

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

**CAROLINA ROJAS CELIS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
BUCARAMANGA**

**2008**

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

**CAROLINA ROJAS CELIS**

Trabajo para optar el título de  
Especialista en Educación Matemática

Profesor orientador:

**GABRIEL YÁÑEZ CANAL**

Ph.D. en Matemática Educativa

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
BUCARAMANGA**

**2008**

RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

*Dedicado a todas aquellas personas que hacen parte fundamental de mi vida y que hacen que mis sueños sean también los de ellos. Este logro también es de ustedes.*

# Agradecimientos

Primeramente a Dios por permitirme haber alcanzado un escalón más en mi vida profesional.

A mi familia –papá, mamá y hermanos: Diego y Germán- por soñar conmigo en cada reto que quiero asumir y por apoyarme constantemente para cumplirlos.

Al profesor Gabriel Yáñez Canal, a quien estimo grandemente, por su apoyo, su ánimo, y su invaluable colaboración y enseñanza.

A María Isabel –Chavita- por su importante colaboración en el proceso del proyecto.

A Claudia Barajas, amiga sincera, por su apoyo y colaboración en el escrito de este trabajo.

A los profesores de la Especialización, mil gracias por permitirme trabajar con ustedes, por haber aceptado hacer parte de esta investigación.

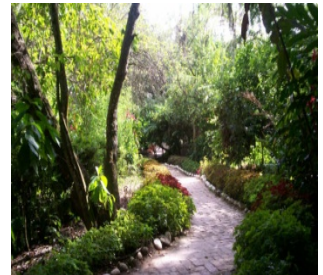
A mis grandes amigos y a una persona muy especial en mi vida, gracias por ese apoyo incondicional en cada momento.

*A todos, mil y mil gracias.*

RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

*“Largo es el camino de la enseñanza por medio  
de teorías; breve y eficaz por medio de  
ejemplos”.*

Lucio Anneo Séneca



# Tabla de Contenido

	Pág.
Presentación	
<b>CAPÍTULO 1</b>	
<b>Marco Teórico</b>	16
1.1 LAS SITUACIONES-PROBLEMA COMO ESTRATEGIA PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN MATEMÁTICA	16
1.2 EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR	22
1.2.1 Análisis de la formación del concepto	28
1.3 ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA	32
1.3.1 Acerca de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la derivada	33
1.3.2 Acerca de la enseñanza de la derivada en las universidades	39
1.3.3 Algunas indicaciones para la enseñanza del concepto de derivada	41
<b>CAPÍTULO 2</b>	
<b>Metodología de la investigación</b>	43
2.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN	43
2.2 LOS ESTUDIANTES Y LOS CASOS	43
2.2.1 Los profesores protagonistas	44
2.2.2 El curso en general	48
2.3 ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN	49
2.3.1 Identificar las concepciones previas sobre derivada y sobre su enseñanza	49
2.3.2 Analizar la evolución de la concepción de derivada en profesores de matemáticas durante el desarrollo del curso de cálculo abordado desde la resolución de situaciones-problemas	50
2.3.3 Examinar la concepción de derivada en profesores de matemáticas posterior al curso de cálculo.	52

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

	<b>CAPÍTULO 3</b>	
<b>El proceso de reconstrucción y transformación</b>		<b>53</b>
3.1 PRUEBAS DIAGNÓSTICAS		53
3.1.1 Respuestas de los Profesores		60
3.2 LA RECONSTRUCCIÓN vs. EL PROCESO DE CLASES		73
3.2.1 Primera sesión: "La problemática cuando la razón de cambio es constante"		73
3.2.2 Segunda sesión: "La problemática cuando la razón de cambio no es constante"		77
3.2.3 Tercera sesión: "La problemática cuando la razón de cambio no es constante"		96
3.2.4 Cuarta sesión: "La derivada: razón instantánea de cambio"		106
3.3 EVALUACIÓN DEL PROCESO DE RECONSTRUCCIÓN DE LOS PARTICIPANTES		116
3.4 CARACTERIZANDO LA TRANSFORMACIÓN DEL CONCEPTO DESPUÉS DEL PROCESO DE RECONSTRUCCIÓN CONCEPTUAL		123
	<b>CAPÍTULO 4</b>	129
	<b>Conclusiones</b>	
	<b>Referencias</b>	131
	Anexos	134

TÍTULO: \*  
RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE  
MATEMÁTICAS

AUTOR:  
CAROLINA ROJAS CELIS\*\*

PALABRAS CLAVES: Concepto de derivada. Concepción de derivada. Reconstrucción concepto derivada.

En el campo de la educación matemática, el tema de las concepciones de los docentes sobre lo que enseñan es importante, pues es claro que, la forma como aquel conciba un concepto y aun la misma Matemática, influirá de forma relevante en el aprendizaje del estudiante. Así, este trabajo de grado está basado en un estudio de caso acerca de la forma como el docente de matemáticas puede reconstruir el concepto de derivada a partir de un curso abordado desde la resolución problemas, con el fin de evaluar la transformación que se produjo.

Basados en un trabajo doctoral de Badillo (2003), se clasificaron a algunos profesores según la teoría APOE, en los niveles de comprensión del concepto de derivada antes de comenzar el curso, durante el desarrollo del curso y al finalizarlo con el fin de evaluar la reconstrucción del concepto en cada uno de ellos.

Como conclusiones a este trabajo, se tiene que el abordaje de un curso desde el planteamiento y la resolución de problemas, permitió de manera significativa un avance en la concepción de derivada en profesores de matemáticas, así como la necesidad de que en las universidades formadoras de docentes de matemáticas se enseñen concepto a partir de la resolución de problemas; que sean los profesores los autores de la construcción y reconstrucción de su propio concepto matemático.

---

\* Trabajo de Grado.

\*\* Facultad de Ciencias. Especialización en Educación Matemática. Director: Gabriel Yáñez Canal. PhD en Matemática Educativa.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

TITLE: \*  
RECONSTRUCTION OF DERIVATIVES CONCEPT IN MATH TEACHERS

AUTHOR:  
CAROLINA ROGAS CELIS\*\*

KEY WORDS: Derivative concept. Derivative conception. Derivative concept reconstruction

In the field of math education, the issue of teachers conceptions about what they teach is important, because it is clear that, the way they conceive a concept and even mathematics itself will strongly influence the student learning. So, this work degree is based on a case study about the way a mathematics teacher can reconstruct the derivative concept from a course approached from troubleshooting, in order to assess the transformation that took place.

Based on a Badillo's doctoral work (2003), some teachers were classified according to APOE theory, in the levels of understanding of the derivative concept before starting the course, during the course and to finalize it in order to evaluate the reconstruction of the concept in each one of them.

As conclusions in this paper, it is seen that facing a course from the approach and problem solving allowed a significant breakthrough in the derivative conception in mathematic teachers, as well as in the necessity for universities in forming math teachers to teach them the concept from the resolution of problems; it must be teachers the authors of the construction and reconstruction of their own mathematical concept.

---

\* Trabajo de Grado.

\*\* Facultad de Ciencias. Especialización en Educación Matemática. Director: Gabriel Yánez Canal. PhD en Matemática Educativa.

# Presentación

En el campo de la educación matemática, el tema de las concepciones docentes es de gran importancia para la investigación puesto que los profesores normalmente manejan diversidad de ideas, comportamientos y actitudes sobre la naturaleza de la ciencia y las estructuras conceptuales, así como de los procesos de enseñanza-aprendizaje adquiridos de manera acrítica como resultado de sus experiencias educativas. Así, muchas de las concepciones de los docentes sobre la ciencia y los conceptos que enseñan están constituidas por ideas deformadas, incompletas y de sentido común que se llegan a constituir en verdaderos obstáculos epistemológicos para el logro de los objetivos y las finalidades que se buscan con los procesos de innovación en el aula, de ahí que,

“[...] toda cultura científica deba comenzar por una catarsis intelectual y afectiva. Queda luego la tarea más difícil: poner la cultura científica en estado de movilización permanente, reemplazar el saber cerrado y estático por un conocimiento abierto y dinámico, dialectizar todas las variables experimentales, dar finalmente a la razón motivos para evolucionar” (Bachelard, 1985, p. 21).

Hasta hace pocos años, aproximadamente a finales del siglo XX, la preocupación de los investigadores en Educación Matemática ha tomado gran interés por la forma cómo están aprendiendo los profesores de matemáticas los conceptos que enseñan, la forma como conciben la misma Matemática y el interés que manifiestan en la enseñanza de estos mismos conceptos. En un comienzo, la investigación en Educación Matemática surgió de la necesidad

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

de ver que no solo era importante el conocimiento matemático formal que pudiera llegar a tener el profesor sino que también se hacía importante el dominio de estrategias para enseñar conceptos matemáticos en los salones de clase. A esto se puede añadir que se vio la necesidad de analizar los factores que influyen en el aprendizaje de la Matemática ya que aun teniendo algunas estrategias para su enseñanza, era necesario mirar el contexto en el cual el niño aprendía, dando así origen a la llamada *Etnomatemática*.

Pero ahora, no solo nos hemos preocupado por mirar cómo el estudiante aprende la matemática, sino de evaluarnos al profesor en tanto qué concepciones acerca de algunos temas en Matemáticas tiene pues es claro que la forma como aquel conciba un concepto y aun a la misma Matemática, influirá de forma relevante en el aprendizaje del estudiante.

Según lo anterior, Cooney (1994) plantea algunos interrogantes acerca del tipo de conocimiento que el docente necesita para su labor, preguntas como *¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes? ¿Qué clase de experiencias deben vivir esos profesores para construir ese conocimiento?*, han incitado a la investigación sobre la concepción que tienen los profesores en ejercicio de algunos temas relevantes en la Matemática. Cabe precisar que cuando hablo de *profesores*, no hago referencia a aquellas personas que estudiaron una carrera afín con la enseñanza de la matemática, sino a quienes han dedicado su vida a la labor docente tal como los licenciados e ingenieros.

Siguiendo esta reflexión acerca del estudio formal del conocimiento profesional del profesor, investigaciones realizadas acerca del concepto de derivada en profesores de matemáticas, como por ejemplo en Badillo (2003), Ortega y otros, permiten notar tácitamente que estos presentan dificultades

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

en la concepción de la derivada pasando desde las vivencias propias como estudiantes de pregrado y después como profesores de matemáticas.

De esta manera, a través de este proyecto de investigación propio de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander, me interesa analizar la reconstrucción del concepto a partir de un curso abordado desde otra perspectiva de enseñanza.

Así, los objetivos de esta investigación fueron: primero, observar la transformación de las concepciones de algunos profesores de matemáticas en cuanto a la derivada y su enseñanza como resultado del proceso de enseñanza vivenciado en un curso de Didáctica del Cálculo abordado desde la resolución de problemas. Segundo, caracterizar esta transformación para dar respuesta la pregunta de investigación: **¿Cómo se transforman las concepciones de algunos profesores de matemáticas sobre la derivada y su enseñanza al participar en un curso abordado desde la resolución de problemas?**

Así, como propósito inicial de este proyecto se identificaron las concepciones previas de los profesores que se tomarían como muestreo de la investigación y que participaron en la Especialización en Educación Matemática –quinta cohorte- en la Universidad Industrial de Santander, tal como se mencionó anteriormente, antes de comenzar el curso de Seminario IV de Cálculo; Dichas concepciones previas son el fruto de la clase de Cálculo Diferencial que cursaron en sus estudios de pregrado, la concepción adquirida en la enseñanza de esta, así como también los estudios hechos, por algunos de ellos, del tema.

Una vez identificadas las concepciones previas en los profesores, se analizó la evolución de la concepción de derivada en ellos durante el desarrollo del curso abordado desde la resolución de problemas. Así, para una mayor comprensión de dicho análisis, y del mismo objetivo específico, es

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

conveniente hacer una concisa descripción de la metodología del curso en el cual se desarrolló la investigación: En el curso se abordó específicamente la enseñanza de la Derivada y de la Antiderivada para llegar la Teorema Fundamental del Cálculo. El profesor director del curso lo desarrolló, tal cual se ha mencionado, a partir de la resolución de problemas a la luz del texto "Los Elementos del Cálculo" de los autores Salinas y otros (2002), quienes son especialistas en la enseñanza de la matemática. En cuanto al texto, no está demás mencionar que ha sido construido a partir de varios estudios previos de los cuales se ha podido concluir que a partir de la enseñanza del cálculo con libros que contienen conceptos encadenados en un orden "lógico" no puede, primero, existir una comprensión cabal por parte de los estudiantes del concepto; segundo, el profesor tiende a algoritmizar parte de los contenidos, enfatizando en el aprendizaje de técnicas más que en la comprensión del concepto como tal haciendo, así, que las ideas fundamentales del cálculo difícilmente puedan ser extraídas produciendo desánimo y desencanto de las Matemáticas en los estudiantes.

Su propuesta de enseñanza (la del profesor director) incluyó ideas y nociones ausentes en el discurso tradicional, fue una propuesta fuera de los paradigmas. De esta manera, en concordancia con el texto guía, la metodología a seguir en el desarrollo del curso fue inductiva, pues fue el profesor-estudiante quien, a partir de la resolución de problemas, llegó a definir la derivada sin que en algún momento del curso se haya trabajado el concepto de derivada ni antiderivada. Para ser más explícita, las clases del curso, que fueron 4 sesiones, se desarrollaron bajo la metodología propia de un seminario en la cual algunos profesores-estudiantes presentaban el tema y los demás, junto con el profesor-director, intervenían ordenada y propositivamente según lo permitirán las situaciones-problemas propuestas para ir paulatinamente reconstruyendo el concepto que nos atañía-.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Por otro lado, durante el desarrollo del curso se estudiaron, apoyados en los niveles de la teoría APOE (acción, proceso, objeto, esquema) y en los esquemas del concepto de derivada que son trabajados por Badillo (2003) y Ortega a cuatro profesores de matemáticas que en el trabajo se describió cada uno de ellos de forma concisa; cada uno de los profesores-estudiante fue asignado después de detectadas sus concepciones previas en uno de los niveles inter, intra o trans antes de comenzar el curso para detectar la evolución que tuvieron en el concepto de derivada durante el desarrollo de este.

Una vez se abordó y desarrolló el curso, se evaluaron las concepciones de los profesores de matemáticas posteriores al mismo por medio de una evaluación oral y por medio de algunas preguntas de forma escrita; en la evaluación oral, se trabajó un estilo de entrevista con el profesor orientador del curso. Finalmente se hizo una comparación entre las concepciones previas de los profesores y la reconstrucción del concepto de derivada una vez terminado el Seminario, para dar cumplimiento del objetivo general planteado inicialmente.

# Marco Teórico

Este capítulo se encuentra estructurado en tres secciones. En la primera sección se hace una introducción acerca de la importancia del planteamiento de situaciones –problema como estrategia para la conceptualización matemática. En la segunda sección se hace un análisis acerca del conocimiento profesional del profesor, bajo algunas investigaciones sobre las concepciones de derivada en los profesores de matemáticas. En la tercera sección se enunciarán algunos trabajos realizados acerca de la enseñanza de la derivada y de sus dificultades, de algunas investigaciones realizadas sobre la enseñanza de la misma en algunas universidades así como de su didáctica. Finalmente se enuncian algunas propuestas realizadas bajo estas investigaciones que aportan a la enseñanza de la derivada en los profesores de matemáticas.

---

## 1.1 LAS SITUACIONES-PROBLEMA COMO ESTRATEGIA PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN MATEMÁTICA

En la actualidad, se ha evidenciado la fuerza que ha tomado la preparación de clases de matemáticas a partir del planteamiento de situaciones-problema; Obando (2003) afirma que:

Una situación problema la podemos interpretar como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, ella debe permitir la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, autoevaluación y la heteroevaluación. (Ibídem, p.01)

Esto implica que las situaciones problema deben ser estructuradas de tal manera que, los elementos que la constituyen permitan en el estudiante desarrollar de manera autónoma los procesos de exploración, tales como la formulación de hipótesis, la verificación de su validación y si es necesario una reformulación.

En consecuencia con este hecho, las situaciones problema al propiciar espacios que permiten particularizar, conjeturar, verificar y argumentar, se convierten en escenarios naturales para el camino hacia la generalización.

La actividad matemática del alumno tiene un objetivo primordial: hacer que el estudiante alcance esquemas generales de pensamiento; es decir, que ante un problema pueda reconocer un caso particular de una clase general de problemas, o de forma contraria, dado una forma general, el estudiante pueda determinar casos particulares de la generalización. Pero, dado que la construcción del conocimiento es contextualizado por naturaleza, implica que el paso a la generalización no es fácil ni mucho menos inmediato, como muchas veces se pretende creer en la enseñanza de la matemática. Esto implica, que el profesor deba formular variadas situaciones en varios contextos, con el fin de lograr que los alumnos puedan identificar los invariantes comunes en todas las situaciones, que son los elementos que constituyen el conocimiento que se desea enseñar así como la constitución de esquemas generales de pensamiento en los estudiantes.

Una vez constituidos esos esquemas, se espera que el estudiante tenga la capacidad de utilizarlos en la solución de situaciones problemas particulares, es decir, que el estudiante sea capaz de tratar a un caso particular como el representante de una clase general y viceversa; ya que la generalización no

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

solo debe consistir en ir de lo particular a lo general, sino también, que de lo general el estudiante pueda plantear casos particulares.

Así que el planteamiento de situaciones problema se convierte en el eje central para el aprendizaje del estudiante y además permite que él sea el autor principal en la construcción de su conocimiento. Por esto, que las situaciones problema contienen elementos fundamentales que se describirán a continuación.

### **Las situaciones problema: Descripción de los elementos fundamentales**

En el artículo acerca de las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática escrito por Obando (2003) hace una descripción de los elementos básicos de las situaciones problema, que a continuación se enunciarán.

Describe 4 elementos fundamentales como lo son: la red conceptual, el motivo, los medios y los mediadores, las actividades y la evaluación.

**La red conceptual:** se entiende como una especie de malla donde los nudos son el centro de las distintas relaciones existentes entre los conceptos asociados a los conocimientos que la situación permite trabajar.

La red conceptual es la encargada de que el proceso de exploración y sistematización genere cada vez más significados entre los conceptos y que las relaciones entre éstos no se agoten de inmediato. Es decir, la red puede extenderse desde los distintos nudos hacia el establecimiento de relaciones con otros núcleos temáticos, posibilitando la motivación hacia nuevas representaciones de los objetos involucrados.

La red conceptual se constituye en el elemento básico de la situación problema, en tanto que ésta permite tomar decisiones sobre los medios y

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

mediadores, y del tipo de actividad que se debe proponer al estudiante, de tal forma que se logre concordancia entre las relaciones estructurales lógico-matemáticas que se establecen en la situación y los aspectos conceptuales de la red que se espera aprendan los alumnos. Así, se puede determinar la mejor manera de organizar la contextualización de los diferentes conceptos y relaciones de la red conceptual.

De esta forma, la actividad matemática desplegada por el estudiante en el desarrollo de la situación es el motor generador de conocimientos con múltiples conexiones entre sí.

**Motivo, medios y mediadores:** Las matemáticas tradicionalmente han sido consideradas como la ciencia de lo abstracto y lo general por excelencia, fundamentalmente porque la validez de sus postulados y teoremas no depende de la comprobación empírica de los mismos, sino de la inserción de un marco formal deductivo.

Pero esta forma de presentación del conocimiento matemático oculta todo rastro de su origen y génesis. El matemático, en su quehacer, comete errores, elabora hipótesis, realiza inducciones, generalizaciones, etc., y posteriormente, cuando juzga que ha encontrado un resultado digno de ser comunicado, elige, del gran laberinto de sus reflexiones, aquello que es comunicable y «susceptible de convertirse en un saber nuevo e interesante para los demás».

Haciendo esta reflexión acerca de la construcción de conceptos matemáticos, es necesario que para que ellos ingresen a la escuela deben sufrir una re-elaboración didáctica, que los re-contextualice, los re-personalice y los re-temporalice. Esto es relevante, pues no debe olvidarse que el aprendizaje es el resultado de la actividad matemática del alumno, mediada por las situaciones problema a través de las cuales toman sentido y significado los

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

conceptos matemáticos. Así, una situación problema genera un ambiente en tiempo y espacio propio, sobre la base del conocimiento de los alumnos para quien es diseñada, que da vida a los conceptos matemáticos en el aula. Pero tomar en consideración a las personas, el tiempo y el espacio para efectos del diseño de una situación problema, obliga a tomar decisiones en términos de la forma, o de los elementos conceptuales que son pertinentes para las circunstancias particulares del momento. Es en esta reelaboración didáctica donde se debe centrar la actividad profesional del maestro de matemáticas, a fin de propiciar para el alumno una verdadera actividad científica, pues sin este cuidado se pueden proponer situaciones a los alumnos que, por su dificultad, superen sus posibilidades de actuación, o que por su simpleza, no constituyan un reto intelectual.

Y es en esta reelaboración didáctica donde juegan un papel fundamental los medios y los mediadores, al igual que el motivo dentro del cual se desarrolle la situación problema. Éstos, por así decirlo, deben constituir el contexto significativo de la situación, sabiendo que cuando me refiero a contexto significativo, no es por el hecho de hacer situaciones que tengan que ver expresamente con la realidad o la cotidianidad, es en el sentido de mostrar por medio de situaciones problema la posibilidad de hacer análisis con argumentos matemáticos.

El motivo es la excusa, la oportunidad, el evento, la ocasión, el acontecimiento, la coyuntura, o el suceso, que puede ser aprovechado para generar una situación problema en el aula de clase. Su elección es muy importante, pues determina en gran medida las posibilidades de comprensión de la situación por parte de los estudiantes, y por ende, el que la situación pueda constituirse en un verdadero problema.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

El medio es el material, el instrumento que se usa para que el estudiante pueda llegar a adquirir ese conocimiento matemático que se pretende; por ejemplo, los materiales concretos como los juegos, los bloques, el computador, etc., se convierten en medios que pueden facilitar el aprendizaje del estudiante. Este medio se convierte en mediador cuando hace que el estudiante llegue a comprender el concepto que se pretende; aquí es importante darse cuenta que cualquier pregunta, o ejemplo que se desarrolle en la clase puede hacerse mediador entre el conocimiento y el estudiante, aprovechar las preguntas de los estudiantes puede provocar un aprendizaje significativo.

Una vez trabajadas las situaciones problema en el aula de clases, el profesor viene a ser el encargado de darle estructura a los conceptos reconstruidos, es decir, de institucionalizarlos. Éste se constituye quizás en un elemento fundamental del trabajo, ya que en la institucionalización el profesor organiza, sistematiza, da cuerpo y estructura a los objetos matemáticos que se quería fueran objeto de aprendizaje en los alumnos a través de las situaciones problema. En este momento, el maestro retoma la responsabilidad del trabajo, pues debe organizar de manera clara los objetos de conocimiento matemático presentes en la situación y así, ayudar a los estudiantes a organizar los esquemas generales de pensamiento a través de los cuales estructura su conocimiento.

La institucionalización debe darse sobre la base del trabajo realizado por los alumnos y de la red conceptual que sustenta la situación. El trabajo realizado por los alumnos permite analizar y confrontar los diferentes procesos y procedimientos y así, ver las similitudes, diferencias, eficiencia, inconveniencia, restricciones, etc. De esta manera, a través de la socialización, se logra que cada alumno aprenda de los demás, tanto al

realizar críticas constructivas del trabajo de sus compañeros, como al recibirlas.

En suma, la institucionalización debe permitir a los alumnos una mejor aproximación y toma de conciencia de los aspectos conceptuales que ellos deben aprender, y que la situación les permite generalizar.

## **1.2 EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR**

En los últimos años, hablar acerca del conocimiento profesional del profesor de matemáticas –es decir, de las concepciones que tiene el profesor sobre la matemática que enseña y sobre la forma como la enseña– ha sido sin duda alguna un tema que ha cobrado un creciente valor entre los investigadores en Educación Matemática. Por ejemplo, Badillo (2003) en su tesis doctoral acerca de la concepción de derivada en profesores de matemáticas en Colombia, hace una recopilación de algunas investigaciones realizadas acerca del conocimiento profesional del profesor de matemáticas desde el punto de vista pedagógico y científico, recopilación que será tomada como base para esta investigación.

De otra parte, Shulman (1986) inicialmente considera el conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico como dos componentes separados del conocimiento del profesor. Sin embargo, las investigaciones en educación matemática han intentado la integración de estas dos componentes cuando se considera el ideal del conocimiento profesional del profesor. Dado lo complejo que resulta hacer investigación sobre el conocimiento profesional del profesor en la matemática, es necesario limitarse, por así decirlo, a

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

investigarlo centrándose en temas específicos de la Matemática como lo tomaremos a continuación centrándonos en la enseñanza de la derivada ya que esto nos permite comprender mejor el dominio del pensamiento matemático de los profesores y la influencia de este en la enseñanza y el aprendizaje de las mismas. De hecho, Badillo (2003) considera que uno de los logros de las investigaciones sobre el pensamiento de los profesores de matemáticas ha sido, precisamente, el profundizar sobre su conocimiento profesional y su influencia en los procesos de enseñanza.

Por su parte, Salvador Llinares (1998) adopta una perspectiva profesional basada en marcos teóricos de la psicología cognitiva, desde la que cual pretende analizar los procesos de formación de los profesores de matemática. Entre los elementos que se tienen en cuenta para la descripción de las componentes del conocimiento profesional, y que dan relevancia a la determinación de los saberes, se tienen (Llinares 1998):

- Conocimiento de matemática (conceptos, procesos, etc.) y sobre la matemática (concepciones sobre la naturaleza de la matemática).
- Conocimiento del currículo de matemática.
- Conocimientos sobre las cogniciones de los estudiantes: características del aprendizaje de nociones matemáticas específicas, dificultades, errores y obstáculos.
- Conocimiento pedagógico específico de la matemática.
- Conocimiento sobre la enseñanza (planificación, organización de la enseñanza de matemática.)

Por su parte, Broome (1994) plantea que la forma como se genera el conocimiento práctico obedece a transformaciones heurísticas de conocimientos teóricos y a la integración de los mismos por parte de los profesores. De ahí que se sugiere la caracterización de la generación del conocimiento profesional del profesor como un proceso inductivo; es decir,

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

que la generación del conocimiento práctico del profesor se plantea como una construcción personal del profesor, que proviene del uso del conocimiento profesional en el momento de la enseñanza y en la propia reflexión que debe hacer de la misma. Por lo tanto es relevante conocer que la caracterización del conocimiento profesional del profesor de matemáticas no solamente está en los que sabe sino también en lo que hace.

De otra parte, Cooney (1994) plantea algunos interrogantes en relación con el tipo de conocimientos que los profesores necesitan para su práctica, y por tanto cuestiona las bases teóricas sobre la enseñanza y el aprendizaje que orientan los cursos de formación inicial y permanente del profesorado: "*¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes? ¿Qué tipos de experiencias deben vivir esos profesores para construir ese conocimiento?*" (ibidem, p. 608).

