in R$ idempotente no trivial, veamos que $SpecR = D(e) \cup D(1-e)$. Sea $\mathfrak{p} \in SpecR$, si $\mathfrak{p} \notin D(e) \cup D(1-e)$, entonces $e, 1-e \in \mathfrak{p}$, así $e + (1-e) = 1 \in \mathfrak{p}$, que es una contradicción. Ahora si $\mathfrak{p} \in D(e) \cap D(1-e)$, $e \notin \mathfrak{p}$ y $1-e \notin \mathfrak{p}$ y como $\mathfrak{p}$ es primo $e(1-e) \notin \mathfrak{p}$, así $0 \notin \mathfrak{p}$ que es una contradicción. Es decir, la unión $D(e) \cup D(1-e)$ es disyunta y $D(e)$, $D(1-e)$ son abiertos.
Recíprocamente, supongamos que $SpecR$ es disconexo y escribamos $SpecR = V(I) \cup V(J)$, por tanto no existe $\mathfrak{p} \in SpecR$ tal que $\mathfrak{p} \supseteq I$ y $\mathfrak{p} \supseteq J$, así ningún ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R contiene a $I + J$, entonces $I + J$ no es ideal propio y $I + J = R$. De esta forma existen $x \in I$, $y \in J$ tal que $x + y = 1$. Por otro lado como todo $\mathfrak{p} \in SpecR$ está en $V(I)$ o $V(J)$, tenemos que $\mathfrak{p} \supseteq I \cap J$ y así $xy \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in SpecR} \mathfrak{p}$, luego xy es nilpotente y así existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(xy)^m = 0$. Ahora, cualquier ideal primo que contiene a x^m contiene a x y análogamente cualquier ideal primo que contiene a y^m contiene a y, así ningún ideal primo contiene a $\langle x^m, y^m \rangle$ y tenemos $\langle x^m, y^m \rangle = 1$, entonces existen $r, s \in R$ tales que $1 = rx^m + sy^m$.
Por lo tanto

$$\begin{aligned}
(rx^m)(sy^m) &= rs(xy)^m = 0 \\
(rx^m)^2 &= (rx^m)(1 - sy^m) = rx^m \\
(sy^m)^2 &= sy^m \\
rx^m + sy^m &= 1.
\end{aligned}$$

Así, $\{rx^m, sy^m\}$ es un conjunto completo de idempotentes ortogonales. Además, $V(I) \subseteq V(\langle rx^m \rangle)$, $V(J) \subseteq V(\langle sy^m \rangle)$. Como $V(\langle rx^m \rangle) \cap V(\langle sy^m \rangle) = \emptyset$ tenemos que $V(I) =$

$V(\langle rx^m \rangle)$ y $V(J) = V(\langle sy^m \rangle)$, luego rx^m y sy^m son idempotentes no triviales. ♠

1.6. Localización

Sea R un anillo. Un **conjunto multiplicativo** $S \subseteq R$ es un conjunto tal que:

(**1**) $1 \in S$.

(**2**) Dados $s, t \in S$, $st \in S$.

Para $S \subseteq R$ multiplicativo. La **localización** $S^{-1}R$ de R con respecto a S es

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{a}{s} : \ a \in R, \ s \in S \right\}.$$

Donde $\dfrac{a_1}{s_1} = \dfrac{a_2}{s_2}$ si y solo si existe $t \in S$ tal que $t \cdot (a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$. Análogamente se define la localización para módulos, sea M un R-módulo y $S \subseteq R$ multiplicativo, entonces:

$$S^{-1}M = \left\{ \frac{m}{s} : \ m \in M, \ s \in S \right\}.$$

En particular, $S^{-1}M$ es un $S^{-1}R$-módulo.

Proposición 1.12. *Si S es multiplicativo, entonces $S^{-1}R$ es un R-módulo plano.*

Definición 1.8. Si $S = R \setminus \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p} \in Spec(R)$, el módulo $S^{-1}M$ es denotado $M_{\mathfrak{p}}$. Entonces $M_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}} \otimes M$ como $R_{\mathfrak{p}}$ módulos y

$$(M \otimes_R N)_{\mathfrak{p}} \simeq M_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}}. \tag{1.1}$$

Donde el último isomorfismo se sigue del hecho que para cualquier $S \subseteq R$ multiplicativo, el siguiente homomorfismo:

$$\begin{array}{cccccc} f: & S^{-1}M & \otimes_{S^{-1}R} & S^{-1}N & \longrightarrow & S^{-1}(M \otimes_R N) \\ & \dfrac{m}{s} & \otimes_{S^{-1}R} & \dfrac{n}{r} & \longmapsto & \dfrac{m \otimes_R n}{rs} \end{array}$$

es un isomorfismo de $S^{-1}R$-módulos. En particular si $S = R\backslash\mathfrak{p}$ tenemos la conclusión 1.1.

Proposición 1.13. *Sea M un R-módulo. Son equivalentes:*

(**1**) $M = 0$.

(**2**) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ *para todo* $\mathfrak{p} \in Spec\,(R)$.

(**3**) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ *para todo* $\mathfrak{m}$ *maximal en* $Spec(R)$.

Luego $\phi : M \to N$ un homomorfismo de R-módulos, es inyectivo si y solo si $\phi_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ es inyectivo para todo $\mathfrak{p} \in Spec(R)$, en particular para los ideales maximales.

Proposición 1.14. *Sea $M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\varphi} P$ una sucesión de R-módulos, entonces ella es exacta si y solo si $M_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\phi_{\mathfrak{m}}} N_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{m}}} P_{\mathfrak{m}}$ es exacta para todo $\mathfrak{m}$ maximal si y solo si $M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\phi_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} P_{\mathfrak{p}}$ es exacta para todo $\mathfrak{p} \in Spec(R)$.*

Proposición 1.15. *Si $f : M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos y $f_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$ es un isomorfismo, para todo $\mathfrak{p} \in SpecR$, entonces f es un isomorfismo.*

Capítulo 2

Grupo de Picard

En este capitulo estudiaremos el grupo de Picard de un anillo conmutativo R con unidad y daremos algunos ejemplos de como calcular este grupo, así como algunos resultados interesantes que caracterizan dicho grupo.
Iniciamos presentando algunos resultados preliminares sobre módulos proyectivos que serán usados para la construcción de tal grupo.

2.1. Módulos Proyectivos

Un submódulo de un R-módulo libre L puede no ser un sumando directo de L, por otro lado pueden existir sumandos directos de L que no son libres, basados en esto definimos un módulo proyectivo.

Definición 2.1. Un R-módulo P es llamado **proyectivo** si es sumando directo de un R-módulo libre.

En otras palabras, P es proyectivo si es submódulo de un R-módulo libre L y existe un submódulo Q de L tal que $P \oplus Q = L$. Note que Q también será un R-módulo proyectivo.
Se puede probar que todo R-módulo es imagen homomorfa de un R-módulo libre. Es decir, si M es un R-módulo entonces existe un R-módulo libre L y una proyección

$L \to M \to 0$. Los R-módulos proyectivos son aquellos para los cuales la sucesión exacta $L \to M \to 0$ se escinde.

Veamos una proposición que caracteriza los R-módulos proyectivos.

Proposición 2.1. *Sea P un R-módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(**1**) *P es proyectivo.*

(**2**) *Dado el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\sigma"] & \\ M \arrow[r, "\theta"'] & N \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

de R-módulos, donde θ es sobreyectiva, existe un homomorfismo de R-módulos $\sigma^* : P \to M$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dl, dashed, "\sigma^*"'] & \\ M \arrow[r, "\theta"'] & N \arrow[r] & O \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(**3**) *Si $0 \to M' \stackrel{\beta}{\to} M \stackrel{\alpha}{\to} N \to 0$ es una sucesión exacta de R-módulos, entonces la sucesión de R-módulos*

$$0 \to Hom_R(P, M') \stackrel{\beta_*}{\to} Hom_R(P, M) \stackrel{\alpha_*}{\to} Hom_R(P, N) \to 0$$

es exacta, donde β_* y α_* son dadas por $\beta_*(f) = \beta \circ f$ y $\alpha_*(g) = \alpha \circ g$, para todo $f \in Hom_R(P, M')$ y $g \in Hom_R(P, M)$.

(**4**) *Toda sucesión exacta de R-módulos $M \xrightarrow{\phi} P \to 0$ se escinde.*

(**5**) *Existen conjuntos $\{p_i : i \in I\}$ en P y $\{f_i : i \in I\}$ en $P^* = Hom_R(P, R)$ (conocido como el dual de P) tales que para todo $p \in P$, $p = \sum\limits_i f_i(p)\, p_i$ donde $f_i(p) = 0$ excepto para un número finito de índices.*

La condición (**5**) es conocida como el lema de la base dual y $\{f_i, p_i\}_{i \in I}$ es llamada la base dual de P.

Para la demostración de la Proposición 2.1 necesitamos el siguiente resultado.

Lema 2.2. *Sea X un conjunto no vacío, entonces existe un R-módulo libre con base X.*

Demostración. Sea X un conjunto no vacío. Se define el R-módulo libre $\bigoplus_X R$ que es el conjunto de aplicaciones de X en R tal que si $f \in \bigoplus_X R$, entonces $f(x) = 0$ salvo para una cantidad finita de x, adicionalmente definimos la suma y el producto por escalar como sigue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(rf)(x) = rf(x).$$

Claramente $\bigoplus_X R$ es un R-módulo, además

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{u}: & X & \to & \oplus_X R \\ & x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

tal que $\overline{x}(x) = 1$ y $\overline{x}(y) = 0$ para $x \neq y$. Tome $f \in \bigoplus_X R$ y $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq X$ tal que $f(y) = 0$ si $y \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Entonces $f = \sum r_i \overline{x}_i$, donde $f(x_i) = r_i$, así $\overline{X} = \{\overline{x} : x \in X\}$ genera a $\bigoplus_X R$. Por otro lado, si $\sum r_i \overline{x}_i = 0$ implica que $r_i = 0$, entonces $\overline{X}$ es linealmente independiente.

Por lo tanto $\overline{X}$ es una base para $\bigoplus_X R$. ♠

Ahora si procedemos a demostrar la Proposición 2.1.

Demostración. ($\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2}$)

Considere el siguiente diagrama con θ sobreyectivo

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\sigma"] \arrow[dl, dashed, "\sigma^*"'] \\
M \arrow[r, "\theta"'] & N
\end{tikzcd}$$

Como P es sumando directo de un R-módulo libre L, existe un submódulo Q de L tal que $L = P \oplus Q$. Sea $\pi : L \to P$ la proyección canónica, consideremos la base $\{e_i : \ i \in I\}$ de L y sea $n_i = \sigma \circ \pi\,(e_i) \in N$ para cada $i \in I$. Como θ es sobre, existe $m_i \in M$ tal que $\theta\,(m_i) = n_i$, para cada $i \in I$.

Definimos $\tau : L \to M$ por

$$\tau\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i m_i,$$

donde ambas sumas son finitas. Note que τ es R-lineal y $\theta \circ \tau = \sigma \circ \pi$, por lo tanto

$$\sigma^* = \tau|_P .$$

($\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{3}$)

Considere la siguiente sucesión exacta

$$0 \to M' \overset{\beta}{\to} M \overset{\alpha}{\to} N \to 0,$$

y probemos que

$$0 \to Hom_R\,(P, M') \overset{\beta_*}{\to} Hom_R\,(P, M) \overset{\alpha_*}{\to} Hom_R\,(P, N) \to 0$$

es exacta.

Si $\beta_* (f) = 0$ para algún $f \in Hom_R (P, M')$, entonces $\beta \circ f (p) = 0$ para todo $p \in P$, luego $f (p) \in \ker \beta = \{0\}$ para todo $p \in P$. Luego $f = 0$, es decir β_* es inyectiva.

Sea $g \in Hom_R (P, M)$, si $g = \beta \circ f$ para algún $f \in Hom_R (P, M')$, tenemos que $\alpha_* (g) = \alpha \circ g = (\alpha \circ \beta) \circ f = 0$, luego $g \in \ker \alpha_*$. Esto muestra que $\beta_* (Hom_R (P, M')) \subseteq \ker \alpha_*$. Recíprocamente, sea $g \in \ker \alpha_*$, entonces $\alpha \circ g = \alpha_* (g) = 0$, así $\alpha \circ g (p) = 0$, para todo $p \in P$. Luego $g (p) \in \ker \alpha = \beta (M')$, para todo $p \in P$ y por lo tanto existe $x_p \in M'$ tal que $\beta (x_p) = g (p)$, para todo $p \in P$. Definimos $f : P \to M'$ por $f (p) = x_p \in M'$ tal que $\beta (x_p) = g (p)$, para todo $p \in P$. Note que $f \in Hom_R (P, M')$, además:

$$\beta_* (f) (p) = (\beta \circ f) (p) = \beta (f (p)) = \beta (x_p) = g (p) \text{ para todo } p \in P,$$

luego $g = \beta_* (f)$. Así, $g \in \beta_* (Hom_R (P, M'))$, entonces $\beta_* (Hom_R (P, M')) = \ker \alpha_*$. Solo falta ver que α_* es sobre, para esto sea $\gamma \in Hom_R (P, N)$, de esta forma tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\gamma"] & \\
M \arrow[r, "\alpha"] & N \arrow[r] & O
\end{tikzcd}$$

Por $(\mathbf{2})$ existe $\gamma_* \in Hom_R (P, M)$ tal que $\alpha\gamma_* = \gamma$, tenemos que $\alpha_* (\gamma_*) = \gamma$.

$(\mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{4})$

Supongamos que la sucesión de R-módulos $M \stackrel{\phi}{\to} P \to 0$ es exacta. Entonces,

$$0 \to N \stackrel{i}{\to} M \stackrel{\phi}{\to} P \to 0 \tag{2.1}$$

donde $N = \ker \phi$, luego es exacta. Por $(\mathbf{3})$ sabemos que

$$0 \to Hom_R (P, N) \stackrel{i_*}{\to} Hom_R (P, M) \stackrel{\phi_*}{\to} Hom_R (P, P) \to 0$$

es una sucesión exacta. Luego, dado $\mathrm{i}_{\mathrm{d}P} \in Hom_R (P, P)$ existe $\psi \in Hom_R (P, M)$ tal que:

$$\phi_* (\psi) = \mathrm{i}_{\mathrm{d}P} \Rightarrow \phi \circ \psi = \mathrm{i}_{\mathrm{d}P},$$

por lo tanto la sucesión dada por (2.1) es una sucesión exacta que escinde.

$(\mathbf{4} \Rightarrow \mathbf{5})$

Sea P generado por $\{p_i : \ i \in I\}$ como R-módulo. Sea L un R-módulo libre con base $\{e_i : \ i \in I\}$. Definimos el homomorfismo de R-módulos $\rho : L \to P$, tal que $\rho(e_i) = p_i$ para todo $i \in I$. Note que

$$L \xrightarrow{\rho} P \to 0$$

es exacta y escinde por $(\mathbf{4})$. Entonces existe un homomorfismo de R-módulos $\delta : P \to L$ tal que $\rho \circ \delta = \mathrm{i}_{\mathrm{d}P}$. Sea $\pi_i : L \to R$ la i-ésima proyección canónica, esto es

$$\pi_i \left(\sum_j \lambda_j e_j \right) = \lambda_i \ \forall i \in I.$$

Definimos $f_i : P \to R$ tal que $f_i = \pi_i \circ \delta$, para todo $i \in I$.

Note que $\{f_i : \ i \in I\} \subseteq P^*$. Ahora, para todo $p \in P$ tenemos:

$$\delta(p) = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I} f_i(p) \cdot e_i,$$

con $\lambda_i = f_i(p_i) = 0$ excepto para un número finito de indices i, además

$$p = \rho \circ \delta(p) = \rho \left(\sum_{i \in I} f_i(p) e_i \right) = \sum_{i \in I} f_i(p) \cdot \rho(e_i) = \sum_{i \in I} f_i(p) \cdot p_i.$$

$(\mathbf{5} \Rightarrow \mathbf{1})$

Sean P un R-módulo tal que $\{p_i : \ i \in I\} \subseteq P$ y $\{f_i : \ i \in I\} \subseteq P^*$ familias de elementos que satisfacen $(\mathbf{5})$ y por el Lema 2.2 existe L un R-módulo libre con base $\{e_i : \ i \in I\}$. Definimos el homomorfismo de R-módulos $\rho : L \to P$ tal que $\rho(e_i) = p_i$ para todo

$i \in I$. Además por hipótesis para todo $p \in P$:

$$\sum_{i \in I} f_i(p) \cdot p_i = p,$$

entonces la familia $\{p_i : \ i \in I\}$ genera P, por lo tanto $\rho : L \to P$ es sobreyectivo. Ahora, sea $\delta : P \to L$ el homomorfismo dado por:

$$\delta(p) = \sum_{i \in I} f_i(p) \cdot e_i.$$

Luego,

$$\rho \circ \delta(p) = \rho\left(\sum_{i \in I} f_i(p) \cdot e_i\right) = \sum_{i \in I} f_i(p) \cdot \rho(e_i) = \sum_{i \in I} f_i(p) \cdot p_i = p.$$

Es decir, $\rho \circ \delta = \mathrm{i_d}_P$, de donde $P \simeq \delta(P)$ y $L \simeq \delta(P) \oplus \ker(\rho)$, lo que completa la demostración. ♠

Decimos que P un R-módulo proyectivo es finitamente generado (denotado pfg) si P es sumando directo de un R-módulo libre finitamente generado.

Observación 2.1. Todo R-módulo pfg es plano.

Para ver esto sea P un R-módulo pfg, entonces por la Proposicion 2.1 P es sumando directo de un R-módulo libre y como es fg $L \simeq R^n$. Entonces P es plano ya que es sumando directo de un plano ya que R es plano. Ver [23].

Observación 2.2. Se puede mostrar que P es pfg, si y sólo si, P tiene base dual finita.

Sea P un R-módulo, la aplicación:

$$\phi : \ P \otimes P^* \to End_R(P)$$

donde $End_R(P) = Hom_R(P, P)$, definida por

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes f_i\right)(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) \cdot p_i \quad \forall p \in P,$$

es un homomorfismo de R-módulos.

Proposición 2.3. *Sea P un R-módulo, las siguientes son equivalentes:*

(**1**) *P es pfg.*

(**2**) *$P \otimes P^* \simeq End_R(P)$ vía ϕ.*

Demostración. Sea P un R-módulo pfg, por el item (**5**) de la Proposición 2.1 existe $\{p_i, f_i\}_{1 \leq i \leq n}$ base dual de P. Esto es, para todo $p \in P$ se cumple que

$$p = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) \cdot p_i.$$

Veamos que ϕ es sobreyectiva, para todo $\sigma \in End_R(P)$ tenemos que $f_i\sigma \in P^*$ y para todo $p \in P$

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes f_i\sigma\right)(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\sigma(p))\, p_i = \sigma(p).$$

Es decir, $\phi\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \otimes f_i\sigma\right) = \sigma$.

Veamos que ϕ es inyectiva, sea $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} q_j \otimes g_j \in P \otimes P^*$ tal que $\phi(\alpha) = 0$. Entonces:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} q_j \otimes g_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(q_j) \otimes p_i\right) \otimes g_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f_i(q_j)\, p_i \otimes g_j = \sum_{i=1}^{n} p_i \otimes \sum_{j=1}^{m} f_i(q_j)\, g_j$$

pero para cualquier $p \in P$,

$$\sum_{j=1}^{m} g(p)\, f_i(q_i) = f_i\left(\sum_{j=1}^{m} g_j(p)\, q_j\right) = f_i\left(\phi\left(\sum_{j=1}^{m} q_j \otimes g_j\right)(p)\right) = f_i(\phi(\alpha)(p)) = f_i(0) = 0.$$

Por lo tanto, $\sum\limits_{j=1}^{m} f_i(q_j)\, g_j = 0$ y $\alpha = \sum\limits_{j=1}^{n} p_i \otimes \sum\limits_{j=1}^{m} f_i(q_j)\, g_j = \sum\limits_{j=1}^{m} p_i \otimes 0 = 0$, entonces ϕ es un isomorfismo.

Recíprocamente, supongamos que $\phi : P \otimes P^* \to End_R(P)$ es un isomorfismo. Como ϕ es sobreyectiva existen $p_1, \ldots, p_n \in P$ y $f_1, \ldots, f_n \in P^*$ tales que:

$$\mathrm{i}_{\mathrm{d}P} = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes f_i\right)$$

como $p = \mathrm{i}_{\mathrm{d}P}(p)$, entonces:

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes f_i\right)(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p) \cdot p_i.$$

Por el item (**5**) de la Proposición 2.1 tenemos que P es pfg. ♠

Proposición 2.4. *Si P es un R-módulo pfg, entonces P^* es R-módulo pfg.*

Demostración. Como P es pfg existe Q tal que $P \oplus Q \simeq R^{(n)}$, con $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces:

$$P^* \oplus Q^* = Hom_R(P, R) \oplus Hom_R(Q, R) \simeq Hom_R(P \oplus Q, R) \simeq Hom_R(R^n, R) \simeq R^n.$$

Por lo tanto P^* es pfg. ♠

Definición 2.2. Una R-**álgebra** es un anillo A tal que A es un R-módulo.

Proposición 2.5. *Sean A y B R-álgebras. Si M es un A-módulo, entonces $M \otimes B$ es proyectivo sobre $A \otimes B$ si M es proyectivo sobre A.*

Demostración. Como M es proyectivo, existe una base dual $\{f_i, m_i\}_{i \in I}$ de M. De esta forma $\{f_i \otimes \mathrm{i}_{\mathrm{d}A},\ m_i \otimes \mathrm{i}_{\mathrm{d}R}\}$ forma una base dual para $M \otimes A$ sobre A, así $M \otimes A$ es un A-módulo proyectivo. ♠

Por lo tanto si M es proyectivo sobre R, entonces para toda R-álgebra B tenemos que $M \otimes B$ es proyectivo sobre B.

Ahora veamos el **tensor de Homomorfismos** que se define como sigue:

Sea R un anillo conmutativo y A, B R-álgebras. Sea M un A-módulo pfg y N un B-módulo pfg. Entonces, para todo A-módulo M' y todo B-módulo N' la aplicación

$$\psi: \quad Hom_A(M, M') \otimes_R Hom_B(N, N') \quad \rightarrow \quad Hom_{A\otimes_R B}(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

dada por $\psi(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ es un homomorfismo de R-módulos. Ver [8, Pag 14].

Corolario 2.6. *Para alguna R-álgebra A y N R-módulo pfg tenemos el isomorfismo de R-módulos*

$$A \otimes_R Hom_R(N, N') \simeq Hom_A(A \otimes_R N, A \otimes_R N')$$

con N' un R-módulo.

Demostración. Usando el tensor de homomorfismos con $M = M' = A$ y $B = R$ se sigue el resultado. ♠

Proposición 2.7. *Sea R un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y M un R-módulo pfg. Suponga que $m_1 + \mathfrak{m}M, \ \ldots, \ m_n + \mathfrak{m}M$ es una base del módulo libre ${}^{M}/_{\mathfrak{m}M}$ sobre ${}^{R}/_{\mathfrak{m}}$. Entonces $m_1, \ldots, m_n$ es una base para M sobre R.*

Demostración. Sea $\varphi : R^n \rightarrow M$ definida por $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i m_i$, como $m_1 + \mathfrak{m}M, \ \ldots, \ m_n + \mathfrak{m}M$ genera a $M/\mathfrak{m}M$, por la V1 del Lema de Nakayama, aplicado al módulo ${}^{M}/_{(Rm_1+Rm_2+\cdots+Rm_n)}$ concluimos que es nulo y tenemos que φ es sobre, entonces:

$$Rm_1 + Rm_2 + \cdots + Rm_n = M.$$

Ahora, supongamos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in ker\varphi$, entonces $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i m_i = 0$, pero también

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (m_i + \mathfrak{m}M) = 0 \text{ en } M/\mathfrak{m}M.$$

Entonces cada $\alpha_i \in \mathfrak{m}$ para $1 \leq i \leq n$, ya que $\{m_i + \mathfrak{m}M\}_{i=1}^{n}$ es libre sobre $R/\mathfrak{m}$, así

$ker\varphi \subset \mathfrak{m}R^n$. Como M es proyectivo tenemos:

$$0 \to ker\varphi \to R^n \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

es exacta y escinde, entonces existe un submódulo L de R^n tal que $L \oplus ker\varphi = R^n$. En consecuencia,

$$ker\varphi \subset \mathfrak{m}R^n \cap ker\varphi = (\mathfrak{m} \cdot ker\varphi \oplus \mathfrak{m}L) \cap ker\varphi = \mathfrak{m} \cdot ker\varphi,$$

ya que $\mathfrak{m}L \cap \ker\varphi = 0$. Pero $\ker\varphi$ es un sumando directo de R^n, entonces $\ker\varphi$ es finitamente generado y como $\mathfrak{m}\ker\varphi = \ker\varphi$ nuevamente por el Lema de Nakayama V1, tenemos que $\ker\varphi = \{0\}$. Por lo tanto φ es un isomorfismo. ♠

2.2. Grupo de Picard

Ahora buscamos introducir el concepto de rango en un módulo proyectivo, Supongamos que M es un R-módulo proyectivo finitamente generado, dado $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ trabajaremos con el $R_\mathfrak{p}$-módulo $M_\mathfrak{p}$.
Por las Proposiciones 2.5 y 2.7, $M_\mathfrak{p} \simeq M \otimes_R R_\mathfrak{p}$ es un $R_\mathfrak{p}$-módulo libre fg, entonces existe un único entero no negativo $n_\mathfrak{p}$ tal que $M \otimes_R R_\mathfrak{p} \simeq R_\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}$, llamamos a $n_\mathfrak{p}$ el **$\mathfrak{p}$-rango de** M y lo denotamos $\mathrm{rk}_\mathfrak{p}(M)$.
Para n entero no negativo, llamamos a n **el rango de** M y lo denotamos $\mathrm{rk}(M) = n$ si y solo si $\mathrm{rk}_\mathfrak{p}(M) = n$, para todo $\mathfrak{p} \in Spec(R)$, es decir, podemos definir el rango de M si todos los $\mathfrak{p}$-rangos son iguales.

Observación 2.3. Denotaremos $\mathrm{rk}(M)$ cuando se sobreentienda que M es un R-módulo, en caso contrario se dará a entender mediante la notación $\mathrm{rk}_R(M)$.

Veamos algunos resultados sobre el rango de módulos pfg que serán importantes para nuestro trabajo.

Proposición 2.8. *Sean P y Q R-módulos pfg. Luego $P \otimes Q$ es pfg, además si* $\operatorname{rk}(P) = n$ *y* $\operatorname{rk}(Q) = m$*, entonces* $\operatorname{rk}(P \otimes Q) = nm$.

Demostración. Como P es proyectivo, existe P' tal que $P \oplus P' \simeq R^n$, así tenemos que

$$(P \oplus P') \otimes Q \simeq (P \otimes Q) \oplus (P' \otimes Q),$$

además como $(P \otimes Q) \oplus (P' \otimes Q) \simeq (P \oplus P') \otimes Q \simeq R^n \otimes Q \simeq Q^{n'}$ y Q es pfg entonces cualquier sumando directo de Q también es pfg.
Ahora, como $\operatorname{rk}(P) = n$ y $\operatorname{rk}(Q) = m$, para todo $\mathfrak{p} \in SpecR$ tenemos:

$$P_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}}^n \quad \text{y} \quad Q_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}}^m,$$

entonces

$$(P \otimes Q)_{\mathfrak{p}} \simeq P_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} Q_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}}^n \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} R_{\mathfrak{p}}^m \simeq R_{\mathfrak{p}}^{nm}.$$

Por lo tanto $\operatorname{rk}(P \otimes Q) = nm$. ♠

Proposición 2.9. *Sea M un R-módulo pfg tal que* $\operatorname{rk}(M)$ *está definido, entonces para cualquier R-álgebra S,*

$$\operatorname{rk}_S(M \otimes_R S) = \operatorname{rk}_R(M).$$

Demostración. Sea $\mathfrak{B}$ un ideal primo de S. Note que $\mathfrak{p} = \{x \in R : \ x \cdot 1_R \in \mathfrak{B}\}$ es ideal primo de R. Ahora, $S_{\mathfrak{B}}$ es una $R_{\mathfrak{p}}$-álgebra ya que

$$(R \setminus \mathfrak{p}) \cdot 1_S \subseteq S \setminus \mathfrak{B}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
(M \otimes_R S) \otimes_S S_{\mathfrak{B}} &\simeq M \otimes_R (S \otimes_S S_{\mathfrak{B}}) \\
&\simeq M \otimes_R S_{\mathfrak{B}} \\
&\simeq M \otimes_R \left(R_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} S_{\mathfrak{B}}\right) \\
&\simeq (M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} S_{\mathfrak{B}} \\
&\simeq R_{\mathfrak{p}}^{(n)} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} S_{\mathfrak{B}} \\
&\simeq S_{\mathfrak{B}}^{(n)},
\end{aligned}$$

donde $n = \operatorname{rk}(M)$. Como $\mathfrak{B} \in SpecR$ es arbitrario se tiene que $\operatorname{rk}_S (M \otimes_R S)$ está definido y $\operatorname{rk}_S (M \otimes_R S) = \operatorname{rk}_R (M)$. ♠

Sea $a \in R$, entonces $S = \langle a \rangle$ es multiplicativo, luego $S^{-1}M$ será denotada $M_{(a)}$, y será un $R_{(a)}$-módulo.

Proposición 2.10. *Sea M un R-módulo pfg y $\mathfrak{p} \in SpecR$. Entonces existe $\alpha \in R \setminus \mathfrak{p}$ tal que*

$$M \otimes_R R_{(\alpha)} \simeq M_{(\alpha)}$$

es libre como $R_{(\alpha)}$-módulo.

Demostración. Sabemos que $M_{\mathfrak{p}}$ es libre de rango finito. Sean $\frac{m_1}{\alpha_1}, \frac{m_2}{\alpha_2}, \cdots, \frac{m_n}{\alpha_n}$ una base de $M_{\mathfrak{p}}$ sobre $R_{\mathfrak{p}}$, pero como $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \cdots, \frac{1}{\alpha_n} \in \mathcal{U}(R_{\mathfrak{p}})$ tenemos que $\frac{m_1}{1}, \frac{m_2}{1}, \cdots, \frac{m_n}{1}$ también forman una base de $M_{\mathfrak{p}}$ sobre $R_{\mathfrak{p}}$. Defina el homomorfismo $\varphi : R^n \to M$ tal que

$$\varphi((p_1, \ldots, p_n)) = \sum_{i=1}^{n} p_i m_i$$

obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \ker \varphi \to R^n \xrightarrow{\varphi} M \to \operatorname{coker}\varphi \to 0. \tag{2.2}$$

Como $R_{\mathfrak{p}}$ es plano, entonces tensorisando por $R_{\mathfrak{p}}$ tenemos

$$0 \to (\ker \varphi)_{\mathfrak{p}} \to [R^n]_{\mathfrak{p}} \overset{\varphi_{\mathfrak{p}}}{\to} M_{\mathfrak{p}} \to (\text{coker}\varphi)_{\mathfrak{p}} \to 0$$

pero como habíamos visto $\left\{\frac{m_1}{1}, \frac{m_2}{1}, \cdots, \frac{m_n}{1}\right\}$ es base, $\varphi_{\mathfrak{p}}$ es isomorfismo, luego $(\ker \varphi)_{\mathfrak{p}} = (\text{coker}\varphi)_{\mathfrak{p}} = 0$, además como M es fg, entonces cokerφ es un módulo fg. Para todo $\mathfrak{p} \in SpecR$ se cumple que $(\text{coker}\varphi)_{\mathfrak{p}} = 0$, entonces existe $\beta \in R \backslash \mathfrak{p}$ tal que $\beta\,[\text{coker}\varphi] = 0$, luego $[\text{coker}\varphi]_{(\beta)} = 0$. Así por (2.2) tenemos:

$$0 \to (\ker \varphi)_{(\beta)} \to [R^n]_{(\beta)} \overset{\varphi_{(\beta)}}{\to} M_{(\beta)} \to 0. \tag{2.3}$$

Como $M_{(\beta)}$ es proyectivo sobre $R_{(\beta)}$, tenemos que la sucesión (2.3) escinde, entonces $[\ker \varphi]_{(\beta)}$ es sumando directo de $R^n_{(\beta)}$, luego $[\ker \varphi]_{(\beta)}$ debe ser fg sobre $R_{(\beta)}$. Además, $R_{\mathfrak{p}}$ es una $R_{(\beta)}$-álgebra , entonces:

$$\begin{aligned}
[\ker \varphi]_{(\beta)} \otimes_{R_{(\beta)}} R_{\mathfrak{p}} &\simeq \left(\ker \varphi \otimes_R R_{(\beta)}\right) \otimes_{R_{(\beta)}} R_{\mathfrak{p}} \\
&\simeq \ker \varphi \otimes_R \left(R_{(\beta)} \otimes_{R_{(\beta)}} R_{\mathfrak{p}}\right) \\
&\simeq \ker \varphi \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \simeq [\ker \varphi]_{\mathfrak{p}} = 0,
\end{aligned}$$

para todo $\mathfrak{p} \in SpecR$. Por lo tanto existe $\frac{\mu}{\beta^*} \in R_{(\beta)} \backslash \mathfrak{p}R_{(\beta)}$ (recuerde que $\mathfrak{p}R_{(\beta)}$ es el maximal de $R_{(\beta)}$) tal que $\frac{\mu}{\beta^*}\,[\ker \varphi]_{(\beta)} = 0$, pero como $\frac{1}{\beta^*}$ es unidad de $R_{(\beta)}$, tenemos que

$$\mu\,[\ker \varphi]_{(\beta)} = 0.$$

Note que $\left[R_{(\beta)}\right]_{\left(\frac{\mu}{1}\right)} \simeq R_{(\mu\beta)}$, entonces de (2.3) tenemos

$$0 \to [R^n]_{(\mu\beta)} \overset{\varphi}{\to} M_{(\mu\beta)} \to 0$$

es exacta, lo que implica que $M_{(\alpha)}$ sea un $R_{(\alpha)}$-módulo libre, donde $\alpha = \mu\beta \in R \setminus \mathfrak{p}$. ♠

Corolario 2.11. *Sea M un R-módulo pfg. La aplicación:*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & SpecR & \to & \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\} \\ & \mathfrak{p} & \mapsto & \operatorname{rk}_{\mathfrak{p}}(M) \end{array}$$

es continua, donde los enteros no negativos están dados por la topología discreta y $SpecR$ con la topología de Zariski.

Demostración. Sea $\mathfrak{q} \in Spec(R)$, por la proposición anterior existe $\beta \in R \setminus \mathfrak{q}$ tal que $M_{(\beta)}$ es libre de rango m sobre $R_{(\beta)}$. Entonces

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{p}} \otimes_R M &\simeq R_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{(\alpha)}} \left(R_{(\alpha)} \otimes_R M\right) \\ &\simeq R_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{(\alpha)}} \left[R_{(\alpha)}\right]^m \\ &\simeq R_{\mathfrak{p}}^m. \end{aligned}$$

Así $\operatorname{rk}_{\mathfrak{p}}(M) = m$. Suponga que existe $\mathfrak{p} \in SpecR$ tal que $\operatorname{rk}_{\mathfrak{p}}(M) = n$, por la Proposición 2.10 existe $\alpha \in R \setminus \mathfrak{p}$ con $M_{(\alpha)}$ libre de rango n sobre $R_{(\alpha)}$, por lo anterior su rango será n. Considere $SpecR \setminus V(\alpha)$ que es abierto y contiene a $\mathfrak{p}$ (donde $V(\alpha) = \{\mathfrak{p} \in SpecR : \ \mathfrak{p} \supseteq (\alpha)\}$ un cerrado en la topología de Zariski).
Ahora si $\mathfrak{q} \in SpecR \setminus V(\alpha)$, $\operatorname{rk}_{\mathfrak{q}}(M) = \operatorname{rk}_{\mathfrak{p}}(M) = n$, entonces la preimagen de $\{n\}$ es abierto en $SpecR$ pues contiene a $SpecR \setminus V(\alpha)$, por lo tanto ψ es continua. ♠

Proposición 2.12. *Sea R un anillo conmutativo cuyos idempotentes son solo 0 y 1. Entonces, para cualquier R-módulo M pfg,* $\operatorname{rk}(M)$ *está bien definido.*

Demostración. Si los únicos idempotentes son 0 y 1, $SpecR$ es conexo, por lo tanto como $\{n\}$, para $n \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}$ es abierto y cerrado, su preimagen es abierta y cerrada, es decir esta será $SpecR$ o $\emptyset$.
Por lo tanto, solo existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\psi^{-1}(n_0) = SpecR$, así $\operatorname{rk}(M) = n_0$. ♠

Dado un módulo proyectivo P pfg, veamos una relación que tiene P con P^* cuando tiene rango 1.

Definición 2.3. Sea M un R-módulo, decimos que M es **fiel** si para cualquier $a, b \in R$ existe $x \in M$ tal que $ax \neq bx$.

Observación 2.4. Sea P un R-módulo pfg tal que $\operatorname{rk}(P)$ está bien definido y $\operatorname{rk}(P) \neq 0$, entonces P es fiel.

Proposición 2.13. *Sea P un módulo proyectivo, fiel y finitamente generado sobre el anillo R. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(**1**) $\operatorname{rk}(P) = 1$.

(**2**) $\operatorname{rk}(P^*) = 1$.

(**3**) $Hom_R(P, P) = End_R(P) \simeq R$ *como anillos.*

(**4**) $P^* \otimes P \simeq R$ *como R-módulos.*

Demostración. $(\mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{2})$

Para todo $\mathfrak{p} \in SpecR$ por el Corolario 2.6, tenemos que

$$R_{\mathfrak{p}} \otimes Hom_R(P, R) \simeq Hom_{R_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}).$$

Ahora, por la Proposición 2.7 cualquier $R_{\mathfrak{p}}$-módulo fg es libre, entonces $P_p \simeq R_{\mathfrak{p}}^n$. Además

$$(P^*)_{\mathfrak{p}} = Hom_{R_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}) \simeq Hom_{R_{\mathfrak{p}}}\left(R_{\mathfrak{p}}^n, R_{\mathfrak{p}}\right) \simeq R_{\mathfrak{p}}^n,$$

entonces $\operatorname{rk}(P) = 1$ si y sólo si $\operatorname{rk}(P^*) = 1$.

$(\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{3})$

Defina el homomorfismo de anillos

$$\begin{array}{rccc} \phi: & R & \to & Hom_R(P, P) \\ & r & \mapsto & l_r \end{array} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{rccc} l_r: & P & \to & P \\ & x & \mapsto & rx \end{array}$$

Por hipótesis para todo $\mathfrak{p} \in SpecR$, $P_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}}$, entonces localizando ϕ por $\mathfrak{p}$ tenemos:

$$R_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\phi_{\mathfrak{p}}} Hom_{R_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}) \simeq Hom_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}) \simeq R_{\mathfrak{p}}$$

que es un isomorfismo para todo $\mathfrak{p} \in SpecR$, por lo tanto ϕ es un isomorfismo.

(3 ⇒ 4)

Por Proposición 2.3 se sigue el resultado.

(4 ⇒ 1)

Note que

$$R_{\mathfrak{p}} \simeq (R_{\mathfrak{p}} \otimes_R R) \simeq (R_{\mathfrak{p}} \otimes (P^* \otimes P)) \tag{2.4}$$

pero tenemos

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{p}} \otimes (P^* \otimes P) &\simeq (R_{\mathfrak{p}} \otimes P^*) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} (R_{\mathfrak{p}} \otimes P) \\ &\simeq (R_{\mathfrak{p}} \otimes Hom_R(P, R)) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} (R_{\mathfrak{p}} \otimes P) \\ &\simeq Hom_{R_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} P_{\mathfrak{p}} \\ &\simeq P_{\mathfrak{p}}^* \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} P_{\mathfrak{p}} \overset{(2.4)}{\simeq} R_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $\mathfrak{p} \in SpecR$ tenemos que $\operatorname{rk}_{R_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}) = 1$, entonces $\operatorname{rk}(P) = 1$. ♠

Ahora, se define la relación de equivalencia $P \sim Q$ si y solo si $P \simeq Q$ como R-módulos (es claro que $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva por tratarse de isomorfismos), en particular si P cumple con las condiciones de la Proposición 2.13, tenemos:

$$[P] = \{Q|\ Q \simeq P \text{ como } R\text{-módulos}\}$$

Sean P y Q R-módulos proyectivos, finitamente generados, si $P \simeq P'$ y $Q \simeq Q'$ como R-módulos, entonces:

$$P \otimes Q \simeq P' \otimes Q',$$

como R-módulos. Por lo tanto, si definimos

$$[P] \cdot [Q] = [P \otimes Q], \tag{2.5}$$

de la Proposición 2.13 se sigue que está bien definido y es cerrado por Proposición 2.8, en particular:

$$[P] \cdot [P^*] = [P \otimes P^*] = [R] \tag{2.6}$$

Entonces, definimos el **grupo de Picard** $(\mathbf{Pic}(R), \cdot)$ como el conjunto de las clases de isomorfismos de R-módulos proyectivos finitamente generados de rango 1. Como se vio, se denota cada clase de isomorfismos del módulo P por $[P]$. La operación "$\cdot$"del grupo se define en (2.5) y por las propiedades del tensor $\mathbf{Pic}\,(R)$ es un grupo abeliano, además por la Proposición 2.13, tenemos que el inverso de $[P]$ es:

$$[P]^{-1} = [P^*]$$

y el elemento neutro es $[R]$ ya que $[P] \cdot [R] = [P \otimes R] = [P]$, para todo $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$. Veamos el siguiente resultado:

Proposición 2.14. *Sea R un anillo conmutativo tal que existen ideales P y Q con $R = P \oplus Q$. Entonces,* $\mathbf{Pic}\,(R) \simeq \mathbf{Pic}\,(P) \times \mathbf{Pic}\,(Q)$.

Demostración. Escribamos $1_R = e_1 + e_2$, con $e_1 \in P$ y $e_2 \in Q$, entonces e_1 y e_2 son idempotentes ortogonales con $P = Re_1$ y $Q = Re_2$, siendo P y Q anillos con unidad e_1 y e_2, respectivamente. Sea M un R-módulo y defina $M_1 = MP = Me_1$ y $M_2 = MQ = Me_2$, por lo tanto $M = M_1 \oplus M_2$ ya que para todo $m \in M$ tenemos:

$$m = m1_R = m\,(e_1 + e_2) = me_1 + me_2 \in M_1 + M_2.$$

Ademas, si $m \in M_1 \cap M_2$, entonces $m = me_1 = me_2$, multiplicando por e_1 tenemos:

$$m = me_1 = me_2 = 0,$$

entonces $M = M_1 \oplus M_2$. Observe ahora

$$M \otimes_R P = M \otimes_R Re_1 = M \otimes_R e_1 \simeq Me_1 = M_1$$

$$M \otimes_R Q = M \otimes_R Re_2 = M \otimes_R e_2 \simeq Me_2 = M_2,$$

por lo tanto

$$M \simeq (M \otimes_R P) \oplus (M \otimes_R Q) \,. \tag{2.7}$$

Considere ahora $[M] \in \mathbf{Pic}\,(R)$, entonces $[M \otimes_R P] \in \mathbf{Pic}\,(P)$ y $[M \otimes_R Q] \in \mathbf{Pic}\,(Q)$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbf{Pic}\,(R) & \to & \mathbf{Pic}\,(P) \times \mathbf{Pic}\,(Q) \\ & [M] & \mapsto & ([M \otimes_R P]\,, [M \otimes_R Q])\,. \end{array}$$

Ahora, sean M_1 un P-módulo y M_2 un Q-módulo, entonces $M = M_1 \oplus M_2$ es un R-módulo vía:

$$(p + q) \cdot (m_1 + m_2) = pm_1 + qm_2.$$

Es decir, si $[M_1] \in \mathbf{Pic}\,(P)$ y $[M_2] \in \mathbf{Pic}\,(Q)$, entonces $[M] \in \mathbf{Pic}\,(R)$. Así, podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \varphi^*: & \mathbf{Pic}\,(P) \times \mathbf{Pic}\,(Q) & \to & \mathbf{Pic}\,(R) \\ & ([M_1]\,, [M_2]) & \mapsto & [M_1 \oplus M_2]\,. \end{array}$$

Vamos a probar que φ^* es la inversa de φ. Sea $[M] \in \mathbf{Pic}\,(R)$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi^*\varphi\,([M]) &= \varphi^*\,([M \otimes_R P]\,, [M \otimes_R Q]) \\ &= [(M \otimes_R P) \oplus (M \otimes_R Q)] \\ &\overset{(2.7)}{=} [M]\,. \end{aligned}$$

Ahora, para $[M_1] \in \mathbf{Pic}\,(P)$ y $[M_2] \in \mathbf{Pic}\,(Q)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi\varphi^*\,([M_1]\,, [M_2]) &= \varphi\,([M_1 \oplus M_2]) \\ &= ([(M_1 \oplus M_2) \otimes_R P]\,, [(M_1 \oplus M_2) \otimes_R Q])\,. \end{aligned}$$

Además, si vemos a M_1 y M_2 como R-módulos vía las acciones (teniendo $r = p + q \in R$, con $p \in P$ y $q \in Q$):

$$r \cdot m_1 = (p+q) \cdot m_1 = pm_1, \text{ para } m_1 \in M_1,$$

$$r \cdot m_2 = (p+q) \cdot m_2 = pm_2, \text{ para } m_2 \in M_2.$$

Luego tenemos

$$(M_1 \oplus M_2) \otimes_R P \simeq (M_1 \otimes_R P) \oplus (M_2 \otimes_R P).$$

Pero como M_1 es un P-módulo y M_2 es un Q-módulo tenemos

$$M_1 \otimes_R P = M_1 \otimes_P P \simeq M_1,$$

$$M_2 \otimes_R P = M_2 e_2 \otimes_R e_1 P = M_2 e_2 e_1 \otimes_R P = 0,$$

luego

$$(M_1 \oplus M_2) \otimes_R P \simeq M_1.$$

Análogamente, $(M_1 \oplus M_2) \otimes_R Q \simeq M_2$, por lo tanto:

$$\varphi\varphi^* ([M_1], [M_2]) = ([M_1], [M_2]).$$

Concluimos que $\mathbf{Pic}(R) \simeq \mathbf{Pic}(P) \times \mathbf{Pic}(Q)$. ♠

2.3. Ideales Fraccionarios en $\mathbf{Pic}(R)$

Sea $S \supseteq R$ una extensión de anillos, si P y Q son R-submódulos de S, entonces:

- Definimos $P^{-1} = \{s \in S : \; sP \subseteq R\}$.
- Definimos PQ como sigue:

$$PQ = \left\{ \sum_{i=1}^{k} p_i q_i \;:\; k \in \mathbb{N},\; p_i \in P,\; q_i \in Q \right\}. \tag{2.8}$$

por lo tanto PQ es R-submódulo de S, en particular $PR = RP = P$.

- Note que para todo P es posible definir P^{-1}, pero no necesariamente $PP^{-1} = R$, como veremos posteriormente en el Ejemplo 2.1.

Lema 2.15. *Sea P un R-submódulo de S, las siguientes son equivalentes:*

(**1**) *Existe un R-submódulo Q de S tal que $PQ = R$.*

(**2**) *$PP^{-1} = R$.*

Si (**1**) *o* (**2**) *se cumplen, decimos que P es un R-submódulo invertible de S.*

Demostración. (**2** ⇒ **1**) Es claro, ya que P^{-1} siempre existe y satisface (**1**) por hipótesis. (**1** ⇒ **2**) Dado que existe Q un R-submódulo de S tal que $PQ = R$, luego $Q \subseteq P^{-1}$. Ahora por definición de P^{-1} tenemos que $PP^{-1} \subseteq R$, y por lo visto $PP^{-1} \supseteq PQ = R$, esto implica que $PP^{-1} = R$. ♠

Proposición 2.16. *Sea P un R-submódulo invertible de S. Entonces*

(**1**) *P es un R-módulo pfg.*

(**2**) *Para M un R-submódulo de S, la aplicación $\alpha : P \otimes_R M \to PM$ vía $\alpha\left(\sum p_i \otimes m_i\right) = \sum p_i m_i$ es un isomorfismo de R-módulos.*

(**3**) *$P^* \simeq P^{-1}$ como R-módulos.*

(**4**) *P es libre si y sólo si $P = sR$ para algún $s \in S$ (necesariamente una unidad de S).*

Demostración. Sea $Q = P^{-1}$. Como $PQ = R$, existe una combinación

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \quad p_i \in P,\ q_i \in Q. \tag{2.9}$$

(**1**) Fije $i \in \{1, \ldots, n\}$ y defina $f_i \in P^*$ como sigue

$$f_i\,(p) = pq_i \tag{2.10}$$

para todo $p \in P$, $q_i \in Q$, entonces:

$$p = \sum_{i=1}^{n} pp_iq_i = \sum_{i=1}^{n} p_if_i(p),$$

por lo tanto, P es un R-módulo pfg, con base dual $\{f_i, p_i\}_{i=1}^{n}$.
(**2**) Note que $P \otimes_R M$ tiene estructura de R-módulo vía la acción:

$$(p \otimes m) r = (pr) \otimes m = p \otimes (mr).$$

Definimos $\alpha : P \otimes_R M \to PM$ tal que $\alpha\left(\sum a_i \otimes m_i\right) = \sum a_im_i$. Claramente α es un epimorfismo, para ver que es isomorfismo, como en la prueba de (**1**), P es generado por $\{p_1, \ldots, p_n\}$, entonces $P \otimes_R M = \sum p_i \otimes M$ y $z \in P \otimes_R M$ se puede escribir $z = \sum p_i \otimes m_i$ para algunos $m_1, \ldots, m_n \in M$, supongamos que $\alpha(z) = 0 = \sum p_im_i$, así por 2.9

$$z = \sum_i \left(p_i \sum_j p_jq_j\right) \otimes m_i = \sum_j p_j \otimes \sum_i (p_iq_j)\, m_i.$$

Pero fijando j, tenemos que $\sum\limits_i p_iq_jm_i = q_j \sum\limits_i p_im_i = 0$, entonces $z = 0$, por lo tanto α es un isomorfismo.
(**3**) Defina

$$\begin{array}{rccc} \beta : & Q & \to & P^* \\ & q & \mapsto & \beta_q \end{array} \tag{2.11}$$

donde $\beta_q(p) = pq$, para todo $p \in P$, $q \in Q$. Si $\beta_q = 0$, entonces $q \in qR = qPQ = 0$, por lo tanto β es inyectiva.
Ahora, usando (2.10) tenemos que $f_i = \beta_{q_i}$, entonces

$$P^* = \sum_i Rf_i = \beta\left(\sum_i Rq_i\right),$$

por lo tanto β es sobreyectiva.
(**4**) Supongamos $P = sR$, donde $s \in S$. Entonces $R = PQ = sQ$, por lo tanto existe

$q \in Q$ tal que $sq = 1$, luego $s \in \mathcal{U}(S)$. En particular, P es libre con base $\{s\}$. Ahora, como P es libre tenemos que $P \simeq R^n$ para un n finito ya que R es conmutativo y P es pfg, por (**3**) tenemos $Q \simeq P^* \simeq R^n$. Entonces:

$$R = PQ \simeq P \otimes_R Q \simeq R^n \otimes R^n \simeq R^{n^2}.$$

Así, si $R \simeq R^{n^2}$, por lo tanto $n^2 = 1$, luego $n = 1$ y existe $\phi : R \to P$ un isomorfismo de R-módulos, y se tiene que

$$P = \phi(R) = \phi\left(ss^{-1}R\right) = s\phi\left(s^{-1}R\right) = s\phi(R) \quad \text{donde } s \in \mathcal{U}(S). \qquad \spadesuit$$

Veamos ahora unos ejemplos que nos serán bastante útiles.