Basándose en las diferentes investigaciones que ha adelantado en el estudio del pensamiento del profesor –con respecto a lo pedagógico–, Cooney señala que la mayoría de ellas dan razón de los conocimientos locales de los profesores y dejan de lado el paso de lo particular a lo general. Además, el autor afirma que las investigaciones realizadas llevan implícitas el pensamiento en los profesores de verse como los transmisores y los estudiantes como los receptores de los contenidos que transmiten. Es por esto que Cooney plantea la necesidad de promover la formación del profesorado como un campo de indagación sistemática que se base en la cognición, el contexto y el paradigma constructivista. Esto implica que hay que ver al profesor como un agente cognitivo y asumir la importancia que tienen los procesos de cognición por parte de los mismos.

Simon (1995), enfatizando lo dicho anteriormente por Cooney, plantea que la enseñanza del profesor está guiada por unas trayectorias hipotéticas acerca del aprendizaje de los estudiantes; esto quiere decir que el profesor hace una

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

serie de análisis de los caminos que pueden conducir de forma más efectiva al aprendizaje del estudiante y esto se plasma de forma clara en la planeación del clases del profesor. En este punto, Gómez (2001) plantea que estas trayectorias son las que se deben evaluar para la didáctica de la misma matemática. Es así como Gómez nos deja ver algo de mucha importancia del conocimiento didáctico en la formación inicial de los docentes que es precisamente el conocimiento propio de la Didáctica de las Matemáticas que el profesor usa cuando diseña, lleva a la práctica y al mismo tiempo le permite reevaluar su práctica pedagógica una vez realizada. Así que se concluye, por su parte, que para mejorar la formación de docentes de matemáticas, debe contemplarse, además del contenido disciplinar, una formación en las nociones de la Didáctica de las Matemáticas.

De ahí que se puede considerar que un programa que contemple el diseño de actividades concretas de enseñanza, tal y como lo afirma Badillo (2003), propicia en el profesor procesos de reflexión y autoanálisis sobre los procesos de aprendizaje y sobre su práctica profesional, que contribuyen a la construcción y reconstrucción de su conocimiento práctico.

Por otro lado, en tanto al conocimiento profesional de los profesores participantes de la investigación, cabe decir que, teniendo en cuenta los resultados de Badillo (1999), se detectaron algunas inconsistencias en los discursos de los profesores con relación al concepto de derivada. Así, de esto se desliga que si en el conocimiento profesional del profesor la componente de su conocimiento matemático presenta dificultades, esto conlleva a que halla dificultades en la enseñanza del concepto jugando así esto un papel determinante en el aprendizaje de los estudiantes. De esta manera, Badillo (2003) señala como "inconsistencias" a las dificultades que se presentan (a) en la mente, en tanto comprensión en los conceptos; (b) en las matemáticas; y, (c) en el mensaje, que serían pues, las que podrían explicar las dificultades en la enseñanza.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Con respecto a la primera, puede afirmarse que esta puede aparecer tanto en la mente de los profesores de matemáticas como en la de los estudiantes; este problema mental en los profesores de matemáticas puede ser debido a falencias en la construcción cognitiva del conocimiento y en la percepción misma de la matemática; de ahí que lo ideal es detectarlas en los profesores, hacerlos conscientes de su presencia y buscar las alternativas de solución para poder modificarlas.

La segunda, en las inconsistencias matemáticas, hace referencia a la mala conceptualización de algún concepto complejo, al no entendimiento completo del mismo, y pone como ejemplos el concepto de límite, el concepto de infinito y el concepto de derivada (Badillo, op cit).

En la tercera inconsistencia, en el mensaje, Badillo (2003) afirma que en este caso, el concepto matemático, el de derivada, puede ser transmitido de forma errónea y expresada inadecuadamente, de manera que evoca ideas inapropiadas. En esta misma, el autor plantea tres categorías que pueden provocar esta inconsistencia: el lenguaje, el currículo y la instrucción. Haciendo referencia concretamente al concepto de derivada el profesor puede no tener el lenguaje apropiado para darse a entender ante sus estudiantes, lo que hace que su aprendizaje no sea exitoso, aunque el profesor tenga claro el concepto. A este paso del conocimiento, a través del lenguaje y otras herramientas, del profesor al estudiante se le conoce, según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, como "transposición didáctica" que puede realizar óptimamente en términos de conceptos y comunicación si quien la lleva a cabo ha abordado cursos sobre la Didáctica del Cálculo que permiten hacer reflexiones acerca del uso de la misma para la enseñanza.

Una investigación realizada por Garbin (2000) presenta una revisión exhaustiva en esta línea de investigación sobre las últimas inconsistencias enunciadas y establece un paralelo entre estas y las enunciadas por Badillo

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

(2003) y que para efectos de esta investigación se tomaron en cuenta para analizar las concepciones sobre derivada de cada profesor antes de comenzar el curso de cálculo a partir de la resolución de problemas. Así, la autora define las incoherencias y las inconsistencias de la siguiente manera:

“Si bien es cierto que son términos que pueden considerarse sinónimos, nosotros los usamos y los seguiremos usando como matices diferentes aunque estén estrechamente relacionados. [...] **Cuando se habla de alguna idea o pensamiento inconsistente es con relación al concepto matemático involucrado, o a contradicciones dentro de una teoría matemática dada.** Generalmente aparecen durante la resolución de un problema o en una respuesta al mismo. [...] Hemos hablado que una forma particular de inconsistencias directas son las que se presentan en la situación en la que los estudiantes tienen que resolver un mismo problema representado de diferente forma, poniendo de manifiesto que los alumnos no tienen respuestas consistentes ante varias representaciones. Es decir, una respuesta puede ser consistente frente a algún tipo de representación e inconsistente con el contexto para una representación distinta. [...] **Ante esta situación en la que un estudiante debe resolver un mismo problema pero expresado de diferentes maneras, se generan respuestas contradictorias entre sí. Nosotros llamamos a estas respuestas contradictorias entre sí, respuestas incoherentes, o coherentes en caso contrario.** En consecuencia, podemos tener un estudiante en que sus respuestas sean inconsistentes con el concepto involucrado, y sin embargo, mostrarse coherente en su pensamiento – ideas o respuestas equivalentes en problemas diferentes–“ (ibídem, pp. 255-258).

Lo anterior permite inferir que cuando se analizan las inconsistencias, el estudio se centra en los errores conceptuales que presentan las ideas de los estudiantes teniendo como referencia el conocimiento matemático formal. En cambio, cuando se analizan las incoherencias, se están centrando la atención en la coherencia que exhiben los estudiantes con relación a los procesos de

resolución con los cuales abordan cada una de las situaciones planteadas en los diferentes contextos y mediante la utilización de diferentes lenguajes.

En esta investigación tomaremos las dos acepciones propuestas por Garbin de la forma como lo manejó Badillo (2003) en su investigación: El término **inconsistencia** hará referencia a la detección de errores formales en el concepto de la derivada. Es decir, a la forma como los profesores conciben la derivada y la forma como conciben la misma matemática. Por su parte, el término **coherencia o incoherencia** se intenta definir en el proceso en el cual los profesores abordaron situaciones sobre la derivada –así fuera de forma implícita-, haciendo su análisis tanto de forma algebraica como gráfica.

### 1.2.1 Análisis de la formación del concepto

Badillo (2003) plantea la importancia de realizar un análisis teórico acerca del conocimiento matemático del profesor; argumenta que esto permite a los investigadores describir ciertas construcciones mentales que son importantes a la hora de reconstruir un concepto matemático. Otros investigadores manifiestan que el análisis teórico en los docentes investigados debe comenzar, primero, por la concepción que los investigadores tienen acerca del concepto matemático a estudiar, así como de sus experiencias que como enseñantes tienen del concepto. Los interrogantes que deben acompañar esta primera fase de la investigación son: “¿qué significa comprender un concepto matemático?”, y, “¿cómo esa comprensión puede ser construida por un individuo?”.

De otra parte, en la teoría APOE (acción, proceso, objeto, esquema), la cual es aplicada por la autora, se parte de una gran afirmación sobre lo que significa aprender y conocer un concepto matemático, que es la premisa que sustenta las investigaciones que se desarrollan:

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

“El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder, ante la percepción de situaciones problemáticas de matemática, mediante la reflexión de los problemas y sus soluciones en un contexto social, y por medio de la construcción y reconstrucción de acciones matemáticas, procesos y objetos, y de su organización en esquemas, para usarlos al tratar con esas situaciones” (ibídem, p. 33).

Como se puede observar la afirmación anterior tiene una postura teórica sobre el aprendizaje y el conocimiento matemático. Se sabe que lo que un individuo conoce y es capaz de hacer, no está disponible siempre para él en una situación dada. Este fenómeno, resulta en cierto grado familiar –al menos en mi experiencia– tanto en nuestra labor como profesores así como en el papel de estudiantes pues la mayoría habremos vivenciado momentos angustiosos en los cuales no comprendemos cómo a la hora de un examen no hemos sido capaces de resolver un problema, pero minutos posteriores a este, lo hacemos correctamente. Otra situación que ejemplifica este suceso es cómo a veces no somos capaces de resolver una situación problema, pero cuando el profesor –si estamos como estudiantes– o un compañero, nos orienta mínimamente, ya somos capaces de hacerlo. De este modo, notamos que hay dos situaciones importantes a tener en cuenta a la hora de evaluar el concepto en los investigados: el aprendizaje de un concepto y el acceso a él cuando lo necesite.

Así, enlazando lo anterior y retomando un poco acerca de las acepciones: inconsistencia e incoherencia, se puede clarificar un poco más sobre estas: hablamos de *incoherencia* cuando hay un problema en acceder a ese conocimiento y de *inconsistencia* cuando hay fallas en el aprendizaje de ese concepto. Ahora, para que las incoherencias puedan disminuir, Dubinsky (1996) plantea que, debe implementarse en los salones de clase y los grupos de investigación el trabajo colaborativo ya que esto ayuda como proceso a que la persona pierda el temor a enfrentarse a los problemas y aprenda a comprender situaciones que se plantean.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Esta postura frente a la problemática del conocimiento nos aporta dos direcciones: por un lado, a nosotros como profesores, nos invita a reflexionar sobre la forma cómo evaluamos a nuestros estudiantes para, de esta manera, acercarnos de una mejor manera al conocimiento que ellos puedan tener *realmente* sobre el concepto enseñado; y, por otro lado, nos lleva a los investigadores a plantearnos la necesidad de que las conclusiones a las que lleguemos en este tipo de investigaciones sean producto del análisis de varios factores influyentes en el aprendizaje del concepto y no solo en la evaluación escrita que casi siempre implementamos.

Es por esto que para este trabajo de investigación realizado, en la evaluación, se trabajó a partir de los niveles de comprensión de un conocimiento en un esquema que plantea, reiterando, la teoría APOE tal cual describirá a continuación.

### **Niveles de comprensión de un esquema: intra, inter y trans**

En la tesis de Badillo (2003) se explica acerca de los niveles de comprensión de un esquema, que resumidamente, podemos decir, que fueron propuestos por Piaget y García en 1982 aunque anteriormente Piaget ya los había enunciado informalmente en publicaciones anteriores. Estos niveles son trabajados formalmente por la teoría APOE en la parte de los esquemas y pueden ser encontrados en el desarrollo de los niveles de comprensión. Antes de entrar a tratarlos puntualmente, se debe tener en cuenta que aunque, según este esquema y sus niveles, a medida que el estudiante avanza en el conocimiento y en mejora los procesos de formación de conceptos, este organiza y re-organiza las ideas construidas en el nivel anterior lo cual no implica que la progresión se gradual y necesariamente lineal ya que algunos no pasan de un nivel por determinadas condiciones contextuales, situaciones académicas y de estrategias de estudio, entre otras cosas. Veamos los niveles:

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

- **Nivel intra**

Se convierte en la fase preliminar. Un objeto en este nivel no es reconocido por el estudiante como debiera ser y su forma es parecida a la de una generalización simple. En este nivel el estudiante se concentra en una acción repetitiva o una operación pero no tiene una capacidad para reflexionar y relacionar la acción con el sistema de condiciones para así sus aplicaciones y llevarlas a sistema de transformaciones. Un ejemplo para el nivel intra desde el concepto de derivada podría ser: los estudiantes interpretan la derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva dada en un punto específico, demostrando esta interpretación con los intervalos de crecimiento y de decrecimiento o alternativamente resolviendo un problema de tasa de cambio; sin embargo, los estudiantes no pueden hacer conexiones entre estos problemas; es decir, no consideran que se está presentando una misma variación en los diferentes problemas

- **Nivel inter**

En el nivel inter, los estudiantes usan, comparan y reflexionan sobre ideas que tienen aisladas y esto les lleva a construir relaciones y transformaciones. En este nivel, los estudiantes pueden, además, de una operación inicial, una vez la tienen comprendida, las otras operaciones que están implicadas o que pueden coordinarse con operaciones similares. Para el nivel inter en el esquema del concepto de derivada Baker y otros (2000) proponen el ejemplo donde el estudiante coordina la noción de derivada como la pendiente de la recta tangente con la idea de derivada como la razón de cambio en un punto dado. El estudiante puede con esta idea, describir la variación local de una función; es decir, se le dificulta describir el comportamiento de la razón de cambio en un intervalo de la función.

- **Nivel trans**

En el nivel trans, el estudiante reflexiona sobre estas coordinaciones y reflexiones desarrollando nuevas estructuras. El estudiante construye y tiene conciencia de que el sistema está completo y puede percibir nuevas propiedades globales que eran inaccesibles en otros niveles. Los estudiantes pueden, también, discriminar entre aquellas relaciones que están incluidas y aquellas que no están demostrando coherencia del esquema. En tanto ejemplo, siguiendo el anterior, en el nivel trans en el esquema del concepto de derivada Baker (ibídem) propone como tal que los estudiantes agrupan todas las derivadas como pendientes o razones de cambio en una función sobre un punto dado y reconocen que todas las situaciones en las cuales hay variación están relacionadas con el concepto de derivada. Así para este trabajo de investigación, tomamos en cuenta para cada uno de los investigados el nivel en el que comenzaron y sus características principales, luego el avance y retroceso en los niveles en el desarrollo del curso, y finalmente en el nivel que culminaron, esta fue la forma como identificamos la evolución del concepto de derivada en los profesores investigados.

## **1.3 ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA**

En este apartado del marco teórico mostrar algunas de las dificultades que se han deducido de investigaciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como de algunas investigaciones realizadas sobre la enseñanza de la derivada en las universidades.

### 1.3.1 Acerca de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la derivada

Los autores Pinzón y otros hacen una recopilación sobre algunos de los diferentes tipos de dificultades tanto en la enseñanza como el aprendizaje del concepto de derivada, de acuerdo a su origen didáctico –es decir, de enseñanza- o a su origen epistemológico. Esta clasificación se establece después de un estudio profundo del origen y el devenir histórico del concepto de derivada, así como de la comprensión e interpretación de la forma de enseñarla según los procesos de aprendizaje. A continuación se describen las dificultades de origen didáctico y epistemológico, que se enunciarán de forma casi textual dada la claridad y la precisión con la cual hacen referencia a estas (ibídem, p. 1):

#### De origen didáctico

**La derivada en un punto.** En los textos escolares se muestra de las destrezas que se tiene para hacer conversiones de las representaciones gráficas a las algebraicas, pero muestra también la preponderancia de los procedimientos de carácter algorítmico-algebraico ligados a más procedimientos de carácter puntual centrados en la noción de convergencia.

**Tangencia local.** Se presenta la derivada como la concepción de D´Alambert que interpretó la tangente como el resultado de un proceso al límite de una familia de rectas secantes debido a que los estudiantes conservan la idea de tangente que proporciona la matemática griega en la antigüedad clásica: la recta (toda la recta) es tangente a la curva, *sí la toca pero no la corta*; así que ejemplos gráficos como el que vemos a continuación hacen que el estudiante lo rechace como una recta tangente a la curva.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

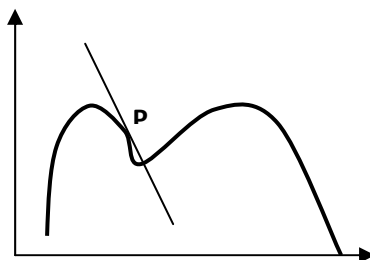


Figura 1.

Y para nosotros es claro que la recta es tangente a la curva en el punto P, pero indiscutiblemente corta a la curva en otro punto, pero esto no le quita el ser tangente.

**Dificultad para percibir la derivada como una función y caracterizarla de manera global.** La identificación de esta dificultad está en el aprendizaje de la derivada y de los procesos de derivación, en donde prevalece una concepción puntual mediante la identificación de que la derivada es la “pendiente de la recta tangente en un punto”. En la creación de dicha dificultad concurren factores tanto didácticos –como se ha catalogado- pero sin desmeritar que también pueden ser epistemológicos.

No está demás decir que la concepción de función como objeto es necesario para entender que la derivada de una función es otra vez una función, y que la solución de un problema —por ejemplo, una ecuación diferencial— podría ser una función. (Ed. Dubisnky)

**La concepción dinámica (sucesión de secantes).** Esta viene ligada fuertemente con la segunda dificultad descrita ya que se presenta cuando se enseña la derivada apoyada en la concepción de D`Alambert, debido a la conservación del carácter estático en la determinación de la tangente en la Geometría Euclidiana (pues es dada como un lugar geométrico); es difícil

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

comprender que por medio de una sucesión de secantes se obtenga realmente la tangente.

**La algebrización del cálculo diferencial escolar.** Esta dificultad es señalada por Artigue (citado en Gascón, 1998) que se manifiesta en un enfoque algebraico y reduccionista del cálculo y se basa en las operaciones algebraicas con límites y derivadas, pero que trata de una forma simplista las ideas y técnicas específicas del Análisis, como son la idea de razón de cambio instantáneo, o el estudio de los resultados de esas razones de cambio. Todo esto no es de desconocimiento para nosotros, pues en los colegios, y aun en algunos cursos universitarios, las clases de cálculo se convierten en desarrollar destrezas para realizar ejercicios de cálculo de límites y de derivadas pero no se conoce nada del concepto.

**Los ejemplos prototípicos de un concepto.** Es el ejemplo que posee características que son atributos no requeridos por la definición. Aunque los ejemplos colaboran al interpretar la definición, el problema que involucra es que la gama que se presenta en el texto no es suficientemente rica y, por lo tanto, se corre el riesgo de generalizar los atributos comunes a dichos ejemplos como si fueran todos relevantes al concepto. Consecuentemente, los atributos irrelevantes corren el riesgo de convertirse en una dificultad de origen didáctico o de enseñanza, al ser transferidos como característicos del concepto. En algunas ocasiones, esto lleva a rechazar objetos que cumplen con la definición y en otros casos, reconocen como ejemplo un objeto que asocian al prototipo aunque no cumpla con los requisitos de su definición del concepto. Por ejemplo, el tomar a la derivada solamente como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado.

**Terminología que utiliza el texto.** En la enseñanza de las Matemáticas se pueden encontrar tres clases de palabras (Pimm, 1987):

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

- Palabras técnicas, que normalmente no forman parte del lenguaje cotidiano.
- Términos que aparecen en Matemáticas y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos como, por ejemplo, límite, convergencia o derivada.
- Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos. Así, esta dificultad se refiere al uso de las palabras del lenguaje ordinario para facilitar la comprensión de concepto científico. Muchas veces, como profesores utilizamos las palabras del lenguaje cotidiano, y aunque nosotros lo vemos desde la rigurosidad matemática, no tenemos la precaución de hacer la diferencia de la misma palabra bajo diferentes lenguajes.

**Uso de la terminología matemática.** El lenguaje matemático adquiere la facultad durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de facilitar la expresión de los conceptos; pero, se puede configurar en una dificultad al otorgarle más importancia a la notación que al significado del concepto. Por ejemplo, cuando se trata de trabajar formalmente y hacer demostraciones bajo la definición de límites, dejamos de lado la esencia del concepto y nos quedamos con el aprendizaje, casi memorístico, de la definición de límite.

**Falta de enlace para crear una estructura conceptual.** Es el intento de relacionar un concepto con una estructura conceptual sin ser capaz de establecer dicho enlace, obstaculizando la posterior construcción y comprensión de nuevos conceptos que dependen de éste, impidiendo la generalización de dicha noción.

### De origen epistemológico

**Desdoblamiento de la derivada.** De acuerdo con Duval (1983, p. 410) el obstáculo del desdoblamiento aparece cuando el estudiante debe “[...] separar

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

propiedades o características, hasta entonces fuertemente asociadas a un objeto, o atribuir denominaciones y representaciones diferentes a un objeto que se piensa que es el mismo”.

La resistencia que presentan estas concepciones ante distintos intentos instruccionales muestra que se está ante una dificultad con raíces epistemológicas. Evidentemente, no se puede concluir de ahí que con la sola “maduración” el estudiante alcanzará un nivel de conceptualización conforme al cuerpo teórico de la Matemática. Es necesaria la intervención de procesos didácticos bien planificados, que tengan en cuenta las dificultades que el estudiante tiene que vencer.

**El problema de calcular el ritmo de cambio.** Este problema surgió directamente del dominio de la mecánica en el intento de enfrentarse con movimientos donde la rapidez y la aceleración variaban con el tiempo: se trataba de encontrar la rapidez y aceleración en cualquier instante a partir de la ecuación de la posición; e, inversamente, calcular la rapidez y el desplazamiento sobre la trayectoria a partir de la ecuación de la aceleración de un cuerpo en función del tiempo. En estos casos, el concepto de “rapidez media” resultaba insuficiente: no podía calcularse la rapidez en un instante, pues al ser cero tanto el desplazamiento como el tiempo empleado, se llegaba a la indeterminación:  $0/0$ . Del mismo modo, no podía calcularse el desplazamiento multiplicando la rapidez por el tiempo empleado, pues si la rapidez cambiaba durante ese intervalo de tiempo, ¿qué valor de la rapidez debía tomarse?

Se debe resaltar, como señala Schneider (1992), que las dificultades que plantearon históricamente estos problemas iban más allá de la comprensión del concepto de límite, y procedían también de una visión fuertemente empirista de las ciencias en general y de las Matemáticas en particular; una visión que se negaba a admitir la existencia de conceptos como el de rapidez

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

instantánea por carecer de un referente empírico directo. En efecto, la rapidez media es un concepto que puede ser percibido coordinando las sensaciones de duración y desplazamiento, y puede ser medido; por el contrario, la rapidez instantánea es un objeto mental que escapa al universo de los sentidos –no existen ahora las sensaciones mencionadas– y de la medida directa. Según la autora, la dificultad consiste en que “se le niega a las Matemáticas el derecho (o simplemente la posibilidad) de delimitar con precisión algo que los sentidos no aprehenden más que imperfectamente”.

Debido a esta dificultad, se pretende llegar al concepto de rapidez instantánea a través del mundo de los sentidos, del cual escapa una y otra vez, lo que provoca un claro rechazo hacia el concepto de rapidez instantánea. Esta resistencia a aceptar los objetos teóricos construidos por la ciencia, confundiéndolos con los objetos reales del mundo, tal como se recoge en los diálogos entre Galileo y su maestro Del Monte, es un obstáculo característico del nacimiento de la ciencia moderna, bien documentado por historiadores y filósofos de la ciencia (Mathews, 1994a, 1994b; Westfal, 1977, pp. 38 y ss.). Así, sabemos que el problema de calcular la rapidez instantánea y la distancia recorrida en movimientos no uniformes muy pronto se transformó en un caso especial del problema de calcular el ritmo de cambio instantáneo de una variable con respecto a otra, y su inverso. Su solución fue propuesta principalmente por Newton.

**El problema de encontrar la tangente a una curva dada.** Se trataba de un problema de geometría pura pero con importantes aplicaciones en el dominio de la óptica y en el de la mecánica. El concepto mismo de tangente no estaba claro, pues la concepción griega de línea que toca a la curva en un solo punto y se encuentra a un lado de la misma, no era suficiente para curvas que iban más allá de las cónicas.

**El problema de calcular valores máximos y mínimos de una función.**

Era un problema de interés para la mecánica y la astronomía, en relación, por ejemplo, con el ángulo que determina el alcance máximo de un proyectil o con la mayor y menor distancia de un planeta al sol.

**Dificultad en la interpretación del papel de las definiciones de la derivada en la actividad matemática.**

La definición se ve como la descripción de un objeto ya conocido por los sentidos o por "insight", no es la definición quien determina al objeto sino el objeto es quien determina a la definición (Sierpinska, 1992 apud Calvo, 2001, p.40).

**La derivada como un límite.** Se manifiesta en la tendencia a evadir los procesos infinitos y a rechazar el paso al límite como una nueva operación matemática, se considera el límite sólo como una aproximación (ibídem).

### **1.3.2 Acerca de la enseñanza de la derivada en las universidades**

Un estudio realizado por la Universidad Católica de Valparaíso (Chile), el Instituto de Matemáticas trató de darle solución a la pregunta *¿cómo enseñan la derivada los profesores de cálculo, en la universidad?*, esto con la idea de buscar el mejoramiento de la enseñanza de la matemática y de la derivada, así como también mejorar el quehacer docente y las estrategias posibles para este mejoramiento. Esta iniciativa se generó por la baja calidad en el aprendizaje del cálculo de los estudiantes de los últimos semestres de la universidad, y esto fue detectado a través de cuestionarios con preguntas básicas del cálculo.

Así, Ortega y otros (2002) elaboraron una encuesta dirigida a los profesores de matemáticas y se consideraron siete aspectos: el concepto de derivada, cálculo de la derivada, interpretación de la derivada, teoremas claves, máximos y mínimos, gráfico de curvas y otros problemas. Para cada uno de

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

estos aspectos se trabajaron siete parámetros en las preguntas: grado de dificultad, grado de importancia, distribución del tiempo, uso de ejemplos ilustrativos, uso de ejercicios y problemas, tipo de presentación de la materia y metodología en clases.

Una vez trabajados estos aspectos, los autores plantearon como conclusiones generales que de los 32 profesores encuestados, todos ellos trataban de dar un buen curso de cálculo en la enseñanza de la derivada, tenían un buen conocimiento del tema –lo cual era de esperarse–.

Cabe mencionar dentro de la investigación se distinguieron tres grupos de profesores investigados: el primero, eran los profesores que se preocupan por dar una buena enseñanza a sus estudiantes, poniendo bastante empeño en esta tarea; el segundo grupo, no mostraba el mínimo de interés en la preparación de clases y en general en su actividad docente; el tercer grupo, no se pronunció sobre el tema.

Los resultados obtenidos gracias al uso de la CHIC (instrumento estadístico) les permitieron concluir explícitamente algunas de las situaciones que dan explicación a las falencias detectadas en los estudiantes, debido al bajo nivel de aprendizaje del cálculo. Entre ellas observaron: el uso de un solo registro de representación en la enseñanza de los temas, privilegiando lo algebraico-simbólico; la selección de ejercicios y problemas rutinarios y clásicos, no presentaban problemas abiertos ni realizaban demostraciones en general. La metodología predominante era la exposición, y no se privilegiaba la actividad de los estudiantes. De esta manera, haciendo más visible las prácticas docentes de los buenos profesores, estas podrían ser imitadas por los otros profesores, que era lo que finalmente pretendió la investigación.