Ejemplo 2.1. *Sea $R = \mathbb{Z}[\theta]$ donde $\theta = \sqrt{5}$. Note que R es un subanillo propio del anillo $S = \mathbb{Z}[\tau]$ de enteros algebraicos en el campo $\mathbb{Q}(\theta)$, donde τ corresponde a "la proporción áurea", es decir $(\theta + 1)/2$. Veamos como hallar $\mathfrak{m}^{-1}$ para el R-ideal $\mathfrak{m} = \langle 2, 1 + \theta \rangle$. Note que los elementos de $\mathfrak{m}^{-1}$ deben ser de la forma $(a + b\theta)/2$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces, si $(a + b\theta)/2 \in \mathfrak{m}^{-1}$ por definición se cumple que:*

$$(1 + \theta)(a + b\theta)/2 = [(a + 5b) + (a + b)\theta]/2 \in R,$$

por lo tanto a debe ser congruente con b módulo 2. Luego, por lo visto previamente y como se definió S tenemos que $\mathfrak{m}^{-1} = S$, entonces:

$$\mathfrak{m} = 2R + 2R\tau = 2S$$

pero como S es un anillo tenemos

$$\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = 2S \cdot S = 2S = \mathfrak{m} \subsetneq R.$$

Es decir, $\mathfrak{m}$ no es invertible.

En los siguientes ejemplos ilustraremos ideales invertibles que no son principales:

Ejemplo 2.2. *Sea* $R = \mathbb{Z}[\theta]$ *con* $\theta = \sqrt{-5}$*, donde* R *es el anillo de enteros algebraicos en* $K = \mathbb{Q}(\theta)$*. Sea* $\tau = (\theta + 1)/2$ *y* $\mathfrak{m} = \langle 2, 1+\theta \rangle \subseteq R$*. Al igual que en el Ejemplo 2.1 tenemos que* $\mathfrak{m}^{-1}$ *está dado por* $S := R + R\tau$*, pero a diferencia del Ejemplo 2.1 aquí* S *no es un anillo, sólo un* R*-módulo. Entonces* $S = R + R\tau = \frac{1}{2}\mathfrak{m}$*, y así tenemos:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} &= \frac{1}{2}\mathfrak{m}^2 = \frac{1}{2}\left\langle 4, 2(1+\theta), 1 + 2\theta + \theta^2 \right\rangle \\ &= \langle 2, 1+\theta, \theta - 2 \rangle = R. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathfrak{m}$ *es invertible. Ahora, la ecuación* $\mathfrak{m}^2 = 2R$ *nos sirve para ver que* $\mathfrak{m}$ *no es ideal principal (por lo tanto tampoco es libre), ya que si* $\mathfrak{m} = \langle x + y\theta \rangle$ *para* $x, y \in \mathbb{Z}$ *tendríamos que* $2 = \alpha(x + y\theta)^2$ *para algún* $\alpha \in R$*. Tomando* N *la norma al cuadrado de los complejos* ($N(z) := z \cdot \overline{z}, \quad$ *para* $z \in \mathbb{C}$)*, tenemos:*

$$4 = N(\alpha)\, N(x + y\theta)^2 = N(\alpha)\left(x^2 + 5y^2\right)^2$$

que sólo es posible si $x = \pm 1$ *y* $y = 0$*, entonces* $\mathfrak{m} = \langle 1 \rangle = R$ *que es una contradicción, luego* $\mathfrak{m}$ *no es principal.*

Ejemplo 2.3. *Sea* $i = \sqrt{-1}$ *y considere el dominio:*

$$R = \mathbb{Z}[6i] = \mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} \cdot i \subset \mathbb{Z}[i] \subset K = \mathbb{Q}(i).$$

Es conocido que $\mathbb{Z}[i]$ *es DIP, pero estamos interesados en ver que* R *no es DIP. Sea* $\mathfrak{m} = \langle 3, 1+2i \rangle \subset K$ *ideal en* R*, note que* $\mathfrak{m}^2 = \langle 3, 2i \rangle$ *y* $\mathfrak{m}^4 = R$*, entonces* $\mathfrak{m}$ *es invertible con* $\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{m}^3$*. Veamos que* $\mathfrak{m}^2$ *(al igual que* $\mathfrak{m}$*) no es principal.*
Para esto, supongamos que $\mathfrak{m}^2$ *es principal, luego* $3\mathfrak{m}^2 = \langle 9, 6i \rangle \subset R$ *es un ideal principal, es decir* $3\mathfrak{m}^2 = (x + 6yi) \cdot R$ *para algunos* $x, y \in \mathbb{Z}$*. Entonces:*

$$9R = 9\mathfrak{m}^4 = (x + 6yi)^2 R,$$

pero tenemos que $9 = \alpha (x + 6yi)^2$ *para algún* $\alpha \in R$. *Nuevamente, tomando* N *la norma al cuadrado de los complejos tenemos que* $9^2 = N(\alpha)(x^2 + 36y^2)^2$, *por lo tanto* $y = 0$ *y* $x \in \{\pm 1, \pm 3\}$. *Pero eso implicaría que* $\langle 9, 6i \rangle = (x + 6yi) R$ *es* R *o* $3R$, *que resulta imposible. En conclusión,* $\mathfrak{m}^2$ *no es principal, así* R *no es DIP.*

Ahora nos interesa un tipo especial de ideal en R.

Definición 2.4. Sea $\mathfrak{m}$ un R-submódulo de S, decimos que $\mathfrak{m}$ es un ideal fraccionario de R, si existe $a \in R$ no nulo tal que $a\mathfrak{m} \subseteq R$.

Note que según la definición de ideal fraccionario, si $\mathfrak{m}$ es ideal fraccionario de R, entonces $a\mathfrak{m}$ es ideal de R. Además, si I es es ideal de R, él será ideal fraccionario de R.

Ahora, sea R un dominio con campo cociente $K = Q(R)$. Definimos $\mathbb{I}(R)$ el conjunto de todos los ideales fraccionarios de K. Sea $\mathbb{P}_r(R)$ el conjunto de los elementos de $\mathbb{I}(R)$ que son generados por un solo elemento, este conjunto corresponde al conjunto de los ideales principales fraccionarios.

De ahora hasta el final de esta sección R será un dominio de Dedekind, esto es, R noetheriano y cada $E \in \mathbb{I}(R)$ es proyectivo sobre R, ver [8, Pag 34].

Observación 2.5. Si R es un dominio de Dedekind, los ideales fraccionarios de R forman un grupo, ver [15, Pag 58].

Sea R un dominio de Dedekind, y $E_1 \in \mathbb{I}(R)$, veamos que $K \otimes_R E_1 \simeq K$, para esto defina:

$$\begin{array}{ccc} K \otimes_R E_1 & \stackrel{\psi}{\to} & K \\ \left(\dfrac{c}{d} \otimes \dfrac{a}{b} \right) & \mapsto & \dfrac{c \cdot a}{b \cdot d} \end{array}$$

así mismo, fijando $x \in E_1$ no nulo considere:

$$\begin{array}{ccc} K & \overset{\varphi}{\to} & K \otimes_R E_1 \\ \dfrac{r}{k} & \mapsto & \dfrac{r}{k} \cdot \dfrac{1}{x} \otimes x. \end{array}$$

Note que

$$\begin{aligned} \varphi\left(\psi\left(\frac{c}{d} \otimes \frac{a}{b}\right)\right) &= \varphi\left(\frac{c \cdot a}{d \cdot b}\right) \\ &= \varphi\left(\frac{c \cdot a}{d \cdot b} \cdot \frac{x}{x}\right) \end{aligned}$$

como $E_1 \in \mathbb{I}(R)$, existe $\alpha \in R$ tal que $\alpha E_1 \subseteq R$, así tenemos:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{c \cdot a}{d \cdot b} \cdot \frac{x}{x}\right) &= \frac{\alpha}{\alpha} \frac{c}{d} \frac{a}{bx} \otimes x \\ &= \frac{c}{\alpha d x} \underbrace{\left(\alpha \frac{a}{b}\right)}_{\in R} \otimes x \\ &= \frac{c}{(\alpha x)\, d} \otimes \frac{a}{b} (\alpha x) \\ &= \frac{c\,(\alpha x)}{(\alpha x)\, d} \otimes \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \otimes \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Análogamente $\psi \circ \varphi = \mathrm{i_d}$, por lo tanto $K \otimes_R E_1 \simeq K$.

Además, como R es un dominio de Dedekind, si $E_1 \in \mathbb{I}(R)$ tendremos que E_1 es pfg, entonces para $\mathfrak{p} \in Spec\,(R)$:

$$\begin{aligned} K_{\mathfrak{p}} &\simeq (K \otimes_R E_1)_{\mathfrak{p}} \\ &\simeq K_{\mathfrak{p}} \otimes_R (E_1)_{\mathfrak{p}} \\ &\simeq K_{\mathfrak{p}} \otimes_R R_{\mathfrak{p}}^{n_{\mathfrak{p}}} \\ &\simeq K_{\mathfrak{p}}^{n_{\mathfrak{p}}} \end{aligned}$$

luego $n_{\mathfrak{p}} = 1$ y $\mathrm{rk}\,(E_1) = 1$, así $[E_1] \in \mathbf{Pic}\,(R)$. Ahora, sea $E_2 \in \mathbb{I}\,(R)$ entonces tenemos un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} E_1 \otimes_R E_2 & \simeq & E_1 E_2 \\ a \otimes b & \to & ab \end{array}$$

que corresponde al producto de ideales fraccionarios dado en la ecuación (2.8).
Por lo tanto existe un homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I}\,(R) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{Pic}\,(R) \\ E & \longmapsto & [E] \end{array}$$

Veamos que $\ker \alpha = \mathbb{P}_r(R)$, Si $E \in \mathbb{P}_r\,(R)$ tenemos que $[E] = [R]$. Para esto, note que hay un isomorfismo entre $E = \langle a \rangle$, con $a \neq 0$ y $a \in Q\,(R)$ y R dado por:

$$\begin{array}{ccc} E & \to & R \\ x = a \cdot r & \to & 1 \cdot r \end{array}$$

por ser $Q\,(R)$ un campo, luego $[E] = [R]$ y $\mathbb{P}_r\,(R) \subseteq \ker \alpha$. Ahora sea $E \in \ker \alpha$, por tanto $[E] = [R]$, es decir $E \simeq R$ como R-módulos, y como $R = \langle 1 \rangle$, tenemos que E debe ser ideal principal, así $\mathbb{P}_r\,(R) \supseteq \ker \alpha$.
Mostremos ahora que α es epimorfismo. Sea $[E] \in \mathbf{Pic}\,(R)$, así E es pfg y $\mathrm{rk}\,(E) = 1$,

entonces para todo $\mathfrak{p} \in Spec\,(R)$

$$\begin{aligned} (K \otimes_R E)_{\mathfrak{p}} &\simeq K_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} E_{\mathfrak{p}} \\ &\simeq K_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} R_{\mathfrak{p}} \\ &\simeq K_{\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

Veamos que $K \otimes_R E \simeq K$, para esto considere

$$\begin{array}{rccc} \phi: & K \otimes_R E & \to & K \\ & x \otimes e & \mapsto & xe \end{array}$$

pero por lo visto previamente

$$\begin{array}{rccc} \phi_{\mathfrak{p}}: & K_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} E_{\mathfrak{p}} & \to & K_{\mathfrak{p}} \\ & x_{\mathfrak{p}} \otimes e_{\mathfrak{p}} & \mapsto & x_{\mathfrak{p}} e_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

es un isomorfismo para todo $\mathfrak{p} \in Spec\,(R)$, entonces ϕ es un isomorfismo, es decir, $K \otimes_R E \simeq K$, luego $E \simeq \{1_K \cdot e : \ e \in E\}$ ya que $e \simeq 1_K \otimes e \simeq 1 \cdot e \in K$, es decir E puede ser visto como un ideal fraccionario F en K, lo que significa que $E \simeq F \in \mathbb{I}\,(R)$, así $\alpha\,(F) = [F] = [E]$, por lo tanto α es epimorfismo y tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.17. *Sea R un dominio de Dedekind, sea $\mathbb{I}\,(R)$ el grupo de ideales fraccionarios y $\mathbb{P}_r\,(R)$ el subgrupo de los ideales principales fraccionarios. Entonces:*

$$\mathbf{Pic}\,(R) \simeq \mathbb{I}\,(R)\,/\mathbb{P}_r\,(R)\,.$$

Ejemplo 2.4. *Como sabemos, los anillos R de los Ejemplos 2.2 y 2.3 son dominios de Dedekind por ser anillos de enteros algebraicos, por lo visto previamente se construyeron ideales fraccionarios invertibles que representan, respectivamente, elementos de ordenes 2 y 4 en $\mathbb{I}\,(R)\,/\mathbb{P}_r\,(R) \simeq \mathbf{Pic}\,(R)$, entonces $\mathbf{Pic}\,(R)$ resulta ser justamente $\mathbb{Z}\,/2\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}\,/4\mathbb{Z}$ en esos ejemplos.*

2.4. Una sucesión exacta de 5 términos

Ahora, queremos crear una sucesión exacta de 5 términos que involucre algunos resultados vistos previamente. Antes de esto, necesitamos estudiar mejor como relacionar **Pic** (R) con los ideales fraccionarios.

Un elemento $r \in R$ es llamado **no divisor de** 0 si $ra = 0$ implica que $a = 0$, en este caso el elemento r es también llamado **regular** en R. Definimos $\mathcal{C}_R$ el conjunto de los elementos regulares de R, claramente $1 \in \mathcal{C}_R$ y $\mathcal{C}_R$ es cerrado para la multiplicación.

La localización de R por $\mathcal{C}_R$ es un anillo conmutativo $\mathcal{K}$ que contiene a R, con la propiedad que cualquier elemento regular de R es invertible en $\mathcal{K}$, dicho anillo $\mathcal{K}$ es conocido como el **anillo total de cocientes** de R.

Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.18. *Para el ideal fraccionario $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{K}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1) *$\mathfrak{m}$ es ideal fraccionario invertible.*

(2) *$\mathfrak{m}$ es R-módulo proyectivo y $\mathfrak{m} \cap \mathcal{C}_R \neq \emptyset$.*

Si **(1)** *o* **(2)** *se cumplen, $\mathfrak{m}$ como R-módulo debe ser fg, y es libre si $\mathfrak{m} = sR$ para algún $s \in Q(R)$ por la Proposición 2.16.*

Demostración. $(\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2})$

Por el ítem **(1)** de la Proposición 2.16, $\mathfrak{m}$ es R-módulo proyectivo, entonces como $\mathfrak{m}$ es ideal fraccionario invertible se cumple que $1 = \sum p_i q_i$ con $p_i \in \mathfrak{m}$, con $q_i \in \mathfrak{m}^{-1}$. Ahora, para $r \in \mathcal{C}_R$ adecuado tendremos que

$$p_i = a_i r^{-1} \text{ y } q_i = b_i r^{-1}$$

Note que tal r existe ya que $p_i = x_i r_i^{-1} = x_i s \left(s r_i\right)^{-1} = \underbrace{x_i s r_i^{-1}}_{a_i} s^{-1}$, para todo $s \in \mathcal{C}_R$ y tomando a $r \in \mathcal{C}_R$ un denominador común conveniente para los r_i, donde $a_i \in \mathfrak{m}$ y

$b_i \in \mathfrak{m}^{-1}$ ya que $a_i = rp_i$ y $b_i = rq_i$. Entonces

$$\sum a_i b_i = \sum (rp_i)(rq_i) = r^2 \sum p_i q_i = r^2 \in \mathfrak{m} \cap \mathcal{C}_R.$$

$(\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{1})$

Por el lema de la base dual existen $a_i \in \mathfrak{m}$, $f_i \in \mathfrak{m}^*$, con $i \in I$ tal que

$$a = \sum_{i \in I} a_i f_i(a), \text{ para todo } a \in \mathfrak{m},$$

donde $\{f_i(a)\}_{i \in I}$ es casi nula.

Por la Demostración del ítem $(\mathbf{3})$, de la Proposición 2.16 tenemos que $\mathfrak{m}^* \simeq \mathfrak{m}^{-1}$ y cada $f_i \in \mathfrak{m}^*$ es la multiplicación por algún $b_i \in \mathfrak{m}^{-1}$ por (2.11). Tomemos $r \in \mathfrak{m} \cap \mathcal{C}_R$, entonces $f_i(r) = b_i r$ y como $r \in \mathcal{C}_R$, la condición $b_i r = 0$ implica $b_i = 0$. Quitando los $i \in I$ tales que $b_i = 0$ tenemos

$$r = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(r) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i r,$$

para algún $n \in \mathbb{N}$. Luego, $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1 \in \mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1}$, por lo tanto $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = R$. ♠

Sea K un anillo conmutativo y $f : R \to K$ un homomorfismo de anillos, por lo tanto K es un R-módulo vía f, además para $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$ tenemos que

$$[P \otimes_R K] \in \mathbf{Pic}(K),$$

esto ya que por la Proposición 2.6, tenemos que $P \otimes_R K$ debe ser un K-módulo pfg y por la Proposición 2.9 tenemos que $\mathrm{rk}_K(P \otimes_R K) = 1$.

Defina

$$\begin{array}{rccc} f_* : & \mathbf{Pic}(R) & \to & \mathbf{Pic}(K) \\ & [P] & \mapsto & [P \otimes_R K] \end{array}$$

es un homomorfismo de grupos ya que

$$\begin{aligned} f_*([P][Q]) &= f_*([P \otimes_R Q]) \\ &= [(P \otimes_R Q) \otimes_R K], \end{aligned}$$

pero note que $(P \otimes_R Q) \otimes_R K \simeq (P \otimes_R K) \otimes_K (Q \otimes_R K)$ pues

$$\begin{aligned} (P \otimes_R K) \otimes_K (Q \otimes_R K) &\simeq P \otimes_R (K \otimes_K (Q \otimes_R K)) \\ &\simeq P \otimes_R (Q \otimes_R K) \\ &\simeq (P \otimes_R Q) \otimes_R K, \end{aligned}$$

así

$$f_*([P][Q]) = [P \otimes_R K][Q \otimes_R K] = f_*([P]) \cdot f_*([Q]).$$

Además, Si $g : S \to R$ es también un homomorfismo de anillos tenemos que $(f \circ g)_* = f_* g_*$ y para el homomorfismo identidad se cumple $(\mathrm{i}_{\mathrm{d}R})_* = \mathrm{i}_{\mathrm{d}\mathbf{Pic}(R)}$. Para ver esto, sean S, R y K anillos con $f : R \to K$ y $g : S \to R$ homomorfismo de anillos, note que $f \circ g : S \to K$ también es un homomorfismo de anillos, ahora como lo vimos previamente sean

$$\begin{aligned} f_* : \mathbf{Pic}(R) &\to \mathbf{Pic}(K) \\ [P] &\mapsto [P \otimes_R K] \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} g_* : \mathbf{Pic}(S) &\to \mathbf{Pic}(R) \\ [Q] &\mapsto [Q \otimes_S R], \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} (f \cdot g)_* : \mathbf{Pic}(S) &\to \mathbf{Pic}(K) \\ [U] &\mapsto [U \otimes_S K] \end{aligned}$$

pero

$$
\begin{aligned}
(f_* \cdot g_*)[U] &= f_*(g_*([U])) \\
&= f_*(U \otimes_S R) \\
&= [(U \otimes_S R) \otimes_R K] \\
&= [U \otimes_S (R \otimes_R K)] \\
&= [U \otimes_S K] = (f \cdot g)_* [U] .
\end{aligned}
$$

Además

$$
\begin{array}{rccc}
(\mathrm{i_d})_* : & \mathbf{Pic}(R) & \to & \mathbf{Pic}(R) \\
& [P] & \mapsto & [P \otimes_R R] = [P] ,
\end{array}
$$

ya que $P \simeq P \otimes_R R$.

Por lo tanto, en un lenguaje categórico podemos decir que **Pic** es un **functor covariante de la categoría de los anillos conmutativos en los grupos abelianos**.

Ahora, sea $\mathcal{K}$ (la localización de R por el el conjunto multiplicativo $\mathcal{C}_R$ de elementos regulares), y sea $f : R \to \mathcal{K}$ la aplicación inclusión. Según lo visto hasta ahora, todo ideal fraccionario invertible en $\mathcal{K}$ es un R-módulo pfg de rango 1, pero en general un R-módulo pfg no es necesariamente isomorfo a ideal fraccionario invertible en $\mathcal{K}$, esto ya que previamente vimos que $\mathfrak{m} \in \mathbb{I}(R)$, $\alpha(\mathfrak{m}) = [\mathfrak{m}] \in \mathbf{Pic}(R)$ es un homomorfismo, no necesariamente inyectivo.

Definimos:

$$
\begin{array}{rccc}
\pi : & \mathcal{U}(\mathcal{K}) & \longrightarrow & \mathbb{I}(R) \\
& s & \longmapsto & sR
\end{array}
$$

Note que π está bien definida ya que $(sR)(s^{-1}R) = R$. Con todo esto, estamos en posición para probar uno de los resultados mas importantes de este capitulo.

Teorema 2.19. *Para $f : R \to \mathcal{K}$, tenemos la sucesión exacta de 5 términos*

$$
1 \longrightarrow \mathcal{U}(R) \xrightarrow{f} \mathcal{U}(\mathcal{K}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{I}(R) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{Pic}(R) \xrightarrow{f_*} \mathbf{Pic}(\mathcal{K}) .
$$

Demostración. Veamos que im$\alpha \subseteq \ker f_*$. Sea $E \in \mathbb{I}(R)$, note que $E \cap \mathcal{C}_R \neq \emptyset$ por la Proposición 2.18, veamos que $E \otimes_R \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$, para esto considere

$$\begin{array}{rccccc} \varphi: & E \otimes_R \mathcal{K} & \to & \mathcal{K} & = & \mathcal{C}_R^{-1}R \\ & e \otimes_R \dfrac{r}{s} & \mapsto & \dfrac{er}{s} & & \end{array}$$

donde $r \in R$, $s \in \mathcal{C}_R^{-1}$. Fijando $c \in \mathcal{C}_R$ defina

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathcal{K} & \to & E \otimes_R \mathcal{K} \\ & \dfrac{r}{s} & \mapsto & c \otimes \dfrac{r}{sc} \end{array}$$

donde $r, c \in R$, $s \in \mathcal{C}_R^{-1}$, entonces:

$$\begin{aligned} \varphi\left(\psi\left(\frac{r}{s}\right)\right) &= \varphi\left(c \otimes \frac{r}{sc}\right) \\ &= \frac{cr}{sc} = \frac{r}{s} \end{aligned}$$

Sea $a \in R$ es tal que $aE \subseteq R$, que existe por definición de ideal fraccionario, además dicho a es un valor regular, es decir $a \in \mathcal{C}_R$. Luego

$$\begin{aligned} \psi\left(\varphi\left(e \otimes \frac{r}{s}\right)\right) &= \psi\left(\frac{er}{s}\right) \\ &= c \otimes \frac{er}{sc} \cdot \frac{a}{a} \\ &= cea \otimes \frac{r}{sca} \\ &= e \otimes \frac{rca}{sca} \\ &= e \otimes \frac{r}{s} \end{aligned}$$

Por lo tanto $[\mathcal{K}] = [E \otimes \mathcal{K}]$ para todo $E \in \mathbb{I}(R)$, es decir, $f_* \alpha = 0$ y $\mathrm{im}\alpha \subseteq \ker f_*$. Veamos que $\ker f_* \subseteq \mathrm{im}\alpha$.

Si $[P] \in \ker f_* \subseteq \mathbf{Pic}(R)$, $f_*([P]) = [P \otimes_R \mathcal{K}] = [\mathcal{K}]$, entonces $P \otimes_R \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$ como $\mathcal{K}$-módulos. Sea

$$\begin{array}{ccccc} P & \stackrel{h}{\to} & P \otimes_R \mathcal{K} & \simeq & \mathcal{K} \\ p & \mapsto & p \otimes 1_{\mathcal{K}}. & & \end{array}$$

Veamos que h es monomorfismo, para esto sea $p \in P$ tal que si $p \otimes 1_{\mathcal{K}} = 0$ y como P puede ser inmerso en un R-módulo libre y fg, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $P \subseteq R^n = \bigoplus_{i=1}^{n} R$, entonces p es de la forma $(r_{1p}, \ldots, r_{ip}, \ldots, r_{np})$ con $r_{jp} \in R$ para $1 \leq j \leq n$. Además como $p \otimes 1_{\mathcal{K}} = 0$, entonces $r_{ip} \otimes 1_{\mathcal{K}} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, luego $r_{ip} = 0$, lo que implica que $p = 0$, por lo tanto la aplicación $h : P \to P \otimes_R \mathcal{K}$ es inyectiva.

Ahora, para $P \subseteq \mathcal{K}$, y como $P \otimes_R \mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$ existe un isomorfismo $g : P \otimes_R \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ de $\mathcal{K}$-módulos, tal que

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes_R \frac{r_i}{s_i}\right) = 1,$$

y como h es inyectiva, $P \simeq h(P) \subseteq P \otimes_R \mathcal{K} \stackrel{g}{\simeq} \mathcal{K}$, entonces podemos identificar cada $p \in P$ con $h(p)$, es decir, sin perdida de generalidad podemos suponer que $P \subseteq \mathcal{K}$. Luego

$$P = \left\{ \frac{g(h(p))}{s} : \ p \in P, \ s \in \mathcal{C}_R \right\}.$$

Ahora, haciendo $s = \prod_{i=1}^{n} s_i$ y $t_i = \prod_{j \neq i} s_j$ tenemos

$$
\begin{aligned}
1 = g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes_R \frac{r_i}{s_i}\right) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i' \otimes_R \frac{1}{s_i}\right), \text{ donde } p_i' = p_i r_i \\
&= g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i' \otimes_R \frac{t_i}{s}\right) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i' t_i \otimes_R \frac{1}{s}\right) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^{n} p_i' t_i \otimes_R 1\right) \frac{1}{s} \\
&= g\left(h\left(\sum_{i=1}^{n} p_i' t_i\right)\right) \frac{1}{s}.
\end{aligned}
$$

Luego $\dfrac{g\left(h\left(p\right)\right)}{s} = 1$, donde $p = \sum_{i=1}^{n} p_i' t_i$, entonces $p' s^{-1} = 1$, así $P \cap \mathcal{C}_R \neq \emptyset$ y $P \in \mathbb{I}\left(R\right)$, es decir, $\alpha\left(P\right) = \left[P\right] \in \mathrm{im}\alpha$.

Para finalizar, sea $E \in \ker \alpha$, así $\alpha\left(E\right) = \left[E\right] = \left[R\right]$, luego $E \simeq R$ y E es libre, entonces $E = \pi\left(s\right)$, lo que implica que $E \in \mathrm{im}\pi$, ya que por la Proposición 2.18, $E = sR$ con $s \in \mathcal{U}\left(\mathcal{K}\right)$, así $\ker \alpha \subseteq \mathrm{im}\pi$.

Ahora, para $s \in \mathcal{U}\left(\mathcal{K}\right)$ tenemos $\alpha \cdot \pi\left(s\right) = \alpha\left(sR\right) = \left[sR\right] = \left[R\right]$ (esto se da porque definiendo $\varphi : R \to sR$ por $\varphi\left(r\right) = sr$ y como $s \in \mathcal{U}\left(\mathcal{K}\right)$ tenemos que $s \cdot r = 0$ si y sólo si $r = 0$, es decir es inyectiva, y φ claramente sobreyectivo), por lo tanto $\ker \alpha = \mathrm{im}\pi$.

Sea $s \in \ker \pi$, así $\pi\left(s\right) = sR = R$, entonces $s \in \mathcal{U}\left(R\right)$ y $sR = R$, entonces existe $s' \in R$ tal que $ss' = 1$. Por lo tanto $s \in \ker \pi$, así $\pi\left(s\right) = R$, implica que $s \in \mathcal{U}\left(R\right)$ y que $s \in \mathrm{im}f$. De esta forma, $\ker \pi \subseteq \mathrm{im}f$. Ahora, si $s \in \mathcal{U}\left(R\right)$ ya que

$$\pi \cdot f\left(s\right) = \pi\left(\frac{s}{1}\right) = \frac{s}{1}R = R,$$

entonces $\ker \pi = \mathrm{im} f$. ♠

Note que $\mathbb{P}_r(R) = \pi(\mathcal{U}(K))$, por el Teorema 2.19 se sigue que $\mathrm{coker}(\pi) = \mathbb{I}(R)/\mathbb{P}_r(R)$. Este grupo es conocido como **el grupo de clases de ideales de** R y tenemos el siguiente:

Corolario 2.20. *Defina el grupo de Picard relativo* $\mathbf{Pic}(K/R)$ *como* $\ker(f_*)$ *en la sucesión exacta de 5 términos. Entonces* $\mathbf{Pic}(K/R) \simeq \mathbb{I}(R)/\mathbb{P}_r(R)$*. En particular, si* f_* *es el homomorfismo trivial (lo que vale cuando* R *es un dominio conmutativo y* K *su campo cociente), tenemos que* $\mathbf{Pic}(R) \simeq \mathbb{I}(R)/\mathbb{P}_r(R)$*. En ese caso* P *es un* R*-módulo pfg de rango 1 si y sólo si* P *es isomorfo a ideal invertible de* R*.*

Note que Teorema 2.19 generaliza la Proposición 2.17. Este resultado es útil para calcular el grupo de Picard de algunos anillos conmutativos específicos, por ejemplo ver [20, Pag 39-41]. Veamos un ejemplo que usa el Corolario 2.20.

2.5. Ejemplos

Veamos algunos ejemplos bastante interesantes

Ejemplo 2.5. *Sea* R *un DFU, entonces* $\mathbf{Pic}(R) = \{1\}$*.*
Para esto, veamos que todo ideal invertible $\mathfrak{m} \subseteq R$ *es principal. Sea*

$$1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

donde $\{a_i,\}_{1\leq i\leq n}$ *generan a* $\mathfrak{m}$ *y* $b_i \in \mathfrak{m}^{-1}$*, respectivamente. Tome* $b_i = \dfrac{c_i}{d_i}$ *con* $c_i, d_i \in R$ *tal que* $\gcd\{c_i, d_i\} = 1$*. Como* $b_i a_j \in R$*, tenemos que* $d_i \,|c_i a_j$*, por lo tanto* $d_i \,|a_j$ *para cualquier* i, j*. Definamos* $d = \mathrm{mcm}\{d_1, \ldots, d_n\}$*, entonces* $d\,|a_j$*, para todo* $1 \leq j \leq n$*, entonces* $\mathfrak{m} \subseteq \langle d \rangle$*.*

Por otro lado,

$$d = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d_i} c_i a_i \in \sum_{i=1}^{n} R a_i = \mathfrak{m}.$$

Por lo tanto $\mathfrak{m} = \langle d \rangle$, *entonces por el Corolario 2.20 tenemos que* $\mathbf{Pic}\,(R) = \{1\}$.

Ahora veamos un resultado muy útil.

Lema 2.21. *Sea* R *un anillo,* $J\,(R)$ *el radical de Jacobson y* $\overline{R} = R\,/J\,(R)$. *Sean* P *y* Q R*-módulos pfg, entonces* $P \simeq Q$ *como* R*-módulos si y sólo si* $P\,/PJ\,(R) \simeq Q\,/QJ\,(R)$ *como* $\overline{R}$*-módulos.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $f : P \to Q$ un isomorfismo de R-módulos. Entonces:

$$f\,(PJ\,(R)) = f\,(P)\,J\,(R) = QJ\,(R)\,,$$

por lo tanto, f induce un isomorfismo de $\overline{R}$-módulos

$$\begin{array}{rcl} P\,/PJ\,(R) & \longrightarrow & Q\,/QJ\,(R) \\ p + PJ\,(R) & \longmapsto & f\,(p) + QJ\,(R)\,. \end{array}$$

$\Leftarrow$) Considere el diagrama donde $\overline{f}$ es un isomorfismo de $P\,/PJ\,(R)$ en $Q\,/QJ\,(R)$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_P"] \arrow[d, dashed] & P/P\,J(R) \arrow[d, "\overline{f}"] \\ Q \arrow[r, "\pi_Q"'] & Q/Q\,J(R) \end{tikzcd}$$

que puede ser visto así:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "\overline{f} \circ \pi_P"] & \\
Q \arrow[r] & Q/Q\, J(R) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Así, como P es un R-módulo proyectivo, existe un R-homomorfismo $f : P \to Q$ que hace que el diagrama conmute. Entonces, como $\overline{f} \circ \pi_P = \pi_Q \circ f$ tenemos que $\pi_Q\left(f\left(P\right)\right) = \overline{f}\left(\pi_P\left(P\right)\right) = Q\left/QJ\left(R\right)\right.$, pero

$$\pi_Q\left(f\left(P\right)\right) = \pi_Q\left(f\left(P\right) + QJ\left(R\right)\right) = \frac{f\left(P\right) + QJ\left(R\right)}{QJ\left(R\right)},$$

entonces

$$\frac{f\left(P\right) + QJ\left(R\right)}{QJ\left(R\right)} = \frac{Q}{QJ\left(R\right)}$$

y tenemos que $\mathrm{im} f + QJ\left(R\right) = Q$.

Ahora, como Q es pfg, por el Lema de Nakayama tenemos que $\mathrm{im} f = Q$. Es decir, f es sobre. Así mismo, como Q es proyectivo, la sucesión exacta

$$P \xrightarrow{f} Q \to 0$$

escinde, por lo tanto existe una descomposición $P = P' \oplus Q'$, donde $P' = \ker f$ y $f\left|_{Q'}\right. = f' : \ Q' \to Q$ es un isomorfismo. Entonces

$$P\left/PJ\left(R\right)\right. = \frac{P' \oplus Q'}{\left(P' \oplus Q'\right)J\left(R\right)} = \frac{P' \oplus Q'}{P'J\left(R\right) \oplus Q'J\left(R\right)} \simeq \frac{P'}{P'J\left(R\right)} \oplus \frac{Q'}{Q'J\left(R\right)}.$$

Además, como $\overline{f}$ es isomorfismo y $Q \simeq Q'$, por lo ya probado en la parte "si" tenemos que

$$\frac{Q}{Q'J\left(R\right)} \simeq \frac{Q}{QJ\left(R\right)}.$$

Entonces
$$\frac{P}{PJ(R)} \simeq \frac{P'}{P'J(R)} \oplus \frac{Q}{QJ(R)} \Rightarrow \frac{P'}{P'J(R)} = 0.$$
Es decir, $P' = P'J(R)$ y como P' es sumando directo de P, él también es un R-módulo fg. Aplicando el Lema de Nakayama nuevamente, $P' = 0$. Por lo tanto, f es inyectiva, es decir, $P \simeq Q$. ♠

Ejemplo 2.6. *Sea R un anillo local. Para comenzar veamos que si R es un anillo local, todo R-módulo pfg de rango 1 es libre.*

Tome $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$, entonces $[P/PJ(R)] \in \mathbf{Pic}(R/J(R))$, como R es local $J(R) = \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{m}$ es el único ideal maximal, y como P es un R-módulo pfg tenemos que $P/\mathfrak{m}P$ es $\overline{R}$-módulo pfg, así $P/\mathfrak{m}P \simeq \left(\overline{R}\right)^n \simeq (R/\mathfrak{m})^n$.

Ahora, como $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$, tenemos que $\mathrm{rk}_R(P) = 1$, entonces y como $(R/\mathfrak{m})^n \simeq R^n/R^n\mathfrak{m}$ con $n = 1$, así por el Lema 2.21 tenemos que $P \simeq R$, es decir $[P] = [R]$, para todo $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$. Por lo tanto, $\mathbf{Pic}(R) = \{1\}$.

Ejemplo 2.7. *Sea R un anillo semilocal, con $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_n$ ideales maximales, entonces, el radical de Jacobson es $J(R) = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$ y aplicando el Teorema chino del residuo tenemos:*
$$\overline{R} := R/J(R) \simeq R/\mathfrak{m}_1 \times \cdots R/\mathfrak{m}_n.$$
Aplicando la Proposición 2.14 tenemos que
$$\mathbf{Pic}\left(\overline{R}\right) \simeq \mathbf{Pic}(R/\mathfrak{m}_1) \times \mathbf{Pic}(R/\mathfrak{m}_2) \times \cdots \times \mathbf{Pic}(R/\mathfrak{m}_n) = \{1\}^n \simeq \{1\},$$
ya que cada $\mathbf{Pic}(R/\mathfrak{m}_1)$ es trivial por el Ejemplo 2.6. Ahora, sea $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$, por lo visto $\left[\overline{P}\right] \in \mathbf{Pic}\left(\overline{R}\right)$, donde $\overline{P} = P/J(R)P$ y por tanto tenemos que $\overline{P} \simeq \overline{R}$, entonces aplicando el Lema 2.21 $P \simeq R$, es decir, $\mathbf{Pic}(R) = \{1\}$.

En particular, $\mathbf{Pic}(\mathbb{Z}_n) = \{1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Capítulo 3

Semigrupo de Picard

En este capítulo construiremos el semigrupo de Picard $\mathbf{PicS}(R)$ que será vital en nuestro estudio, para esto es necesario estudiar conceptos y resultados en torno a la teoría de semigrupos, además queremos ver la como construir $\mathbf{PicS}(R)$ y su relación con $\mathbf{Pic}(R)$.

3.1. Teoría de Semigrupos

Decimos que (S, μ) es **semigrupo** si la operación binaria $\mu : S \times S \to S$ está bien definida y es asociativa, es decir, si para todo $x, y, z \in S$ se cumple:

$$\begin{array}{rccc} \mu : & S \times S & \to & S \\ & (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array} \Longrightarrow x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Un semigrupo es conmutativo si para $x, y \in S$ tenemos que $x \cdot y = y \cdot x$, y contiene al 1 si existe un elemento $1_S \in S$ tal que $x \cdot 1_S = 1_S \cdot x = x$ para todo $x \in S$. Un semigrupo con unidad es llamado **monoide**.

Si existe $0 \in S$ tal que $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ para todo $x \in S$, decimos que S tiene elemento cero, o que es un semigrupo con cero.

Definimos las **unidades** de un monoide S como sigue

$$\mathcal{U}(S) = \{x \in S : \exists y \in S \text{ tal que } xy = 1_S\}.$$

Ahora, sean S y T semigrupos con unidad, decimos que $\phi : S \to T$ es un homomorfismo de semigrupos con unidad si y sólo si para todo $x, y \in S$:

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y) \quad \text{y} \quad \phi(1_S) = 1_T.$$

De forma equivalente con los homomorfismos de otras estructuras se dice:

- φ es **epimorfismo** si φ es un homomorfismo sobreyectivo.
- φ es **monomorfismo** si φ es un homomorfismo inyectivo.
- φ es **isomorfismo** si φ es un homomorfismo biyectivo.

Definimos el conjunto:

$$E(S) = \left\{ e \in S : \; e^2 = e \right\}$$

de los idempotentes de S. Entonces $E(S)$ admite un orden parcial llamado **el orden de Rees**, que se define de la siguiente forma:

$$e \leq f \;\Leftrightarrow\; ef = fe = e \tag{3.1}$$

Veamos que de hecho $\leq$ es orden parcial.
Claramente se cumple $e \leq e$, ahora si $e \leq f$ y $f \leq e$ tenemos que $ef = fe = e$ y $fe = ef = f$, por lo tanto $f = e$, restaría ver la transitividad, si $e \leq f$ y $f \leq g$ tenemos que $ef = fe = e$ y $fg = gf = f$, entonces:

$$eg = efg = ef = e \quad y \quad ge = gfe = fe = e,$$

entonces $e \leq g$.
Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, llamamos a Y el **semireticulo** de X al mayor subconjunto de X tal que:

$$a, b \in Y \;\Rightarrow\; a \wedge b, \; a \vee b \in Y.$$

Donde $a \wedge b = \text{ínf}\,\{a, b\}$ y $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Es decir, $a \wedge b$ denota la mayor cota inferior y $a \vee b$ la menor cota superior.
Por lo tanto, $E(S)$ admite un semireticulo.

Ejemplo 3.1. *Sean X, Y conjuntos. Una función parcial f de X en Y es una función de un subconjunto de X en un subconjunto de Y (la cual denotaremos $f : X \dashrightarrow Y$). Sea $g : X \dashrightarrow Y$ y $f : Y \dashrightarrow Z$, así*

$$\mathrm{dom}\,(f \circ g) = g^{-1}\,(\mathrm{dom} f \ \cap \ \mathrm{im} g)\,.$$

*Nos vamos a concentrar en funciones parciales que inducen una biyección entre el dominio y la imagen, dichas funciones parciales son llamadas **biyecciones parciales**, cuando dicha biyección sea la identidad será denotada como $\mathrm{i}_{\mathrm{d}_A}$ **la identidad parcial** de $A \subseteq X$.*

Para X, Y, Z conjuntos y $f : X \dashrightarrow Y$ biyección parcial se cumple:

(**a**) $f^{-1}f = \mathrm{i}_{\mathrm{d}_{\mathrm{dom} f}}$ y $ff^{-1} = \mathrm{i}_{\mathrm{d}_{\mathrm{im} f}}$.

(**b**) Para una biyección parcial $g : Y \dashrightarrow X$, las ecuaciones $f = fgf$ y $g = gfg$ se cumplen si y sólo si $g = f^{-1}$.

(**c**) $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

(**d**) $\mathrm{i}_{\mathrm{d}_A}\mathrm{i}_{\mathrm{d}_B} = \mathrm{i}_{\mathrm{d}_{A\cap B}} = \mathrm{i}_{\mathrm{d}_B}\mathrm{i}_{\mathrm{d}_A}$, para $A, B \subseteq X$.

(**e**) $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$ para cualquier biyección parcial $g : Y \dashrightarrow Z$.

Demostración. Sólo probaremos la condición "si" de (**b**).
Sean $f : X \dashrightarrow Y$ y $g : Y \dashrightarrow X$ biyecciones parciales tal que $f = fgf$ y $g = gfg$, usando (**a**) tenemos lo siguiente:

(**i**) $\mathrm{i}_{\mathrm{d}_{\mathrm{im} f}} = ff^{-1} = fgff^{-1} = fg$.

(**ii**) $\mathrm{i}_{\mathrm{d}_{\mathrm{dom} f}} = f^{-1}f = f^{-1}fgf = gf$.

(iii) $\mathrm{i}_{\mathrm{d}_{\mathrm{im}g}} = gg^{-1} = gfgg^{-1} = gf$.

(iv) $\mathrm{i}_{\mathrm{d}_{\mathrm{dom}g}} = g^{-1}g = g^{-1}gfg = fg$.

Entonces por (**ii**) y (**iii**) deducimos que $\mathrm{im}g = \mathrm{dom}f = \mathrm{im}f^{-1}$, mientras que por (**i**) y (**iv**) tenemos que $\mathrm{im}f = \mathrm{dom}g = \mathrm{dom}f^{-1}$, por lo tanto $g = f^{-1}$. ♠

La colección de biyecciones parciales entre conjuntos forma una categoría donde los conjuntos son los puntos, y las biyecciones parciales las flechas, pero nos interesan las biyecciones parciales de X en si mismo, estas forman un monoide que se denota $\mathrm{I}(X)$, llamado el **monoide inverso simétrico** en X.

Lema 3.1. *Sea* $\mathrm{I}(X)$ *el monoide inverso simétrico de* X*, entonces los idempotentes de* $\mathrm{I}(X)$ *son justamente las identidades parciales en* X*. En particular, los idempotentes forman un subgrupo conmutativo.*

Demostración. Por (**d**) las identidades son idempotentes de $\mathrm{I}(X)$. Suponga que $f \in E(\mathrm{I}(X))$, entonces $f = fff$, entonces por (**b**) $f = f^{-1}$ y por (**a**) $f = ff = f^{-1}f = \mathrm{i}_{\mathrm{d}_{\mathrm{dom}f}}$. ♠

Este ejemplo introduce una nueva forma de ver el "inverso". Sea S un semigrupo, si $a \in S$ decimos que a' es el **inverso** de a si

$$aa'a = a \quad y \quad a'aa' = a'.$$

El hecho que S sea semigrupo no implica que todo $a \in S$ tenga inverso, esto hace que el estudio de los semigrupos sea mas complicado que el estudio de grupos, pero para nuestro trabajo nos interesan los siguientes semigrupos:

Definición 3.1. Un semigrupo S es llamado **regular** si todo elemento tiene inverso en S.

Proposición 3.2. *Sea* S *un semigrupo regular. Entonces los idempotentes de* S *conmutan, si y sólo si, cada elemento de* S *tiene único inverso.*

Demostración. Sea S un semigrupo inverso con idempotentes que conmutan. Supongamos que para $x \in S$ existen u, v inversos de x, entonces

$$u = uxu = u\,(xvx)\,u = (ux)\,(vx)\,u,$$

como ux y vx son idempotentes entonces

$$u = (vx)\,(ux)\,u = vxu = (vxv)\,xu = v\,(xv)\,(xu)\,,$$

así tendremos

$$u = v\,(xu)\,(xv) = v\,(xux)\,v = vxv = v,$$

Por lo tanto $u = v$. Recíprocamente, veamos primero que en S regular el producto de $e, f \in E\,(S)$ tiene inverso idempotente.

Sea $x = (ef)'$ el inverso de ef, note que fxe es idempotente ya que

$$(fxe)^2 = f\,(xefx)\,e = fxe$$

y es inverso de ef ya que

$$(fxe)\,ef\,(fxe) = (fxe)^2 = fxe \text{ y } ef\,(fxe)\,ef = (ef)\,x\,(ef) = ef,$$

y como en S los idempotentes son únicos, se cumple que $fxe = x$. Por lo anterior

$$f\,(ef)'\,e = (ef)' = ef \Rightarrow ef \in E\,(S)$$

entonces $E\,(S)$ es cerrado bajo el producto, así

$$ef\,(fe)\,ef = efef = ef \text{ y } fe\,(ef)\,fe = fe$$

y como $ef, fe \in E\,(S)$ y $fe = (ef)'$ tenemos que $fe = ef$. ♠

Definición 3.2. Un semigrupo S es llamado **semigrupo inverso** si

(**1**) S es regular.

(**2**) Los idempotentes conmutan.

Si S es un semigrupo inverso y $x, y \in S$ se cumple que:

- $x'' = x$.
- $(xy)' = y'x'$
- Si $x = eae$ con $e \in E(S)$, entonces $x' = (eae)' = e'a'e' = ea'e$.

Note que el Ejemplo 3.1 nos dio una estructura interesante, que llevándola al contexto de semigrupos da sentido a los semigrupos inversos. Veamos otro ejemplo de un semigrupo inverso:

Ejemplo 3.2. *Sea G un grupo, definimos*

$$\widetilde{G}^R = \{(A, g) : \ \{1, g\} \subseteq A, \ |A| < +\infty, \ A \subseteq G\}$$

con la operación $(A, g) \cdot (B, h) = (A \cup gB, gh)$, conocido como ***la expansión de Birget-Rhodes de*** *G. Entonces $\widetilde{G}^R$ es un semigrupo inverso.*
Para comenzar veamos que cada $(A, g) \in \widetilde{G}^R$ tiene inverso. Para esto necesitamos un (A', g') que satisfaga

$$(A, g) \cdot (A', g') \cdot (A, g) = (A, g) \quad y \quad (A', g') \cdot (A, g) \cdot (A', g') = (A', g')$$

entonces tomando $g' = g^{-1}$ y $A' = g^{-1}A$ se satisface la condición exigida (El elemento $(g^{-1}A, g^{-1})$ está bien definido ya que $\{1, g^{-1}\} \subseteq g^{-1}A$ ya que $\{1, g\} \subseteq A$). Además que $(A, g) \cdot (g^{-1}A, g^{-1}) = (A \cup g(g^{-1}A), gg^{-1}) = (A, 1)$ y $(g^{-1}A, g^{-1}) \cdot (A, g) =$

$(g^{-1}A \cup g^{-1}(A), g^{-1}g) = (g^{-1}A, 1)$. *Note que* $\widetilde{G}^R$ *tiene neutro* $(\{1\}, 1)$ *y que los idempotentes de* $\widetilde{G}^R$ *son de la forma:*

$$E\left(\widetilde{G}^R\right) = \{(B, 1) : \ 1 \in B \subseteq G\}$$

y claramente por como se definió la operación estos conmutan.

Definimos $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$ en un semigrupo inverso S como sigue:

$$(s,t) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow s's = t't,$$
$$(s,t) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow ss' = tt'.$$

En particular, para $e \in E(S)$

$$(s,e) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow s's = e,$$
$$(s,e) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow ss' = e.$$

Observación 3.1. $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$ son relaciones de equivalencia.

Definimos $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$, que también es una relación de equivalencia. Por lo tanto la $\mathcal{H}$-clase de $e \in E(S)$ es

$$H_e = \{s \in S : \ (s,e) \in \mathcal{H}\}$$

y como $(s,e) \in \mathcal{H}$, implica que $(s,e) \in \mathcal{L}$ y $(s,e) \in \mathcal{R}$ tenemos que

$$H_e = \{s \in S : \ ss' = e = s's\}. \tag{3.2}$$

La $\mathcal{H}$-relación está cercanamente asociada con la presencia de subgrupos en un semigrupo, por lo que el siguiente resultado será bastante útil en nuestro trabajo.

Proposición 3.3. *Sea* S *un semigrupo inverso con* 1_S *y* $e \in E(S)$. *Luego las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(1) eSe *es monoide inverso con identidad* e.

(2) *$H_e = \mathcal{U}(eSe)$. En particular, H_e es un grupo.*

(3) *Todo subgrupo de S está contenido en alguna $\mathcal{H}$-clase.*

Demostración. **(1)** Sea $x \in eSe$, así existe $a \in S$ tal que $x = eae$. Por lo tanto

$$ex = eeae = eae = x,$$
$$xe = eaee = eae = x,$$

entonces e es el neutro de eSe. Ahora, sean $x, y \in eSe$, veamos que $xy \in eSe$. Por definición, existen $a, b \in S$ tal que $x = eae$ y $y = ebe$.

$$xy = (eae)(ebe) = e(aeb)e \in eSe.$$

Luego eSe es un monoide y como sabemos para $x, y \in S$ se tiene que $(xy)' = y'x'$, así $x' = (eae)' = e'a'e' = ea'e$, por lo tanto eSe es monoide inverso.