En nuestro medio, no es difícil darnos cuenta de las mismas falencias que tenemos en los salones de clases. Muy seguramente, el hecho de dictar un mismo curso semestre tras semestre, hace que el profesor finalmente, tienda

a volverse rutinario en sus clases, reflejándolo en sus exposiciones, en la preparación de las clases y en los ejercicios y problemas que propone para el desarrollo de la misma.

Haciendo un análisis previo ante estas situaciones, la investigación está basada en problemas abiertos, donde el estudiante es el protagonista de su solución y no el profesor ni el algoritmo que rutinariamente ha aprendido, privilegiando en un gran porcentaje la actividad de ellos.

Continuando con el paralelo anterior, también se puede analizar que en la academia el tiempo dedicado a la realización de situaciones problemáticas usando el concepto de derivada es poco comparado con el tiempo que se le dan a otros contenidos, siendo que lo principal de un curso de cálculo es precisamente llegar al conocimiento del concepto de derivada. Según esto y reflexionando sobre la forma cómo debería enseñarse el concepto de derivada, Ortega y Sierra presentan un trabajo acerca de algunas indicaciones para la enseñanza del concepto de derivada que a continuación se presentan, veamos (ibidem, p. 93):

### **1.3.3 Algunas indicaciones para la enseñanza del concepto de derivada**

Diversas investigaciones parten de concebir la enseñanza de la derivada partiendo de ciertos conceptos de precálculo como lo son velocidad media y velocidad instantánea, pendiente de una recta y tasa de variación; esto debido a que se encontraron muchos estudiantes que tenían un dominio sobresaliente en tanto manipulaciones algorítmicas para el cálculo de derivadas complejas pero, en cambio, no dominaban los conceptos relacionados con velocidad media y tasa media de variación, junto con el paso al límite lo que forma parte de la estructura profunda del Análisis Matemático.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Azcárate y sus colaboradores (1996) presentan varias propuestas para abordar la enseñanza del concepto de derivada, a continuación dos de ellas:

- La propuesta del Grupo Cero de Valencia (1982) comienza trabajando con la tasa de variación en diferentes contextos. A través de dos situaciones problemáticas que se van desarrollando en paralelo, trata de la variación instantánea y de la velocidad media instantánea.
- *El School Mathematics Project* (1996) propone una presentación de la derivada sin usar el concepto de límite, utilizando calculadoras gráficas o programas de ordenador. Se proponen diferentes textos en los que el estudiante va pasando por niveles, pero lo fundamental es que, en un principio, la noción de derivada aparece a partir de situaciones-problemas pero sin trabajarlo desde el concepto de límite.

Otras investigaciones como la realizada por Badillo (2003) propone de igual modo, aunque no específicamente dado que no era su finalidad en su trabajo investigación, la enseñanza de la derivada a partir de situaciones problema; argumenta la necesidad que debe haber en enseñar más que algoritmos, pues esto finalmente lo terminan haciendo las calculadoras; afirma, además, que hay que enseñar a los estudiantes a pensar matemáticamente, propiciar los espacios para que aprendan a comprender el concepto de derivada de forma inductiva, donde él mismo se convierta en el protagonista de su propio aprendizaje. Con esta misma idea trabajamos esta investigación, esperando que los profesores investigados sean los protagonistas de la reconstrucción del concepto de derivada.

# Metodología de la investigación

El propósito de este capítulo es describir la metodología usada en esta investigación, los sujetos de estudio, el contexto donde se realizó, el tipo de investigación que se realizó y las fases que se crearon para darle cumplimiento a cada uno de los objetivos propuestos con el fin de dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Cómo se transforman las concepciones de algunos profesores de matemáticas sobre la derivada y su enseñanza al participar en un curso abordado desde la resolución de problemas?

---

## 2.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

El diseño de este trabajo se clasifica como un estudio de casos. Es de tipo descriptivo con análisis cualitativo, ya que se realizó un estudio que describe un suceso observado: la reconstrucción del concepto de derivada en profesores de matemáticas a partir de un curso abordado desde la resolución de problemas.

## 2.2 LOS ESTUDIANTES Y LOS CASOS

Esta investigación fue realizada con 15 estudiantes de la Especialización en Educación Matemática, quinta cohorte, que ofrece la Universidad Industrial de Santander a profesores de matemáticas de la región; el escenario fue el Seminario IV: Cálculo, curso dirigido por el profesor Gabriel Yáñez, profesor de la Universidad.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Sin embargo, para el análisis de la reconstrucción del concepto se trabajó con cuatro profesores<sup>1</sup> con el fin de ser un poco más concretos en la reconstrucción del concepto en cada uno de ellos, pudiendo llevar una observación más detallada y obtener un análisis y unas conclusiones más cercanas a la realidad. Dentro de las características que tuve en cuenta al momento de escogerlos, estuvieron la experiencia en el ejercicio docente, universidad de la cual egresaron como licenciados, entre otras que a continuación describiré detalladamente en cada uno de ellos.

### 2.2.1 Los profesores protagonistas

Los datos que se muestran a continuación fueron recolectados al comienzo de la investigación en una ficha, como la que se muestra y a partir de entrevistas informales.

<b>Nombre:</b> _____
<i>Queridos colegas, les agradezco de ante mano la colaboración en el diligenciamiento de esta hoja.</i>
Universidad en la que se graduó: _____
Título que obtuvo (completo): _____
Modalidad (presencial o a distancia): _____
Año en que ingresó y semestre: _____
Año en que se graduó: _____
Trabajo de grado que realizó (nombre): _____
Estudios, seminarios, cursillos relacionados con la enseñanza de la matemática que haya realizado: _____
Número de años en los que ha enseñado en 11 <sup>º</sup> (si lo ha hecho): _____
Grados en los que dicta matemática: _____
Años de experiencia docente: _____
Colegio donde labora: Rural o urbano: _____

<sup>1</sup> Sus nombres propios no serán publicados por respeto a la privacidad. Así que para la descripción de los profesores y el posterior análisis de sus actividades, se le asignará a cada uno una letra para citarlos.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

### **PROFESOR A:**

Egresado de la Universidad Nacional de Colombia –sede Bogotá– como Ingeniero Civil en el año 1999, estudió de forma presencial. Su trabajo de grado se fundamentó en estudios de “Zonificación de Inestabilidad en Cerros Orientales en Bogotá”. No había realizado estudios posteriores como seminarios o cursos acerca de la enseñanza de la matemática; su inclinación siempre ha estado dirigida hacia la enseñanza de la matemática de forma recreativa, inclusive, para la época trabajaba dando clases de matemática recreativa en básica primaria, y se dedicaba a crear materiales didácticos que faciliten el aprendizaje de temas matemáticos tanto para primaria como para bachillerato. Se describía así mismo como un apasionado de la Matemática desde su historia; buen lector de las estrategias didácticas para la enseñanza de la matemática debido, en cierto modo, a su trabajo; sumaba cuatro años de experiencia docente con niños de primaria en un colegio del sector urbano.

En el cuestionario aplicado acerca de la enseñanza de la derivada y de la matemática en general, el profesor dejó ver las siguientes características: esmero para que los estudiantes comprendan la matemática, preocupándose así por saber qué y cómo aprenden; no le preocupaba que los estudiantes abarcaran todo el tema propuesto para el año escolar; por ende, según sus respuestas, dedicaba mayor tiempo a que los estudiantes comprendieran los conceptos matemáticos que se alcanzaran a ver durante el año lectivo, utilizando diferentes metodologías, preocupándose así porque los estudiantes adquirieran los principales conceptos de la asignatura.

Con respecto a la enseñanza de la derivada, aunque no había enseñado este tema formalmente en un curso dado que no había enseñado en 11° grado ni en universidad, manifestó que estaba interesado en conocer todas las estrategias posibles para enseñar la derivada. Del mismo modo, afirmó que le parecía

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

importante que en las aulas de clase hubiera mayor espacio para que temas como estos se abordaran o se profundizaran en sus aplicaciones, más que en las reglas o en su rigurosidad matemática. Finalmente, de manera personal, y sin aun haberle hecho la prueba diagnóstica sobre el concepto de derivada, el profesor manifestó no tener dominio de él.

### **PROFESOR B:**

Egresado de la Universidad de Pamplona como Licenciado en Supervisión Educativa en el año de 1990; estudió a distancia; su trabajo de grado consistió en los "Aspectos Metodológicos para la Actividad Docente en la Alfabetización" que debían cumplir los alumnos de 11<sup>o</sup> grado. Ha realizado cursos en ayudas y técnicas educativas en la matemática; ha sido docente durante doce años en 11<sup>o</sup> grado y, en general, lleva treinta y cuatro años de experiencia como profesor de matemáticas. Actualmente dicta matemáticas en los grados noveno, décimo y undécimo, en el sector urbano a las afueras de Bucaramanga. Profesor con riguroso conocimiento en el currículo de matemáticas, así como de la importancia que le dan al profesor en Colombia. Una característica sobresaliente de él, es que a pesar de su gran experiencia, mostraba un gran interés en el aprendizaje de nuevas estrategias didácticas para la enseñanza de la Matemática.

En el cuestionario respondido y en la entrevista hecha de manera informal, el profesor manifestó ser paciente y sensible a las preocupaciones de los estudiantes. Interesado en que los estudiantes terminen su año escolar con buenos apuntes; preocupado porque los estudiantes vieran todos los temas propuestos para el año escolar. De lo anterior, se deduce que sus clases en cierto modo eran tradicionales en donde él dicta la clase en gran porcentaje, comparado con el espacio que le da al estudiante para realizar otras actividades aparte de escucharlo. No obstante, durante el desarrollo del curso, mostró mucho interés en aprender cómo aprenden los estudiantes y en conocer las diferentes estrategias didácticas para la enseñanza

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

de la Matemática. Con respecto a la derivada, manifestó tener un dominio regular del concepto, de no tener muchas estrategias para la enseñanza de la misma, a pesar de los años de experiencia que tiene de dictar en 11° grado, aunque argumentó que muchas veces no alcanzaba a ver este tema debido al tiempo.

### **PROFESOR C:**

Egresado de la Universidad Industrial de Santander como Licenciado en Matemáticas en el año 1996; su trabajo de grado fue realizado acerca de pruebas aleatorias en Estadística. Desde la finalización de sus estudios, el profesor ha comenzado su labor docente con jóvenes de bachillerato. Lleva doce años de experiencia docente, de los cuales once de ellos ha enseñado en 11° grado. Manifiesta ser un profesor muy comprometido con su labor docente, es apasionado por la enseñanza de la matemática y muestra estar en la constante búsqueda de estrategias para su enseñanza.

En el cuestionario que realizó el profesor, manifestó ser paciente y sensible a las preocupaciones de los estudiantes, procura que los estudiantes terminen el año con buenos apuntes, a veces analiza de donde parten los estudiantes para comenzar a enseñar en el transcurso del año escolar, sus clases parecen no ser tan clásicas, muestra interés y esmero en la preparación de sus clases, poco se basa en los libros para su preparación, mas bien, le dedica tiempo a qué es lo necesitan los estudiantes aprender y cómo lo pueden aprender.

Con respecto a la enseñanza de la derivada el profesor manifiesta tener dominio en el concepto de la derivada, le parece interesante que los estudiantes aprendan a pensar en solucionar problemas más que en aprenderse reglas de derivación, aunque manifiesta tener escasas estrategias para su enseñanza.

**PROFESOR D:**

Egresado de la Universidad de Pamplona en el año de 1999 como Licenciado en Matemáticas. Lleva catorce años de experiencia docente con jóvenes de bachillerato, de los cuales siete de ellos ha enseñado en 11° grado el concepto de derivada. Es un profesor comprometido con su labor docente y busca a través de ella que jóvenes de veredas puedan llegar a formarse como profesionales.

En la entrevista y en la encuesta aplicadas, el profesor manifestó ser flexible en las temáticas de la planeación escolar del año lectivo, esto en el sentido que no le preocupaba abarcar estrictamente lo programado en el año escolar para los cursos que le correspondía la enseñanza. Expresó analizar los pre-saberes de los estudiantes para comenzar a dictar el curso; comúnmente dicta su clase de forma clásica aunque le gusta investigar en estrategias didácticas para la enseñanza de la matemática, y cada vez que conoce alguna, se esmera en llevarla al salón de clases de la mejor forma. Es un profesor serio en su labor docente y comprometido con ella. Con respecto a la enseñanza de la derivada, el profesor manifestó tener buen dominio del concepto, así como interesarse por buscar estrategias que faciliten la enseñanza y aprendizaje de la misma; aunque aclaró que no las conoce hasta el momento, pues los textos guías no son de gran ayuda a la hora de encontrarlas.

### **2.2.2 El curso en general**

Los profesores de la quinta cohorte, en su mayoría son docentes con más de 5 años de experiencia; la edad media está en los 35 años, es decir, que son profesores con una buena experiencia y madurez en el campo de la docencia. En forma general, son profesores con mucho empeño y ánimo para estudiar, son bastante receptivos a la hora aprender. Respecto a conocimientos matemáticos aproximadamente la mitad de ellos manifiestan tener vacíos en muchos de los

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

conceptos matemáticos aparte del que nos atañe; expresaron que el poco conocimiento que tienen es, consideran, porque en los cursos de su formación docente los recursos didácticos usados en la enseñanza fueron muy escasos pues no iban más allá del tablero y la tiza, y que por tanto no comprendieron los conceptos verdaderamente. Por otro lado, dos profesores que hacían parte del grupo trabajaban en veredas –uno de ellos está dentro de muestreo para el análisis de datos–, los demás, eran profesores de áreas urbanas. Por último, no está demás mencionar que no todos los profesores son propiamente licenciados en matemáticas, algunos de ellos son licenciados en otras áreas y uno de ellos es ingeniero civil, que también hace parte de los investigados debido a las interesantes concepciones que tiene acerca de la derivada.

### 2.3 ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN

Con el fin de darle respuesta a la pregunta de investigación y cumplimiento al objetivo general planteado para esta investigación acerca de caracterizar la nueva concepción que adquirirían algunos de los profesores de matemáticas sobre la derivada y sobre su enseñanza en un curso abordado desde la resolución de problemas, se plantearon igualmente cuatro objetivos específicos, los cuales se desglosan en las etapas propias de la investigación con el fin de darle cumplimiento a cada uno de ellos. Estas son dichas etapas partiendo, para su descripción, del análisis de cada objetivo:

#### **2.3.1 Identificar las concepciones previas sobre derivada y sobre su enseñanza**

El curso dio inicio con dos pruebas (véanse los Anexos 2 y 3), la primera de ellas acerca del concepto de derivada que manejan los profesores antes de haber

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

comenzado el curso, que es explícitamente un diagnóstico acerca del concepto de la derivada y de su enseñanza. El diagnóstico se realizó con los 15 profesores que hacían parte del curso, con el fin de tener una idea global del nivel matemático del grupo respecto a este concepto y así, posteriormente al análisis de este, escoger los profesores que participarían en la investigación. En tanto, la segunda prueba fue sobre la aplicabilidad que sus conocimientos sobre derivada en situaciones-problemas; esta prueba fue realizada por el profesor director del curso, con el fin de darle inicio al curso a partir del análisis individual y luego grupal sobre las posibles soluciones a cada uno de los tres problemas planteados, que se salen de lo tradicional, y que, en un comienzo, pareciera no tener relación con el concepto. Con esta prueba se pudo detectar el manejo de lo variacional y de las razones cambio manifiestas en los diferentes problemas.

### **2.3.2 Analizar la evolución de la concepción de derivada en profesores de matemáticas durante el desarrollo del curso de cálculo abordado desde la resolución de situaciones-problemas**

Este objetivo se desarrolló en el desarrollo del curso. Para ello, ya habiendo escogido a los profesores a ser investigados, se realizaron grabaciones en las clases con el fin de evaluar cada argumento de los profesores. Dichas grabaciones –de las cuatro sesiones que se realizaron en el curso con una intensidad cada una de 8 horas– fueron la base central para analizar la verdadera evolución del concepto en los profesores, ya que allí se pudieron analizar las opiniones que daban acerca del planteamiento de los diferentes problemas, así como del dominio en la preparación de los temas que les correspondía, que mostraban de forma clara qué iban fortaleciendo del concepto. Así, las clases se llevaron a cabo mediante exposiciones de situaciones-problemas por cada uno de los profesores y se analizaron las soluciones a dichos problemas. Estos problemas fueron trabajados, como ya se mencionó, del libro *Elementos de Cálculo*; en este texto,

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

cabe resaltar que, la idea central es la de llegar al Teorema Fundamental de Cálculo a partir de situaciones-problema, de allí se deducen las reglas de derivación, la definición formal tanto de la derivada como de la integral, para darle cumplimiento al objetivo central que plantea el texto. Los problemas son propuestos en orden ascendente de dificultad, añadiendo nuevos elementos de análisis, tal como ya se explicó en la presentación de este trabajo.

De otra parte, el profesor director del curso era quien moderaba las clases y las discusiones que se producían alrededor de las situaciones planteadas. De esta manera, se hace pertinente describir las temáticas trabajadas en el desarrollo del curso:

- En la primera sesión se trabajó “La problemática cuando la razón de cambio es constante” y se trabajaron dos situaciones problemas para ello.
- En la segunda sesión se trabajó “La problemática cuando la razón de cambio no es constante”, con magnitudes que crecen cada vez más lento o que lo hacen cada vez más rápido, con magnitudes que manifiestan un decrecimiento y también, con magnitudes que manifiestan ambos comportamientos. Al final de este análisis se hizo un estudio de gráficas de las funciones derivadas –incluyendo el modelo cuadrático– a partir de la observación de las funciones como magnitud de interés y se llegan a conclusiones muy importantes de forma intuitiva.
- En la tercera sesión se trabajó “La problemática cuando la razón de cambio no es constante” a partir del método de aproximación de Euler. Además de “La conceptualización de ideas fundamentales”, a partir la interpretación geométrica de la razón de cambio.
- Por último, en la cuarta sesión se trabajó la conceptualización de la derivada, de los procesos de derivación de funciones polinomiales, de la

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

conceptualización de la antiderivada y finalmente, del Teorema Fundamental de Cálculo.

### **2.3.3 Examinar la concepción de derivada en profesores de matemáticas posterior al curso de cálculo.**

Para darle cumplimiento a este objetivo, se realizó una prueba de forma escrita y oral a los profesores investigados acerca del concepto de derivada y de su enseñanza una vez terminado el curso. La prueba oral fue grabada; allí, el profesor expuso su conocimiento adquirido durante el curso que permitió hacer una comparación entre el conocimiento previo mostrado y el nuevo conocimiento adquirido y así poder caracterizar su nueva concepción sobre derivada y sobre su enseñanza.

Algunos de los profesores no tuvieron buen desenvolvimiento en la prueba oral, manifestaban estar algo nerviosos y presionados, lo que condujo a plantearles una prueba escrita. Finalmente, se les realizó una entrevista de manera informal, con el fin de conocer las fortalezas y las debilidades de haber abordado un curso con la metodología planteada para poder, así, deducir conclusiones acerca de esta propuesta metodológica para la enseñanza de la derivada.

# El proceso de reconstrucción y transformación

## 3.1 Pruebas Diagnósticas

Como bien se describieron en el capítulo anterior, las pruebas diagnósticas para clasificar a los profesores investigados en los respectivos niveles del esquema de la derivada propuestos por la teoría APOE y apoyados en los trabajos de Badillo (2003), fueron dos; una de ellas, acerca del concepto de derivada que tenían los profesores antes de comenzar el curso y también acerca de su enseñanza, y la otra prueba consistió en la proposición de tres situaciones-problemas a ser resueltos de manera intuitiva, sin nombrar la utilización del concepto de derivada.

### PRIMERA PRUEBA

A continuación describiré la primera prueba, en cada uno de sus puntos y la importancia de haberlos formulado. Para ver la prueba completa, puede ir al anexo 2. Seguidamente se hará el análisis de cada uno de los profesores con las respuestas en esta prueba.

### Primera pregunta:

Para usted, ¿qué es la derivada? Explíquelo ya sea por un ejemplo o como lo desee.

Con esta pregunta se pretende analizar qué concepto de derivada tienen los profesores investigados. En esta pregunta, se esperan respuestas de tipo formal, informal o por medio de ejemplos. Decidí involucrar la opción de los ejemplos, debido a que, según las lecturas que he hecho, algunos docentes posiblemente tengan dificultad en expresar el concepto como tal, y lo que hacen comúnmente es relacionarlo con algún ejemplo clásico para tratar de darle explicación. Esta pregunta, así abierta como se propone, deja ver qué relación establece el docente entre la derivada y su aplicabilidad, analizar si el profesor relaciona la derivada con una razón de cambio, o con la pendiente de una recta tangente, etc.

### Segunda pregunta:

En la vida diaria, ¿qué ejemplos retoma para comprender y hacer comprender al estudiante el concepto de derivada?

Con esta pregunta, tomada del trabajo realizado por Badillo (2003) se pretende detectar qué aplicación concibe el profesor que la derivada puede tener en situaciones de la vida diaria; así mismo, cómo le hace concebir al estudiante el concepto de derivada; comúnmente, cuando el profesor utiliza ejemplos en matemáticas lo que trata de hacer, es darle un sentido lógico a la temática y además aplicable, esto, hace que los estudiantes tomen una idea más "clara" según la concepción que tenga el profesor acerca del tema.



### Quinta pregunta:

Analice la siguiente definición de derivada encontrada en un libro de Cálculo, luego especifique cómo comenzaría una clase con el tema de derivada.

#### DEFINICIÓN

La derivada de una función  $f$  es otra función  $f'$  (léase  $f$  prima) cuyo valor para un número cualquiera  $c$  es:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Una vez que dicho límite exista.

Con esta pregunta se pretende analizar si el profesor maneja la definición formal de derivada, y qué manejo le da en el aula de clase; es decir, si ve importante que el estudiante conozca su definición formal y si es así, cómo le enseña para que la conozca. Esta pregunta es muy importante, ya que permite describir dos cosas concisas: una, la concepción formal de derivada en los profesores; dos, la forma como el profesor concibe la enseñanza de la derivada.

## SEGUNDA PRUEBA

La segunda prueba –creada por el profesor director del curso– fue estudiada con el propósito de observar el análisis que hacen los profesores en situaciones-problema, donde es notoria la variabilidad y el manejo de esta con el concepto de derivada. A continuación se muestran los tres problemas planteados.

## Primer Problema

### Problema 1: El problema de optimización en números reales

Una línea de fibra óptica debe tenderse entre dos pueblos situados en orillas opuestas a un río en puntos A y B. El ancho del río es un kilómetro y B está situado a dos kilómetros río debajo de A. el costo del tendido de la red en tierra es de  $c$  pesos por kilómetro y de  $2c$  por kilómetro cuando se realiza bajo el agua. Se pregunta por la forma más económica de tender la fibra óptica.

Plantear este problema, no es tan sencillo, primero es necesario hacer un análisis de la descripción de la situación; además, darle solución una vez entendido no es muy trivial cuando no se tiene conocimiento de herramientas que ayuden a solucionarlo. En este problema lo que prima es la noción de la variación, de las múltiples posibles soluciones que se pueden plantear como alternativa para el problema planteado, pero ciertamente hay que llegar a la solución precisa.

Para plantear el problema, el profesor debe tener en cuenta que debe plantear un modelo matemático que represente esta situación que no es precisamente el lineal, como se está acostumbrado a modelar muchas veces, para poder encontrar la solución precisa, utilizando las herramientas que nos permite el concepto de derivada. Lo que se pretende analizar con el problema es detectar si el profesor es capaz de modelar una situación que no es precisamente la lineal, o si por el contrario, para darle solución no toma en cuenta que hay una variación.

## Segundo Problema

### Problema 2: la modelización matemática de la realidad

(Cálculo de una variable, James Stewart, 2001, p 27). En la tabla 1 se ilustra el nivel promedio de dióxido de carbono en la atmósfera, medido en partes por millón en el observatorio de Mauna Loa, desde 1972 hasta 1990. Se trata de hallar un modelo matemático que permita estimar la cantidad de dióxido de carbono que pudo haber en 1987 y predecir el que puede haber en el año 2005. De otro lado ¿Cuándo excederá de 400 partes por millón el nivel de CO<sub>2</sub>?

AÑO	CO <sub>2</sub> nivel
1972	327.3
1974	330
1976	332
1978	335.3
1980	338.5
1982	341
1984	344.3
1986	347
1988	351.3
1990	354

El problema 2, es un problema que se trabaja en los libros de cálculo con los que comúnmente se enseñan estos cursos. La idea central de este problema es observar en los profesores el planteamiento de modelos matemáticos que representen cercanamente el comportamiento de una situación.

Este problema, puede solucionarse analizando y deduciendo la correlación entre las variables; lo interesante, es que el profesor manifiesta ser consciente de la variabilidad que hay presente y de las herramientas que posee para darle solución, al igual que en el primer problema, con la diferencia, que este problema se puede modelar por medio de una representación lineal.

## Tercer Problema

### Problema 3: Un problema antiguo

Leonardo de Pisa, Fibonacci, *Liber Abaci* (1202)

Dos torres, cuyas alturas son 30 pasos y 40 pasos, están a una distancia de 50 pasos. Entre las dos torres hay una fuente en la cual dos pájaros volando, en el mismo momento, desde las dos torres y a la misma velocidad llegarán al mismo tiempo. ¿A qué distancia se encuentra la fuente de las dos torres?

Este es un problema planteado desde hace años, y su análisis, que no es nada trivial, se hace interesante porque deja ver la recursividad y creatividad del profesor para resolverlo. Hay que tener claro, que la fuente debe tener una altura diferente de cero, y esto es lo que hace más interesante aun el problema.

El objetivo principal de este problema es descubrir en el profesor investigado la recursividad que posee en la utilización de las herramientas que conoce y maneja muy bien, en la solución de situaciones-problema históricos. Aunque no es un problema que, honestamente, espero que resuelvan completamente, sí espero encontrar herramientas que muestren la recursividad en la solución de ellos.

De esta manera, se da por concluida la presentación de los problemas que constituyeron la prueba diagnóstica aplicada al grupo de profesores. Ahora, presentaré las respuestas de aquellos a cada uno de los problemas planteados:

### 3.1.1 Respuestas de los Profesores

A continuación haré un análisis de cada una de las respuestas de los profesores en cada una de las pruebas.

#### PRIMERA PRUEBA DIAGNÓSTICA

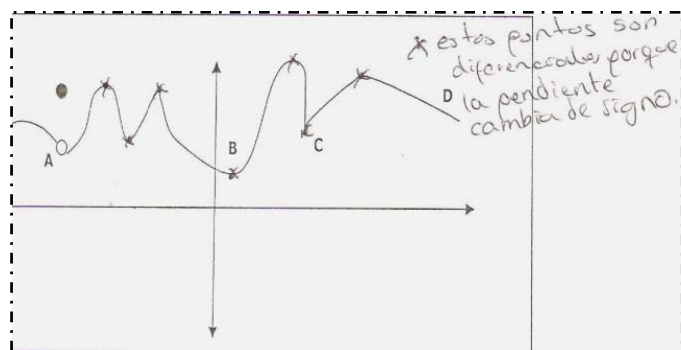
##### PROFESOR A:

El profesor A, como ya se conoce, no ha enseñado el concepto de derivada, pero en sus respuestas manifiesta tener una concepción de derivada como lugar geométrico incluso la describe de la siguiente manera:

*Es un lugar geométrico de dimensión  $n$  perpendicular  
a un elemento de dimensión  $n+1$ .*

Lo que muestra en esta respuesta, es que ve la derivada como la pendiente de una recta tangente en el plano, pero amplía esta misma idea al espacio o, en general a un elemento de dimensión  $n$  o  $n+1$ . Para él es importante que el estudiante maneje las representaciones del espacio.