(2) Sea $a \in H_e$, por (3.2) se tiene que $aa' = e = aa'$, de aquí se sigue que:

$$\begin{aligned} a &= \underbrace{aa'}_{e}a = ea \\ &= e(ea) \\ &= ea\underbrace{a'a}_{e} = eae. \end{aligned}$$

Por tanto $a \in eSe$. Además, como $a' = ea'e \in eSe$, tendremos que $a \in \mathcal{U}(eSe)$ ya que e es el neutro de eSe. Ahora, si $a \in \mathcal{U}(eSe)$ tenemos que $a' \in \mathcal{U}(eSe)$, por lo tanto

$$aa' = e \text{ y } a'a = e \;\Rightarrow\; a \in H_e.$$

(3) Sea G un grupo con identidad e tal que $G \leq S$. Entonces para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ y

$$aa^{-1} = e \text{ y } a^{-1}a = e,$$

entonces $(a,e) \in \mathcal{H}$, es decir $G \subseteq H_e$. ♠

Sea S un semigrupo inverso y conmutativo. Dado $s \in S$ entonces $ss' \in E(S)$ ya que

$$(ss')(ss') = \underbrace{ss's}_{s}s' = ss'.$$

Así, haciendo $f = ss'$ tenemos que $s \in H_f$. Luego todo elemento de S pertenece a algún subgrupo de S. Por lo tanto

$$S = \bigcup_{e \in E(S)} H_e. \tag{3.3}$$

La unión (3.3) es disyunta ya que las clases de equivalencia sobre un conjunto forman una partición de este si $e \neq f$ entonces $H_e \cap H_f = \emptyset$. De hecho, si $H_e \cap H_f \neq \emptyset$ existiría $a \in S$ tal que $(a,e) \in \mathcal{H}$ y $(a,f) \in \mathcal{H}$, pero como $\mathcal{H}$ es de equivalencia tendríamos que $e = f$. Además

$$H_e \cdot H_f \subset H_{ef}.$$

Para ver esto, sea $a \in H_e$, $b \in H_f$, entonces $aa' = e = a'a$ y $bb' = f = b'b$

$$(ab) \cdot (ab)' = abb'a' = afa'$$

y como S es conmutativo

$$afa' = aa'f = ef.$$

Por lo tanto $ab \in H_{ef}$.

Un **semireticulo de grupos** es un semiresticulo en que cada uno de sus elementos es un grupo, junto con un conjunto de homomorfismos de grupos que hacen compatible dichos grupos con la estructura de semireticulo. Clifford demostró que la unión de estos grupos forma así un semigrupo, donde la multiplicación está determinada por las operaciones de los grupos y dichos homomorfismo de grupos.

Entonces por lo visto en (3.3) tenemos que todo semigrupo inverso y conmutativo S con unidad es un semireticulo de grupos. Pero, en particular se conoce la siguiente definición:

Definición 3.3. Un **semigrupo de Clifford** es un semigrupo en el que cada H-clase es un grupo.

Observación 3.2. Por la Proposición 3.3, tenemos que todo semigrupo inverso S con 1_S es un semigrupo de Clifford.

Además, la ecuación (3.3) también puede ser vista es consecuencia del siguiente resultado, conocido como el **Teorema de Clifford**.

Teorema 3.4 (**Teorema de Clifford**). *Sea S un semigrupo, las siguientes son equivalentes*

(**1**) *S es semigrupo de Clifford.*

(**2**) *S es semireticulo de grupos.*

Demostración. Ver [16, pag 76]. ♠

3.2. Semigrupo de Picard

Sea P un R-módulo pfg, si para todo $\mathfrak{p} \in Spec\,(R)$ tenemos:

$$P_{\mathfrak{p}} = 0 \quad ó \quad P_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}} \text{ como } R_{\mathfrak{p}}\text{-módulos.}$$

Decimos que el rango de P es ≤ 1 y escribimos $\mathrm{rk}\,(P) \leq 1$. Además por la demostración de la Proposición 2.9 tenemos

Corolario 3.5. *Si* $\mathrm{rk}\,(M) \leq 1$*, entonces* $\mathrm{rk}\,(M \otimes_R S) \leq 1$.

Ahora, definimos

$$\mathbf{PicS}\,(R) = \{[E] : \; E \text{ es } R\text{-módulo pfg y } \mathrm{rk}\,(E) \leq 1\}\,. \tag{3.4}$$

Dicho conjunto es conocido como el **Semigrupo de Picard** donde su producto está definido de la misma forma que en (2.5) y como ya vimos previamente dicho producto es asociativo.
Los siguientes resultados dan información sobre la estructura de $\mathbf{PicS}(R)$.

Proposición 3.6. *El conjunto definido en (3.4) y*

$$A = \{[P] : \; P \text{ es } R\text{-módulo pfg y existe un epimorfismo } R \to End_R(P)\}$$

son iguales.

Demostración. Sea E un R-módulo pfg tal que $\operatorname{rk}(E) \leq 1$. Considere la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} m_R : & R & \to & End(E) \\ & r & \mapsto & m_r \end{array}$$

donde $m_r(x) = rx$ para $r \in R$ y $x \in E$.
Sea $\mathfrak{p} \in Spec(R)$, entonces

$$R_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{(m_R)_{\mathfrak{p}}} End_{R_{\mathfrak{p}}}(E_{\mathfrak{p}})$$

es epimorfismo en vista que:

$$End_{R_{\mathfrak{p}}}(E_{\mathfrak{p}}) = Hom_{R_{\mathfrak{p}}}(E_{\mathfrak{p}}, E_{\mathfrak{p}}) \simeq Hom_{R_{\mathfrak{p}}}\left(R_{\mathfrak{p}}^{n_{\mathfrak{p}}}, R_{\mathfrak{p}}^{n_{\mathfrak{p}}}\right)$$

que es isomorfo a $R_{\mathfrak{p}}$ si $n_{\mathfrak{p}} = 1$ ó es nulo si $n_{\mathfrak{p}} = 0$.
Recíprocamente, si $[E] \in A$, entonces E es un R-módulo pfg y existe un epimorfismo de R en $End_R(E)$. Luego para $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ existe un epimorfismo de R-álgebras

$$R_{\mathfrak{p}} \to End_{R_{\mathfrak{p}}}\left(R_{\mathfrak{p}}^{n_{\mathfrak{p}}}\right) \simeq R_{\mathfrak{p}}^{n_{\mathfrak{p}}},$$

donde $n_{\mathfrak{p}} = \operatorname{rk}_{R_{\mathfrak{p}}}(E_{\mathfrak{p}})$, así $n_{\mathfrak{p}} \leq 1$. ♠

La Proposición anterior significa que $\mathbf{PicS}(R)$ es el conjunto de clases $[P]$, R-módulos

parcialmente invertibles, donde P es llamado parcialmente invertible si P es un R-módulo pfg y existe un epimorfismo de R-álgebras $\Lambda^{op} \to End_R(P)$, donde en este caso $\Lambda^{op} = R$ por tratarse de un anillo conmutativo con unidad. Ver [12].

Proposición 3.7. *$\mathcal{U}(\mathbf{PicS}(R)) = \mathbf{Pic}(R)$.*

Demostración. Por la definición dada en (3.4) es claro que $\mathcal{U}(\mathbf{PicS}(R)) \supseteq \mathbf{Pic}(R)$ ya que si $[P] \in \mathbf{Pic}(R)$ entonces $\mathrm{rk}(P) = 1$ y existe $[P^*] \in \mathbf{Pic}(R)$ tal que $[P][P^*] = [R]$, es decir $[P] \in \mathcal{U}(\mathbf{PicS}(R))$. Recíprocamente, si $[E] \in \mathcal{U}(\mathbf{PicS}(R))$ existe $[P] \in \mathbf{PicS}(R)$ tal que $E \otimes P \simeq R$, entonces $E_\mathfrak{p} \otimes P_\mathfrak{p} \simeq R_\mathfrak{p}$ para todo $\mathfrak{p} \in Spec(R)$. Por lo tanto $E_\mathfrak{p} \neq 0$, que implica que $\mathrm{rk}(E) = 1$. ♠

Lema 3.8. *Si L es un R-módulo pfg, entonces existe $\varphi : L \to L^{**}$ un isomorfismo de R-módulos.*

Demostración. Sea F un R-módulo libre con generadores $e_1, \ldots, e_n$. Podemos definir los elementos $e^j \in F^*$ por:

$$e^j(e_i) = 1 \ si \ i = j,$$
$$e^j(e_i) = 0 \ si \ i \neq j.$$

Sea $x \in F$, entonces

$$e^1(x) + \cdots + e^n(x) = 0$$

solo es posible si $x = 0$, luego $e^1, \ldots, e^n$ son linealmente dependientes.
Así, como $f : F \to R$ es determinado por los elementos $f(e_i) = r_i \in R$, entonces $f = \sum e^j r_j$, lo que implica que F^* es libre con generadores $e^1, \ldots, e^n$.
Ahora, la aplicación $\varphi_F : F \to F^{**}$ tal que a cada e_i le asigna al elemento de la base dual de $\{e^j : 1 \leq j \leq n\}$, es un isomorfismo. Como L es pfg, existe F libre y finitamente generado tal que $F \simeq L \oplus L'$, así $F^{**} \simeq L^{**} \oplus L'^{**}$ y se cumple:

$$L \oplus L' \simeq F \overset{\varphi_F}{\simeq} F^{**} \simeq L^{**} \oplus L'^{**},$$

donde este isomorfismo lleva a L en L^{**}, de donde se concluye el resultado. ♠

Proposición 3.9. *El conjunto* $\mathbf{PicS}(R)$ *es un monoide conmutativo, inverso con 0. Además,* $[E]' = [E^*]$.

Demostración. Si $[M] \in \mathbf{PicS}(R)$, $(M^*)_{\mathfrak{p}} \simeq (M_{\mathfrak{p}})^* \simeq Hom_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}})$ para todo $\mathfrak{p} \in Spec(R)$. Debemos probar que $[M][M^*][M] = [M]$ y $[M^*][M][M^*] = [M^*]$.
Dado que $M \otimes M^* \simeq End_R(M)$ ya que M es R-módulo pfg. Entonces

$$[M][M^*][M] = [End_R(M)][M].$$

Considere el homomorfismo de R-módulos

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{K}: & End_R(M) \otimes M & \to & M \\ & f \otimes m & \mapsto & f(m) \end{array}$$

Ahora, localizando por $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ tenemos los siguientes casos:

- Caso 1: Si $M_{\mathfrak{p}} = 0$, entonces $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}} : 0 \to 0$ es claramente un isomorfismo de R-módulos.
- Caso 2: Si $M_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}}$, entonces

  $$\begin{array}{rccc} \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}: & R_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} R_{\mathfrak{p}} & \to & R_{\mathfrak{p}} \\ & r'_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} r_{\mathfrak{p}} & \mapsto & r'_{\mathfrak{p}} r_{\mathfrak{p}} \end{array}$$

  es un isomorfismo de $R_{\mathfrak{p}}$-módulos.

De ahí se concluye que $[M][M^*][M] = [M]$ para todo $[M] \in \mathbf{PicS}(R)$ y como M es R-módulo pfg, por el Lema 3.8 se tiene que $M \simeq (M^*)^*$, entonces

$$[M^*] = [M^*][M^{**}][M^*] = [M^*][M][M^*]. \qquad \spadesuit$$

Por la Proposición 3.9 y (3.3) que corresponde a uno de los Teoremas de Cliford, tenemos que $\mathbf{PicS}(R)$ es un semireticulo de grupos abelianos, en particular:

$$\mathbf{PicS}(R) = \bigcup_{\zeta \in F(R)} \mathbf{PicS}_{\zeta}(R),$$

donde $F(R)$ es el semireticulo isomorfo al semireticulo de idempotentes de $\mathbf{PicS}(R)$. Nuestro objetivo ahora es describir $F(R)$.

Sea M un R-módulo, definimos:

$$Ann_R(M) = \{x \in R : \ xm = 0, \ \forall m \in M\}$$

el anulador de M.

Proposición 3.10. *Sea M un R-módulo finitamente generado, los conjuntos:*

$$Supp_R(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : \ M_{\mathfrak{p}} \neq 0\},$$

y

$$V(Ann_R(M)) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : \ \mathfrak{p} \supseteq Ann_R(M)\}$$

son iguales.

Demostración. Sea $\mathfrak{p} \in Supp_R(M)$, entonces $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Supongamos que $\mathfrak{p} \not\supseteq Ann_R(M)$, luego existe $r \in Ann_R(M)$ tal que $r \notin \mathfrak{p}$. Así, denotando $S = R \backslash \mathfrak{p}$ tenemos que $r \in S$, por lo tanto $\frac{m}{r} \in M_{\mathfrak{p}}$ para $m \in M$. Note que $M_{\mathfrak{p}} \ni \frac{m}{r} = \frac{0}{s}$ pues para todo $t \in S$ se cumple que $t(ms - 0r) = 0$, lo que resulta en una contradicción, por lo tanto $\mathfrak{p} \supseteq Ann_R(M)$.

Recíprocamente, sea $\mathfrak{p} \in V(Ann_R(M))$ y $\{m_i\}_{i \in I}$ el conjunto generador de M con I finito, entonces $Ann_R(M) \subseteq \mathfrak{p}$, supongamos que $M_{\mathfrak{p}} = 0$, por lo tanto:

$$\frac{m_i}{s} = \frac{0}{1} \ \Rightarrow \ \exists t_i \in S \text{ tal que } t_i(m_i \cdot 1 - s \cdot 0) = 0 \ \Rightarrow \ t_i m_i = 0,$$

además, como $m = \sum_{i \in I} r_i m_i$ para todo $m \in M$, defina $t = \prod_{i \in I} t_i$, note que $t \in S$ ya que S es multiplicativo, así:

$$t \cdot m = \prod_{i \in I} t_i \sum_{i \in I} r_i m_i = \sum_{i \in I} r_i \left(\underbrace{\left(\left(\prod_{i \in I} t_i \right) \cdot m_i \right)}_{=0} \right) = 0,$$

entonces $\frac{m}{s} = \frac{0}{1}$ y $t \in Ann_R(M)$ que es una contradicción. ♠

Sea M un R-módulo y $I_M = Ann_R(M)$, entonces M es un $R/_{I_M}$-módulo fiel, donde

$$\begin{array}{ccc} R/_{I_M} \times M & \longrightarrow & M \\ (\overline{r}, m) & \longmapsto & rm. \end{array}$$

El siguiente lema caracteriza a los idempotentes de $\mathbf{PicS}(R)$.

Lema 3.11. *Sea M un R-módulo pfg y $I_M = Ann_R(M)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(**1**) *$M \otimes M \simeq M$;*

(**2**) *$M \simeq R/_{I_M}$ como R-módulos;*

(**3**) *$M \simeq Re$ para e idempotente de R. Además $I_M = R(1-e)$.*

Demostración. ($\mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{2}$) Si $M \otimes M \simeq M$, entonces existe un isomorfismo de R-módulos $\varphi : M \otimes M \to M$, veamos que existe $\overline{\lambda} : M \otimes_{R/I_M} M \to M$ isomorfismo de $R/_{I_M}$-módulos. Para esto, definamos:

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & M \times M & \to & M \\ & (m, m') & \mapsto & \varphi(m \otimes m') \end{array}$$

que resulta siendo bilineal:

$$\begin{aligned}\lambda(m+n,m') &= \varphi((m+n)\otimes m')\\ &= \varphi(m\otimes m')+\varphi(n\otimes m')\\ &= \lambda(m,m')+\lambda(n,m'),\end{aligned}$$

es balanceada, pues para $\overline{a}\in R\big/_{I_M}$ tenemos

$$\begin{aligned}\lambda(\overline{a}m\otimes m')=\lambda(am,m') &= \varphi(am\otimes m')\\ &= \varphi(m\otimes am')\\ &= \lambda(m,\overline{a}m').\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{array}{rrcl}\overline{\lambda}: & M\otimes_{R/I_M} M & \to & M\\ & m\otimes_{R/I_M} m' & \mapsto & \varphi(m\otimes m')\end{array}$$

es un homomorfismo de $R\big/_{I_M}$-módulos. Ahora, como φ es isomorfismo, es fácil ver que $\overline{\lambda}$ es un isomorfismo. Entonces, para $\mathfrak{p}\in Spec(R)$ tenemos:

$$M_{\mathfrak{p}}\otimes_{R/I_M} M_{\mathfrak{p}} \simeq M_{\mathfrak{p}},$$

pero

$$M_{\mathfrak{p}}\simeq\left(R\big/_{I_M}\right)^{n_{\mathfrak{p}}}\quad \text{y}\quad M_{\mathfrak{p}}\otimes_{R/I_M} M_{\mathfrak{p}}\simeq\left(R\big/_{I_M}\right)^{n_{\mathfrak{p}}}\otimes_{R/I_M}\left(R\big/_{I_M}\right)^{n_{\mathfrak{p}}}\simeq\left(R\big/_{I_M}\right)^{n_{\mathfrak{p}}^2},$$

así

$$\left(R\big/_{I_M}\right)^{n_{\mathfrak{p}}^2}\simeq\left(R\big/_{I_M}\right)^{n_{\mathfrak{p}}},$$

por lo tanto $n_{\mathfrak{p}}\in\{0,1\}$, luego $\mathrm{rk}_{R/I_M}(M)\leq 1$. Además, como $Supp_{R/I_M}(M)=V\left(\overline{0}\right)=Spec(R/I_M)$ y M es un R-módulo pfg fiel tenemos que $[M]\in\mathbf{Pic}\left(R\big/_{I_M}\right)$, pero como

$[M]$ es idempotente por hipótesis, él debe ser la identidad del grupo $\mathbf{Pic}\left(R\big/_{I_M}\right)$ es un grupo. Entonces

$$M \simeq R\big/_{I_M}$$

como $R\big/_{I_M}$-módulos, entonces existe $\varphi : M \to R\big/_{I_M}$ isomorfismo de $R\big/_{I_M}$-módulos, que nos lleva a que φ es R-lineal.

($\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{3}$) Como $M \simeq R\big/_{I_M}$ como R-módulos, entonces R$\big/_{I_M}$ es pfg. Por tanto la sucesión

$$0 \to I_M \to R \to R\big/_{I_M} \to 0$$

escinde, así I_M es un sumando directo de R, y como sabemos, si R es un anillo con un ideal I que es sumando directo de R, entonces existe un idempotente e tal que $I = Re$, consecuentemente, existe un idempotente f tal que $I_M = Rf$, por lo tanto:

$$R = Rf \oplus R\left(1 - f\right),$$

entonces

$$M \simeq R\,/I_M = R\,/Rf \simeq R\left(1 - f\right)$$

y haciendo $e = 1 - f$, concluimos que $M \simeq Re$.

($\mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1}$) Si $M \simeq Re$, entonces:

$$M \otimes M \simeq Re \otimes Re \simeq Re^2 \otimes R \simeq Re \otimes R \simeq Re \simeq M. \qquad \spadesuit$$

Sea $\mathbf{I_p}\left(R\right)$ el semireticulo de idempotentes de R con respecto al producto. Por el Lema 3.11 tenemos que $\mathbf{I_p}\left(R\right)$ es isomorfo al semireticulo de idempotentes de $\mathbf{PicS}\left(R\right)$, entonces:

$$\mathbf{PicS}\left(R\right) = \bigcup_{e \in \mathbf{I_p}(R)} \mathbf{PicS}_e\left(R\right),$$

con $\mathbf{PicS}_e\left(R\right)$ grupo abeliano, entonces para todo $e \in \mathbf{I_p}\left(R\right)$ denotamos por $[M_e]$ la identidad de $\mathbf{PicS}_e(R)$, así $[M_e][M_f] = [M_{ef}]$ y

$$\mathbf{PicS}_e(R)\ \mathbf{PicS}_f(R) \subseteq \mathbf{PicS}_{ef}(R) \quad \forall e, f \in \mathbf{I_p}(R).$$

Lema 3.12. *Note que para un R-módulo N*

$$Ann_R(N) = Ann_R(End_R(N)),$$

y si N es proyectivo tenemos que:

$$Ann_R(N) = Ann_R(N^*).$$

Demostración. Sean $r \in Ann_R(N)$ y $f \in End_R(N)$, entonces:

$$rf(n) = f(rn) = f(0) = 0 \;\Rightarrow\; r \in Ann_R(End_R(N)).$$

Ahora, si $r \in Ann_R(End_R(N))$, entonces $f(rn) = rf(n) = 0$, en particular para $f = \mathrm{id}_N$ tenemos que $0 = \mathrm{id}_N(rn) = rn$ para todo $n \in N$. Por lo tanto $r \in Ann_R(N)$. Además, supongamos ahora que el R-módulo N es proyectivo, sea $r \in Ann_R(N^*)$, como N es proyectivo satisface el teorema de la base dual, es decir, existen $\{f_i, n_i\}_{i\in I}$ tal que:

$$n = \sum_{i\in I} f_i(n)\, n_i \quad \forall n \in N,$$

entonces,

$$rn = r\sum_{i\in I} f_i(n)\, n_i = \sum_{i\in I} rf_i(n)\, n_i = 0 \;\Rightarrow\; r \in Ann_R(N).$$

Así mismo, si $r \in Ann_R(N)$ y $f \in N^*$

$$rf(n) = f(rn) = f(0) = 0 \;\Rightarrow\; r \in Ann_R(N^*). \qquad ♠$$

Lema 3.13. $\mathbf{PicS}_e(R) = \{[N] \in \mathbf{PicS}(R) : \; Ann_R(N) = R(1-e)\} \simeq \mathbf{Pic}(Re)$ *para* *todo* $e \in \mathbf{I_p}(R)$*. En particular, el elemento identidad de* $\mathbf{PicS}_e(R)$ *es* $[Re]$*.*

Observación 3.3. Para la demostración que sigue vamos a denotar $[N]_R$ la clase de N enfatizando que es un R-módulo.

Demostración. Veamos primero que

$$\mathbf{PicS}_e(R) = \{[N] \in \mathbf{PicS}(R) : \ Ann_R(N) = R(1-e)\}$$

Sea $[N] \in \mathbf{PicS}_e(R)$. Entonces

$$End_R(N) \simeq N \otimes N^* \overset{(\clubsuit)}{\simeq} M_e \simeq Re, \tag{3.5}$$

donde $(\clubsuit)$ se da por $[N \otimes N^*]$ ser el neutro en $\mathbf{PicS}_e(R)$ y el último isomorfismo gracias al Lema 3.11. Además, como $Ann_R(N) = Ann_R(End_R(N))$ y por (3.5) tenemos que $Ann_R(End_R(N)) = R(1-e)$, por tanto $Ann_R(N) = R(1-e)$, así $\mathbf{PicS}_e(R) \subseteq \{[N] \in \mathbf{PicS}(R) : \ Ann_R(N) = R(1-e)\}$.
Ahora si $Ann_R(N) = R(1-e)$ tenemos que

$$N \otimes Me \simeq N \otimes Re \simeq Ne \simeq Ne \oplus N(1-e) = N$$

como R-módulos, luego $[N] \in \mathbf{PicS}_e(R)$. Por tanto

$$\mathbf{PicS}_e(R) \supseteq \{[N] \in \mathbf{PicS}(R) : \ Ann_R(N) = R(1-e)\}.$$

Veamos que

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbf{PicS}_e(R) & \longrightarrow & \mathbf{Pic}(Re) \\ & [N]_R & \longmapsto & [Ne]_{Re} \end{array}$$

es un isomorfismo.
Note que φ es inyectiva en vista que si $[N] \in \ker\varphi$, entonces $Ne \simeq Re$ como Re-módulos, gracias a que $Ann_R(N) = R(1-e)$. Además, φ es sobre ya que si $[N] \in \mathbf{PicS}_e(R)$,

tenemos que $N = Ne = Ne \oplus N(1-e)$ y $Ann_R(N) = R(1-e)$ implica que $N = Ne$, luego haciendo $M = Ne$ se concluye el resultado.

Para finalizar note que la imagen de e $R_{\mathfrak{p}}$ es 0 (si $e \in \mathfrak{p}$) ó 1 (si $e \notin \mathfrak{p}$). Por lo tanto, $(eR)_{\mathfrak{p}}$ es libre de rango 0 ó 1, así $[eR] \in \mathbf{PicS}(R)$. ♠

Por el Lema 3.13 y lo que teníamos hasta ahora podemos concluir que:

$$\mathbf{PicS}(R) = \bigcup_{e \in \mathbf{I_p}(R)} \mathbf{PicS}_e(R) \simeq \bigcup_{e \in \mathbf{I_p}(R)} \mathbf{Pic}(Re), \tag{3.6}$$

es decir, el semigrupo de Picard de R ($\mathbf{PicS}(R)$) es la unión disyunta de grupos de Picard.

3.3. Ejemplos

Como vimos en (3.6) una forma de calcular $\mathbf{PicS}(R)$ es mirar los idempotentes de R, por lo tanto, en un principio nos centraremos en una forma de hallar dichos idempotentes.

Ejemplo 3.3. *Sea R un dominio o un anillo local, entonces los únicos idempotentes de R son 0_R y 1_R. Entonces podemos concluir que*

$$\mathbf{PicS}(R) = \mathbf{Pic}(R) \cup \{[0]\}.$$

Calcular idempotentes no es fácil, mas aún porque no siempre tenemos una estructura sencilla en R, veamos los idempotentes en anillos que sean familiares para nosotros como lo son los anillos $\mathbb{Z}_n$.