Al hacer el análisis en la cuarta pregunta acerca de los puntos diferenciables o no, el profesor A manifiesta que en los puntos máximos o mínimos locales es donde se puede presentar la diferenciability, porque allí es donde hay "cambio de signo", queriendo decir con esto, que es donde hay cambio de concavidad, o que la pendiente de la recta que es tangente a los puntos antes del mínimo o máximo local es diferente a la de los puntos posteriores a este.



## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

En el quinto punto, el profesor manifiesta no entender esta definición, lo que muestra que no maneja la definición formal de derivada, pero plantea que la enseñanza del concepto deberá dar inicio con el planteamiento de un problema "donde el estudiante se encuentre en un callejón sin salida aparentemente". Con esto, el profesor pretende que el estudiante deba plantear alternativas de solución.

Realizando un análisis a partir de las respuestas del profesor, es claro, que no tiene un concepto formal de la derivada, en esta investigación se cataloga que el profesor puede tener una inconsistencia en el concepto, ya que, aunque lo relaciona con la tangencial de cualquier elemento en cualquier dimensión  $n$ -ésima, su concepto como tal tiene algunos vacíos, incluso, el mismo hecho de no manejar la definición, hace que sea inconsistente. Con esto no quiero decir, que el profesor no sepa algo del concepto de derivada, pero sí puede presentar algunos vacíos en el mismo.

En los esquemas de la comprensión del concepto de derivada en el profesor A, se muestra por el análisis gráfico que hizo en el cuarto punto, que parece estar en el nivel intra; el profesor parece que comienza en una fase preliminar, su análisis acerca de la derivada en un punto lo relaciona con intervalos de crecimiento y de decrecimiento, pero no hace conexión entre la pendiente de una tangente y una tasa de cambio, al menos esto no se logra evidenciar en esta prueba, pero con el análisis de la siguiente, se podrá concluir si pertenece a este o no.

### **PROFESOR B:**

El profesor B, recordemos, ha trabajado durante doce años en los grados superiores, aunque también aclara, que pocas veces a enseñado el concepto porque el tiempo del año escolar es bastante restringido; sin embargo, el profesor ha trabajado algo más que el profesor A.

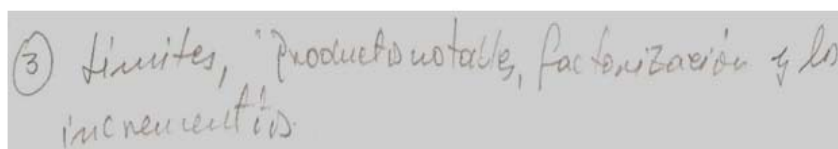
## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Describe la derivada como:

*La derivada de una función es otra función,  
teniendo en cuenta los incrementos y el límite si existe.*

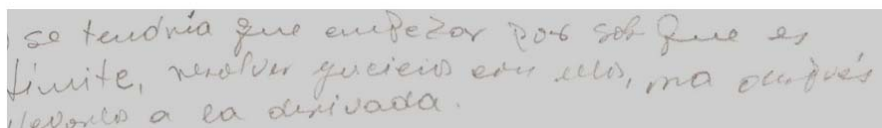
Esta respuesta da a entender que el profesor no tiene una noción precisa de derivada; la pretende expresar como otra función y no como la pendiente de una recta en un punto, es decir, el profesor lo que quiere decir, es que la derivada de una función es otra función que es la familia de pendientes a los puntos de una curva, y además sabe que en su definición está el límite pero, ciertamente no tiene definido ni claro el concepto formal de derivada.

Con las respuestas hechas en las preguntas tres y cinco, el profesor B muestra dar una clase bastante clásica, y fundamentada en la habilidad para resolver ejercicios; plantea que el estudiante debe manejar límites, productos notables, factorización y los incrementos.



③ límites, productos notables, factorización y los incrementos

Propone que para comenzar una clase con la enseñanza de la derivada, el profesor debe enseñar qué es límite, resolver ejercicios sobre ellos, y luego llevarlos al concepto de derivada.



se tendría que empezar por qué es límite, resolver ejercicios con ellos, para después llevarlos a la derivada.

Ante esto, debo concluir, para esta primera parte, que el profesor no tiene un concepto claro de derivada, su aplicabilidad no la maneja, y no la toma en cuenta para el desarrollo del concepto de derivada en los estudiantes, luego para esta

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

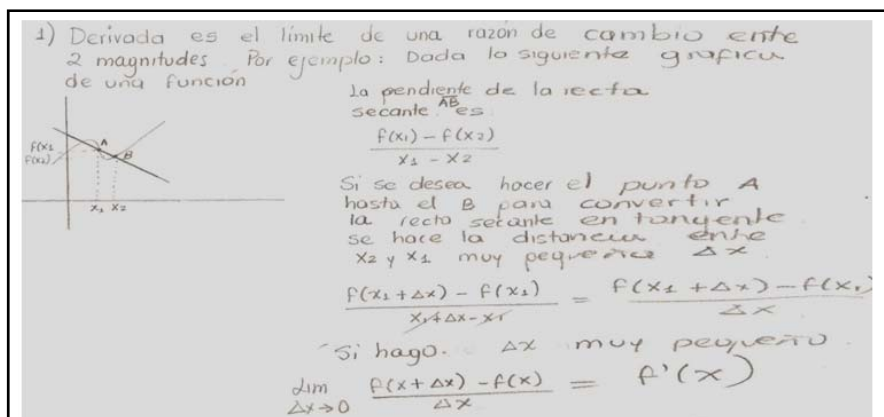
prueba diagnóstica, el profesor seguramente tiene inconsistencia en el concepto de derivada y a un grado un poco más notorio que el del profesor A.

Para clasificarlo en los niveles del esquema de comprensión del concepto, el profesor parece encontrarse en un nivel intra, pero con más dificultades por atender en su concepción de derivada. En la siguiente prueba, veremos si es correcta la clasificación dada.

### PROFESOR C:

El profesor C, egresado de la UIS, y habiendo trabajado once años con 11° grado, ha mostrado tener una idea algo clara acerca del concepto de derivada.

Plantea la definición de derivada de la siguiente forma:



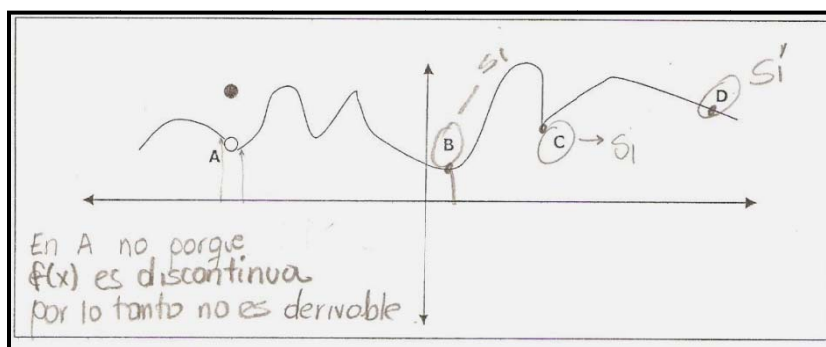
En ella, se muestra que relaciona fuertemente la definición de derivada con la pendiente de la recta tangente a una curva, planteando primero la pendiente de la recta secante a una curva y luego aplica la noción de límite. Su definición de derivada, como "el límite de una razón de cambio", manifiesta tener dominio del concepto.

Con respecto a la enseñanza de la derivada, el profesor C plantea que los estudiantes deben conocer primero, el concepto de razón, de función y de límite, y

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

propone que la enseñanza de esta debe partir de un ejemplo, para llegar a la definición formal de derivada.

Realizando el análisis a sus respuestas, se debe decir que el profesor no mostró en estas preguntas inconsistencias en el concepto, parece que relaciona la razón de cambio con la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto de interés, también relaciona la derivada con la continuidad o discontinuidad de funciones, así como maneja algunas estrategias para la enseñanza de la misma.



El profesor C, se intuye que debe clasificarse en el nivel inter, ya que coordina la noción de derivada como la pendiente de la recta tangente con la idea de derivada como razón de cambio en un punto. Aunque podría tener algunos conceptos más formales, para ser clasificado en el nivel trans, no puedo concluirlo tan fácilmente, pero lo haré en el análisis de la segunda prueba.

### PROFESOR D:

El profesor D, mantiene alguna idea sobre lo que es la derivada, define la derivada como:

*Es la razón de cambio entre dos magnitudes*

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Y propone un ejemplo, como lo ven a continuación:

① Si un artículo cuesta 3 cuánto cuestan  $x$  artículos?  
 $y = 3x$   $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$  significa que por cada artículo que  
adicione, también debe pagar 3 más.

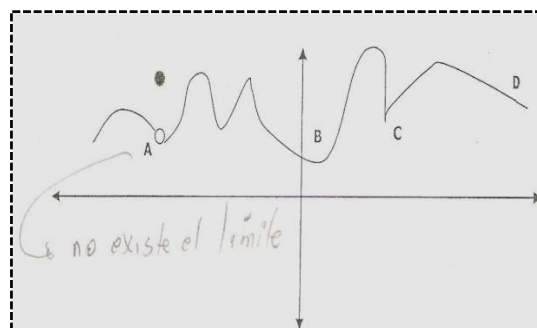
Donde relaciona la derivada con la variación de una situación sencilla.

A la segunda pregunta sobre ¿qué ejemplos retoma de la vida diaria para hacer comprender el concepto de derivada? El profesor plantea el siguiente ejemplo:

② Si compras una menta que cuesta \$50, ¿cuánto debe  
pagar?, si compra 2, 3, 5...  $n$  mentas?  
 $P = \text{precio}$   $P = 50n$ , 50 es una constante, debe  
pensar que  $n$  mentas le cuestan  $50n$ .

Allí se nota que el profesor parece no tener mayor profundidad en el concepto de derivada, pues, aunque reconoce la variabilidad que hay en la situación y su relación con la derivada, sus ejemplos muestran algo de escasez conceptual y didáctica en la enseñanza de esta.

Relaciona derivabilidad con la continuidad y la noción de límite pero de forma errónea, manifestando que en el punto A de la cuarta pregunta, la función no es derivable porque no existe el límite en ese punto, pero realmente el límite sí existe, lo



que pasa es que ahí la función no es continua. Con esto, el profesor D muestra algunos vacíos o inconsistencias en las nociones de continuidad y de derivada.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

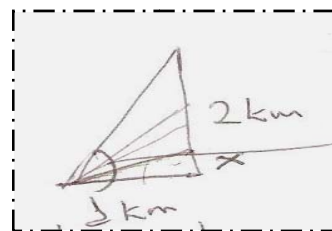
Manifiesta no recordar la definición de derivada, por lo cual no puede decir si esa definición planteada en el libro es o no correcta; además, sugiere que para la enseñanza de la derivada debe tenerse en cuenta primero el concepto de funciones, de límite y enseñar a partir de esto.

Concretizando todo lo analizado en estas respuestas, se puede decir que el profesor D manifiesta tener algunos vacíos en el concepto de derivada, lo que lleva a decir que puede tener inconsistencias en el concepto, es decir, cosas que no encajan una con la otra en su discurso acerca del concepto. Por otro lado, el profesor muestra que en la enseñanza de esta, puede ser un poco clásico, aunque en un principio –en la descripción que se hizo de él en el capítulo anterior- el profesor mostró ser más activo en las clases y dar más participación a los alumnos, parece que cuando no domina el concepto tiende a volverla tradicional. Con esto, el profesor puede clasificar, para comenzar, en un nivel intra.

### SEGUNDA PRUEBA DIAGNÓSTICA

#### PROFESOR A:

Para el problema 1, el profesor A hace un análisis muy preciso acerca del problema planteado, describe las infinitas soluciones que hay para pasar el cable de fibra óptica entre los dos pueblos, como se ve en la figura de



la derecha, modeló muy bien la situación planteada. En su análisis algebraico, no tiene tampoco mayores dificultades hasta llegar a la derivación de la función, pero en su planteamiento, el profesor muestra tener una buena habilidad para resolver problemas de este tipo. Esto, puede ser, debido a que –recordemos- es Ingeniero y esto da a pensar que es muy creativo.

En el segundo problema, el profesor plantea muy bien la solución del problema, realiza una gráfica con los datos dados, halla la correlación para hallar la ecuación

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

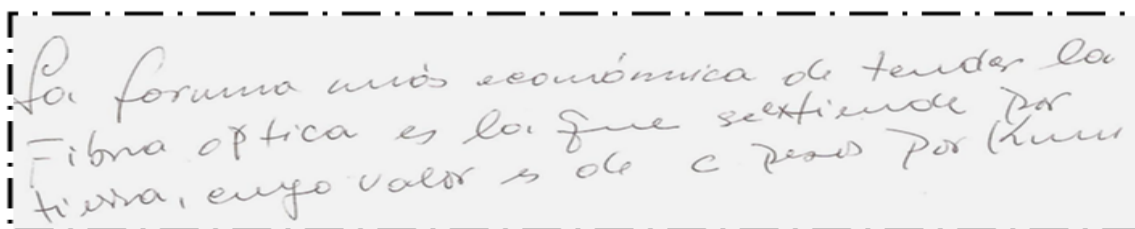
de la recta que modela mas preciso los datos recolectados. Aunque no halla la ecuación de la recta debido a confusiones en el momento de encontrar los puntos de corte con el eje  $y$  -aunque no era necesario-, el profesor deja ver que tiene una habilidad para plantear soluciones de problemas aquí podría afirmar que lo que le hace falta es corregir algunas inconsistencias en conceptos matemáticos, pero la habilidad para plantear soluciones a los problemas planteados es clara, es decir, manifiesta coherencia en la resolución de problemas.

En la tercera pregunta, el profesor plantea el problema despreciando la altura de la fuente, lo que hace que el problema se vuelva sencillo. Al preguntarle, el profesor manifiesta que sabía que no debía despreciar la altura, pero lo hizo, porque con ella no sabía cómo plantear el problema.

Así que, para comenzar la investigación con el profesor A, se deduce que tiene algunas inconsistencias en el concepto de derivada, dicho en la primera prueba y aun en otros conceptos como el de funciones lineales; además hemos catalogado al profesor en el nivel intra, pero algo avanzado, ya que aunque no tiene las bases para estar en el nivel inter, el profesor muestra habilidad en el planteamiento de soluciones, lo que implica que tiende a establecer relaciones de la derivada como razones de cambio.

### PROFESOR B:

En el primer problema, el profesor no nota que las posibles soluciones para este problema son infinitas, el profesor, sin ningún análisis escrito, presenta la siguiente afirmación:



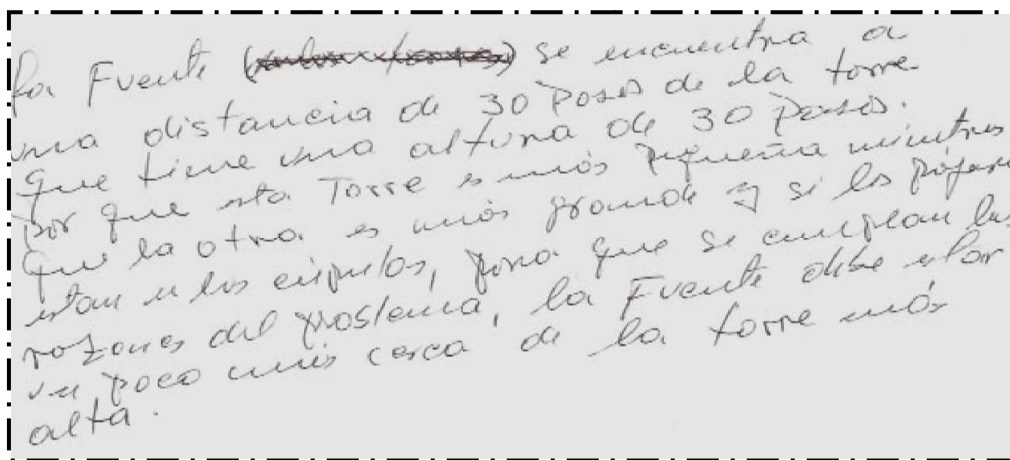
La forma más económica de tender la Fibra óptica es la que se extiende por tierra, cuyo valor es de  $c$  pesos por (unida

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Lo que implica que el profesor no relaciona la variabilidad en el problema, solo observa las dos posibles soluciones más triviales, las cuales son: pasarlo todo por agua (que sería la hipotenusa del triángulo que se forma) o pasar un kilómetro por agua y dos kilómetros por tierra, y esta última es la que escoge por los análisis que hace.

En el segundo problema el profesor analiza la variación que hay de  $\text{CO}_2$  cada dos años y afirma que la cantidad de  $\text{CO}_2$  para el año de 1987 es la del año 1986 más un valor entre 2 y 3, escogiendo 2.5 que es deducido de haber sacado la media entre estos dos valores. El profesor no realiza ninguna gráfica, ni trata de hallar un modelo matemático que represente en algo el problema, lo que muestra que el profesor puede tener dificultades en el uso de la matemática para el planteamiento de soluciones o de modelos que representen situaciones.

En el tercer problema, el profesor plantea que como los pájaros llegan al mismo tiempo a la fuente, entonces, es "claro" –para él– que la fuente debe estar más cerca de la torre más alta, tal como se lee a continuación:



La Fuente (~~subrayada~~) se encuentra a una distancia de 30 Pasa de la torre que tiene una altura de 30 Pasa. Por que esta Torre es más pequeña mientras que la otra es más grande y si los pájaros están a los mismos, pero que si cumplen las razones del problema, la Fuente debe estar un poco más cerca de la torre más alta.

El profesor hace un análisis intuitivo, algo así como de "lógica", pero no tiene en cuenta ningún tipo de análisis matemático para darle solución a este. Lo que se puede analizar es que esta "lógica" que él maneja tiene mucho sentido y es un análisis válido para comenzar, pero que no concretiza ni verifica en ningún

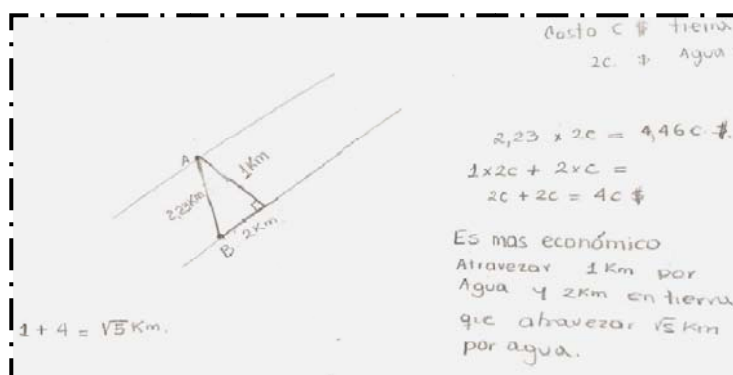
## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

momento; esto muestra que el profesor se quedó corto para poder probar si su intuición era verdadera o no.

En conclusión, el profesor B, comienza con inconsistencias bastante notorias en el concepto de derivada –como ya lo habíamos descrito en la prueba anterior-, además se clasifica en el nivel intra básico debido a las grandes dificultades en el planteamiento de soluciones a problemas. El profesor muestra concebir la matemática como reglamentaria, pero poco aplicable a la realidad.

### PROFESOR C:

En el primer problema, el profesor C analiza, al igual que el profesor B, solo las dos soluciones más evidentes en el problema, y describe su solución así:



No descubre las demás soluciones al problema, y que, entre esas otras soluciones es donde está la verdadera solución que hace más económico el traslado de la fibra óptica al otro pueblo. El profesor no plantea un modelo que represente la situación.

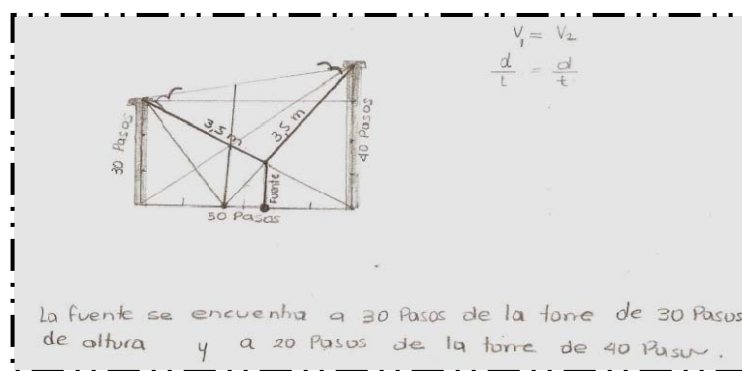
En el segundo problema el profesor C hace la gráfica con los datos dados, halla la pendiente de la recta, -aunque no hace correlación- usando dos puntos dados y

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

plantea un modelo lineal para el problema, de allí deduce las preguntas planteadas de forma coherente.

De esta manera, el profesor aplica la matemática que conoce para modelar situaciones de la vida diaria, siempre y cuando esa situación se modele de forma lineal. Con esto no se puede decir que el profesor no utilice las herramientas para modelar situaciones, es sencillamente, que la mayoría de veces se modelan situaciones con funciones lineales, y casi no se manejan los otros modelos.

En el tercer problema el profesor plantea la siguiente solución:



No describe ningún análisis en la hoja, pero, en el momento de socializar las respuestas el profesor muestra que su solución se deduce de tomar la fuente con una altura cero. El planteamiento del profesor, en un comienzo parece ser preciso, pero al encontrarse sin herramientas de solución decide no tomar la altura de la fuente.

Es así, como el profesor C no muestra tener inconsistencias en el concepto de derivada, pero sí manifiesta tener incoherencias en este, es decir, el profesor a veces se le dificulta cómo plantear las soluciones a problemas utilizando el concepto, sin embargo, sí sabe modelar matemáticamente algunas situaciones-problema. Se clasifica en el nivel inter –como lo habíamos dicho en la primera prueba-, y no en el nivel trans, pues aun no interpreta la variabilidad en algunos problemas. Es claro, que el profesor comienza en un buen nivel lo que implica que

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

tiene bases en la comprensión del concepto, por lo cual será un caso interesante en esta investigación.

### PROFESOR D:

En el primer problema, el profesor D –al igual que el profesor B y C- plantea la solución del problema a partir del análisis de las dos soluciones más triviales, afirmando que la solución precisa es la de atravesar el río y luego los dos kilómetros por tierra.

En el segundo problema, el profesor plantea que aunque no hay una constante para la variación del  $\text{CO}_2$  a través de los años, sí manifiesta que un modelo lineal puede representar el problema y poder darle solución, hace un análisis similar al del profesor C, tomando dos puntos cualesquiera y hallando la pendiente de la ecuación lineal que la modela.

En el tercer problema, el profesor desprecia la altura de la fuente y lo resuelve sin tomarla en cuenta.



En conclusión, y por último en cuanto a las respuestas de los profesores en la prueba diagnóstica, el profesor D puede tener inconsistencias en el concepto de la derivada, además se clasifica en el nivel intra, pues muestra no descubrir variaciones en los diferentes problemas planteados, aunque sabe modelar algunos

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

problemas algo triviales como el de la segunda situación, pero cuando se encuentra la variabilidad no explícita en el problema no la detecta.

Así, frente esta primera fase, podemos decir que, en general, los profesores presentan algunos vacíos en el concepto de derivada, en su mayoría no tienen estrategias de enseñanza de la misma y la detección de modelos matemáticos para situaciones que contienen variabilidad implícita, no son evidenciados por la mayoría de ellos.

Los profesores comienzan con concepciones sobre derivada no comprendidas completamente y esto lo puede explicar que la mayoría de ellos no lo trabajan en las aulas de clases y hace mucho tiempo que lo estudiaron formalmente, sin embargo, es de resaltarse la creatividad matemática que tienen algunos de ellos para resolver problemas, utilizando las herramientas conocidas por cada uno de ellos. En la siguiente tabla, se muestra cómo comienza cada profesor el curso de cálculo, según la clasificación dada.

PROFESOR	AÑOS DE EXPERIENCIA DOCENTE	EXPERIENCIA EN 11°	CLASIFICACIÓN	COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO
<b>A</b>	4	0	Intra avanzado	Con inconsistencias
<b>B</b>	34	12	Intra básico	Con inconsistencias
<b>C</b>	12	11	Inter	Buena concepción
<b>D</b>	14	7	Intra medio	Con inconsistencias

## 3.2 LA RECONSTRUCCIÓN

vs.

## EL PROCESO DE CLASES

Con el fin de dar cumplimiento al segundo objetivo específico planteado para esta investigación, acerca de analizar la evolución de la concepción de derivada en profesores de matemáticas durante el desarrollo del curso, se describen las cuatro sesiones que se trabajaron, específicamente en las exposiciones realizadas por los profesores investigados así como los aportes hechos por ellos en determinadas situaciones y las respuestas hechas a las preguntas realizadas por el profesor director del curso.

### 3.2.1 Primera sesión: “La problemática cuando la razón de cambio es constante”

El profesor director del curso da inicio con el planteamiento de tres situaciones problema para esta primera sesión. A continuación se hará una exposición de cada situación y los aportes realizados por los profesores investigados, que es nuestro mayor interés en esta investigación.

#### El modelo lineal

**Problema 1:**

Un automóvil transita por una carretera recta a una velocidad constante de 40 metros por segundo. Se trata de calcular la posición del automóvil en cualquier momento, respecto a cualquier lugar que se toma como referencia. Es decir, se trata de saber la distancia que el automóvil ha recorrido después de que ha hecho cierto tiempo.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS


El primer problema que se plantea, es muy conocido por los profesores, ya que se trabaja en la mayoría de los textos guías; ante este problema, se sugiere hacer una tabla de datos, un análisis que describa algunas propiedades y regularidades de la tabla, una gráfica y, finalmente una expresión que permita calcular la posición del automóvil para cualquier tiempo  $t$ .

Los profesores del curso realizaron la gráfica de este problema, y dedujeron fácilmente la fórmula pedida para hallar la posición del automóvil en cualquier tiempo  $t$ . Este problema es muy parecido al de la situación 2 planteada en la segunda prueba diagnóstica, en donde los profesores investigados, trataron de buscar un modelo y darle solución al mismo.

Para este caso, los profesores investigados, sin ningún problema, dedujeron que la forma general de expresar esta situación es  $s = 30 + vt$ , donde  $t$  es el tiempo recorrido y  $s$  la distancia avanzada.

**Problema 2:**

Dé una expresión que permita calcular la distancia recorrida del carro, si se empieza a tomar el tiempo en un punto situado a 30 metros a la derecha de un punto de referencia  $O$  respecto al cual calculamos la distancia recorrida.