Ejemplo 3.4. *Considere $R = \mathbb{Z}_6$, note que $\mathbf{I_p}(\mathbb{Z}_6) = \{0, 1, 3, 4\}$, y por la descomposición obtenida*

$$\begin{aligned} \mathbf{PicS}(\mathbb{Z}_6) &\simeq \mathbf{Pic}(\mathbb{Z}_6) \cup \mathbf{Pic}(4\mathbb{Z}_6) \cup \mathbf{Pic}(3\mathbb{Z}_6) \cup \mathbf{Pic}(0\mathbb{Z}_6) \\ &\simeq \mathbf{Pic}(\mathbb{Z}_6) \cup \mathbf{Pic}(\mathbb{Z}_3) \cup \mathbf{Pic}(\mathbb{Z}_2) \cup \mathbf{Pic}(0) \\ &\simeq \{[\mathbb{Z}_6], [\mathbb{Z}_3], [\mathbb{Z}_2], [0]\}. \end{aligned}$$

Donde hemos usado que $\mathbf{Pic}(\mathbb{Z}_n) = \{[\mathbb{Z}_n]\}$ *por ser semilocal.*

El ejemplo anterior generó un resultado bastante curioso ya que como sabemos la parte difícil es hallar los idempotentes no triviales, pero en el caso de $\mathbb{Z}_n$ tenemos que los idempotentes satisfacen lo siguiente

Observación 3.4. Si $e \notin \{\overline{0}, \overline{1}\}$ es idempotente de $\mathbb{Z}_n$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces $e\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_m$, donde $\mathbb{Z}_m$ es un sumando directo de $\mathbb{Z}_n$.

Esto lo fundamenta el hecho que si $e \in \mathbf{I_p}(R)$, entonces Re es sumando directo de R. Recíprocamente, si $R = I \oplus J$, existen $f, g \in \mathbf{I_p}(R)$ tal que $I = Rf$ y $J = Rg$. Entonces existe una correspondencia entre $\mathbf{I_p}(R)$ y los sumandos directos de R.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{I_p}(R) & \rightarrow & \text{Sumando Directo} \\ e & \mapsto & Re \\ f & \leftarrow & I \end{array}$$

Por lo tanto, nos interesa hallar los sumandos directos de $\mathbb{Z}_n$ para $n \in \mathbb{N}$.

Lema 3.14. *Los sumandos directos de* $\mathbb{Z}_n$ *son de la forma* $\mathbb{Z}_m$*, donde* $\gcd\left\{m, \dfrac{n}{m}\right\} = 1$.

Demostración. $\Rightarrow$) Existe $s\,|n$ tal que $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_s \oplus \mathbb{Z}_m$ $(n = m \cdot s)$. Sea $d = \gcd\{s, m\}$, entonces $d\,|s$ y $d\,|m$, por lo que en $\mathbb{Z}_s$ y $\mathbb{Z}_m$ habrá un subgrupo de orden d. Pero como la suma es directa tenemos que $\mathbb{Z}_s \cap \mathbb{Z}_m = \{0\}$, por lo tanto $d = 1$, es decir $\gcd\left\{\dfrac{n}{m}, m\right\} = 1$.

$\Leftarrow$) Sea $r, s \in \mathbb{Z}$ tal que $\gcd\{r, s\} = 1$ y $r \cdot s = m$. Entonces $\langle \overline{r} \rangle \oplus \langle \overline{s} \rangle = \mathbb{Z}_m$ y como $\langle \overline{s} \rangle = \mathbb{Z}_r$ y $\langle \overline{r} \rangle = \mathbb{Z}_s$ entonces $\langle \overline{r} \rangle \cap \langle \overline{s} \rangle = 0$. ♠

Ahora, usando esté lema podremos hallar los idempotentes de un $\mathbb{Z}_n$ cualquiera.

Ejemplo 3.5. *Usando el lema anterior tenemos que* $\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$*, por lo tanto necesitamos* e_1, e_2 *tales que* $e_1\mathbb{Z}_{12} \simeq \mathbb{Z}_3$ *y* $e_2\mathbb{Z}_{12} \simeq \mathbb{Z}_4$*. Note que* e_1 *y* e_2 *deben satisfacer* *la siguiente congruencia*

$$e_1 \cdot 3 \cong 0\,(mod 12) \quad \text{y} \quad e_2 \cdot 4 \cong 0\,(mod 12)$$

De ahí que las opciones para e_1 sean 4 y 8 mientras que para e_2 son 3 y 9, pero como tenemos que

$$\begin{aligned} 4 \cdot 4 &\cong 4\,(mod 12) \\ 8 \cdot 8 &\cong 4\,(mod 12) \\ 3 \cdot 3 &\cong 9\,(mod 12) \\ 9 \cdot 9 &\cong 9\,(mod 12) \end{aligned}$$

tenemos que $I_p(\mathbb{Z}_{12}) = \{0, 1, 4, 9\}$. Pero como vimos, no es necesario hallar los idempotentes porque tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{PicS}(\mathbb{Z}_{12}) &\simeq \mathbf{Pic}(\mathbb{Z}_{12}) \cup \mathbf{Pic}(4\mathbb{Z}_{12}) \cup \mathbf{Pic}(9\mathbb{Z}_{12}) \cup \mathbf{Pic}(0\mathbb{Z}_{12}) \\ &\simeq \mathbf{Pic}(\mathbb{Z}_{12}) \cup \mathbf{Pic}(\mathbb{Z}_3) \cup \mathbf{Pic}(\mathbb{Z}_4) \cup \mathbf{Pic}(0) \\ &\simeq \{[\mathbb{Z}_{12}], [\mathbb{Z}_3], [\mathbb{Z}_4], [0]\}. \end{aligned}$$

Esto garantiza que no era necesario hallar los idempotentes ya que al fin y al cabo queremos son los sumandos directos de $\mathbb{Z}_{12}$.

Así mismo, note que $\mathbf{PicS}(\mathbb{Z}_{30}) \simeq \{[\mathbb{Z}_{30}], [\mathbb{Z}_2], [\mathbb{Z}_3], [\mathbb{Z}_5], [\mathbb{Z}_6], [\mathbb{Z}_{10}], [\mathbb{Z}_{15}], [0]\}$ ya que 2, 3, 5, 6, 10 y 15 satisfacen el lema anterior. Por lo tanto, podemos generalizar la idea de $\mathbf{PicS}(\mathbb{Z}_n)$ para $n \in \mathbb{N}$ como sigue:

$$\mathbf{PicS}(\mathbb{Z}_n) \simeq \{[\mathbb{Z}_n], [0]\} \cup \{[\mathbb{Z}_m]\}_{m \in M}$$

donde $M = \left\{ m \,| n : \ \gcd\left(m, \frac{n}{m}\right) = 1 \right\}$.

En general, si R tiene un número finitos de idempotentes se cumple

$$R = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i$$

donde e_i es un idempotente minimal, usando el orden de Rees definido en (3.1). Además, para M pfg se cumple que

- Si rk es 0 en $Spec\,(Re_i)$, entonces $Me_i = 0$.
- Si rk es 1 en $Spec\,(Re_i)$, entonces Me_i es un Re_i-módulo invertible.

Por lo tanto:

$$\mathbf{PicS}\,(R) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\{0\} \cup \mathbf{Pic}\,(Re_i)\right).$$

Capítulo 4

Acciones Parciales

En este capitulo nuestro interés es estudiar las acciones parciales de un grupo en $\mathbf{PicS}(R)$, para ello necesitaremos estudiar en detalle algunos resultados relacionados con las acciones parciales, en particular en semigrupos inversos que nos proporcionan ejemplos bastante interesantes en este contexto.

4.1. Acciones de Grupo

Sea G un grupo y $\mathcal{X}$ un conjunto. Una **acción** de G en $\mathcal{X}$ es un homomorfismo $\phi : G \to S_{\mathcal{X}}$, donde $S_{\mathcal{X}}$ es el grupo de permutaciones de $\mathcal{X}$ con producto la composición de funciones. En este caso decimos que G opera en $\mathcal{X}$ vía ϕ.

En ocasiones es conveniente ver una acción de G en $\mathcal{X}$ como la función:

$$\begin{array}{rrcll} \phi : & G \times \mathcal{X} & \to & \mathcal{X} & \\ & (g, x) & \mapsto & \phi(g, x) & := \; g \cdot x \end{array}$$

satisface los siguientes axiomas de identidad y compatibilidad:

1. Sea e el elemento identidad de G, entonces $\phi(e, x) = e \cdot x = \mathrm{id} \cdot x = x$ para toda $x \in \mathcal{X}$.

2. $\phi(gh, x) = gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ para todo $g, h \in G$ y $x \in \mathcal{X}$.

Hay distintas clases de acciones y dependiendo de ellas hay gran cantidad de aplicaciones, en particular para la geometría, teoría algebraica de números, teoría descriptiva de conjuntos, entre otras.

4.2. Acciones parciales

Definición 4.1. Sea G un grupo con identidad 1 y $\mathcal{X}$ un conjunto.
Una **acción parcial** (conjuntista) α de G en $\mathcal{X}$ es una colección de subconjuntos $\mathcal{D}_g \subseteq \mathcal{X}$ $(g \in G)$ y biyecciones $\alpha_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g$ tales que:

(i) $\mathcal{D}_1 = \mathcal{X}$ y α_1 es la identidad de $\mathcal{X}$;

(ii) $\mathcal{D}_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_h^{-1}(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}})$;

(iii) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in \alpha_h^{-1}(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}})$.

Note que las condiciones **(ii)** y **(iii)** significan que la función α_{gh} es una extensión de $\alpha_g \circ \alpha_h$. Para esto observe que:

$$\operatorname{dom}(\alpha_g \circ \alpha_h) = \alpha_h^{-1}(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}). \tag{4.1}$$

Para comprobar la afirmación anterior, tome $x \in \operatorname{dom}(\alpha_g \circ \alpha_h)$, entonces existe $y \in \alpha_h(\mathcal{D}_{h^{-1}}) \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}$ y es tal que $\alpha_h(x) = y$. Como α_h es una biyección $\alpha_h(\mathcal{D}_{h^{-1}}) = \mathcal{D}_h$, así $y \in \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}$, por lo tanto $x \in \alpha_h^{-1}(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}})$. Recíprocamente, sea $x \in \alpha_h^{-1}(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}) \subseteq \alpha_h^{-1}(\mathcal{D}_h) = \mathcal{D}_{h^{-1}}$. Entonces existe $y \in \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}$ tal que $\alpha_h(x) = y$, y como $\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}} \subseteq \mathcal{D}_{g^{-1}}$, entonces $\alpha_h(x) \in \mathcal{D}_{g^{-1}}$, esto es, $x \in \operatorname{dom}(\alpha_g \circ \alpha_h)$.
Note que (4.1) y **(iii)** garantizan que α_{gh} es una extensión de $\alpha_g \circ \alpha_h$.
Además, se puede probar que $\alpha_{h^{-1}} = \alpha_h^{-1}$. Para esto observe que $\alpha_h^{-1} : \mathcal{D}_h \to \mathcal{D}_{h^{-1}}$ es una biyección (recuerde que $\alpha_{h^{-1}} : \mathcal{D}_h \to \mathcal{D}_{h^{-1}}$) y veamos que $\alpha_h \circ \alpha_{h^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathcal{D}_h}$.

En efecto:

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}\left(\alpha_h \circ \alpha_{h^{-1}}\right) &\overset{(4.1)}{=} \alpha_{h^{-1}}^{-1}\left(\mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{h^{-1}}\right)\\ &= \alpha_{h^{-1}}^{-1}\left(\mathcal{D}_{h^{-1}}\right) = \mathcal{D}_h\end{aligned}$$

y para $x \in \mathcal{D}_h$

$$\begin{aligned}\alpha_h \circ \alpha_{h^{-1}}(x) &\overset{\textbf{(iii)}}{=} \alpha_{hh^{-1}}(x)\\ &= \alpha_1(x) \overset{\textbf{(i)}}{=} \mathrm{id}_{\mathcal{D}_h}(x).\end{aligned}$$

Ahora, la parte (**ii**) de la Definición 4.1 puede ser cambiado por una condición mas fuerte que es la siguiente:

(**ii′**) $\alpha_h^{-1}\left(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}\right) = \mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}$.

Veamos que (**ii**) y (**ii′**) son equivalentes:

Demostración. (**ii′**) $\Rightarrow$ (**ii**)
$\alpha_h^{-1}\left(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}\right) = \mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}} \subseteq \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}} = \mathcal{D}_{(gh)^{-1}}$.
(**ii**) $\Rightarrow$ (**ii′**)
Por (**ii**) tenemos $\alpha_h^{-1}\left(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}\right) \subseteq \mathcal{D}_{(gh)^{-1}} = \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}$ y como $\alpha_{h^{-1}} = \alpha_h^{-1}$ luego

$$\alpha_{h^{-1}}\left(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}\right) \subseteq \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}.$$

Sea $x \in \alpha_{h^{-1}}\left(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}\right)$, entonces $x \in \alpha_{h^{-1}}\left(\mathcal{D}_h\right)$, y como $\alpha_{h^{-1}}$ es biyectiva entonces $x \in \mathcal{D}_{h^{-1}}$, por lo tanto:

$$\alpha_{h^{-1}}\left(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}\right) \subseteq \mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}, \text{ para todo } g, h \in G. \tag{4.2}$$

Reemplazando h por h^{-1} y g por gh en (4.2) tenemos:

$$\alpha_h\left(\mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}\right) \subseteq \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}},$$

entonces aplicando $\alpha_{h^{-1}}$ tenemos:

$$\alpha_{h^{-1}}\left(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}\right) \subseteq \mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}. \qquad \spadesuit$$

Por lo tanto, las condiciones (**i**) - (**iii**) son equivalentes a:

(**i**) $\mathcal{D}_1 = \mathcal{X}$ y α_1 es la identidad de $\mathcal{X}$;

(**ii′**) $\alpha_h^{-1}\left(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}\right) = \mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{h^{-1}g^{-1}}$;

(**iii**) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}_{h^{-1}} \cap \mathcal{D}_{(gh)^{-1}}$.

Observación 4.1. Si α es una acción parcial G en $\mathcal{X}$ se denotará por $\alpha = \left(\alpha_g,\ \mathcal{D}_g\right)_{g\in G}$ o $\alpha = \left\{\alpha_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g\right\}_{g\in G}$, donde se sobrentiende que los α_g y los $\mathcal{D}_g$ satisfacen la Definición 4.1.

Un caso particular que suele suceder es que cuando $\mathcal{X} = \mathcal{A}$ con $\mathcal{A}$ un K-álgebra cada uno de los $\mathcal{D}_g$ resulta ser un ideal de $\mathcal{A}$ y cada α_g un isomorfismo de álgebras.
Veamos un ejemplo de una acción parcial:

Ejemplo 4.1. *Sea R un anillo conmutativo y $S = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3$, donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es un conjunto de idempotentes ortogonales, no nulos, cuya suma es 1. Denotemos por G el grupo cíclico de orden 4 generado por σ, y definimos la acción parcial de G en S tomando:*

- $S_1 = S$ y $\alpha_1 = \mathrm{id}_S$.
- $S_\sigma = Re_1 \oplus Re_2$ y $\alpha_\sigma : S_{\sigma^3} \to S_\sigma$ tal que $\alpha_\sigma(e_2) = e_1$ y $\alpha_\sigma(e_3) = e_2$.
- $S_{\sigma^2} = Re_1 \oplus Re_3$ y $\alpha_{\sigma^2} : S_{\sigma^2} \to S_{\sigma^2}$ tal que $\alpha_{\sigma^2}(e_1) = e_3$ y $\alpha_{\sigma^2}(e_3) = e_1$.
- $S_{\sigma^3} = Re_2 \oplus Re_3$ y $\alpha_{\sigma^3} : S_\sigma \to S_{\sigma^3}$ tal que $\alpha_{\sigma^3}(e_1) = e_2$ y $\alpha_{\sigma^3}(e_2) = e_3$.

Es claro que S_{σ^i} es un ideal de S por como están definidos, así como cada α_{σ^i} es un isomorfismo definido convenientemente para satisfacer a la Definición 4.1. Ahora para $h = \sigma^i \in G$ observemos los siguientes casos:

- $S_h \cap S_1 = S_h$ y $\alpha_h^{-1}(S_h) = S_{h^{-1}}$, para todo $h \in G$.

- $S_h \cap S_h = S_h$ y $\alpha_h^{-1}(S_h) = S_{h^{-1}} \subseteq S_1$, para todo $h \in G$.

Con las anteriores se cumplen los numerales (**ii**) y (**iii**) (aprovechando las propiedades de G) para todos los casos excepto para:

- $S_{\sigma^2} \cap S_{\sigma^3} = Re_3$

- $\alpha_{\sigma^2}(Re_3) = Re_1 \subseteq S_\sigma$

- $\alpha_\sigma(\alpha_{\sigma^2}(re_1)) = \alpha_\sigma(re_3) = re_2$ y $\alpha_{\sigma^3}(re_1) = re_2$

Por lo tanto $\alpha = (\alpha_g, S_g)_{g \in G}$ es acción parcial de G en S.
Trabajaremos con acciones parciales $\alpha = (\alpha_g, \mathcal{D}_g)_{g \in G}$ de grupos en álgebras. Esto es, acciones parciales conjuntistas tal que cada $\mathcal{D}_g$ es ideal y cada α_g es un isomorfismo de álgebras.

4.3. Acciones parciales en Semigrupos

Nos interesa estudiar la estructura que debe tener una acción parcial α de G en un semigrupo S (en particular, cuando el semigrupo es $\mathbf{PicS}(R)$).
Cuando trabajamos las acciones parciales de G en un álgebra $\mathcal{A}$, necesitábamos que $\mathcal{D}_g$ fuera ideal de $\mathcal{A}$ para todo $g \in G$ y los α_g fueran isomorfismos, por lo tanto para estudiar las acciones parciales en semigrupos es necesario recordar como son los ideales de un semigrupo S, así como los homomorfismos de semigrupos.

Definición 4.2. Sea S un semigrupo, $I \subseteq S$ es **ideal** si:

- $\gamma I \subseteq I$ para todo $\gamma \in S$;

- $I\gamma \subseteq I$ para todo $\gamma \in S$.

Note que es muy similar a los ideales en anillos, salvo que aquí no se pide que sea grupo aditivo, esto ya que la estructura de semigrupo es bastante peculiar, por ejemplo, sea $s \in S$, entonces:

$$\langle s \rangle = \{y : \ y = \gamma s \lambda, \ \gamma, \lambda \in S\},$$

el ideal generado por $s \in S$, que en general se tiene $\langle s \rangle = SsS$, pero si S es conmutativo $\langle s \rangle = sS$.

Observación 4.2. Es posible que $s \notin \langle s \rangle$ en semigrupos.

Por lo tanto, una acción parcial α de G en un semigrupo S es:

$$\alpha = \{\alpha_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g\}_{g \in G}$$

con $\mathcal{D}_g$ ideal de S y α_g isomorfismo de semigrupos para todo $g \in G$, que satisfacen:

(1) $\mathcal{D}_1 = S$ y $\alpha_1 = \mathrm{id}_S$;

(2) $\mathcal{D}_{(gh)^{-1}} \supseteq \alpha_{h^{-1}} (\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}})$;

(3) $\alpha_g \circ \alpha_h (x) = \alpha_{gh} (x)$ para todo $x \in \alpha_h^{-1} (\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}})$.

Recordemos que **(2)** y **(3)** son equivalentes a que α_{gh} extiende a $\alpha_g \circ \alpha_h$.

4.4. Acciones parciales en PicS (R)

Sea $\alpha = (\alpha_g, \ \mathcal{D}_g)_{g \in G}$ una acción parcial unitaria de un grupo G en R, esto es, dado $g \in G$ existe 1_g idempotente de R tal que $\mathcal{D}_g = R \cdot 1_g$. Entonces:

$$\alpha_g (\alpha_h (y 1_{h^{-1}}) 1_{g^{-1}}) = \alpha_{gh} \left(y 1_{(gh)^{-1}} \right) 1_g \tag{4.3}$$

en vista que:

$$\begin{aligned}
\alpha_g\left(\alpha_h\left(y1_{h^{-1}}\right)1_{g^{-1}}\right) &= \alpha_g\left(\alpha_h\left(y1_{h^{-1}}\right)1_h 1_{g^{-1}}\right)\\
&\overset{(5.1)}{=} \alpha_g\left(\alpha_h\left(y1_{h^{-1}}\right)\alpha_h\left(1_{(gh)^{-1}}1_{h^{-1}}\right)\right)\\
&= \alpha_g\left(\alpha_h\left(y1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}}1_{h^{-1}}\right)\right)\\
&= \alpha_{gh}\left(y1_{(gh)^{-1}}1_{h^{-1}}\right)\\
&= \alpha_{gh}\left(y1_{(gh)^{-1}}\right)\alpha_{gh}\left(1_{(gh)^{-1}}1_{h^{-1}}\right)\\
&\overset{(5.1)}{=} \alpha_{gh}\left(y1_{(gh)^{-1}}\right)1_{gh}1_g\\
&= \alpha_{gh}\left(y1_{(gh)^{-1}}\right)1_g.
\end{aligned}$$

Los siguientes resultados nos permitirán construir una acción parcial en $\mathbf{PicS}(R)$.

Lema 4.1. *Sean E, F R-módulos y $g \in G$ con G grupo. Suponga que*

$$1_{g^{-1}}x = x \quad y \quad 1_{g^{-1}}y = y, \quad \forall x \in E,\ \forall y \in F.$$

Denotemos por E_g el conjunto E con la acción de R dada por:

$$r \bullet x_g = \alpha_{g^{-1}}\left(r1_g\right)x \quad r \in R,\ x_g \in E_g. \tag{4.4}$$

Entonces:

(**1**) *E_g es un R-módulo y $\left(E_g\right)_{\mathfrak{p}} = \left(E_{\mathfrak{p}}\right)_g$ como R-módulos, donde la acción de R en $\left(E_{\mathfrak{p}}\right)_g$ es:*

$$r \bullet \frac{x}{s} = \frac{\alpha_{g^{-1}}\left(r1_g\right)x}{s} \quad r \in R,\ x \in E,\ s \in R\backslash\mathfrak{p}.$$

(**2**) *$Hom_R(E,F) = Hom_R\left(E_g,F_g\right)$ como conjuntos. En particular:*

$$Iso_R(E,F) = Iso_R\left(E_g,F_g\right) \quad y \quad End_R(E) = End_R\left(E_g\right).$$

(**3**) *Si E es pfg, entonces E_g es pfg.*

(4) $(E \otimes F)_g \simeq E_g \otimes F_g$.

(5) *Si* $\operatorname{rk}(E) \leq 1$, *entonces* $\operatorname{rk}(E_g) \leq 1$.

Demostración. **(1)** Este resultado es inmediato teniendo en cuenta que

$$r \bullet \frac{x}{s} = \frac{r \bullet x}{s} \quad \forall x \in E,\ s \in R \backslash \mathfrak{p},$$

está bien definida.

(2) Sea $f \in Hom_R(E, F)$, f por definición de E_g está bien definida como función de E_g en F_g, debemos ver que es homomorfismo:

$$f(r \bullet x) = f(\alpha_{g^{-1}}(r1_g)\, x) = \alpha_{g^{-1}}(r1_g)\, f(x) = r \bullet f(x),$$

luego $Hom_R(E, F) \subseteq Hom_R(E_g, F_g)$. Ahora sea $f \in Hom_R(E_g, F_g)$, entonces

$$f(rx) = f(r1_{g^{-1}}x) = f(\alpha_{g^{-1}}(r'1_g)\, x) = f(r'x) = r' f(x),$$

donde $r' \in R$ es tal que $\alpha_{g^{-1}}(r'1_g) = r1_g$, por lo tanto:

$$f(rx) = r' f(x) = \alpha_{g^{-1}}(r'1_g)\, f(x) = r1_{g^{-1}} f(x) = r f(x).$$

(3) Sea $f \in E^*$, entonces:

$$\begin{array}{rccc} \alpha_g * f: & E_g & \rightarrow & R \\ & x & \mapsto & \alpha_g(f(x)\, 1_{g^{-1}}). \end{array}$$

Tenemos que $\alpha_g * f$ es un elemento de $(E_g)^*$ ya que:

$$\begin{aligned}
(\alpha_g * f)(r \bullet x) &= (\alpha_g * f)(\alpha_{g^{-1}}(r1_g)x) \\
&= \alpha_g(f(\alpha_{g^{-1}}(r1_g)x)1_{g^{-1}}) \\
&= r1_g(\alpha_g(f(x)1_{g^{-1}})) \\
&= r\alpha_g(f(x)1_{g^{-1}}) \\
&= r[(\alpha_g * f)(x)],
\end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}
(\alpha_g * f)(x+y) &= \alpha_g(f(x+y)1_{g^{-1}}) \\
&= \alpha_g(f(x)1_{g^{-1}}) + \alpha_g(f(y)1_{g^{-1}}) \\
&= (\alpha_g * f)(x) + (\alpha_g * f)(y).
\end{aligned}$$

Como E es pfg, existen $\{f_i, x_i\}_{i\in I}$ base dual con I finito. Luego

$$x = \sum_i f_i(x)x_i = \sum_i f_i(x)1_{g^{-1}}x_i = \sum_i (\alpha_g * f_i)(x) \bullet x_i,$$

donde:

$$\begin{aligned}
(\alpha_g * f_i)(x) \bullet x_i &= \alpha_{g^{-1}}((\alpha_g * f_i)(x)1_g)x_i \\
&= \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(f_i(x)1_{g^{-1}})1_g)x_i \\
&= (f_i(x)1_{g^{-1}})1_{g^{-1}}x_i \\
&= f_i(x)1_{g^{-1}}x_i.
\end{aligned}$$

Por lo tanto E_g tiene base dual $\{\alpha_g * f_i, x_i\}$, entonces E_g es pfg.

(**4**) Sea

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & E_g \times F_g & \to & (E \otimes F)_g \\ & (x,y) & \mapsto & (x \otimes y)_g \end{array}$$

veamos que φ es R-balanceada:

$$\begin{aligned} \varphi(r \bullet x, y) &= \varphi(\alpha_{g^{-1}}(r1_g)x, y) \\ &= (\alpha_{g^{-1}}(r1_g)x \otimes y)_g \\ &= (x \otimes \alpha_{g^{-1}}(r1_g)y)_g \\ &= \varphi(x, r \bullet y), \end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + x_2, y) &= ((x_1 + x_2) \otimes y)_g \\ &= (x_1 \otimes y + x_2 \otimes y)_g \\ &= \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y). \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{array}{rccc} \overline{\varphi}: & E_g \otimes F_g & \to & (E \otimes F)_g \\ & x \otimes y & \mapsto & (x \otimes y)_g \end{array}$$

es un homomorfismo de R-módulos, que es biyectivo. Por lo tanto $E_g \otimes F_g \simeq (E \otimes F)_g$.

(**5**) Sea $\mathfrak{p} \in Spec(R)$. Consideremos los siguientes casos:

- $E_{\mathfrak{p}} = 0$, entonces usando (**1**) tenemos $(E_g)_{\mathfrak{p}} = (E_{\mathfrak{p}})_g = 0$.
- Si $E_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}}$ como R-módulos, sabemos que $1_{g^{-1}}x = x$ para todo $x \in E$, así tenemos que $1_{g^{-1}}r_{\mathfrak{p}} = r_{\mathfrak{p}}$, para todo $r_{\mathfrak{p}} \in R_{\mathfrak{p}}$. Entonces $1_{g^{-1}} \in \mathfrak{p}$ (de lo contrario $1_{g^{-1}} \notin \mathfrak{p}$ implica que $R_{\mathfrak{p}} = 0$, que sería una contradicción) luego:

$$E_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}} = (\mathcal{D}_{g^{-1}})_{\mathfrak{p}} \text{ como } R\text{-módulos,}$$

por lo tanto, usando (**1**) nuevamente:

$$\left(E_g\right)_{\mathfrak{p}} = \left(E_{\mathfrak{p}}\right)_g = \left(\left(\mathcal{D}_{g^{-1}}\right)_{\mathfrak{p}}\right)_g = \left(\left(\mathcal{D}_{g^{-1}}\right)_g\right)_{\mathfrak{p}} \simeq \left(\mathcal{D}_g\right)_{\mathfrak{p}}.$$

Entonces $\mathrm{rk}\left(E_g\right) \leq 1$. ♠

Lema 4.2. *Para $g \in G$:*

$$X_g = \{[1_g E] : \ [E] \in \mathbf{PicS}(R)\} = [\mathcal{D}_g]\,\mathbf{PicS}(R).$$

Entonces, X_g es un ideal de $\mathbf{PicS}(R)$ y

(**i**) $X_g = \{[E] \in \mathbf{PicS}(R) : \ E = 1_g E\}$,

(**ii**) *Para $[E] \in X_{g^{-1}}$ tenemos $[E_g] \in X_g$.*

Demostración. Note que para $[F] \in \mathbf{PicS}(R)$:

$$[\mathcal{D}_g]\,[F] = [\mathcal{D}_g \otimes F] = [1_g R \otimes F] = [R \otimes 1_g F] = [1_g F].$$

(**i**) Por la forma en que se define X_g tenemos $\{[E] \in \mathbf{PicS}(R) : \ E = 1_g E\} \subseteq X_g$.

Ahora dado $[E] \in X_g$ existe $[F] \in \mathbf{PicS}(R)$ y un isomorfismo φ de R-módulos tal que $\varphi_g : 1_g F \to E$. Entonces,

$$E = \varphi_g\left(1_g F\right) = \varphi_g\left(1_g\left(1_g F\right)\right) = 1_g \varphi\left(1_g F\right) = 1_g E.$$

(**ii**) Note que $1_{g^{-1}} x_g = 1_{g^{-1}} x_g = x_g$ para todo $x_g \in E_g$, en vista que por (4.4) tenemos:

$$1_g \bullet x_g = \alpha_{g^{-1}}\left(1_g 1_g\right) x_g = \alpha_{g^{-1}}\left(1_g\right) x_g = 1_{g^{-1}} x_g = x_g, \quad \forall x_g \in E_g.$$

Como $x_g \in E_g$ que es igual como conjunto a E, por (**i**) $E = 1_{g^{-1}} E$ ya que $[E] \in X_{g^{-1}}$, entonces $x_g \in 1_{g^{-1}} E$, por lo tanto existe $e \in E$ tal que $1_{g^{-1}} e = x_g$, luego $1_{g^{-1}}\left(1_{g^{-1}} e\right) = 1_{g^{-1}} x_g$, que implica $x_g = 1_{g^{-1}} e = 1_{g^{-1}} x_g$.

Así, $1_g \bullet E_g = E_g$. Por el Lema 4.1 E_g es pfg y $\operatorname{rk}(E_g) \leq 1$. Por lo tanto $[E_g] \in$ **PicS** (R) y por (**i**) $[E_g] \in X_g$. ♠

Teorema 4.3. *La familia* $\alpha^* = \left(X_g, \alpha_g^*\right)_{g\in G}$, *donde:*

$$\begin{array}{rccc} \alpha_g^* : & X_{g^{-1}} & \to & X_g \\ & [E] & \mapsto & [E_g] \end{array}$$

Define una acción parcial de G *en* **PicS** (R).

Demostración. Veamos que α_g^* está bien definida para todo $g \in G$ y es un isomorfismo de semigrupos.

Sean $[E] = [F] \in X_{g^{-1}}$, así $E = 1_{g^{-1}}E$ y $F = 1_{g^{-1}}F$, por el Lema 4.2 parte (**ii**) $[E_g] = [F_g] \in X_g$. En efecto, como $E \simeq F$ existe $\varphi : E \to F$ isomorfismo y por el item (**2**) del Lema 4.1 tenemos que $Iso_R(E, F) = Iso_R(E_g, F_g)$, por lo tanto $\varphi : E_g \to F_g$ es un isomorfismo. Además para $[E], [F] \in X_{g^{-1}}$ arbitrarios tenemos:

$$\alpha_g^*([E][F]) = \alpha_g^*([E \otimes F]) = \left[(E \otimes F)_g\right] \overset{(\mathbf{4})}{=} [E_g \otimes F_g] = [E_g][F_g].$$

Veamos ahora que α_{gh}^* extiende $\alpha_g^* \circ \alpha_h^*$.

Si $[E] \in X_{h^{-1}}$ es tal que $[E_h] \in X_{g^{-1}}$, entonces $E = 1_{h^{-1}}E$ y $E = E_h = 1_{g^{-1}} \bullet E_h = \alpha_{h^{-1}}(1_{g^{-1}}1_h)E_h = 1_{(gh)^{-1}}1_{h^{-1}}E = 1_{(gh)^{-1}}E$, que garantiza $\operatorname{dom}\left(\alpha_g^* \circ \alpha_h^*\right) \subseteq \operatorname{dom}\left(\alpha_{gh}^*\right)$. Además $\alpha_g^* \circ \alpha_h^*([E]) = \left[(E_h)_g\right]$, $\alpha_{gh}^*([E]) = [E_{gh}]$ y como $(E_h)_g = E_{gh}$ como conjuntos, nos falta ver la igualdad como módulos.

Sea $r \in R$, $x = (x_h)_g \in (E_h)_g$ y tenemos:

$$\begin{aligned} r \bullet (x_h)_g &= \alpha_{g^{-1}}(r1_g) \bullet x_g \\ &= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_{g^{-1}}(r1_g)1_h)x \\ &\overset{(4.3)}{=} \alpha_{(gh)^{-1}}(r1_{gh})1_{h^{-1}}x \\ &= \alpha_{(gh)^{-1}}(r1_{gh})x \end{aligned}$$

y como sabemos que $E = E_{h^{-1}}$ como conjuntos, si $x \in E$, tenemos que $x \in E_{h^{-1}}$, luego:

$$\begin{aligned} r \bullet (x_h)_g &= \alpha_{(gh)^{-1}}(r1_{gh})\, x \\ &= r \bullet x_{gh}. \end{aligned}$$

Entonces $(E_h)_g \simeq E_{gh}$, vía

$$\begin{array}{ccc} (E_h)_g & \overset{\varphi}{\to} & E_{gh} \\ (x_h)_g & \mapsto & x_{gh} \end{array}$$

donde $\varphi\left(r \bullet (x_h)_g\right) = r \bullet \varphi\left((x_h)_g\right) = r \bullet x_{gh}$ y α_g^* es un isomorfismo ya que su inversa es $\alpha_{g^{-1}}^*$. ♠

Concluimos que $\alpha = (\alpha_g, \mathcal{D}_g)_{g\in G}$ acción parcial de G en R induce $\alpha^* = \left(\alpha_g^*, X_g\right)_{g\in G}$ acción parcial de G en $\mathbf{PicS}(R)$. Terminamos está sección describiendo otra relación entre X_g y $\mathcal{D}_g$, para $g \in G$.

Como tenemos por definición que $X_g = \mathbf{PicS}(R)[\mathcal{D}_g]$, y por (3.6) se tiene:

$$X_g = \bigcup_{e\in \mathbf{I}_p(R)} \mathbf{Pic}(Re)[\mathcal{D}_g] = \bigcup_{e\in \mathbf{I}_p(R)} \mathbf{Pic}(\mathcal{D}_g e),$$

donde la ultima igualdad se tiene gracias a la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Pic}(Re) & \to & \mathbf{Pic}(\mathcal{D}_g e) \\ [M] & \mapsto & [M \otimes \mathcal{D}_g e] \end{array}$$

es un epimorfismo de grupos. De esta forma, tenemos:

$$X_g = \bigcup_{e\in \mathbf{I}_p(R)} \mathbf{Pic}(\mathcal{D}_g e) = \bigcup_{e\in \mathbf{I}_p(R)} \mathbf{Pic}(Re1_g) = \bigcup_{\substack{e\in \mathbf{I}_p(\mathcal{D}_g) \\ e1_g = e}} \mathbf{Pic}(Re) = \mathbf{PicS}(\mathcal{D}_g).$$

Capítulo 5

Globalización

Un problema natural en acciones parciales es ver cuando estas se pueden obtener como restricción de acciones globales, tales acciones parciales son llamadas *Globalizables*. En este apéndice veremos una caracterización de acciones parciales globalizables.

Definición 5.1. Si α es una acción parcial de G en $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{D}_g = \mathcal{X}$ para todo $g \in G$, entonces α es llamado una **acción global**.

Proposición 5.1. *Si α es acción global, entonces $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$ para todo $g, h \in G$.*

Demostración. Por definición si $\alpha = (\alpha_g, \mathcal{D}_g)_{g\in G}$ es acción global entonces es acción parcial con $\mathcal{D}_g = \mathcal{X}$ para todo $g \in G$. Entonces por el ítem (**iii**) de la Definición 4.1

$$\alpha_g \circ \alpha_h (x) = \alpha_{gh} (x) \text{ para todo } x \in \alpha_h^{-1} (\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}})$$

pero como $\mathcal{D}_g = \mathcal{X}$ entonces $\alpha_h^{-1} (\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}) = \alpha_h^{-1} (\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. ♠

Uno de los hechos mas importantes sobre las acciones parciales es como a partir de una acción global $\beta = (\beta_g, \mathcal{Y})_{g\in G}$ de G en $\mathcal{Y}$, se puede definir una acción parcial $\alpha = (\alpha_g, \mathcal{D}_g)_{g\in G}$ de G en $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ donde α sea la restricción de β. Para esto solo basta definir

$$\mathcal{D}_g = \mathcal{X} \cap \beta_g (\mathcal{X}) \text{ y } \alpha_g = \beta_g|_{\mathcal{D}_{g^{-1}}}.$$

Veamos que α es acción parcial de G en $\mathcal{X}$.

Demostración. Para comenzar veamos que α_g y $\mathcal{D}_g$ están bien definidos para todo $g \in G$.

$$\operatorname{im}(\alpha_g) = \beta_g(\mathcal{D}_{g^{-1}}) = \beta_g(\mathcal{X} \cap \beta_{g^{-1}}(\mathcal{X})) \overset{(\diamondsuit)}{=} \beta_g(\mathcal{X}) \cap \beta_g(\beta_{g^{-1}}(\mathcal{X})) = \beta_g(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X} = \mathcal{D}_g.$$

Donde $(\diamondsuit)$ es valido porque β_g es biyección. Ahora debemos probar (**i**) a (**iii**) de la Definición 4.1.

Para probar (**i**), como β es acción global $\beta_1 = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$, entonces $\mathcal{D}_1 = \mathcal{X} \cap \beta_1(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. Además:

$$\alpha_1 = \beta_1|_{\mathcal{X}} = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}.$$

Para probar (**ii**), note que $\alpha_h^{-1} = \left(\beta_h|_{\mathcal{D}_{h^{-1}}}\right)^{-1} = \beta_{h^{-1}}|_{\mathcal{D}_h}$ ya que β es acción parcial. Entonces:

$$\begin{aligned}
\alpha_h^{-1}(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}) &= \beta_{h^{-1}}(\mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{g^{-1}}) \\
&= \beta_{h^{-1}}(\mathcal{X} \cap \beta_h(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X} \cap \beta_{g^{-1}}(\mathcal{X})) \\
&= \beta_{h^{-1}}(\mathcal{X} \cap \beta_h(\mathcal{X}) \cap \beta_{g^{-1}}(\mathcal{X})) \\
&= \beta_h^{-1}(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X} \cap \beta_{h^{-1}g^{-1}}(\mathcal{X}) \\
&= \mathcal{X} \cap \beta_{h^{-1}}(\mathcal{X}) \cap \beta_{(gh)^{-1}}(\mathcal{X}) \\
&\subseteq \mathcal{X} \cap \beta_{(gh)^{-1}}(\mathcal{X}) = \mathcal{D}_{(gh)^{-1}}.
\end{aligned}$$

Y (**iii**) se sigue de la Proposición 5.1 y la forma en que están definidas α_g y $\mathcal{D}_g$. ♠

Veremos ahora bajo que condiciones una acción parcial se puede obtener como restricción de una global. Pero antes de esto, necesitamos algunos lemas y definiciones.

Definición 5.2. Sea $\beta = \{\beta_g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}\}_{g \in G}$ acción de G en $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{X}$ es G-invariante, si $\beta_g(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ para todo $g \in G$.

Proposición 5.2. *$\mathcal{X}$ es G-invariante si y sólo si $\beta|_{\mathcal{X}} = \left\{\beta_g|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}\right\}_{g\in G}$ es acción global en $\mathcal{X}$.*

Demostración. Observe que si $\beta|_{\mathcal{X}} = \left\{\beta_g|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}\right\}_{g\in G}$ es acción global en $\mathcal{X}$ implica que es G-invariante. Por lo tanto, supongamos $\mathcal{X}$ G-invariante, entonces $\beta_g(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ para todo $g \in G$, además:

$$\mathcal{X} = \beta_g^{-1}(\beta_g(\mathcal{X})) = \beta_{g^{-1}}(\beta_g(\mathcal{X})) \subseteq \beta_{g^{-1}}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X},$$

entonces $\mathcal{X} = \beta_{g^{-1}}(\mathcal{X})$ para todo $g^{-1} \in G$, haciendo $h = g^{-1}$ tenemos que $\mathcal{X} = \beta_h(\mathcal{X})$, para toda $h \in G$. ♠

Ahora, suponga que el grupo G actúa en una álgebra $\mathcal{B}$ por automorfismos:

$$\beta_g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$$

y sea $\mathcal{A}$ un ideal de $\mathcal{B}$. Por lo visto antes $\alpha = (\alpha_g, \mathcal{D}_g)_{g\in G}$ es una acción parcial de G en $\mathcal{A}$ donde $\mathcal{D}_g = \mathcal{A} \cap \beta_g(\mathcal{A})$ y $\alpha_g = \beta_g|_{\mathcal{D}_{g^{-1}}}$. En este caso decimos que α es una **restricción** de β en $\mathcal{A}$. Queremos saber las condiciones bajo las cuales se puede obtener una acción parcial equivalente que sea la restricción de una acción global.

Como se sabe si tenemos $\{\mathcal{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subálgebras del álgebra $\mathcal{B}$, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda$ no es necesariamente subálgebra de $\mathcal{B}$. En particular si consideramos la familia de subálgebras $\{\beta_g(\mathcal{A})\}_{g\in G}$ tenemos lo siguiente:

Lema 5.3. $\mathcal{B}_1 = \left\langle \bigcup_{g\in G} \beta_g(\mathcal{A}) \right\rangle = \sum_{g\in G} \beta_g(\mathcal{A})$ *es subálgebra de $\mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $x \in \bigcup_{g\in G} \beta(\mathcal{A})$, entonces existe $g' \in G$ tal que $x \in \beta_g(\mathcal{A})$, así:

$$x = x + \sum_{\substack{g\in G\\ g\neq g'}} 0_g \in \sum_{g\in G} \beta_g(\mathcal{A}),$$

por lo tanto, $\bigcup_{g\in G} \beta_g(\mathcal{A}) \subseteq \sum_{g\in G} \beta_g(\mathcal{A})$. Ahora veamos que $\sum_{g\in G} \beta_g(\mathcal{A})$ es subálgebra de $\mathcal{B}$:

- Note que $0_g \in \beta_g(\mathcal{A})$, entonces $0_g \in \sum\limits_{g\in G}\beta_g(\mathcal{A})$.

- Sean $x, y \in \sum\limits_{g\in G}\beta_g(\mathcal{A})$, entonces existen finitos $x_g \in \beta_g(\mathcal{A})$, $y_g \in \beta_g(\mathcal{A})$ tal que:

$$x = \sum_{g\in G} x_g \quad \text{y} \quad y = \sum_{g\in G} y_g$$

  (Completando con ceros si es necesario) Entonces, sea $z_g = x_g + y_g \in \beta_g(\mathcal{A})$, así $x + y = \sum\limits_{g\in G} z_g \in \sum\limits_{g\in G}\beta_g(\mathcal{A})$.

  Además, sea $z_{gh} = x_g \cdot y_h$, luego $x \cdot y = \sum\limits_{g,h\in G} z_{gh}$, pero como G es grupo, existe $l \in G$ tal que $l = g \cdot h$, entonces $x \cdot y = \sum\limits_{l\in G} z_l$. Ahora, como $x_g = \beta_g(a_1)$ y $y_h = \beta_h(a_2)$ para $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ tenemos:

$$\begin{aligned} x_g \cdot y_h = \beta_g(a_1) \cdot \beta_h(a_2) &= \beta_g(a_1) \cdot \beta_{gg^{-1}h}(a_2) \\ &= \beta_g(a_1) \cdot (\beta_g(\beta_{g^{-1}h}(a_2))) \\ &= \beta_g\Bigg(\underbrace{a_1 \cdot \beta_{g^{-1}h}(a_2)}_{\in\mathcal{A}}\Bigg). \end{aligned}$$

  Por lo tanto, $z_l \in \beta_g(\mathcal{A}) \subseteq \sum\limits_{g\in G}\beta_g(\mathcal{A})$.

- Sea S una subálgebra de $\mathcal{B}$ tal que $\bigcup\limits_{g\in G}\beta_g(\mathcal{A}) \subseteq S$. Nuevamente sea $x \in \sum\limits_{g\in G}\beta_g(\mathcal{A})$, previamente vimos que existe $x_g \in \beta_g(\mathcal{A})$ para todo $g \in G$ tal que $x = \sum\limits_{g\in G} x_g$ (suma finita). Como $x_g \in \beta_g(\mathcal{A}) \subseteq \bigcup\limits_{g\in G}\beta_g(\mathcal{A}) \subseteq S$, entonces $x_g \in S$ y como S es subálgebra $x = \sum\limits_{g\in G} x_g \in S$.

Por lo tanto $\sum\limits_{g\in G}\beta_g(\mathcal{A}) \subseteq S$, es decir $\sum\limits_{g\in G}\beta_g(\mathcal{A})$ es el subálgebra mas pequeña que contiene a $\bigcup\limits_{g\in G}\beta_g(\mathcal{A})$. Entonces $\left\langle \bigcup\limits_{g\in G}\beta_g(\mathcal{A}) \right\rangle = \sum\limits_{g\in G}\beta_g(\mathcal{A})$. ♠

Proposición 5.4. *Sea $\mathcal{A}$ ideal de $\mathcal{B}$ y $\alpha = (\alpha_g, \mathcal{D}_g)_{g\in G}$ con $\mathcal{D}_g = \mathcal{A} \cap \beta_g(\mathcal{A})$ y $\alpha_g = \beta_g|_{\mathcal{D}_{g^{-1}}}$, acción parcial de G en $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ es ideal de $\mathcal{X}$, con $\mathcal{X}$ G-invariante tenemos la* *acción de G en $\mathcal{X}$ dada por:*

$$\beta|_{\mathcal{X}} = \left\{ \beta_g|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \right\}_{g\in G}$$

y sea $\alpha^{\mathcal{X}} = \left\{ \alpha_g^{\mathcal{X}} : \mathcal{D}_{g^{-1}}^{\mathcal{X}} \to \mathcal{D}_g^{\mathcal{X}} \right\}_{g\in G}$, *donde*

$$\mathcal{D}_g^{\mathcal{X}} = \mathcal{A} \cap \left(\beta_g|_{\mathcal{X}}\right)(\mathcal{A}) \ \ y \ \ \alpha_g^{\mathcal{X}} = \left(\beta_g|_{\mathcal{X}}\right)\big|_{\mathcal{D}_{g^{-1}}^{\mathcal{X}}} = \beta_g|_{\mathcal{X}\cap\mathcal{D}_{g^{-1}}^{\mathcal{X}}} .$$

Entonces $\alpha = \alpha^{\mathcal{X}}$.

Demostración. Sea $\mathcal{D}_g^{\mathcal{X}} = \mathcal{A}\cap\left(\beta_g|_{\mathcal{X}}\right)(\mathcal{A})$. Como $\mathcal{X}$ es G-invariante $\beta_g(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$, además $\mathcal{A}$ es ideal de $\mathcal{X}$, entonces $\beta_g(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{X}$. Ahora, $\left(\beta_g|_{\mathcal{X}}\right)(\mathcal{A}) = \beta_g(\mathcal{A})$ ya que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$, luego $\mathcal{D}_g^{\mathcal{X}} = \mathcal{D}_g$ y $\mathcal{D}_g \subseteq \mathcal{X}$. Por lo tanto:

$$\alpha_g^{\mathcal{X}} = \left(\beta_g|_{\mathcal{X}}\right)\big|_{\mathcal{D}_{g^{-1}}^{\mathcal{X}}} = \beta_g|_{\mathcal{X}\cap\mathcal{D}_{g^{-1}}^{\mathcal{X}}} = \beta_g|_{\mathcal{D}_{g^{-1}}} = \alpha_g. \qquad \spadesuit$$

Si $\mathcal{X} = \mathcal{B}_1$ es la subálgebra de $\mathcal{B}$ definida en el Lema 5.3, puede pasar que $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}_1$, y como $\mathcal{B}_1$ es G-invariante con respecto a β por la Proposición 5.2 y 5.4, α se puede obtener como la restricción de una acción de G en $\mathcal{B}_1$ que es un subálgebra propia de $\mathcal{B}$. Por lo tanto, buscando condiciones de minimalidad es razonable requerir que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$, en este caso decimos que α es una **restricción admisible** de β.

Definición 5.3. Decimos que una acción parcial $\alpha = \{\alpha_g : \mathcal{D}_{g^{-1}} \to \mathcal{D}_g\}_{g\in G}$ de un grupo G en un álgebra $\mathcal{A}$, es **equivalente** a la acción parcial $\alpha' = \left\{\alpha'_g : \mathcal{D}'_{g^{-1}} \to \mathcal{D}'_g\right\}_{g\in G}$ de G en el álgebra $\mathcal{A}'$ si existe un isomorfismo de álgebras

$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$$

tal que para todo $g \in G$ se cumpla:

(1) $\varphi(\mathcal{D}_g) = \mathcal{D}'_g$;

(2) $\alpha'_g \circ \varphi(x) = \varphi \circ \alpha(x)$, para todo $x \in \mathcal{D}_{g^{-1}}$.

El ítem $(\mathbf{2})$ significa que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{g^{-1}} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{D}'_{g^{-1}} \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_g} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'_g} \\ \mathcal{D}_g & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{D}'_g \end{array}$$

Observación 5.1. Ser equivalente según la Definición 5.3 es una relación de equivalencia entre acciones parciales de G en álgebras.

Ahora veamos un tipo bastante especial de acciones parciales:

Definición 5.4. Una acción parcial β de un grupo G en un álgebra $\mathcal{B}$ es llamada **globalización** de la acción parcial α de G en $\mathcal{A}$, si α es equivalente a una restricción admisible de β en un ideal de $\mathcal{B}$.

En otras palabras, β es una globalización para α si existe un monomorfismo de álgebras $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tal que para todo $g \in G$, se cumple:

(i) $\varphi(\mathcal{D}_g) = \varphi(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$;

(ii) $\varphi \circ \alpha_g(x) = \beta_g \circ \varphi(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}_{g^{-1}}$;

(iii) $\mathcal{B}$ es generado por $\bigcup\limits_{g \in G} \beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$.

Lema 5.5. *Suponga que $\mathcal{A}$ es un álgebra que es suma (no necesariamente directa) de un número finito de ideales, cada uno de ellos es álgebra unitaria. Entonces $\mathcal{A}$ es álgebra unitaria.*

Demostración. Solo basta probar para $\mathcal{A} = I + J$, y de manera inductiva se deduce el resultado.