Para la solución de este segundo problema, los profesores en general no presentaron dificultad, cuando se pidió una explicación de la solución del problema

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

al profesor A, él pasó y explicó claramente que la distancia de 30 metros era ahora una “ventaja con la que comenzaba el automóvil y debía anexarse”. El profesor hace un bosquejo de la gráfica después de haber realizado una tabla de valores y es el profesor B quien explica que cuando el automóvil no se ha desplazado lleva recorrido una distancia de 30 metros, eso explica que pasa por el punto (0,30).

Un profesor propone la expresión general, y los demás están de acuerdo en que es la que modela la situación planteada.

Hasta el momento los profesores no han manifestado dificultad en el análisis de estos problemas, debido muy seguramente, a que son trabajados muy a menudo en las aulas escolares en muchos temas, no solo en el de funciones o en el de derivada.

Por otro lado, llegar a plantear la solución para el modelo del problema 3 ya dejó de ser trivial para algunos profesores. El profesor B comenzó a manifestar dificultad en el entendimiento del problema, el hecho de tener que restar en vez de añadir a la distancia comenzó a crearle confusiones, finalmente, el profesor haciendo su propio análisis junto con un profesor del curso, plantearon un ejemplo en el contexto calculando por medio de datos reales la distancia que le hacía falta para llegar a determinado lugar y poder darle la generalización al problema inicialmente planteado.

**Problema 3:**

Analice el problema desde el punto de vista de la meta. Es decir, las distancias se toman ahora, respecto a un punto B que se encuentra a la derecha a  $d$  metros del lugar donde se empieza a contar el tiempo. ¿Cómo se expresa ahora la distancia en función del tiempo transcurrido?



B

$d$

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Este hecho, hizo que el profesor B entendiera mucho más el problema y que su solución fuera la precisa.

En este momento, se hace notorio que el aprendizaje cooperativo, es decir, el aprendizaje donde todos proponen y discuten acerca de un problema, hace que el profesor participante supere sus dificultades –en la mayoría de los casos- y pueda expresar su punto de vista con más propiedad. Los otros tres profesores investigados, no tuvieron ninguna dificultad en determinar la fórmula general de esta expresión y de sustentarla muy bien.

De esta manera, con respecto a la solución de los problemas planteados, los profesores no manifestaron tener mayor dificultad, esto pudo ser debido a que los problemas son muy trabajados por ellos en diferentes temáticas y pudo volverse algo metódico la solución de ellos.

En el análisis de los profesores A, B y D hizo falta mostrar como relevante en la sustentación de los problemas que eso que permite añadir constantemente una cantidad a un dato para obtener el siguiente es lo que llamamos la razón de cambio; es decir, cada profesor manifestó que hay variación en el problema porque hay movimiento del automóvil, pero no relacionaron esto con la razón de cambio, aun habiéndola calculado para hallar la expresión general.

En este punto el profesor director del curso, enfatiza en la necesidad de ver qué es lo que está haciendo que cierta situación tenga variación y que esa variación es la llamada razón de cambio entre dos magnitudes. En la socialización que se realizó con el curso al finalizar el análisis de los problemas se concluyó que esa **razón de cambio es constante si y solo si el modelo, que representa el problema, es lineal.**

Haciendo una evaluación del desarrollo del curso se hace notoria en los profesores investigados una motivación, ya que le comienzan a ver sentido a lo que realizaron para resolver el problema y la relación que hay directamente con el

concepto de derivada, aunque no se halla nombrado aun en el curso. Una de las cosas que podrían ser re-evaluadas son los problemas planteados, ya que el ser tan usados en los profesores, y el hecho de haberles dado la razón de cambio –la velocidad- le quitó bastante análisis al problema por parte de los profesores para ser resueltos. Finalmente, en esta sesión se concluyó que la razón de cambio de un modelo lineal es siempre constante, esto explica que su variación siempre es la misma.

### **3.2.2 Segunda sesión: “La problemática cuando la razón de cambio no es constante”**

En esta sesión analizaré qué pasaba con las situaciones en donde la razón de cambio ya no es una constante. Para esto, se plantearon cuatro situaciones; cada una de ellas representa cuando la razón de cambio es decreciente o creciente, y si su comportamiento es rápido o lento. Así, las situaciones fueron planteadas primero, para que los profesores las resolvieran de forma individual, y luego se realizó la socialización para finalmente hacer las conclusiones de los comportamientos de las gráficas de razón de cambio y las características de esta magnitud de interés. Para culminar la sesión, el profesor A inicia con las exposiciones acerca de un modelo cuadrático en una situación específica que plantea el libro “Los Elementos del cálculo” (2002).

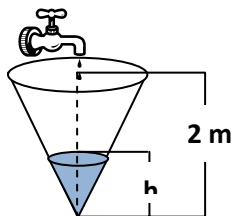
#### **PRIMERA SITUACIÓN-PROBLEMA**

En el análisis individual, los profesores comenzaron a realizar un razonamiento totalmente algebraico; lo que les interesaba en ese momento era hallar la ecuación de la altura en función del tiempo de llenado; así que en su recursividad trataban de ubicar al radio en términos de la altura de llenado.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

### Situación-problema 1 (pág. 49)

Un recipiente con forma de cono con 0.4 metros de radio de la base y dos metros de la altura. El recipiente que, originalmente está vacío, se empieza a llenar de agua a través de una llave que se encuentra en la parte superior. La llave arroja agua al depósito a una razón de constante de 0.01 metros cúbicos/minuto (10 litros por minuto). Nos interesa estudiar la variación de la altura del llenado al transcurrir del tiempo.



Una vez se comenzó a socializar, los profesores mostraron este análisis, el cual no era el apropiado para la situación, así que, el profesor director del curso pidió comenzar el problema con un análisis intuitivo acerca del comportamiento de la altura de llenado en el cono con respecto al tiempo.

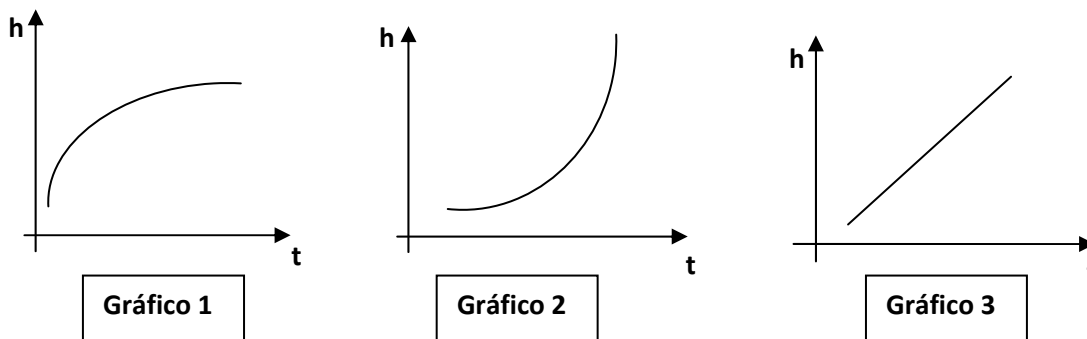
Los análisis que los profesores realizaron fueron:

- La altura de llenado va aumentando al transcurrir el tiempo.
- El radio del cono aumenta a medida que el agua ingresa al recipiente.
- Se intuye que la variación del llenado debe ser creciente, tomando la altura como lo que se va llenando.
- La altura ya no varía de forma constante
- La altura crece pero cada vez más despacio.
- El radio no aumenta constantemente por la forma que tiene el recipiente.

Con estos análisis, el profesor director del curso, planteó la idea de poder graficar las posibles representaciones del comportamiento de la altura de llenado con respecto al tiempo, teniendo en cuenta las características previamente establecidas.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Después de varias discusiones alrededor de la gráfica que modelara el problema de manera coherente con las características planteadas, las representaciones que los profesores bosquejaron fueron los siguientes:



Claramente cada una de las gráficas es creciente, y son las tres clases de gráficas que existen para hablar de crecimiento en forma general. Esto debido a que se concretó que la altura de llenado cada vez es mayor al transcurrir el tiempo. Ahora, en cuanto al análisis, este se centró en determinar cuál era la gráfica que representaba la variación de la altura de llenado con respecto al tiempo. El profesor director del curso planteó, a partir de las características previamente descritas acerca del comportamiento de la altura, determinar cuál podría ser la gráfica que modelara de forma coherente la situación.

Los profesores socializaron entre ellos, y se comenzó a hacer un análisis del crecimiento en cada una de las gráficas. En el gráfico 3 el crecimiento es constante, luego no modela la situación planteada puesto que, en un principio, se analizó que debido a la forma del recipiente, el crecimiento no podía ser el mismo siempre. Al analizar las gráficas 1 y 2, y mirar su crecimiento a medida que transcurre el tiempo, se hace el siguiente análisis gráfico:

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

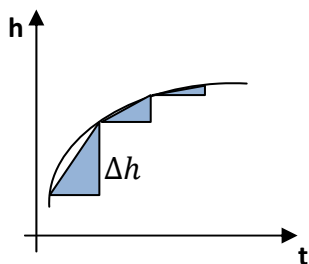


Gráfico 1

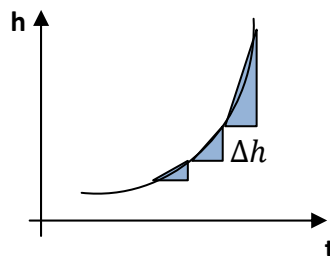


Gráfico 2

En el gráfico 1 la altura crece pero lo hace cada vez más lento - $\Delta h$  es cada vez más pequeño en intervalos iguales de tiempo-, y en el gráfico 2 la altura también crece pero lo hace mucho más rápido a medida que pasa el tiempo - $\Delta h$  es cada vez más grande-. La situación planteada, y las características propuestas de forma intuitiva en un comienzo, respaldan la idea que el gráfico que modela la situación es el gráfico 1; ya que muestra el crecimiento de la altura con respecto al tiempo, pero lo hace cada vez más lento debido a la forma del recipiente, tal y como lo habían analizado. Una vez terminado este análisis, el profesor enfatiza en la importancia de hacer primero un análisis de esta forma antes de irse al buscar algebraicamente recursos para resolver el problema, que finalmente será necesario hacerlo, pero que le quita importancia al problema mismo para volverse en un análisis netamente algebraico.

### SEGUNDA SITUACIÓN PROBLEMA

Para esta situación, los profesores ya comienzan a realizar un análisis de este estilo, miran primero las características que puede tener el comportamiento de la altura de llenado con respecto al tiempo. De este análisis se deducen algunas de las siguientes características:

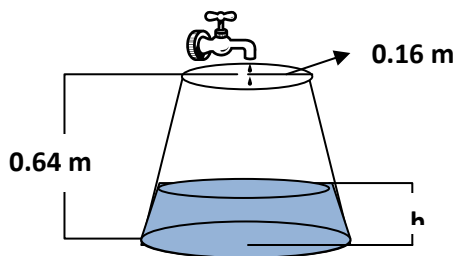
- La altura de llenado aumenta a medida que transcurre el tiempo.

RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

- La altura de llenado aumenta pero cada vez más rápido debido a la forma del recipiente.
- El radio se hace cada vez menor

**Situación-problema 2 (pág. 55)**

Consideremos un recipiente cónico truncado de la parte superior, cuyas dimensiones se muestran en la siguiente figura. El recipiente originalmente está vacío y se empieza a llenar de agua a través de una llave que se encuentra en la parte superior; la llave arroja agua al depósito a una razón constante de 0.01 metros cúbicos/minuto. (10 litros por minuto). Nos interesa estudiar la variación de la altura del llenado al transcurrir del tiempo.



El profesor director del curso, le propone al profesor B que bosqueje las posibles gráficas que representan esta situación; el profesor propone –con la colaboración del curso- las siguientes gráficas:

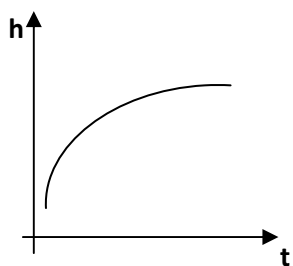


Gráfico 1

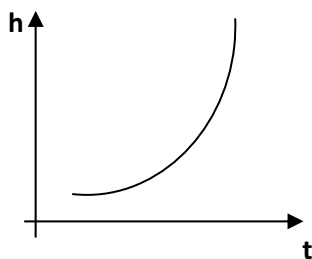


Gráfico 2

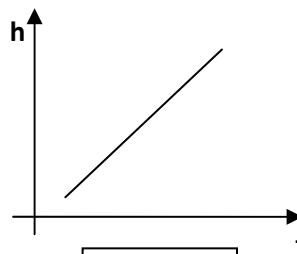


Gráfico 3

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Que son finalmente las mismas que se habían planteado en la situación anterior. El gráfico 3 claramente no corresponde al análisis hecho previamente para esta situación, ya que el crecimiento de la altura no es siempre la misma.

Para el segundo y tercer gráfico, se volvió a plantear y analizar los incrementos en la altura de llenado a medida que transcurre el tiempo. De ellos, se pudo analizar que el incremento en esta situación es cada vez más rápido y esto debido a que el radio del recipiente es cada vez más pequeño hasta llegar a llenarse completamente. Por esto, después de buenas discusiones alrededor del mejor modelo que representara la situación, los profesores dedujeron que debía ser el gráfico 2, debido a que los incrementos son cada vez mayores, esto indica, que la altura, a medida que pasa el tiempo varía más rápidamente.

Hasta ese momento se había trabajado con los profesores dos comportamientos importantes cuando la razón de cambio de una magnitud de interés no es constante: cuando crece lentamente (situación 1) y cuando crece rápidamente (situación 2)

### TERCERA SITUACIÓN PROBLEMA

#### Situación-problema 3 (pág. 60)

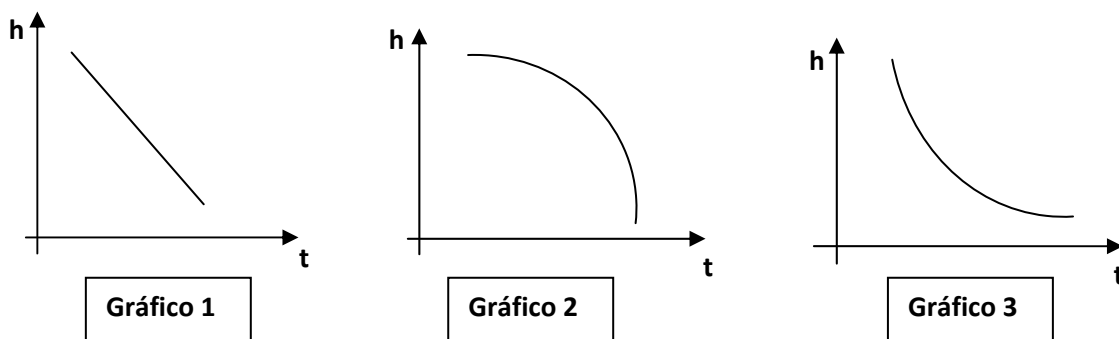
Una taza de café se calienta en un horno microondas y alcanza una temperatura de  $80^{\circ}\text{C}$ . La taza de café se extrae del horno y se expone al medio ambiente que se encuentra a una temperatura de  $20^{\circ}\text{C}$ . Nos interesa determinar la rapidez con la que está disminuyendo la temperatura.



## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Siguiendo la misma línea de análisis, se propuso el siguiente problema, que los profesores desarrollaron primero de forma individual, para reevaluar lo que habían hecho anteriormente, y luego realizaron la socialización para concretar el modelo que más se ajustaba a la situación.

Se pregunta acerca de la rapidez con la que está disminuyendo la temperatura al pasar el tiempo una vez la taza de café ha sido expuesta al medio ambiente. Para este problema, los profesores plantearon los siguientes gráficos:

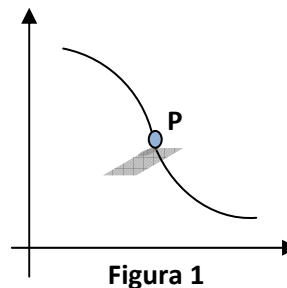


Fueron graficados de esta manera, porque notaron que la temperatura, a medida que transcurría el tiempo, era cada vez menor, luego el gráfico que modelara la situación debía ser decreciente. Al igual que en los primeros planteamientos, los 3 posibles modelos que representan un decrecimiento son ellos solamente.

Ahora el análisis estaba en determinar cuál de esas gráficas era la que se ajustaba al modelo solución de la situación. Para determinarlo, debía plantearse primero cómo era el comportamiento de la temperatura; es decir, si decrecía de forma constante o no, o lo hacía rápido o lentamente. Alrededor de este interrogante se forma una discusión algo extensa, pero que, finalmente no se puede concretar a menos que se hubiese hecho un experimento y se dedujera cómo es el comportamiento de su decrecimiento.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Haciendo una revisión en el texto que diseña esta situación, plantean que incluso, las soluciones inicialmente propuestas pueden ser más de esas tres, y proponen una más (ver Figura 1) que también podría modelar la situación. Concluyen que el gráfico 3 es el que se ajusta a la situación.



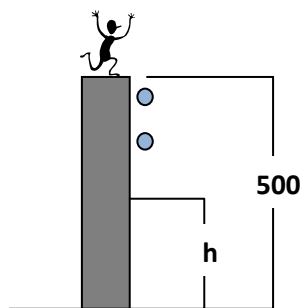
Para nuestro caso, no se pudo concluir lo mismo debido a que, conscientemente no se conocía el comportamiento de la temperatura de la taza de café una vez expuesta al medio ambiente.

Este problema, no pudo ser solucionado de la forma como se pretendía, pues si se estaba partiendo de solucionar problemas reales en lo posible, resolver este, no era lo más honesto.

### CUARTA SITUACIÓN PROBLEMA

#### Situación-problema 4 (pág. 64)

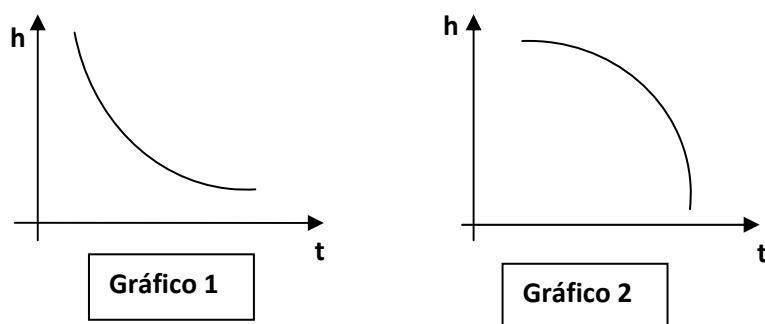
Un cuerpo se deja caer desde una altura de 500 metros. Evidentemente la altura  $h$  del cuerpo con respecto al suelo irá disminuyendo. Nuestro interés es determinar la variación de la altura con respecto al tiempo.



## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

El problema plantea la situación de analizar la variación de la altura con respecto al suelo a medida que transcurre el tiempo. Para ello, los profesores ya sabiendo el tipo de análisis que debe hacerse para esta situación, plantean de forma individual una solución.

Para observar los análisis hechos por algunos de los profesores investigados, el profesor C para al tablero y expone su análisis gráfico de la siguiente manera:



Plantea estas dos posibles soluciones para determinar la variación de la altura con respecto al tiempo, aclarando que la altura se está tomando con respecto a lo que le falta para llegar al suelo. Un profesor del curso le cuestiona el por qué no incluyó la gráfica lineal, a lo cual el profesor C le responde que su análisis no es coherente debido a que el objeto cae cada vez más rápido y eso implica que la altura es cada vez menor pero ya no de forma constante.

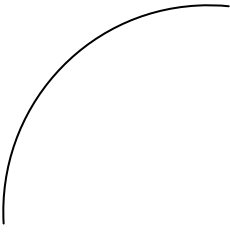
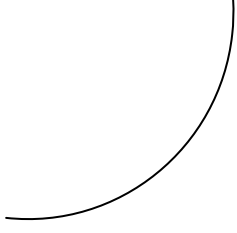
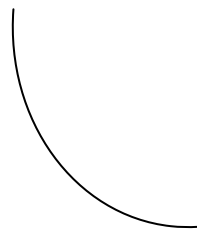
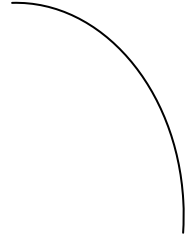
En este punto, los profesores comienzan a tener algo de confusión en el planteamiento del gráfico que modele la variación de la altura, lo interesante es que el profesor C mantiene su concepción en que el gráfico lineal no representa la situación, pero ya no halla cómo explicarlo. El profesor director del curso, le pregunta al profesor que manifiesta que la solución es la lineal, que dé una explicación clara acerca de su creencia y nos damos cuenta de que el profesor lo que está planteando es la variación de la velocidad con respecto a tiempo que sí es una constante, pues la aceleración es siempre la misma.

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

Una vez aclarado este punto que se volvió mucho más interesante que los análisis anteriores, ya que muestra que los profesores no solo notan variación en la altura sino que también la reconocen en la velocidad con la que baja el objeto; pero por no ser este el interés inmediato del problema, se continúa con el análisis de la variación de la altura con respecto al suelo.

El profesor C determina entonces, una vez hecho el análisis a cada gráfico con los incrementos, que la representación de la situación que se plantea la da el gráfico 2. Para culminar con este análisis y poder llegar a generalizaciones, el director del curso hace una breve exposición acerca de las propiedades encontradas en el desarrollo de las situaciones anteriormente desarrolladas.

**HACIA LA GENERALIZACIÓN**

<b>TIPO 1</b>	<b>TIPO 2</b>	<b>TIPO 3</b>	<b>TIPO 4</b>
			
Creciente y cóncava hacia abajo.	Creciente y cóncava hacia arriba	Decreciente y cóncava hacia arriba	Decreciente y cóncava hacia abajo.
La magnitud de interés crece cada vez más lentamente.	La magnitud de interés crece cada vez más rápidamente.	La magnitud de interés decrece cada vez más lentamente.	La magnitud de interés decrece cada vez más rápidamente.

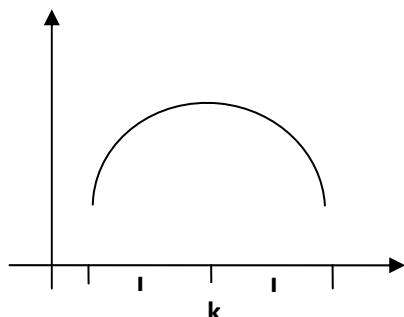
## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

En socialización con el curso y a manera de conclusiones de esta segunda parte, se presentaron 4 tipos de gráficas de razones de cambio. Cuando la gráfica de la razón de cambio es creciente y cóncava hacia abajo, la magnitud de interés crece y lo hace lentamente (deducido de la situación 1); cuando la gráfica de la razón de cambio es creciente pero cóncava hacia arriba, la magnitud de interés crece pero rápidamente (deducido situación 2); cuando la gráfica de la razón de cambio es decreciente y cóncava hacia arriba, la magnitud de interés decrece cada vez mas lento y finalmente, cuando la gráfica de la razón de cambio es decreciente pero cóncava hacia abajo, la magnitud de interés decrece cada vez más rápido (deducido situación 3 y 4).

Se proponen dos gráficos para analizar en forma general, donde los profesores participan en las conclusiones que allí se plantean (ver la siguiente gráfica). La gráfica es de una función de interés que llamamos  $F(x)$ , y lo que se analizaron fueron las razones de cambio en cada uno de esos intervalos. El director del curso plantea la necesidad de que el estudiante proponga soluciones de forma intuitiva, antes de hacer demostraciones y procesos algebraicos; que el estudiante se haga consciente de que lo que está haciendo y lo que está aprendiendo es cierto.

El profesor D plantea que si la razón de cambio en el intervalo I es positiva, y después del punto K la razón de cambio es negativa, implica que la razón de cambio en ese punto sea cero.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS



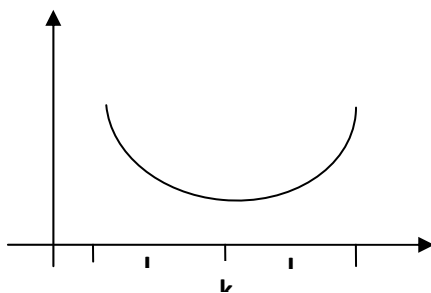
**Proposición 1:** la razón de cambio es positiva en el intervalo I, la magnitud es creciente en ese intervalo.

**Proposición 2:** la razón de cambio es negativa en el intervalo J, la magnitud es decreciente en ese intervalo.

Encontramos un punto donde la magnitud toma su máximo valor. En las cercanías de ese punto la razón de cambio es muy pequeña. Antes de ese punto la razón de cambio es positiva, después de ese punto, la razón de cambio es negativa.

**La razón de cambio es decreciente en todo el intervalo, la gráfica de la magnitud es cóncava hacia abajo en ese intervalo.**

Una vez expuesto y socializado el análisis de este gráfico, se pasó al análisis de la siguiente gráfica:



**Proposición 1:** la razón de cambio es negativa en el intervalo I, la magnitud es decreciente en ese intervalo.

**Proposición 2:** la razón de cambio es positiva en el intervalo J, la magnitud es creciente en ese intervalo.

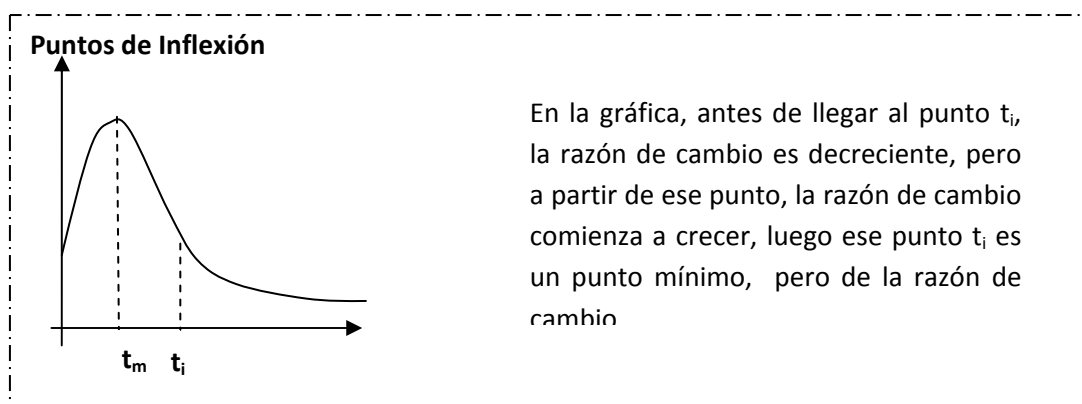
Encontramos un punto donde la magnitud toma su mínimo valor. En las cercanías de este punto la razón de cambio es muy pequeña. Antes de este punto, la razón de cambio es negativa, después de este punto, la razón de cambio es positiva.

**La razón de cambio es creciente en todo el intervalo, la gráfica de la magnitud es cóncava hacia arriba en todo el intervalo.**

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

La razón de cambio está creciendo en todo el intervalo, lo que implica que cuando la función de interés es cóncava hacia arriba, la razón de cambio es creciente, que es equivalente a la derivada positiva –adelantándose un poco a la temática-. Esto se deduce cuando trazamos rectas tangentes a la curva en puntos cualesquiera, las pendientes de ellas vienen de los negativos, llega a cero en el punto K y se vuelven positivas, pero siempre crecientes.

Para el punto de inflexión el profesor director del curso, plantea la siguiente gráfica y pregunta acerca de la importancia de ellos:



Se pregunta “¿qué es un punto de inflexión?”, el profesor D responde: es donde ocurre un cambio de concavidad.

El profesor director del curso afirma: “los puntos de inflexión son un máximo ¿cierto?”, el profesor D dice que sí. ¿Cuál es el punto de inflexión ahí?,  $t_m$  responde. ¿Pero si tiene la misma concavidad antes de él y después de él?, ah, no entonces es en  $t_i$ . La gráfica antes de él es cóncava hacia abajo y después de él cóncava hacia arriba.

El profesor director del curso plantea qué otra cualidad tiene ese punto de inflexión, a lo cual un profesor del curso afirma: “en ese punto la razón de cambio deja de decrecer para comenzar a crecer.” El profesor director afirma entonces

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

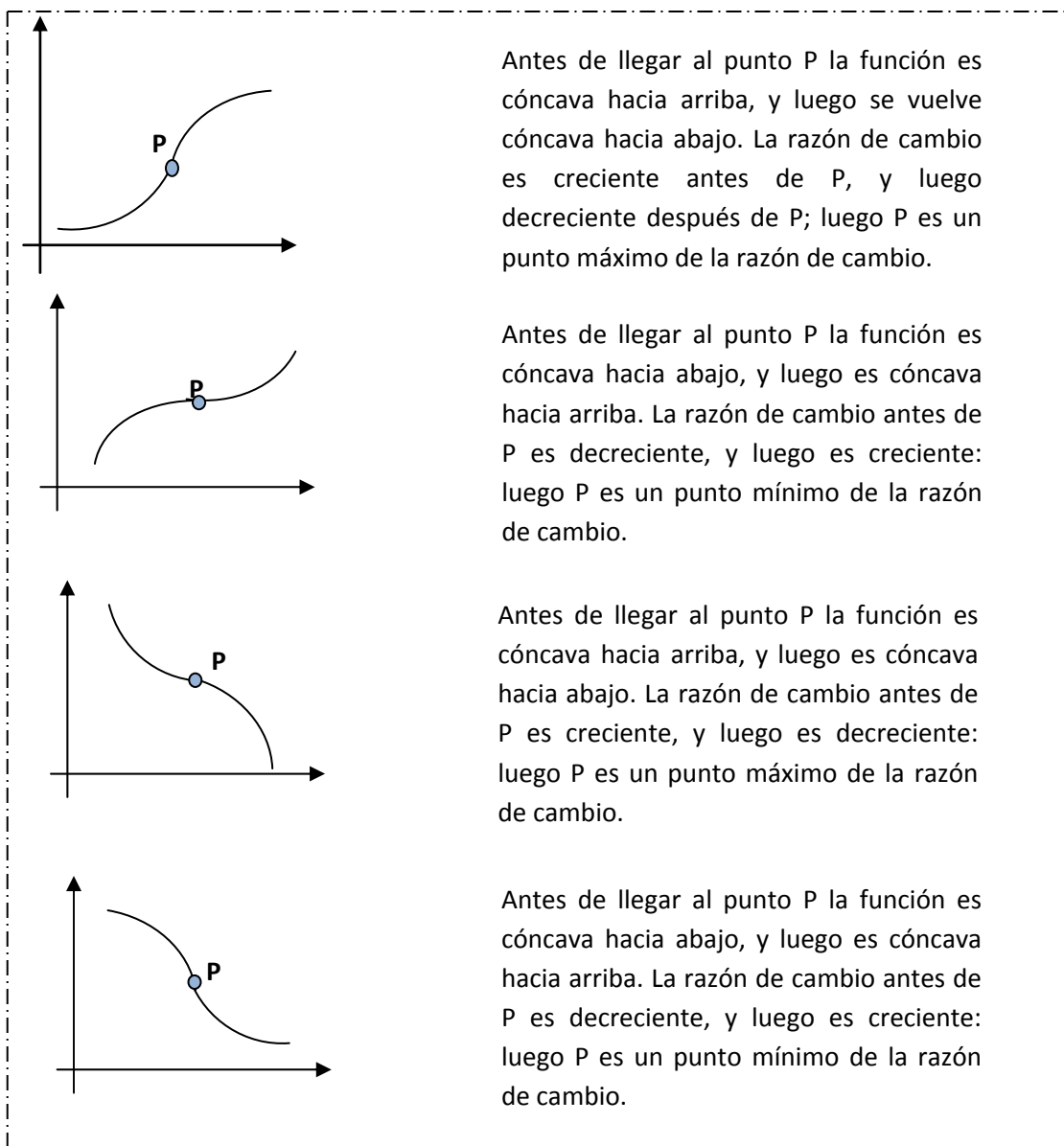
que tiene razón para decir que es un punto mínimo, porque deja de decrecer y comienza a crecer, luego el punto de inflexión en ese caso es un mínimo, pero, ¿un mínimo de quien?

El profesor C dice que para él no es un mínimo, porque según lo que él ha aprendido no es coherente decir que es un mínimo. El profesor director le aclara que efectivamente NO es un mínimo de la función de interés, es de la RAZÓN DE CAMBIO. Por eso es que para hallar los puntos de inflexión de la función de interés se iguala la segunda derivada a cero y ese análisis muy seguramente nadie se había dedicado a hacerlo.

El análisis de los puntos de inflexión, fue muy interesante; los profesores en un principio aceptan la afirmación hecha por el profesor director, pero es el profesor C quien verdaderamente se cuestiona acerca de ser un mínimo pero de cuál función. Recordemos que es el profesor C a quien hemos catalogado como el profesor que comienza este curso con mejores bases del concepto de derivada.

Después de reflexionar acerca de los puntos de inflexión se exponen las siguientes conclusiones:

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS



Antes de llegar al punto P la función es cóncava hacia arriba, y luego se vuelve cóncava hacia abajo. La razón de cambio es creciente antes de P, y luego decreciente después de P; luego P es un punto máximo de la razón de cambio.

Antes de llegar al punto P la función es cóncava hacia abajo, y luego es cóncava hacia arriba. La razón de cambio antes de P es decreciente, y luego es creciente: luego P es un punto mínimo de la razón de cambio.

Antes de llegar al punto P la función es cóncava hacia arriba, y luego es cóncava hacia abajo. La razón de cambio antes de P es creciente, y luego es decreciente: luego P es un punto máximo de la razón de cambio.

Antes de llegar al punto P la función es cóncava hacia abajo, y luego es cóncava hacia arriba. La razón de cambio antes de P es decreciente, y luego es creciente: luego P es un punto mínimo de la razón de cambio.

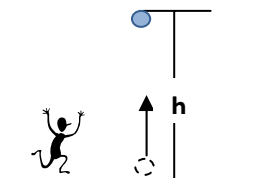
Una vez concluidos estos análisis, podemos afirmar que para esta primera parte de la segunda sesión el avance ha sido muy bueno, el profesor A resume que, en primera medida cuando la razón de cambio no es constante, el modelo de la situación ya no es lineal; además de los avances en el análisis gráfico cuando analizamos la función de interés para llegar a la función derivada sin necesidad de hacer procesos algebraicos.

RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Para culminar con esta sesión el profesor A plantea en su exposición el siguiente problema del texto guía:

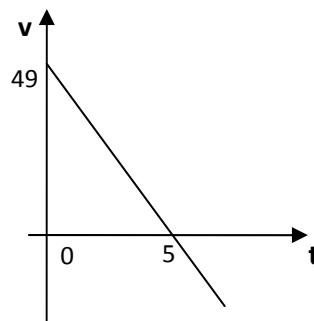
**Situación-problema 5: (pág. 94)**

Un objeto se lanza desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial  $v_0=49$  metros/segundo. Nos interesa deducir la fórmula de la altura con respecto al tiempo.



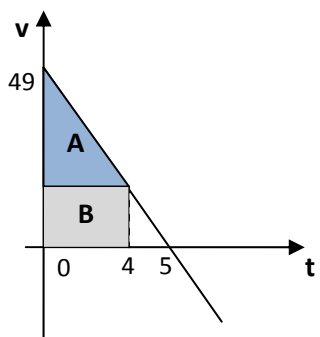
Para comenzar, el profesor A plantea que la velocidad del objeto es cada vez más lenta debido a la fuerza de gravedad, que impulsa al objeto hacia el suelo. Como la gravedad es una constante de  $9.8 \text{ m/s}^2$  y es la razón de cambio de la velocidad, entonces la expresión que muestra el comportamiento de la velocidad con respecto al tiempo es la siguiente:  $v(t) = 49 - 9.8t$

Donde 49 es la velocidad con la que comienza el objeto. Esta es entonces la razón de cambio de la altura  $h$  con respecto al tiempo, cuya gráfica se muestra a continuación.



Aquí el profesor A junto con el profesor B plantean que para hallar la altura en un tiempo cualquiera menor a 5, solo hay que hallar el área debajo de la curva; por ejemplo para hallar la altura a los 4 segundos, se tiene que es el área del sector A más el área del sector B.

RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS



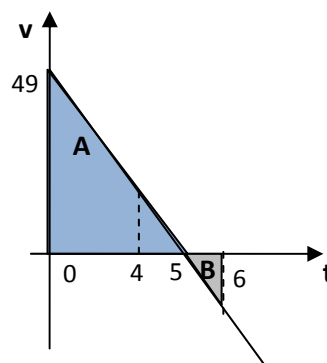
$$\text{Área } A = \frac{1}{2}(4)(4g) = 8g$$

$$\text{Área } B = (4)(49 - 4g) = 196 - 16g$$

$$\text{Área } (A + B) = 117.6 \text{ metros}$$

La altura a los 5 segundos, es más sencillo pues es el área de todo el triángulo de base 5 y altura 49, luego la altura del objeto a los 5 segundos es de: 122.5 metros.

La pregunta surge de parte del profesor D sobre qué pasa con la altura del objeto después de los 5 segundos, pues el área de la región daría negativa; ante esto, el profesor C hace el siguiente esquema y le plantea al profesor D que hay que calcular el área del sector B y sumarle la del sector A que ya se sabe que es de 122.5 metros.



El profesor director del curso, cuestiona a los profesores sobre qué explicación puede darse, pues finalmente es claro que el área B va a dar negativa, luego la suma de ellas dos -área A y B- sería realmente una resta. El profesor A de forma concisa y clara explica que este suceso ocurre porque el objeto comienza a descender, entonces las distancias comienzan a ser cada vez menores hasta llegar a cero.

El profesor A hace un análisis muy preciso y coherente acerca del problema, lo que refleja un buen manejo de las variables, de las magnitudes de interés y de la relación entre ellas.

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

Para culminar y encontrar la expresión general de la altura del objeto con respecto al tiempo, el profesor A plantea dos expresiones, una de ellas para cuando el tiempo es menor a cinco y otra cuando este sea mayor a cinco, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{1}{2}(t)(49 - (49 - 9.8t)) & h(t) &= 122.5 - \frac{1}{2}(t - 5)(-49 + 9.8t) \\
 &+ (t)(49 - 9.8t) & & \\
 h(t) &= \frac{1}{2}9.8t^2 + 49t - 9.8t^2 & h(t) &= 122.5 - (-49t + \frac{1}{2}9.8t^2 + 122.5) \\
 h(t) &= 49t - \frac{1}{2}9.8t^2 \text{ para } t \leq 5 & h(t) &= 49t - \frac{1}{2}9.8t^2 \text{ para } t \geq 5
 \end{aligned}$$

De allí se dedujo que la altura para cualquier tiempo  $t$  está dada por la misma expresión. Tanto geométrica como algebraicamente llegar a este tipo de descubrimiento es realmente importante en la enseñanza de la matemática; en un principio, los profesores argumentaban no tener la misma expresión para el primer caso y el segundo, pero a partir de un análisis geométrico en un comienzo, y luego acompañado de un proceso algebraico se ha concluido que la expresión es la misma, cosas que se forman realmente fascinantes al hacer matemática.

Sin embargo, algunos profesores argumentan aun que lo que demora en subir un cuerpo no es el mismo que demora en bajar. No obstante, el profesor D no está de acuerdo y afirma que cuando el cuerpo llega a su altura máxima su velocidad es cero y el objeto comienza a descender y llega la misma velocidad con la que inició al suelo, y eso lo explica la expresión que el profesor A halló. Finalmente, en forma general se concluye la expresión que comúnmente se utiliza en física para hallar la altura de un cuerpo y es la siguiente:  $h(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ .

De esta manera, para concluir este apartado, resalto que hacer el análisis geométrico acerca del comportamiento de las magnitudes de interés, provocó en los profesores un cambio significativo en la concepción que tenían acerca de resolver situaciones donde se puede aplicar la noción de derivada. En este

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

momento, el profesor deja a un lado lo que “sabe” acerca de resolver problemas de aplicación de la derivada, y comienza a realizar ahora un análisis que parte de lo intuitivo acerca de las magnitudes de interés, y que pueden llegar a conclusiones relevantes en la matemática.

En los cuatro primeros problemas planteados, los profesores investigados, mostraron en un comienzo tener dificultades en el análisis, ya que no habían hecho nunca este tipo de reflexiones. Sin embargo, el desarrollo que tuvieron durante la sesión mostró en los profesores A, C y D una comprensión buena acerca del análisis gráfico de las razones de cambio y de sus características, así como de los puntos de inflexión en las funciones de interés y su importancia en la función derivada. No obstante, el profesor B mostró un avance menos presuroso, en el análisis gráfico, reflejándolo en confusiones en la relación entre la gráfica de la función de interés y en la de la función derivada.

El profesor C muestra en el análisis de los puntos de inflexión hacer reflexiones constantes acerca de su conocimiento y de la relación que pueda establecer en el conocimiento adquirido en este curso y los conocimientos ya conceptualizados.

A partir del análisis gráfico –dedicado gran parte de la sesión a este– se espera que los profesores teniendo la gráfica de una función de interés realicen el bosquejo de la función derivada, tal y como se analizó en los gráficos 1 y 2 después del planteamiento y socialización de los problemas.

En la exposición realizada por el profesor A junto con el profesor B, el profesor A deja ver que ha comenzado a tener un avance importante en la forma de concebir la derivada; su análisis en la situación planteada y en la interpretación hecha en la solución que propone el texto, deja ver el dominio que tiene cuando habla de las funciones de interés, de la razón de cambio de esa función de interés y de la relación que puede establecer entre ellas.

Las conclusiones a las que se llegaron en el problema expuesto por los profesores A y B, dejaron ver de manera clara lo fascinante que puede llegar a ser la matemática, debido a la forma como se abordó el problema; el hecho de comenzar a hacer un análisis intuitivo y geométrico para luego comenzar a realizar un análisis algebraico permite establecer un puente entre estos dos razonamientos que, finalmente llevan a establecer generalizaciones tan importantes como a las que se llegaron. Se debe enfatizar también que no se propusieron solamente problemas para analizar las razones de cambio, sino que se está construyendo el concepto a partir de ese puente –por así decirlo– de ir y venir entre las funciones de interés y las razones de cambio.

En la segunda sesión se llega a un resultado importante y es el analizar que si la razón de cambio de una función de interés no es constante, pero la razón de la razón de cambio si lo es –como en la situación 5-, entonces la magnitud de interés se halla encontrando el área bajo la curva la razón de cambio. A este resultado se llega de una manera bastante intuitiva, que luego deberá llevarse a la rigurosidad matemática, pero que en un comienzo deben manejarse intuitivamente.

### **3.2.3 Tercera sesión: “La problemática cuando la razón de cambio no es constante”**

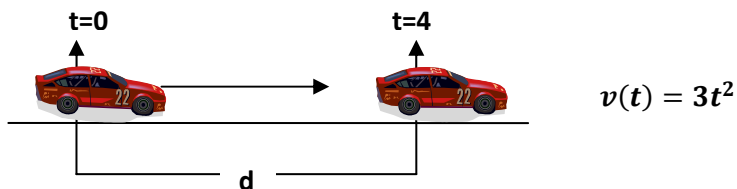
En la tercera sesión el profesor C realizó una exposición acerca de “la problemática cuando la razón de cambio no es constante” a partir del método de Euler utilizado en el siglo XVII, donde la función razón de cambio ya no es una función lineal.

A continuación se describirá el problema que plantea el profesor C y la solución a este:

RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Situación-problema 6 (pág. 103)

Un automóvil parte del reposo en el instante  $t=0$  y se mueve a lo largo de una carretera recta. Su velocidad, en cualquier instante  $t$ , está dada por la fórmula:



Encuentre el valor aproximado del desplazamiento  $d$  del automóvil cuando han transcurrido 4 segundos.

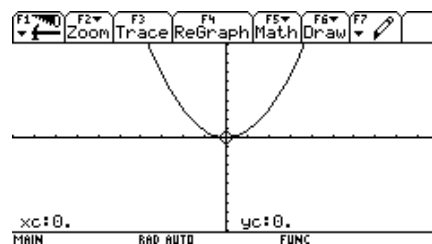
Este problema lo que busca es encontrar la antiderivada de la velocidad –de forma implícita-, y para eso se partió del mismo tipo de análisis realizado en las situaciones anteriores.

Para comenzar a resolver el problema el profesor C pidió a los demás colegas las características generales para esta situación. El profesor D propuso las siguientes características:

- La velocidad aumenta
- La razón de cambio aumenta
- El desplazamiento es creciente

La primera es clara, debido que el mismo problema da la expresión de la velocidad con respecto al tiempo. En la segunda se refiere precisamente a la misma velocidad; en la tercera característica el profesor D ya hace un análisis intuitivo acerca de lo que sucede con la función desplazamiento.

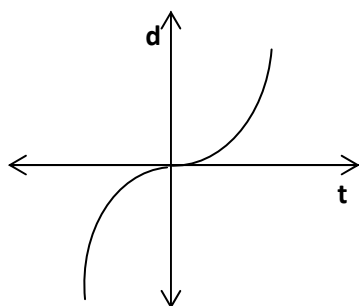
El profesor C realiza una gráfica de la velocidad con respecto al tiempo, la cual se muestra a



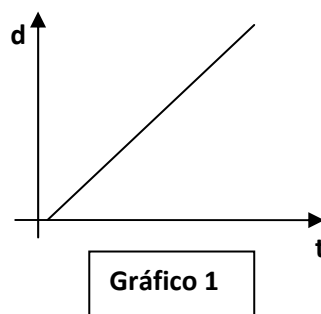
## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

continuación. Se desprecia la gráfica con valores menores a cero en el eje  $t$ . una vez realizada la gráfica, el profesor pide un bosquejo de la posible gráfica del desplazamiento con respecto al tiempo que es, finalmente la de mayor interés en el problema.

El profesor B pasa al tablero y bosqueja la siguiente gráfica:



En su argumento muestra que la ha deducido una vez ha conocido por la fórmula que la velocidad es cuadrática, y explica que la del desplazamiento debe ser una cúbica. Su deducción no es nada intuitiva y sí muy procedimental; así que el profesor director del curso le pide olvidar la fórmula y hacer la gráfica de desplazamiento si solo conoce la gráfica de su razón de cambio. El profesor B muestra tener dificultades nuevamente en deducir el gráfico que modele esta situación. Al cabo de varias discusiones acerca de la posible gráfica, el profesor, ya teniendo en cuenta que la función desplazamiento es creciente, plantea las tres posibles gráficas que modelan esta situación, y de ellas escoge la línea recta argumentando que el desplazamiento es rectilíneo.



Dada esta situación nos podemos dar cuenta que el profesor sí tiene dificultades aun en el análisis de gráficos y en ese ir y venir entre la función de interés y su razón de cambio. Al finalizar la discusión el profesor logra entender algo del porqué la gráfica que modela la situación debe ser cóncava hacia arriba.

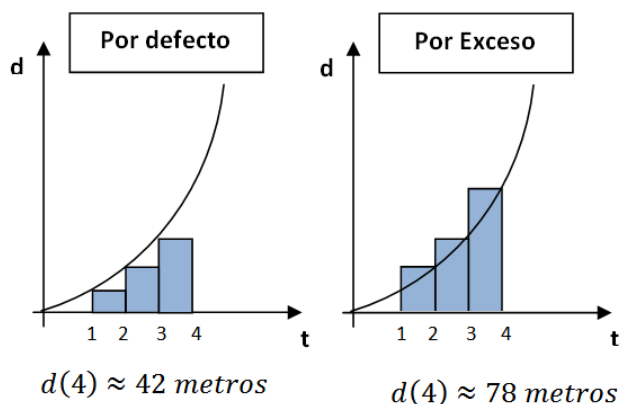
### RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Una vez deducida la gráfica, el profesor C pasó a realizar un análisis para deducir el desplazamiento del automóvil a los 4 segundos de haber comenzado a rodar. Enfatizó en que en el problema anterior, cuando la razón de cambio tampoco era constante, pero la razón de la razón de cambio sí, se tenía que la razón de cambio de la función de interés era una línea recta y hallar el área bajo esa curva no representaba mayor dificultad. En este momento, hallar el área bajo esta curva – que no es lineal-, ya no es un problema tan sencillo de solucionar. Lo que propuso fue, haciendo uso de las herramientas usadas en el siglo XVII por Euler, dividir el segmento bajo la curva desde cero hasta cuatro en varios segmentos iguales de tiempo y calcular el área bajo esa curva por exceso y por defecto tal y como se muestra a continuación:

t	0	1	2	3	4
V(t)	0	3	12	27	36
$\Delta d$		0	3	12	27
$\Delta d$		3	12	27	36

$$d(4) \approx 3 + 12 + 27 + 36 = 78 \text{ metros}$$

$$d(4) \approx 0 + 3 + 12 + 27 = 42 \text{ metros}$$



En este ejemplo tomó sub-intervalos de 1 unidad en el tiempo y le resulta que la distancia recorrida por el automóvil a los 4 segundos está entre los 42 y los 78 metros, intervalo que es realmente muy grande; así que el profesor C propone dividir el segmento (0,4) en sub-intervalos de 0.5 de unidad, luego en el computador muestra el acotamiento del intervalo que contiene el desplazamiento a los 4 segundos, y utiliza sub-intervalos de 0.2, 0.1, 0.01 y 0.001 que para este último se muestra que el desplazamiento está entre los 63.904 por defecto y los 64.093 por exceso, este resultado casi que obliga a deducir que la distancia recorrida a los 4 segundos debe ser de 64 metros.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

El uso del computador y del programa Geogebra, muy utilizado por el grupo del profesor C, les permitió inferir esta solución sin tener que hacer cálculos manuales, cosa que permitió el avance casi inmediato, una vez entendido el método, para llegar a la generalización para cualquier  $t$ .

En la generalización, el profesor director del curso les propone a los profesores deducir una expresión que permita calcular el desplazamiento del automóvil para cualquier tiempo  $t$ , sabiendo que los intervalos que se van a tomar ahora para ese tiempo  $t$  es de tamaño  $t/n$  y la altura está dada por expresión de la velocidad  $v(t) = 3t^2$ ; los profesores realizan los cálculos correspondientes y en la socialización se obtiene lo siguiente:

$$d(t) = 3 \sum_{k=1}^n \left(\frac{t}{n}\right) \left(\frac{k^2 t^2}{n^2}\right)$$

$$d(t) = 3 \frac{t^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

De allí en trabajo con todo el curso se resuelve esta sumatoria de los cuadrados de los primeros  $n$  números, que está dada por:

$$d(t) = 3 \frac{t^3}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{t^3(2n^3 + 3n^2 + n)}{2n^3}$$

De esta expresión se tiene que  $n$  debe tomar valores muy grandes para que los intervalos tiendan a ser muy pequeños y acercarse a cero. Con esta expresión, calculamos el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , y se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2n^3} = 1$$

Reemplazando en la ecuación deducida de la distancia en función del tiempo, se obtiene que:

$$d(t) = t^3$$

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

Y con esto se ha encontrado finalmente la expresión que determina el desplazamiento de un automóvil con velocidad  $v(t) = 3t^2$  en cualquier tiempo  $t$ . El análisis hecho para deducir esta generalización, fue realizado en trabajo junto con el profesor director del curso; lo interesante de esta situación, es observar cómo a través de un planteamiento que en un comienzo solo se preocupa por deducir el desplazamiento a los 4 segundos y utilizando el método de Euler en el silgo XVII, los profesores pudieron llegar a deducir una expresión general sin hacer cálculos para hallar la antiderivada de la función y llegar exactamente a lo mismo. Este hecho es relevante para cumplir con el propósito del curso que es que el profesor llegue a descubrir el Teorema Fundamental del cálculo.

Para culminar con la primera parte de la sesión, se hizo un análisis en forma general acerca de las funciones de interés cuando su razón de cambio es una función polinómica, determinando lo siguiente:

- Cuando la razón de cambio de una función de interés es una constante, entonces la función de interés es una función lineal (primera sesión).
- Cuando la razón de cambio de una función de interés es una función lineal, entonces la función de interés es una función cuadrática (primera segunda sesión).
- Cuando la razón de cambio de una función de interés es una función cuadrática, entonces la función de interés es una función cúbica (tercera sesión).

<b>Razón de cambio</b>	<b>Función de interés</b>
$f(x) = k$	$F(x) = kx$
$f(x) = x$	$F(X) = \frac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2$	$F(X) = \frac{x^3}{3}$
$f(x) = x^n$	$F(X) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

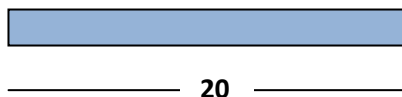
## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Con estas características acerca del comportamiento de la función de interés dada la razón de cambio, se pudo construir un modelo de anti-derivación para las funciones polinómicas, tal como lo se muestra en la siguiente tabla:

En forma general, se ha concluido una expresión para hallar la función de interés una vez conocida su razón de cambio, y es precisamente la que se trabaja como reglas de integración en los cursos de cálculo. Seguidamente, se muestra a groso modo, la exposición realizada por otros profesores de la especialización para conocer la importancia del llamado valor inicial al realizar procesos de anti-derivación por medio de una situación cuya razón de cambio no es una función polinómica:

### Situación-problema 7 (pág. 115)

Una varilla tiene 20 centímetros de longitud. Se coloca sobre un eje  $x$ , medido en centímetros, con el extremo izquierdo en el origen. ( $x=0$ ). Lo que se pretende es calcular la masa total de la varilla.

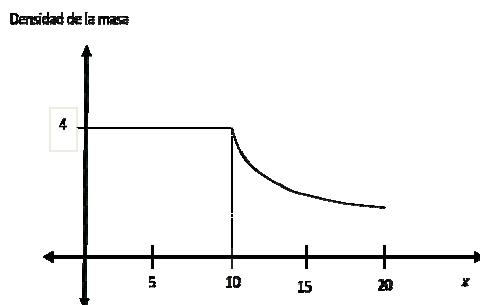


La función de densidad de masa (en gramos/centímetro) está dada por la fórmula:

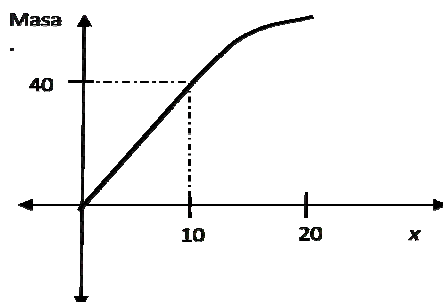
$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{120}{x+20} & \text{si } 10 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

La gráfica que bosqueja la variación de la masa con respecto al tiempo (la densidad) es la que se muestra a continuación; en ella se ve que la varilla tiene una densidad constante los primeros 10 centímetros, y de los 10 a los 20 centímetros, la densidad comienza a ser decreciente; es decir, la razón de cambio de la masa es decreciente.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS



Una vez conocido el gráfico de la razón de cambio, el profesor D plantea el gráfico de la función masa, y es el siguiente:



Explica que como en el primer intervalo, la razón de cambio de la masa es constante, luego la gráfica de la masa en ese intervalo de  $[0,10]$  es una línea recta; a partir de los 10 centímetros, la razón de cambio es decreciente pero decrece cada vez más lento, luego la gráfica de la masa en ese intervalo es una curva creciente y cóncava hacia abajo.