Sean $1_I, 1_J$ los elementos unidad de I y J respectivamente. Entonces $1_I, 1_J$ son idempotentes centrales de $\mathcal{A}$ y $1_I + 1_J - 1_I 1_J$ es la unidad de $\mathcal{A}$ ya que para $x \in I$, $y \in J$ tenemos que $x + y \in \mathcal{A}$ y se cumple:

$$\begin{aligned}(x+y)(1_I + 1_J - 1_I 1_J) &= x \cdot 1_I + x \cdot 1_J - x \cdot 1_I 1_J + y \cdot 1_I + y \cdot 1_J - y \cdot 1_I 1_J \\ &= x + x \cdot 1_J - x 1_J + y \cdot 1_I + y - y \cdot 1_I \\ &= x + y. \quad \spadesuit\end{aligned}$$

Lema 5.6. *Sea $\mathcal{A}_\lambda$ álgebra unitaria tal que $\mathcal{A}_\lambda$ es un ideal del álgebra $\mathcal{A}$. Entonces existe un idempotente central $1_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda$ tal que $\mathcal{A}_\lambda = 1_\lambda \cdot \mathcal{A}$.*

Demostración. Si $x \in \mathcal{A}_\lambda$ entonces $x \cdot \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\lambda$. Como $\mathcal{A}_\lambda$ es unitaria, existe $1_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda$ tal que para todo $a \in \mathcal{A}_\lambda$ $1_\lambda \cdot a = a \cdot 1_\lambda = a$, además:

$$\mathcal{A}_\lambda \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}_\lambda = 1_\lambda \cdot \mathcal{A}_\lambda \subseteq 1_\lambda \cdot \mathcal{A}.$$

Sea $x \in \mathcal{A}$, como $\mathcal{A}_\lambda$ es ideal y $1_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda$ tenemos que $1_\lambda \cdot x \in \mathcal{A}_\lambda$. Por lo tanto $\mathcal{A}_\lambda = 1_\lambda \cdot \mathcal{A}$. $\spadesuit$

Lema 5.7. *Sean $\mathcal{A}_\lambda$ y $\mathcal{A}_{\lambda'}$ álgebras unitarias e ideales del álgebra $\mathcal{A}$, con 1_λ, $1_{\lambda'}$ los elementos unidad de $\mathcal{A}_\lambda$ y $\mathcal{A}_{\lambda'}$ respectivamente. Entonces $1_\lambda \cdot 1_{\lambda'}$ es la unidad de $\mathcal{A}_\lambda \cap \mathcal{A}_{\lambda'}$.*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{A}_\lambda \cap \mathcal{A}_{\lambda'}$, entonces $x \cdot 1_\lambda = x = x \cdot 1_{\lambda'}$, por lo tanto:

$$x \cdot (1_\lambda \cdot 1_{\lambda'}) = (x \cdot 1_\lambda) \cdot 1_{\lambda'} = x \cdot 1_{\lambda'} = x. \quad \spadesuit$$

El siguiente Teorema caracteriza las acciones parciales de grupos en álgebras que admiten globalización.

Teorema 5.8. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra unitaria. Entonces la acción parcial α de G en $\mathcal{A}$ admite una globalización β si y sólo si cada ideal $\mathcal{D}_g$ $(g \in G)$ es álgebra unitaria. Además, si β existe, es única salvo equivalencia.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si β existe y $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ verifica (**i**) a (**iii**) de la Definición 5.4, entonces $\varphi(\mathcal{D}_g) = \varphi(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$ es álgebra unitaria para todo $g \in G$, porque $\varphi(1_{\mathcal{A}})$ es la unidad de $\varphi(\mathcal{A})$ y $\beta_g \circ \varphi(1_{\mathcal{A}})$ la unidad de $\beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$, por lo tanto la unidad de $\varphi(\mathcal{D}_g)$ es $\varphi(1_{\mathcal{A}}) \cdot (\beta_g(\varphi(1_{\mathcal{A}})))$.

Como φ es monomorfismo, $\varphi(\mathcal{D}_g) \simeq \mathcal{D}_g$ y en vista que $\varphi(\mathcal{D}_g)$ tiene unidad se concluye que $\mathcal{D}_g$ tiene unidad.

$\Leftarrow$) Supongamos cada $\mathcal{D}_g$ ideal y álgebra unitaria para todo $g \in G$, entonces por el Lema 5.6 existe un idempotente central $1_g \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{D}_g = 1_g \cdot \mathcal{A}$. Sea $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G, \mathcal{A})$ el álgebra de las funciones de G en $\mathcal{A}$, por conveniencia en la notación $f(g)$ se escribirá $f|_g$ $(f \in \mathcal{F},\ g \in G)$.

Para $f \in \mathcal{F}$, $g \in G$ defina $\beta_g(f) \in \mathcal{F}$ por:

$$\begin{array}{rrcrcl} \beta_g(f): & G & \longrightarrow & \mathcal{A} & & \\ & h & \longmapsto & \beta_g(f)|_h & = & f(g^{-1}h). \end{array}$$

Veamos que $f \mapsto \beta_g(f)$ es un automorfismo de $\mathcal{F}$. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, entonces:

$$\beta_g(f_1 + f_2)|_h = (f_1 + f_2)\left(g^{-1}h\right) = f_1\left(g^{-1}h\right) + f_2\left(g^{-1}h\right) = \beta_g(f_1)|_h + \beta_g(f_2)|_h,$$

$$\beta_g(f_1 \cdot f_2)|_h = (f_1 \cdot f_2)\left(g^{-1}h\right) = f_1\left(g^{-1}h\right) \cdot f_2\left(g^{-1}h\right) = \left(\beta_g(f_1)|_h\right) \cdot \left(\beta_g(f_2)|_h\right).$$

Donde $\beta_{g^{-1}}$ es su correspondiente inversa ya que:

$$\beta_{g^{-1}} \circ \beta_g(f)|_h = \beta_{g^{-1}}\left(f\left(g^{-1}h\right)\right) = \beta_{g^{-1}}(f)|_{g^{-1}h} = f\left(gg^{-1}h\right) = f|_h,$$

De forma análoga para $\beta_g \circ \beta_{g^{-1}}(f)|_h$, luego tenemos que β_g es biyectiva. Por lo tanto:

$$\beta = \{\beta_g : \mathcal{F} \to \mathcal{F}\}_{g \in G}$$

es una acción de G en $\mathcal{F}$. Veamos que $\beta_g \circ \beta_h = \beta_{gh}$:

$$\beta_g\left(\beta_h(f)\right)\big|_l = \beta_h(f)\big|_{g^{-1}l} = f\left(h^{-1}g^{-1}l\right) = f\left((gh)^{-1}l\right) = \beta_{gh}(f)\big|_l.$$

Ahora por el Lema 5.6 y Lema 5.7 sabemos que $\mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_h = 1_g \cdot 1_h \cdot \mathcal{A}$. Como α es acción parcial, la igualdad:

$$\alpha_g\left(\mathcal{D}_{g^{-1}} \cap \mathcal{D}_h\right) = \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_{gh}$$

implica

$$\alpha_g\left(1_{g^{-1}} \cdot 1_h\right) = 1_g \cdot 1_{gh}. \tag{5.1}$$

Para $a \in \mathcal{A}$, por el Lema 5.6 $a \cdot 1_g \in \mathcal{D}_g$, defina:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{A} & \to & \mathcal{F} \\ & a & \mapsto & \varphi(a) \end{array}$$

tal que:

$$\begin{array}{rcccc} \varphi(a): & G & \to & \mathcal{A} & \\ & g & \mapsto & \varphi(a)\big|_g & = & \alpha_{g^{-1}}\left(a \cdot 1_g\right) \end{array}$$

veamos que φ es un monomorfismo, sean $a, b \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \varphi(a+b)\big|_g &= \alpha_{g^{-1}}\left((a+b)\,1_g\right) \\ &= \varphi(a \cdot b)\big|_g \\ &= \alpha_{g^{-1}}\left(a \cdot 1_g + b \cdot 1_g\right) \\ &= \alpha_{g^{-1}}\left(a \cdot 1_g\right) + \alpha_{g^{-1}}\left(b \cdot 1_g\right) = \varphi(a)\big|_g + \varphi(b)\big|_g, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left.\varphi(a\cdot b)\right|_g &= \alpha_{g^{-1}}(a\cdot b1_g)\\
&= \alpha_{g^{-1}}((a\cdot 1_g)\cdot(b\cdot 1_g))\\
&= (\alpha_{g^{-1}}(a\cdot 1_g))\cdot(\alpha_{g^{-1}}(b\cdot 1_g))\\
&= \left(\left.\varphi(a)\right|_g\right)\cdot\left(\left.\varphi(b)\right|_g\right).
\end{aligned}
$$

Además, $\ker\varphi=\{a\in\mathcal{A}:\ \varphi(a)$ es la función nula de G en $\mathcal{A}\}$, sea $a\in\ker\varphi$, entonces:

$$
\left.\varphi(a)\right|_g=\alpha_{g^{-1}}(a\cdot 1_g)=0\quad\forall g\in G,
$$

y como $\alpha_{g^{-1}}$ es un isomorfismo $a\cdot 1_g=0\in\mathcal{A}$ para todo $g\in G$, en particular si $g=1$ tenemos que $1_g=1_{\mathcal{A}}$, por lo tanto $a=0$, entonces φ es inyectiva.

Sea $\mathcal{B}$ el subálgebra de $\mathcal{F}$ generada por $\bigcup\limits_{g\in G}\beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$, queremos ver que la restricción de β a $\mathcal{B}$ es una globalización de α, como vemos con lo anterior se satisface la condición (**iii**) de la Definición 5.4.

Para $g,h\in G$ y $a\in\mathcal{D}_{g^{-1}}$ tenemos que $\left.\beta_g(\varphi(a))\right|_h=\left.\varphi(a)\right|_{g^{-1}h}=\alpha_{h^{-1}g}(a\cdot 1_{g^{-1}h})$ y $\left.\varphi(\alpha_g(a))\right|_h=\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)\cdot 1_h)$. Entonces (**ii**) de la Definición 5.4 se cumple si y sólo si la igualdad

$$
\alpha_{h^{-1}g}(a\cdot 1_{g^{-1}h})=\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)\cdot 1_h) \tag{5.2}
$$

se tiene para todo $g,h\in G$ y todo $a\in\mathcal{D}_{g^{-1}}$. Observe que $a\cdot 1_{g^{-1}h}\in D_g\cap D_{g^{-1}h}$, por esta razón podemos separar $\alpha_{h^{-1}g}$ y de esta forma:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{h^{-1}g}(a\cdot 1_{g^{-1}h}) &= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a\cdot 1_{g^{-1}h}))\\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h}))\\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)\,\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h}))\\
&\overset{(5.1)}{=} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)\,1_g1_h)\\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a)\,1_h),
\end{aligned}
$$

ya que 1_g es la unidad de $\mathcal{D}_g$.

Por lo tanto $\beta_g(\varphi(a))|_h = \varphi(\alpha_g(a))|_h$ que equivale a (**ii**) de la Definición 5.4.

Ahora veamos que $\varphi(\mathcal{D}_g) = \varphi(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$ para todo $g \in G$. Un elemento de $\varphi(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\varphi(\mathcal{A}))$ se puede escribir como $\varphi(a) = \beta_g(\varphi(b))$ para algún $a, b \in \mathcal{A}$. Entonces para todo $h \in G$ la ecuación:

$$\varphi(a)|_h = \beta_g(\varphi(b))|_h ,$$

significa:

$$\alpha_{h^{-1}}(a1_h) = \varphi(b)|_{g^{-1}h} = \alpha_{h^{-1}g}(b1_{g^{-1}h}) . \tag{5.3}$$

Haciendo $h = 1$, tenemos:

$$a = \alpha_g(b1_{g^{-1}}) \in \mathcal{D}_g \Rightarrow \varphi(a) \in \varphi(\mathcal{D}_g) ,$$

y así $\varphi(\mathcal{A}) \cap \beta_g(\varphi(\mathcal{A})) \subseteq \varphi(\mathcal{D}_g)$. Ahora dado $a \in \mathcal{D}_g$, debemos encontrar $b \in \mathcal{A}$ tal que (5.3) se cumpla. Tome $b = \alpha_{g^{-1}}(a)$ y reemplazando en la parte derecha de (5.3) tenemos:

$$\alpha_{h^{-1}g}(b1_{g^{-1}h}) = \alpha_{h^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(a)\, 1_{g^{-1}h}) ,$$

que es igual a la parte izquierda de (5.3) usando (5.2):

$$\alpha_{h^{-1}}(a1_h) = \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(b)\, 1_h) = \alpha_{h^{-1}g}(b1_{g^{-1}h}) = \alpha_{h^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(a)\, 1_{g^{-1}h}) .$$

Por lo tanto tenemos (**i**) de la Definición 5.4. Para ver que β es una globalización de α tenemos que probar que $\varphi(\mathcal{A})$ es un ideal de $\mathcal{B}$, basta ver que:

$$\beta_g(\varphi(a)) \cdot \varphi(b) ,\ \varphi(b) \cdot \beta_g(\varphi(a)) \in \varphi(\mathcal{A}) ,$$

ya que para $x \in \mathcal{B}$, $x = \sum_{i \in I} \beta_{g_i}(\varphi(a_i))$ con I finito, $g_i \in G$ y $a_i \in \mathcal{A}$. Entonces:

$$x \cdot \varphi(b) = \left(\sum_{i \in I} \beta_{g_i}(\varphi(a_i))\right) \cdot \varphi(b) = \sum_{i \in I} \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) \cdot \varphi(b).$$

Para $h \in G$,

$$\beta_g(\varphi(a))|_h \cdot \varphi(b)|_h = \varphi(a)|_{g^{-1}h} \cdot \varphi(b)|_h = \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) \cdot \alpha_{h^{-1}}(b1_h),$$

donde

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_h) & \overset{(5.2)}{=} & \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h}) \\ & = & \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) \cdot \alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h}) \\ & \overset{(5.1)}{=} & (\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) \cdot 1_{h^{-1}g})\,1_{h^{-1}} \\ & = & \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})\,1_{h^{-1}}, \end{array}$$

luego,

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}})1_h)\,\alpha_{h^{-1}}(b1_h) & = & (\alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h})\,1_{h^{-1}})\,\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\ & = & \alpha_{h^{-1}g}(a1_{g^{-1}h}) \cdot \alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\ & = & \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}h})\,1_h)\,\alpha_{h^{-1}}(b1_h) \\ & = & \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(a1_{g^{-1}h})\,b1_h) \\ & = & \varphi(\alpha_g(a1_{g^{-1}}b))|_h. \end{array}$$

Por lo tanto $\beta_g(\varphi(a)) \cdot \varphi(b) = \varphi(\alpha_g(a \cdot 1_{g^{-1}})\,b) \in \varphi(\mathcal{A})$, análogamente $\varphi(b) \cdot \beta_g(\varphi(a)) = \varphi(b \cdot \alpha_g(a \cdot 1_{g^{-1}})) \in \varphi(\mathcal{A})$. Entonces $\varphi(\mathcal{A})$ es ideal de $\mathcal{B}$.

Para finalizar veamos que β es único salvo equivalencia.

Supongamos que existe β' acción de G en $\mathcal{B}'$ que es una globalización de α. Sea

$$\mathcal{B}' = \left\langle \bigcup_{g\in G} \beta_g \left(\varphi' \left(\mathcal{A}\right)\right) \right\rangle$$

con $\varphi' : \mathcal{A} \to \mathcal{B}'$ un monomorfismo.

Un elemento de $\mathcal{B}'$ puede escribirse como suma finita de $\sum\limits_{i\in I} \beta'_{g_i} \left(\varphi' \left(a_i\right)\right)$, con $g_i \in G$ y $a_i \in \mathcal{A}$. Defina:

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathcal{B}' & \to & \mathcal{B} \\ & \sum\limits_{i\in I} \beta'_{g_i} \left(\varphi' \left(a_i\right)\right) & \mapsto & \sum\limits_{i\in I} \beta_{g_i} \left(\varphi \left(a_i\right)\right) \end{array}$$

con $g_i \in G$, $a_i \in \mathcal{A}$ e I finito. Como la suma no es directa debemos ver que ϕ está bien definida.

Basta ver que si $\sum\limits_{i=1}^{s} \beta'_{g_i} \left(\varphi' \left(a_i\right)\right) = 0$, entonces $\sum\limits_{i=1}^{s} \beta_{g_i} \left(\varphi \left(a_i\right)\right) = 0$. Tenemos:

$$\sum \beta'_{g_i} \left(\varphi' \left(a_i\right)\right) \cdot \beta'_h \left(\varphi' \left(a\right)\right) = 0 \quad \forall h \in G,\ a \in \mathcal{A},$$

aplicando $\beta'_{h^{-1}}$,

$$\sum \beta'_{h^{-1}g_i} \left(\varphi' \left(a_i\right)\right) \cdot \varphi' \left(a\right) = 0,$$

pero como $\varphi' \left(\mathcal{A}\right)$ es ideal de $\mathcal{B}'$ el elemento:

$$\begin{aligned} \beta'_{h^{-1}g_i} \left(\varphi' \left(a_i\right)\right) \cdot \varphi' \left(a\right) &\subseteq \beta'_{h^{-1}g_i} \left(\varphi' \left(\mathcal{A}\right)\right) \cap \varphi' \left(\mathcal{A}\right) \\ &= \varphi' \left(\mathcal{D}_{h^{-1}g_i}\right) \\ &= \varphi' \left(\mathcal{A} \cdot 1_{h^{-1}g_i}\right) \\ &= \varphi' \left(\mathcal{A}\right) \cdot \varphi' \left(1_{h^{-1}g_i}\right), \end{aligned}$$

entonces

$$\beta'_{h^{-1}g_i} \left(\varphi' \left(a_i\right)\right) \cdot \varphi' \left(a\right) \subseteq \varphi' \left(\mathcal{A}\right) \cdot \varphi' \left(1_{h^{-1}g_i}\right). \tag{5.4}$$

Donde $\varphi'(1_{h^{-1}g_i})$ es la identidad de $\varphi'(\mathcal{A})\cdot\varphi'(1_{h^{-1}g_i})$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\cdot\varphi'(a) &= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\cdot\varphi'(1_{h^{-1}g_i})\cdot\varphi'(a)\\
&= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\cdot\varphi'\circ\alpha_{h^{-1}g_i}\left(1_{g_i^{-1}h}\right)\cdot\varphi'(a)\\
&\overset{\textbf{(ii)}}{=} \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\cdot\varphi'\circ\alpha_{h^{-1}g_i}\left(1_{g_i^{-1}h}\right)\cdot\varphi'(a)\\
&= \beta'_{h^{-1}g_i}\circ\varphi'\left(a_i1_{g_i^{-1}h}\right)\cdot\varphi'(a)\\
&\overset{\textbf{(ii)}}{=} \varphi'\circ\alpha_{h^{-1}g_i}\left(a_i1_{g_i^{-1}h}\right)\cdot\varphi'(a)\\
&= \varphi'\left(\alpha_{h^{-1}g_i}\left(a_i1_{g_i^{-1}h}\right)a\right).
\end{aligned}$$

De forma similar $\beta_{h^{-1}g_i}(\varphi(a_i))\cdot\varphi(a)=\varphi\left(\alpha_{h^{-1}g_i}\left(a_i1_{g_i^{-1}h}\right)a\right)$. Entonces,

$$0=\sum_{i=1}^{s}\beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\cdot\varphi'(a)=\sum_{i=1}^{s}\varphi'\left(\alpha_{h^{-1}g_i}\left(a_i1_{g_i^{-1}h}\right)a\right)=\varphi'\left(\sum_{i=1}^{s}\alpha_{h^{-1}g_i}\left(a_i1_{g_i^{-1}h}\right)a\right),$$

como φ' es monomorfismo $\sum_{i=1}^{s}\alpha_{h^{-1}g_i}\left(a_i1_{g_i^{-1}h}\right)a=0$ para todo $a\in\mathcal{A}$, en particular para $a=1_{\mathcal{A}}$, esto implica que:

$$\sum_{i=1}^{s}\alpha_{h^{-1}g_i}\left(a_i1_{g_i^{-1}h}\right)=0,$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{s}\beta_{h^{-1}g_i}(\varphi(a_i))\cdot\varphi(a)=\sum_{i=1}^{s}\varphi\left(\alpha_{h^{-1}g_i}\left(a_i1_{g_i^{-1}h}\right)a\right)=0,$$

y aplicando β_h,obtenemos

$$\sum_{i=1}^{s}\beta_{g_i}(\varphi(a_i))\cdot\beta_h(\varphi(a))=0\quad\forall a\in\mathcal{A}.$$

Así, $\sum_{i=1}^{s}\beta_{g_i}(\varphi(a_i))$ anula $\beta_h(\varphi(\mathcal{A}))$ para todo $g\in G$. Sea $\mathcal{B}_1=\left\langle\bigcup_{i=1}^{s}\beta_{g_i}(\varphi(\mathcal{A}))\right\rangle$, entonces $\sum_{i=1}^{s}\beta_{g_i}(\varphi(a_i))$ anula a $\mathcal{B}_1$. Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{s}\beta_{g_i}(\varphi(a_i))\in\mathcal{B}_1,$$

por el Lema 5.5, la álgebra $\mathcal{B}_1$ posee unidad $1_{\mathcal{B}_1}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{s}\beta_{g_i}(\varphi(a_i))=\sum_{i=1}^{s}\beta_{g_i}(\varphi(a_i))\cdot 1_{\mathcal{B}_1}=0,$$

lo que implica

$$\sum_{i=1}^{s}\beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{s}\beta_{g_i}(\varphi(a_i))=0,$$

y $\phi:\mathcal{B}'\to\mathcal{B}$ está bien definida. Por simetría $\phi':\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ tal que

$$\beta_{g_i}(\varphi(a_i))\mapsto\beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))$$

es un homomorfismo y como

$$\phi\circ\phi'=\mathrm{id}_{\mathcal{B}},\quad \phi'\circ\phi=\mathrm{id}_{\mathcal{B}'},$$

tenemos que ϕ es un isomorfismo y además

$$\beta_g\circ\phi=\phi\circ\beta'_g\quad\forall g\in G,$$

por lo tanto β y β' son equivalentes. ♠

Para finalizar, la idea a futuro será mirar que relación tiene la globalización de $\alpha=(\alpha_g,\mathcal{D}_g)_{g\in G}$ acción parcial de G en R, con la globalización de la acción inducida $\alpha^*=\left(\alpha^*_g,X_g\right)_{g\in G}$ que es acción parcial de G en $\mathbf{PicS}(R)$, dicha globalizaciones existen gracias al Teorema 5.8.

Bibliografía

[1] Atiyah, M. F. ; Macdonald, I. G.: *Introduction to commutative algebra*. Bd. 2. Addison-Wesley Reading, 1969

[2] Auslander, M. ; Goldman, O. : The Brauer group of a commutative ring. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 97 (1960), Nr. 3, S. 367–409

[3] Bagio, D. ; Paques, A. : Partial groupoid actions: globalization, Morita theory, and Galois theory. In: *Communications in Algebra* 40 (2012), Nr. 10, S. 3658–3678

[4] Caenepeel, S. ; De Groot, E. : Galois corings applied to partial Galois theory. In: *arXiv preprint math/0406187* (2004)

[5] Caenepeel, S. ; Janssen, K. : Partial (co) actions of Hopf algebras and partial Hopf-Galois theory. In: *Communications in Algebra* 36 (2008), Nr. 8, S. 2923–2946

[6] Chase, S. U. ; Harrison, D. K. ; Rosenberg, A. : *Galois theory and cohomology of commutative rings*. Bd. 52. American Mathematical Soc., 1969

[7] Chase, S. U. ; Rosenberg, A. : *Amitsur cohomology and the Brauer group*. American Mathematical Society, 1965

[8] De Meyer, F. ; Ingraham, E. : *Separable algebras over commutative rings*. Springer, 1971

[9] Dokuchaev, M. ; Exel, R. : Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 357 (2005), Nr. 5, S. 1931–1952

[10] Dokuchaev, M. ; Exel, R. ; Piccione, P. : Partial representations and partial group algebras. In: *Journal of Algebra* 226 (2000), Nr. 1, S. 505–532

[11] Dokuchaev, M. ; Ferrero, M. ; Paques, A. : Partial actions and Galois theory. In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 208 (2007), Nr. 1, S. 77–87

[12] Dokuchaev, M. ; Paques, A. ; Pinedo, H. : Preprint: Partial Galois cohomology, extensions of the Picard Group and related Homomorphisms. (2015)

[13] Exel, R. : Partial actions of groups and actions of inverse semigroups. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 126 (1998), Nr. 12, S. 3481–3494

[14] Freitas, D. ; Paques, A. : On partial Galois Azumaya extensions. In: *Algebra Discrete Math.* 11 (2011), Nr. 2, S. 64–77

[15] Gómez, J. : Tesis: El anillo de los enteros algebraicos y dominios de Dedekind. (2015)

[16] Grillet, P. A.: *Semigroups: an introduction to the structure theory*. Bd. 193. CRC Press, 1995

[17] Kellendonk, J. ; Lawson, M. V.: Partial actions of groups. In: *International Journal of Algebra and Computation* 14 (2004), Nr. 01, S. 87–114

[18] Kuo, J.-M. ; Szeto, G. : The structure of a partial Galois extension. In: *Monatshefte für Mathematik* 175 (2014), Nr. 4, S. 565–576

[19] Lam, T.-Y. : *A first course in noncommutative rings*. Bd. 131. Springer Science & Business Media, 2013

[20] Lam, T.-Y. : *Lectures on modules and rings*. Bd. 189. Springer Science & Business Media, 2012

[21] Matsumura, H. ; Reid, M. : *Commutative ring theory*. Bd. 8. Cambridge university press, 1989

[22] PAQUES, A. ; RODRIGUES, V. ; SANT'ANA, A. : Galois correspondences for partial Galois Azumaya extensions. In: *Journal of Algebra and Its Applications* 10 (2011), Nr. 05, S. 835–847

[23] ROTMAN, J. : *An introduction to homological algebra*. Springer Science & Business Media, 2008

[24] STEINBERG, B. : Inverse semigroup homomorphisms via partial group actions. In: *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 64 (2001), Nr. 01, S. 157–168

[25] STEINBERG, B. : Partial actions of groups on cell complexes. In: *Monatshefte für Mathematik* 138 (2003), Nr. 2, S. 159–170