Calcular la masa total de la varilla, se convierte finalmente en calcular la masa después de los 10 centímetros, pues antes de este valor, la masa tiene 40 gramos/centímetro, haciendo uso de las reglas deducidas en la situación anterior. Para este intervalo  $[10,20]$ , sabiendo que la función que representa la razón de cambio de la masa no es una función polinómica, se halló el área bajo la curva tomando sub-intervalos pequeños de longitud en la función densidad, y los resultados se muestran a continuación:

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

Estos sub-intervalos son de 0.1 centímetros, y parten de los 40 gramos/centímetro de masa que hay a los 10 centímetros de longitud. Luego se pudo concluir que la masa acumulada debe ser de 74.5 gramos/centímetro.

Queriendo llegar nuevamente a una generalización, se planteó que la masa acumulada en un valor cualquiera  $b$ , era semejante a la sumatoria del producto de la densidad en un valor determinado por la longitud escogida, más el valor inicial dado.

$$M(b) \cong M(a) + \sum_{i=1}^n r(x_i) \cdot \Delta x$$

Donde la exactitud de  $M(b)$  depende de la cantidad de sub-intervalos que se tomen para cada caso. Allí el profesor director del curso enfatiza en la importancia de conocer el valor inicial al hallar la función de interés, ya que existen infinitas funciones de interés que tienen una misma razón de cambio, y es solo el valor inicial el que hace que de esa familia de funciones se escoja solo la función de interés en ese instante.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

En términos de conclusiones, finalmente, la aplicación del método de Euler para encontrar una función de interés una vez conocida su razón de cambio, hizo que el profesor re-descubriera las reglas o propiedades de anti-derivación utilizadas en los cursos de cálculo y que comúnmente se aprenden de memoria. El hecho de re-descubrirlas provocó en los profesores un apropiamiento del concepto mismo de la anti-derivación.

Inducido que el mismo proceso de la anti-derivación viene a ser realmente la sumatoria de los incrementos del área, dejó ver en el profesor una concepción más clara de forma geométrica sobre el concepto; además, manifestó la estrecha relación entre las áreas y conocimientos de la matemática, estableciendo la relación de la anti-derivada con sumatorias, áreas bajo una curva y procesos algebraicos acerca del límite que se constituyen en una riqueza grande en la concepción que se tenga acerca de la matemática misma en los profesores investigados.

Aunque no se pudo llegar a una expresión clara para la situación 7, ya que la razón de cambio no era una función polinómica, deja claro la importancia de tener una condición inicial para hallar con exactitud la función de interés una vez conocida su razón de cambio.

Con respecto a la evolución de los profesores investigados, el profesor B mostró tener dificultades en el entendimiento de las gráficas de la función de interés una vez conocida la de su razón de cambio; su dificultad se basa en el no salir de sus "conocimientos" que se han vuelto procedimentales, y de analizar intuitivamente lo que pasa en estos casos. Es importante recalcar que para la solución de situaciones problema, el análisis intuitivo como primera medida, hace que se tenga más propiedad de lo que se busca y de a dónde se quiere llegar.

El profesor C manifiesta haber entendido la relación gráfica entre la función de interés y su razón de cambio, y lo muestra en la propiedad de las exposiciones que realiza así como en los análisis realizados en las diferentes situaciones. Sus bases

acerca de la concepción de derivada son coherentes y muestra un empalme entre los conocimientos previos y los que está construyendo en el curso.

El profesor D manifestó avance en el manejo gráfico de la función de interés una vez conocida su razón de cambio.

El objetivo de esta sesión fue la de llegar a la conceptualización de ideas fundamentales de la antiderivada a partir de la interpretación geométrica de las razones de cambio, y de establecer la relación de la antiderivada con el área bajo la curva de la función razón de cambio.

### **3.2.4 Cuarta sesión: “La derivada: razón instantánea de cambio”**

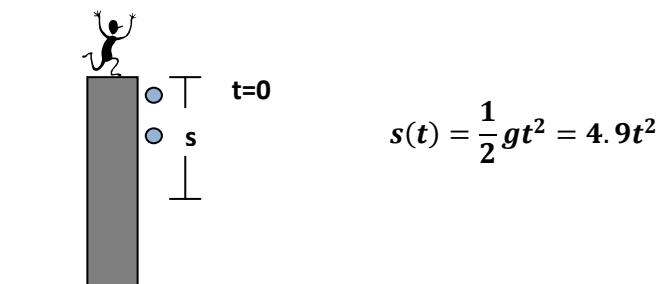
En las sesiones anteriores se había dedicado espacio a reconstruir tanto geométrica como algebraicamente la función de interés una vez conocíamos su razón de cambio, y se dedujeron reglas conocidas en la antiderivación. En esta sesión se dedicó espacio a conocer la razón de cambio de una función de interés específica en el planteamiento de un problema.

El propósito fundamental fue construir la conceptualización de la derivada, las reglas de derivación y la conceptualización del Teorema Fundamental del Cálculo. Para esto, el profesor C y su grupo de trabajo realizaron la primera exposición que partió de la siguiente situación:

RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

**Situación-problema 8: (pág. 135)**

Un objeto se encuentra a una gran altura del suelo y se deja caer. Aceptamos que conocemos la fórmula que nos calcula la distancia recorrida en términos del tiempo:



Donde  $s$  está medido en metros,  $t$  en segundos y  $t=0$  cuando el cuerpo se suelta.

**¿Cuál será la velocidad del cuerpo cuando ha transcurrido 1 segundo?**

El profesor C comienza la exposición aclarando que en este problema está dado el desplazamiento –que era lo que en sesiones anteriores se buscaba- y se busca es la razón de cambio de la función de interés.

Para conocer la velocidad del automóvil en un tiempo  $t=1$ , se dividió el intervalo  $[0,1]$  en 10 sub-intervalos, y se asumió la velocidad como constante en intervalos pequeños de tiempo, así que la expresión parte de afirmar que:

$$\Delta s \approx v(1)(0.1)$$

$$s(1 + 0.1) \approx s(1) + v(1)(0.1)$$

Despejando  $v(1)$  se obtiene que:  $v(1) \approx \frac{s(1+0.1)-s(0.1)}{0.1}$ , y sabiendo que se tiene la función desplazamiento, se reemplazó en los valores de  $s$  y se obtuvo para esta situación que:

$$v(1) \approx \frac{s(1 + 0.1) - s(0.1)}{0.1} = \frac{5.929 - 4.9}{0.1} = 10.29$$

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Y concluyó que para cuando el objeto lleva un segundo de caída, su velocidad es aproximadamente de 10.29 m/seg. Si se toman sub-intervalos más pequeños, la cercanía a encontrar la velocidad verdadera en un tiempo  $t=1$  segundo, va a ser cada vez más precisa. Pero este proceso tiende a volverse algo “sin sentido” cuando lo que se pretende es llegar al valor exacto del desplazamiento.

Aquí se manifiesta la idea de que ese intervalo que se tome pueda ser tan pequeño como se desee, y acercarse a cero para encontrar lo que se llama la velocidad instantánea; esa tendencia a ser cero pero no serlo, es la idea intuitiva del límite.

En forma general, el grupo del profesor C planteó la siguiente expresión:

$$v(t) \approx \frac{s(t + \Delta t) - s(\Delta t)}{\Delta t}$$

Que viene a transformarse en una igualdad cuando aplicamos el límite y se obtiene que:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(\Delta t)}{\Delta t}$$

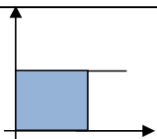
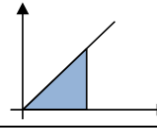
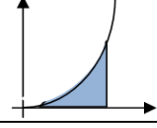
Bajo esta expresión es que concluyen que se puede hallar el valor de la velocidad con la que va bajando el objeto en cualquier tiempo  $t$ . En este caso, sabiendo la expresión para  $s(t)$  dedujeron que:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{4.9(t + \Delta t)^2 - 4.9t^2}{\Delta t} = 9.8t$$

El planteamiento para llegar a esta expresión es bastante conocida por algunos profesores como lo son el profesor A y el profesor C, además es la manera como introducen la noción de derivada en los cursos de cálculo, que haciendo un buen trabajo sobre esto, el avance hacia la concepción de derivada es bastante interesante. En el proceso de resumir todo lo visto hasta el momento, el profesor director del curso pide al profesor C hacer un resumen de lo que se ha visto

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

durante el curso, a lo cual el profesor realiza la siguiente tabla –que ya se había deducido en la sesión anterior–:

Razón de cambio	Magnitud de interés (M.I)	Forma geométrica de hallar la M.I.
Constante	Lineal	
Lineal	Cuadrática	
Cuadrática	Cúbica	
Polinomio de grado <b>n</b>	Polinomio de grado <b>n+1</b>	

El método de Euler fue el que permitió hallar la magnitud de interés dadas las razones de cambio como funciones polinómicas, hallando el área bajo la curva. Cuando la razón de cambio no era una función polinómica, la precisión para hallar la expresión no era suficiente con los datos conocidos, sino que se necesitaba además de un valor inicial, resolver una sumatoria mucho más compleja.

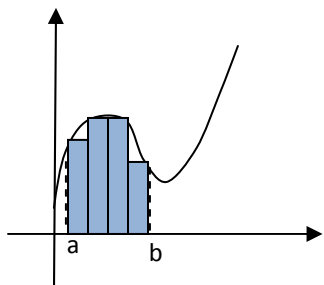
Establecer esa sumatoria, y plantear que la expresión para encontrar la función de interés dada la razón de cambio es:

$$M(b) \cong M(a) + \sum_{i=1}^n r(x_i) \cdot \Delta x$$

Es lo que define finalmente el Teorema Fundamental de Cálculo. Este hecho se hace relevante en el salón de clase; el profesor director del curso hizo énfasis en la importancia del proceso para llegar finalmente a un hecho tan importante en el Cálculo, partiendo de situaciones-problema y sin ninguna intención de utilizar las reglas de derivación o antiderivación, se llegó a concluir algo realmente importante

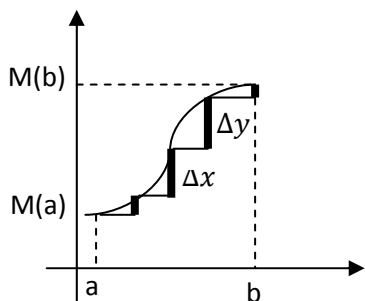
## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

para la matemática. Sin embargo, la deducción no fue tan trivial, lo interesante del caso es que esta expresión en un comienzo es deducida cuando se tiene la función razón de cambio junto con un valor inicial y se quiere llegar a la función de interés.



Teniendo la función de la razón de cambio, y conociendo un valor inicial  $M(a)$ , podemos hallar la función de interés hallando el área bajo esa curva que se expresa como  $M(b) \cong M(a) + \sum_{i=1}^n r(x_i) \cdot \Delta x$ , donde  $r(x_i)$  es la altura de cada uno de los rectángulos por los incrementos en el eje x.

Ahora, si se realiza la gráfica de la función de interés en el intervalo  $[a, b]$  se obtiene que:



Conociendo  $m(a)$  y queriendo conocer  $m(b)$ , se puede expresar a  $m(b) \cong m(a) + \sum_{i=0}^n \Delta y_i$ . Donde se tiene que si  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = r(x)$  que es la razón de cambio entonces  $\Delta y = r(x)\Delta x$ , que reemplazando en la primera expresión se tiene que:

$$m(b) \cong m(a) + \sum_{i=0}^n \Delta x_i r(x_i)$$

Que es la misma expresión deducida cuando se tenía la función razón de cambio y se quería llegar a la funciones de interés en el punto b.

Este hecho tan importante es lo que muestra la existencia de una relación estrecha entre la derivada y la antiderivada, como procesos inversos, que es finalmente como se expresa en palabras el Teorema Fundamental de Cálculo.

La deducción fue realizada dentro del resumen que el profesor C realizó en un comienzo con la orientación del profesor director del curso y la participación de los demás profesores.

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

A continuación el profesor A y el profesor B exponen una situación acerca de la derivada como razón de cambio instantánea, y se muestra a continuación:

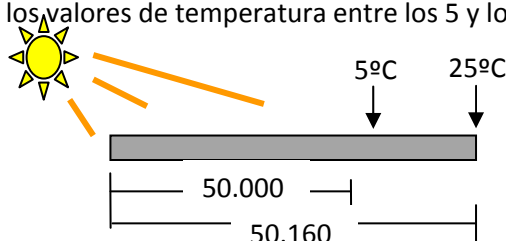
**Situación-problema 9: (pág. 153)**

Una barra de aluminio que tiene 5 centímetros de longitud se encuentra en un ambiente donde la temperatura es de 5 grados centígrados. A medida que la temperatura ambiente aumenta, la barra se expande.

La longitud  $L$  de la barra en términos de la temperatura  $T$  del ambiente está dada por la fórmula:

$$L = 49910 + 20T - 0.4T^2$$

Para los valores de temperatura entre los 5 y los 25°C.



El interés de esta situación es la de aproximar el valor de la razón de cambio de la longitud  $L$  de la barra con respecto a la temperatura  $T$  cuando la temperatura es de 10°C; es decir se quiere encontrar  $r(10)$ .

Al igual que en la situación 8, se toman intervalos muy pequeños a 10, en este caso, 10.1 y se calcula la razón de cambio entre estas magnitudes suponiendo que la razón es constante, y se obtiene que:

$$r(10) \approx \frac{50071.196 - 50070}{0.1} = 11.96$$

Haciendo uso de las herramientas computacionales, el profesor A hace una tabla de valores en Excel donde muestra el acercamiento de  $r(10)$  cuando se toman sub-intervalos muy pequeños de tiempo pero que, como en la situación 8, no llevan a encontrar el valor de interés exactamente, sino siempre será una aproximación. Así

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

que el profesor recurrió a plantear ese  $\Delta T$  tan pequeño como se quisiera haciendo uso del límite y escribió la siguiente expresión:

$$r(T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{L(T + \Delta T) - L(T)}{\Delta T}$$

Para calcular el valor exacto de la razón de cambio de la longitud  $L$  a los  $10^\circ\text{C}$ , les resulta que:

$$r(10) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{L(10 + \Delta T) - L(10)}{\Delta T} = 12^\circ \frac{C}{\text{centímetros}}$$

Para generalizar estas dos situaciones, unos profesores del curso realizaron el siguiente análisis:

Situación problema	Fórmula
<p>Un objeto se encuentra a una gran altura del suelo y se deja caer. Aceptamos que conocemos la fórmula que nos calcula la distancia recorrida en términos del tiempo:</p> $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 = 4.9t^2$ <p>Donde <math>s</math> está medido en metros, <math>t</math> en segundos y <math>t=0</math> cuando el cuerpo se suelta.</p> <p><b>¿Cuál será la velocidad del cuerpo cuando ha transcurrido 1 segundo?</b></p>	$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(\Delta t)}{\Delta t}$

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

<p>Una barra de aluminio que tiene 5 centímetros de longitud se encuentra en un ambiente donde la temperatura es de 5 grados centígrados. A medida que la temperatura ambiente aumenta, la barra se expande.</p> <p>La longitud <math>L</math> de la barra en términos de la temperatura <math>T</math> del ambiente está dada por la fórmula:</p> $L = 49910 + 20T - 0.4T^2$ <p>Para los valores de temperatura entre los 5 y los 25°C.</p> <p>El interés de esta situación es la de aproximar el valor de la razón de cambio de la longitud <math>L</math> de la barra con respecto a la temperatura <math>T</math> cuando la temperatura es de 10°C; es decir se quiere encontrar <math>r(10)</math>.</p>	$r(T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{L(T+\Delta T) - L(T)}{\Delta T}$
<p>Luego para calcular la razón de cambio instantánea una vez conocida la función de interés, se tiene que:</p>	$r(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Y dedujeron a la derivada como una razón de cambio instantánea entre dos magnitudes, y lo instantáneo lo da el límite entre los incrementos.

La deducción hecha por los profesores expositores contempla un proceso inductivo partiendo de situaciones particulares, y encontrando que siempre se llega al mismo proceso sea la situación que sea donde se tiene la magnitud de interés y se quiere conocer la razón de cambio en un punto específico.

En esta misma sesión, y con el ánimo de llegar formalmente al Teorema Fundamental de Cálculo, se dio un espacio de discusión acerca de qué es un diferencial, dado un ejemplo que plantea el libro describiéndolo como una porción

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

infinitesimal; después de realizar varios análisis con los profesores entre los cuales se encontraron respuestas como:

- Es un valor tan pequeño como se quiera
- Es un valor que nadie puede estimar cuánto es pero existe
- El diferencial es lo mismo que un incremento

Donde se muestra la relación que establecen de semejanza entre incrementos y diferenciales, sin tener mayor distinción uno del otro. Finalmente, el profesor director del curso muestra que los diferenciales como tal no pueden ser trabajados por separado, lo que se puede es establecer una estrecha relación entre el límite de los incrementos y el cociente de los diferenciales tal y como se muestra en la siguiente expresión:

$$r(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}$$

Que en otras palabras se puede expresar a la razón de cambio como el cociente entre los diferenciales. De allí se pudo llegar a establecer la expresión que propone el Teorema Fundamental de Cálculo en términos de una sumatoria, que al resolverla hay que aplicar también un límite, entonces en vez de hablar de los incrementos en la variable independiente, se expresa como un diferencial en la variable de interés, de la siguiente forma:

$$M(x) = M(a) + \int_a^x r(x)dx$$

Donde  $x$  será un valor cualquiera,  $m(a)$  es la condición inicial y la sumatoria se convierte en la integral definida, al cual no hay que aplicar el límite, lo que hace que se establezca una igualdad entre estas dos expresiones de forma concreta, haciéndose el mismo análisis previamente realizado en esta sesión acerca del Teorema Fundamental de Cálculo donde se establece una estrecha relación entre la función de interés y su razón de cambio como procesos inversos uno del otro.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Por último, para cerrar esta sesión, una de las principales conclusiones que se pueden deducir es el hecho de haber deducido un Teorema tan importante y poco comprendido –en muchos casos- por los profesores como lo es el Teorema Fundamental de Cálculo; concluir que la derivada y la antiderivada son procesos recíprocos uno del otro por medio del análisis gráfico más que procedimientos, hizo que la matemática misma tomara un valor más serio en su misma comprensión y enseñanza por parte de los profesores.

Otra de las conclusiones fue el hecho de poder establecer una expresión general para hallar la función de interés dada su razón de cambio, por medio de la solución de situaciones problema con las funciones polinómicas, que aunque se había trabajado ya en la anterior sesión, finalmente se concretizó en esta. Así, se definió formalmente el concepto de derivada como una razón de cambio instantánea utilizando la noción de límite, a partir de situaciones problemas.

Con respecto al avance de los profesores, el mismo hecho de reconstruir estos conceptos matemáticos, que muy seguramente trabajaron en la universidad en sus cursos de cálculo, hizo que tomaran un sentido algo diferente al que tenían acerca del concepto de derivada y su verdadera relación con la antiderivada, incluso su concepción de la misma matemática debió reevaluarse, el hecho de enseñar y ver uno temas de la matemática de forma tradicional o estática, hace que la percepción acerca de ella deje de ser dinámica y con el sentido y la utilidad de la misma en la vida diaria; los profesores manifestaron darse cuenta de nuevo que la matemática nace de estudiar la realidad y no de procedimientos rudimentarios que la hacen hasta desmotivante.

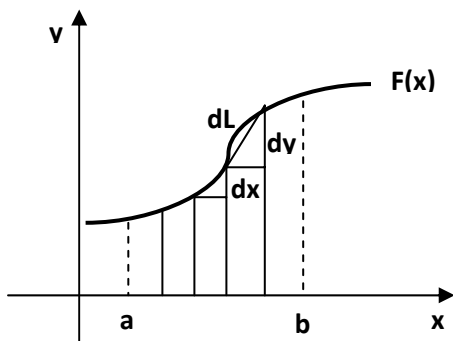
## 3.3 EVALUACIÓN DEL PROCESO

### DE RECONSTRUCCIÓN DE LOS PARTICIPANTES

Para examinar la concepción de derivada en los profesores investigados una vez finalizado el curso, el profesor director del curso les realizó una prueba de forma oral que se describirá a continuación para cada uno de los profesores, con el fin de analizar la evolución en la concepción de derivada y darle cumplimiento al objetivo principal de esta investigación. A continuación se describe la prueba hecha para cada profesor y después se harán las conclusiones según los resultados obtenidos.

#### PROFESOR A

El director del curso le pide hallar una expresión general para encontrar la longitud de una curva en un intervalo cualquiera, profesor hace el siguiente planteamiento:



Toma diferenciales tanto en  $x$  como en  $y$  y escribe por Pitágoras que:

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$dL = \sqrt{dx^2 \left( 1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right)}$$

Como  $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  reemplazó en la anterior expresión y tuvo que:

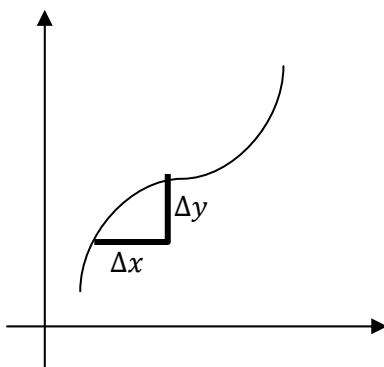
$$dL = \sqrt{dx^2(1 + (f'(x))^2)}$$

Como se pretende hallar la longitud de la curva desde  $a$  hasta  $b$ , debe sumar todos esos diferenciales, que se expresa como:

$$\int_a^b dL = \int_a^b dx \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

- ¿Qué es la derivada?, pregunta el profesor director del curso.
- Es la razón de cambio instantánea en un punto de esa curva.
- ¿Qué quiere decir eso?
- Eso nos da un indicio de cómo está variando esa magnitud; bueno, y lo instantáneo es ver justo en ese instante cómo es la variación.
- Defina la derivada en un punto.
- Bueno, la derivada en un punto estaría dada por:  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$
- Pero, ¿qué significa  $\frac{dy}{dx}$ ?
- Es la pendiente de la recta que pasa por un punto en la curva.
- Pero no la ha definido; yo con eso no puedo calcular la derivada en un punto específico porque  $\frac{dy}{dx}$  no me dice nada. Es solo una notación que se hace valiosa para resolver el problema que usted hizo ahora, pero en sí eso no me sirve para hallar la derivada de nadie. Si la derivada es una razón de cambio instantánea, ¿usted cómo expresa una razón de cambio?
- No le entiendo profesor porque el cociente de diferenciales es lo que llamamos la derivada.
- Sí, pero la primera noción que se hace para llegar a la definición de derivada no es con diferenciales sino con incrementos.
- Ah, si profesor; lo que pasa es que el cociente de diferenciales finalmente es el límite del cociente de los incrementos así:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$
- Esa es la derivada, pero ¿Qué significa eso geoméricamente?
- Bueno lo que quiere decir es que se pretende encontrar la razón de cambio en un punto  $x$  y se hace con el límite cuando delta de  $x$  tiende a cero así:



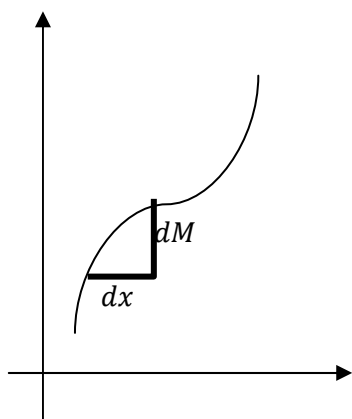
## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

–¿Qué diferencia hay entre incrementos y diferenciales?

–Pues eso es muy similar pero, hablamos del cociente de los diferenciales como el límite del cociente de los incrementos.

–¿Cuál es el teorema fundamental del cálculo?

–Bueno, el teorema fundamental del cálculo nos dice que cuando yo tengo acá una magnitud, y tengo un diferencial de esa magnitud, entonces tenemos que la razón de cambio por esa  $dx$  es igual al diferencial de esa magnitud; entonces la sumatoria de esos diferenciales va a ser igual a la sumatoria de esas razones de cambio por ese diferencial.



$$r(x)dx = dM$$
$$M = \int dM = \int r(x)dx$$

–Bueno, pero en palabras, el Teorema Fundamental del cálculo ¿qué es lo que dice?

–Que el cambio de magnitud es el área bajo la curva; es decir, mejor dicho, en palabras concretas, se dice que la derivada es la inversa de la antiderivada, pero realmente me confundo todavía para hacer la reconstrucción del proceso.

–Si usted tiene una razón de cambio ¿puede hallar la función de interés?

– Ah, no, con la sola razón de cambio no se puede, porque hay una familia de funciones que tienen la misma razón de cambio, entonces para descubrir cual de esas es, toca tener una condición inicial.

## PROFESOR B

–¿Qué tipo de problemas se pueden solucionar por medio del cálculo?, pregunta el profesor director.

–Bueno los tipos de problemas que se pueden solucionar por medio del cálculo y que hemos visto vienen a ser por ejemplo la velocidad instantánea, la caída libre, subida de los cuerpos, tenemos también la masa de una varilla metálica, lo del temperatura.

–Bueno si, usted puede citarme infinitos ejemplos, pero ¿para qué situaciones me sirve el cálculo?

–Bueno profesor para resolver problemas con razones de cambio.

–¿Cómo cuales?

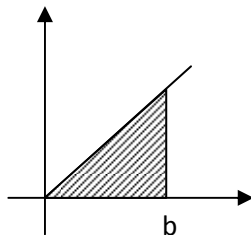
–Por ejemplo si yo quiero hallar la derivada de la función  $f(x) = x^2 + x + 3$ , entonces aplico la definición de derivada que es  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  y deduzco cuál es la derivada de la función.

El profesor mostró no estar preparado para la prueba y tener bastantes dificultades en la comprensión del concepto así como de su utilidad en la vida diaria. En esta prueba, el profesor manifestó grandes vacíos todavía en el concepto y la dificultad para no pensar de forma procedimental al realizar problemas de matemática.

Para poder hacerle otra valoración se le pidió al profesor prepararse para un examen escrito, acerca de todo lo visto en el curso. En el anexo 5 puede encontrar el examen planteado para el profesor. En este, los resultados no fueron los mejores, el profesor mostró seguir teniendo grandes dificultades en el análisis de gráficas, en la interpretación del Teorema Fundamental del cálculo, en el mismo concepto de derivada y en la resolución de problemas. En el siguiente capítulo se hará una descripción de estas dificultades de forma más concisa.



## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS



Se sabe que cuando se quiere llegar a la función de interés y se tiene la función derivada, entonces se halla el área bajo esa curva que viene a ser un triángulo para este caso, eso sería utilizando la fórmula para hallar el área del triángulo sabiendo que la base es  $x$  y la altura  $r(x)$  que es la razón de cambio. Entonces como nos deben dar un valor inicial para poder hallar la función de interés exacta, y al sumar eso queda así:

$$M(b) = M(a) + \sum_{i=1}^n xr(x)$$

6. Para usted, ¿qué importancia tiene la enseñanza de la matemática en la secundaria, especialmente el concepto de derivada?

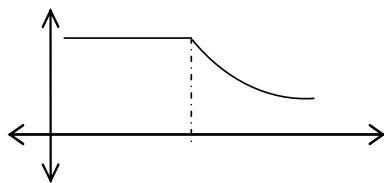
R/. Bueno profe, la idea de enseñar la matemática es porque primero es una ciencia básica y necesaria para resolver problemas, mejor dicho, ella facilita los procesos de solución a problemas que se presenten no solo los que se ponen en el salón sino también los problemas de la vida cotidiana. Y enseñar el concepto de derivada, aunque los estudiantes muchas veces no tienen las bases, les sirve para aprender a pensar, y facilita la solución de problemas reales que tengan variación como lo vimos en el desarrollo del curso.

### PROFESOR D

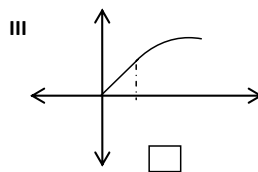
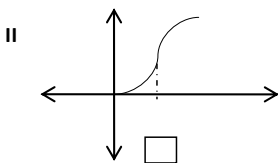
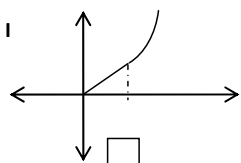
Durante la sesión el profesor D mostró no estar preparado para presentar la prueba, así que se hace el análisis del profesor basado en una prueba escrita tal como la que se le realizó al profesor B (ver anexo 5).

RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Dado el gráfico de la derivada de una función:



Determine el gráfico que corresponde a la función:



El profesor escogió la gráfica III.

En los dos siguientes puntos el profesor no respondió. Para el punto 4 de falso y verdadero, el profesor manifestó que la derivada es la razón de cambio, pero no tomó en cuenta lo instantáneo. En los literales c), e) y f) el profesor respondió correctamente y su justificación comprueba el buen análisis que hizo para llegar a ella. En esta prueba se puede observar que el profesor D tiene un buen manejo de análisis gráfico al analizar el comportamiento de una función de interés dada su razón de cambio.

### **3.4 CARACTERIZANDO LA TRANSFORMACIÓN DEL CONCEPTO DESPUÉS DEL PROCESO DE RECONSTRUCCIÓN CONCEPTUAL**

Aquí pretendo presentar el análisis de la reconstrucción del concepto de derivada de los cuatro profesores investigados, estableciendo, además, un paralelo entre los conceptos con cuales comenzaron el curso de cálculo y el concepto que se percibió en la última prueba. Esto con el fin de caracterizar la transformación del concepto de derivada en los profesores. Veamos:

#### **PROFESOR A**

Al comenzar la investigación, el profesor fue catalogado en un nivel de comprensión de derivada inter pero en una etapa avanzada al intuir su facilidad para plantear de forma clara soluciones a situaciones problema que implicaban variación, además de concluir que el profesor comenzaba con algunas inconsistencias en el concepto de derivada.

En el transcurso de las cuatro sesiones que se desarrollaron en el seminario, el profesor manifestó, en un principio, no tener conocimiento del análisis gráfico de la función de interés dada su razón de cambio; no manejaba un análisis intuitivo de los problemas planteados –tal y como se trabajó en el curso- para realizar la gráfica de una función de interés una vez conocida la gráfica de su razón de cambio y viceversa. Sin embargo, en el transcurso de las sesiones el profesor mostró llegar a tener un manejo más claro en la graficación de funciones, y una vez conocida la gráfica de función de interés, deducir la de su razón de cambio.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

En lo que se refiere a la comprensión del concepto de derivada, el profesor mostró tener una idea más clara, conoce la definición formal de derivada y la sabe expresar en palabras concretas; aunque tiende a confundirse un poco en su razonamiento geométrico, el profesor mostró claramente un avance en la definición de concepto.

En su comprensión acerca del Teorema fundamental del Cálculo, el profesor manifestó con palabras concretas en qué consiste el Teorema, pero no fue capaz de probarlo geoméricamente, lo que muestra que aun tiene dificultades en el entendimiento de este.

En forma general, el profesor mostró durante el curso tener un avance en su concepción acerca de la derivada, que era la finalidad de esta investigación-, aunque el espacio dedicado para la reconstrucción del concepto fue poca, solo cuatro sesiones de 8 horas aproximadamente, el profesor mostró aprender algo más sobre el concepto de derivada, partiendo desde su mismo análisis en la búsqueda de soluciones a situaciones planteadas.

Al culminar el seminario, el profesor ha mostrado tener una mejor comprensión del concepto de derivada, y esto mismo lo lleva a ser catalogado en el esquema de comprensión del concepto de derivada en un nivel inter; sus inconsistencias en el concepto como tal han sido corregidas, sin embargo pueden existir todavía vacíos en la comprensión geométrica y en la relación que establece entre los incrementos y los diferenciales. En la resolución de problemas, el profesor manifestó con el análisis realizado en la prueba final, tener un gran avance en el planteamiento de la solución de problemas, y eso implica que su comprensión de derivada ha sido mejor formada.

## PROFESOR B

Al comienzo de la investigación el profesor fue catalogado en un nivel intra básico, mostrando tener inconsistencias en el concepto de derivada, dificultades en el concepto mismo y en la relación gráfica entre una función de interés y su razón de cambio.

En el desarrollo del curso, el profesor mostró realmente tener dificultades al realizar análisis intuitivos en el planteamiento de las diferentes situaciones para analizar gráficas de razones de cambio y de funciones de interés. Esto, puede ser debido a que el profesor, a pesar de sus años de experiencia, ha concebido la matemática como una ciencia procedimental, estática y reglamentaria –que todo problema se soluciona con alguna regla-, y en un curso –de corto tiempo de duración- realmente era difícil que pudiera cambiar radicalmente su forma de pensar matemáticamente. Sin embargo, en algunas entrevistas informales realizadas, el profesor manifiesta lo interesante que es ver y enseñar la matemática a partir de la resolución de problemas, aunque por falta de tiempo no se pudo dedicar al estudio el espacio necesario.

Con relación al concepto de derivada, el profesor expresa en palabras concretas a la derivada como la razón de cambio instantánea, pero su interpretación geométrica no la maneja, parece que aun lo asimila con aquel concepto que sirve para calcular derivadas.

Siendo algo críticos en el abordaje que se le dio al curso, es claro, que no era un curso apto para todos los conocimientos previos con los que llegaron los profesores, ya que en sí, el curso abordado desde la resolución de problemas implica que el profesor sea algo reflexivo e intuitivo en su análisis, que sea abierto en la proposición de ideas para resolverlos, pero que también maneje conceptos matemáticos previos para resolver problemas.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

Concluyendo el análisis con el profesor B, su concepción acerca de la derivada sigue teniendo inconsistencias, aunque ahora ya vea que no es lo procedimental que ha trabajado, la reconstrucción de su concepto necesita mucho más tiempo que 32 horas aproximadamente y un tiempo más de estudio personal.

En el esquema de comprensión del concepto de derivada, el profesor sigue en el nivel intra aunque con algo más de conocimiento, así que es intra-medio.

### **PROFESOR C**

Cuando se dio inicio al curso, y con él a la investigación, el profesor C en la prueba diagnóstica que presentó mostró tener buenas concepciones acerca de la derivada, su manejo formal del concepto en la primera prueba, y algo de manejo en el modelamiento matemático de situaciones problemas.

En el desarrollo del curso, el profesor fue de los que más se mostró por sus aportes en el desarrollo de los problemas que se planteaban. Las conclusiones de una de las sesiones fueron expuestas por él y en ella mostró tener una concepción buena acerca de la derivada.

Dentro del curso, el profesor manifestó en un principio no hacer el análisis intuitivo a los problemas y en un comienzo, tuvo algunas dificultades con la interpretación y bosquejo de gráficas de funciones, dada la de su razón de cambio y viceversa. Pero en el transcurso de las clases, el proceso mostró un gran avance y comprensión del análisis gráfico.

En la comprensión del Teorema Fundamental de cálculo, el profesor mostró buen entendimiento de este, pues no solo lo expresó en términos sencillos, sino que también logró hacer un gráfico que explicara a la derivada y la antiderivada como procesos inversos. Aunque su proceso de demostración gráfica no fue preciso del todo, sí manifestó tener una idea más amplia acerca de este Teorema.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

En forma general, el profesor mostró avanzar más en el dominio del concepto y en la comprensión del mismo; tiene una comprensión del concepto mucho más amplia y enriquecedora, y en la clasificación el profesor se puede catalogar en un nivel trans en el esquema de comprensión del concepto.

El profesor C es uno de los profesores que mostró que un curso abordado desde la resolución de problemas, teniendo en cuenta las bases con las que comenzó, la concepción de derivada se puede fundamentar mucho más, dando a intuir que las clases abordadas desde el planteamiento y resolución de problemas puede provocar en el estudiante una comprensión mas precisa del concepto.

### **PROFESOR D**

En la prueba diagnóstica realizada para el profesor D, mostró tener algunos vacíos en el concepto de derivada y se catalogó en un nivel de comprensión del concepto de derivada intra medio, ya que aunque si manejaba la idea de la variabilidad en los problemas que se planteaban, su concepción formal y análisis gráfico no mostraban tener comprensión.

Durante el desarrollo del curso, el profesor mostró tener un avance en el análisis de gráficas, en una de las sesiones, el profesor realizó un análisis coherente acerca de los puntos de inflexión como máximos o mínimos de la función derivada, partir de discusiones generadas alrededor del tema en el curso. También mostró en la prueba final –la escrita- una comprensión del comportamiento gráfico de la razón de cambio de una función dada la gráfica de la magnitud de interés.

Con respecto al desarrollo de situaciones problema utilizando la derivada o la antiderivada, el profesor muestra tener algunas incoherencias en el uso de ellas. Aunque su avance en la solución de problemas ha sido bueno, su manejo total de situaciones que representen la variabilidad aun presenta dificultades.

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

Con la concepción de derivada, el profesor mostró un avance, bueno al concebir la derivada desde su formalidad; ya que en un principio, el profesor no manejaba la definición de derivada, aun enseñando el concepto, pero en las pruebas finales, el profesor manifestó tener una idea de concepto un poco más formal.

A manera de conclusión, el profesor D mostró tener un avance en la comprensión del concepto aunque no mostró superar las inconsistencias en el concepto, sí mostró un avance en la comprensión del concepto, lo que hizo que sus vacíos hayan menguado un poco. En un principio el profesor se clasificó en el nivel intra medio, y al finalizar el curso el profesor, dentro de este mismo nivel, mostró tener una mejor comprensión de análisis gráficos y del concepto mismo de derivada, lo que lleva a catalogarse finalmente en un nivel intra avanzado.

A continuación se muestra en una tabla la clasificación antes del curso y después de este para cada uno de los profesores investigados.

PROFESOR	ANTES DEL CURSO		DESPUÉS DEL CURSO	
	CLASIFICACIÓN	COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO	CLASIFICACIÓN	COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO
<b>A</b>	Intra avanzado	Con inconsistencias	inter	Buena concepción
<b>B</b>	Intra básico	Con inconsistencias	Intra medio	Con inconsistencias
<b>C</b>	Inter	Buena concepción	trans	Buena concepción
<b>D</b>	Intra medio	Con inconsistencias	Intra avanzado	Algunas inconsistencias

# Conclusiones

Como culminación a la investigación, hago mención de las conclusiones más relevantes en el estudio:

Como culminación a la investigación, hago mención de las conclusiones más relevantes en el estudio:

- Abordar un curso desde el planteamiento y resolución de problemas permitió de manera significativa un avance en la concepción de derivada en profesores de matemáticas. Aquí es relevante darse cuenta que el trabajo en el aula de clase que se realizó a través de las situaciones problemas, implicó, por supuesto, una labor delicada de planeación por parte del maestro y un proceso de seguimiento muy detallado del trabajo de los alumnos, con el fin de lograr un mejor apoyo al trabajo realizado por éstos.
- La enseñanza de la matemática a partir de conocimiento teóricos y luego su aplicación, ha sido de las cosas ampliamente criticadas en los últimos años. Ahora, el enseñar a partir de problemas para llegar a generalizaciones importantes a través de la socializaciones hechas en clase, mostró que una de las vías para la verdadera comprensión de la matemática en los estudiantes puede ser la preparación de clases a partir de situaciones problema; esto, implica claramente un compromiso del docente con su labor, en su compromiso en el aula y con el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

## RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

- La enseñanza de la derivada por medio de la resolución de problemas, provocó en el estudiante-profesor en un comienzo, un desequilibrio al darse cuenta que lo que “conocía” por derivada estaba desvirtuado del verdadero proceso que esta implícitamente trae. En un comienzo del escrito se hizo un análisis acerca de la forma evolutiva como los conocimientos matemáticos van surgiendo, que no fue de forma rigurosa ni inmediata, sino que, se dio a través del planteamiento de situaciones problema que en la historia se hacían relevantes. Y se enfatizó en lo necesario que es hacer ver la matemática de esta manera, no una matemática estática y muchas veces sin sentido, sino una matemática que esté llena de dinamismo, que surja a través de la búsqueda de soluciones a los problemas que se plantean y no como mecanismo aprendido teóricamente para darle solución a ellos.
- Este curso hecho para los profesores de matemáticas en ejercicio, ha dejado muestra de la necesidad de que en las universidades formadoras de docentes de matemáticas se enseñen los conceptos a partir de la resolución de problemas, que sean los mismos profesores en formación o aun los ya formados los que reconstruyan el concepto matemático. De esta manera, es posible que la misma enseñanza de la matemática tome un cambio relevante; durante muchos años los investigadores se preocuparon por la forma de buscar estrategias para enseñar la matemática en los salones de clase, pero solo hasta hace poco se ha tomado en cuenta de la importancia que tiene la concepción de matemática que tiene el profesor que la enseña, y lo influyente que puede ser en el aprendizaje del estudiante. Así que el enseñar matemáticas a los profesores en formación produce en el mismo aula una forma didáctica de enseñarla y le permite al profesor concebir la matemática de una forma dinámica y evolutiva, mas no estática y procedimental.

# Referencias

BACHELARD G. (1985). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. Décimo tercera edición. Buenos Aires: Siglo XXI.

BADILLO C. (1999). *Estudio del conocimiento profesional de profesores de secundaria en Colombia: el caso de la relación entre derivada y velocidad*. Tesis de maestría. España: Universidad Autónoma de Barcelona.

BADILLO C. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática*. Tesis doctoral. España: Universidad Autónoma de Barcelona.

COONEY T. J. (1994). "Research and teacher education". In: "Search of common ground". *Journal of research in mathematics education*. Vol. 25.

DUBISNKY E. (1996). "Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria". *Educación Matemática*. Vol 8.

GARBIN S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16 – 17 años*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

GÓMEZ P. (2001). *El conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo de matemáticas*. Congreso Nacional de Didácticas Específicas. Las Didácticas de las Áreas Curriculares en el Siglo XXI. Granada: Grupo Editorial Universitario.

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

LLINARES S. (1998). "Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación". *UNO*, vol 17.

SIERRA M. y ORTEGA T. (1998). "Didáctica de las Matemáticas para los profesores de Educación Secundaria". *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, Nº 32, pags. 87-115. Recuperado el 13 de marzo de 2008 de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=117981>

OBANDO G. y MÚNERA J. J. (2003). "Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática". *Revista educación y pedagogía*, Vol. XV, No. 35, pp. 1-17 (enero-abril). Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación.

ORTEGA L., GUZMÁN I., MENA A. (2002). *¿Cómo enseñan la derivada los profesores de cálculo, en la universidad?* Chile: Universidad Tecnológica Metropolitana de Chile. Recuperado el 13 de marzo de 2008 de <http://www.asi4.uji.es/actas/p2a7.pdf>

PINZÓN W., GORDILLO W. *Algunas dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada*. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana  
Recuperado el 3 mayo de 2008 de <http://www.javeriana.edu.co/Facultades/Ciencias/fnovoaa/ponencias%20web/comunicaciones%20cortas/wilson%20pinzon.pdf>

SALINAS P., ALANÍS J., PULIDO R., SANTOS F., et al. (2002). *Elementos Del Cálculo: Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza*. México: Editorial Trillas.

SANTOS T. (1996). *Hacia una caracterización de la educación matemática y de la investigación*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

SHULMAN L. S. (1986). Those who undertand. Knowledge growth in teaching.  
*Educational researcher. Vol 15*

SIMÓN. (1995). "Reconstruyendo la sicología matemática desde una perspectiva constructivista". *Journal of research in mathematics education. Vol 26.*

ANEXOS

# ANEXO 1

## CUESTIONARIO ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA Y DE LA MATEMÁTICA EN GENERAL

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_

<b>PREGUNTAS</b>	<b>si</b>	<b>no</b>	<b>av</b>
Soy paciente y sensible a las preocupaciones de los estudiantes.			
Procuro que los estudiantes terminen el año con buenos apuntes			
Me interesa saber qué y cómo aprenden los estudiantes			
Me gusta ser el protagonista de la clase			
Me preocupa cómo pudo ayudar a entender a los estudiantes			
Me preocupa que los estudiantes no adquieran los principales conceptos de la asignatura.			
Hago todo lo posible para poder abordar todos los temas en el año.			
Analizo el punto de partida de los estudiantes.			
Siempre me baso en los libros para preparar mis clases.			
Planifico la clase sobre la base de mi conocimiento, de mis intereses, mis suposiciones, y de lo que creo que conviene a los estudiantes.			
Planifico la asignatura pensando que mis estudiantes tienen pocos conocimientos de los temas.			
Trabajo diferentes metodologías para poder llegar a todos los estudiantes aunque eso implique no terminar con el temario.			
La evaluación se basa en conocer si han aprendido a comprendió los temas explicados.			
Me interesa que el estudiante comprenda el concepto de derivada más que las reglas de derivación.			
Me parece más interesante que los estudiantes aprendan a derivar sin aplicaciones.			
Domino el concepto de derivada.			
Tengo estrategias para enseñar el concepto de derivada.			
Me interesa buscar todas las estrategias posibles para enseñar derivada.			
Planeo las clases con anticipación.			

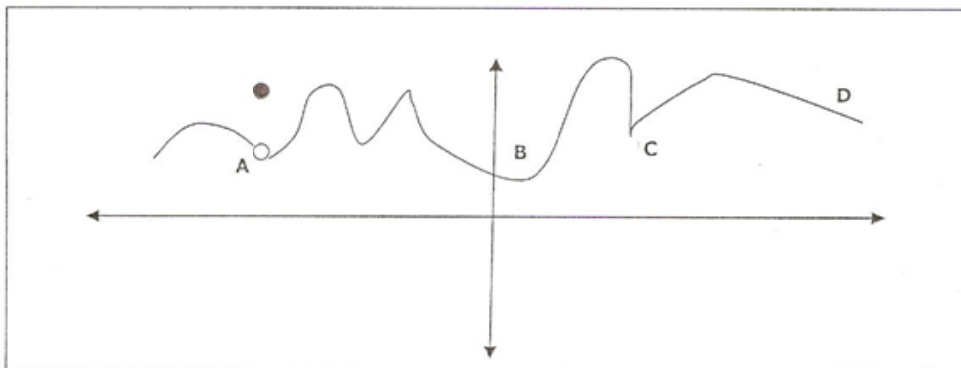
## ANEXO 2

### CONCEPCIONES SOBRE DERIVADA

Nombre: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

De ante mano le agradezco por su colaboración en la realización de este proyecto de investigación acerca de: *Concepción de derivada en los docentes de matemáticas*. Espero que estas preguntas sean contestadas de forma honesta; si llegado el caso no sabe de algún punto específico, puede dejar el punto vacío, explicando su desconocimiento. Recuerde que esta prueba también es una oportunidad para re-evaluar nuestros conocimientos.

1. Para usted, ¿qué es la derivada? Explíquelo ya sea por un ejemplo o como lo desee.
2. En la vida diaria, ¿qué ejemplos retoma para comprender y hacer comprender al estudiante el concepto de derivada?
3. ¿Qué conceptos debe tener un estudiante para que pueda comprender el concepto de derivada?
4. Dada la gráfica siguiente, y partiendo de lo que usted sabe sobre derivada, enuncie cuáles puntos son diferenciables y cuáles no. Explique por qué.



5. analice la siguiente definición de límite encontrada en un libro de Cálculo, luego especifique cómo comenzaría una clase con el tema de derivada.

#### DEFINICIÓN

La derivada de una función  $f$  es otra función  $f'$  (léase  $f$  prima) cuyo valor para un número cualquiera  $c$  es:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Una vez que dicho límite exista.

# ANEXO 3

Fundamentación Matemática IV: Cálculo  
Especialización en Educación Matemática  
Profesor: Gabriel Yáñez Canal  
Marzo 7 de 2008

Nombre \_\_\_\_\_

Resuelva los siguientes problemas de forma libre, no intente recordar procedimientos que alguna vez estudió, simplemente haga las cosas tal y como crea deben hacerse. Justifique plenamente todos sus razonamientos.

**Problema 1: La modelización matemática de la realidad.**

(Cálculo de una variable, James Stewart, 2001, p. 27). En la tabla 1 se lista el nivel promedio de dióxido de carbono en la atmósfera, medido en partes por millón en el observatorio de Mauna Loa, desde 1972 hasta 1990. Se trata de hallar un modelo matemático que permita estimar la cantidad de dióxido de carbono que pudo haber en 1987 y predecir el que puede haber en el año 2005. De otro lado, ¿cuándo excederá de 400 partes por millón el nivel de  $CO_2$ .

Año	$CO_2$ nivel(en ppm)
1972	327.3
1974	330
1976	332
1978	335.3
1980	338.5
1982	341
1984	344.3
1986	347
1988	351.3
1990	354

**Problema 2: El problema de optimización en números reales**

Una línea de fibra óptica debe tenderse entre dos pueblos situados en orillas opuestas de un río en puntos A y B (Ver figura). El ancho del río es un kilómetro y B está situado a dos kilómetros río abajo de A. El costo del tendido de la red en tierra es de  $c$  pesos por kilómetro y de  $2c$  por kilómetro cuando se realiza bajo el agua. Se pregunta por la forma más económica de tender la fibra óptica.

**Problema 3: Un problema antiguo.**

Leonardo de Pisa, Fibonacci, *Liber Abaci* (1202)

- Dos torres, cuyas alturas son 30 pasos y 40 pasos, están a una distancia de 50 pasos. Entre las dos torres hay una fuente a la cual dos pájaros volando, en el mismo momento, desde las dos torres y a la misma velocidad llegarán al mismo tiempo. ¿A qué distancia se encuentra la fuente de las dos torres?

# ANEXO 4

## Problema 1:

Un automóvil transita por una carretera recta a una velocidad constante de 40 metros por segundo. Se trata de calcular la posición del automóvil en cualquier momento, respecto a cualquier lugar que se toma como referencia. Es decir, se trata de saber la distancia que el automóvil ha recorrido después de que ha hecho cierto tiempo.

## Problema 2:

Dé una expresión que permita calcular la distancia recorrida del carro, si se empieza a tomar el tiempo en un punto situado a 30 metros a la derecha de un punto de referencia O respecto al cual calculamos la distancia recorrida.



## Problema 3:

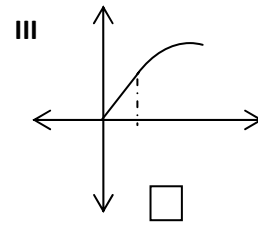
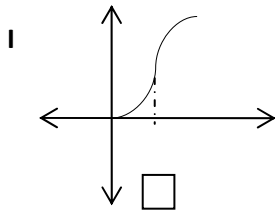
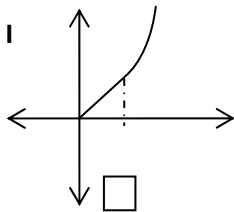
Analice el problema desde el punto de vista de la meta. Es decir, las distancias se toman ahora, respecto a un punto B que se encuentra a la derecha a  $d$  metros del lugar donde se empieza a contar el tiempo. ¿Cómo se expresa ahora la distancia en función del tiempo transcurrido?



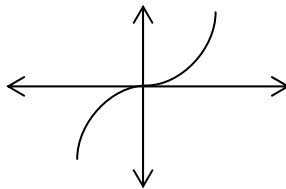
# ANEXO 5

1. Dado el gráfico de la derivada de una función:

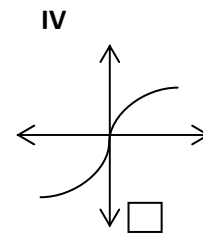
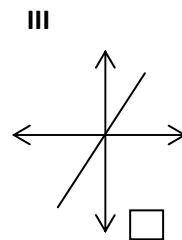
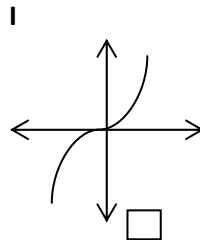
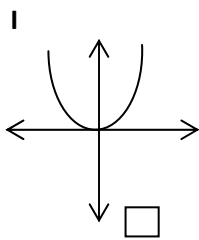
Determine la función que corresponde entre los gráficos de las funciones representadas a continuación:



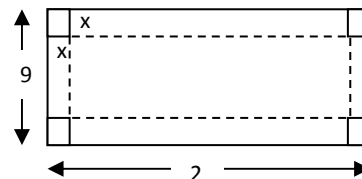
2. Dado el gráfico de una función:



Determine la función derivada que le corresponde entre los gráficos de las funciones representadas a continuación:



3. Se desea construir una caja rectangular con una pieza de cartulina de 24 cm de largo y 9 cm de ancho, cortando cuadrados idénticos en las cuatro esquinas y doblando los lados; encuentre las dimensiones de la caja de máximo volumen. ¿cuál es ese volumen?



**RECONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA  
EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS**

4. Responda falso o verdadero y justifique cada una de ellas:

- a) La derivada se puede entender como una razón de cambio.
- b) El teorema fundamental de cálculo afirma que la derivada es el límite del cociente entre los incrementos, es decir, que  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- c) Si en una función  $f(x)$  hay un valor máximo o un valor mínimo, entonces la derivada en ese punto máximo o mínimo debe ser cero.
- d) Un diferencial se puede tomar como un valor muy pequeño que se acerca a cero pero no puede ser cero.
- e) Cuando la función derivada es decreciente y positiva, entonces la función primitiva debe ser creciente y cóncava hacia abajo.
- f) Cuando la gráfica de una función es negativa y decrece constantemente, entonces, la gráfica de la derivada de la función es constante y además negativa.